龍騰文化

113 學年度分科測驗全真模擬試卷

數學甲考科　解答卷

■答案

第壹部分：

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9-1	9-2	9-3	9-4	10	11-1
3	1	1	15	2345	12345	2345	2345	4	3	6	4	3	3
11-2													
4													

第貳部分：

12.	13.	14.	15-1	15-2	15-3	15-4	16.	17.
$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}r,k-\frac{1}{2}r\right)$	$k=\frac{5}{4}$，$r=1$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{3}$	1	3	3	1	$\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$	$\angle A'O'B'=60^\circ$，$\overline{O'A'}=4$

■解析

1. 因為 A^{-1} 不存在，所以

$$\begin{vmatrix}2\sin x & 1\\ 1 & 2\cos x\end{vmatrix}=0\Rightarrow 4\sin x\cos x-1=0\Rightarrow \sin 2x=\frac{1}{2}，$$

又 $0\le x<2\pi$，

所以 $0\le 2x<4\pi \Rightarrow 2x=\frac{\pi}{6},\frac{5}{6}\pi,2\pi+\frac{\pi}{6},2\pi+\frac{5\pi}{6}$

$\Rightarrow x=\frac{\pi}{12},\frac{5}{12}\pi,\pi+\frac{\pi}{12},\pi+\frac{5}{12}\pi$，故所有 x 的總和為 3π。

2. $$f(x)=(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})\cdot\overrightarrow{c}=\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ -1 & 1 & -2\\ x^2 & x-2 & 3\end{vmatrix}$$

$$=3-4x^2+x-2+x^2+6+2(x-2)$$

$$=-3x^2+3x+3=-3(x-\frac{1}{2})^2+\frac{15}{4}，$$

故最大值為 $\frac{15}{4}$。

3. 因為 $\log a_n=\log\left(\frac{\sqrt{10}}{100}\right)^3+\log a_{n-1}$

$\Rightarrow b_n=3\left(\log\sqrt{10}-\log 100\right)+b_{n-1}$（$n\ge 2$），

所以 $b_n=-\frac{9}{2}+b_{n-1}$（$n\ge 2$），得 $b_1=\log\sqrt{10}=\frac{1}{2}$，

$b_2=-\frac{9}{2}+b_1=-4$，$b_3=-\frac{9}{2}+b_2=-\frac{17}{2}$，

即 $b_1+b_2+b_3=-12$，故選(1)。

4. (1) 利用分點公式，可得 $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$。

(2) 因為 $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$，

所以 $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$。

(3) 令 $\overrightarrow{AB}=t\overrightarrow{AF}$，則 $\overrightarrow{AE}=\frac{t}{6}\overrightarrow{AF}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$，

因為 F、E、C 三點共線，所以 $\frac{t}{6}+\frac{1}{3}=1\Rightarrow t=4$，

即 $\overrightarrow{AB}=4\overrightarrow{AF}\Rightarrow \overline{AF}:\overline{FB}=1:3$。

(4) 由(3)可知，$\overrightarrow{AE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AF}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\Rightarrow \overline{CE}:\overline{EF}=2:1$。

(5) $$\frac{\Delta AEF\text{的面積}}{\Delta ABC\text{的面積}}=\frac{\Delta AEF\text{的面積}}{\frac{3}{2}\times\Delta ABD\text{的面積}}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\times\overline{AF}\times\overline{AE}\times\sin\angle BAD}{\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}\times\left(4\overline{AF}\right)\times\left(2\overline{AE}\right)\times\sin\angle BAD}=\frac{1}{12}。$$

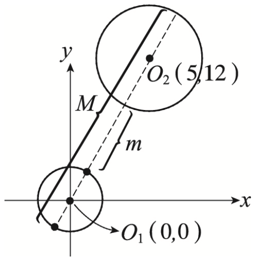
故選(1)(5)。

5. (1) 如圖，$\overline{PQ}$ 最大值

$=\overline{O_1O_2}+r_1+r_2$

$=\sqrt{5^2+12^2}+2+3$

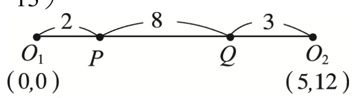
$=13+2+3=18$ 。



(2) $\overline{PQ}$ 最小時，

$\overrightarrow{O_1P}=\dfrac{2}{13}\overrightarrow{O_1O_2}=\left(\dfrac{10}{13},\dfrac{24}{13}\right)$

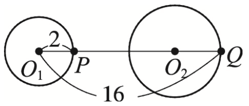
$\Rightarrow\quad P\left(\dfrac{10}{13},\dfrac{24}{13}\right)$，



$\overrightarrow{O_1Q}=\dfrac{10}{13}\overrightarrow{O_1O_2}=\left(\dfrac{50}{13},\dfrac{120}{13}\right)$

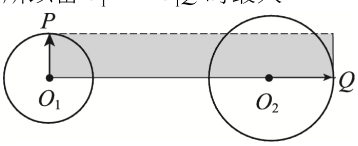
$\Rightarrow\quad Q\left(\dfrac{50}{13},\dfrac{120}{13}\right)$ 。

(3) $ac+bd=\overrightarrow{O_1P}\cdot\overrightarrow{O_1Q}=\left|\overrightarrow{O_1P}\right|\,\left|\overrightarrow{O_1Q}\right|\cos\theta$



最大值產生在 $\theta=0^\circ$ $=2\times16\times\cos0^\circ=32$ 。

(4) $\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}$ 的絕對值為 $\overrightarrow{O_1P}$ 與 $\overrightarrow{O_1Q}$ 張開的平行四邊形面積，所以當 $\overrightarrow{O_1P}\perp\overrightarrow{O_1Q}$ 時最大



$\Rightarrow\quad \left|\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}\right|=2\times16=32$ 最大

$\Rightarrow\quad \left|\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}\right|\le32\quad\Rightarrow\quad -32\le\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}\le32$ ，

所以最小值為 -32 。

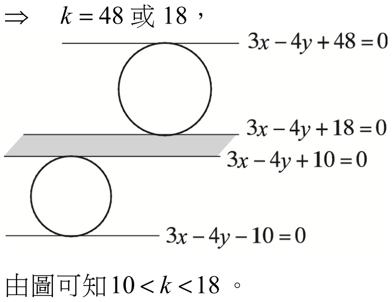
(5) 當 L ： $3x-4y+k=0$ 與 C_1 相切時 $\dfrac{|0+0+k|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=2$

$\Rightarrow\quad k=\pm10$ ，

當 L 與 C_2 相切時 $\dfrac{|15-48+k|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=3$

$\Rightarrow\quad |k-33|=15$

$\Rightarrow\quad k=48$ 或 18，



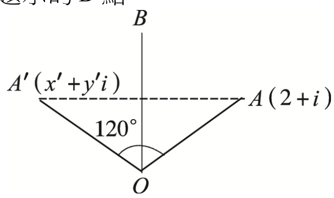
由圖可知 $10<k<18$ 。

故選(2)(3)(4)(5)。

6. (1) $\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos60^\circ & -\sin60^\circ\\ \sin60^\circ & \cos60^\circ\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}$

是表示將 $A(2,1)$ 逆時針旋轉 60°再伸長 2 倍長，

恰符合題示的 B 點。



(2) 利用複數平面將 $A(2,1)$ 視為 $2+i$ ，

而 A 點的對稱點 $A'(x',y')$ 視為 $x'+y'i$

$\Rightarrow\quad \dfrac{x'+y'i}{2+i}=\dfrac{1}{1}(\cos120^\circ+i\sin120^\circ)$

$\Rightarrow\quad x'+y'i=(2+i)(\cos120^\circ+i\sin120^\circ)$ 。

(3) 矩陣 $X=\begin{bmatrix}1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 1\end{bmatrix}$ 將 $\triangle AOB$ 區域變換為

$\triangle A'OB'$ 區域，

則 $\triangle A'OB'$ 面積 $=|\det(X)|$ $\triangle AOB$ 面積。

(4) $\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix}\cos n\theta & -\sin n\theta\\ \sin n\theta & \cos n\theta\end{bmatrix}$ ，

$$X^6=\left(2\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\right)^6=\left(2\begin{bmatrix}\cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3}\\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3}\end{bmatrix}\right)^6$$

$$=2^6\begin{bmatrix}\cos2\pi & -\sin2\pi\\ \sin2\pi & \cos2\pi\end{bmatrix}=64\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=64I_2\text{ 。}$$

(5) 以直線 L ： $y=(\tan\theta)x$ 為對稱軸之鏡射矩陣為

$\begin{bmatrix}\cos2\theta & \sin2\theta\\ \sin2\theta & -\cos2\theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{3}{5} & \frac{4}{5}\\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5}\end{bmatrix}$ ，

因為 $\tan\theta=\dfrac{1}{2}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}\cos2\theta=\dfrac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}=\dfrac{1-\frac{1}{4}}{1+\frac{1}{4}}=\dfrac{3}{5}\\[2ex] \sin2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}=\dfrac{4}{5}\end{cases}$ 。

故選(1)(2)(3)(4)(5)。

7. (1) $f'(-1)=0$ 。

(2) 因為 $\lim\limits_{x\to3}\left(f(x)+2\right)=\lim\limits_{x\to3}\left(\dfrac{f(x)+2}{x-3}\times(x-3)\right)$

$=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{f(x)+2}{x-3}\times\lim\limits_{x\to3}(x-3)=0\times0=0$ ，

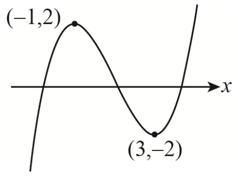
所以 $\lim\limits_{x\to3}(f(x)+2)=f(3)+2=0$ ，即 $f(3)=-2$ 。

(3) 因為 $f(3)=-2$ ，

所以 $f'(3)=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{f(x)+2}{x-3}=0$ 。

(4) 由三次函數 $f(x)$ 在 $x=-1$ 處有極大值 2，

及 $f(3)=-2$ ，$f'(3)=0$ ，可得 $f(x)$ 的略圖如下。



因為圖形與 x 軸交於三相異點，

所以方程式 $f(x)=0$ 恰有三相異實根。

(5) 設 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ ，

則 $f(2k)=a(2k)^3+b(2k)^2+c(2k)+d$

$=8ak^3+4bk^2+2ck+d$ ，

$f(k+100)=a(k+100)^3+b(k+100)^2+c(k+100)+d$

$\overset{令}{=}ak^3+b_1k^2+c_1k+d_1$ ，

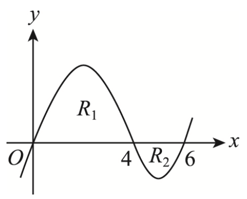
其中 b_1, c_1, d_1 為定值。

因此 $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{f(k+100)}{f(2k)}=\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{a+\frac{b_1}{k}+\frac{c_1}{k^2}+\frac{d_1}{k^3}}{8a+\frac{4b}{k}+\frac{2c}{k^2}+\frac{d}{k^3}}=\dfrac{a}{8a}=\dfrac{1}{8}$ 。

故選(2)(3)(4)(5)。

8. 由 $f(x)$ 的圖形通過點(0,0),(4,0)與(6,0)，

及 $\int_0^4 f(x)dx=9>0$ ，可得 $f(x)$ 的圖形如下：



(1) 因為

$\int_0^6 f(x)dx=\int_0^4 f(x)dx+\int_4^6 f(x)dx\Rightarrow 7=9+\int_4^6 f(x)dx$ ，

所以 $\int_4^6 f(x)dx=-2$ 。

(2) 因為 $\int_0^4 f(x)dx=9$ ，$\int_4^6 f(x)dx=-2$ ，

所以區域 R_1 的面積為 9，區域 R_2 的面積為 2。

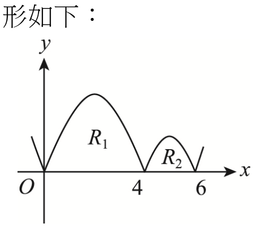
故 $f(x)$ 的圖形與 x 軸所圍成區域的面積為

$9+2=11$ 。

(3) $\int_0^6\left(f(x)+x\right)dx=\int_0^6 f(x)dx+\int_0^6 xdx$

$=7+\left(\dfrac{1}{2}x^2\right)\Big|_0^6=7+18=25$ 。

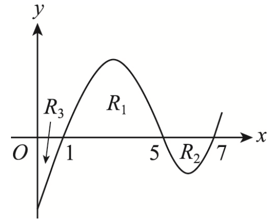
(4) $|f(x)|$ 的圖形如下：



得 $\int_0^6|f(x)|dx=R_1$ 的面積 $+R_2$ 的面積 $=9+2=11$ 。

(5) 因為 $f(x-1)$ 的圖形為 $f(x)$ 的圖形向右平移 1 單位，

可得 $f(x-1)$ 的圖形如下：



故 $\int_0^5 f(x-1)dx=R_1$ 的面積 $-R_3$ 的面積 $=9-R_3$ 的面積 <9 。

故選(2)(3)(4)(5)。

9. 設移動二個等分點 x 次，一個等分點 y 次。

依題意，得 $2x+y=6$ ，

其中 x, y 為非負整數。

其解有

x	0	1	2	3
y	6	4	2	0

等 4 組解。

利用二項分配，得恰繞該圓一周的機率為

$C_0^6\left(\dfrac{1}{2}\right)^0\left(\dfrac{1}{2}\right)^6+C_1^5\left(\dfrac{1}{2}\right)^1\left(\dfrac{1}{2}\right)^4+C_2^4\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\left(\dfrac{1}{2}\right)^2$

$+C_3^3\left(\dfrac{1}{2}\right)^3\left(\dfrac{1}{2}\right)^0$

$=\dfrac{1}{64}+\dfrac{5}{32}+\dfrac{6}{16}+\dfrac{1}{8}=\dfrac{43}{64}$ 。

10. $\begin{cases}2\sin A+3\cos C=\sqrt{7}\cdots\cdots①\\3\sin C+2\cos A=2\sqrt{3}\cdots\cdots②\end{cases}$ ，

$①^2+②^2$

$\Rightarrow\quad 4(\sin^2 A+\cos^2 A)+9(\sin^2 C+\cos^2 C)$

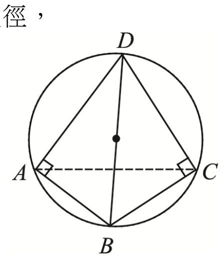
$+12(\sin A\cos C+\cos A\sin C)=19$

$\Rightarrow 4+9+12\sin(\angle A+\angle C)=19\Rightarrow\sin(\angle A+\angle C)=\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow\sin(\pi-\angle B)=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\sin B=\dfrac{1}{2}$ ，

又 $\overline{AD}\perp\overline{AB}$ 且 $\overline{DC}\perp\overline{BC}$ 表示 A、B、C、D 四點共圓，

且 $\overline{BD}$ 為此圓直徑，



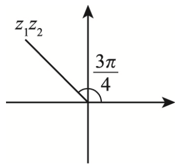
從 $\triangle ABC$ 中可得知 $\triangle ABC$ 外接圓直徑為

$2R=\overline{BD}=6=\dfrac{\overline{AC}}{\sin B}\Rightarrow\overline{AC}=6\sin B=6\times\dfrac{1}{2}=3$ 。

11. 因為 $\frac{3\pi}{2}<\theta<2\pi$ ，所以 $\cos\theta=\frac{3}{\sqrt{10}}\Rightarrow\sin\theta=\frac{-1}{\sqrt{10}}$ ，

$z_1=-2+i=\sqrt{5}\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}}i\right)=\sqrt{5}(\cos\beta+i\sin\beta)$ ，

令 $\cos\beta=-\frac{2}{\sqrt{5}}$ ，$\sin\beta=\frac{1}{\sqrt{5}}$ ，



則 $z_1z_2=\sqrt{5}r\left(\cos(\theta+\beta)+i\sin(\theta+\beta)\right)$ ，

$\cos(\theta+\beta)=\cos\theta\cos\beta-\sin\theta\sin\beta$

$=\frac{3}{\sqrt{10}}\times\left(\frac{-2}{\sqrt{5}}\right)-\left(\frac{-1}{\sqrt{10}}\right)\times\frac{1}{\sqrt{5}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ ，

$\sin(\theta+\beta)=\sin\theta\cos\beta+\cos\theta\sin\beta$

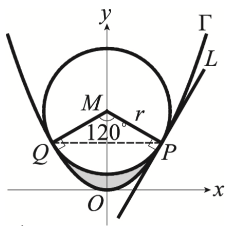
$=\left(\frac{-1}{\sqrt{10}}\right)\times\left(\frac{-2}{\sqrt{5}}\right)+\frac{3}{\sqrt{10}}\times\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ ，

所以 $\theta+\beta=\frac{3}{4}\pi$ ，又 $P\left(\frac{z_1\times z_2}{z_3}\right)$ 在實軸正向上，

得 $\theta+\beta-\phi=2k\pi$ ，$k\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow\phi=\frac{3}{4}\pi-2k\pi$ ，取 $\phi=\frac{3}{4}\pi\,(0\le\phi<2\pi)$ 。

12. 因為 $y=x^2$ ，所以 $y'=2x$ 。



因為 $\angle PMQ=120°$ ，

所以 $\angle PMO=60°$ 。

得 P 的坐標為

$\left(r\sin60°,k-r\cos60°\right)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}r,k-\frac{1}{2}r\right)$ 。

13. 切線 L 的斜率為 $2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}r\right)=\sqrt{3}r$ 。

又因為 $\overleftrightarrow{MP}\perp L$ ，

所以 $\overleftrightarrow{MP}$ 的斜率為 $\frac{-1}{\sqrt{3}r}$ ，

由點斜式，得 $\overleftrightarrow{MP}$ ：$y-k=\frac{-1}{\sqrt{3}r}(x-0)$ ，

因為 P 點既在 $\overleftrightarrow{MP}$ 上也在 Γ 上，

所以 $\begin{cases}\left(k-\frac{1}{2}r\right)-k=\frac{-1}{\sqrt{3}r}\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}r-0\right)\\ k-\frac{1}{2}r=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}r\right)^2\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}r=1\\ k=\frac{3}{4}r^2+\frac{1}{2}r\end{cases}$ ，

解得 $r=1$ ，$k=\frac{5}{4}$ 。

14. 因為 $P\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{4}\right)$ ，$Q\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{4}\right)$ ，

所以 Γ 與 C 所圍面積為

(水平線 $y=\frac{3}{4}$ 與 $y=x^2$ 所圍面積) $-$ (弓形 )

$=\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\frac{3}{4}-x^2\right)dx-\left(\frac{1}{2}\times1^2\times\frac{2\pi}{3}-\frac{1}{2}\times1\times1\times\sin120°\right)$

$=\left(\frac{3}{4}x-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}-\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}-\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

$=\frac{3\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{3}$ 。

15. 合併已知條件，

得 $M\begin{bmatrix}1&\sqrt{3}\\ \sqrt{3}&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&0\\ 2\sqrt{3}&4\end{bmatrix}$ 。

利用反方陣公式，得

$M=\begin{bmatrix}-2&0\\ 2\sqrt{3}&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&\sqrt{3}\\ \sqrt{3}&1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}-2&0\\ 2\sqrt{3}&4\end{bmatrix}\times\frac{1}{-2}\begin{bmatrix}1&-\sqrt{3}\\ -\sqrt{3}&1\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}1&0\\ -\sqrt{3}&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-\sqrt{3}\\ -\sqrt{3}&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-\sqrt{3}\\ \sqrt{3}&1\end{bmatrix}$ 。

16. 因 為 $P=\frac{1}{2}M=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos60°&-\sin60°\\ \sin60°&\cos60°\end{bmatrix}$ 為 一 旋轉矩陣，所以

$P^3+P^6=\begin{bmatrix}\cos180°&-\sin180°\\ \sin180°&\cos180°\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\cos360°&-\sin360°\\ \sin360°&\cos360°\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}-1&0\\ 0&-1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\ 0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\ 0&0\end{bmatrix}$ 。

17. 將 M 改寫為 $M=2P=\begin{bmatrix}2&0\\ 0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos60°&-\sin60°\\ \sin60°&\cos60°\end{bmatrix}$ ，

得知 M 的變換是以 O 為中心逆時針旋轉 $60°$ 後，再伸縮 2 倍。

又 O' 仍為 O ，因此，$\triangle O'A'B'$ 是邊長為 4 的正三角形，

故 $\angle A'O'B'=60°$ 且 $\overline{O'A'}=4$ 。