

115 學年度學科能力測驗全真模擬試卷

數學 A 考科 解答卷

■答案

第壹部分：

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	(13-1)	(13-2)
5	3	1	2	4	3	145	124	245	45	145	135	3	6
(13-3)	(13-4)	(14-1)	(14-2)	(14-3)	(15-1)	(15-2)	(15-3)	(15-4)	(16-1)	(16-2)	(17-1)	(17-2)	
-	1	1	4	4	4	6	0	8	6	3	3	4	

第貳部分：

18.	19.	20.
3	1.66	$400\sqrt{3}$

■解析

1. $|\vec{a}| = 7\sqrt{13}$, $|\vec{b}| = 9\sqrt{5}$,

若 $x\vec{a} + y\vec{b}$ 可以平分 \vec{a} 和 \vec{b} 的夾角，

則 $x|\vec{a}| = y|\vec{b}|$, 且 $x > 0$, $y > 0$ 。

(1) $|\vec{a}| \neq |\vec{b}|$, 所以 $\vec{a} + \vec{b}$ 無法平分 \vec{a} 和 \vec{b} 的夾角。

(2) $9|\vec{a}| \neq 7|\vec{b}|$, 所以 $9\vec{a} + 7\vec{b}$ 無法平分 \vec{a} 和 \vec{b} 的夾角。

(3) $\frac{|\vec{a}|}{\sqrt{13}} \neq \frac{|\vec{b}|}{\sqrt{5}}$, 所以 $\frac{\vec{a}}{\sqrt{13}} + \frac{\vec{b}}{\sqrt{5}}$ 無法平分 \vec{a} 和 \vec{b} 的夾角。

(4) $\frac{7}{\sqrt{13}}|\vec{a}| \neq \frac{9}{\sqrt{5}}|\vec{b}|$, 所以 $\frac{7}{\sqrt{13}}\vec{a} + \frac{9}{\sqrt{5}}\vec{b}$ 無法平分 \vec{a} 和 \vec{b} 的夾角。

(5) $\frac{9}{\sqrt{13}}|\vec{a}| = \frac{7}{\sqrt{5}}|\vec{b}|$, 所以 $\frac{9}{\sqrt{13}}\vec{a} + \frac{7}{\sqrt{5}}\vec{b}$ 可以平分 \vec{a} 和 \vec{b} 的夾角。

故選(5)。

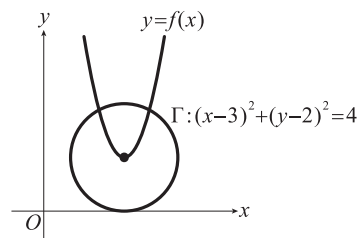
2. 配方可得 $\Gamma: (x-3)^2 + (y-2)^2 = 4$,

$$f(x) = 2(x-3)^2 + 2 ,$$

作圖如右：

由圖可知共有 2 個

交點。故選(3)。



3. 方程式 $2^x = x^2$ 的解為 $y = 2^x$ 與

$y = x^2$ 的圖形交點，

由圖觀察可得，

當 $x < 0$ 時，方程式有一解，

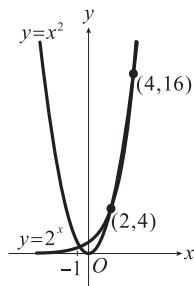
當 $x = 0$ 時， $2^0 > 0^2$ ，

當 $x = -1$ 時， $2^{-1} < (-1)^2$ ，

又當 $x = -\frac{1}{2}$ 時， $2^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.707$ ，

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} = 0.25 \Rightarrow 2^{-\frac{1}{2}} > \left(-\frac{1}{2}\right)^2 ,$$

故在 -1 與 $-\frac{1}{2}$ 之間有一實根。故選(1)。



4. 令直線 L 的斜角為 $-\theta$ 。

$\triangle ABC$ 的面積為

$$S = \frac{1}{2} \times \overline{BC} \times \overline{AB} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\tan \theta} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8 \tan \theta}。$$

$\triangle ADE$ 的面積為

$$T = \frac{1}{2} \times \overline{AD} \times \overline{DE} = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \tan \theta = \frac{3 \tan \theta}{8}。$$

$$S \times T = \frac{1}{8 \tan \theta} \times \frac{3 \tan \theta}{8} = \frac{3}{64} \text{ 為定值，}$$

$$\text{由算幾不等式可知 } \frac{S+T}{2} \geq \sqrt{S \times T} = \frac{\sqrt{3}}{8} \Rightarrow S+T \geq \frac{\sqrt{3}}{4}。$$

$$\text{因此 } (\Gamma, \Lambda) = \left(\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{3}{64} \right)。 \text{故選(2)。}$$

5. P (一次成功) = 0.01, 即 P (一次失敗) = $1 - 0.01 = 0.99$,

P (連續嘗試 n 次, 至少成功一次)

$$= 1 - P(\text{連續嘗試 } n \text{ 次, 均失敗}) = 1 - 0.99^n,$$

$$\text{可得 } 1 - 0.99^n > 0.99$$

$$\Rightarrow -0.99^n > -0.01 \Rightarrow 0.99^n < 0.01 \Rightarrow \log 0.99^n < \log 0.01,$$

$$\text{即 } n \log 0.99 < -2 \Rightarrow n(-0.00436) < -2,$$

$$\text{解得 } n > \frac{2}{0.00436} \approx 458.72,$$

所以整數 n 至少為 459, 故選(4)。

6. 平面 Γ_1 與 Γ_2 的法向量為 $\vec{N}_\Gamma = (1, -1, -1)$,

平面 Λ_1 與 Λ_2 的法向量為 $\vec{N}_\Lambda = (-1, 1, -1)$,

平面 Ω_1 與 Ω_2 的法向量為 $\vec{N}_\Omega = (-1, -1, 1)$ 。

因為平面 Γ_1 與 Λ_1 的交線為直線 AD 且

$$\vec{N}_\Gamma \times \vec{N}_\Lambda = (2, 2, 0) = \vec{\ell}_1, \text{ 所以 } \overrightarrow{AD} \text{ 平行 } \vec{\ell}_1。$$

因為平面 Ω_1 與 Γ_1 的交線為直線 AB 且

$$\vec{N}_\Omega \times \vec{N}_\Gamma = (2, 0, 2) = \vec{\ell}_2, \text{ 所以 } \overrightarrow{AB} \text{ 平行 } \vec{\ell}_2。$$

因為平面 Λ_1 與 Ω_1 的交線為直線 AE 且

$$\vec{N}_\Lambda \times \vec{N}_\Omega = (0, 2, 2) = \vec{\ell}_3, \text{ 所以 } \overrightarrow{AE} \text{ 平行 } \vec{\ell}_3。$$

$$\cos \angle BAD = \frac{|\vec{\ell}_1 \cdot \vec{\ell}_2|}{|\vec{\ell}_1| |\vec{\ell}_2|} = \frac{4}{2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \angle BAD = 60^\circ。$$

同理可得 $\angle BAE = 60^\circ$, $\angle DAE = 60^\circ$ 。

因此若在直線 AB 、直線 AD 、直線 AE 上各取一點 P 、 Q 、 R , 使得 $\overline{AP} = \overline{AQ} = \overline{AR}$, 則 $APQR$ 為正四面體。

因為正四面體中, 稜長: 高 = $\sqrt{6}:2$,

$$\text{所以 } \frac{\overline{AB}}{4} = \frac{\sqrt{6}}{2} \Rightarrow \overline{AB} = 2\sqrt{6}, \frac{\overline{AD}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{2} \Rightarrow \overline{AD} = 3\sqrt{6}。$$

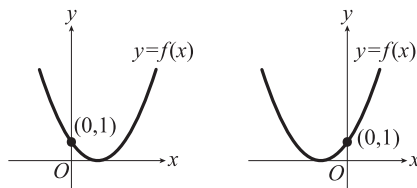
平行四邊形 $ABCD$ 的面積為 $2\sqrt{6} \times 3\sqrt{6} \sin 60^\circ = 18\sqrt{3}$,

所求體積為 $18\sqrt{3} \times 2 = 36\sqrt{3}$ 。故選(3)。

7. 因為 $f(x)$ 的圖形與 x 軸相切, 所以 $b^2 - 4ac = 0$,

又圖形通過點 $(0, 1)$, 因此可知 $f(0) = c = 1$,

其圖形可能為下列兩種:



(1) ○: 因為圖形的開口向上, 所以 $a > 0$ 。

(2) ✕: $b < 0$ 也可能發生。

(3) ✕: $c = 1 > 0$ 。

(4) ○。

(5) ○: 因為 $f(2) = 4a + 2b + c$,

且由圖形可知點 $(2, f(2))$ 不可能位於 x 軸下方,

$$\text{所以 } 4a + 2b + c \geq 0。$$

故選(1)(4)(5)。

8. 設等差數列 $\{a_n\}$ 的公差為 d ,

等比數列 $\{b_n\}$ 的公比為 r 。

(1) ○: 因為 $a_1 + a_4 = a_2 + a_3$, 所以若 $a_1 + a_4 > 0$,

$$\text{則 } a_2 + a_3 > 0。$$

(2) ○: (i) 當 $a_1 > 0$ 時, 若 $a_1 a_2 < 0$,

$$\text{則 } a_2 = a_1 + d < 0 \Rightarrow d < 0$$

$$\Rightarrow a_3 = a_2 + d < 0, a_4 = a_2 + 2d < 0$$

$$\Rightarrow a_3 a_4 > 0。$$

(ii) 當 $a_1 < 0$ 時, 若 $a_1 a_2 < 0$,

$$\text{則 } a_2 = a_1 + d > 0 \Rightarrow d > 0$$

$$\Rightarrow a_3 = a_2 + d > 0, a_4 = a_2 + 2d > 0$$

$$\Rightarrow a_3 a_4 > 0。$$

(3) ✕: 反例: $a_1 = 5, d = -2$

$$\Rightarrow a_2 = 3, a_3 = 1, a_4 = -1 \Rightarrow a_1 a_2 > 0,$$

$$\text{但 } a_3 a_4 < 0。$$

(4) ○: 若 $b_1 + b_2 = b_1 + b_1 r = b_1(1+r) < 0$,

$$\text{則 } b_3 + b_4 = b_1 r^2 + b_1 r^3 = b_1 r^2(1+r) < 0。$$

(5) ✕: 若 $b_1 b_2 = b_1^2 r < 0$, 則 $b_3 b_4 = b_1^2 r^5 = (b_1^2 r) \times r^4 < 0$ 。

故選(1)(2)(4)。

9. 設 $\vec{\ell}_1 = (2, 3, 4)$, $\vec{\ell}_2 = (-1, 2, 5)$

分別為 L_1 與 L_2 的一組方向向量，

因為 $\vec{\ell}_1$ 與 $\vec{\ell}_2$ 不平行，所以 L_1 與 L_2 可能為交於一點或歪斜，設 $P(-4+2t, 3t, 1+4t)$ 為 L_1 上一點，

代入 L_2 可得 $\frac{-4+2t}{-1} = \frac{3t-1}{2} = \frac{1+4t}{5}$

$$\Rightarrow \begin{cases} -8+4t = -3t+1 \\ -20+10t = -1-4t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{9}{7} \\ t = \frac{19}{14} \end{cases} \Rightarrow \text{無解，}$$

所以 L_1 與 L_2 為歪斜。

故選(2)(4)(5)。

10. 由 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & a & b & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & a-2 & b+3 & -2 \end{bmatrix}$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -a+b+5 & a-4 \end{bmatrix},$$

得方程組 $\begin{cases} x+2y-3z=1 \\ y+z=-1 \\ (-a+b+5)z=(a-4) \end{cases}$ ，討論如下：

(i) 當 $-a+b+5 \neq 0$ 時，方程組恰有一組解。

(ii) 當 $-a+b+5=0$ 且 $a-4=0$ 時，

方程組有無限多組解，即 $a=4$ 、 $b=-1$ 。

(iii) 當 $-a+b+5=0$ 且 $a-4 \neq 0$ 時，方程組無解。

故選(4)(5)。

11. (1) ○：迴歸直線必過 $(\mu_x, \mu_y) = (5, 3)$ 。

(2) ×：因為迴歸直線通過點 $(0, 2)$ 和 $(5, 3)$ ，

$$\text{所以斜率 } m = \frac{3-2}{5-0} = \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow Y \text{ 對 } X \text{ 的迴歸直線為 } y = \frac{1}{5}x + 2。$$

(3) ×： (x_i, y_i) 未必會在迴歸直線上。

(4) ○：因為 $m = r \times \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \Rightarrow \frac{1}{5} = 0.8 \times \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \Rightarrow \frac{\sigma_y}{\sigma_x} = \frac{1}{4}$ ，

所以 $\sigma_x > \sigma_y$ 。

(5) ○： $r_{(4X+3, -5Y+7)} = -r_{(X, Y)} = -0.8$ 。

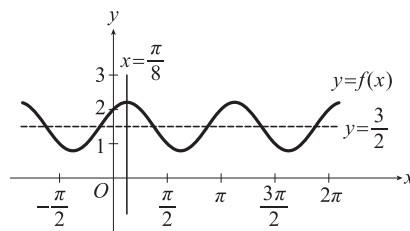
故選(1)(4)(5)。

12. $f(x) = \sin^2 x + \sin x \cos x + 2 \cos^2 x$

$$= \frac{1-\cos 2x}{2} + \frac{1}{2} \sin 2x + 2 \times \frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$= \frac{1}{2}(\sin 2x + \cos 2x) + \frac{3}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{3}{2}。$$

作圖如右：



(1) ○：週期為 $\frac{2\pi}{2} = \pi$ 。

(2) ×：振幅為 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 。

(3) ○：令 $x=0 \Rightarrow y = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \frac{\pi}{4} + \frac{3}{2} = 2$ ，

所以與 y 軸交於 $(0, 2)$ 。

(4) ×： y 值恆正，與 x 軸不相交。

(5) ○：當 $x = \frac{\pi}{8}$ 時，

$$f\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \frac{\pi}{2} + \frac{3}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{3}{2} \text{ 為最大值，}$$

$$\text{所以圖形對稱於 } x = \frac{\pi}{8}。$$

故選(1)(3)(5)。

13. 因為 $f(x) = (x+1)^3 + a(x+1)^2 + bx + (b+c)$ ，

且 $f(x)$ 的圖形在 $x=-1$ 附近的局部特徵近似於

$$L: y = 6x + 5, \text{ 所以可得 } \begin{cases} b = 6 \\ b+c = 5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow c = -1 \Rightarrow f(x) = (x+1)^3 + a(x+1)^2 + 6x + 5$$

又對稱中心為點 $(-2, -5)$ ，

$$\text{所以 } f(-2) = -1 + a - 12 + 5 = -5 \Rightarrow a = 3，$$

$$\text{故序組 } (a, b, c) = (3, 6, -1)。$$

14. 設小光第一次作答的連線分別為

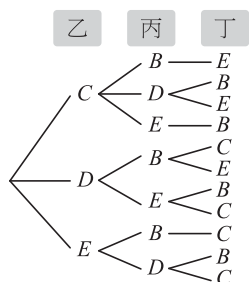
甲 $\rightarrow A$ ，乙 $\rightarrow B$ ，丙 $\rightarrow C$ ，丁 $\rightarrow D$ ，

其中甲 $\rightarrow A$ 是正確的。

(i) 先選出正確的連線：選到甲 $\rightarrow A$ 的機率為 $\frac{1}{4}$ 。

(ii) 乙不連到 B ，丙不連到 C ，且丁不連到 D

〈解法一〉用樹狀圖：



〈解法二〉用列聯表：

乙 \ 丙 \ 丁	C	D	E
B	E	CE	C
D	BE		BC
E	B	BC	

$$4 + 4 + 3 = 11 (\text{種})。$$

〈解法三〉用取捨原理：

$$4! - 3 \times 3! + 3 \times 2! - 1! = 24 - 18 + 6 - 1 = 11。$$

所以剩下三條連線正確的機率為 $\frac{1}{11}$ 。

由(i)(ii)可知小光第二次連完後得到 8 分的機率為

$$\frac{1}{4} \times \frac{1}{11} = \frac{1}{44}。$$

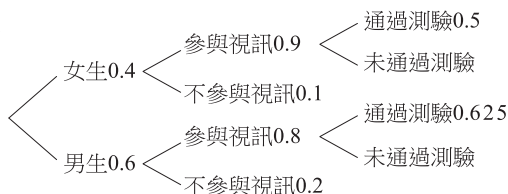
15. n (丙丁一起) $-n$ (丙丁一起且甲乙一起)

$$= C_1^4 \times 2! \times 6! - C_1^4 \times C_1^3 \times 2! \times 2! \times 4!$$

$$= 4 \times 2 \times 720 - 4 \times 3 \times 2 \times 2 \times 24$$

$$= 5760 - 1152 = 4608。$$

16.



$P(\text{男生}|\text{通過測驗})$

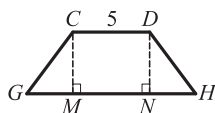
$$= \frac{0.6 \times 0.8 \times 0.625}{0.4 \times 0.9 \times 0.5 + 0.6 \times 0.8 \times 0.625} = \frac{0.3}{0.48} = 0.625$$

$$= 62.5\% \approx 63\%。$$

17. 依題意畫出附圖，為側面圖，

設 M 、 N 分別為 C 、 D

在 \overline{GH} 的投影點，



因為 $\overline{CD} = \overline{MN} = 5$ 公尺， $\overline{GH} = 11$ 公尺，

所以 $\overline{GM} = 3$ 公尺。

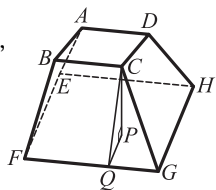
設 C 在平面 $EFGH$ 上的投影點為 P ，

C 在 \overline{FG} 上的投影點為 Q 。

因為 $\overline{GM} = \overline{PQ} = \overline{GQ} = 3$ 公尺，

所以 $\overline{CQ} = \sqrt{\overline{CG}^2 - \overline{GQ}^2} = 4$ 公尺，

故所求即為 $\cos \angle CQP = \frac{3}{4}$ 。



18. 依題意作簡圖如右，

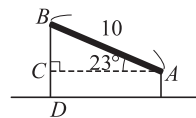
傾斜角 $\angle BAC = 23^\circ$ ，

因為 $\overline{AB} = 10$ ，

所以 $\overline{BC} = \overline{AB} \times \sin 23^\circ \approx 10 \times 0.3907 \approx 3.9$ ，

高支架 $\overline{BD} = \overline{BC} + \overline{CD} \approx 3.9 + 2 = 5.9$ (公尺)，

故選(3)。



19. 如圖，

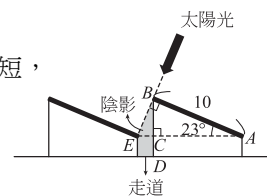
當 $\angle ABE = 90^\circ$ 時走道 \overline{CE} 為最短，

此時 $\angle EBC = \angle BAC = 23^\circ$ ，

$$\text{則 } \frac{\overline{CE}}{\overline{BC}} = \tan 23^\circ$$

$$\Rightarrow \overline{CE} = \overline{BC} \times \tan 23^\circ = 10 \times \sin 23^\circ \times \tan 23^\circ$$

$$\approx 10 \times 0.3907 \times 0.4245 \approx 1.66 \text{ (公尺)}。$$



評分原則：

解題過程	得分
步驟一：寫出 $\angle EBC = 23^\circ$	1 分
步驟二：寫出 $\overline{CE} = \overline{BC} \times \tan 23^\circ$	2 分
步驟三：正確計算出 \overline{CE}	3 分

$$20. \frac{50 + 70 + 80}{2} = 100，$$

三角形面積

$$= \sqrt{100 \times (100 - 50) \times (100 - 70) \times (100 - 80)} = 1000\sqrt{3}，$$

故最多可申請 $1000\sqrt{3} \times 40\% = 400\sqrt{3}$ (平方公尺)。

評分原則：

解題過程	得分
步驟一：正確計算出農地面積	3 分
步驟二：正確計算出可申請建置太陽能光電設施的面積	3 分