

# 115 學年度學科能力測驗全真模擬試卷

## 數學 B 考科 解答卷

### ■ 答案

第壹部分：

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	(13-1)	(13-2)
1	2	5	4	1	4	5	345	15	35	15	34	4	6
(14-1)	(14-2)	(14-3)	(14-4)	(15-1)	(15-2)	(16-1)	(16-2)	(17-1)	(17-2)				
1	1	3	2	1	5	3	3	4	8				

第貳部分：

18.	19.	20.
35	$2^{\frac{5}{7}}$	19 位數

### ■ 解析

$$1. \quad x^2 - x + 1 \leq 0 \Rightarrow \left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) + \frac{3}{4} \leq 0 \Rightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \leq 0$$

$\Rightarrow x$  無實數解。

另解：二次項係數 1 為正，且判別式  $(-1)^2 - 4 \times 1 \times 1 < 0$

$\Rightarrow x^2 - x + 1$  恆正  $\Rightarrow x^2 - x + 1 \leq 0$  無實數解。

(1) ○：  $x^2 - x + 1$  恆正  $\Rightarrow x^2 - x + 1 < 0$  無實數解。

(2) ×：  $(x-2)^2 \leq 0$  的解為  $x=2$ 。

(3) ×：  $(x-2)^2 > 0$  的解為所有實數， $x \neq 2 \Rightarrow x$  有解。

(4) ×：  $x^2 - 3x + 1 \leq 0 \Rightarrow \frac{3-\sqrt{5}}{2} \leq x \leq \frac{3+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow x$  有解。

(5) ×：  $x^2 - 3x + 1 < 0 \Rightarrow \frac{3-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{3+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow x$  有解。

故選(1)。

$$2. \quad \textcircled{1} \text{ 配方： } y = 2(1 - \sin^2 \theta) - 3\sin \theta + 3$$

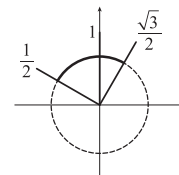
$$= -2\sin^2 \theta - 3\sin \theta + 5$$

$$= -2\left(\sin \theta + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{49}{8}。$$

② 角度有範圍時，畫圖切斷：

若  $60^\circ \leq \theta \leq 150^\circ$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \leq \sin \theta \leq 1。$$



③ 當  $\sin \theta = \frac{1}{2}$  時， $y$  有最大值  $M=3$ ；

當  $\sin \theta = 1$  時， $y$  有最小值  $m=0$ 。

故  $M+m=3$ ，故選(2)。

3.  $y = ax^2 + bx + c$  的圖形開口朝上

$\Rightarrow a > 0$ ， $y$  截距  $c > 0$ ，對稱軸  $x = -\frac{b}{2a} < 0$

$\Rightarrow b > 0$ ，

所以  $a > 0$ ， $b > 0$ ， $c > 0$ ，

因為  $a > 0$ ，所以  $y = g(x)$  趨勢向上，故(3)不合，

又  $c > 0$  且  $y = g(x)$  交  $y$  軸於  $(0, c)$ ，

故(1)(2)均不合，

其中  $y = g(x)$  對稱中心為  $(h, k)$ ， $h = -\frac{b}{2a} < 0$ ，

故(4)不合，

由上可知，可能圖形為(5)，故選(5)。

4. 因為  $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{0}$

$$\Rightarrow \vec{OA} + \vec{OB} = -\vec{OC} \Rightarrow |\vec{OA} + \vec{OB}|^2 = |-\vec{OC}|^2,$$

$$\Rightarrow |\vec{OA}|^2 + 2|\vec{OA}||\vec{OB}|\cos\theta + |\vec{OB}|^2 = |-\vec{OC}|^2$$

$$\Rightarrow 200^2 + 2 \times 200 \times 400 \times \cos\theta + 400^2 = 300^2$$

$$\Rightarrow 4 + 16 \times \cos\theta + 16 = 9, \text{ 所以 } \cos\theta = -\frac{11}{16}, \text{ 故選(4).}$$

5. 設分貝數  $d_n$  對應到的聲音強度為  $I_n$ ,

$$d_n = 10 \log \frac{I_n}{I_0} \Rightarrow \frac{I_n}{I_0} = 10^{\frac{d_n}{10}} \Rightarrow I_n = I_0 \times 10^{\frac{d_n}{10}},$$

$$n=1,2,3, I_1 = I_0 \times 10^2, I_2 = I_0 \times 10^4, I_3 = I_0 \times 10^8$$

$$\Rightarrow I_1 + I_2 + I_3 = I_0 \times 10^2 + I_0 \times 10^4 + I_0 \times 10^8$$

$$= I_0 \times 10^4 \times (0.01 + 1 + 10^4)$$

$$= I_0 \times 10^4 \times (10001.01) \approx I_0 \times 10^4 \times 10^4 = I_0 \times 10^8,$$

三個音源同時發聲合起來產生的分貝數為

$$10 \log \frac{I_1 + I_2 + I_3}{I_0} \approx 10 \log \frac{10^8 \times I_0}{I_0} = 10 \times 8 = 80,$$

故選(1)。

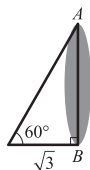
6. 因為  $\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ,

所以軸與母線的夾角為  $30^\circ$ ,

將燈旋轉  $30^\circ$  後,

下面的母線與牆會垂直, 考慮右圖,

$$\overline{AB} = \sqrt{3} \tan 60^\circ = \sqrt{3} \times \sqrt{3} = 3, \text{ 故選(4).}$$



7. 因為比賽結果美聯以 2:0 擊敗國聯,

得分過程可能有 0 分、1 分或 2 分,

① 美聯的得分過程在 9 局中任選兩局各得 1 分,

其餘皆 0 分:  $C_2^9 = 36$

隊名	1	2	3	4	5	6	7	8	9	合計
美聯	0	1	0	0	0	0	1	0	0	2
國聯	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

② 美聯的得分過程在 9 局中任選一局得 2 分,

其餘皆 0 分:  $C_1^9 = 9$

隊名	1	2	3	4	5	6	7	8	9	合計
美聯	0	0	0	0	0	2	0	0	0	2
國聯	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

所以由①、②可得  $36 + 9 = 45$ , 故選(5)。

8. (1)  $\times$ : 買 3 件時才是打 83 折 ( $\frac{500}{600} \approx 0.83$ )。

(2)  $\times$ : 買 2 送 1 才是打 67 折 ( $\frac{400}{600} \approx 0.67$ )。

(3)  $\circ$ : 每件都打 75 折 ( $\frac{150}{200} = 0.75$ )。

(4)  $\circ$ : 買 5 件到甲商家共花  $500 + 200 \times 2 = 900$  元,  
買 5 件到乙商家共花  $400 + 400 = 800$  元,  
買 5 件到丙商家共花  $150 \times 5 = 750$  元,  
所以丙最便宜。

(5)  $\circ$ : 買 50 件到甲商家共花

$$500 \times 16 + 200 \times 2 = 8400 \text{ 元,}$$

買 50 件到乙商家共花

$$\frac{32 \times 200}{\text{買 32 件}} + \frac{2 \times 200}{\text{再買 2 件}} = 6800 \text{ 元,}$$

送 16 件

$$\text{買 50 件到丙商家共花 } 150 \times 50 = 7500 \text{ 元,}$$

所以乙最便宜。

故選(3)(4)(5)。

9. (1)  $\circ$ : 甲中獎機率  $P(\text{甲}) = \frac{3}{10}$ 。

(2)  $\times$ : 乙中獎機率  $P(\text{乙}) = \frac{3}{10}$ 。

(3)  $\times$ : 丙中獎機率  $P(\text{丙}) = \frac{3}{10}$ 。

(4)  $\times$ :  $P(\text{甲} \cap \text{乙}') + P(\text{甲}' \cap \text{乙})$

$$= \frac{3}{10} \times \frac{7}{9} + \frac{7}{10} \times \frac{3}{9} = \frac{42}{90} = \frac{7}{15}。$$

(5)  $\circ$ : 設  $A$  表示甲、乙都中獎的事件,

$$\text{所以 } P(A) = \frac{3}{10} \times \frac{2}{9} = \frac{6}{90}。$$

$B$  表示丙中獎的事件,

$$\text{所以 } P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{3}{10} \times \frac{2}{9} \times \frac{1}{8}}{\frac{6}{90}} = \frac{1}{8}。$$

故選(1)(5)。

10. (1)  $\times$ : 若某人的  $X$  得最高分, 但  $Y$  不是最高分,  
則  $X$  與  $Y$  相差會多於 22 分。

(2)  $\times$ : 舉一反例說明錯誤:

若  $X$  最高 56, 最低 46, 則  $X$  全距為 10;

$Y$  最高 34, 最低 14, 則  $Y$  全距為 20,

此時  $Y$  的全距會高於  $X$  的全距。

(3)  $\circ$ :  $\frac{40 \times 80 + 30 \times 80}{80} = 70$ 。

(4)  $\times$ : 若所有人的合計分都相去不遠,  
則合計分的標準差可能會小於 4。

(5)  $\circ$ : 迴歸直線斜率為相關係數乘以標準差的比值。

因為標準差與相關係數皆大於 0,

所以迴歸直線斜率大於 0。

故選(3)(5)。

11. 設兩個月前單價矩陣  $M = \begin{bmatrix} 1300 & 1200 \\ 700 & 600 \\ 400 & 300 \end{bmatrix}$ ，且物價每個月

下跌 17%，即單價剩原來的  $1 - 17\% = 83\% = 0.83$ ，

所以現在的單價矩陣  $N = (0.83)^2 \begin{bmatrix} 1300 & 1200 \\ 700 & 600 \\ 400 & 300 \end{bmatrix}$ 。

(1) ○：  $(0.83)^2 \times \begin{bmatrix} 1300 & 1200 \\ 700 & 600 \\ 400 & 300 \end{bmatrix} = \text{單價矩陣 } N$ 。

(2) ✕：  $2 \times (0.83) \times \begin{bmatrix} 1300 & 1200 \\ 700 & 600 \\ 400 & 300 \end{bmatrix} \neq \text{單價矩陣 } N$ 。

(3) ✕：  $(0.66) \times \begin{bmatrix} 1300 & 1200 \\ 700 & 600 \\ 400 & 300 \end{bmatrix} \neq \text{單價矩陣 } N$ 。

(4) ✕：  $\begin{bmatrix} 2 \times 0.83 & 0 & 0 \\ 0 & 2 \times 0.83 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \times 0.83 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1300 & 1200 \\ 700 & 600 \\ 400 & 300 \end{bmatrix} \neq \text{單價矩陣 } N$ 。

(5) ○：  $\begin{bmatrix} 0.83 & 0 & 0 \\ 0 & 0.83 & 0 \\ 0 & 0 & 0.83 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1300 & 1200 \\ 700 & 600 \\ 400 & 300 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.83 & 0 \\ 0 & 0.83 \end{bmatrix}$   
 $= \begin{bmatrix} 0.83 & 0 & 0 \\ 0 & 0.83 & 0 \\ 0 & 0 & 0.83 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1300 & 1200 \\ 700 & 600 \\ 400 & 300 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.83 & 0 \\ 0 & 0.83 \end{bmatrix}$   
 $= (0.83)^2 \begin{bmatrix} 1300 & 1200 \\ 700 & 600 \\ 400 & 300 \end{bmatrix} = \text{單價矩陣 } N$ 。

故選(1)(5)。

12. 因為  $\overline{AB} = \overline{AC} = 7.5$  公里，  
所以  $\triangle ABC$  為等腰三角形。

(1) ✕：作  $\overline{AD} \perp \overline{BC}$

$\Rightarrow A$  點到  $\overline{BC}$  的最近距離為

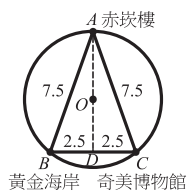
$$\overline{AD} = \sqrt{7.5^2 - 2.5^2} = 2.5\sqrt{9-1} = 5\sqrt{2}。$$

(2) ✕：  $\tan \angle ABC = \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = \frac{5\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$ 。

(3) ○：  $\cos \angle BAC = \frac{7.5^2 + 7.5^2 - 5^2}{2 \times 7.5 \times 7.5} = \frac{3^2 + 3^2 - 2^2}{2 \times 3 \times 3} = \frac{7}{9}$ 。

(4) ○：  $\triangle ABC$  面積

$$= \frac{1}{2} \times \overline{BC} \times \overline{AD} = \frac{1}{2} \times 5 \times 5\sqrt{2} = \frac{25\sqrt{2}}{2}。$$



(5) ✕：因為  $\tan \angle ABC = \frac{2\sqrt{2}}{1}$ ，

可得  $\sin \angle ABC = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ ，

故  $\frac{\overline{AC}}{\sin \angle ABC} = \frac{\frac{15}{2}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = 2R$

$\Rightarrow$  外接圓半徑  $R = \frac{\frac{15}{2}}{\frac{4\sqrt{2}}{3}} = \frac{45}{8\sqrt{2}} = \frac{45\sqrt{2}}{16}$ 。

故選(3)(4)。

13. 設經過  $2n$  分鐘，

則簡訊的獲利

$$S = 2 \times 0.1 + 2^2 \times 0.1 + \cdots + 2^n \times 0.1 \geq 1000000$$

$$\Rightarrow \frac{1}{10} \times (2 + 2^2 + \cdots + 2^n) \geq 1000000$$

$$\Rightarrow \frac{2(2^n - 1)}{2 - 1} \geq 10000000，$$

所以  $n$  至少為 23 ( $2^{23} = 8388608$ )，

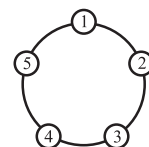
即至少經過 46 分鐘。

14. 沒有相鄰的兩人同時站起來的情形：

① 都沒有人站起來：1 (種)。

② 只有 1 個人站起來：5 (種)。

③ 位置 (1,3)、(1,4)、(2,4)、(2,5)、(3,5) 的人站起來：5 (種)。



所以所求  $= \frac{11}{2^5} = \frac{11}{32}$ 。

15. 若甲班有  $x$  人不及格，乙班有  $y$  人不及格，

則  $\begin{cases} x + y \leq 20 \\ x \leq 3y \\ x \geq 10, y \geq 6 \end{cases}$ ， $x$ 、 $y$  為正整數，

$x$	10、11、12、 13、14	10、11、 12、13	10、11、 12	10、11	10
$y$	6	7	8	9	10

共有  $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$  (種) 情形。

16. 設需要  $t$  小時，

$$20 \times (1 - 0.75)^{\frac{t}{6}} < 0.01$$

$$\Rightarrow 20 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{t}{6}} < \frac{1}{100} \Rightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{t}{6}} < \frac{1}{2000} \Rightarrow \log \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{t}{6}} < \log \frac{1}{2000}$$

$$\Rightarrow -\frac{t}{6} \times \log 4 < -4 + \log 5$$

$$\Rightarrow t > \frac{6 \times (-4 + \log 5)}{-\log 4} \approx 32.9，取 t = 33。$$

17. 令長 =  $\sqrt{5}+1$ ，寬 = 2，高 =  $\sqrt{5}-1$ ，

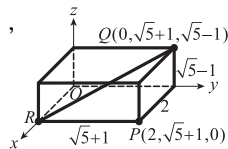
對角線  $\overline{QR}$  的長度為

$$m = \sqrt{(\sqrt{5}+1)^2 + 2^2 + (\sqrt{5}-1)^2}$$

$$= \sqrt{16} = 4，$$

長方體的體積為  $n = (\sqrt{5}+1) \times 2 \times (\sqrt{5}-1) = 8$ ，

故數對  $(m, n) = (4, 8)$ 。



18. 由題意知，因為  $-1 \leq \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \leq 1$ ，

所以  $M = 5 + 3 = 8$ ， $m = -5 + 3 = -2$ （因為  $\frac{M+m}{2} = 3$ ），

且週期  $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$ ，故選(3)(5)。

19. 設此 8 個聲音的頻率為  $f_1, f_2, f_3, \dots, f_8$ ，

其中  $f_8 = 2f_1$ ，且此數列為等比數列（令公比  $r$ ），

所以  $2f_1 = f_1 \times r^7 \Rightarrow r = 2^{\frac{1}{7}}$ ，

故  $f_6 = f_1 \times r^5 = f_1 \times 2^{\frac{5}{7}}$ 。

又第 1 個聲音的週期  $\frac{2\pi}{t_1} \Rightarrow$  頻率  $\frac{t_1}{2\pi} = f_1 \Rightarrow t_1 = 2\pi \times f_1$ ，

第 6 個聲音的週期  $\frac{2\pi}{t_6} \Rightarrow$  頻率  $\frac{t_6}{2\pi} = f_6 \Rightarrow t_6 = 2\pi \times f_6$ ，

故  $\frac{t_6}{t_1} = \frac{f_6}{f_1} = 2^{\frac{5}{7}}$ 。

評分原則：

解題過程	得分
步驟一： 正確計算出數列 $\langle f_n \rangle$ 的公比為 $2^{\frac{1}{7}}$ 。	2 分
步驟二： 寫出第一個與第六個聲音的頻率關係式 $f_6 = f_1 \times 2^{\frac{5}{7}}$ 。	2 分
步驟三： 正確計算出 $\frac{t_6}{t_1} = 2^{\frac{5}{7}}$ 。	2 分

20. 承 19.：

$$\frac{c}{d} = 2^{60} = (10^{\log 2})^{60} \approx 10^{0.3010 \times 60} = 10^{18.06} = 10^{0.06} \times 10^{18}，$$

因為  $1 < 10^{0.06} < 10$ ，所以  $\frac{c}{d}$  的整數部分是 19 位數。

評分原則：

解題過程	得分
步驟一： 求出 $\frac{c}{d} = 2^{60}$ 。	2 分
步驟二： 計算出 $2^{60} \approx 10^{0.06} \times 10^{18}$ 。	2 分
步驟三： 正確求得答案為 19 位數。	2 分