龍騰文化

113 學年度分科測驗全真模擬試卷

數學甲考科

請於考試開始鈴響起，在答題卷簽名欄位以正楷簽全名

龍騰數學科編輯小組

【教用卷】

—作答注意事項—

考試時間：80 分鐘

作答方式：

- 選擇（填）題用 2B 鉛筆在「答題卷」上作答；更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。
- 除題目另有規定外，非選擇題用筆尖較粗之黑色墨水的筆在「答題卷」上作答；更正時，可以使用修正液（帶）。
- 考生須依上述規定劃記或作答，若未依規定而導致答案難以辨識或評閱時，恐將影響成績並損及權益。
- 答題卷每人一張，不得要求增補。
- 選填題考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子劃記。

選擇（填）題計分方式：

- 單選題：每題有 n 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項。各題答對者，得該題的分數；答錯、未作答或劃記多於一個選項者，該題以零分計算。
- 多選題：每題有 n 個選項，其中至少有一個是正確的選項。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得該題全部的分數；答錯 k 個選項者，得該題 $\frac{n-2k}{n}$ 的分數；但得分低於零分或所有選項均未作答者，該題以零分計算。
- 選填題每題有 n 個空格，須全部答對才給分，答錯不倒扣。

※試題中參考的附圖均為示意圖，試題後附有參考公式及數值。

祝考試順利

龍騰文化
肯定自己 ➤ 肯定不同

學用卷定價 20 元
62001N12-ER A
贈品禁止轉售

第壹部分、選擇（填）題（占 76 分）

一、單選題（占 18 分）

說明：第 1 題至第 3 題，每題 6 分。

1. 在 $0 \le x < 2\pi$ 的範圍內，滿足二階方陣 $A = \begin{bmatrix} 2\sin x & 1 \\ 1 & 2\cos x \end{bmatrix}$ 的乘法反方陣 A^{-1} 不存在之所有 x 的總和為何？

(1) π　(2) 2π　(3) 3π　(4) 4π　(5) 5π

參考答案：(3)

試題解析：因為 A^{-1} 不存在，所以 $\begin{vmatrix} 2\sin x & 1 \\ 1 & 2\cos x \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 4\sin x\cos x - 1 = 0 \Rightarrow \sin 2x = \frac{1}{2}$，

又 $0 \le x < 2\pi$，所以 $0 \le 2x < 4\pi \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi, 2\pi + \frac{\pi}{6}, 2\pi + \frac{5\pi}{6}$

$\Rightarrow x = \frac{\pi}{12}, \frac{5}{12}\pi, \pi + \frac{\pi}{12}, \pi + \frac{5}{12}\pi$，故所有 x 的總和為 3π。

2. 設空間中三向量 $\overrightarrow{a} = (1, 2, -1)$，$\overrightarrow{b} = (-1, 1, -2)$，$\overrightarrow{c} = (x^2, x-2, 3)$，若 $f(x) = (\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{c}$，則 $f(x)$ 最大值為何？

(1) $\frac{15}{4}$　(2) $\frac{5}{4}$　(3) 3　(4) $-\frac{15}{2}$　(5) $\frac{5}{2}$

參考答案：(1)

試題解析：$f(x) = (\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{c} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \\ x^2 & x-2 & 3 \end{vmatrix}$

$= 3 - 4x^2 + x - 2 + x^2 + 6 + 2(x-2)$

$= -3x^2 + 3x + 3 = -3(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{15}{4}$，

故最大值為 $\frac{15}{4}$。

3. 設數列 $\langle a_n \rangle$ 的遞迴關係式為 $\begin{cases} a_1 = \sqrt{10} \\ a_n = \left(\frac{\sqrt{10}}{100}\right)^3 \times a_{n-1} \ (n \ge 2) \end{cases}$。若 $b_n = \log a_n$，則 $b_1 + b_2 + b_3$ 的值為何？

(1) -12　(2) -10　(3) $-\frac{13}{2}$　(4) $\frac{1}{2}$　(5) 8

參考答案：(1)

試題解析：因為 $\log a_n = \log\left(\frac{\sqrt{10}}{100}\right)^3 + \log a_{n-1} \Rightarrow b_n = 3\left(\log\sqrt{10} - \log 100\right) + b_{n-1}$（$n \ge 2$），

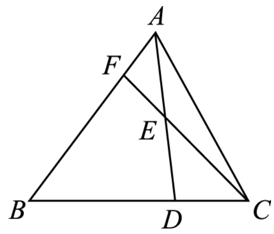
所以 $b_n = -\frac{9}{2} + b_{n-1}$（$n \ge 2$），得 $b_1 = \log\sqrt{10} = \frac{1}{2}$，$b_2 = -\frac{9}{2} + b_1 = -4$，$b_3 = -\frac{9}{2} + b_2 = -\frac{17}{2}$，

即 $b_1 + b_2 + b_3 = -12$，故選(1)。

二、多選題（占 40 分）

說明：第 4 題至第 8 題，每題 8 分。

4. 如圖，在 $\triangle ABC$ 中，$\overline{BD}=2\overline{DC}$、$\overline{AE}=\overline{ED}$。選出正確的選項：



(1) $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

(2) $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$

(3) $\overline{AF}:\overline{FB}=1:4$

(4) $\overline{CE}:\overline{EF}=3:2$

(5) $\frac{\Delta AEF\text{的面積}}{\Delta ABC\text{的面積}}=\frac{1}{12}$

參考答案：(1)(5)

試題解析：(1) 利用分點公式，可得 $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$。

(2) 因為 $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$，

所以 $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$。

(3) 令 $\overrightarrow{AB}=t\,\overrightarrow{AF}$，

則 $\overrightarrow{AE}=\frac{t}{6}\overrightarrow{AF}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$，

因為 F、E、C 三點共線，

所以 $\frac{t}{6}+\frac{1}{3}=1\Rightarrow t=4$，

即 $\overrightarrow{AB}=4\overrightarrow{AF}\Rightarrow\overline{AF}:\overline{FB}=1:3$。

(4) 由(3)可知，

$\overrightarrow{AE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AF}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\Rightarrow\overline{CE}:\overline{EF}=2:1$。

(5) $\frac{\Delta AEF\text{的面積}}{\Delta ABC\text{的面積}}=\frac{\Delta AEF\text{的面積}}{\frac{3}{2}\times\Delta ABD\text{的面積}}=\frac{\frac{1}{2}\times\overline{AF}\times\overline{AE}\times\sin\angle BAD}{\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}\times(4\overline{AF})\times(2\overline{AE})\times\sin\angle BAD}=\frac{1}{12}$。

故選(1)(5)。

5. 圓 $C_1 : x^2+y^2=4$，圓 $C_2 : (x-5)^2+(y-12)^2=9$，若 $P(a\,,b)$ 為 C_1 上任一點，$Q(c\,,d)$ 為圓 C_2 上的一點，試問下列何者正確？

(1) $\overline{PQ}$ 之最大值為 13

(2) 當 $\overline{PQ}$ 有最小值時，$P\left(\dfrac{10}{13},\dfrac{24}{13}\right)$、$Q\left(\dfrac{50}{13},\dfrac{120}{13}\right)$

(3) $ac+bd$ 的最大值為 32

(4) $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ 最小值為 -32

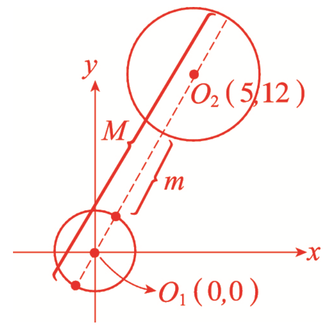
(5) 若直線 $3x-4y+k=0$ 穿越兩圓之間而不與兩圓有任何交點，則 k 值範圍為 $10<k<18$

參考答案：(2)(3)(4)(5)

試題解析：(1) 如圖，$\overline{PQ}$ 最大值 $=\overline{O_1O_2}+r_1+r_2$

$=\sqrt{5^2+12^2}+2+3$

$=13+2+3=18$。



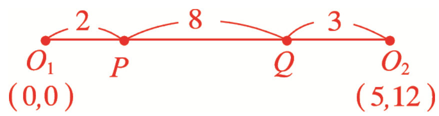
(2) $\overline{PQ}$ 最小時，

$\overrightarrow{O_1P}=\dfrac{2}{13}\overrightarrow{O_1O_2}=\left(\dfrac{10}{13},\dfrac{24}{13}\right)$

$\Rightarrow\quad P\left(\dfrac{10}{13},\dfrac{24}{13}\right)$，

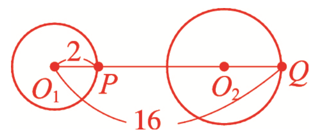
$\overrightarrow{O_1Q}=\dfrac{10}{13}\overrightarrow{O_1O_2}=\left(\dfrac{50}{13},\dfrac{120}{13}\right)$

$\Rightarrow\quad Q\left(\dfrac{50}{13},\dfrac{120}{13}\right)$。



(3) $ac+bd=\overrightarrow{O_1P}\cdot\overrightarrow{O_1Q}=|\overrightarrow{O_1P}|\,|\overrightarrow{O_1Q}|\cos\theta$

最大值產生在 $\theta=0^\circ=2\times16\times\cos0^\circ=32$。



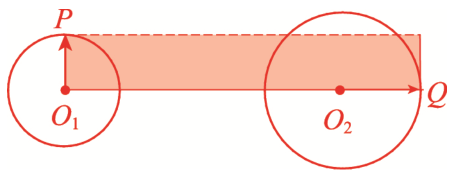
(4) $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ 的絕對值為 $\overrightarrow{O_1P}$ 與 $\overrightarrow{O_1Q}$ 張開的平行四邊形面積，

所以當 $\overrightarrow{O_1P}\perp\overrightarrow{O_1Q}$ 時最大

$\Rightarrow\quad \left|\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\right|=2\times16=32$ 最大

$\Rightarrow\quad \left|\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\right|\le32 \quad\Rightarrow\quad -32\le\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\le32$，

所以最小值為 -32。



(5) 當 L：$3x-4y+k=0$ 與 C_1 相切時 $\dfrac{|0+0+k|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=2$

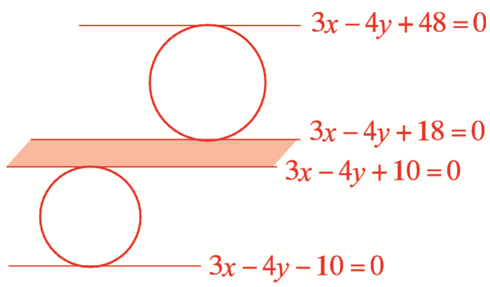
$\Rightarrow\quad k=\pm10$，

當 L 與 C_2 相切時 $\dfrac{|15-48+k|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=3$

$\Rightarrow\quad |k-33|=15$

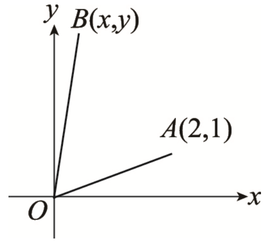
$\Rightarrow\quad k=48$ 或 18，

由圖可知 $10<k<18$。



故選(2)(3)(4)(5)。

6. 如圖所示，在坐標平面上，點 $A(2,1)$、$B(x,y)$，$\angle AOB=60^\circ$，$\overline{OB}=2\overline{OA}$，且矩陣 $X=\begin{bmatrix}1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 1\end{bmatrix}$，試問下列選項何者正確？



(1) $\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos 60^\circ & -\sin 60^\circ\\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}$

(2) 若點 A 對於直線 $\overleftrightarrow{OB}$ 的對稱點坐標為 (x',y')，則 $x'+y'i=(2+i)(\cos 120^\circ+i\sin 120^\circ)$，其中 $i=\sqrt{-1}$

(3) 若矩陣 X 將 A、B 兩點分別變換到 A' 與 B'，則 $\triangle A'OB'$ 的面積為 $\left|\begin{vmatrix}1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 1\end{vmatrix}\right|$ 倍的 $\triangle AOB$ 面積

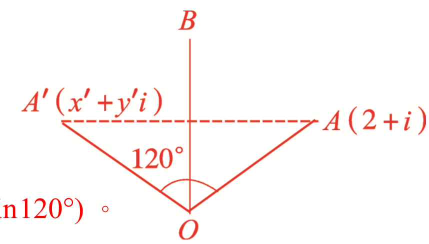
(4) $X^6=64I_2$，其中 $I_2=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

(5) 以直線 $\overleftrightarrow{OA}$ 為對稱軸之鏡射方陣為 $\begin{bmatrix}\frac{3}{5} & \frac{4}{5}\\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5}\end{bmatrix}$

參考答案：(1)(2)(3)(4)(5)

試題解析：

(1) $\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos 60^\circ & -\sin 60^\circ\\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}$ 是表示將 $A(2,1)$ 逆時針旋轉 60° 再伸長 2 倍長，恰符合題示的 B 點。



(2)利用複數平面將 $A(2,1)$ 視為 $2+i$，

而 A 點的對稱點 $A'(x',y')$ 視為 $x'+y'i$

$\Rightarrow \dfrac{x'+y'i}{2+i}=\dfrac{1}{1}(\cos 120^\circ+i\sin 120^\circ)\Rightarrow \quad x'+y'i=(2+i)(\cos 120^\circ+i\sin 120^\circ)$。

(3)矩陣 $X=\begin{bmatrix}1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 1\end{bmatrix}$ 將 $\triangle AOB$ 區域變換為 $\triangle A'OB'$ 區域，則 $\triangle A'OB'$ 面積 $=|\det(X)|$ $\triangle AOB$ 面積。

(4) $\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix}\cos n\theta & -\sin n\theta\\ \sin n\theta & \cos n\theta\end{bmatrix}$，

$$X^6=\left(2\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\right)^6=\left(2\begin{bmatrix}\cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3}\\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3}\end{bmatrix}\right)^6=2^6\begin{bmatrix}\cos 2\pi & -\sin 2\pi\\ \sin 2\pi & \cos 2\pi\end{bmatrix}=64\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=64I_2$$ 。

(5)以直線 L：$y=(\tan\theta)x$ 為對稱軸之鏡射矩陣為 $\begin{bmatrix}\cos 2\theta & \sin 2\theta\\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{3}{5} & \frac{4}{5}\\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5}\end{bmatrix}$，

因為 $\tan\theta=\dfrac{1}{2}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}\cos 2\theta=\dfrac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}=\dfrac{1-\frac{1}{4}}{1+\frac{1}{4}}=\dfrac{3}{5}\\ \sin 2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}=\dfrac{4}{5}\end{cases}$。

故選(1)(2)(3)(4)(5)。

7. 已知三次函數 $f(x)$ 在 $x=-1$ 處有極大值 2，且 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)+2}{x-3}=0$。選出正確的選項：

(1) $f'(-1)=2$　(2) $f(3)=-2$　(3) $f'(3)=0$　(4)方程式 $f(x)=0$ 恰有三相異實根

(5) $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{f(k+100)}{f(2k)}=\dfrac{1}{8}$

參考答案：(2)(3)(4)(5)

試題解析：(1) $f'(-1)=0$。

(2) 因為 $\lim\limits_{x\to 3}(f(x)+2)=\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{f(x)+2}{x-3}\times(x-3)\right)=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)+2}{x-3}\times\lim\limits_{x\to 3}(x-3)=0\times 0=0$，

所以 $\lim\limits_{x\to 3}(f(x)+2)=f(3)+2=0$，即 $f(3)=-2$。

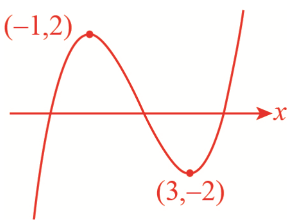
(3) 因為 $f(3)=-2$，所以 $f'(3)=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)+2}{x-3}=0$。

(4) 由三次函數 $f(x)$ 在 $x=-1$ 處有極大值 2，

及 $f(3)=-2$，$f'(3)=0$，可得 $f(x)$ 的略圖如右。

因為圖形與 x 軸交於三相異點，

所以方程式 $f(x)=0$ 恰有三相異實根。



(5) 設 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$，

則 $f(2k)=a(2k)^3+b(2k)^2+c(2k)+d=8ak^3+4bk^2+2ck+d$，

$f(k+100)=a(k+100)^3+b(k+100)^2+c(k+100)+d\overset{令}{=}ak^3+b_1k^2+c_1k+d_1$，

其中 b_1,c_1,d_1 為定值。

因此 $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{f(k+100)}{f(2k)}=\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{a+\dfrac{b_1}{k}+\dfrac{c_1}{k^2}+\dfrac{d_1}{k^3}}{8a+\dfrac{4b}{k}+\dfrac{2c}{k^2}+\dfrac{d}{k^3}}=\dfrac{a}{8a}=\dfrac{1}{8}$。

故選(2)(3)(4)(5)。

8. 已知三次函數 $f(x)$ 的圖形通過(0,0)、(4,0)、(6,0)，且 $\int_0^4 f(x)dx=9$，$\int_0^6 f(x)dx=7$。

選出正確的選項：

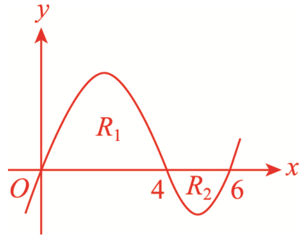
(1) $\int_4^6 f(x)dx=2$　　(2) $f(x)$ 的圖形與 x 軸所圍成區域面積為 11

(3) $\int_0^6 (f(x)+x)dx=25$　　(4) $\int_0^6 |f(x)|dx=11$　　(5) $\int_0^5 f(x-1)dx<9$

參考答案：(2)(3)(4)(5)

試題解析：由 $f(x)$ 的圖形通過點(0,0),(4,0)與(6,0)，及 $\int_0^4 f(x)dx=9>0$，

可得 $f(x)$ 的圖形如右：



(1) 因為 $\int_0^6 f(x)dx=\int_0^4 f(x)dx+\int_4^6 f(x)dx\Rightarrow 7=9+\int_4^6 f(x)dx$，

所以 $\int_4^6 f(x)dx=-2$。

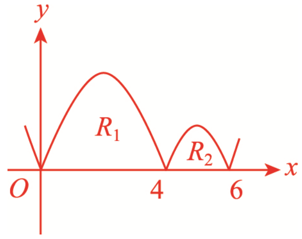
(2) 因為 $\int_0^4 f(x)dx=9$，$\int_4^6 f(x)dx=-2$，

所以區域 R_1 的面積為 9，區域 R_2 的面積為 2。

故 $f(x)$ 的圖形與 x 軸所圍成區域的面積為 $9+2=11$。

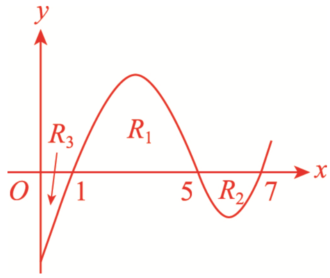
(3) $\int_0^6 (f(x)+x)dx=\int_0^6 f(x)dx+\int_0^6 xdx=7+\left(\dfrac{1}{2}x^2\right)\Big|_0^6=7+18=25$。

(4) $|f(x)|$的圖形如下：



得 $\int_0^6 |f(x)|dx = R_1$ 的面積 $+R_2$的面積 $=9+2=11$ 。

(5) 因為 $f(x-1)$ 的圖形為 $f(x)$ 的圖形向右平移 1 單位，
可得 $f(x-1)$ 的圖形如下：



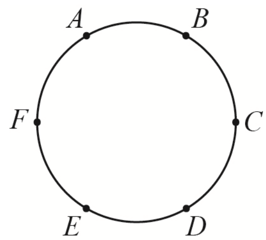
故 $\int_0^5 f(x-1)dx = R_1$ 的面積 $-R_3$ 的面積 $=9-R_3$ 的面積 <9 。

故選(2)(3)(4)(5)。

三、選填題（占 18 分）

說明：第 9 題至第 11 題，每題 6 分。

9. 如右圖，A, B, C, D, E, F 為圓周上的六個等分點。有一遊戲，開始時將一石子置於出發點 A，接著丟一公正硬幣決定如何移動石子，規則如下：若出現正面，則石子順時針前進二個等分點；若出現反面，則順時針前進一個等分點。則石子恰繞該圓一周（即回到出發點 A 處）的機率為 $\dfrac{(9-1)(9-2)}{(9-3)(9-4)}$ 。



參考答案：$\dfrac{43}{64}$

試題解析：設移動二個等分點 x 次，一個等分點 y 次。
依題意，得 $2x+y=6$，
其中 x, y 為非負整數。
其解有

x	0	1	2	3
y	6	4	2	0

等 4 組解。

利用二項分配，得恰繞該圓一周的機率為

$$C_0^6\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^6+C_1^5\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^4+C_2^4\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2+C_3^3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^0=\frac{1}{64}+\frac{5}{32}+\frac{6}{16}+\frac{1}{8}=\frac{43}{64}$$ 。

10. $\triangle ABC$ 中，已知 $2\sin A+3\cos C=\sqrt{7}$ 且 $3\sin C+2\cos A=2\sqrt{3}$，若 $\triangle ABC$ 外有一點 D，滿足 $\overline{DA}\perp\overline{AB}$、$\overline{DC}\perp\overline{BC}$，而且 $\overline{BD}=6$，求 $\overline{AC}=$ __10__ 。

參考答案：3

試題解析：$\begin{cases}2\sin A+3\cos C=\sqrt{7}\cdots\cdots① \\ 3\sin C+2\cos A=2\sqrt{3}\cdots\cdots②\end{cases}$，

$①^2+②^2$

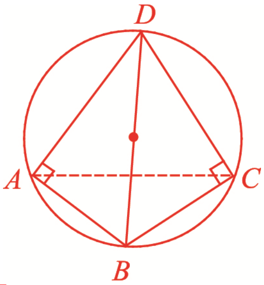
$\Rightarrow\ 4(\sin^2 A+\cos^2 A)+9(\sin^2 C+\cos^2 C)+12(\sin A\cos C+\cos A\sin C)=19$

$\Rightarrow 4+9+12\sin(\angle A+\angle C)=19\Rightarrow\sin(\angle A+\angle C)=\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow\sin(\pi-\angle B)=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\sin B=\dfrac{1}{2}$，

又 $\overline{AD}\perp\overline{AB}$ 且 $\overline{DC}\perp\overline{BC}$ 表示 A、B、C、D 四點共圓，

且 $\overline{BD}$ 為此圓直徑，



從 $\triangle ABC$ 中可得知 $\triangle ABC$ 外接圓直徑為 $2R=\overline{BD}=6=\dfrac{\overline{AC}}{\sin B}$

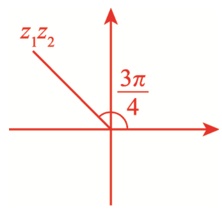
$\Rightarrow\overline{AC}=6\sin B=6\times\dfrac{1}{2}=3$。

11. 三複數 $z_1=-2+i$，$z_2=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，$z_3=\cos\phi+i\sin\phi$，其中 $r>0$，z_3 的主輻角為 ϕ，

若 $\cos\theta=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$，$\dfrac{3\pi}{2}<\theta<2\pi$，且滿足點 $P\left(\dfrac{z_1\times z_2}{z_3}\right)$ 在實軸正向上，則 $\phi=\dfrac{\text{11−1}}{\text{11−2}}\pi$ 。

參考答案：$\dfrac{3}{4}\pi$

試題解析：因為 $\dfrac{3\pi}{2}<\theta<2\pi$，所以 $\cos\theta=\dfrac{3}{\sqrt{10}}\Rightarrow\sin\theta=\dfrac{-1}{\sqrt{10}}$，



$z_1=-2+i=\sqrt{5}\left(-\dfrac{2}{\sqrt{5}}+\dfrac{1}{\sqrt{5}}i\right)=\sqrt{5}(\cos\beta+i\sin\beta)$，

令 $\cos\beta=-\dfrac{2}{\sqrt{5}}$，$\sin\beta=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$，

則 $z_1z_2=\sqrt{5}r\left(\cos(\theta+\beta)+i\sin(\theta+\beta)\right)$，

$\cos(\theta+\beta)=\cos\theta\cos\beta-\sin\theta\sin\beta=\dfrac{3}{\sqrt{10}}\times\left(\dfrac{-2}{\sqrt{5}}\right)-\left(\dfrac{-1}{\sqrt{10}}\right)\times\dfrac{1}{\sqrt{5}}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，

$\sin(\theta+\beta)=\sin\theta\cos\beta+\cos\theta\sin\beta=\left(\dfrac{-1}{\sqrt{10}}\right)\times\left(\dfrac{-2}{\sqrt{5}}\right)+\dfrac{3}{\sqrt{10}}\times\dfrac{1}{\sqrt{5}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，

所以 $\theta+\beta=\dfrac{3}{4}\pi$，又 $P\left(\dfrac{z_1\times z_2}{z_3}\right)$ 在實軸正向上，

得 $\theta+\beta-\phi=2k\pi$，$k\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow\phi=\dfrac{3}{4}\pi-2k\pi$，取 $\phi=\dfrac{3}{4}\pi$（$0\le\phi<2\pi$）。

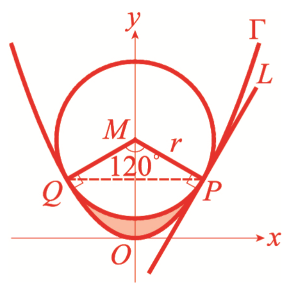
第貳部分、混合題或非選擇題（占 **24** 分）

說明：本部分共有 2 題組，選填題每題 2 分，非選擇題配分標於題末。限在答題卷標示題號的作答區內作答。選擇（填）題與「非選擇題作圖部分」使用 2B 鉛筆作答，更正時以橡皮擦擦拭，切勿使用修正帶（液）。非選擇題請由左而右橫式書寫，作答時必須寫出計算過程或理由，否則將酌予扣分。

12-14 題為題組

已知圓 C：$x^2+(y-k)^2=r^2$（$r>0$）與拋物線 Γ：$y=x^2$ 相切於 P, Q 兩點，且圓 C 的圓心 M 滿足 $\angle PMQ=120°$。

12. 請將 P 點坐標以 k 與 r 表示。（非選擇題，4 分）



參考答案：$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}r, k-\dfrac{1}{2}r\right)$

試題解析：因為 $y=x^2$，所以 $y'=2x$。

因為 $\angle PMQ=120°$，所以 $\angle PMO=60°$。

得 P 的坐標為 $(r\sin 60°, k-r\cos 60°)=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}r, k-\dfrac{1}{2}r\right)$。

13. 請求出實數 k 與 r 的值。（非選擇題，4 分）

參考答案：$k=\dfrac{5}{4}$，$r=1$

試題解析：切線 L 的斜率為 $2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}r\right)=\sqrt{3}r$。

又因為 $\overleftrightarrow{MP}\perp L$，

所以 $\overleftrightarrow{MP}$ 的斜率為 $\dfrac{-1}{\sqrt{3}r}$，

由點斜式，得 $\overleftrightarrow{MP}$：$y-k=\dfrac{-1}{\sqrt{3}r}(x-0)$，

因為 P 點既在 $\overleftrightarrow{MP}$ 上也在 Γ 上，

所以 $\begin{cases}\left(k-\dfrac{1}{2}r\right)-k=\dfrac{-1}{\sqrt{3}r}\times\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}r-0\right)\\ k-\dfrac{1}{2}r=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}r\right)^2\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}r=1\\ k=\dfrac{3}{4}r^2+\dfrac{1}{2}r\end{cases}$，

解得 $r=1$，$k=\dfrac{5}{4}$。

14. 拋物線 Γ 與圓 C 所圍的面積（在拋物線之上，圓之下的部分）（非選擇題，4 分）
（註：兩曲線相切是指在其交點處的切線是同一條直線）

參考答案：$\dfrac{3\sqrt{3}}{4}-\dfrac{\pi}{3}$

試題解析：因為 $P\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{3}{4}\right)$，$Q\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{3}{4}\right)$，

所以 Γ 與 C 所圍面積為

$\left(\text{水平線 } y=\dfrac{3}{4} \text{ 與 } y=x^2 \text{ 所圍面積}\right)-$(弓形 

)

$$=\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\frac{3}{4}-x^2\right)dx-\left(\frac{1}{2}\times 1^2\times\frac{2\pi}{3}-\frac{1}{2}\times 1\times 1\times\sin 120^\circ\right)$$

$$=\left(\frac{3}{4}x-\frac{1}{3}x^3\right)\Bigg|_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}-\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}-\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$=\frac{3\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{3}\text{。}$$

15-17 題為題組

已知二階方陣 M 滿足 $M\begin{bmatrix}1\\\sqrt{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\2\sqrt{3}\end{bmatrix}$，$M\begin{bmatrix}\sqrt{3}\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\4\end{bmatrix}$。

15. 求 $M=\begin{bmatrix}15\text{–}1 & -\sqrt{15\text{–}2}\\ \sqrt{15\text{–}3} & 15\text{–}4\end{bmatrix}$。（選填題，4 分）

參考答案：$\begin{bmatrix}1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 1\end{bmatrix}$

試題解析：合併已知條件，

得 $M\begin{bmatrix}1 & \sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 2\sqrt{3} & 4\end{bmatrix}$。

利用反方陣公式，

$$\text{得 } M=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 2\sqrt{3} & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 2\sqrt{3} & 4\end{bmatrix}\times\frac{1}{-2}\begin{bmatrix}1 & -\sqrt{3}\\ -\sqrt{3} & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -\sqrt{3} & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -\sqrt{3}\\ -\sqrt{3} & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 1\end{bmatrix}\text{。}$$

16. 設 $P=\frac{1}{2}M$，求 P^3+P^6。（非選擇題，4 分）

參考答案：$\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$

試題解析：因為 $P=\frac{1}{2}M=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos 60^\circ&-\sin 60^\circ\\\sin 60^\circ&\cos 60^\circ\end{bmatrix}$ 為一旋轉矩陣，

所以 $P^3+P^6=\begin{bmatrix}\cos 180^\circ&-\sin 180^\circ\\\sin 180^\circ&\cos 180^\circ\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\cos 360^\circ&-\sin 360^\circ\\\sin 360^\circ&\cos 360^\circ\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$。

17. 在坐標平面上，已知 O 為原點，$\triangle OAB$ 是邊長為 2 的正三角形。若 $\triangle OAB$ 經二階方陣 M 線性變換後成 $\triangle O'A'B'$，則 $\angle A'O'B'$ 及 $\overline{O'A'}$ 為何？（非選擇題，4 分）

參考答案：$\angle A'O'B'=60^\circ$，$\overline{O'A'}=4$

試題解析：將 M 改寫為 $M=2P=\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos 60^\circ&-\sin 60^\circ\\\sin 60^\circ&\cos 60^\circ\end{bmatrix}$，

得知 M 的變換是以 O 為中心逆時針旋轉 60° 後，再伸縮 2 倍。

又 O' 仍為 O，因此，$\triangle O'A'B'$ 是邊長為 4 的正三角形，

故 $\angle A'O'B'=60^\circ$ 且 $\overline{O'A'}=4$。

參考公式及可能用到的數值

1. 首項為 a，公差為 d 的等差數列前 n 項之和為 $S=\dfrac{n(2a+(n-1)d)}{2}$

   首項為 a，公比為 $r\,(r\neq 1)$ 的等比數列前 n 項之和為 $S=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$

2. 級數和：$\sum\limits_{k=1}^{n}k^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$；$\sum\limits_{k=1}^{n}k^3=\left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$

3. 三角函數的和角公式：$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$

   $\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$

   $\tan(A+B)=\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$

4. ΔABC 的正弦定理：$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$（$R$ 為 ΔABC 外接圓半徑）

   ΔABC 的餘弦定理：$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

5. 一維數據 $X:x_1,x_2,\cdots,x_n$，

   算術平均數 $\mu_X=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i$；標準差 $\sigma_X=\sqrt{\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\mu_X)^2}=\sqrt{\dfrac{1}{n}(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^{\,2}-n\mu_X^{\,2})}$

6. 二維數據 $(X,Y):(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n)$，

   相關係數 $r_{X,Y}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\mu_X)(y_i-\mu_Y)}{n\sigma_X\sigma_Y}$

   最適直線（迴歸直線）方程式 $y-\mu_Y=r_{X,Y}\dfrac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x-\mu_X)$

7. 參考數值：$\sqrt{2}\approx 1.414$, $\sqrt{3}\approx 1.732$, $\sqrt{5}\approx 2.236$, $\sqrt{6}\approx 2.449$, $\pi\approx 3.142$

   $\sin 23^\circ\approx 0.40$, $\sin 37^\circ\approx 0.60$, $\sin 53^\circ\approx 0.80$, $\cos 23^\circ\approx 0.92$, $\cos 37^\circ\approx 0.80$, $\cos 53^\circ\approx 0.60$

8. 對數值：$\log 2\approx 0.3010$, $\log 3\approx 0.4771$, $\log 5\approx 0.6990$, $\log 7\approx 0.8451$

9. 若 $X\sim B(n,p)$ 為二項分布，則期望值 $E(X)=np$，變異數 $Var(X)=np(1-p)$；

   若 $X\sim G(p)$ 為幾何分布，則期望值 $E(X)=\dfrac{1}{p}$，變異數 $Var(X)=\dfrac{1-p}{p^2}$。