龍騰文化

114 學年度學科能力測驗全真模擬試卷

數學 B 考科　解答卷

■答案

第壹部分：

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13	14-1
4	2	3	1	3	3	5	134	125	45	13	124	4	1
14-2	15	16-1	16-2	16-3	17-1	17-2							
0	5	9	2	7	1	2							

第貳部分：

18.	19.	20.
3	0	$\frac{29}{60}$

■解析

1. 一個正四面體有 6 個邊，任選 2 個有 $C^6_2=15$ 種情形，

   恰為歪斜的有 3 種，所以機率為 $\frac{3}{15}=\frac{1}{5}$ ，

   故選(4)。

2. 令公比為 r ，所以 $b=ar$ ， $c=ar^2$ ， $d=ar^3$

   $$\begin{cases}a+b=3\\a+c=5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a+ar=3\\a+ar^2=5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a(1+r)=3\cdots\cdots①\\a(1+r^2)=5\cdots\cdots②\end{cases}$$

   $$\Rightarrow\frac{②}{①}=\frac{a(1+r^2)}{a(1+r)}=\frac{5}{3}\Rightarrow\frac{1+r^2}{1+r}=\frac{5}{3}\Rightarrow 3r^2+3=5+5r ，$$

   $$3r^2-5r-2=0\Rightarrow(3r+1)(r-2)=0\Rightarrow r=-\frac{1}{3} ， 2 。$$

   當 $r=-\frac{1}{3}$ ，代入①可得 $\frac{2}{3}a=3\Rightarrow a=\frac{9}{2}$ ，

   所以 $d=ar^3=\frac{9}{2}\times\left(-\frac{1}{3}\right)^3=-\frac{1}{6}$ ，

   當 $r=2$ ，代入①可得 $3a=3\Rightarrow a=1$ ，

   所以 $d=ar^3=1\times(2)^3=8$ 。

   故選(2)。

3. $\overline{AD}=\overline{AB}\times\sin B=\overline{CD}\times\tan C$ ，

   $\Rightarrow 3\sin B=2\tan C\Rightarrow\sin B:\tan C=2:3$ ，

   即 $\sin B:\tan C$ 比值為 $\frac{2}{3}$ 。

   故選(3)。

4. 此乘客攜帶違禁物品且被檢測出攜帶的機率為

   0.001×0.99 ，

   此乘客未攜帶違禁物品卻被檢測出攜帶的機率為

   0.999×0.02 ，

   此乘客被檢測出攜帶違禁物品，這名乘客實際上攜帶違禁物品的機率是

   $$\frac{0.001\times0.99}{0.999\times0.02+0.001\times0.99}\approx\frac{0.001}{0.02+0.001}=\frac{1}{21}<5\% ，$$

   故選(1)。

5. $x=(6400\times\cos25°)\times\cos122°$

   $\approx6400\times0.91\times(-0.53)\approx-3087$ ，

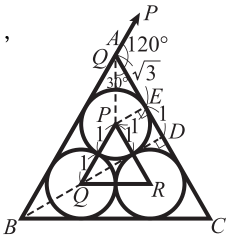
   $y=(6400\times\cos25°)\times\sin122°$

   $\approx6400\times0.91\times0.85\approx4950$ ，

   $z=6400\times\sin25°\approx6400\times0.42\approx2688$ ，

   故選(3)。

6. 由圖知，$\left|\overrightarrow{AC}\right|=2\sqrt{3}+2$，$\left|\overrightarrow{QP}\right|=2$，



將 $\overrightarrow{QP}$ 的起點 Q 移至 A 點處，

可知 $\overrightarrow{AC}$ 與 $\overrightarrow{QP}$ 的夾角為 $120°$，

則 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{QP}=\left(2+2\sqrt{3}\right)\times 2\times\cos 120°$

$=\left(2+2\sqrt{3}\right)\times 2\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-2-2\sqrt{3}$，

故選(3)。

7. 因為 $0<y<1\Rightarrow 0<y^2<1\Rightarrow 0<2y^2<2$，

所以 x 的整數部分為 3，令 $x=3+y$，

$\Rightarrow x^2+2y^2=(3+y)^2+2y^2=12\Rightarrow 3y^2+6y-3=0$

$\Rightarrow y^2+2y-1=0$，

得 $y=\dfrac{-2\pm\sqrt{4+4}}{2}=\dfrac{-2\pm 2\sqrt{2}}{2}=-1\pm\sqrt{2}$（負不合），

則 $y=-1+\sqrt{2}$，$x=3+y=2+\sqrt{2}$，

即 $3x+y=6+3\sqrt{2}-1+\sqrt{2}=5+4\sqrt{2}$，

故選(5)。

8. (1) ○：$\sin 100°+\cos 100°$

$=\sin 80°-\cos 80°=\sin 80°-\sin 10°>0$。

(2) ╳：$\tan 160°+\tan 20°=-\tan 20°+\tan 20°=0$。

(3) ○：因為 $-1<\cos 230°<0$，所以 $0<1+\cos 230°<1$。

(4) ○：因為 $0<\cos 40°<1$，

所以 $\tan 40°=\dfrac{\sin 40°}{\cos 40°}>\sin 40°$

$\Rightarrow \tan 40°-\sin 40°>0$。

(5) ╳：$\dfrac{1}{2}<\dfrac{\pi}{6}\Rightarrow \sin\dfrac{1}{2}<\sin\dfrac{\pi}{6}\Rightarrow \sin\dfrac{1}{2}<\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow 2\sin\dfrac{1}{2}<1$，又 $\dfrac{\pi}{2}>1>\dfrac{\pi}{4}\Rightarrow \tan 1>\tan\dfrac{\pi}{4}=1$，

即 $2\sin\dfrac{1}{2}<\tan 1$，所以 $2\sin\dfrac{1}{2}-\tan 1<0$。

故選(1)(3)(4)。

9. (1) ○：$4^{\log 3}=\left(2^2\right)^{\log 3}=2^{2\log 3}=2^{\log 3^2}=2^{\log 9}$。

(2) ○：$10^{\log 2}+10^{\log 3}=2+3=5$。

(3) ╳：$\log 12=\log\left(2^2\times 3\right)=\log 2^2+\log 3$

$=2\log 2+\log 3\approx 2\times 0.3010+0.4771=1.0791$。

(4) ╳：$\log 0.2=\log\dfrac{1}{5}=\log\dfrac{2}{10}$

$=\log 2-\log 10\approx 0.3010-1=-0.6990$。

(5) ○：$3^{\log 2}=10^{\left(\log 3^{\log 2}\right)}=10^{\log 2\times\log 3}=\left(10^{\log 2}\right)^{\log 3}=2^{\log 3}$。

故選(1)(2)(5)。

10. $f(1)=f(2)=f(6)=0$，

可令 $f(x)=a(x-1)(x-2)(x-6)$。

因為 $f(0)=-12$，

所以 $f(0)=a(0-1)(0-2)(0-6)=-12a=-12\Rightarrow a=1$，

得 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-6)=x^3-9x^2+20x-12$。

(1) ╳：$f(x)$ 除以 $x-3$ 的餘式為

$f(3)=(3-1)(3-2)(3-6)=2\times 1\times(-3)=-6$。

(2) ╳：$f(x)=x^2(x-9)+20x-12$，

所以 $f(x)$ 除以 x^2 的餘式為 $20x-12$。

(3) ╳：$f(10)=288>6$，$(10,f(10))$ 在 $y=6$ 的上方。

(4) ○：$x^3-9x^2+20x-12$

$=\left(x^3-9x^2+27x-27\right)-7x+15$

$=(x-3)^3-7(x-3)-6$

所以對稱中心為 $(3,-6)$，

而直線 $y=-6$ 會通過點 $(3,-6)$。

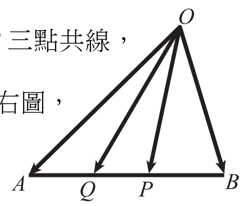
(5) ○：$f(2.99)=(2.99-3)^3-7(2.99-3)-6$

$=-0.000001+0.07-6\approx 0.07-6$

$=-5.93\approx -5.9$。

故選(4)(5)。

11. 由 $\overrightarrow{OP}=\dfrac{2}{5}\overrightarrow{OA}+\dfrac{3}{5}\overrightarrow{OB}$ 知 P、A、B 三點共線，



且 P 在 A、B 之間依題意可畫出右圖，

知 Q、P、B 三點共線，

故 $x+y=1$，且 $x>0$，$y<0$，

故選(1)(3)。

12. (1) ○：因為 $-2\le f(x)\le 2$，所以 $f(x)$ 的振幅為 2，

且 $a>0$，所以 $a=2$。

(2) ○：因為 $f(x)$ 的週期為 $\dfrac{8\pi}{12}=\dfrac{2\pi}{3}$ 且 $b>0$，

所以 $\dfrac{2\pi}{b}=\dfrac{2\pi}{3}$，所以 $b=3$。

(3) ╳：承(1)(2)，$f(x)=2\sin(3x+c)$，

由圖形坐標得 $f\left(-\dfrac{\pi}{12}\right)=2\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}+c\right)=0$，

又 $-\pi\le c\le\pi$，所以 $c=\dfrac{\pi}{4}$ 或 $-\dfrac{3\pi}{4}$……①。

因為 $f\left(\dfrac{\pi}{12}\right)=2$

$\Rightarrow 2\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+c\right)=2\Rightarrow \sin\left(\dfrac{\pi}{4}+c\right)=1$，

將①代入，只有$\dfrac{\pi}{4}$符合，故$c=\dfrac{\pi}{4}$。

(4) ○：承(1)(2)(3)，

$f(x)=2\sin\left(3x+\dfrac{\pi}{4}\right)=2\sin 3\left(x+\dfrac{\pi}{12}\right)$，

所以$f(x)$的圖形可由$y=2\sin 3x$的圖形向左平移$\dfrac{\pi}{12}$而得。

(5) ╳：令$x=\dfrac{\pi}{4}$，

所以$f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=2\sin\left(\dfrac{3\pi}{4}+\dfrac{\pi}{4}\right)=2\sin\pi=0$不是最大值或最小值，

所以$f(x)$的圖形沒有對稱於鉛直線$x=\dfrac{\pi}{4}$。

故選(1)(2)(4)。

13. $\begin{bmatrix} a+b & c-5 \\ c+5 & a-b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 49 & -22 \\ 29 & -13 \end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 49 & -22 \\ 29 & -13 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow c-5=3\times(-22)+(-5)\times(-13)=-1\Rightarrow c=4$。

14. 利用$\overline{AB}$的中點$(4,1)$與$\overline{AB}$垂直的斜率 1，

可知$\overline{AB}$的中垂線為$x-y=3$，

圓心會是直線$x-y=3$與$x-3y=-3$的交點，

得$\begin{cases} x-y=3 \\ x-3y=-3 \end{cases}\Rightarrow(x,y)=(6,3)$，此為圓心$O$。

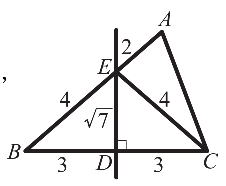
又半徑為$\overline{OA}=\sqrt{(6-3)^2+(3-2)^2}=\sqrt{10}$。

所以圓面積為$\left(\sqrt{10}\right)^2\pi=10\pi$。

15. $C_3^{n+2}=35\Rightarrow\dfrac{(n+2)(n+1)n}{3\times2\times1}=35$

$\Rightarrow n(n+1)(n+2)=5\times6\times7\Rightarrow n=5$。

16. 如圖，



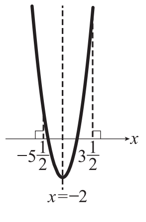
$\overline{BE}=\overline{EC}=4$，$\overline{DE}=\sqrt{4^2-3^2}=\sqrt{7}$，

所以$\sin B=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$，

$\triangle ABC$面積為

$\dfrac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{BC}\times\sin B=\dfrac{1}{2}\times6\times6\times\dfrac{\sqrt{7}}{4}=\dfrac{9}{2}\sqrt{7}$。

17. 如右圖，拋物線圖形開口向上，



對稱軸$x=\dfrac{-4}{2}=-2$確實在中間，

$f(-2)<0\Rightarrow 4-8+k<0\Rightarrow k<4\cdots\cdots$①

$f\left(3\dfrac{1}{2}\right)>0\Rightarrow\dfrac{49}{9}+14+k>0\Rightarrow k>-26\dfrac{1}{4}\cdots\cdots$②，

$f\left(-5\dfrac{1}{2}\right)>0\Rightarrow\dfrac{121}{4}-22+k>0\Rightarrow k>-8\dfrac{1}{4}\cdots\cdots$③，

取①②③的交集知$-8\dfrac{1}{4}<k<4$，

$\Rightarrow -8\le k\le 3\Rightarrow k=-8,-7\cdots\cdots,3$共12個。

18. 令任選 1 人答對第n題的機率為$P(n)$，

同時答對第m、n兩題的機率為$P(m\cap n)$，

若第m、n兩題的答題狀況是獨立的，

則$P(m\cap n)=P(m)P(n)$，

答對第 6 題的有 5 人，

任選 1 人答對第 6 題的機率為 0.5，

即$P(6)=0.5$。

(1) $P(4)=0.6$，$P(4\cap6)=0.3$，

$P(4)P(6)=0.6\times0.5=0.3\Rightarrow P(4)P(6)=P(4\cap6)$，

故第 4、6 兩題的答題狀況是獨立的。

(2) $P(5)=0.6$，$P(5\cap6)=0.3$，

$P(5)P(6)=0.6\times0.5=0.3\Rightarrow P(5)P(6)=P(5\cap6)$，

故第 5、6 兩題的答題狀況是獨立的。

(3) $P(7)=0.8$，$P(7\cap6)=0.3$，

$P(7)P(6)=0.8\times0.5=0.4\Rightarrow P(7)P(6)\ne P(7\cap6)$，

故第 7、6 兩題的答題狀況不是獨立的。

(4) $P(8)=0.8$，$P(8\cap6)=0.4$，

$P(8)P(6)=0.8\times0.5=0.4\Rightarrow P(8)P(6)=P(8\cap6)$，

故第 8、6 兩題的答題狀況是獨立的。

(5) $P(9)=0.8$，$P(9\cap6)=0.4$，

$P(9)P(6)=0.8\times0.5=0.4\Rightarrow P(9)P(6)=P(9\cap6)$，

故第 9、6 兩題的答題狀況是獨立的。

故選(3)。

19. $S_{9,10}=0\times0+1\times1+1\times1+0\times1+1\times0+1\times0+0\times1+1\times1$

$+1\times0+0\times0-10\times0.6\times0.5$

$=3-3=0$，

$S_{9,9}=0^2+1^2+1^2+0^2+1^2+1^2+0^2+1^2+1^2+0^2-10\times0.6^2$

$=6-3.6=2.4\ne0$，

$S_{10,10}=0^2+1^2+1^2+1^2+0^2+0^2+1^2+1^2+0^2+0^2-10\times0.5^2$

$=5-2.5=2.5\ne0$，

所以 9 號同學與 10 號同學作答情形的相關係數

$r_{9,10}=\dfrac{S_{9,10}}{\sqrt{S_{9,9}}\sqrt{S_{10,10}}}=\dfrac{0}{\sqrt{S_{9,9}}\sqrt{S_{10,10}}}=0$。

評分標準：

解題過程	得分
步驟一：寫出重要條件 寫出 $S_{9,10}=0$ ， $S_{9,9}\neq 0$ ， $S_{10,10}\neq 0$ 。	2 分
步驟二：計算過程、答案正確 寫出 $r_{9,10}=\dfrac{S_{9,10}}{\sqrt{S_{9,9}}\sqrt{S_{10,10}}}=\dfrac{0}{\sqrt{S_{9,9}}\sqrt{S_{10,10}}}=0$ 。	2 分

20. 將分數由低至高排列：5，5，5，5，6，6，6，7，7，8，

所有的情形有 $C_3^{10}=120$ ，中位數是 6 的有以下 6 種情形，

(1) 6，6，6⇒1 種情形。

(2) 5，6，6⇒有 $C_1^4C_2^3=12$ 種情形。

(3) 6，6，7⇒有 $C_2^3C_1^2=6$ 種情形。

(4) 6，6，8⇒有 $C_2^3C_1^1=3$ 種情形。

(5) 5，6，7⇒有 $C_1^4C_1^3C_1^2=24$ 種情形。

(6) 5，6，8⇒有 $C_1^4C_1^3C_1^1=12$ 種情形。

共有 $1+12+6+3+24+12=58$ 種情形，

所以 3 位同學分數的中位數為 6 的機率為 $\dfrac{58}{120}=\dfrac{29}{60}$ 。

評分標準：

解題過程	得分
步驟一：寫出重要條件 寫出中位數為 6 的所有分類。	2 分
步驟二：計算過程、答案正確 算出各類情形的數量。	4 分
寫出所有情形的數量 C_3^{10} 。	1 分
寫出機率。	1 分