龍騰文化

114 學年度學科能力測驗全真模擬試卷

數學 A 考科　解答卷

■答案

第壹部分：

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13-1	13-2
1	4	5	3	5	3	345	45	125	124	124	135	2	1
14-1	14-2	14-3	15-1	15-2	15-3	16-1	16-2	16-3	17-1	17-2			
−	1	7	1	0	3	6	2	6	2	3			

第貳部分：

18.	19.	20.
3	$a=50\sqrt{3}$ ，$b=150$ ，$c=50\sqrt{3}$	$150\sqrt{3}$ 公尺，$30°$

■解析

1. $\left(\sqrt{7}+2\right)^5\left(\sqrt{7}-2\right)^n=\left(\sqrt{7}+2\right)^5\left(\sqrt{7}-2\right)^5\left(\sqrt{7}-2\right)^{n-5}$

$=\left[\left(\sqrt{7}+2\right)\left(\sqrt{7}-2\right)\right]^5\left(\sqrt{7}-2\right)^{n-5}$

$=\left[\left(\sqrt{7}\right)^2-2^2\right]^5\left(\sqrt{7}-2\right)^{n-5}$

$=3^5\left(\sqrt{7}-2\right)^{n-5}=243\left(\sqrt{7}-2\right)^{n-5}$

$\Rightarrow 243\left(\sqrt{7}-2\right)^{n-5}>243\Rightarrow\left(\sqrt{7}-2\right)^{n-5}>1=\left(\sqrt{7}-2\right)^0$ ，

因為 $0<\sqrt{7}-2<1$ ，所以 $n-5<0\Rightarrow n<5\Rightarrow n\le 4$ ，
所以 n 的最大值為 4，故選(1)。

2. 令 $f(x)=-2x^3+bx^2+3x-4$ ，

因為 $f(x)$ 除以 $x-1$ 的餘式為 6，所以 $f(1)=6$ ，

$f(1)=-2+b+3-4=6\Rightarrow b=9$ ，

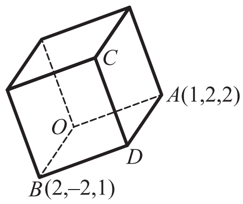
$f(x)=-2x^3+9x^2+3x-4$

$\quad=(-2x+7)\left(x^2-x+1\right)+12x-11$ ，

可知 $f(x)$ 除以 x^2-x+1 的餘式為 $12x-11$ ，

故選(4)。

3. 因為右圖是一個正立方體，



根據右手法則，$\overrightarrow{OB}\times\overrightarrow{OA}$

會與 $\overrightarrow{DC}$ 平行且同向，

同時 $\left|\overrightarrow{DC}\right|=3$ ，

$\overrightarrow{OB}\times\overrightarrow{OA}=(2,-2,1)\times(1,2,2)=(-6,-3,6)$ ，

可知 $\overrightarrow{DC}=(-2,-1,2)$ ，

而 $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{DC}$

$\quad=(2,-2,1)+(1,2,2)+(-2,-1,2)=(1,-1,5)$ ，

故 C 點坐標為 $(1,-1,5)$ ，代入 $x-y+z=7$ 成立，

故選(5)。

4. 從袋中一次取出 3 個球有 $C^{10}_3=\dfrac{10\times9\times8}{1\times2\times3}=120$ 種情形。

編號和為 8 有：

①1 號球 1 個，3 號球 1 個，4 號球 1 個。

②2 號球 2 個，4 號球 1 個。

③2 號球 1 個，3 號球 2 個。

所以機率為

$$\frac{C_1^4C_1^3C_1^1+C_1^4C_2^2+C_2^3C_1^2}{120}=\frac{4\times3\times1+4\times1+3\times2}{120}$$

$$=\frac{12+4+6}{120}=\frac{22}{120}=\frac{11}{60}，$$

故選(3)。

5. 令 $\overline{AC}=x$ ，$\overline{AB}=y$ ，其中 $x>0$ ，$y>0$ ，

$\triangle ABC$ 的周長為 $8+x+y$ ，

面積為 $\frac{1}{2}\times x\times8\times\sin60^\circ=2\sqrt{3}x$ ，

因為 $\triangle ABC$ 的面積

$=\frac{1}{2}\times(\triangle ABC$ 的周長$)\times($內切圓半徑$)$，

所以 $2\sqrt{3}x=\frac{1}{2}(8+x+y)\times\sqrt{3}\Rightarrow y=3x-8\cdots\cdots①$ ，

由餘弦定理知

$y^2=8^2+x^2-2\times8\times x\times\cos60^\circ\Rightarrow y^2=64+x^2-8x\cdots\cdots②$ ，

將①代入②得 $(3x-8)^2=64+x^2-8x$

$\Rightarrow9x^2-48x+64=64+x^2-8x\Rightarrow8x^2-40x=0$

$\Rightarrow x^2-5x=0\Rightarrow x(x-5)=0$ ，

因為 $x>0$ ，所以 $x=5$ ，可知 $y=3\times5-8=7$ ，

得 $\triangle ABC$ 的周長為 $5+8+7=20$ ，故選(5)。

6. $\begin{cases}(\cos73^\circ)x-(\sin73^\circ)y=-\sin43^\circ\\(\sin73^\circ)x+(\cos73^\circ)y=\cos43^\circ\end{cases}$ 的解為 $x=a$，$y=b$ ，

故 $\begin{cases}(\cos73^\circ)a-(\sin73^\circ)b=-\sin43^\circ\\(\sin73^\circ)a+(\cos73^\circ)b=\cos43^\circ\end{cases}$ 。

$$\begin{bmatrix}\cos73^\circ&-\sin73^\circ\\\sin73^\circ&\cos73^\circ\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-\sin43^\circ\\\cos43^\circ\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\cos47^\circ\\\sin47^\circ\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos133^\circ\\\sin133^\circ\end{bmatrix}，$$

$$\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos73^\circ&-\sin73^\circ\\\sin73^\circ&\cos73^\circ\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\cos133^\circ\\\sin133^\circ\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\cos73^\circ&\sin73^\circ\\-\sin73^\circ&\cos73^\circ\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos133^\circ\\\sin133^\circ\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\cos133^\circ\times\cos73^\circ+\sin133^\circ\times\sin73^\circ\\\sin133^\circ\times\cos73^\circ-\cos133^\circ\times\sin73^\circ\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\cos(133^\circ-73^\circ)\\\sin(133^\circ-73^\circ)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos60^\circ\\\sin60^\circ\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}，$$

所以 $\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{2}\\-\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{2}\\-\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ ，

故選(3)。

7. (1) $a_{35}=3.5\times100^{35}-35=3.5\times10^{70}-35$ 為 71 位數，

所以 $\log a_{35}>70$ ，故錯誤。

(2) $\log a_{35}-\log a_{34}=\log\frac{a_{35}}{a_{34}}=\log\frac{3.5\times10^{70}-35}{3.5\times10^{68}-35}$

$=\log\frac{100(3.5\times10^{68}-35)+3500-35}{3.5\times10^{68}-35}$

$=\log\left(100+\frac{3465}{3.5\times10^{68}-35}\right)>\log100=2$ ，

故錯誤。

(3) $a_1=350-35=315\Rightarrow b_1=9$ ，

$a_2=35000-35=34965\Rightarrow b_2=27$ ，

$a_3=3500000-35=3499965\Rightarrow b_3=45$ ，$\cdots$ ，

$b_n=9+(n-1)\times18=18n-9$ 。

$\langle b_n\rangle$ 為等差數列，首項為 9，公差為 18。

所以 $\langle10^{b_n}\rangle$ 為等比數列，首項為 10^9 ，公比為 10^{18} 。

故正確。

(4) $\frac{a_n+35}{10^{b_n}}=\frac{3.5\times100^n-35+35}{10^{18n-9}}=\frac{3.5\times100^n}{10^{18n-9}}$

$=\frac{3.5\times10^{2n}}{10^{18n-9}}=3.5\times10^{-16n+9}$

$\Rightarrow\left\langle\frac{a_n+35}{10^{b_n}}\right\rangle=\langle3.5\times10^{-16n+9}\rangle$ 為等比數列，

所以 $\langle\log(3.5\times10^{-16n+9})\rangle=\langle-16n+9+\log3.5\rangle$ 為等差數列，公差為 -16 ，首項為 $-7+\log3.5$ 。

故正確。

(5) $b_n=18n-9$ ，

$b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n=9+27+45+\cdots+18n-9$

$=9(1+3+5+\cdots+(2n-1))=9n^2$ ，

$b_6+b_7+b_8+\cdots+b_{13}$

$=(b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{13})-(b_1+b_2+b_3+b_4+b_5)$

$=9\times13^2-9\times5^2=9(13^2-5^2)=9\times12^2$

$=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{12}$ 。

故正確。

故選(3)(4)(5)。

8. $|\overrightarrow{PA}|+|\overrightarrow{PB}|=|\overrightarrow{AB}|\Rightarrow P$ 在 $\overline{AB}$ 上，

所以 $a+b=1$ 且 a ，b 皆為非負的實數，

由算幾不等式知 $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}\Rightarrow\frac{1}{2}\geq\sqrt{ab}\Rightarrow0\leq ab\leq\frac{1}{4}$ ，

故選(4)(5)。

9. (1) $\begin{cases} y=x^3 \\ y=x^2 \end{cases} \Rightarrow x^3-x^2=0 \Rightarrow x^2(x-1)=0 \Rightarrow x=0$ 或 1，

交點為 $(0,0)$，$(1,1)$，有 2 個。正確。

(2) $\begin{cases} y=2x^2-x+5 \\ y=x^2+x+3 \end{cases} \Rightarrow 2x^2-x+5=x^2+x+3$

$\Rightarrow x^2-2x+2=0$，

判別式為 $(-2)^2-4\times1\times2=4-8=-4<0$，

無實數解，沒有交點。正確。

(3) $\begin{cases} y=x^3 \\ y=3x^2-3x+1 \end{cases} \Rightarrow x^3=3x^2-3x+1$

$\Rightarrow x^3-3x^2+3x-1=0 \Rightarrow (x-1)^3=0$

$\Rightarrow (x-1)(x^2+x+1)=0$。

實數解只有 $x=1$，故有 1 交點 $(1,1)$。錯誤。

(4) $\begin{cases} y=x^4+5 \\ y=x^2+5 \end{cases} \Rightarrow x^4+5=x^2+5 \Rightarrow x^4-x^2=0$

$\Rightarrow x^2(x^2-1)=0$

$\Rightarrow x^2(x+1)(x-1)=0 \Rightarrow x=0$ 或 ±1。

圖形有 3 個相異交點 $(0,5)$、$(1,6)$、$(-1,6)$。錯誤。

(5) $\begin{cases} y=x^4 \\ y=2x^2-1 \end{cases} \Rightarrow x^4=2x^2-1 \Rightarrow x^4-2x^2+1=0$

$\Rightarrow (x^2-1)^2=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm1$。

故有 2 個相異交點 $(1,1)$，$(-1,1)$。正確。

故選(1)(2)(5)。

10. 設 $x^2+y^2=4$ 的圓心為 $O_1(0,0)$，半徑為 2；

$x^2+y^2-6x=0 \Rightarrow (x^2-6x+9)+y^2=9$

$\Rightarrow (x-3)^2+y^2=9$，

圓心為 $O_2(3,0)$，半徑為 3。

(1) $\overline{O_1O_2}$ 的長度為 $O_1(0,0)$ 與 $O_2(3,0)$ 的距離，

距離為 3。正確。

(2) 令 P 點坐標為 $(x,0)$，由相似三角形可知，

$\overline{PO_1}$：$\overline{PO_2}=2$：3，

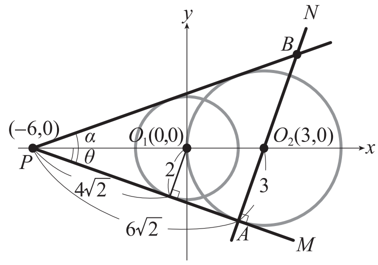
$(-x)$：$(3-x)=2$：$3 \Rightarrow 2(3-x)=-3x$

$\Rightarrow 6-2x=-3x \Rightarrow x=-6$，

所以 P 點的坐標為 $(-6,0)$，可知 $\overline{PO_1}=6$。

正確。

(3) 如右圖，



直線 M 的斜率為

$-\tan\theta=-\dfrac{2}{4\sqrt{2}}$

$=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$。

錯誤。

(4) 如右圖，$\alpha=2\theta$。$\cos2\theta=\dfrac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}=\dfrac{1-\left(\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)^2}{1+\left(\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)^2}=\dfrac{7}{9}$。

正確。

(5) 如右圖，$\overline{AP}=6\sqrt{2}$，

$\overline{AB}=\overline{AP}\times\tan\alpha=6\sqrt{2}\times\tan2\theta=6\sqrt{2}\times\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

$=6\sqrt{2}\times\dfrac{2\times\dfrac{\sqrt{2}}{4}}{1-\left(\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)^2}=6\sqrt{2}\times\dfrac{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{1-\dfrac{1}{8}}=6\sqrt{2}\times\dfrac{4\sqrt{2}}{7}=\dfrac{48}{7}$。

錯誤。

故選(1)(2)(4)。

11. (1) 需要投擲第 4 次的機率：

$1-$ 前 3 次均為正面的機率 $=1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^3=\dfrac{7}{8}$。正確。

(2) 投擲 5 次停止的情形有：

正反正正正、反反正正正

所以機率為 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^5\times2=\dfrac{1}{2^4}=\dfrac{1}{16}$。正確。

(3) 投擲了 4 次還沒停止有

2^4-3 (正正正正、反正正正、正正正反) $=13$ 種，

可知投擲了 4 次還沒停止的機率為 $\dfrac{1}{2^4}\times13=\dfrac{13}{16}$，

第 5 次停止的機率為 $\dfrac{1}{16}$，

所以已知某人投擲了 4 次還沒停止，

則第 5 次停止的機率為 $\dfrac{\frac{1}{16}}{\frac{13}{16}}=\dfrac{1}{13}$。錯誤。

(4) 每一次的機率都是 $\dfrac{1}{2}$，

第 6 次到第 9 次必為反正正正，

第 1 次到第 5 次不可為以下 8 種情形：

正正正正正

正正正正反、正正正反正、反正正正正、正反正正正

正正正反反、反反正正正、反正正正反

所以第1次到第5次共有 $2^5-8=32-8=24$ 種可能，

因此投擲9次時停止的機率為 $24\times\left(\frac{1}{2}\right)^9=\frac{24}{512}=\frac{3}{64}$。

正確。

(5) $1-p$ 為(投擲 9 次還不能停止的機率)

+(不需投擲到 9 次就停止的機率)。

錯誤。

故選(1)(2)(4)。

12. (1) ○：共有11個數，所以中位數為第6個，

由圖可知 X 的中位數 $=35$，Y 的中位數 ≈ 28。

(2) ╳：X 的數據分布在約 $15\sim 48$，全距約為 33，

所以 X 的標準差不會大於 $\frac{33}{2}=16.5$。

(3) ○：由圖可看出 X 的數據分布約在 $15\sim 48$，

Y 的數據分布約在 $22\sim 37$，

因此 X 的數據分布比較分散，

所以 X 標準差比較大。

(4) ╳：由左向右估計 $Z=X+Y$ 約為

$37,46,57,53,57,70,61,73,69,78,84$，

因此 $Z=X+Y$ 之中位數約為 61，

而 X 的中位數 $=35$，Y 的中位數 ≈ 28，

所以 Z 的中位數 $\neq X$ 的中位數 $+Y$ 的中位數。

(5) ○：由 X、Y 的分布趨勢得知 Y 對 X 的迴歸直線斜率大於 0。

故選(1)(3)(5)。

13.

$$\text{藍光 1 單位} \xrightarrow{1\text{層}} 0.8 \xrightarrow{1\text{層}} 0.8^2\cdots\cdots\xrightarrow{n\text{層}}(0.8)^n$$

設至少塗上 n 層保護膜，

所以 $0.8^n<0.01\Rightarrow\log(0.8)^n<\log 0.01$

$\Rightarrow n(\log 8-\log 10)<-2$

$\Rightarrow n(3\times 0.3010-1)<-2$

$\Rightarrow n>\frac{2}{0.0970}\approx 20.6$，

所以 n 的最小值為 21，即至少塗上21層保護膜。

14. 令 $a=3^x>0$，

所以 $y=9^x-3^{x+1}-15=(3^x)^2-3(3^x)-15=a^2-3a-15$

$=\left(a^2-3a+\frac{9}{4}\right)-15-\frac{9}{4}=\left(a-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{69}{4}$，

因為 x 為整數，所以 $x=0$ 或 1，

即當 $a=1$ 或 3 時，y 有最小值 $\frac{1}{4}-\frac{69}{4}=-\frac{68}{4}=-17$。

15. 設 $A(x_1,y_1),C(x_2,y_2)$，其中 $0<x_1<\frac{\pi}{2}$，$\frac{3\pi}{2}<x_2<2\pi$，

可知 x 軸為 $\overline{AD}$、$\overline{BC}$ 的中垂線，

又 $\overline{AD}=\overline{BC}=2$，所以 $y_1=1$，$y_2=-1$

$$\Rightarrow\begin{cases}2\sin x_1=1\\2\sin x_2=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sin x_1=\frac{1}{2}\\\sin x_2=\frac{-1}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=\frac{\pi}{6}\\x_2=\frac{11\pi}{6}\end{cases}$$

$\Rightarrow A\left(\frac{\pi}{6},1\right)$、$C\left(\frac{11\pi}{6},-1\right)\Rightarrow\overline{AB}=\frac{11\pi}{6}-\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{3}$，

故長方形 $ABCD$ 的面積為 $\overline{AD}\times\overline{AB}=2\times\frac{5\pi}{3}=\frac{10\pi}{3}$。

16. 令 L 的方向向量 $(2,2,1)$ 為 $\overrightarrow{v}$，$\overrightarrow{AP}=(2,-6,-10)$，

$\overrightarrow{AP}$ 在 $\overrightarrow{v}$ 上的正射影為 $\overrightarrow{AB}$，

$$\overrightarrow{AB}=\frac{\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{v}}{\left|\overrightarrow{v}\right|^2}\overrightarrow{v}=\frac{(2,-6,-10)\cdot(2,2,1)}{2^2+2^2+1^2}(2,2,1)$$

$=(-4,-4,-2)$，

三角形 PAB 的面積為 $\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AP}\right|=6\sqrt{26}$。

17. 令 $\begin{cases}ax+(a^2+ab)y+a^2z=3\cdots\cdots①\\bx+b^2y+(ab+b^2)z=4\cdots\cdots②\\(a+b)x+c^2y+c^2z=5\cdots\cdots③\end{cases}$，

$\begin{cases}(a+b)x+(a^2+b^2+ab)y+(a^2+b^2+ab)z=7\cdots\cdots①+②\\(a+b)x+c^2y+c^2z=5\cdots\cdots③\end{cases}$，

因為無解，比較兩式可知 $a^2+b^2+ab=c^2$，

$a^2+b^2-c^2=-ab\Rightarrow\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=-\frac{1}{2}$

$\Rightarrow\cos\angle C=-\frac{1}{2}\Rightarrow\angle C=\frac{2}{3}\pi$。

18. 由正弦定理，

知 $\overline{BD}=2\times 50\times\sin 30^\circ=100\times\frac{1}{2}=50$（公尺），

故選(3)。

19.由正弦定理，知 $\overline{BC}=100\sin(\theta+30^\circ)$，$\overline{AC}=100\cos\theta$，

$\overline{AB}=100\times\frac{\sqrt{3}}{2}=50\sqrt{3}$，

則木橋的總長度為

$100\times\sin(\theta+30^\circ)+100\times\cos\theta+50\sqrt{3}$

$=100(\sin\theta\cos 30^\circ+\cos\theta\sin 30^\circ)+100\cos\theta+50\sqrt{3}$

$=50\sqrt{3}\sin\theta+50\cos\theta+100\cos\theta+50\sqrt{3}$

$=50\sqrt{3}\sin\theta+150\cos\theta+50\sqrt{3}$，

故 $a=50\sqrt{3}$，$b=150$，$c=50\sqrt{3}$。

解題過程	得分
步驟一：寫出重要條件 將木橋的總長度寫成 $100\times\sin(\theta+30^\circ)+100\times\cos\theta+50\sqrt{3}$ 。	3 分
步驟二：計算過程、答案正確 將其展開成 $50\sqrt{3}\sin\theta+150\cos\theta+50\sqrt{3}$ （公尺）。 得 $a=50\sqrt{3}$ ，$b=150$ ，$c=50\sqrt{3}$ 。	3 分

20. $50\sqrt{3}\sin\theta+150\cos\theta+50\sqrt{3}$

$$=100\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right)+50\sqrt{3}$$

$$=100\sqrt{3}\sin(\theta+60^\circ)+50\sqrt{3}\le 100\sqrt{3}+50\sqrt{3}=150\sqrt{3}$$ ，

則木橋總長度的最大值為 $150\sqrt{3}$ 公尺，

此時 $\theta+60^\circ=90^\circ\Rightarrow\angle DAC=30^\circ$ 。

解題過程	得分
步驟一：寫出重要條件 寫出 $50\sqrt{3}\sin\theta+150\cos\theta+50\sqrt{3}$ $=100\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right)+50\sqrt{3}$ 。	3 分
步驟二：計算過程、答案正確 寫出 $100\sqrt{3}\sin(\theta+60^\circ)+50\sqrt{3}$ $\le 100\sqrt{3}+50\sqrt{3}=150\sqrt{3}$ 。	2 分
寫出最大值時 $\angle DAC=30^\circ$ 。	1 分