龍騰文化

114 學年度分科測驗全真模擬試卷

數學甲考科　解答卷

■答案

第壹部分：

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9-1	9-2	9-3	10-1	10-2	11-1
5	1	2	134	25	1345	34	1234	1	–	2	2	3	3
11-2	11-3												
2	3												

第貳部分：

12-1	12-2	12-3	12-4	13.	14.	15.	16.	17.
–	7	–	5	$u=1, v=5, w=3$	$\sqrt{6}$	2	第三象限	見解析

■解析

1. (1) ╳： $\lim\limits_{x\to0^+}[x+3]=3$ ， $\lim\limits_{x\to0^-}[x+3]=2$ ，

因為 $\lim\limits_{x\to0^+}[x+3]\neq\lim\limits_{x\to0^-}[x+3]$ ，

所以 $\lim\limits_{x\to0}[x+3]$ 不存在。

(2) ╳： $\lim\limits_{x\to1^+}\left[x^2\right]=1$ ， $\lim\limits_{x\to1^-}\left[x^2\right]=0$ ，

因為 $\lim\limits_{x\to1^+}\left[x^2\right]\neq\lim\limits_{x\to1^-}\left[x^2\right]$ ，所以 $\lim\limits_{x\to1}\left[x^2\right]$ 不存在。

(3) ╳： $\lim\limits_{x\to0^+}\left([x]-x\right)=0$ ， $\lim\limits_{x\to0^-}\left([x]-x\right)=-1$ ，

因為 $\lim\limits_{x\to0^+}\left([x]-x\right)\neq\lim\limits_{x\to0^-}\left([x]-x\right)$ ，

所以 $\lim\limits_{x\to0}\left([x]-x\right)$ 不存在。

(4) ╳： $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{[x]}{x}=1$ ， $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{[x]}{x}=0$ ，

因為 $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{[x]}{x}\neq\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{[x]}{x}$ ，所以 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{[x]}{x}$ 不存在。

(5) ○：當 $x\neq0$ 時，

$\dfrac{1}{x}-1<\left[\dfrac{1}{x}\right]\leq\dfrac{1}{x}\Rightarrow x-x^2<x^2\left[\dfrac{1}{x}\right]\leq x$ ，

因為 $\lim\limits_{x\to0}\left(x-x^2\right)=\lim\limits_{x\to0}x=0$ ，

所以由夾擠定理可知 $\lim\limits_{x\to0}x^2\left[\dfrac{1}{x}\right]=0$ 。

故選(5)。

2. 因為 $f(x)$ 為三次函數，

且不等式 $f(x)>0$ 的解為 $x>-1$ ，所以 $a>0$ ，

$f(-1)=-a-3-b+7=-a-b+4=0\Rightarrow b=-a+4$ ，

得 $f(x)=ax^3-3x^2+(-a+4)x+7$

$\Rightarrow f'(x)=3ax^2-6x+(-a+4)$ ，

因為 $f(x)$ 的圖形沒有水平切線，

所以判別式 $D=(-6)^2-4\times3a\times(-a+4)<0$ ，

$\Rightarrow a^2-4a+3<0\Rightarrow(a-1)(a-3)<0\Rightarrow1<a<3$

$\Rightarrow a=2$ 。故選(1)。

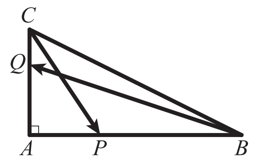
3. 因為 $\overrightarrow{BQ}\cdot\overrightarrow{CP}=-2$ ，

所以 $\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AQ}\right)\cdot\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AP}\right)=-2$ ，

$\Rightarrow\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{AP}=-2$

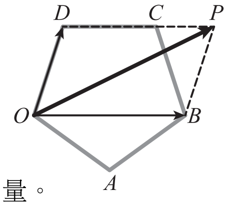
$\Rightarrow0+2\times2k\times\cos180^\circ+(1-k)\times1\times\cos180^\circ+0=-2$

$\Rightarrow-3k-1=-2$ ，解得 $k=\dfrac{1}{3}$ 。故選(2)。



4. (1) 由圖知 $\overline{AB}\,//\,\overline{OC}$，

所以斜率相等，且值最大。



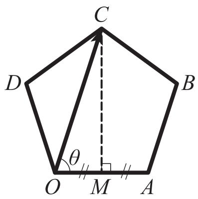
(2) 5 個點沒有任三點以上共線，

所以可形成 $2C^5_2=20$ 個不同向量。

(3) $\overline{CD}\,//\,\overline{OB}$，$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$，

所以 P 點會落在直線 $\overleftrightarrow{CD}$ 上。

(4) $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}=|\overrightarrow{OC}||\overrightarrow{OA}|\cos\theta$

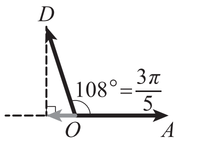


$=\overline{OA}\times(\overline{OC}\cos\theta)$

$=\overline{OA}\times\overline{OM}$（$M$ 為 $\overline{OA}$ 中點）

$=\dfrac{1}{2}\overline{OA}^2=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{OA}|^2$。

(5) $\overrightarrow{OD}$ 在 $\overrightarrow{OA}$ 上的正射影



$=(\dfrac{\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{OA}}{|\overrightarrow{OA}|^2})\overrightarrow{OA}$

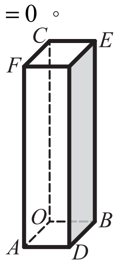
$=(\dfrac{|\overrightarrow{OD}||\overrightarrow{OA}|\cos\frac{3\pi}{5}}{|\overrightarrow{OA}|^2})\overrightarrow{OA}=(\cos\dfrac{3\pi}{5})\overrightarrow{OA}$。

故選(1)(3)(4)。

5. (1) 因為 $\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}=\left(\begin{vmatrix}2&1\\1&2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&-2\\2&2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-2&2\\2&1\end{vmatrix}\right)=(3,6,-6)$

與 $\overrightarrow{OC}$ 平行，

所以 $\dfrac{3}{4}=\dfrac{6}{c_2}=\dfrac{-6}{c_3}\Rightarrow c_2=8$，$c_3=-8\Rightarrow c_2+c_3=0$。



(2) $\left|\left(\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}\right)\cdot\overrightarrow{OC}\right|=\left|(3,6,-6)\cdot(4,8,-8)\right|=108$。

(3) 因為 $\overrightarrow{OE}=(2,1,2)+(4,8,-8)=(6,9,-6)$，

$\overrightarrow{OF}=(-2,2,1)+(4,8,-8)=(2,10,-7)$，

所以 $\cos\angle EOF=\dfrac{\overrightarrow{OE}\cdot\overrightarrow{OF}}{\left|\overrightarrow{OE}\right|\left|\overrightarrow{OF}\right|}=\dfrac{144}{\sqrt{153}\times\sqrt{153}}=\dfrac{16}{17}$。

(4) 因為 $\overrightarrow{OD}=(0,3,3)$，$\overrightarrow{OE}=(6,9,-6)$，$\overrightarrow{OF}=(2,10,-7)$

所以四面體體積為 $\dfrac{1}{6}\left|\begin{vmatrix}0&3&3\\6&9&-6\\2&10&-7\end{vmatrix}\right|=\dfrac{1}{6}\times216=36$。

(5) 因為平面 OAB 的一個法向量為

$\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}=(3,6,-6)$，且過原點 O，

所以其方程式為 $x+2y-2z=0$。

又因為 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ 不平行，

所以平面 OAB 上每一個向量 $\overrightarrow{OP}$ 都可唯一表示成

$\overrightarrow{OP}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}$ 的形式。

故選(2)(5)。

6. 依題意，每人參加甲遊戲的機率為 $\dfrac{1}{3}$，

參加乙遊戲的機率為 $\dfrac{2}{3}$。

(1) $P(X=2)=C^4_2\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\left(\dfrac{2}{3}\right)^2=\dfrac{8}{27}$。

(2) $P(X>Y)=P(X=3)+P(X=4)$

$=C^4_3\left(\dfrac{1}{3}\right)^3\left(\dfrac{2}{3}\right)+C^4_4\left(\dfrac{1}{3}\right)^4=\dfrac{1}{9}$。

(3) 因為 $E(Y)=E(4-X)=4-E(X)$，

所以 $E(X)+E(Y)=4$。

(4) $Z=|X-Y|$ 的可能值為 0，2，4。

$P(Z=0)=P(X=2)=\dfrac{8}{27}$。

$P(Z=2)=P(X=1)+P(X=3)$

$=C^4_1\left(\dfrac{1}{3}\right)\left(\dfrac{2}{3}\right)^3+C^4_3\left(\dfrac{1}{3}\right)^3\left(\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{40}{81}$。

$P(Z=4)=P(X=0)+P(X=4)$

$=C^4_0\left(\dfrac{2}{3}\right)^4+C^4_4\left(\dfrac{1}{3}\right)^4=\dfrac{17}{81}$。

得 Z 的機率分布表：

Z	0	2	4
P	$\dfrac{8}{27}$	$\dfrac{40}{81}$	$\dfrac{17}{81}$

所以 $E(Z)=0\times\dfrac{8}{27}+2\times\dfrac{40}{81}+4\times\dfrac{17}{81}=\dfrac{148}{81}$。

(5) 因為 $E(Z^2)=0^2\times\dfrac{8}{27}+2^2\times\dfrac{40}{81}+4^2\times\dfrac{17}{81}=\dfrac{16}{3}$，

所以 $Var(Z)=E(Z^2)-\left[E(Z)\right]^2=\dfrac{16}{3}-\left(\dfrac{148}{81}\right)^2<5$。

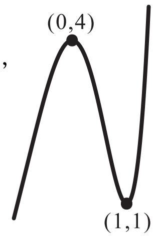
故選(1)(3)(4)(5)。

7. (1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{f(n+5)}$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{n^5+2n^4-n^3-5n^2+4}{n^5+an^4+bn^3+cn^2+dn+e}$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}-\frac{5}{n^3}+\frac{4}{n^5}}{1+\frac{a}{n}+\frac{b}{n^2}+\frac{c}{n^3}+\frac{d}{n^4}+\frac{e}{n^5}}=1$，

其中 a，b，c，d，e 為定數。



(2) 導函數 $f'(x)=5x^4+8x^3-3x^2-10x$，

根據導數的定義，

得 $\displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=f'(-1)=4$。

(3) $f'(1)=5\times1^4+8\times1^3-3\times1^2-10\times1=0$

(4) 由(3)知 $f'(1)=0$ ，所以 $x-1$ 為 $f'(x)$ 的因式

$\Rightarrow f'(x)=x(x-1)(5x^2+13x+10)$

將 $f'(x)$ 的正、負列表如下：

x		0		1	
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	4	↘	1	↗

因為在區間 $[1,2]$ 上 $f'(x)\ge 0$ ，

所以 $f(x)$ 在區間 $[1,2]$ 遞增。

(5) 由 $f(x)$ 的略圖得知，直線 $y=3$ 與圖形有三個交點。

故選(3)(4)。

8. (1) $z^5=\cos 2\pi+i\sin 2\pi=1$ 。

(2) 因為 $\bar{z}=\cos\frac{2\pi}{5}-i\sin\frac{2\pi}{5}=\cos\left(-\frac{2\pi}{5}\right)+i\sin\left(-\frac{2\pi}{5}\right)$ ，

所以 $\left(\bar{z}\right)^{10}=\cos(-4\pi)+i\sin(-4\pi)=\cos 0+i\sin 0=1$ 。

(3) $z+\bar{z}=\left(\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}\right)+\left(\cos\frac{2\pi}{5}-i\sin\frac{2\pi}{5}\right)$

$=2\cos\frac{2\pi}{5}$ 。

(4) $z\times\bar{z}=\left(\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}\right)\times\left(\cos\frac{2\pi}{5}-i\sin\frac{2\pi}{5}\right)$

$=\cos^2\frac{2\pi}{5}+\sin^2\frac{2\pi}{5}=1$ 。

(5) $\frac{\bar{z}}{z}=\frac{\cos\left(-\frac{2\pi}{5}\right)+i\sin\left(-\frac{2\pi}{5}\right)}{\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}}$

$=\cos\left(-\frac{4\pi}{5}\right)+i\sin\left(-\frac{4\pi}{5}\right)=\cos\frac{4\pi}{5}-i\sin\frac{4\pi}{5}$ 。

故選(1)(2)(3)(4)。

9. 平面 E 的法向量為 $\overrightarrow{n}=(1,1,1)$ ，

直線 L 的方向向量為 $\overrightarrow{v}=(1,b,c)$ 。

依題意得 $\begin{cases}\overrightarrow{v}\perp\overrightarrow{n}\\ \overrightarrow{v}\perp\overrightarrow{MP}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(1,b,c)\cdot(1,1,1)=0\\ (1,b,c)\cdot(1,-1,0)=0\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}1+b+c=0\\ 1-b=0\end{cases}$ ，解得 $b=1$ ， $c=-2$ ，

即數對 $(b,c)=(1,-2)$ 。

10. 鋪色區域可分成上下兩塊區域，且上下兩塊面積相等，

因為上塊區域面積

$=\int_{-1}^{1}(1-x^2)dx=\left(x-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{-1}^{1}=\left(\frac{2}{3}\right)-\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{3}$ ，

所以 $S=\frac{4}{3}\times 2=\frac{8}{3}$ ，得 $\frac{S}{R}=\frac{\frac{8}{3}}{2^2}=\frac{2}{3}$ 。

11. 設 $\langle a_n\rangle$ 的公比為 r，解 $\begin{cases}a_2=a_1r=2\\ a_5=a_1r^4=\frac{1}{4}\end{cases}$，得 $a_1=4$，$r=\frac{1}{2}$ ，

又 $T_n=a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_na_{n+1}$

$=a_1\times a_1r+a_1r\times a_1r^2+\cdots+a_1r^{n-1}\times a_1r^n$

$=a_1^2r+a_1^2r^3+\cdots+a_1^2r^{2n-1}$ ，

即 T_n 是首項為 $a_1^2r=4^2\times\frac{1}{2}=8$ ，

公比為 $r^2=\frac{1}{4}$ 的等比級數，

由無窮等比級數和的公式，得 $\lim_{n\to\infty}T_n=\frac{8}{1-\frac{1}{4}}=\frac{32}{3}$ 。

12. $\begin{cases}2x-y-z=1\cdots\cdots①\\ x+y+2z=2\cdots\cdots②\\ ax+2y+z=b\cdots\cdots③\end{cases}$

由①＋② ，得 $3x+z=3\cdots\cdots$④

由①×2＋③ ，得 $(a+4)x-z=b+2\cdots\cdots$⑤

因為所成圖形為一直線（無限多組解），

所以由④⑤得 $\frac{3}{a+4}=\frac{1}{-1}=\frac{3}{b+2}$，解得 $a=-7$， $b=-5$ 。

13. 承第 12 題，令 $x=t$ 代入④，得 $z=(3-3t)$。再代入①，

得 $2t-y-(3-3t)=1$ ，即 $y=-4+5t$ 。

因此，直線 L 的參數式為 $\begin{cases}x=t\\ y=-4+5t\\ z=3-3t\end{cases}$ （ $t\in\mathbb{R}$ ）。

所以 $u=1$, $v=5$, $w=3$（一個答案 1 分）

14. 設點 $P(t,-4+5t,3-3t)$ 為直線 L 上一點

（寫出此項得 1 分）

則 $\overline{AP}=\sqrt{t^2+(-4+5t)^2+(5-3t)^2}=\sqrt{35t^2-70t+41}$

$=\sqrt{35(t-1)^2+6}$（寫出此項得 3 分）

故點 A 到直線 L 的距離為 $\sqrt{6}$（寫出此項得 1 分）

15. 因為 $\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)^m=\cos\frac{m\pi}{4}+i\sin\frac{m\pi}{4}$ 在 x 軸上，

所以 $\sin\frac{m\pi}{4}=0$ ， $\Rightarrow\frac{m\pi}{4}=k\pi\Rightarrow m=4k$ ， $k\in\mathbb{N}$ ，

故選(2)。

16. 設 t 秒後甲乙第一次相遇，則 $\frac{\pi}{4}\times t-\left(-\frac{\pi}{6}\times t\right)=2\pi$ ，

（寫出此項得 1 分）

$\Rightarrow t=\frac{24}{5}\Rightarrow\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)^{\frac{24}{5}}=\cos\frac{6}{5}\pi+i\sin\frac{6}{5}\pi$ ，

（寫出此項得 2 分）

所以此時甲乙兩人位置落在第三象限。

（寫出此項得 1 分）

17. 若甲乙二人可在 x 軸上相遇，則

① 甲在 x 軸正向上：此時 $t=8$、16、24、32、40、48、⋯

（寫出此項得 1 分）

乙在 x 軸正向上：此時 $t=12$、24、36、48、60、⋯

（寫出此項得 1 分）

（$8k_1=12k_2 \Rightarrow 2k_1=3k_2, k_1, k_2 \in \mathbb{N}$，此時甲乙二人恰好在 x 軸正向上相遇）

當 t 為 24 之倍數時，甲乙二人恰好在 x 軸正向上相遇。（寫出此項得 1 分）

② 甲在 x 軸負向上：此時 $t=4$、12、20、28、36、⋯

（寫出此項得 1 分）

乙在 x 軸負向上：此時 $t=6$、18、30、42、⋯

（寫出此項得 1 分）

($8k_1-4=12k_2-6 \Rightarrow 6k_2=4k_1+1, k_1, k_2 \in \mathbb{N}$，並無正整數解滿足此條件）

所以甲乙二人不會在 x 軸負向上相遇。

由①②可知甲乙二人可以在 x 軸的正向上相遇。

（寫出此項得 1 分）