龍騰文化

114 學年度學科能力測驗全真模擬試卷

數學 A 考科

請於考試開始鈴響起，在答題卷簽名欄位以正楷簽全名

西苑高中/陳威旭老師

【教用卷】

—作答注意事項—

考試時間：100分鐘

作答方式：

- 選擇（填）題用 2B 鉛筆在「答題卷」上作答；更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。
- 除題目另有規定外，非選擇題用筆尖較粗之黑色墨水的筆在「答題卷」上作答；更正時，可以使用修正液（帶）。
- 考生須依上述規定劃記或作答，若未依規定而導致答案難以辨識或評閱時，恐將影響考生成績並損及權益。
- 答題卷每人一張，不得要求增補。
- 選填題考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子劃記。

選擇（填）題計分方式：

- 單選題：每題有 n 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項。各題答對者，得該題的分數；答錯、未作答或劃記多於一個選項者，該題以零分計算。
- 多選題：每題有 n 個選項，其中至少有一個是正確的選項。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得該題全部的分數；答錯 k 個選項者，得該題 $\frac{n-2k}{n}$ 的分數；但得分低於零分或所有選項均未作答者，該題以零分計算。
- 選填題每題有 n 個空格，須全部答對才給分，答錯不倒扣。

※試題中參考的附圖均為示意圖，試題後附有參考公式及數值。

祝考試順利

如需試卷檔案，請登入龍騰線上題測→各科 word 資源區

龍騰文化
肯定自己 ➤ 肯定不同

學用卷定價 20 元
贈品禁止轉售 #1
62001N11_ER/B/

第壹部分、選擇（填）題（占85分）

一、單選題（占30分）

說明：第 1 題至第 6 題，每題 5 分。

1. 已知 $\left(\sqrt{7}+2\right)^{5}\left(\sqrt{7}-2\right)^{n}>243$，其中 n 為整數。請選出正確的選項。

(1) n 的最大值為 4　(2) n 的最小值為 4　(3) n 的最小值為 6　(4) n 的最大值為 6　(5) n 為任意整數。

解題觀念：指數律、無理數的運算、指數函數

參考答案：(1)

試題解析：$\left(\sqrt{7}+2\right)^{5}\left(\sqrt{7}-2\right)^{n}=\left(\sqrt{7}+2\right)^{5}\left(\sqrt{7}-2\right)^{5}\left(\sqrt{7}-2\right)^{n-5}$

$=\left[\left(\sqrt{7}+2\right)\left(\sqrt{7}-2\right)\right]^{5}\left(\sqrt{7}-2\right)^{n-5}=\left[\left(\sqrt{7}\right)^{2}-2^{2}\right]^{5}\left(\sqrt{7}-2\right)^{n-5}$

$=3^{5}\left(\sqrt{7}-2\right)^{n-5}=243\left(\sqrt{7}-2\right)^{n-5}$

$\Rightarrow 243\left(\sqrt{7}-2\right)^{n-5}>243 \Rightarrow \left(\sqrt{7}-2\right)^{n-5}>1=\left(\sqrt{7}-2\right)^{0}$，

因為 $0<\sqrt{7}-2<1$，所以 $n-5<0 \Rightarrow n<5 \Rightarrow n\le 4$，

所以 n 的最大值為 4，故選(1)。

2. 三次函數 $y=f(x)$ 的各項係數皆為實數。已知廣域看 $y=f(x)$ 的圖形很接近 $y=-2x^{3}$ 的圖形，而局部看 $y=f(x)$ 在 $x=0$ 附近的圖形卻近似於直線 $y=3x-4$，且 $f(x)$ 除以 $x-1$ 的餘式為 6，則 $f(x)$ 除以 $x^{2}-x+1$ 的餘式為下列哪一個選項？

(1) 0　(2) 6　(3) $10x-7$　(4) $12x-11$　(5) $7x-12$。

解題觀念：三次函數圖形的特徵

參考答案：(4)

試題解析：令 $f(x)=-2x^{3}+bx^{2}+3x-4$，

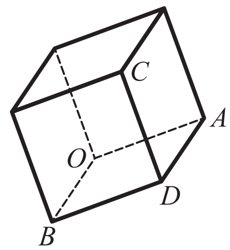
因為 $f(x)$ 除以 $x-1$ 的餘式為 6，所以 $f(1)=6$，

$f(1)=-2+b+3-4=6 \Rightarrow b=9$，

$f(x)=-2x^{3}+9x^{2}+3x-4=(-2x+7)\left(x^{2}-x+1\right)+12x-11$，

可知 $f(x)$ 除以 $x^{2}-x+1$ 的餘式為 $12x-11$，故選(4)。

3. 已知一個正立方體的三個頂點的坐標為 $O(0,0,0)$，$A(1,2,2)$，$B(2,-2,1)$，另一個頂點 C 與其它頂點的相關位置如右圖。請問 C 點同時也是下列哪一個平面上的點？

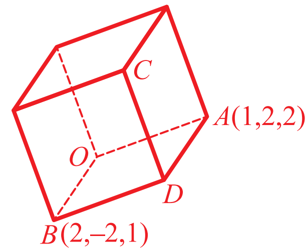


(1) $x+y-z=5$　(2) $x-y+z=5$　(3) $x-y-z=5$　(4) $x+y+z=7$
(5) $x-y+z=7$。

解題觀念：外積方向判別、空間向量的加減、平面上的點

參考答案：(5)

試題解析：因為右圖是一個正立方體，根據右手法則，



$\overrightarrow{OB}\times\overrightarrow{OA}$ 會與 $\overrightarrow{DC}$ 平行且同向，同時 $\left|\overrightarrow{DC}\right|=3$，

$\overrightarrow{OB}\times\overrightarrow{OA}=(2,-2,1)\times(1,2,2)=(-6,-3,6)$，

可知 $\overrightarrow{DC}=(-2,-1,2)$，

而 $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{DC}=(2,-2,1)+(1,2,2)+(-2,-1,2)=(1,-1,5)$，

故 C 點坐標為 $(1,-1,5)$，代入 $x-y+z=7$ 成立，故選(5)。

4. 已知一袋中有 10 個大小相同的球，其中編號 1 的有 1 個，編號 2 的有 2 個，編號 3 的有 3 個，編號 4 的有 4 個，今從袋中一次取出 3 個球，則取出的球編號和為 8 的機率為下列哪一個選項？

(1) $\dfrac{3}{10}$　(2) $\dfrac{11}{28}$　(3) $\dfrac{11}{60}$　(4) $\dfrac{17}{20}$　(5) $\dfrac{11}{30}$。

解題觀念：古典機率

參考答案：(3)

試題解析：從袋中一次取出 3 個球有 $C^{10}_3=\dfrac{10\times9\times8}{1\times2\times3}=120$ 種情形。

編號和為 8 有：

① 1 號球 1 個，3 號球 1 個，4 號球 1 個。

② 2 號球 2 個，4 號球 1 個。

③ 2 號球 1 個，3 號球 2 個。

所以機率為 $\dfrac{C^4_1C^3_1C^1_1+C^4_1C^2_2+C^3_2C^2_1}{120}=\dfrac{4\times3\times1+4\times1+3\times2}{120}=\dfrac{12+4+6}{120}=\dfrac{22}{120}=\dfrac{11}{60}$，

故選(3)。

5. $\triangle ABC$ 中，內切圓半徑為 $\sqrt{3}$，$\overline{BC}=8$，$\angle C=60^\circ$，則 $\triangle ABC$ 的周長為哪一個選項？

(1) $2\sqrt{3}+6$　(2) $4\sqrt{3}+8$　(3) 16　(4) 18　(5) 20。

解題觀念：三角形的面積公式、餘弦定理

參考答案：(5)

試題解析：令 $\overline{AC}=x$，$\overline{AB}=y$，其中 $x>0$，$y>0$，

$\triangle ABC$ 的周長為 $8+x+y$，面積為 $\frac{1}{2}\times x\times 8\times\sin 60^\circ=2\sqrt{3}x$，

因為 $\triangle ABC$ 的面積 $=\frac{1}{2}\times(\triangle ABC$ 的周長$)\times($內切圓半徑$)$，

所以 $2\sqrt{3}x=\frac{1}{2}(8+x+y)\times\sqrt{3}\Rightarrow y=3x-8\cdots\cdots①$，

由餘弦定理知 $y^2=8^2+x^2-2\times 8\times x\times\cos 60^\circ\Rightarrow y^2=64+x^2-8x\cdots\cdots②$，

將①代入②得 $(3x-8)^2=64+x^2-8x$

$\Rightarrow 9x^2-48x+64=64+x^2-8x\Rightarrow 8x^2-40x=0\Rightarrow x^2-5x=0\Rightarrow x(x-5)=0$，

因為 $x>0$，所以 $x=5$，可知 $y=3\times 5-8=7$，

得 $\triangle ABC$ 的周長為 $5+8+7=20$，故選(5)。

6. 已知二元一次聯立方程式 $\begin{cases}(\cos 73^\circ)x-(\sin 73^\circ)y=-\sin 43^\circ\\(\sin 73^\circ)x+(\cos 73^\circ)y=\cos 43^\circ\end{cases}$ 的解為 $x=a$，$y=b$，則

$\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$ 為下列哪一個選項？　(1) $\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}$　(2) $\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}$　(3) $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$　(4) $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$　(5) $\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}$。

解題觀念：聯立方程式與矩陣的關係、矩陣的旋轉變換

參考答案：(3)

試題解析：$\begin{cases}(\cos 73^\circ)x-(\sin 73^\circ)y=-\sin 43^\circ\\(\sin 73^\circ)x+(\cos 73^\circ)y=\cos 43^\circ\end{cases}$ 的解為 $x=a$，$y=b$，

故 $\begin{cases}(\cos 73^\circ)a-(\sin 73^\circ)b=-\sin 43^\circ\\(\sin 73^\circ)a+(\cos 73^\circ)b=\cos 43^\circ\end{cases}$。

$$\begin{bmatrix}\cos 73^\circ & -\sin 73^\circ\\ \sin 73^\circ & \cos 73^\circ\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\sin 43^\circ\\ \cos 43^\circ\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\cos 47^\circ\\ \sin 47^\circ\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos 133^\circ\\ \sin 133^\circ\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos 73^\circ & -\sin 73^\circ\\ \sin 73^\circ & \cos 73^\circ\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\cos 133^\circ\\ \sin 133^\circ\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos 73^\circ & \sin 73^\circ\\ -\sin 73^\circ & \cos 73^\circ\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos 133^\circ\\ \sin 133^\circ\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\cos 133^\circ\times\cos 73^\circ+\sin 133^\circ\times\sin 73^\circ\\ \sin 133^\circ\times\cos 73^\circ-\cos 133^\circ\times\sin 73^\circ\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos(133^\circ-73^\circ)\\ \sin(133^\circ-73^\circ)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos 60^\circ\\ \sin 60^\circ\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix},$$

所以 $\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$，故選(3)。

二、多選題（占30分）

說明：第 7 題至第 12 題，每題 5 分。

7. 已知 $a_n = 3.5\times100^n - 35$ ，n 為正整數。若 a_n 所有位數的數字和為 b_n ，請選出正確的選項。

(1) $\log a_{35} < 70$

(2) $\log a_{35} - \log a_{34} < 2$

(3) $\langle 10^{b_n} \rangle$ 為等比數列

(4) $\left\langle \log \dfrac{a_n + 35}{10^{b_n}} \right\rangle$ 為等差數列

(5) $b_6 + b_7 + b_8 + \cdots + b_{13} = b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_{12}$ 。

解題觀念：指數與對數、科學記號、等差、等比數列與級數

參考答案：(3)(4)(5)

試題解析：(1) $a_{35} = 3.5\times100^{35} - 35 = 3.5\times10^{70} - 35$ 為 71 位數，所以 $\log a_{35} > 70$ ，故錯誤。

(2) $\log a_{35} - \log a_{34} = \log\dfrac{a_{35}}{a_{34}} = \log\dfrac{3.5\times10^{70} - 35}{3.5\times10^{68} - 35}$

$= \log\dfrac{100\left(3.5\times10^{68} - 35\right) + 3500 - 35}{3.5\times10^{68} - 35} = \log\left(100 + \dfrac{3465}{3.5\times10^{68} - 35}\right) > \log100 = 2$ ，

故錯誤。

(3) $a_1 = 350 - 35 = 315 \Rightarrow b_1 = 9$ ， $a_2 = 35000 - 35 = 34965 \Rightarrow b_2 = 27$ ，

$a_3 = 3500000 - 35 = 3499965 \Rightarrow b_3 = 45$ ， $\cdots$ ， $b_n = 9 + (n-1)\times18 = 18n - 9$ 。

$\langle b_n \rangle$ 為等差數列，首項為 9，公差為 18。所以 $\langle 10^{b_n} \rangle$ 為等比數列，

首項為 10^9 ，公比為 10^{18} 。故正確。

(4) $\dfrac{a_n + 35}{10^{b_n}} = \dfrac{3.5\times100^n - 35 + 35}{10^{18n-9}} = \dfrac{3.5\times100^n}{10^{18n-9}} = \dfrac{3.5\times10^{2n}}{10^{18n-9}} = 3.5\times10^{-16n+9}$

$\Rightarrow \left\langle \dfrac{a_n + 35}{10^{b_n}} \right\rangle = \left\langle 3.5\times10^{-16n+9} \right\rangle$ 為等比數列，

所以 $\left\langle \log\left(3.5\times10^{-16n+9}\right) \right\rangle = \langle -16n + 9 + \log3.5 \rangle$ 為等差數列，公差為 -16 ，

首項為 $-7 + \log3.5$ 。故正確。

(5) $b_n = 18n - 9$ ，

$b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n = 9 + 27 + 45 + \cdots + 18n - 9 = 9\left(1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1)\right) = 9n^2$ ，

$b_6 + b_7 + b_8 + \cdots + b_{13} = \left(b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_{13}\right) - \left(b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5\right)$

$= 9\times13^2 - 9\times5^2 = 9\left(13^2 - 5^2\right) = 9\times12^2 = b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_{12}$ 。故正確。

故選(3)(4)(5)。

8. 已知 a、b 為實數，A、B、C、P 為坐標平面上四點，O 為原點，且 $\left|\overrightarrow{PA}\right|+\left|\overrightarrow{PB}\right|=\left|\overrightarrow{AB}\right|$。

若 $\overrightarrow{OP}=a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}$，則 $a\times b$ 的值可能為下列哪些選項？

(1) $-\frac{1}{4}$　(2) 1　(3) $\frac{1}{2}$　(4) $\frac{1}{4}$　(5) $\frac{1}{6}$。

解題觀念：算幾不等式、平面向量的加減、三點共線性質

參考答案：(4)(5)

試題解析：$\left|\overrightarrow{PA}\right|+\left|\overrightarrow{PB}\right|=\left|\overrightarrow{AB}\right| \Rightarrow P$ 在 $\overline{AB}$ 上，

所以 $a+b=1$ 且 a，b 皆為非負的實數，由算幾不等式知

$\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}\Rightarrow\frac{1}{2}\ge\sqrt{ab}\Rightarrow 0\le ab\le\frac{1}{4}$，故選(4)(5)。

9. 關於多項式函數圖形的交點，請選出正確的選項。

(1) $y=x^3$ 與 $y=x^2$ 的圖形恰有 2 個相異交點

(2) $y=x^2+x+3$ 與 $y=2x^2-x+5$ 的圖形沒有交點

(3) $y=x^3$ 與 $y=3x^2-3x+1$ 的圖形沒有交點

(4) $y=x^4+5$ 與 $y=x^2+5$ 的圖形恰有 2 個相異交點

(5) $y=x^4$ 與 $y=2x^2-1$ 的圖形恰有 2 個相異交點。

解題觀念：多項式函數的圖形、多項式方程式的解

參考答案：(1)(2)(5)

試題解析：(1) $\begin{cases} y=x^3 \\ y=x^2 \end{cases} \Rightarrow x^3-x^2=0\Rightarrow x^2(x-1)=0\Rightarrow x=0$ 或 1，

交點為 $(0,0)$，$(1,1)$，有 2 個。正確。

(2) $\begin{cases} y=2x^2-x+5 \\ y=x^2+x+3 \end{cases} \Rightarrow 2x^2-x+5=x^2+x+3\Rightarrow x^2-2x+2=0$，

判別式為 $(-2)^2-4\times1\times2=4-8=-4<0$，無實數解，沒有交點。正確。

(3) $\begin{cases} y=x^3 \\ y=3x^2-3x+1 \end{cases} \Rightarrow x^3=3x^2-3x+1\Rightarrow x^3-3x^2+3x-1=0$

$\Rightarrow(x-1)^3=0\Rightarrow(x-1)\left(x^2+x+1\right)=0$。

實數解只有 $x=1$，故有 1 交點 $(1,1)$。錯誤。

(4) $\begin{cases} y=x^4+5 \\ y=x^2+5 \end{cases} \Rightarrow x^4+5=x^2+5\Rightarrow x^4-x^2=0\Rightarrow x^2\left(x^2-1\right)=0$

$\Rightarrow x^2(x+1)(x-1)=0\Rightarrow x=0$ 或 ±1。

圖形有 3 個相異交點 $(0,5)$、$(1,6)$、$(-1,6)$。錯誤。

(5) $\begin{cases} y = x^4 \\ y = 2x^2 - 1 \end{cases} \Rightarrow x^4 = 2x^2 - 1 \Rightarrow x^4 - 2x^2 + 1 = 0 \Rightarrow \left(x^2 - 1\right)^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$。

故有 2 個相異交點 $(1,1)$，$(-1,1)$。正確。

故選(1)(2)(5)。

10. 已知兩圓的方程式為 $x^2 + y^2 = 4$ 與 $x^2 + y^2 - 6x = 0$，圓心分別為 O_1 與 O_2，兩相異直線 L、M 皆同時與兩圓相切，其中直線 L 的斜率大於 0，直線 M 的斜率小於 0，兩直線相交於 P 點。請選出正確的選項。

(1) $\overline{O_1O_2} = 3$　(2) $\overline{PO_1} = 6$　(3)直線 M 的斜率為 $-\dfrac{1}{3}$

(4)若兩直線 L 與 M 的銳夾角為 α，則 $\cos\alpha = \dfrac{7}{9}$

(5)若直線 N 通過點 $(3,0)$ 且和直線 M 垂直於點 A，和直線 L 交於點 B，則 $\overline{AB}$ 的長度為 7。

解題觀念：圓方程式、三角函數二倍角公式、直線與圓的關係

參考答案：(1)(2)(4)

試題解析：設 $x^2 + y^2 = 4$ 的圓心為 $O_1(0,0)$，半徑為 2；

$x^2 + y^2 - 6x = 0 \Rightarrow \left(x^2 - 6x + 9\right) + y^2 = 9 \Rightarrow (x-3)^2 + y^2 = 9$，

圓心為 $O_2(3,0)$，半徑為 3。

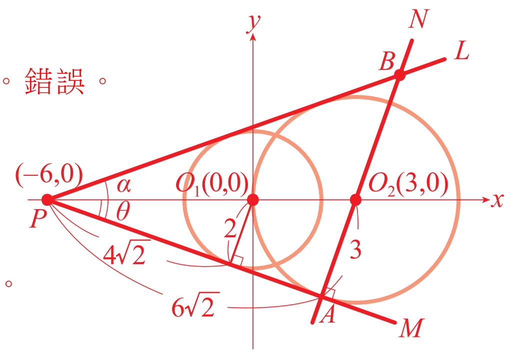
(1) $\overline{O_1O_2}$ 的長度為 $O_1(0,0)$ 與 $O_2(3,0)$ 的距離，距離為 3。正確。

(2) 令 P 點坐標為 $(x,0)$，由相似三角形可知，$\overline{PO_1}：\overline{PO_2} = 2：3$，

$(-x)：(3-x) = 2：3 \Rightarrow 2(3-x) = -3x \Rightarrow 6 - 2x = -3x \Rightarrow x = -6$，

所以 P 點的坐標為 $(-6,0)$，可知 $\overline{PO_1} = 6$。正確。

(3) 如右圖，



直線 M 的斜率為 $-\tan\theta = -\dfrac{2}{4\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{4}$。錯誤。

(4) 如右圖，$\alpha = 2\theta$。

$\cos 2\theta = \dfrac{1 - \tan^2\theta}{1 + \tan^2\theta} = \dfrac{1 - \left(\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)^2}{1 + \left(\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)^2} = \dfrac{7}{9}$。正確。

(5) 如右圖，$\overline{AP} = 6\sqrt{2}$，$\overline{AB} = \overline{AP} \times \tan\alpha = 6\sqrt{2} \times \tan 2\theta = 6\sqrt{2} \times \dfrac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta}$

$= 6\sqrt{2} \times \dfrac{2 \times \dfrac{\sqrt{2}}{4}}{1 - \left(\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)^2} = 6\sqrt{2} \times \dfrac{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{1 - \dfrac{1}{8}} = 6\sqrt{2} \times \dfrac{4\sqrt{2}}{7} = \dfrac{48}{7}$。錯誤。

故選(1)(2)(4)。

11. 連續投擲一枚公正硬幣（具有正、反兩面），當連續出現三個正面時，停止投擲。假設每一次投擲皆為獨立事件，請選出正確的選項。

(1)某人需要投擲第 4 次的機率為 $\dfrac{7}{8}$

(2)某人投擲 5 次才停止的機率為 $\dfrac{1}{16}$

(3)已知某人投擲了 4 次還沒停止，則第 5 次停止的機率為 $\dfrac{2}{13}$

(4)設某人恰投擲 9 次時停止的機率為 p，則 $p=\dfrac{3}{64}$

(5)承選項(4)，某人投擲 9 次還不能停止的機率為 $1-p$。

解題觀念：條件機率、獨立事件

參考答案：(1)(2)(4)

試題解析：(1) 需要投擲第 4 次的機率：1−前 3 次均為正面的機率 $=1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^3=\dfrac{7}{8}$。正確。

(2) 投擲 5 次停止的情形有：

正反正正正、反反正正正

所以機率為 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^5\times 2=\dfrac{1}{2^4}=\dfrac{1}{16}$。正確。

(3) 投擲了 4 次還沒停止有 2^4-3(正正正正、反正正正、正正正反)$=13$種，

可知投擲了 4 次還沒停止的機率為 $\dfrac{1}{2^4}\times 13=\dfrac{13}{16}$，

第 5 次停止的機率為 $\dfrac{1}{16}$，所以已知某人投擲了 4 次還沒停止，

則第 5 次停止的機率為 $\dfrac{\frac{1}{16}}{\frac{13}{16}}=\dfrac{1}{13}$。錯誤。

(4) 每一次的機率都是 $\dfrac{1}{2}$，

第 6 次到第 9 次必為反正正正，

第 1 次到第 5 次不可為以下 8 種情形：

正正正正正

正正正正反、正正正反正、反正正正正、正反正正正

正正正反反、反反正正正、反正正正反

所以第 1 次到第 5 次共有 $2^5-8=32-8=24$種可能，

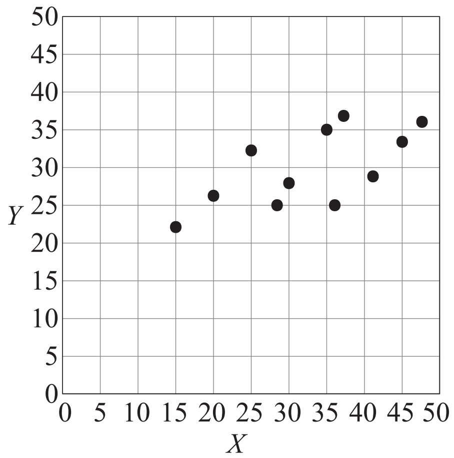
因此投擲 9 次時停止的機率為 $24\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^9=\dfrac{24}{512}=\dfrac{3}{64}$。正確。

(5) $1-p$ 為(投擲 9 次還不能停止的機率)+(不需投擲到 9 次就停止的機率)。

錯誤。

故選(1)(2)(4)。

12. 某次數學測驗分為選擇題與非選擇題兩部分。右列的散布圖中每個點 (X,Y) 分別代表一位學生於此兩部分的得分，其中 X 表該生選擇題的得分，Y 表該生非選擇題的得分。設 $Z=X+Y$ 為各生在該測驗的總分。共有11位學生的得分數據。試問以下哪些選項是正確的？



(1) X 的中位數大於 Y 的中位數
(2) X 的標準差大於 20
(3) X 的標準差大於 Y 的標準差
(4) Z 的中位數 $=X$ 的中位數 $+Y$ 的中位數
(5)以最小平方法求出 Y 對 X 的迴歸直線，其斜率大於 0 。

命題出處：龍騰【好好學】數學 A 總複習講義 單元 7 數據分析
解題觀念：數據分析
參考答案：(1)(3)(5)
試題解析：(1) ○：共有11個數，所以中位數為第 6 個，
由圖可知 X 的中位數 $=35$ ， Y 的中位數 ≈ 28 。
(2) ╳： X 的數據分布在約 $15\sim 48$ ，全距約為 33 ，
所以 X 的標準差不會大於 $\frac{33}{2}=16.5$ 。
(3) ○：由圖可看出 X 的數據分布約在 $15\sim 48$ ， Y 的數據分布約在 $22\sim 37$ ，
因此 X 的數據分布比較分散，所以 X 標準差比較大。
(4) ╳：由左向右估計 $Z=X+Y$ 約為 $37,46,57,53,57,70,61,73,69,78,84$ ，
因此 $Z=X+Y$ 之中位數約為 61，而 X 的中位數 $=35$，Y 的中位數 ≈ 28，
所以 Z 的中位數 $\neq X$ 的中位數 $+Y$ 的中位數。
(5) ○：由 X 、 Y 的分布趨勢得知 Y 對 X 的迴歸直線斜率大於 0 。
故選(1)(3)(5)。

三、選填題（占25分）

說明：第 13 題至第 17 題，每題 5 分。

13. 有一種「多層膜」的鏡片，號稱可以過濾藍光保護眼睛。若將一般的鏡片塗上一層保護膜可使一單位藍光的強度減少 20%，而且當藍光的強度低於 0.01 單位時，這種「多層膜」的鏡片就可以保護眼睛。試問一般的鏡片至少應該塗 ＿(13-1)(13-2)＿ 層的保護膜，才能變成多層膜的鏡片保護眼睛。（無條件進位取至整數位，已知 $\log 2\approx 0.3010$ ）

命題出處：龍騰【新關鍵】數學 3-4 冊 學測總複習講義 單元 9 指數與對數函數
解題觀念：對數的應用
參考答案：21

試題解析：

$$\text{藍光 1 單位} \xrightarrow{1\text{ 層}} 0.8 \xrightarrow{1\text{ 層}} 0.8^2 \cdots\cdots (0.8)^n \quad (n\text{ 層})$$

設至少塗上 n 層保護膜，

所以 $0.8^n < 0.01 \Rightarrow \log(0.8)^n < \log 0.01 \Rightarrow n(\log 8 - \log 10) < -2$

$\Rightarrow n(3\times 0.3010 - 1) < -2 \Rightarrow n > \dfrac{2}{0.0970} \approx 20.6$，

所以 n 的最小值為 21，即至少塗上 21 層保護膜。

14. 已知 x 是整數，指數函數 $y = 9^x - 3^{x+1} - 15$ 的最小值為 ＿(14-1)(14-2)(14-3)＿。

解題觀念：指數函數

參考答案：-17

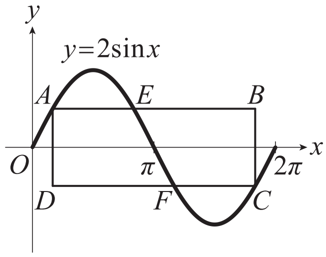
試題解析：令 $a = 3^x > 0$，

所以 $y = 9^x - 3^{x+1} - 15 = (3^x)^2 - 3(3^x) - 15 = a^2 - 3a - 15$

$= \left(a^2 - 3a + \dfrac{9}{4}\right) - 15 - \dfrac{9}{4} = \left(a - \dfrac{3}{2}\right)^2 - \dfrac{69}{4}$，

因為 x 為整數，所以 $x = 0$ 或 1，即當 $a = 1$ 或 3 時，y 有最小值 $\dfrac{1}{4} - \dfrac{69}{4} = -\dfrac{68}{4} = -17$。

15. 如圖，在 $0 \le x \le 2\pi$ 的範圍內，已知 $y = 2\sin x$ 的圖形與長方形 $ABCD$ 交於 A、E、F、C 四點，其中 $\overline{AD} = 2$。若 $\overline{AB}$ 平行 x 軸，且 $\overline{AE} = \overline{CF}$，則長方形 $ABCD$ 的面積為 ＿$\dfrac{(15\text{-}1)(15\text{-}2)\pi}{(15\text{-}3)}$＿。



（化為最簡分數）

命題出處：龍騰【模模考】數學 A 學測模考試題本 第 8 回

解題觀念：三角函數的圖形

參考答案：$\dfrac{10\pi}{3}$

試題解析：設 $A(x_1, y_1), C(x_2, y_2)$，其中 $0 < x_1 < \dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{3\pi}{2} < x_2 < 2\pi$，

可知 x 軸為 $\overline{AD}$、$\overline{BC}$ 的中垂線，又 $\overline{AD} = \overline{BC} = 2$，所以 $y_1 = 1$，$y_2 = -1$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\sin x_1 = 1 \\ 2\sin x_2 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin x_1 = \dfrac{1}{2} \\ \sin x_2 = \dfrac{-1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{\pi}{6} \\ x_2 = \dfrac{11\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow A\left(\dfrac{\pi}{6}, 1\right)\text{、}C\left(\dfrac{11\pi}{6}, -1\right)$$

$\Rightarrow \overline{AB} = \dfrac{11\pi}{6} - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{5\pi}{3}$，

故長方形 $ABCD$ 的面積為 $\overline{AD} \times \overline{AB} = 2 \times \dfrac{5\pi}{3} = \dfrac{10\pi}{3}$。

16. 空間中有一直線 L：$\frac{x-3}{2}=\frac{y-5}{2}=z-4$。已知 A，B 兩點皆在 L 上，其中 A 為 $(3,5,4)$。過 L 外一點 $P(5,-1,-6)$ 作直線垂直 L 於 B 點，則三角形 PAB 的面積為 ⑯-1 $\sqrt{\text{⑯-2 ⑯-3}}$ 。（化為最簡根式）

解題觀念：空間中的直線、正射影、三角形面積

參考答案：$6\sqrt{26}$

試題解析：令 L 的方向向量 $(2,2,1)$ 為 $\overrightarrow{v}$，$\overrightarrow{AP}=(2,-6,-10)$，

$\overrightarrow{AP}$ 在 $\overrightarrow{v}$ 上的正射影為 $\overrightarrow{AB}$，

$$\overrightarrow{AB}=\frac{\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{v}}{\left|\overrightarrow{v}\right|^2}\overrightarrow{v}=\frac{(2,-6,-10)\cdot(2,2,1)}{2^2+2^2+1^2}(2,2,1)=(-4,-4,-2)，$$

三角形 PAB 的面積為 $\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AP}\right|=6\sqrt{26}$。

17. 已知三角形三邊長為 a、b、c，所對應的頂點分別為 A、B、C。若三元一次聯立方程式

$$\begin{cases} ax+\left(a^2+ab\right)y+a^2z=3 \\ bx+b^2y+\left(ab+b^2\right)z=4 \\ (a+b)x+c^2y+c^2z=5 \end{cases}$$

無解，則 $\angle C=\frac{\text{⑰-1}}{\text{⑰-2}}\pi$。

解題觀念：三元一次聯立方程式的解、餘弦定理

參考答案：$\frac{2}{3}\pi$

試題解析：令 $\begin{cases} ax+\left(a^2+ab\right)y+a^2z=3\cdots\cdots① \\ bx+b^2y+\left(ab+b^2\right)z=4\cdots\cdots② \\ (a+b)x+c^2y+c^2z=5\cdots\cdots③ \end{cases}$，

$$\begin{cases} (a+b)x+\left(a^2+b^2+ab\right)y+\left(a^2+b^2+ab\right)z=7\cdots\cdots①+② \\ (a+b)x+c^2y+c^2z=5\cdots\cdots③ \end{cases}，$$

因為無解，比較兩式可知 $a^2+b^2+ab=c^2$，

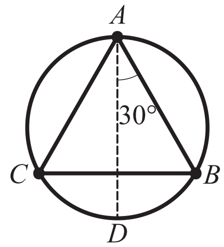
$$a^2+b^2-c^2=-ab\Rightarrow\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=-\frac{1}{2}\Rightarrow\cos\angle C=-\frac{1}{2}\Rightarrow\angle C=\frac{2}{3}\pi。$$

第貳部分、混合題或非選擇題（占15分）

說明：本部分共有 1 題組，每一子題配分標於題末。限在標示題號作答區內作答。選擇題與「非選擇題作圖部分」使用 2B 鉛筆作答，更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。非選擇題請由左而右橫式書寫，作答時必須寫出計算過程或理由，否則將酌予扣分。

第 18 至 20 題為題組

工匠想在半徑50公尺的圓形池塘上，建造一座三角形的木橋跨越池面。已知 $\overline{AD}$ 為圓形池塘的直徑，工匠先在 $\overline{AD}$ 的右側圓上找一點 B，使得 $\angle DAB=30^\circ$，然後在 $\overline{AD}$ 的左側圓上找一點 C，並將 A、B、C 三點連接起來，如圖所示，試回答下列問題。



18. B、D的距離為下列哪一選項？（單選題，3 分）

(1) 30 公尺　(2) $50\sqrt{3}$ 公尺　(3) 50 公尺　(4) $25\sqrt{3}$ 公尺　(5) 25 公尺。

命題出處：龍騰【超模】數學 A 學測全真模擬題本 第 8 回

解題觀念：正弦定理

參考答案：(3)

試題解析：由正弦定理，

知 $\overline{BD}=2\times50\times\sin30^\circ=100\times\frac{1}{2}=50$（公尺），

故選(3)。

19. 令 $\angle DAC=\theta$ 且 θ 為銳角，若木橋的總長度（即$\triangle ABC$的周長，單位：公尺）可表示成 $a\sin\theta+b\cos\theta+c$的形式，其中 a,b,c 為實數，求 a,b,c 的值。（非選擇題，6 分）

命題出處：龍騰【超模】數學 A 學測全真模擬題本 第 8 回

解題觀念：銳角三角比、正弦定理、和角公式

參考答案：$a=50\sqrt{3}$，$b=150$，$c=50\sqrt{3}$

試題解析：由正弦定理，知 $\overline{BC}=100\sin(\theta+30^\circ)$，$\overline{AC}=100\cos\theta$，$\overline{AB}=100\times\frac{\sqrt{3}}{2}=50\sqrt{3}$，

則木橋的總長度為

$100\times\sin(\theta+30^\circ)+100\times\cos\theta+50\sqrt{3}$

$=100(\sin\theta\cos30^\circ+\cos\theta\sin30^\circ)+100\cos\theta+50\sqrt{3}$

$=50\sqrt{3}\sin\theta+50\cos\theta+100\cos\theta+50\sqrt{3}=50\sqrt{3}\sin\theta+150\cos\theta+50\sqrt{3}$，

故 $a=50\sqrt{3}$，$b=150$，$c=50\sqrt{3}$。

解題過程	得分
步驟一：寫出重要條件 將木橋的總長度寫成 $100\times\sin(\theta+30^\circ)+100\times\cos\theta+50\sqrt{3}$。	3 分
步驟二：計算過程、答案正確 將其展開成 $50\sqrt{3}\sin\theta+150\cos\theta+50\sqrt{3}$（公尺）。 得 $a=50\sqrt{3}$，$b=150$，$c=50\sqrt{3}$。	3 分

20. 試求出木橋最長的長度，此時 $\angle DAC$ 為何？（非選擇題，6分）

命題出處：龍騰【超模】數學 A 學測全真模擬題本 第 8 回

解題觀念：正弦與餘弦函數的疊合

參考答案：木橋最長為 $150\sqrt{3}$ 公尺，此時 $\angle DAC=30°$

試題解析：$50\sqrt{3}\sin\theta+150\cos\theta+50\sqrt{3}$

$=100\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right)+50\sqrt{3}$

$=100\sqrt{3}\sin(\theta+60°)+50\sqrt{3}\leq 100\sqrt{3}+50\sqrt{3}=150\sqrt{3}$，

則木橋總長度的最大值為 $150\sqrt{3}$ 公尺，

此時 $\theta+60°=90°\Rightarrow\angle DAC=30°$。

解題過程	得分
步驟一：寫出重要條件 寫出 $50\sqrt{3}\sin\theta+150\cos\theta+50\sqrt{3}=100\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right)+50\sqrt{3}$。	3 分
步驟二：計算過程、答案正確 寫出 $100\sqrt{3}\sin(\theta+60°)+50\sqrt{3}\leq 100\sqrt{3}+50\sqrt{3}=150\sqrt{3}$。	2 分
寫出最大值時 $\angle DAC=30°$。	1 分

參考公式及可能用到的數值

1. 當兩事件 A 與 B 滿足 $P(A\cap B)=P(A)P(B)$ 時，稱 A 與 B 為獨立事件。
2. 正、餘弦函數的疊合公式：設 a 、 b 是不全為 0 的實數，則

   $a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\theta)$ ，其中 θ 滿足 $\cos\theta=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ ， $\sin\theta=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 。
3. 二維數據 (X,Y)：$(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n)$ ，

   相關係數 $r_{X,Y}=\dfrac{(x_1-\mu_X)(y_1-\mu_Y)+(x_2-\mu_X)(y_2-\mu_Y)+\cdots+(x_n-\mu_X)(y_n-\mu_Y)}{n\sigma_X\sigma_Y}$ ，

   迴歸直線（最適合直線）方程式 $y-\mu_Y=r_{X,Y}\dfrac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x-\mu_X)$ 。
4. 餘式定理：多項式 $f(x)$ 除以 $(ax-b)$ 的餘式為 $f\left(\dfrac{b}{a}\right)$ 。
5. 參考數值： $\sqrt{2}\approx1.414$ ， $\sqrt{3}\approx1.732$ ， $\sqrt{5}\approx2.236$ ， $\sqrt{6}\approx2.449$ ， $\pi\approx3.14159$ 。
6. 對數值： $\log2\approx0.3010$ ， $\log3\approx0.4771$ ， $\log5\approx0.6990$ ， $\log7\approx0.8451$ 。
7. 設 a ， b 皆為正數，則：

   (1) $\log ab=\log a+\log b$ 。

   (2) $\log\dfrac{b}{a}=\log b-\log a$ 。

   (3) $\log a^n=n\log a$（ n 為實數）。
8. 令 $\triangle ABC$ 的邊長 $\overline{BC}=a$ ， $\overline{AC}=b$ ， $\overline{AB}=c$ ，

   (1) $\triangle ABC$ 的正弦定理： $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$ ， R 為 $\triangle ABC$ 外接圓半徑。

   (2) $\triangle ABC$ 的餘弦定理： $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$ 。
9. $C_n^m=\dfrac{m!}{n!\times(m-n)!}$ ， $P_n^m=\dfrac{m!}{(m-n)!}$ 。
10. 當兩個非零向量 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 的夾角為 θ（ $0°\le\theta\le180°$ ）時，定義 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 的內積為

    $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=\left|\overrightarrow{a}\right|\left|\overrightarrow{b}\right|\cos\theta$ 。
11. 當 A ， B 為兩事件且 $P(A)>0$ 時，將「在事件 A 發生的條件下，事件 B 發生的機率」稱為條件機率，以符號 $P(B|A)$ 表示，也就是 $P(B|A)=\dfrac{n(A\cap B)}{n(A)}=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$ 。