龍騰文化

113 學年度分科測驗全真模擬試卷

數學乙考科　解答卷

■答案

第壹部分：

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9	10-1	10-2	10-3	11-1	11-2
5	5	5	1235	12	125	2345	1235	6	−	8	2	2	4
11-3	11-4												
4	0												

第貳部分：

12-1	12-2	12-3	13.	14.	15.	16.	17.
1	0	9	$\begin{cases} x+y\le 50 \\ 4x+3y\le 180 \\ x\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases}$；圖見解析	當 $x=30$，$y=20$ 時，可得最大利潤 48 萬元	$(15, 20)$	1.9 分鐘	$\frac{9}{80}$

■解析

1. $P\left(第一關淘汰\middle|淘汰\right)=\dfrac{P\left(淘汰\cap第一關淘汰\right)}{P\left(淘汰\right)}$

$$=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}}=\frac{12}{23}\approx 0.52\text{ 。}$$

故選(5)。

2. (1) $f(x)=(x^2-x+1)Q(x)+x+4$

$=(x^2-x+1)((x+1)Q'(x)+k)+(x+4)$

$=(x+1)(x^2-x+1)Q'(x)+k(x^2-x+1)+(x+4)$ 。

(2) 因為 $f(x)$ 為 x 的多項函數，

所以 $\lim\limits_{x\to-1}f(x)=f(-1)=-3$ 代入(1)

$\Rightarrow f(-1)=k(1+1+1)+(-1+4)=-3$

$\Rightarrow 3k+3=-3\Rightarrow k=-2$

$\Rightarrow f(x)=(x+1)(x^2-x+1)Q'(x)-2(x^2-x+1)+(x+4)$

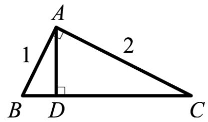
$=(x^3+1)Q'(x)+(-2x^2+3x+2)$ 。

3. 因為 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$，所以 $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$ 。利用畢氏定理，

得 $\overline{BC}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$ 。

又由 $\triangle ABC$ 面積 $=\dfrac{1\times2}{2}=\dfrac{\sqrt{5}\times\overline{AD}}{2}$ ，

得 $\overline{AD}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ 。



再利用畢氏定理，

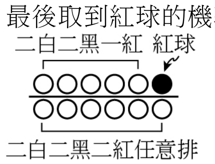
得 $\overline{CD}=\sqrt{2^2-\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{16}{5}}=\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$ 。

因此，$\overrightarrow{CD}=\dfrac{4}{5}\overrightarrow{CB}=\dfrac{4}{5}\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)=\dfrac{4}{5}\overrightarrow{AB}-\dfrac{4}{5}\overrightarrow{AC}$ ，

得 $x=\dfrac{4}{5}$ ，$y=-\dfrac{4}{5}$ 。故選(5)。

4. (1) 根據二項分配 $E(x)=np=12\times\dfrac{1}{3}=4$ 。

(2) 最後取到紅球的機率：



$$=\frac{\frac{5!}{2!2!}\times1}{\frac{6!}{2!2!2!}}=\frac{1}{3}\text{ 。}$$

(3) 假設二球相異的事件為 A，

$P(A)=1-P(\overline{A})=1-$ 二球同色的機率

$=1-\dfrac{3}{C_2^6}=1-\dfrac{3}{15}=\dfrac{4}{5}$。

(4) 因為每一次取中紅球的機率皆為 $\dfrac{1}{3}$，

第 12 次為紅球，

前 11 次紅球發生 3 次，

$\therefore$ 機率為 $\dfrac{1}{3}C_3^{11}\left(\dfrac{1}{3}\right)^3\left(\dfrac{2}{3}\right)^8$。

(5) 條件機率

$$P(\text{二球為紅白}\mid\text{二球異色})=\frac{P(\text{二球異色且為紅白})}{P(\text{二球異色})}$$

$$=\frac{\dfrac{C_1^2C_1^2}{C_2^6}}{\dfrac{4}{5}}=\frac{1}{3}\text{。}$$

故選(1)(2)(3)(5)。

5. (1) 因為 $\triangle OA_1B_1$ 與 $\triangle OA_2B_2$ 相似，

所以其面積比為 $\dfrac{R}{S+R}=\left(\dfrac{a_1}{a_2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$，

得 $4R=S+R\Rightarrow S=3R$。

(2) 因為 $\triangle OA_{100}B_{100}$ 與 $\triangle OA_{101}B_{101}$ 相似，所以其面積比為

$\left(\dfrac{a_{100}}{a_{101}}\right)^2=\dfrac{R+99S}{R+100S}=\dfrac{R+99\times3R}{R+100\times3R}=\dfrac{298}{301}$。

(3) 因為 $\triangle OA_1B_1$ 與 $\triangle OA_nB_n$ 相似，所以其面積比為

$\left(\dfrac{a_1}{a_n}\right)^2=\dfrac{R}{R+(n-1)S}=\dfrac{R}{R+(n-1)\times3R}=\dfrac{1}{3n-2}$。

(4) 因為 $a_1=1$，所以由(3)，

得 $\left(\dfrac{1}{a_n}\right)^2=\dfrac{1}{3n-2}\Rightarrow a_n=\sqrt{3n-2}$，

因此，$\langle a_n\rangle$ 不是等比數列。

(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{3n-2}}{\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{3-\frac{2}{n}}=\sqrt{3}$。

故選(1)(2)。

6. (1) 每人抽中紅球的機率都是 $\dfrac{3}{10}$，即 $P(A)=P(B)=\dfrac{3}{10}$。

(2) 因為不考慮第二、三、四位的情形，

所以 $P(A\cap B)$ 相當於是第一、二位都抽中紅球的機率，即 $P(A\cap B)=\dfrac{3}{10}\times\dfrac{2}{9}=\dfrac{1}{15}$。

(3) $P(B|A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{\frac{1}{15}}{\frac{3}{10}}=\dfrac{2}{9}$。

(4) 因為 $P(A)=P(B)=\dfrac{3}{10}$ 且 $P(A\cap B)=\dfrac{1}{15}$，

即 $P(A\cap B)\neq P(A)\times P(B)$，

所以 A，B 不為獨立事件。

(5) 設隨機變數 X 表最後一位抽球者的獎金，

則

X	100000	0
P	$\dfrac{3}{10}$	$\dfrac{7}{10}$

得期望值 $E(X)=100000\times\dfrac{3}{10}+0\times\dfrac{7}{10}=30000$ 元。

故選(1)(2)(5)。

7. (1) 因為迴歸直線通過 $(\mu_x,\mu_y)=(65,70)$ 及 $(67,64)$ 兩點，

所以斜率為 $\dfrac{70-64}{65-67}=-3$。利用點斜式，

得 $y-64=-3(x-67)$。

(2) 因為迴歸直線的斜率為負，所以 $r<0$。

(3) 因為斜率為 -3，且 $-1\leq r<0$，所以斜率小於 r。

(4) 因為斜率 $-3=r\times\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}$，所以 $\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}=\dfrac{-3}{r}$。

又因為 $-1\leq r<0$，所以 $\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}\geq3$，即 $\sigma_x<\sigma_y$。

(5) 若 $\sigma_y=3\sigma_x$，則 $-3=r\times\dfrac{3\sigma_x}{\sigma_x}$，即 $r=-1$。

得知：為完全負相關，

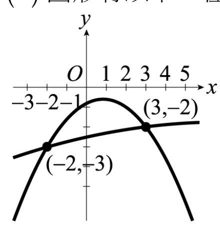
所以點 (x_i,y_i) 皆落在斜率為負的迴歸直線上。

因此，將 $x=66$ 代入迴歸直線，

得 $y-64=-3(66-67)\Rightarrow y=67$，即 $y_3=67$。

故選(2)(3)(4)(5)。

8. 依題意，可得 $f(x)$ 圖形有以下二種：



(1) $\because$ 二者都開口向下，$\therefore a<0$。

(2) $\because$ 二者與 y 軸的交點都在 x 軸下方，$\therefore c<0$。

(3) 二者都滿足 $f(0)<f(1)$。

(4) 有一個拋物線滿足 $f(4)>f(5)$。

(5) 二者都滿足 $f(-3)<f(-2)$。

故選(1)(2)(3)(5)。

9. 設 x 小時後才可駕駛汽車，

$\therefore\quad 1.25\times\left(\dfrac{3}{4}\right)^x\leq0.25\quad\Rightarrow\quad\left(\dfrac{3}{4}\right)^x\leq\dfrac{1}{5}$，

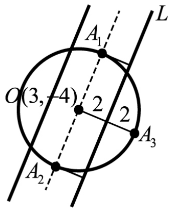
同取 log ，∴ $x(\log 3-\log 4)\le \log 1-\log 5$

$\Rightarrow\ x(0.4771-2\times 0.3010)\le 0-(1-0.3010)$

$\Rightarrow\ x\ge \dfrac{-0.6990}{-0.1249}=5.5\cdots$，

∴ $x=6$。

10. 若圓與直線的距離等於 2 的點恰有 3 個，則二者的關係如圖所示，表示圓心 O 與直線 L 的距離為半徑的一半，



其中 $O(3,\ -4)$，

L ：$12x-5y+k=0 \Rightarrow \dfrac{|36+20+k|}{\sqrt{12^2+5^2}}=\dfrac{1}{2}\times 4=2$

$\Rightarrow |k+56|=2\times 13 \Rightarrow k+56=\pm 26 \Rightarrow k=-30$ 或 -82 。

11. 依題意，得

$P(x)=R(x)-C(x)=\left(3000x-20x^2\right)-\left(500x+4000\right)$

$=-20x^2+2500x-4000$，

$M_P(x)=P(x+1)-P(x)$

$=\left(-20(x+1)^2+2500(x+1)-4000\right)$

$-\left(-20x^2+2500x-4000\right)$

$=-40x+2480$。

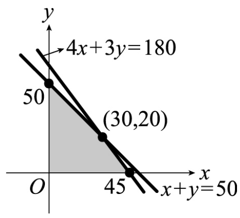
因為 $M_P(x)$ 是嚴格遞減函數，

所以當 $x=1$ 時，$M_P(x)$ 有最大值 2440 元。

12. 利潤為 $P=\left(4x\cdot 0.55+6y\cdot 0.3\right)-\left(1.2x+0.9y\right)=x+0.9y$（萬元）。

13. 依題意，可列得

$\begin{cases}x+y\le 50\\1.2x+0.9y\le 54\\x\ge 0\\y\ge 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+y\le 50\\4x+3y\le 180\\x\ge 0\\y\ge 0\end{cases}$。



14. 可行解如上圖所示。將圖中四個頂點代入 P，得對應值如下：

(x,y)	$(0,0)$	$(45,0)$	$(30,20)$	$(0,50)$
P	0	45	48	45

根據頂點法，當 $x=30$，$y=20$ 時，

$P=48$ 為最大值。故黃瓜種植 30 公頃，韭菜種植 20 公頃時，可得最大利潤 48 萬元。

15. 因為超過 6 件的顧客占 55%，

所以 $x+30=45$ 且 $25+y+10=55$，

解得 $x=15$，$y=20$。

16. X 的機率分布如下：

X	1	1.5	2	2.5	3
P	$\frac{15}{100}$	$\frac{30}{100}$	$\frac{25}{100}$	$\frac{20}{100}$	$\frac{10}{100}$

故期望值

$E(X)=1\times\dfrac{15}{100}+1.5\times\dfrac{30}{100}+2\times\dfrac{25}{100}+2.5\times\dfrac{20}{100}+3\times\dfrac{10}{100}$

$=1.9$（分鐘）。

17. 令 X_1，X_2 分別表示前面第 1 位與第 2 位的結帳時間，則等候時間不超過 2.5 分鐘的機率為

$P\left(X_1=1 \text{ 且 } X_2=1\right)+P\left(X_1=1.5 \text{ 且 } X_2=1\right)$

$+P\left(X_1=1 \text{ 且 } X_2=1.5\right)$

$=P\left(X_1=1\right)\times P\left(X_2=1\right)+P\left(X_1=1.5\right)\times P\left(X_2=1\right)$

$+P\left(X_1=1\right)\times P\left(X_2=1.5\right)$

$=\dfrac{15}{100}\times\dfrac{15}{100}+\dfrac{30}{100}\times\dfrac{15}{100}+\dfrac{15}{100}\times\dfrac{30}{100}=\dfrac{9}{80}$。