龍騰文化

113 學年度學科能力測驗全真模擬試卷

數學 A 考科　解答卷

■答案

第壹部分：

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13-1	13-2
4	3	5	1	2	4	5	45	23	125	23	135	1	8
13-3	13-4	13-5	14-1	14-2	15-1	15-2	15-3	16-1	16-2	16-3	16-4	16-5	17-1
2	2	6	2	4	2	3	9	1	1	2	6	0	4
17-2	17-3												
5	3												

第貳部分：

18.	19.	20.
4	$A\left(\frac{9}{10}\right)^{\frac{x}{3}}$	66 年

■解析

1. $b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{20}$

$=(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+(a_4-a_3)+\cdots+(a_{21}-a_{20})$

$=a_{21}-a_1$

$=(S_{21}-S_{20})-S_1$

$=(21^2-2\times21+4)-(20^2-2\times20+4)-(1^2-2\times1+4)$

=36，

故選(4)。

2. $10000-20000\times0.2-50000\times0.05=3500$，故選(3)。

3. 設 $f(x)=(x-a)(x-b)Q_1(x)+x-2\cdots\cdots①$

$=(x-b)(x-c)Q_2(x)+2x+1\cdots\cdots②$

$=(x-c)(x-a)Q_3(x)-2x+3\cdots\cdots③$，

由①②$\Rightarrow f(b)=b-2=2b+1\Rightarrow b=-3$，

由②③$\Rightarrow f(c)=2c+1=-2c+3\Rightarrow c=\frac{1}{2}$，

由①③$\Rightarrow f(a)=a-2=-2a+3\Rightarrow a=\frac{5}{3}$，

所以 $a>c>b$，故選(5)。

4.

有金屬：20%
- 有聲音：98% — P_1
- 無聲音：　2% — P_2

無金屬：80%
- 有聲音：　5% — P_3
- 無聲音：95% — P_4

$P_1+P_3=0.196+0.04\Rightarrow\frac{P_1}{P_1+P_3}=\frac{0.196}{0.236}=\frac{49}{59}$，故選(1)。

5. 坐標化，令 D 為原點、

$\overrightarrow{DA}$ 為 x 軸正向，$\overrightarrow{DC}$ 為 y 軸正向，

$\overrightarrow{DH}$ 為 z 軸正向，

則 $A(8,0,0)$、$E(8,0,8)$、$F(8,8,8)$、$G(0,8,8)$，

由 P 在 $\overline{AE}$ 上且 $\overline{AP}$：$\overline{PE}=3$：1，可知：$P(8,0,6)$，

由 Q 在 $\overline{FG}$ 上且 $\overline{FQ}$：$\overline{QG}=7$：1，可知：$Q(1,8,8)$，

則 $\overleftrightarrow{PQ}$：$\frac{x-8}{7}=\frac{y-0}{-8}=\frac{z-6}{-2}$ 且 $\overleftrightarrow{BF}$：$\begin{cases}x=8\\y=8\end{cases}$，

取 $\overleftrightarrow{PQ}$ 上一點 $S(8+7t,-8t,6-2t)$，$\overleftrightarrow{BF}$ 上一點 $R(8,8,s)$，

因為 $\overleftrightarrow{PQ}$ 與 $\overleftrightarrow{BF}$ 的關係為歪斜，

所以當 $\overline{RS}$ 為 $\overleftrightarrow{PQ}$ 與 $\overleftrightarrow{BF}$ 的公垂線段時，

$\triangle PQR$ 的面積有最小值， $\overrightarrow{RS}=(7t,-8t-8,6-2t-s)$ ，

$$\begin{cases}\overrightarrow{RS}\perp\overrightarrow{QP}\\ \overrightarrow{SR}\perp\overrightarrow{BF}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(7t,-8t-8,6-2t-s)\cdot(7,-8,-2)=0\\ (7t,-8t-8,6-2t-s)\cdot(0,0,8)=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}117t+2s=-52\\ 2t+s=6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t=-\dfrac{64}{113}\\ s=\dfrac{806}{113}\end{cases}$$ ，則 $R\left(8,8,\dfrac{806}{113}\right)$ ，

故選(2)。

6. 對任意實數 x ，矩陣 M 恆有反矩陣 M^{-1} 存在，

即行列式值不等於零

$\Rightarrow -2(a+3)-(x-a)(x+3)\neq 0$ ，對任意實數 x 均成立

$\Rightarrow -2(a+3)-(x-a)(x+3)=0$ ，無實數解，

展開得 $x^2+(3-a)x+(6-a)=0$ ，無實數解，

判別式 $(3-a)^2-4(6-a)<0$

$\Rightarrow a^2-2a-15<0\Rightarrow(a-5)(a+3)<0$

$\Rightarrow -3<a<5\Rightarrow a=-2\sim 4$ ，

共 7 個，故選(4)。

7. 由騰騰畫的圖形可知：

① 拋物線開口向下，則原二次函數的係數 a 應為正數。

② 拋物線對稱軸（ $x=-\dfrac{b}{2a}$ ）在 y 軸右側，

則原二次函數的係數 b 應為負數。

③ 拋物線與 y 軸交點在 x 軸上方，則原二次函數的常數項 c 應為正數。

則題目所求之三次函數 $y=ax^3+bx+c$ 中，

因為 $a>0$ 、對稱中心 $\left(-\dfrac{0}{3a},c\right)$ 在 y 軸正向、

$ab<0$ 可知圖形類型應為 ，故選(5)。

8. (1) 由 $\overline{PA}:\overline{PB}=5:3$ 得 $|x-a|:|x-b|=5:3$

$\Rightarrow 3|x-a|=5|x-b|$ ，故錯誤。

(2) 若 P 在 $\overline{AB}$ 上，則 $x=\dfrac{3}{8}a+\dfrac{5}{8}b$ ，

若 P 在 $\overline{AB}$ 外，則 $x=\dfrac{5}{2}b-\dfrac{3}{2}a$ ，故錯誤。

(3) 由(2)可算得 $b=16$ 或 10，故錯誤。

(4) 由(2)可算得 $a=-8$ ，故正確。

(5) 若 P 在 $\overline{AB}$ 上，則 $x=\dfrac{3a+5b}{8}>\dfrac{4a+4b}{8}=\dfrac{a+b}{2}$ ，

若 P 在 $\overline{AB}$ 外，則 $x=\dfrac{5}{2}b-\dfrac{3}{2}a>b>\dfrac{a+b}{2}$ ，故正確。

故選(4)(5)。

9. $\overrightarrow{v}=(1,2)+k(4,3)=(4k+1,3k+2)$ 。

(1) $\dfrac{4k+1}{1}=\dfrac{3k+2}{-1}\Rightarrow k=-\dfrac{3}{7}$ ，不在 k 範圍內，故錯誤。

(2) $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=(4k+1)-(3k+2)=k-1=0$

$\Rightarrow k=1$ 滿足 k 範圍，故正確。

(3) $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=k-1=4\Rightarrow k=5$ 滿足 k 範圍，故正確。

(4) $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=k-1=3\sqrt{3}\Rightarrow k=3\sqrt{3}+1>5$，不在範圍內，故錯誤。

(5) $\overrightarrow{v}$ 在 $\overrightarrow{u}$ 上的正射影

$=\dfrac{(4k+1)\cdot 1+(3k+2)\cdot(-1)}{1^2+(-1)^2}\cdot(1,-1)$

$=\dfrac{k-1}{2}\cdot(1,-1)=(3,-3)$

$\Rightarrow k=7>5$ ，不在範圍內，故錯誤。

故選(2)(3)。

10. (1) $\mu_x=\dfrac{9+11+12+13+15}{5}=12$ ，故正確。

(2) $\mu_y=\dfrac{42+40+44+43+46}{5}=43$ ，故正確。

(3)

$x-\mu_x$	-3	-1	0	1	3
$y-\mu_y$	-1	-3	1	0	3
$(x-\mu_x)^2$	9	1	0	1	9
$(y-\mu_y)^2$	1	9	1	0	9
$(x-\mu_x)(y-\mu_y)$	3	3	0	0	9

$r=\dfrac{3+3+0+0+9}{\sqrt{9+1+0+1+9}\sqrt{1+9+1+0+9}}=\dfrac{3}{4}$ ，故錯誤。

(4) $m=\dfrac{3+3+0+0+9}{9+1+0+1+9}=\dfrac{15}{20}=\dfrac{3}{4}$ ，

L ： $y-43=\dfrac{3}{4}(x-12)\Rightarrow y=\dfrac{3}{4}x+34$ ，故錯誤。

(5) 將 $x=8$ 代入迴歸直線方程式得： $y=\dfrac{3}{4}\times 8+34=40$，

可推估成績為 40 級分，故正確。

故選(1)(2)(5)。

11. (1) $f(x)=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ ， $f(x)$ 的週期為 2π ，

故錯誤。

(2) $g(x)=\dfrac{1}{2}\sin 2x\Rightarrow g(x)$ 的週期為 π ，故正確。

(3) $f(x)=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\Rightarrow -\sqrt{2}\le f(x)\le\sqrt{2}$，故正確。

(4) $g(x)=\dfrac{1}{2}\sin 2x\Rightarrow -\dfrac{1}{2}\le g(x)\le\dfrac{1}{2}$ ，故錯誤。

(5) 因為$\left[f(x)\right]^2=1+2\sin x\cos x$，

所以$g(x)=\sin x\cos x=\dfrac{1}{2}\sin 2x=\dfrac{\left[f(x)\right]^2-1}{2}$

$\Rightarrow h(x)=f(x)+\dfrac{\left[f(x)\right]^2-1}{2}=\dfrac{1}{2}\left[f(x)+1\right]^2-1$，

此時$-1\le h(x)\le\sqrt{2}+\dfrac{1}{2}$，故錯誤。

故選(2)(3)。

12. (1) $\triangle OPQ$為$30^\circ-60^\circ-90^\circ$的直角三角形且$\overline{OQ}=\sqrt{3}$，

可推得$\overline{OP}=2$，所以$(-2,0)$可為P點坐標，

故正確。

(2) 承(1)，切線段長$=\overline{PQ}=1$，故錯誤。

(3) 承(1)，因為動點P滿足$\overline{OP}=2$，所以P的軌跡為以原點為圓心、半徑為 2 的圓，即所有動點P皆在圓$x^2+y^2=4$上，故正確。

(4) 因為原點到直線L的距離$d(O,L)=\dfrac{|-24|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{24}{5}$，

所以動點P到直線L的最近距離$=d(O,L)-2=\dfrac{14}{5}$，

故錯誤。

(5) 四邊形$OQPR$的面積

$=2\times\triangle OPQ$面積$=2\times\dfrac{1}{2}\times1\times\sqrt{3}=\sqrt{3}$，故正確。

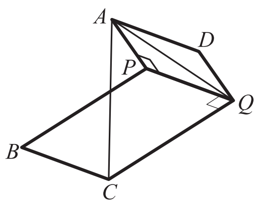
故選(1)(3)(5)。

13. $18+34-40\le A\le18\Rightarrow12\le A\le18$，

$16\le B=34-A\le22$ 、 $0\le C=18-A\le6$，

故$x=18$，$y=22$，$z=6\Rightarrow(x,y,z)=(18,22,6)$。

14. $\overline{AQ}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$，



$$\left|\overrightarrow{AC}\right|^2=\left|\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QC}\right|^2$$

$$=\left|\overrightarrow{AP}\right|^2+\left|\overrightarrow{PQ}\right|^2+\left|\overrightarrow{QC}\right|^2$$

$$+2\cdot\left(\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{PQ}\right)+2\cdot\left(\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{QC}\right)+2\cdot\left(\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{QC}\right)$$

$$=1^2+1^2+2^2+2\cdot0+2\cdot0+2\cdot1\cdot2\cdot\cos120^\circ=4$$

$\Rightarrow\overline{AC}=2\Rightarrow\cos\angle AQC=\dfrac{\left(\sqrt{2}\right)^2+2^2-2^2}{2\cdot\sqrt{2}\cdot2}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$。

15. $256\text{GB}=256\times1000^3$位元組$=256000000000$位元組，

$256000000000\div1024^3$

$=\left(2^8\times10^9\right)\div2^{30}=10^9\div2^{22}\approx10^9\div\left(10^{0.301}\right)^{22}$

$=10^9\div10^{6.622}\approx10^3\div4.19\approx238.66\approx239$，

故廠商標榜 256GB 的隨身碟實際容量約為 239GiB。

16. 先討論「$2B$」為何並將其分別排至原本以外的位子，再另外選兩個數字作排列，

則在所有可能的答案中，一次就猜對的機率為

$\dfrac{1}{C^4_2\times C^6_2\times(4!-2\times3!+2!)}=\dfrac{1}{1260}$。

17. 由正弦定理得：$\dfrac{4\sqrt{2}}{\sin\angle CAB}=\dfrac{4}{\sin30^\circ}$，

解得$\sin\angle CAB=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\angle CAB=45^\circ$，

$\tan\angle CBD=\tan(30^\circ+45^\circ)=\tan75^\circ=2+\sqrt{3}\approx3.732$，

又$\dfrac{1.75}{\tan\angle CBD}\approx\dfrac{1.75}{3.732}\approx0.469$，

故所求為$5-0.469=4.531\approx4.53$。

18. 每 3 年有毒物質剩$1-10\%=90\%$，

$10=3\times\dfrac{10}{3}$年後，有毒物質剩$0.9^{\frac{10}{3}}$，故選(4)。

19. 有毒物質原有：A，

3 年後：$A(1-10\%)^1$，

6 年後：$A(1-10\%)^2$，

⋮

⋮

$x=3\times\dfrac{x}{3}$年後：$A(1-10\%)^{\frac{x}{3}}$，

故$Q(x)=A(1-10\%)^{\frac{x}{3}}=A\left(\dfrac{9}{10}\right)^{\frac{x}{3}}$。

評分標準：

① 分別條列出 3 年後、6 年後、…的有毒物質含量，得 3 分。

② 正確表示出$Q(x)=A\left(\dfrac{9}{10}\right)^{\frac{x}{3}}$，得 3 分。

20. $A(0.9)^{\frac{x}{3}}\le\dfrac{1}{10}A\to\left(\dfrac{9}{10}\right)^{\frac{x}{3}}\le\dfrac{1}{10}$……，

兩邊同取 log $\Rightarrow\dfrac{x}{3}\log\left(\dfrac{9}{10}\right)\le-1$

$\Rightarrow\dfrac{x}{3}(0.9542-1)\le-1\Rightarrow x\ge65.5$，故至少要經過 66 年，河川周圍的土地才能使植物得以生存。

評分標準：

① 列出不等式$A(0.9)^{\frac{x}{3}}\le\dfrac{1}{10}A$，得 2 分。

② 解得$x\ge65.5$，得 3 分。

③ 正確回答至少要經過 66 年，得 1 分。