龍騰文化

112 學年度學科能力測驗全真模擬試卷

數學 B 考科　解答卷

■答案

第壹部分：

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13-1	13-2
4	5	3	5	1	3	2	12345	1245	345	135	2	1	3
14-1	14-2	14-3	14-4	15-1	15-2	16-1	16-2	17-1					
1	0	1	1	1	2	3	4	5					

第貳部分：

18.	19.	20.
124	$\begin{cases}3x-4y+15\ge 0\\3x-4y-15\le 0\end{cases}$	$120+9\pi$

■解析

1. 原式$\Rightarrow\left(\sqrt{10}-3\right)k=\sqrt{10}+3$

$$\Rightarrow k=\frac{\sqrt{10}+3}{\sqrt{10}-3}=\left(\sqrt{10}+3\right)^2=19+6\sqrt{10}$$，故選(4)。

2. $f(x)=3(x+1)^3+4(x+1)+a$

$\Rightarrow$圖形的對稱中心為$(-1,a)$，

因為$\dfrac{(-3)+1}{2}=-1$，

所以由$f(-3)+f(1)=10$可得$a=\dfrac{f(-3)+f(1)}{2}=5$，

故$f(x)=3(x+1)^3+4(x+1)+5$，

所求為$f(1)=3\times2^3+4\times2+5=37$，故選(5)。

3. 因為$\overrightarrow{BD}//\overrightarrow{CD}$，

所以$\overrightarrow{AB}$在$\overrightarrow{BD}$上的正射影等於$\overrightarrow{AB}$在$\overrightarrow{CD}$上的正射影

$\Rightarrow\left(x^3-4,17\right)=\left(4,2^y+1\right)$

$\Rightarrow x=2$，$y=4\Rightarrow x+y=6$，

故選(3)。

4. 分別計算各家防疫險的獲利期望值：

甲：$20000\times20\%+60000\times5\%-500=6500$（元），

乙：$50000\times20\%+50000\times5\%-666=11834$（元），

丙：$40000\times20\%+60000\times5\%-800=10200$（元），

丁：$50000\times20\%+60000\times5\%-888=12112$（元），

戊：$60000\times20\%+60000\times5\%-1000=14000$（元），

所以買戊公司的防疫險最有利，故選(5)。

5. $a_1=1^2=1$，當$n\ge2$時，

$a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}=(n-1)^2\cdots\cdots$①，

$a_1+a_2+\cdots+a_n=n^2\cdots\cdots$②，

由②−①得$a_n=n^2-(n-1)^2=2n-1$，則$a_{11}=2\times11-1=21$。

$b_1=1^2=1$，當$n\ge2$時，

$b_1\times b_2\times\cdots\times b_{n-1}=(n-1)^2\cdots\cdots$③，$b_1\times b_2\times\cdots\times b_n=n^2\cdots\cdots$④，

由④÷③得$b_n=\left(\dfrac{n}{n-1}\right)^2$，則$b_{11}=\left(\dfrac{11}{10}\right)^2=\dfrac{121}{100}$。

所求為$\dfrac{a_{11}}{b_{11}}=21\times\dfrac{100}{121}=\dfrac{2100}{121}$，故選(1)。

6. 設地球儀的半徑為 R，
螞蟻 A 所繞行北緯 40 度線的小圓半徑為 $R\cos 40^\circ$
螞蟻 B 繞行 0 度經線的大圓半徑為 R
因為兩隻螞蟻繞行速度相同，
所以花費時間的比值等於圓周長的比值，
所求為 $\dfrac{2\pi R\cos 40^\circ}{2\pi R}=\cos 40^\circ$，故選(3)。

7. $P(\text{確診者}\,|\,\text{可入境})$

$=\dfrac{P(\text{確診者且兩次檢測均為陰性})}{P(\text{確診者且兩次檢測均為陰性})+P(\text{非確診者且兩次檢測均為陰性})}$

$=\dfrac{5\%\times10\%\times10\%}{5\%\times10\%\times10\%+95\%\times90\%\times90\%}$

$=\dfrac{1}{1540}$，故選(2)。

8. 令 A 表示家中有洗碗機的同學之集合，
B 表示家中有掃地機器人的同學之集合，
C 表示家中有烘衣機的同學之集合。

(1) ○：$n(A'\cap B)=n(B)-n(A\cap B)$
$=40\times60\%-40\times40\%=8$（人）。

(2) ○：$n(A\cap B)=16$、$n(C)=12$，
因為 $16+12<40$，故 $n(A\cap B\cap C)\geq 0$（人）。

(3) ○：$n(A\cap B)=16$、$n(C)=12$，
故 $n(A\cap B\cap C)\leq n(C)=12$（人）。

(4) ○：$n(A\cup B\cup C)\leq n(B)+n(C)=24+12=36$
$\Rightarrow n(A'\cap B'\cap C')$
$=40-n(A\cup B\cup C)\geq 40-36=4$（人）。

(5) ○：$n(A\cup B\cup C)\geq n(B)=24$
$\Rightarrow n(A'\cap B'\cap C')$
$=40-n(A\cup B\cup C)\leq 40-24=16$（人）。

故選(1)(2)(3)(4)(5)。

9. (1) ○：$0.9\times1.1=1.1\times0.9=0.99=99\%$。

(2) ○：連三天漲停：$1.1^3-1=0.331=33.1\%$，
連三天跌停：$1-0.9^3=0.271=27.1\%$，
故連三天漲停造成漲幅 33.1%大於
連三天跌停造成跌幅 27.1%。

(3) ╳：設至少需要 x 天，
$1.1^x>2\Rightarrow \log1.1^x>\log2$
$\Rightarrow 0.041x>0.3010\Rightarrow x>7.34$，
故至少需要 8 天。

(4) ○：設至少需要 y 天，
$0.9^y<\dfrac{1}{2}\Rightarrow \log0.9^y<\log\dfrac{1}{2}$
$\Rightarrow y\times(0.9542-1)<-0.3010\Rightarrow y>6.57$，
故至少需要 7 天。

(5) ○：設六天連續跌停前股價為 z 元，
$z\times0.9^6=25\Rightarrow \log z+6\log\dfrac{9}{10}=2\log5$
$\Rightarrow \log z-0.2748=1.398$
$\Rightarrow \log z=1.6728\Rightarrow z\approx 47$。

故選(1)(2)(4)(5)。

10. (1) ╳：振幅為 27 公尺。

(2) ╳：週期為 4 分鐘。

(3) ○：$f(0)=60-54=6$。

(4) ○：因為週期為 4 分鐘，
故 $f(2)=f(6)=f(10)$ 均為 $f(t)$ 的最大值。

(5) ○：設 $f(t)=a\sin(bt+c)+d$，其中 $a>0$，$b>0$，
由振幅為 27 公尺知 $a=27$，
由週期為 4 分鐘知 $\dfrac{2\pi}{b}=4\Rightarrow b=\dfrac{\pi}{2}$，
由 $f(t)$ 的最小值為 $f(0)=6$ 知 $-27+d=6$
$\Rightarrow d=33$，
由 $f(t)$ 的最大值為
$f(6)$ 知 $\dfrac{\pi}{2}\times6+c=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$，
其中 k 為整數
$\Rightarrow c=2k\pi-\dfrac{5}{2}\pi$，令 $k=1$ 可得 $c=-\dfrac{\pi}{2}$，
故 $f(t)$ 可以 $27\sin\left(\dfrac{\pi}{2}t-\dfrac{\pi}{2}\right)+33$ 表示。

故選(3)(4)(5)。

11. 確診同學的位子為扣除龍龍的位子，
從其餘 24 個位子任選 2 個，共有 C^{24}_2 種。

(1) ○：龍龍周圍的 3 位同學皆非確診者，
故確診者的位子有 C^{21}_2 種，故機率為 $\dfrac{C^{21}_2}{C^{24}_2}$。

(2) ╳：龍龍周圍的 5 位同學皆非確診者，
故確診者的位子有 C^{19}_2 種，故機率為 $\dfrac{C^{19}_2}{C^{24}_2}$。

(3) ○：龍龍周圍的 8 位同學皆非確診者，
故確診者的位子有 C^{16}_2 種，故機率為 $\dfrac{C^{16}_2}{C^{24}_2}$。

(4) ╳：①確診者左右相鄰且與龍龍在同一列時，

有 3 種。

②確診者左右相鄰且與龍龍不在同一列時，

有 $C_1^4C_1^4$ 種。

知確診者左右相鄰的有 $C_1^4C_1^4+3$ 種，

同理，確診者前後相鄰的組合也有

$C_1^4C_1^4+3$ 種，故機率為 $\dfrac{2\times\left(C_1^4C_1^4+3\right)}{C_2^{24}}$ 。

(5) ○：確診者的座位為 $(7,19)$、$(17,9)$ 時，被匡列的同學才會有 15 位，故機率為 $\dfrac{C_1^2}{C_2^{24}}$ 。

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

故選(1)(3)(5)。

12. (1) ╳：$18548\times1\%=185.48$ ，

無條件進位至整數位後為 186 名。

(2) ○：$1.437\times60=86.22$（分）。

(3) ╳：$29\times1.437=41.673$（分），

$30\times1.437=43.11$（分），

故該生成績應介於 41.673 分至 43.11 分之間。

(4) ╳：取排名前 0.1%的平均會大於等於排名前 1%的人數之平均成績，

故除以 60 後可得級距會變大。

(5) ╳：若排名前 1%的人數之平均成績為 96 分，

則級距為 1.6 分，此時 60 級分對應的原始分數區間為 94.4～100 分，

若排名前 0.1%的平均為 97 分，

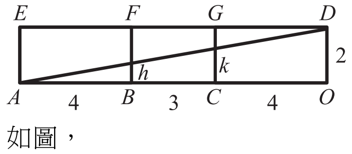
則級距為 1.61667 分，

此時 60 級分對應的原始分數區間為 95.38353～100 分，

故兩者對應的原始分數區間是有落差的。

故選(2)。

13. $1.8^2\times\left(36-32\right)=12.96\approx13$（公斤）。

14. 

如圖，

將矩形 $ABFE$ 、 $BCGF$ 、 $CODG$ 展開至同一平面，

則螞蟻的最短爬行路徑即為 $\overline{AD}$ ，

由相似形知 $\begin{cases}\dfrac{4}{h}=\dfrac{11}{2}\\ \dfrac{7}{k}=\dfrac{11}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}h=\dfrac{8}{11}\\ k=\dfrac{14}{11}\end{cases}\Rightarrow3h-k=\dfrac{10}{11}$ 。

15. 由 $\begin{bmatrix}1&2\\3&9\\x&y\end{bmatrix}A=\begin{bmatrix}16&5\\66&18\\62&22\end{bmatrix}$ 得 $\begin{bmatrix}1&2\\3&9\end{bmatrix}A=\begin{bmatrix}16&5\\66&18\end{bmatrix}$ ，

則 $A=\begin{bmatrix}1&2\\3&9\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}16&5\\66&18\end{bmatrix}=\dfrac{1}{3}\begin{bmatrix}9&-2\\-3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}16&5\\66&18\end{bmatrix}$

$=\dfrac{1}{3}\begin{bmatrix}12&9\\18&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&3\\6&1\end{bmatrix}$ ，

知 $\begin{bmatrix}x&y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&3\\6&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}62&22\end{bmatrix}$

$\Rightarrow\begin{bmatrix}x&y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}62&22\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&3\\6&1\end{bmatrix}^{-1}=-\dfrac{1}{14}\begin{bmatrix}62&22\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-3\\-6&4\end{bmatrix}$

$=-\dfrac{1}{14}\begin{bmatrix}-70&-98\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&7\end{bmatrix}$ ，

故 $x+y=5+7=12$ 。

16. 設 $\angle ACB=\theta$ ，

由三角比的定義知 $\sin\theta=\dfrac{3}{5}$ ，

$\sin\angle ECH=\sin\left(\theta+90^\circ\right)=\cos\theta=\dfrac{4}{5}$ ，

$\sin\angle FCH=\sin\left(360^\circ-180^\circ-\theta\right)=\sin\left(180^\circ-\theta\right)=\sin\theta=\dfrac{3}{5}$ ，

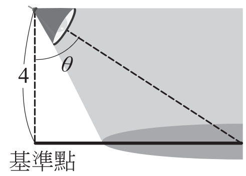
$\triangle EFH$ 的面積

$=\triangle ECF$ 的面積 $+\triangle ECH$ 的面積 $+\triangle FCH$ 的面積

$=\dfrac{1}{2}\times7\times4+\dfrac{1}{2}\times7\times5\times\dfrac{4}{5}+\dfrac{1}{2}\times4\times5\times\dfrac{3}{5}$

$=34$ 。

17. 依題意，直圓錐的軸和燈罩夾角約為 37° ，



若直圓錐的軸由垂直地面轉動至燈光上緣與地面平行前，

地板上亮區會形成圓或橢圓，

此時 θ 需小於 $90^\circ-37^\circ=53^\circ$ ，

當 $\theta=53^\circ$ 時，直圓錐的軸與地面交點位置距離基準點 $4\times\tan53^\circ\approx\dfrac{16}{3}$ 公尺，

故表演者所站位置與基準點的最遠距離約為 5 公尺。

18. 無人機可操控的範圍為圓 $x^2+y^2=100$ 的圓周及其內部，

分別將五個地點坐標代入：

夜市$(-8,-4)$：$\left(-8\right)^2+\left(-4\right)^2<100$

$\Rightarrow$夜市在可操控範圍內，

美術館$(-3,4)$：$\left(-3\right)^2+4^2<100$

$\Rightarrow$美術館在可操控範圍內，

博物館$(5,12)$：$5^2+12^2>100$

$\Rightarrow$博物館不在可操控範圍內，

大學$(5,-5)$： $5^2+(-5)^2<100$

$\Rightarrow$大學在可操控範圍內，

遊樂園$(6,9)$： $6^2+9^2>100$

$\Rightarrow$遊樂園不在可操控範圍內，

故選(1)(2)(4)。

19. 依題意，無人機可拍攝的範圍在與直線 $3x-4y=0$ 相距 3 單位的兩條平行線之間的區域，

設此兩平行線方程式為 $3x-4y+k=0$ ，

則 $\dfrac{|k-0|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=3\Rightarrow|k|=15\Rightarrow k=\pm15$ ，

得兩平行線的方程式分別為 $3x-4y+15=0$ 與 $3x-4y-15=0$ ，

故二元一次不等式組為 $\begin{cases}3x-4y+15\ge0\\3x-4y-15\le0\end{cases}$。

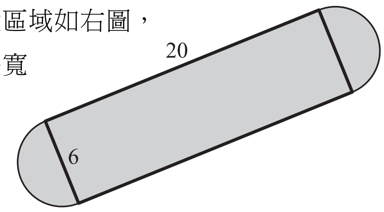
評分標準：

① 利用文字或畫圖說明所求範圍在兩平行線間的區域，得 1 分。

② 正確解出兩平行線的方程式，得 3 分。

③ 正確列出二元一次不等式組，得 2 分。

20. 無人機可拍攝的最大區域如右圖，其面積可分解成一長寬分別為 20 單位與 6 單位的長方形以及一半徑為 3 單位的圓，



故最大面積為 $6\times20+\pi\times3^2=120+9\pi$ 。

評分標準：

① 畫出所求最大區域的略圖或詳細圖形，得 2 分。

② 說明或列式將所求區域分成一長方形與一圓（或兩半圓），得 2 分。

③ 正確計算所求區域面積，得 2 分。