龍騰文化

113 學年度學科能力測驗全真模擬試卷

數學 B 考科　解答卷

■答案

第壹部分：

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13	14-1
1	2	3	1	2	4	5	45	1245	145	134	234	6	1
14-2	**14-3**	**15-1**	**15-2**	**16-1**	**16-2**	**16-3**	**16-4**	**17-1**	**17-2**	**17-3**			
1	3	1	2	3	6	4	8	3	6	5			

第貳部分：

18.	19.	20.
34	138 秒	67 秒

■解析

1. 令 $g(x)=f(x)-2x$，

   因為 $g(x)$ 為偶函數，所以 $g(-1)=g(1)$，

   $f(-1)-2\times(-1)=g(-1)=g(1)=f(1)-2\times 1=-3$

   $\Rightarrow f(-1)=-5$。故選(1)。

2. 設螞蟻 A 速率為 v_1、螞蟻 B 速率為 v_2，地球半徑為 R，

   因為兩隻螞蟻要同時到達，

   所以速率比等於移動路徑長比，

   則 $\dfrac{v_1}{v_2}=\dfrac{R\times\frac{5}{9}\pi}{R\times\cos 40^\circ\times\frac{5}{9}\pi}=\dfrac{1}{\cos 40^\circ}$。故選(2)。

3. 所有選號組合有 C_6^{49} 種，

   對中春節大紅包的組合有 C_6^{9} 種，

   所求機率 $=\dfrac{C_6^9}{C_6^{49}}$。

   故選(3)。

4. $\overline{AB}=\overline{CA}=5$、$\overline{BC}=5\sqrt{2}$，

   由 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$、$\overline{BC}$ 的長度比可知正立方體的稜長為 5，

   故表面積為 $6\times 5^2=150$。故選(1)。

5. 由題意可知 $AB=BA$

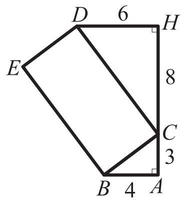
   $\Rightarrow\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k&2\\3&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}k&2\\3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}$

   $\Rightarrow\begin{bmatrix}k+6&4\\3k+12&10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}k+6&2k+8\\6&10\end{bmatrix}$，

   解得 $k=-2$。

   故選(2)。

6. 因為 $\triangle ABC$ 為直角三角形，

   所以 $\overline{AC}=\sqrt{5^2-4^2}=3$，

   過 D 作 $\overline{DH}\perp\overleftrightarrow{AC}$ 交 $\overleftrightarrow{AC}$ 於 H，

   因為 $\angle ABC=90^\circ-\angle ACB=\angle DCH$，

   又 $\angle A=\angle H=90^\circ$，

   所以 $\triangle ABC\sim\triangle HCD$(AA)

   $\Rightarrow\dfrac{\overline{AB}}{\overline{HC}}=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{HD}}=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{CD}}\Rightarrow\dfrac{4}{\overline{HC}}=\dfrac{3}{\overline{HD}}=\dfrac{5}{10}$

   $\Rightarrow\overline{HC}=8$、$\overline{HD}=6$

   $\Rightarrow\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HD}=\dfrac{11}{3}\overrightarrow{AC}+\dfrac{6}{4}\overrightarrow{AB}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AB}+\dfrac{11}{3}\overrightarrow{AC}$

   $\Rightarrow(x,y)=\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{11}{3}\right)$。故選(4)。

7. 因為牆面不與任一母線平行，
所以光打在牆面上的圖形應為雙曲線的一支。
故選(5)。

8. 標準化後平均為 0，標準差為 1，
且迴歸直線斜率即為原本的相關係數，
故斜率需介於 $-1\sim1$ 間且必過 $(0,0)$。故選(4)(5)。

9. (1) ○： $\dfrac{250}{1000}=\dfrac{1}{4}$ 。

(2) ○： $\dfrac{160}{510}=\dfrac{16}{51}$ 。

(3) ╳： $P($男學生$|$政黨傾向為 A 黨$)$

$=\dfrac{\frac{250}{1600}}{\frac{450}{1600}}=\dfrac{250}{450}=\dfrac{5}{9}$ 。

(4) ○： 因為 $n($C 黨且男生$):n($C 黨且女生$)$

$=400:240=1000:600$

$=n($男生$):n($女生$)$，

所以政黨傾向為 C 黨與性別兩者關係為獨立。

(5) ○： 設需要使 x 名傾向 A 黨的女學生改變其政黨傾向，

$250:(200-x)=1000:600\Rightarrow x=50$ 。

故選(1)(2)(4)(5)。

10. (1) ○： $63_{(10)}$

$=1\times2^5+1\times2^4+1\times2^3+1\times2^2+1\times2^1+1\times2^0$

$=111111_{(2)}$ 。

(2) ╳： 由題意可知，n 個位元最多可儲存 2^n 個數字，
故要儲存 $0\sim127$ 之間的所有正整數共 128 個數字至少需要 7 個位元。

(3) ╳： $123_{(8)}=1\times8^2+2\times8^1+3\times8^0=83_{(10)}$ ，

$1010010_{(2)}$

$=1\times2^6+0\times2^5+1\times2^4+0\times2^3+0\times2^2+1\times2^1+0\times2^0$

$=82_{(10)}$ 。

(4) ○： 1 個位元組有 8 個位元，
故可儲存 $2^8=256$ 個相異整數。

(5) ○： -32768 至 32767 之間的整數共有 65536 個，
又 $65536=2^{16}$ ，
所以要儲存正義值至少需要 16 個位元，
相當於 2 個位元組。

故選(1)(4)(5)。

11. (1)(3)○：由電壓最大值為 110 伏特、最小值-110 伏特

可得 $\begin{cases}a+d=110\\-a+d=-110\end{cases}$ ，

推得 $a=110$ ， $d=0$ 。

(2) ╳： 由頻率 60 赫茲可知週期為 $\dfrac{1}{60}$ 秒，

則 $\dfrac{2\pi}{b}=\dfrac{1}{60}\Rightarrow b=120\pi$ 。

(4) ○： $V(3)=110\sin(120\pi\times3+c)=110$

$\Rightarrow\sin(c+360\pi)=\sin c=1\Rightarrow c=\dfrac{\pi}{2}$ 。

(5) ╳：因為 55 伏特不為最大電壓，
所以在一個週期內會有兩個時間點的電壓為 55 伏特。

故選(1)(3)(4)。

12. (1) ╳： L 必過 $(-1,3)$ 且 $(-1,3)$ 為圓 C 上一點，
則 L 可能為圓 C 的切線或割線。

(2) ○： 若要平分圓面積則必過圓心，

故 $m=\dfrac{0-3}{0-(-1)}=-3$ 。

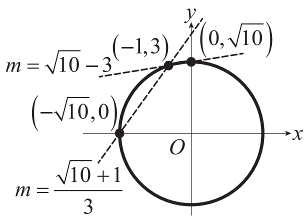
(3) ○： 當 L 為圓 C 的切線時，圓心到直線 L 的距離有最大值為圓半徑 $=\sqrt{10}$ 。

(4) ○： 承(3)，令圓心為 O 、 $P(-1,3)$ ，

因為 $m_{\overline{OP}}=-3$ 且直線 L 與 $\overline{OP}$ 垂直，

則 $m=\dfrac{1}{3}$ 。

(5) ╳： 如圖，



m 應介於 $\sqrt{10}-3$ 與 $\dfrac{\sqrt{10}+1}{3}$ 之間，

但當 $m=\dfrac{1}{3}$ 時，直線 L 與圓 C 相切，

所以 $\sqrt{10}-3<m<\dfrac{\sqrt{10}+1}{3}$ ，但 $m\neq\dfrac{1}{3}$ 。

故選(2)(3)(4)。

13. $f(x)$ 圖形的對稱軸方程式為

$x=\dfrac{(a-2)+(a+10)}{2}=\dfrac{(a-5)+(3a+1)}{2}$ ，

解得 $a=6$ 。

14. 因為 $\log_3 a$ 、 $\log_9 b$ 、 $\log_{27} c$ 成等差數列，

所以 $2\log_9 b = \log_3 a + \log_{27} c$

$\Rightarrow \log_3 b = \log_3 a + \frac{1}{3}\log_3 c$

$\Rightarrow \log_3 b = \log_3\left(a \times c^{\frac{1}{3}}\right)$

$\Rightarrow b = a \times c^{\frac{1}{3}}$ 。故數對 $(x, y) = \left(1, \frac{1}{3}\right)$ 。

15. 因為 $\overline{AO} = 5$ ， $\overline{BO} = 4$ ， $\overline{AB} = \sqrt{21}$ ，

所以 $\cos\angle AOB = \frac{5^2 + 4^2 - 21}{2 \times 5 \times 4} = \frac{1}{2}$ ，

即 $\angle AOB = 60^\circ$ 。

經過 t 小時後， $\overline{OD} = 5 - t$ ， $\overline{OE} = 4 + t$ ，

$\overline{DE} = \sqrt{(5-t)^2 + (4+t)^2 - 2 \times (5-t)(4+t) \times \cos 60^\circ}$

$= \sqrt{3t^2 - 3t + 21} = \sqrt{3\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{81}{4}}$ ，

當 $t = \frac{1}{2}$ ，得 $\overline{DE}$ 有最小值 $\sqrt{\frac{81}{4}} = \frac{9}{2}$ （公里）。

16. ① 「清水寺、八坂神社、平安神宮」與「北野天滿宮、金閣寺」安排在同一天，

則行程有 $\left(2! \times 2! \times C_1^2\right) \times 4! \times 2! = 384$ 種組合。

② 「清水寺、八坂神社、平安神宮」+一個古蹟安排在一天、另一天為「北野天滿宮、金閣寺」+三個古蹟，則行程有

$\left(C_1^4 \times 2! \times C_1^2\right) \times \left(C_3^3 \times 4! \times 2!\right) \times 2! = 1536$ 種組合。

③ 「清水寺、八坂神社、平安神宮」+兩個古蹟安排在一天、另一天為「北野天滿宮、金閣寺」+兩個古蹟，則行程有

$\left(C_2^4 \times 3! \times C_1^2\right) \times \left(C_2^2 \times 3! \times 2!\right) \times 2! = 1728$ 種組合。

由①②③得：共有 $384 + 1536 + 1728 = 3648$ 種組合。

17. $\triangle AEI$ 面積 $= \frac{1}{2} \times 7 \times 8 \times \sin\angle EAI$

$= \frac{1}{2} \times 7 \times 8 \times \sin\angle BAC = \triangle ABC$ 面積 ，

同理 $\triangle BDF$ 面積 $= \triangle CGH$ 面積 $= \triangle ABC$ 面積 。

又 $\triangle ABC$ 面積 $= \sqrt{12 \times (12-7) \times (12-8) \times (12-9)}$

$= 12\sqrt{5}$ ，

所求 $= 3\triangle ABC$ 面積 $= 36\sqrt{5}$ 。

18. $4 \times \frac{750}{250} = 12$ 、 $4 \times \frac{750}{350} \approx 8.57$ ，

所以茶葉的重量合適的範圍應在 8.57 公克至 12 公克之間。故選(3)(4)。

19. 依題意，將 $H = 70$ 、 $x = 100$ 代入，

得 $70 \geq 25 + (100 - 25) \times \left(\frac{5}{4}\right)^{-t}$

$\Rightarrow \left(\frac{5}{4}\right)^{-t} \leq \frac{3}{5} \Rightarrow -t\log\frac{5}{4} \leq \log\frac{3}{5}$

$\Rightarrow -t(\log 5 - \log 4) \leq \log 3 - \log 5$

$\Rightarrow t \geq \frac{\log 5 - \log 3}{\log 5 - \log 4} \approx \frac{0.699 - 0.4771}{0.699 - 0.602} \approx 2.288$ 分 $= 137.28$ 秒，

故至少須放置 138 秒後才適合泡茶。

評分標準：

① 將 $H = 70$ 、 $x = 100$ 代入 $H \geq 25 + (x - 25) \times \left(\frac{5}{4}\right)^{-t}$ ，

得 2 分。

② 計算得 $t \approx 2.288$ 分，得 3 分。

③ 計算得至少須放置 138 秒，得 1 分。

20. 設經過 t_1 分鐘後，水溫達 70°C、經過 t_2 分鐘後，水溫達 60°C，

$$\begin{cases} 70 = 25 + (100 - 25) \times \left(\frac{5}{4}\right)^{-t_1} \\ 60 = 25 + (100 - 25) \times \left(\frac{5}{4}\right)^{-t_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{5}{4}\right)^{-t_1} = \frac{3}{5} \\ \left(\frac{5}{4}\right)^{-t_2} = \frac{7}{15} \end{cases},$$

兩式相除得： $\left(\frac{5}{4}\right)^{-(t_1 - t_2)} = \frac{9}{7}$

$\Rightarrow (t_2 - t_1)\log\frac{5}{4} = \log\frac{9}{7}$

$\Rightarrow t_2 - t_1 = \frac{\log 9 - \log 7}{\log 5 - \log 4} \approx \frac{0.9542 - 0.8451}{0.699 - 0.602} \approx 1.125$ （分），

所求為 $t_2 - t_1 \approx 1.125$ 分 $= 67.5$ 秒，

故應該在 67 秒內注水至茶壺（杯）中較為合適。

評分標準：

① 列出 $\begin{cases} 70 = 25 + (100 - 25) \times \left(\frac{5}{4}\right)^{-t_1} \\ 60 = 25 + (100 - 25) \times \left(\frac{5}{4}\right)^{-t_2} \end{cases}$ ，得 2 分。

② 解得 $t_2 - t_1 \approx 1.125$ 分，得 3 分。

③ 計算得應該在 67 秒內注水至茶壺（杯），得 1 分。