龍騰文化

114 學年度分科測驗全真模擬試卷

數學乙考科　解答卷

■答案

第壹部分：

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10-1	10-2	10-3	11-1	11-2
5	3	2	1	1	12	123	345	125	5	9	0	0	1
11-3	12-1	12-2											
0	1	7											

第貳部分：

13-1	13-2	13-3	13-4	14.	15.	16-1	16-2	16-3	17.	18.
1	3	2	5	$\alpha=\frac{3}{5}$，$\beta=-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$	1	0	0	見解析	1120 元

■解析

1. 由方程式，得 $a-2^x=\left(\frac{1}{2}\right)^{2+x}=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2^x}\Rightarrow a=2^x+\frac{1}{4\times2^x}$ 。

   利用算幾不等式，得 $2^x+\frac{1}{4\times2^x}\geq2\sqrt{2^x\times\frac{1}{4\times2^x}}=1$，

   即 $a\geq1$。在 5 個選項中，只有 $\sqrt[3]{3}$ 的值大於 1，

   故選(5)。

2. 令 $f(x)=x^{13}+ax+13$，

   由餘式定理可得 $f(-1)=-1-a+13=5$，所以 $a=7$ 。

   故選(3)。

3. 依題意，得 $A_n=A_{n-1}+\begin{bmatrix}3&2\\1&1\end{bmatrix}=A_{n-2}+2\begin{bmatrix}3&2\\1&1\end{bmatrix}$

   $=A_1+(n-1)\begin{bmatrix}3&2\\1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3n-10&2n-9\\n+16&n+4\end{bmatrix}$，

   令 $\det(A_n)=\begin{vmatrix}3n-10&2n-9\\n+16&n+4\end{vmatrix}=0$

   $\Rightarrow(3n-10)(n+4)-(n+16)(2n-9)=0$

   $\Rightarrow n^2-21n+104=0\Rightarrow(n-8)(n-13)=0\Rightarrow n=8$，13，

   即 A_8 及 A_{13} 沒有反方陣。故選(2)。

4. (1) 因為 $5\overrightarrow{u}=(60,25)$，

   所以 $\left|5\overrightarrow{u}\right|=\sqrt{60^2+25^2}=\sqrt{4225}$ 。

   (2) 因為 $-3\overrightarrow{v}=(12,-9)$，

   所以 $\left|-3\overrightarrow{v}\right|=\sqrt{12^2+(-9)^2}=\sqrt{225}$ 。

   (3) 因為 $2\overrightarrow{u}+5\overrightarrow{v}=(4,25)$，

   所以 $\left|2\overrightarrow{u}+5\overrightarrow{v}\right|=\sqrt{4^2+25^2}=\sqrt{641}$ 。

   (4) 因為 $4\overrightarrow{u}+5\overrightarrow{v}=(28,35)$，

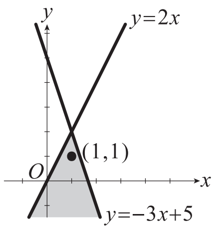
   所以 $\left|4\overrightarrow{u}+5\overrightarrow{v}\right|=\sqrt{28^2+35^2}=\sqrt{2009}$ 。

   (5) 因為 $\overrightarrow{u}+6\overrightarrow{v}=(-12,23)$，

   所以 $\left|\overrightarrow{u}+6\overrightarrow{v}\right|=\sqrt{(-12)^2+23^2}=\sqrt{673}$ 。

   故選(1)。

5. 由圖得知，點$(1,1)$所在的區域為聯立不等式$\begin{cases} y \le -3x+5 \\ y \le 2x \end{cases}$的解，



而且選項中的 5 個點只有點$(20,-56)$滿足此聯立不等式。

故選(1)。

6. (1) 因為$\triangle OA_1B_1$與$\triangle OA_2B_2$相似，

所以其面積比為$\dfrac{R}{S+R}=\left(\dfrac{a_1}{a_2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$，

得$4R=S+R \Rightarrow S=3R$。

(2) 因為$\triangle OA_{100}B_{100}$與$\triangle OA_{101}B_{101}$相似，

所以其面積比為

$\left(\dfrac{a_{100}}{a_{101}}\right)^2=\dfrac{R+99S}{R+100S}=\dfrac{R+99\times 3R}{R+100\times 3R}=\dfrac{298}{301}$。

(3) 因為$\triangle OA_1B_1$與$\triangle OA_nB_n$相似，所以其面積比為

$\left(\dfrac{a_1}{a_n}\right)^2=\dfrac{R}{R+(n-1)S}=\dfrac{R}{R+(n-1)\times 3R}=\dfrac{1}{3n-2}$。

(4) 因為$a_1=1$，所以由(3)，

得$\left(\dfrac{1}{a_n}\right)^2=\dfrac{1}{3n-2} \Rightarrow a_n=\sqrt{3n-2}$，

因此，$\langle a_n \rangle$不是等比數列。

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{3n-2}}{\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{3-\dfrac{2}{n}}=\sqrt{3}$。

故選(1)(2)。

7. (1) 因為圖 2 比圖 1 增加 5 個頂點及 4 個邊上的 1 個點，

所以$a_2=a_1+5+4\times 1=6+9=15$；

因為圖 3 比圖 2 增加 5 個頂點及 4 個邊上的 2 個點，

所以$a_3=a_2+5+4\times 2=15+13=28$。依此類推，

得$a_4=a_3+5+4\times 3=28+17=45$；

$a_5=a_4+5+4\times 4=45+21=66$為 11 的倍數。

(2) 由(1)的規律可推得

$a_n=a_{n-1}+5+4(n-1)=a_{n-1}+4n+1$，其中$n\ge 2$。

因此，$a_n-a_{n-1}=4n+1$為奇數。

(3) 由(2)，得$a_2-a_1=4\times 2+1$

$a_3-a_2=4\times 3+1$

$\vdots$

$a_n-a_{n-1}=4\times n+1$

各式相加，得

$a_n-a_1=4(2+3+\cdots+n)+1\times(n-1)$

$=4\times\dfrac{(n-1)(2+n)}{2}+n-1=2n^2+3n-5$，

又因為$a_1=6$，所以$a_n=2n^2+3n+1$。

又因為$2n^2+3n+1=(n+1)(2n+1)$，

所以$n+1$是a_n的因式。

(4) $a_1+a_2+\cdots+a_{20}=\sum\limits_{n=1}^{20}(2n^2+3n+1)$

$=2\sum\limits_{n=1}^{20}n^2+3\sum\limits_{n=1}^{20}n+\sum\limits_{n=1}^{20}1$

$=2\times\dfrac{20\times 21\times 41}{6}+3\times\dfrac{20\times 21}{2}+20$

$=6390<6400$。

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+3n+1}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\dfrac{3}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)=2$。

故選(1)(2)(3)。

8. (1) $T^2=\begin{bmatrix}2&-1\\3&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&-1\\3&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1\\3&-2\end{bmatrix}$。

(2) $T^3=T^2T=\begin{bmatrix}1&-1\\3&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&-1\\3&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}=-I$。

(3) $T^4=T^3T=-IT=-T$。

(4) $\det(T)=1\ne 0$，所以T^{-1}存在，

故$T^{-1}=-(-I)T^{-1}=-T^3T^{-1}=-T^2$。

(5) $T^{2027}=(T^3)^{675}T^2=(-I)^{675}T^2=-T^2$。

故選(3)(4)(5)。

9. (1) 每人抽中紅球的機率都是$\dfrac{3}{10}$，即$P(A)=P(B)=\dfrac{3}{10}$。

(2) 因為不考慮第二、三、四位的情形，

所以$P(A\cap B)$相當於是第一、二位都抽中紅球的機率，即$P(A\cap B)=\dfrac{3}{10}\times\dfrac{2}{9}=\dfrac{1}{15}$。

(3) $P(B|A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{\frac{1}{15}}{\frac{3}{10}}=\dfrac{2}{9}$。

(4) 因為$P(A)=P(B)=\dfrac{3}{10}$且$P(A\cap B)=\dfrac{1}{15}$，

即$P(A\cap B)\ne P(A)\times P(B)$，

所以A、B不為獨立事件。

(5) 設隨機變數X表最後一位抽球者的獎金，則

X	100000	0
P	$\dfrac{3}{10}$	$\dfrac{7}{10}$

得期望值$E(X)=100000\times\dfrac{3}{10}+0\times\dfrac{7}{10}=30000$元。

故選(1)(2)(5)。

10. 依每科人數分成兩類：

(1) 3 人，1 人，1 人的選派法有

$C_3^3C_1^4C_1^5+C_1^3C_3^4C_1^5+C_1^3C_1^4C_3^5=20+60+120$

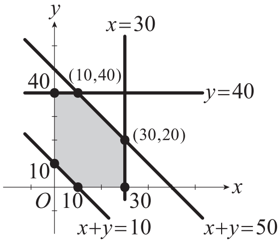
$=200$（種）。

(2) 2 人，2 人，1 人的選派法有

$C_2^3C_2^4C_1^5+C_2^3C_1^4C_2^5+C_1^3C_2^4C_2^5=90+120+180$

$=390$（種）。

故共有 $200+390=590$ 種。



11. 依題意，

B 倉庫要運 $30-x$ 輛到甲地，

運 $40-y$ 輛到乙地。

$$\begin{cases} x\geq 0,\ x\in\mathbb{Z} \\ 30-x\geq 0 \\ y\geq 0,\ y\in\mathbb{Z} \\ 40-y\geq 0 \\ x+y\leq 50 \\ (30-x)+(40-y)\leq 60 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0\leq x\leq 30,\ x\in\mathbb{Z} \\ 0\leq y\leq 40,\ y\in\mathbb{Z} \\ x+y\leq 50 \\ x+y\geq 10 \end{cases},$$

求運費 $500x+600y+400(30-x)+550(40-y)$

$=34000+100x+50y=34000+50(2x+y)$ 的最小值。

利用頂點法：

(x,y)	$(10,0)$	$(30,0)$	$(30,20)$	$(10,40)$	$(0,40)$	$(0,10)$
$2x+y$	20	60	80	60	40	10

↓ 最小

故 $(x,y)=(0,10)$ 時，運費最少。

12. 設經 n 年後，人口數低於 500 萬，

即 $10000000\left(\dfrac{96}{100}\right)^n<5000000$

$\Rightarrow\left(\dfrac{96}{100}\right)^n<\dfrac{1}{2}\Rightarrow n\log\dfrac{96}{100}<\log\dfrac{1}{2}$，

因為 $\log\dfrac{96}{100}=\log 96-\log 100=\log(2^5\times 3)-2$

$=5\log 2+\log 3-2$

$\approx 5\times 0.3010+0.4771-2=-0.0179$，

又 $\log\dfrac{1}{2}=-\log 2\approx -0.3010$，

所以 $n\times(-0.0179)<-0.3010\Rightarrow n>\dfrac{0.3010}{0.0179}=16.8\cdots$，

故至少經 17 年後，全國人口數低於現在人口數的一半。

13. 因為每次取出號碼是偶數的機率為 $\dfrac{2}{5}$，奇數的機率為 $\dfrac{3}{5}$。

所以 $P_2=\dfrac{2}{5}\times\dfrac{2}{5}+\dfrac{3}{5}\times\dfrac{3}{5}=\dfrac{13}{25}$。

14. 這 n 個號碼的和為偶數的情形，可分兩類：

①前 $(n-1)$ 個號碼的和為偶數且第 n 個號碼為偶數。

②前 $(n-1)$ 個號碼的和為奇數且第 n 個號碼為奇數。

（寫至此處得 2 分）

則 $P_n=P_{n-1}\times\dfrac{2}{5}+(1-P_{n-1})\times\dfrac{3}{5}=\dfrac{3}{5}-\dfrac{1}{5}P_{n-1}$，$n\geq 2$

所以 $\alpha=\dfrac{3}{5}$，$\beta=-\dfrac{1}{5}$。（寫出 α、β 之值各 1 分）

15. 由 14.可得

$P_n-\dfrac{1}{2}=\left(\dfrac{3}{5}-\dfrac{1}{5}P_{n-1}\right)-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{10}-\dfrac{1}{5}P_{n-1}=-\dfrac{1}{5}\left(P_{n-1}-\dfrac{1}{2}\right)$，

即 $\dfrac{P_n-\frac{1}{2}}{P_{n-1}-\frac{1}{2}}=-\dfrac{1}{5}$。

因此 $\left\langle P_n-\dfrac{1}{2}\right\rangle$ 為公比為 $-\dfrac{1}{5}$ 的等比數列。（寫至此處得 3 分）

因為 $\left\langle P_n-\dfrac{1}{2}\right\rangle$ 為首項 $P_1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{2}{5}-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{10}$，公比 $-\dfrac{1}{5}$ 的等比數列，所以 $P_n-\dfrac{1}{2}=\left(-\dfrac{1}{10}\right)\times\left(-\dfrac{1}{5}\right)^{n-1}$，

即 $P_n=\dfrac{1}{2}+\left(-\dfrac{1}{10}\right)\times\left(-\dfrac{1}{5}\right)^{n-1}$。

因此，$\lim\limits_{n\to\infty}P_n=\dfrac{1}{2}+0=\dfrac{1}{2}$。（求出極限得 3 分）

16. 令 $-0.07x^2+0.3x+200=0.03x^2-0.2x+60$

$\Rightarrow 0.1x^2-0.5x-140=0$

$\Rightarrow x^2-5x-1400=0\Rightarrow(x+35)(x-40)=0$

$\Rightarrow x=40$ 或 -35（不合）

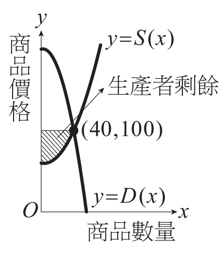
代回 $y=S(x)$

得 $S(40)=0.03\times 40^2-0.2\times 40+60=100$（元）。

17. 如圖所示：

（畫出正確圖形得 3 分，

標出交點坐標得 2 分）



18. $100\times 40-\int_0^{40}(0.03x^2-0.2x+60)dx$（寫出此式得 2 分）

$=4000-\left(0.01x^3-0.1x^2+60x\right)\Big|_0^{40}$（寫出此式得 2 分）

$=1120$（元）。（算出正確結果得 1 分）