

龍騰文化

113 學年度分科測驗全真模擬試卷

數學乙考科

請於考試開始鈴響起，在答題卷簽名欄位以正楷簽全名

龍騰數學科編輯小組

【教用卷】

—作答注意事項—

考試時間：80 分鐘

作答方式：

- 選擇（填）題用 2B 鉛筆在「答題卷」上作答；更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。
- 除題目另有規定外，非選擇題用筆尖較粗之黑色墨水的筆在「答題卷」上作答；更正時，可以使用修正液（帶）。
- 考生須依上述規定劃記或作答，若未依規定而導致答案難以辨識或評閱時，恐將影響成績並損及權益。
- 答題卷每人一張，不得要求增補。
- 選填題考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子劃記。

選擇（填）題計分方式：

- 單選題：每題有 n 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項。各題答對者，得該題的分數；答錯、未作答或劃記多於一個選項者，該題以零分計算。
 - 多選題：每題有 n 個選項，其中至少有一個是正確的選項。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得該題全部的分數；答錯 k 個選項者，得該題 $\frac{n-2k}{n}$ 的分數；但得分低於零分或所有選項均未作答者，該題以零分計算。
 - 選填題每題有 n 個空格，須全部答對才給分，答錯不倒扣。
- ※試題中參考的附圖均為示意圖，試題後附有參考公式及數值。

祝考試順利

版權所有・侵害者必究

龍騰文化

肯定自己 ▶ 肯定不同

學用卷定價 20 元

62001N12-E2R A

贈品禁止轉售

第壹部分、選擇（填）題（占 76 分）

一、單選題（占 18 分）

說明：第 1 題至第 3 題，每題 6 分。

1. 康輔社舉辦過關遊戲，每位參賽者要依序過三關，過關者才能繼續參加下一關挑戰，第一至三關被淘汰的機率分別是 $\frac{1}{2}$ ， $\frac{2}{3}$ ， $\frac{3}{4}$ ，且每一關過關與否不互相影響。若已知小明被淘汰了，則他是在第一關就被淘汰的機率最接近下列哪一個選項？

(1)0.1 (2)0.2 (3)0.3 (4)0.4 (5)0.5

參考答案：(5)

試題解析：
$$P(\text{第一關淘汰}|\text{淘汰}) = \frac{P(\text{淘汰} \cap \text{第一關淘汰})}{P(\text{淘汰})} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{3}{4}} = \frac{12}{23} \approx 0.52。$$

故選(5)。

2. 已知多項式 $f(x)$ 次數大於四次，若 $f(x)$ 除以 $x^2 - x + 1$ 所得的餘式為 $x + 4$ ，又 $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -3$ ，則 $f(x)$ 除以 $x^3 + 1$ 的餘式為

(1) $x^2 + 5x + 4$ (2) $2x^2 + 3x - 2$ (3) $-x^2 + 2x$ (4) $-2x^2 + 2x - 2$ (5) $-2x^2 + 3x + 2$

參考答案：(5)

試題解析：(1) $f(x) = (x^2 - x + 1)Q(x) + x + 4 = (x^2 - x + 1)((x + 1)Q'(x) + k) + (x + 4)$
 $= (x + 1)(x^2 - x + 1)Q'(x) + k(x^2 - x + 1) + (x + 4)。$

(2) 因為 $f(x)$ 為 x 的多項函數，所以 $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1) = -3$ 代入(1)

$$\Rightarrow f(-1) = k(1 + 1 + 1) + (-1 + 4) = -3 \Rightarrow 3k + 3 = -3 \Rightarrow k = -2$$

$$\Rightarrow f(x) = (x + 1)(x^2 - x + 1)Q'(x) - 2(x^2 - x + 1) + (x + 4)$$
$$= (x^3 + 1)Q'(x) + (-2x^2 + 3x + 2)。$$

3. 在 $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = 1$ ， $\overline{AC} = 2$ ， \overline{AD} 為 BC 邊上的高。若 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ ，且 $\overrightarrow{CD} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ ，則數對 (x, y) 為何？

(1) $\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ (2) $\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ (3) $\left(-\frac{2}{5}, \frac{2}{5}\right)$ (4) $\left(-\frac{4}{5}, \frac{4}{5}\right)$ (5) $\left(\frac{4}{5}, -\frac{4}{5}\right)$

參考答案：(5)

試題解析：因為 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ ，所以 $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$ 。利用畢氏定理，得 $\overline{BC} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ 。

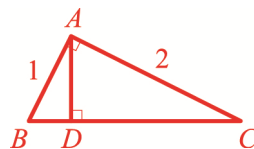
又由 $\triangle ABC$ 面積 $= \frac{1 \times 2}{2} = \frac{\sqrt{5} \times \overline{AD}}{2}$ ，得 $\overline{AD} = \frac{2}{\sqrt{5}}$ 。

再利用畢氏定理，得 $\overline{CD} = \sqrt{2^2 - \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2} = \sqrt{\frac{16}{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$ 。

因此， $\overrightarrow{CD} = \frac{4}{5}\overrightarrow{CB} = \frac{4}{5}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) = \frac{4}{5}\overrightarrow{AB} - \frac{4}{5}\overrightarrow{AC}$ ，

得 $x = \frac{4}{5}$ ， $y = -\frac{4}{5}$ 。

故選(5)。



二、多選題（占 40 分）

說明：第 4 題至第 8 題，每題 8 分。

4. 袋中有大小相同的紅、白、黑球各二個，若每個球被取到的機會都相等，試問下列選項何者正確？

- (1) 每次取一球，看完顏色後再放回原袋中，若此動作連續做了 12 次，則取到紅球個數的期望值為 4 個
- (2) 每次取一球，取後不放回袋子，則紅球最後取完的機率為 $\frac{1}{3}$
- (3) 若同時取出二球，則二球顏色相異的機率為 $\frac{4}{5}$
- (4) 每次取一球，看完顏色後再放回原袋中，連續取 12 次，則第 12 次取到第 4 個紅球的機率為 $C_4^{12} \left(\frac{1}{3}\right)^4 \left(\frac{2}{3}\right)^8$
- (5) 若從袋子中隨意取出二球，已知此二球為異色的情況下，此二球為紅白兩球的機率為 $\frac{1}{3}$

參考答案：(1)(2)(3)(5)

試題解析：(1) 根據二項分配 $E(x) = np = 12 \times \frac{1}{3} = 4$ 。

(2) 最後取到紅球的機率：

$$\frac{\text{二白二黑一紅 紅球}}{\text{二白二黑二紅任意排}} = \frac{\frac{5!}{2!2!} \times 1}{2!2!2!} = \frac{1}{3}。$$

(3) 假設二球相異的事件為 A ，

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \text{二球同色的機率} = 1 - \frac{3}{C_2^6} = 1 - \frac{3}{15} = \frac{4}{5}。$$

(4) 因為每一次取中紅球的機率皆為 $\frac{1}{3}$ ，第 12 次為紅球，

$$\text{前 11 次紅球發生 3 次，} \therefore \text{機率為 } \frac{1}{3} C_3^{11} \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^8。$$

$$(5) \text{ 條件機率 } P(\text{二球為紅白} | \text{二球異色}) = \frac{P(\text{二球異色且為紅白})}{P(\text{二球異色})} = \frac{\frac{C_1^2 C_1^2}{C_2^6}}{\frac{4}{5}} = \frac{1}{3}。$$

故選(1)(2)(3)(5)。

-
- A diagram of a triangle with vertex O . Four horizontal lines are drawn parallel to the base, labeled A_1B_1 , A_2B_2 , A_3B_3 , and A_4B_4 from top to bottom. The lines divide the triangle into five regions: a small triangle at the top and four trapezoids below it.

$$(5) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}} = 3$$

試題解析：(1) 因為 $\triangle OA_1B_1$ 與 $\triangle OA_2B_2$ 相似，

得 $4R = S + R \Rightarrow S = 3R$ 。

所以其面積比為

所以其面積比為

所以由(3), 得 $\left(\frac{1}{a_n}\right)^2 = \frac{1}{3n-2} \Rightarrow a_n = \sqrt{3n-2}$,

因此， $\langle a_n \rangle$ 不是等比數列。

故選(1)(2)。

6. 年終摸彩，經理在箱中放入 3 顆紅球，7 顆白球，讓該部門 10 名員工每人依序抽取一球，取後不放回，抽中紅球可得獎金 10 萬元，抽中白球則無獎金。若 A 表第一位抽中紅球的事件， B 表第五位抽中紅球的事件，則下列哪些選項正確？

- (1) $P(A) = P(B)$ (2) $P(A \cap B) = \frac{1}{15}$ (3) $P(B|A) = \frac{2}{5}$
(4) A, B 為獨立事件 (5) 最後一位抽球者，獎金的期望值為 3 萬元

參考答案：(1)(2)(5)

試題解析：(1) 每人抽中紅球的機率都是 $\frac{3}{10}$ ，即 $P(A) = P(B) = \frac{3}{10}$ 。

(2) 因為不考慮第二、三、四位的情形，
所以 $P(A \cap B)$ 相當於是第一、二位都抽中紅球的機率，

$$\text{即 } P(A \cap B) = \frac{3}{10} \times \frac{2}{9} = \frac{1}{15}。$$

$$(3) P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{15}}{\frac{3}{10}} = \frac{2}{9}。$$

(4) 因為 $P(A) = P(B) = \frac{3}{10}$ 且 $P(A \cap B) = \frac{1}{15}$ ，即 $P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$ ，

所以 A, B 不為獨立事件。

(5) 設隨機變數 X 表最後一位抽球者的獎金，則

X	100000	0
P	$\frac{3}{10}$	$\frac{7}{10}$

$$\text{得期望值 } E(X) = 100000 \times \frac{3}{10} + 0 \times \frac{7}{10} = 30000 \text{ 元。}$$

故選(1)(2)(5)。

7. 設有一組資料 (x_i, y_i) ， x 的平均數 $\mu_x = 65$ ，標準差為 σ_x ； y 的平均數 $\mu_y = 70$ ，標準差為 σ_y ； x 與 y 的相關係數為 r ； y 對 x 的迴歸直線通過點 $(67, 64)$ 。選出正確的選項。

- (1) y 對 x 的迴歸直線為 $y - 64 = -2(x - 67)$ (2) $r < 0$
(3) 迴歸直線的斜率小於相關係數為 r (4) $\sigma_x < \sigma_y$
(5) 若 $\sigma_y = 3\sigma_x$ ，且 $x_3 = 66$ ，則 y_3 必定是 67

參考答案：(2)(3)(4)(5)

試題解析：(1) 因為迴歸直線通過 $(\mu_x, \mu_y) = (65, 70)$ 及 $(67, 64)$ 兩點，

$$\text{所以斜率為 } \frac{70 - 64}{65 - 67} = -3。 \text{利用點斜式，得 } y - 64 = -3(x - 67)。$$

(2) 因為迴歸直線的斜率為負，所以 $r < 0$ 。

(3) 因為斜率為 -3 ，且 $-1 \leq r < 0$ ，所以斜率小於 r 。

(4) 因為斜率 $-3 = r \times \frac{\sigma_y}{\sigma_x}$ ，所以 $\frac{\sigma_y}{\sigma_x} = \frac{-3}{r}$ 。又因為 $-1 \leq r < 0$ ，所以 $\frac{\sigma_y}{\sigma_x} \geq 3$ ，即 $\sigma_x < \sigma_y$ 。

(5) 若 $\sigma_y = 3\sigma_x$ ，則 $-3 = r \times \frac{3\sigma_x}{\sigma_x}$ ，即 $r = -1$ 。得知：為完全負相關，所以點 (x_i, y_i)

皆落在斜率為負的迴歸直線上。因此，將 $x = 66$ 代入迴歸直線，
得 $y - 64 = -3(66 - 67) \Rightarrow y = 67$ ，即 $y_3 = 67$ 。故選(2)(3)(4)(5)。

8. 已知二次函數 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 滿足 $f(-2) = -3$, $f(3) = -2$, $b^2 - 4ac < 0$, 選出正確的選項。

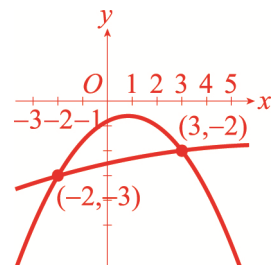
- (1) $a < 0$
(2) $c < 0$
(3) $f(0) < f(1)$
(4) $f(4) < f(5)$
(5) $f(-3) < f(-2)$

參考答案：(1)(2)(3)(5)

試題解析：依題意，可得 $f(x)$ 圖形有以下二種：

- (1) \because 二者都開口向下， $\therefore a < 0$ 。
(2) \because 二者與 y 軸的交點都在 x 軸下方， $\therefore c < 0$ 。
(3) 二者都滿足 $f(0) < f(1)$ 。
(4) 有一個拋物線滿足 $f(4) > f(5)$ 。
(5) 二者都滿足 $f(-3) < f(-2)$ 。

故選(1)(2)(3)(5)。



三、選填題（占 18 分）

說明：第 9 題至第 11 題，每題 6 分。

9. 有一個駕駛員喝了 600 毫升的高粱酒後，血液中的酒精濃度上升到 1.25 mg/ml，但停止喝酒後，該駕駛員血液中的酒精含量每小時減少 $\frac{1}{4}$ ，依據交通安全條例規定，駕駛員血液中的酒精含量不得超過 0.25 mg/ml，問該駕駛員喝酒後至少 9 小時才能駕駛汽車。
($\log 2 = 0.3010$, $\log 3 = 0.4771$, 四捨五入取至整數位)

參考答案：6

試題解析：設 x 小時後才可駕駛汽車，

$$\therefore 1.25 \times \left(\frac{3}{4}\right)^x \leq 0.25 \Rightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^x \leq \frac{1}{5},$$

$$\text{同取 } \log, \therefore x(\log 3 - \log 4) \leq \log 1 - \log 5$$

$$\Rightarrow x(0.4771 - 2 \times 0.3010) \leq 0 - (1 - 0.3010)$$

$$\Rightarrow x \geq \frac{-0.6990}{-0.1249} = 5.5\dots,$$

$$\therefore x = 6.$$

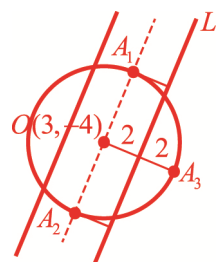
10. 坐標平面上，直線 $L: 12x - 5y + k = 0$ ，圓 $C: (x-3)^2 + (y+4)^2 = 16$ ，若圓 C 上的點與直線 L 的距離等於 2 的點恰有 3 點，則 k 值為 -30 或 10-1 10-2 10-3。

參考答案：-82

試題解析：若圓與直線的距離等於 2 的點恰有 3 個，則二者的關係如圖所示，表示圓心 O 與直線 L 的距離為半徑的一半，

$$\text{其中 } O(3, -4), L: 12x - 5y + k = 0 \Rightarrow \frac{|36 + 20 + k|}{\sqrt{12^2 + 5^2}} = \frac{1}{2} \times 4 = 2$$

$$\Rightarrow |k + 56| = 2 \times 13 \Rightarrow k + 56 = \pm 26 \Rightarrow k = -30 \text{ 或 } -82.$$



11. 在經濟學中，函數 $f(x)$ 的邊際函數 $M_f(x)$ 定義為 $M_f(x) = f(x+1) - f(x)$ 。假設某公司每月最多生產 100 台警報器，其生產 x ($1 \leq x \leq 100$, $x \in \mathbb{N}$) 台警報器的收入函數為 $R(x) = 3000x - 20x^2$ (元)，成本函數為 $C(x) = 500x + 4000$ (元)。若利潤函數為 $P(x)$ ，則邊際利潤函數 $M_P(x)$ 的最大值為 (11-1) (11-2) (11-3) (11-4) 元。(利潤 = 收入 - 成本)

參考答案：2440

試題解析：依題意，得

$$P(x) = R(x) - C(x) = (3000x - 20x^2) - (500x + 4000) = -20x^2 + 2500x - 4000,$$

$$M_P(x) = P(x+1) - P(x)$$

$$= (-20(x+1)^2 + 2500(x+1) - 4000) - (-20x^2 + 2500x - 4000)$$

$$= -40x + 2480.$$

因為 $M_P(x)$ 是嚴格遞減函數，所以當 $x=1$ 時， $M_P(x)$ 有最大值 2440 元。

第貳部分、混合題或非選擇題（占24分）

說明：本部分共有 2 題組，選填題每題 2 分，非選擇題配分標於題末。限在答題卷標示題號的作答區內作答。選擇（填）題與「非選擇題作圖部分」使用 2B 鉛筆作答，更正時以橡皮擦擦拭，切勿使用修正帶（液）。非選擇題請由左而右橫式書寫，作答時必須寫出計算過程或理由，否則將酌予扣分。

12-14 題為題組

某農民計劃今年種植黃瓜與韭菜，種植面積不超過 50 公頃，投入資金不超過 54 萬元。假設種植黃瓜與韭菜的產量、成本與售價如下表：

	每公頃產量	每公頃種植成本	每公噸售價
黃瓜	4 公噸	1.2 萬元	0.55 萬元
韭菜	6 公噸	0.9 萬元	0.3 萬元

12. 設黃瓜種植 x 公頃，韭菜種植 y 公頃，若利潤函數 $P = ax + by$ ，

則數對 $(a, b) = \underline{(12-1) (12-2) (12-3)}$ 。(選填題，2 分)

參考答案：(1, 0.9)

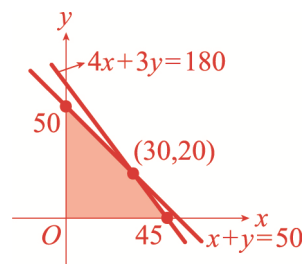
試題解析：利潤為 $P = (4x \cdot 0.55 + 6y \cdot 0.3) - (1.2x + 0.9y) = x + 0.9y$ (萬元)。

13. 試列出 x ， y 必須滿足的聯立不等式並繪出此聯立不等式的圖示。(非選擇題，6 分)

參考答案：
$$\begin{cases} x + y \leq 50 \\ 4x + 3y \leq 180 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}; \text{圖見解析}$$

試題解析：依題意，可列得

$$\begin{cases} x + y \leq 50 \\ 1.2x + 0.9y \leq 54 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y \leq 50 \\ 4x + 3y \leq 180 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}.$$



14. 當 x, y 的值各為多少時，可使種植的利潤最大？此時利潤為多少元？（非選擇題，4 分）

參考答案：當 $x=30, y=20$ 時，可得最大利潤 48 萬元

試題解析：可行解如上題圖所示。將圖中四個頂點代入 P ，得對應值如下：

(x, y)	$(0, 0)$	$(45, 0)$	$(30, 20)$	$(0, 50)$
P	0	45	48	45

根據頂點法，當 $x=30, y=20$ 時，

$P=48$ 為最大值。故黃瓜種植 30 公頃，韭菜種植 20 公頃時，
可得最大利潤 48 萬元。

15-17 題為題組

超市想了解顧客的購物量及結算時間，安排員工隨機收集 100 位顧客的數據，如下表所示：

一次購物量	1 至 3 件	4 至 6 件	7 至 9 件	10 至 12 件	13 件及以上
顧客人數	x	30	25	y	10
結帳時間 (分鐘/人)	1	1.5	2	2.5	3

已知這 100 位顧客中一次購物量超過 6 件的顧客占 55%，且將出現頻率視為機率。

15. 若 x, y 為整數，則數對 $(x, y) = ?$ （非選擇題，4 分）

參考答案：(15, 20)

試題解析：因為超過 6 件的顧客占 55%，所以 $x+30=45$ 且 $25+y+10=55$ ，
解得 $x=15, y=20$ 。

16. 若隨機變數 X 表示每位顧客的結帳時間，則 X 的期望值為何？（非選擇題，4 分）

參考答案：1.9 分鐘

試題解析： X 的機率分布如下：

X	1	1.5	2	2.5	3
P	$\frac{15}{100}$	$\frac{30}{100}$	$\frac{25}{100}$	$\frac{20}{100}$	$\frac{10}{100}$

$$\text{故期望值 } E(X) = 1 \times \frac{15}{100} + 1.5 \times \frac{30}{100} + 2 \times \frac{25}{100} + 2.5 \times \frac{20}{100} + 3 \times \frac{10}{100} = 1.9 \text{ (分鐘)}。$$

17. 若某顧客到達收銀台時，前面恰有 2 位顧客須結帳，且各顧客結帳互相獨立，則該顧客結帳前的等候時間不超過 2.5 分鐘的機率為何？（非選擇題，4 分）

參考答案： $\frac{9}{80}$

試題解析：令 X_1, X_2 分別表示前面第 1 位與第 2 位的結帳時間，

則等候時間不超過 2.5 分鐘的機率為

$$\begin{aligned} & P(X_1=1 \text{ 且 } X_2=1) + P(X_1=1.5 \text{ 且 } X_2=1) + P(X_1=1 \text{ 且 } X_2=1.5) \\ &= P(X_1=1) \times P(X_2=1) + P(X_1=1.5) \times P(X_2=1) + P(X_1=1) \times P(X_2=1.5) \\ &= \frac{15}{100} \times \frac{15}{100} + \frac{30}{100} \times \frac{15}{100} + \frac{15}{100} \times \frac{30}{100} = \frac{9}{80}。 \end{aligned}$$

參考公式及可能用到的數值

1. 首項為 a ，公差為 d 的等差數列前 n 項之和為 $S = \frac{n(2a + (n-1)d)}{2}$

首項為 a ，公比為 $r (r \neq 1)$ 的等比數列前 n 項之和為 $S = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$

2. 級數和： $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ； $\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

3. 一維數據 $X: x_1, x_2, \dots, x_n$ ，

算術平均數 $\mu_X = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ ；標準差 $\sigma_X = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_X)^2} = \sqrt{\frac{1}{n} (\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\mu_X^2)}$

4. 二維數據 $(X, Y): (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ ，

相關係數 $r_{X,Y} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_X)(y_i - \mu_Y)}{n\sigma_X\sigma_Y}$

最適直線（迴歸直線）方程式 $y - \mu_Y = r_{X,Y} \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} (x - \mu_X)$

5. 參考數值： $\sqrt{2} \approx 1.414, \sqrt{3} \approx 1.732, \sqrt{5} \approx 2.236, \sqrt{6} \approx 2.449, \pi \approx 3.142$

$\sin 23^\circ \approx 0.40, \sin 37^\circ \approx 0.60, \sin 53^\circ \approx 0.80, \cos 23^\circ \approx 0.92, \cos 37^\circ \approx 0.80, \cos 53^\circ \approx 0.60$

6. 對數值： $\log 2 \approx 0.3010, \log 3 \approx 0.4771, \log 5 \approx 0.6990, \log 7 \approx 0.8451$

7. 若 $X \sim B(n, p)$ 為二項分布，則期望值 $E(X) = np$ ，變異數 $Var(X) = np(1-p)$ ；

若 $X \sim G(p)$ 為幾何分布，則期望值 $E(X) = \frac{1}{p}$ ，變異數 $Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$ 。