龍騰文化

113 學年度分科測驗全真模擬試卷

數學甲考科

請於考試開始鈴響起，在答題卷簽名欄位以正楷簽全名

龍騰數學科編輯小組

—作答注意事項—

考試時間：80 分鐘

作答方式：

- 選擇（填）題用 2B 鉛筆在「答題卷」上作答；更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。
- 除題目另有規定外，非選擇題用筆尖較粗之黑色墨水的筆在「答題卷」上作答；更正時，可以使用修正液（帶）。
- 考生須依上述規定劃記或作答，若未依規定而導致答案難以辨識或評閱時，恐將影響成績並損及權益。
- 答題卷每人一張，不得要求增補。
- 選填題考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子劃記。

選擇（填）題計分方式：

- 單選題：每題有 n 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項。各題答對者，得該題的分數；答錯、未作答或劃記多於一個選項者，該題以零分計算。
- 多選題：每題有 n 個選項，其中至少有一個是正確的選項。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得該題全部的分數；答錯 k 個選項者，得該題 $\frac{n-2k}{n}$ 的分數；但得分低於零分或所有選項均未作答者，該題以零分計算。
- 選填題每題有 n 個空格，須全部答對才給分，答錯不倒扣。

※試題中參考的附圖均為示意圖，試題後附有參考公式及數值。

祝考試順利

龍騰文化
肯定自己 ➤ 肯定不同

定價 20 元

62001N12-E A

第壹部分、選擇（填）題（占 76 分）

一、單選題（占 18 分）

說明：第 1 題至第 3 題，每題 6 分。

1. 在 $0 \le x < 2\pi$ 的範圍內，滿足二階方陣 $A = \begin{bmatrix} 2\sin x & 1 \\ 1 & 2\cos x \end{bmatrix}$ 的乘法反方陣 A^{-1} 不存在之所有 x 的總和為何？
(1) π　(2) 2π　(3) 3π　(4) 4π　(5) 5π

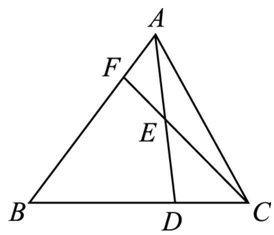
2. 設空間中三向量 $\overrightarrow{a} = (1, 2, -1)$，$\overrightarrow{b} = (-1, 1, -2)$，$\overrightarrow{c} = (x^2, x-2, 3)$，若 $f(x) = (\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{c}$，則 $f(x)$ 最大值為何？
(1) $\frac{15}{4}$　(2) $\frac{5}{4}$　(3) 3　(4) $-\frac{15}{2}$　(5) $\frac{5}{2}$

3. 設數列 $\langle a_n \rangle$ 的遞迴關係式為 $\begin{cases} a_1 = \sqrt{10} \\ a_n = \left(\frac{\sqrt{10}}{100}\right)^3 \times a_{n-1}（n \ge 2） \end{cases}$。若 $b_n = \log a_n$，則 $b_1 + b_2 + b_3$ 的值為何？
(1) -12　(2) -10　(3) $-\frac{13}{2}$　(4) $\frac{1}{2}$　(5) 8

二、多選題（占 40 分）

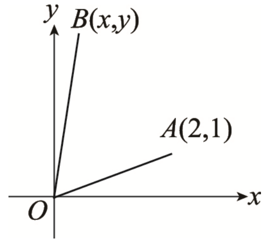
說明：第 4 題至第 8 題，每題 8 分。

4. 如圖，在 $\triangle ABC$ 中，$\overline{BD} = 2\overline{DC}$、$\overline{AE} = \overline{ED}$。選出正確的選項：
(1) $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$
(2) $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$
(3) $\overline{AF} : \overline{FB} = 1:4$
(4) $\overline{CE} : \overline{EF} = 3:2$
(5) $\frac{\Delta AEF\text{的面積}}{\Delta ABC\text{的面積}} = \frac{1}{12}$



5. 圓 $C_1 : x^2 + y^2 = 4$，圓 $C_2 : (x-5)^2 + (y-12)^2 = 9$，若 $P(a, b)$ 為 C_1 上任一點，$Q(c, d)$ 為圓 C_2 上的一點，試問下列何者正確？
(1) $\overline{PQ}$ 之最大值為 13
(2) 當 $\overline{PQ}$ 有最小值時，$P\left(\frac{10}{13}, \frac{24}{13}\right)$、$Q\left(\frac{50}{13}, \frac{120}{13}\right)$
(3) $ac + bd$ 的最大值為 32
(4) $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ 最小值為 -32
(5) 若直線 $3x - 4y + k = 0$ 穿越兩圓之間而不與兩圓有任何交點，則 k 值範圍為 $10 < k < 18$

6. 如圖所示，在坐標平面上，點 $A(2,1)$ 、 $B(x,y)$ ， $\angle AOB=60^\circ$ ，
$\overline{OB}=2\overline{OA}$ ，且矩陣 $X=\begin{bmatrix}1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 1\end{bmatrix}$，試問下列選項何者正確？



(1) $\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos 60^\circ & -\sin 60^\circ\\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}$

(2) 若點 A 對於直線 $\overleftrightarrow{OB}$ 的對稱點坐標為 (x',y') ，則 $x'+y'i=(2+i)(\cos 120^\circ+i\sin 120^\circ)$ ，其中 $i=\sqrt{-1}$

(3) 若矩陣 X 將 A、B 兩點分別變換到 A' 與 B'，則 $\triangle A'OB'$ 的面積為$\left|\begin{vmatrix}1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 1\end{vmatrix}\right|$倍的 $\triangle AOB$ 面積

(4) $X^6=64I_2$ ，其中 $I_2=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

(5) 以直線 $\overleftrightarrow{OA}$ 為對稱軸之鏡射方陣為 $\begin{bmatrix}\frac{3}{5} & \frac{4}{5}\\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5}\end{bmatrix}$

7. 已知三次函數 $f(x)$ 在 $x=-1$ 處有極大值 2，且 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)+2}{x-3}=0$ 。選出正確的選項：

(1) $f'(-1)=2$　(2) $f(3)=-2$　(3) $f'(3)=0$　(4)方程式 $f(x)=0$ 恰有三相異實根

(5) $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{f(k+100)}{f(2k)}=\dfrac{1}{8}$

8. 已知三次函數 $f(x)$ 的圖形通過(0,0)、(4,0)、(6,0)，且 $\int_0^4 f(x)dx=9$ ， $\int_0^6 f(x)dx=7$ 。
選出正確的選項：

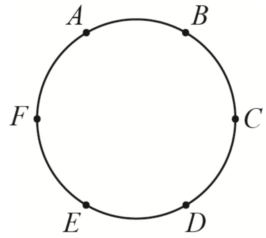
(1) $\int_4^6 f(x)dx=2$　　(2) $f(x)$ 的圖形與 x 軸所圍成區域面積為 11

(3) $\int_0^6 (f(x)+x)dx=25$　　(4) $\int_0^6 |f(x)|dx=11$　　(5) $\int_0^5 f(x-1)dx<9$

三、選填題（占 18 分）

說明：第 9 題至第 11 題，每題 6 分。

9. 如右圖， A, B, C, D, E, F 為圓周上的六個等分點。有一遊戲，開始時將一石子置於出發點 A，接著丟一公正硬幣決定如何移動石子，規則如下：若出現正面，則石子順時針前進二個等分點；若出現反面，則順時針前進一個等分點。則石子恰繞該圓一周（即回到出發點 A處）的機率為 $\dfrac{⑨-1\ ⑨-2}{⑨-3\ ⑨-4}$ 。



10. $\triangle ABC$ 中，已知 $2\sin A+3\cos C=\sqrt{7}$ 且 $3\sin C+2\cos A=2\sqrt{3}$，若 $\triangle ABC$ 外有一點 D，滿足 $\overline{DA}\perp\overline{AB}$、$\overline{DC}\perp\overline{BC}$，而且 $\overline{BD}=6$，求 $\overline{AC}=$ ___10___ 。

11. 三複數 $z_1=-2+i$，$z_2=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，$z_3=\cos\phi+i\sin\phi$，其中 $r>0$，z_3 的主輻角為，若 $\cos\theta=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$，$\dfrac{3\pi}{2}<\theta<2\pi$，且滿足點 $P\left(\dfrac{z_1\times z_2}{z_3}\right)$ 在實軸正向上，則 $\phi=$ $\dfrac{\text{11-1}}{\text{11-2}}\pi$ 。

第貳部分、混合題或非選擇題（占 24 分）

說明：本部分共有 2 題組，選填題每題 2 分，非選擇題配分標於題末。限在答題卷標示題號的作答區內作答。選擇（填）題與「非選擇題作圖部分」使用 2B 鉛筆作答，更正時以橡皮擦擦拭，切勿使用修正帶（液）。非選擇題請由左而右橫式書寫，作答時必須寫出計算過程或理由，否則將酌予扣分。

<u>12-14 題為題組</u>

已知圓 C：$x^2+\left(y-k\right)^2=r^2$（$r>0$）與拋物線 Γ：$y=x^2$ 相切於 P, Q 兩點，且圓 C 的圓心 M 滿足 $\angle PMQ=120°$。

12. 請將 P 點坐標以 k 與 r 表示。（非選擇題，4 分）

13. 請求出實數 k 與 r 的值。（非選擇題，4 分）

14. 拋物線 Γ 與圓 C 所圍的面積（在拋物線之上，圓之下的部分）（非選擇題，4 分）
（註：兩曲線相切是指在其交點處的切線是同一條直線）

<u>15-17 題為題組</u>

已知二階方陣 M 滿足 $M\begin{bmatrix}1\\\sqrt{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\2\sqrt{3}\end{bmatrix}$，$M\begin{bmatrix}\sqrt{3}\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\4\end{bmatrix}$。

15. 求 $M=$ $\begin{bmatrix}\text{15-1} & -\sqrt{\text{15-2}}\\ \sqrt{\text{15-3}} & \text{15-4}\end{bmatrix}$ 。（選填題，4 分）

16. 設 $P=\dfrac{1}{2}M$，求 P^3+P^6。（非選擇題，4 分）

17. 在坐標平面上，已知 O 為原點，$\triangle OAB$ 是邊長為 2 的正三角形。若 $\triangle OAB$ 經二階方陣 M 線性變換後成 $\triangle O'A'B'$，則 $\angle A'O'B'$ 及 $\overline{O'A'}$ 為何？（非選擇題，4 分）

參考公式及可能用到的數值

1. 首項為 a，公差為 d 的等差數列前 n 項之和為 $S=\dfrac{n(2a+(n-1)d)}{2}$

   首項為 a，公比為 $r\ (r\neq 1)$ 的等比數列前 n 項之和為 $S=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$

2. 級數和：$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$；$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

3. 三角函數的和角公式：$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$

   $\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$

   $\tan(A+B)=\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$

4. ΔABC 的正弦定理：$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$（$R$ 為 ΔABC 外接圓半徑）

   ΔABC 的餘弦定理：$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

5. 一維數據 $X: x_1, x_2, \cdots, x_n$，

   算術平均數 $\mu_X=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_i$；標準差 $\sigma_X=\sqrt{\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_X)^2}=\sqrt{\dfrac{1}{n}(\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_i^{\ 2}-n\mu_X^{\ 2})}$

6. 二維數據 $(X,Y):(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n)$，

   相關係數 $r_{X,Y}=\dfrac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_X)(y_i-\mu_Y)}{n\sigma_X\sigma_Y}$

   最適直線（迴歸直線）方程式 $y-\mu_Y=r_{X,Y}\dfrac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x-\mu_X)$

7. 參考數值：$\sqrt{2}\approx 1.414$, $\sqrt{3}\approx 1.732$, $\sqrt{5}\approx 2.236$, $\sqrt{6}\approx 2.449$, $\pi\approx 3.142$

   $\sin 23^\circ\approx 0.40$，$\sin 37^\circ\approx 0.60$，$\sin 53^\circ\approx 0.80$，$\cos 23^\circ\approx 0.92$，$\cos 37^\circ\approx 0.80$，$\cos 53^\circ\approx 0.60$

8. 對數值：$\log 2\approx 0.3010$，$\log 3\approx 0.4771$，$\log 5\approx 0.6990$，$\log 7\approx 0.8451$

9. 若 $X\sim B(n,p)$ 為二項分布，則期望值 $E(X)=np$，變異數 $Var(X)=np(1-p)$；

   若 $X\sim G(p)$ 為幾何分布，則期望值 $E(X)=\dfrac{1}{p}$，變異數 $Var(X)=\dfrac{1-p}{p^2}$。