龍騰文化

112 學年度學科能力測驗全真模擬試卷

數學 A 考科

名師/柳宗佑老師

【教用卷】

—作答注意事項—

考試時間：100分鐘

作答方式：

- 選擇（填）題用 2B 鉛筆在「答題卷」上作答；更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。
- 除題目另有規定外，非選擇題用筆尖較粗之黑色墨水的筆在「答題卷」上作答；更正時，可以使用修正液（帶）。
- 考生須依上述規定劃記或作答，若未依規定而導致答案難以辨識或評閱時，恐將影響考生成績並損及權益。
- 答題卷每人一張，不得要求增補。
- 選填題考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子劃記。

選擇（填）題計分方式：

- 單選題：每題有 n 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項。各題答對者，得該題的分數；答錯、未作答或劃記多於一個選項者，該題以零分計算。
- 多選題：每題有 n 個選項，其中至少有一個是正確的選項。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得該題全部的分數；答錯 k 個選項者，得該題 $\frac{n-2k}{n}$ 的分數；但得分低於零分或所有選項均未作答者，該題以零分計算。
- 選填題每題有 n 個空格，須全部答對才給分，答錯不倒扣。

※試題中參考的附圖均為示意圖，試題後附有參考公式及數值。

祝考試順利

龍騰文化
肯定自己 ➤ 肯定不同

學用卷定價 20 元
贈品禁止轉售 #1
62001N1_ER/C/0

第壹部分、選擇（填）題（占85分）

一、單選題（占30分）

說明：第 1 題至第 6 題，每題 5 分。

1. 2022 世界盃足球賽共有 32 支球隊進入最後的會內賽，其賽制分為小組賽、淘汰賽兩個階段，小組賽將 32 支球隊平分為 8 個小組，小組內每個球隊之間都會互相對戰一次，然後依排名準則讓小組中排名最高的 2 個隊伍晉級淘汰賽（不會加賽），而淘汰賽在 4 強出爐之前採單淘汰制，淘汰賽每場比賽都會分出勝負，只要球隊輸掉一場比賽就會淘汰出局，而最後 4 強出爐後，4 強的球隊每隊會進行一場 4 強賽，在 4 強賽的贏家將進行冠軍戰，輸家則進行季軍戰，試問 2022 世界盃足球賽的會內賽總共會有幾場球賽？

(1)39　(2)40　(3)48　(4)63　(5)64

解題觀念：計數原理

參考答案：(5)

試題解析：〔小組賽階段〕

每個小組有 4 個球隊，每個球隊之間都會互相對戰一次，所以每個小組會進行 $\frac{4\times 3}{2}=6$ 場比賽，總共有 8 個小組，故小組賽共有 $8\times 6=48$ 場比賽。

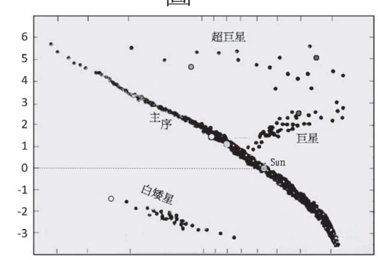
〔淘汰賽階段〕

一共有 $8\times 2=16$ 個球隊進入淘汰賽，在 4 強出爐前一共會淘汰 12 支球隊，所以會有 12 場比賽，4 強出爐後會進行 2 場 4 強賽、1 場季軍戰、1 場冠軍戰，淘汰賽共有 $12+2+1+1=16$ 場比賽。

最後得 2022 世界盃足球賽的會內賽總共會有 $48+16=64$ 場球賽。故選(5)。

2. 在科學探究中，我們會將一些事物的性質拿來對比，並繪製圖表以方便判讀，但常常因為個體間的差異極大導致圖表難以繪製。以天文中呈現每個恆星溫度和光度關係的赫羅圖為例，其縱軸為恆星的光度數值（設太陽的光度值為 1），但因為恆星間光度差異可達百億倍，依照光度大小等比例不容易繪製在圖上，故將縱軸單位改為恆星光度的常用對數值以方便呈現（如圖一）。已知有兩個恆星在赫羅圖上的縱軸坐標分別為 5.3 與 2.3，試問此兩個恆星的光度比值為多少？

圖一



圖片來源：https://forum.hkas.org.hk/thread-4454-1-1.html

(1)2.3　(2)3　(3)27　(4)1000　(5)3000

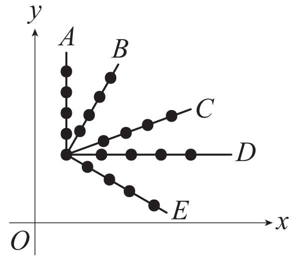
解題觀念：常用對數

參考答案：(4)

試題解析：假設兩個恆星的光度值分別為 a、b，則 $\log a=5.3$ 且 $\log b=2.3$，

可得 $\log a-\log b=5.3-2.3=3\Rightarrow \log\frac{a}{b}=3\Rightarrow \frac{a}{b}=10^3=1000$。故選(4)。

3. 如圖，將五組數據的散布圖繪製在同一坐標上（ A 平行 y 軸，D 平行 x 軸），其相關係數分別為 r_A 、 r_B 、 r_C 、 r_D 、 r_E ，則 r_A 、 r_B 、 r_C 、 r_D 、 r_E 的大小關係為何？



(1) $r_A > r_B > r_C > r_D > r_E$　(2) $r_B > r_C > r_A = r_D > r_E$

(3) $r_B > r_C > r_E > r_A = r_D$　(4) $r_B = r_C > r_E > r_A = r_D$

(5) $r_B = r_C > r_A = r_D > r_E$

解題觀念：相關係數

參考答案：(5)

試題解析：由圖可知：

B 、 C 二組數據的相關係數皆為 1，

A 、 D 二組數據的相關係數皆為 0，

E 數據的相關係數為 -1，

則 $r_B = r_C > r_A = r_D > r_E$ 。

故選(5)。

4. 設等比數列 $\langle a_n \rangle$ 之首項 a_1 與公比 r 皆為正數，且 $\log_3 a_3 + \log_3 a_7 = 4$ ， $\log_2 a_4 + \log_2 a_8 = 6$ ，試求公比 r 的值為何？

(1)2　(2)3　(3) $\dfrac{2}{3}$　(4) $\dfrac{4}{9}$　(5) $\dfrac{8}{9}$

解題觀念：等比中項、對數律

參考答案：(5)

試題解析： $\log_3 a_3 + \log_3 a_7 = 4 \Rightarrow \log_3 a_3 a_7 = 4 \Rightarrow a_3 a_7 = 81 \Rightarrow a_5 = 9$ ，

$\log_2 a_4 + \log_2 a_8 = 6 \Rightarrow \log_2 a_4 a_8 = 6 \Rightarrow a_4 a_8 = 64 \Rightarrow a_6 = 8$ ，

所以 $r = \dfrac{a_6}{a_5} = \dfrac{8}{9}$ 。

故選(5)。

5. 某個影音社群平台影片推播的演算法規則如下：

當一位新的創作者上傳一支新影片後，會依平台使用者的性別比例隨機挑選 1000 名使用者推播，再依照使用者對於該影片的互動數據來規劃後續推播的頻率。

已知創作者小騰第一次上傳一支影片到這個平台後，系統提供了 1000 名使用者的回饋報告中顯示：其中有 620 位男性使用者與 380 位女性使用者，且其中有 186 位男性使用者點讚，若點讚與否與使用者性別為獨立事件，試問有多少位女性使用者對該影片點讚？

(1)380　(2)190　(3)186　(4)114　(5)76

解題觀念：獨立事件

參考答案：(4)

試題解析：令這 1000 位使用者點讚的比例為 P，

已知這 1000 位使用者中是男性的機率為 $\frac{620}{1000}=\frac{31}{50}$，

且點讚與否與使用者性別為獨立事件，

所以 $\frac{186}{1000}=\frac{31}{50}\times P \Rightarrow P=\frac{186}{1000}\times\frac{50}{31}\Rightarrow P=\frac{3}{10}$，

則這 1000 位使用者中是女性且點讚的人數為 $380\times P=380\times 0.3=114$（位）。

故選(4)。

6. 已知平面上三角形的三高交點即為垂心，若 $\triangle ABC$ 的垂心坐標為 $H(4,0)$，且 A、B 兩點坐標分別為 $(-4,-4)$ 與 $(3,3)$，則 C 點坐標為下列何者？

(1) $(5,-1)$　(2) $(6,-2)$　(3) $(0,0)$　(4) $(1,-2)$　(5) $(2,-4)$

解題觀念：直線方程式

參考答案：(1)

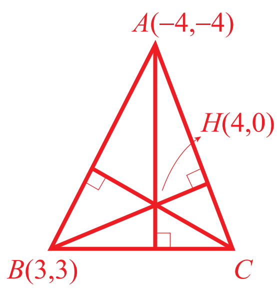
試題解析：$\overleftrightarrow{AH}: x-2y=4$，則 $\overleftrightarrow{BC}$ 為垂直 $\overleftrightarrow{AH}$ 且通過 B 點的直線，其方程式為：$2x+y=9$，

$\overleftrightarrow{BH}: 3x+y=12$，則 $\overleftrightarrow{AC}$ 為垂直 $\overleftrightarrow{BH}$ 且通過 A 點的直線，其方程式為：$x-3y=8$，

解聯立方程組：$\begin{cases}2x+y=9\\x-3y=8\end{cases}$，得 $(x,y)=(5,-1)$，

所以 C 點坐標為 $(5,-1)$。

故選(1)。



二、多選題（占30分）

說明：第 7 題至第 12 題，每題 5 分。

7. 若存在正整數 n 使得矩陣 A 滿足 $\begin{bmatrix}5\\8\end{bmatrix}=A^n\begin{bmatrix}5\\8\end{bmatrix}$，則矩陣 A 可能為下列何者？

(1) $\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\\-\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$ (5) $\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2}\\0 & 1\end{bmatrix}$

解題觀念：線性變換

參考答案：(2)(3)(4)

試題解析：(1) ╳：$\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$為伸縮矩陣，伸縮倍數不為 1，無法伸縮回原本的位置。

(2) ○：$\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos 60° & -\sin 60°\\\sin 60° & \cos 60°\end{bmatrix}$為一逆時針方向旋轉 $60°$ 的旋轉矩陣，重複旋轉 6 次即會變換到原位置。

(3) ○：$\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\\-\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos 210° & -\sin 210°\\\sin 210° & \cos 210°\end{bmatrix}$為一逆時針方向旋轉 $210°$ 的旋轉矩陣，重複旋轉 12 次即會變換到原位置。

(4) ○：$\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos 120° & \sin 120°\\\sin 120° & -\cos 120°\end{bmatrix}$為對直線 $y=\tan 60° x$ 的直線鏡射的鏡射矩陣，重複鏡射 2 次即會變換到原位置。

(5) ╳：$\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2}\\0 & 1\end{bmatrix}$為一推移矩陣，無法將點推移回原本的位置。

故選(2)(3)(4)。

8. 小龍設計社團徽章，主視覺為一個鈍角三角形，若以英吋為單位，則三角形的三個邊長恰好為三個連續正整數，則有關此三角形的敘述，下列哪些正確？

(1)最大邊長為 5 英吋　(2)若最大角為 A，則 $\cos A=-\dfrac{1}{4}$

(3)若最小角為 B，則 $\cos B=\dfrac{7}{8}$　(4)此三角形的面積為 $\dfrac{3\sqrt{15}}{4}$ 平方英吋

(5)若要設計一個圓形旗幟將整個三角形包含進去，則此圓形旗幟的最小半徑為 $\dfrac{8}{15}\sqrt{15}$ 英吋

解題觀念：餘弦定理、三角形面積公式

參考答案：(2)(3)(4)(5)

試題解析：(1) ╳：令三邊長分別為 x、$x+1$、$x+2$ 英吋，

可得 $\begin{cases} x>0 \\ x+(x+1)>x+2 \\ x^2+(x+1)^2<(x+2)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>0 \\ x>1 \\ -1<x<3 \end{cases} \Rightarrow 1<x<3 \Rightarrow x=2$，

則此三角形的三邊長分別為 2、3、4 英吋。

(2) ○：$\cos A=\dfrac{2^2+3^2-4^2}{2\times2\times3}=-\dfrac{1}{4}$。

(3) ○：$\cos B=\dfrac{3^2+4^2-2^2}{2\times3\times4}=\dfrac{7}{8}$。

(4) ○：$\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\sqrt{1-\dfrac{49}{64}}=\dfrac{\sqrt{15}}{8}$，

三角形面積為 $\dfrac{1}{2}\times4\times3\times\dfrac{\sqrt{15}}{8}=\dfrac{3\sqrt{15}}{4}$（平方英吋）。

(5) ○：此圓形旗幟的最小半徑即為此三角形的外接圓半徑，假設此半徑為 R，

則 $R=\dfrac{2\times3\times4}{4\times\dfrac{3\sqrt{15}}{4}}=\dfrac{8}{15}\sqrt{15}$（英吋）。

故選(2)(3)(4)(5)。

9. 坐標平面上，$\triangle ABC$ 三頂點的坐標分別為 $A(2,2)$、$B(3,0)$、$C(4,1)$，若在平面上找到一點 D，使得 $\triangle ABD$、$\triangle BCD$、$\triangle ACD$ 的面積相等，試問 D 的坐標可能為下列何者？

(1) $(0,0)$　(2) $(3,1)$　(3) $(5,-1)$　(4) $(3,3)$　(5) $(1,1)$

解題觀念：三角形重心、向量加法

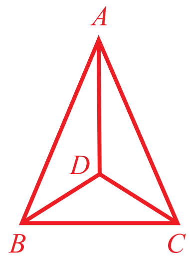
參考答案：(2)(3)(4)(5)

試題解析：$\triangle ABD$、$\triangle BCD$、$\triangle ACD$ 的面積相等，

故 D 可能為下列兩種情況（設 O 為原點）：

〔情況 1〕

D 為 $\triangle ABC$ 的重心，

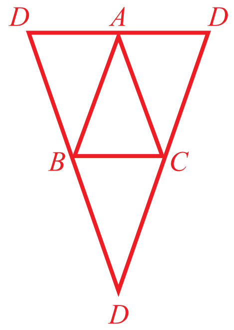


故 $\overrightarrow{OD}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)=\left(\frac{2+3+4}{3},\frac{2+0+1}{3}\right)=(3,1)$，

則 D 的坐標可能為 $(3,1)$。

〔情況 2〕

A、B、C、D 恰形成一平行四邊形，



若此平行四邊形為 $ABDC$，

則 $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=(2,2)+(1,-2)+(2,-1)=(5,-1)$，

若此平行四邊形為 $ADBC$，

則 $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}=(4,1)+(-1,-1)+(-2,1)=(1,1)$，

若此平行四邊形為 $ADCB$，

則 $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}=(3,0)+(1,1)+(-1,2)=(3,3)$，

則 D 的坐標可能為 $(5,-1)$、$(1,1)$、$(3,3)$。

故選(2)(3)(4)(5)。

10. 已知三次函數 $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 圖形的對稱中心為 $(2,1)$，且與 y 軸交於 $(0,-9)$，若此函數的廣域特徵圖形近似於 $y=x^3$，則下列敘述哪些正確？

(1) $a=1$　(2) $b=6$　(3) $f(1)=-1$　(4)在 $x=-2$ 附近的局部特徵近似於直線 $(x-2)+1$

(5)可以找到一個實數 x_0 滿足 $f(x_0)=2022$

解題觀念：三次函數的圖形特徵

參考答案：(1)(3)(5)

試題解析：已知函數的廣域特徵圖形近似於 $y=x^3$，可知 $a=1$，

則可假設此三次函數 $f(x)=(x-2)^3+p(x-2)+1$，

將 $(0,-9)$ 帶入可得 $-8-2p+1=-9\Rightarrow p=1$，

得此三次函數 $f(x)=(x-2)^3+(x-2)+1=x^3-6x^2+13x-9$。

(1) ○：$a=1$。

(2) ╳：$b=-6$。

(3) ○：$f(1)=1^3-6\times1^2+13\times1-9=-1$。

(4) ╳：$f(x)=x^3-6x^2+13x-9=(x+2)^3-12(x+2)^2+49(x+2)-67$，

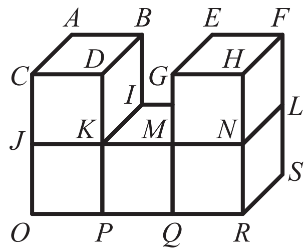
故在 $x=-2$ 附近的局部特徵近似於直線 $49(x+2)-67$。

(5) ○：因為函數值範圍包含負無限大到無限大，

故必有一實數 x_0 滿足 $f(x_0)=2022$。

故選(1)(3)(5)。

11. 《Minecraft》是微軟開發的沙盒遊戲，已知在遊戲中將五個木材資源（邊長為 1 單位的正立方體）以右圖的方式排列可以組合成一艘木船，則下列敘述哪些**錯誤**？



(1) $\overline{AM}=\sqrt{6}$

(2) $\cos\angle OAM=\dfrac{3}{\sqrt{30}}$

(3)直線 AJ 與直線 LN 為歪斜線

(4)直線 AJ 與直線 SN 的距離為 3

(5)平面 BIO 與平面 FLQ 的距離為 2

解題觀念：空間坐標、空間中的直線與平面

參考答案：(5)

試題解析：設 $O(0,0,0)$ 且 $\overrightarrow{OP}=(1,0,0)$、$\overrightarrow{CA}=(0,1,0)$、$\overrightarrow{OJ}=(0,0,1)$，

則可知 $A(0,1,2)$、$M(2,0,1)$、$N(3,0,1)$、$B(1,1,2)$、$I(1,1,1)$、$F(3,1,2)$。

(1) ○：$\overline{AM}=\sqrt{2^2+(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{6}$。

(2) ○：已知 $\overline{AM}=\sqrt{6}$，$\overline{OM}=\sqrt{2^2+0^2+1^2}=\sqrt{5}=\overline{OA}$，

則 $\cos\angle OAM=\dfrac{\overline{AM}^2+\overline{AO}^2-\overline{OM}^2}{2\times\overline{AM}\times\overline{AO}}=\dfrac{6+5-5}{2\times\sqrt{6}\times\sqrt{5}}=\dfrac{3}{\sqrt{30}}$。

(3) ○：直線 AJ 與直線 LN 不平行也不相交，

所以直線 AJ 與直線 LN 為歪斜線。

(4) ○：直線 AJ 與直線 SN 同時垂直直線 JN，

所以直線 AJ 與直線 SN 的距離為 $\overline{JN}=3$。

(5) ╳：平面 BIO 平行平面 FLQ，且平面 BIO 的方程式為 $x-y=0$，

則 $d(F,\text{平面}BIO)=\dfrac{|3-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}$，

所以平面 BIO 與平面 FLQ 的距離為 $\sqrt{2}$。

故選(5)。

12. 四次多項式 $f(x)$ 除以 $x-1$、$x-2$、$x-3$ 之餘式分別為 5、8、13，則下列敘述哪些正確？

(1) $f(x)$ 除以 $(x-1)(x-2)$ 的餘式為 $3x+3$　(2) $f(x)$ 除以 $(x-1)(x-3)$ 的餘式為 $4x+1$

(3) $f(x)$ 除以 $(x-2)(x-3)$ 的餘式為 $5x-2$　(4) $f(x)$ 除以 $2(x-2)(x-3)$ 的餘式為 $5x-2$

(5) $f(x)$ 除以 $(x-1)(x-2)(x-3)$ 的餘式為 4

解題觀念：餘式定理

參考答案：(2)(3)(4)

試題解析：已知四次多項式 $f(x)$ 除以 $x-1$、$x-2$、$x-3$ 之餘式分別為 5、8、13，

可令 $f(x)=(px+q)(x-1)(x-2)(x-3)+(ax^2+bx+c)$，

由餘式定理可知 $\begin{cases} f(1)=a+b+c=5 \\ f(2)=4a+2b+c=8 \\ f(3)=9a+3b+c=13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=0 \\ c=4 \end{cases}$，

得 $f(x)=(px+q)(x-1)(x-2)(x-3)+x^2+4$，

則 $f(x)$ 除以 $(x-1)(x-2)$ 的餘式為 x^2+4 除以 $(x-1)(x-2)$ 的餘式 $3x+2$，

$f(x)$ 除以 $(x-1)(x-3)$ 的餘式為 x^2+4 除以 $(x-1)(x-3)$ 的餘式 $4x+1$，

$f(x)$ 除以 $(x-2)(x-3)$ 的餘式為 x^2+4 除以 $(x-2)(x-3)$ 的餘式 $5x-2$，

$f(x)$ 除以 $2(x-2)(x-3)$ 的餘式為 x^2+4 除以 $2(x-2)(x-3)$ 的餘式 $5x-2$，

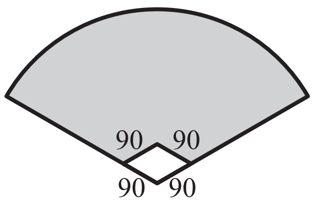
$f(x)$ 除以 $(x-1)(x-2)(x-3)$ 的餘式為 x^2+4，

故選(2)(3)(4)。

三、選填題（占25分）

說明：第 13 題至第 17 題，每題 5 分。

13. 人造草皮廠商承包了新棒球場的標案，要負責鋪設整個外野草皮，為了方便預估草皮的備料，承包商簡化了棒球場規格的相關數據，以便更容易計算需要準備的草皮面積，根據以下簡化後的數據，則外野草皮的預估面積為



$\dfrac{(13\text{-}1)(13\text{-}2)(13\text{-}3)(13\text{-}4)(13\text{-}5)(13\text{-}6)\pi}{(13\text{-}7)}-(13\text{-}8)(13\text{-}9)(13\text{-}10)(13\text{-}11)\sqrt{(13\text{-}12)}$ 平方英呎。

① 將整個場地簡化為半徑 400 英呎、圓心角為 $120°$ 的扇形。

② 每個壘包間的距離為 90 英呎。

③ 外野草皮預估面積即為圖中灰色部分面積。

解題觀念：扇形面積、三角形面積

參考答案：$\dfrac{160000\pi}{3}-4050\sqrt{3}$

試題解析：外野草皮的預估面積為

$$\frac{1}{2}\times 400^2\times\frac{2\pi}{3}-\frac{1}{2}\times 90\times 90\times\sin 120°\times 2=\frac{160000\pi}{3}-4050\sqrt{3}$$ 平方英呎。

14. 小六來到廟宇借「發財金」，希望透過神明的保佑，讓自己的運勢能夠一帆風順。而廟宇通常透過「擲筊」的儀式來獲得神明的指示，所用工具稱作「筊杯」，是兩個約巴掌大的半月形木片，均為一面平坦、另一面中間凸出。儀式內容是將筊杯擲出，根據落下後的形狀方位以探測神明之意。

每次擲筊會有下列三種結果：

一陽一陰（一平一凸）：稱之為「聖筊」，表示神明允許、同意。

兩陽面（兩平面）：稱之為「笑筊」，表示神明一笑、不解，或者考慮中。

兩陰面（兩凸面）：稱之為「無筊」，表示神明否定、憤怒，或者不宜行事。

該廟宇求「發財金」的規則如下：

① 在許願後擲筊，第一次擲出聖筊，則可求得發財金 600 元。

② 若第一次未能擲出聖筊，則重新許願後再次擲筊，擲出聖筊可求得發財金 500 元。

③ 若第二次未能擲出聖筊，則重新許願後再次擲筊，擲出聖筊可求得發財金 400 元。

④ 如此依次擲出聖筊者，可求得 300 元、200 元、100 元。

⑤ 若六次擲筊均未出現聖筊，則請下次再來許願求發財金。

若每人每次擲筊的結果均為獨立事件且擲出聖筊的機率為 $\frac{1}{2}$，則小六該次求得發財金的期望值為 ___(14-1)(14-2)(14-3).(14-4)(14-5)(14-6)(14-7)___ 元。

解題觀念：期望值、獨立事件

參考答案：501.5625

試題解析：不同發財金金額的機率表如下：

發財金金額	600	500	400	300	200	100
機率	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^2$	$\left(\frac{1}{2}\right)^3$	$\left(\frac{1}{2}\right)^4$	$\left(\frac{1}{2}\right)^5$	$\left(\frac{1}{2}\right)^6$

則小六該次求得發財金的期望值為

$$600\times\frac{1}{2}+500\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+400\times\left(\frac{1}{2}\right)^3+300\times\left(\frac{1}{2}\right)^4+200\times\left(\frac{1}{2}\right)^5+100\times\left(\frac{1}{2}\right)^6$$

$$=300+125+50+18.75+6.25+1.5625$$

$=501.5625$（元）。

15. 空間中三平面分別為 $x+2y-z=kx$ 、 $kx+y+3z=2x$ 、 $2x+4y+kz=0$，若 k 為整數且此三平面交於一線，則 $k=$ ___(15-1)___ 。

解題觀念：增廣矩陣、矩陣列運算

參考答案：5

試題解析：$\begin{cases} x+2y-z=kx \\ kx+y+3z=2x \\ 2x+4y+kz=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1-k)x+2y-z=0 \\ (k-2)x+y+3z=0 \\ 2x+4y+kz=0 \end{cases}$，

可寫成增廣矩陣：$\left[\begin{array}{ccc|c} 1-k & 2 & -1 & 0 \\ k-2 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & k & 0 \end{array}\right]$

$\xrightarrow[\text{第3列+第2列}\times(-4)]{\text{第1列+第2列}\times(-2)} \left[\begin{array}{ccc|c} 5-3k & 0 & -7 & 0 \\ k-2 & 1 & 3 & 0 \\ 10-4k & 0 & k-12 & 0 \end{array}\right]$

$\xrightarrow{\text{第3列+第1列}\times\left(\frac{k-12}{7}\right)} \left[\begin{array}{ccc|c} 5-3k & 0 & -7 & 0 \\ k-2 & 1 & 3 & 0 \\ \frac{-3k^2+13k+10}{7} & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$，

因為此三平面交於一線，所以 $\frac{-3k^2+13k+10}{7}=0$

$\Rightarrow 3k^2-13k-10=0$

$\Rightarrow (3k+2)(k-5)=0$

$\Rightarrow k=5$ 或 $k=\frac{-2}{3}$（不合）。

16. 設 $0<\theta<\pi$，$f(\theta)=\dfrac{\sin\theta\cos\theta}{1+\sin\theta+\cos\theta}$ 之最大值為 $\dfrac{\sqrt{\text{16-1}}-\text{16-2}}{\text{16-3}}$。

解題觀念：乘法公式、三角函數圖形的疊合

參考答案：$\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$

試題解析：已知 $\sin\theta\cos\theta=\dfrac{(\sin\theta+\cos\theta)^2-1}{2}$，

則 $f(\theta)=\dfrac{\sin\theta\cos\theta}{1+\sin\theta+\cos\theta}=\dfrac{\dfrac{(\sin\theta+\cos\theta)^2-1}{2}}{1+\sin\theta+\cos\theta}$

$=\dfrac{(\sin\theta+\cos\theta+1)(\sin\theta+\cos\theta-1)}{2(1+\sin\theta+\cos\theta)}=\dfrac{(\sin\theta+\cos\theta-1)}{2}$

$=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta\right)-1\right)=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{2}(\cos 45^\circ\sin\theta+\sin 45^\circ\cos\theta)-1\right)$

$=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{2}\sin(45^\circ+\theta)-1\right)=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\theta\right)-1\right)$，

當 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ 時，$f(\theta)$ 有最大值 $\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$。

17. 已知 $a^2+b^2+c^2=169$，且 $p^2+q^2+r^2=100$，則 $\begin{vmatrix} a & -b & c \\ 2 & 1 & 2 \\ -p & q & -r \end{vmatrix}$ 的最大值為 17-1 17-2 17-3。

解題觀念：三階行列式的幾何意義

參考答案：390

試題解析：令 $\overrightarrow{v_1}=(a,-b,c)$、$\overrightarrow{v_2}=(2,1,2)$、$\overrightarrow{v_3}=(-p,q,-r)$，

則 $\left|\overrightarrow{v_1}\right|=\sqrt{a^2+(-b)^2+c^2}=13$，$\left|\overrightarrow{v_2}\right|=\sqrt{2^2+1^2+2^2}=3$，

$\left|\overrightarrow{v_3}\right|=\sqrt{(-p)^2+q^2+(-r)^2}=10$，

$\begin{vmatrix} a & -b & c \\ 2 & 1 & 2 \\ -p & q & -r \end{vmatrix}$ 的最大值可視為 $\overrightarrow{v_1}$、$\overrightarrow{v_2}$、$\overrightarrow{v_3}$ 三個向量所張成平行六面體的最大體積，

而當 $\overrightarrow{v_1}$、$\overrightarrow{v_2}$、$\overrightarrow{v_3}$ 兩兩互相垂直時，三個向量所張成平行六面體的最大體積為 $13\times 3\times 10=390$。

第貳部分、混合題或非選擇題（占15分）

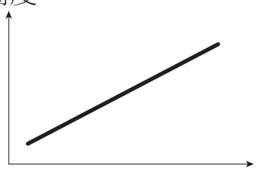
說明：本部分共有 1 題組，每一子題配分標於題末。限在標示題號作答區內作答。選擇題與「非選擇題作圖部分」使用 2B 鉛筆作答，更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。非選擇題請由左而右橫式書寫，作答時必須寫出計算過程或理由，否則將酌予扣分。

<u>18-20 題為題組</u>

「十鼓仁糖文創園區」位於臺南仁德區，前身是 1909 年創立的「車路墘製糖所」，於 2005 年出租給「十鼓文創」接手重新規劃，改造成亞洲第一座以"鼓樂"為主題的國際藝術村。來到「十鼓仁糖文創園區」不但可以欣賞動感震撼的鼓樂表演，還有各種刺激挑戰的極限運動、趣味的親子兒童設施好玩好放電，經過巧手改造的老舊糖廠也是文青有氣氛的拍照場景！

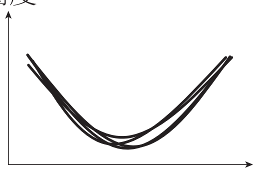
18. 「天堂上的鞦韆」是「十鼓仁糖文創園區」的熱門設施，他是一個位在 11 層樓高的鞦韆，搭上「天堂上的鞦韆」可以前後擺盪，隨時間每次擺盪的高度愈來愈高，感受心跳不斷加速的同時欣賞美麗的風景。某日小柳搭上了「天堂上的鞦韆」，若透過圖表記錄從最低點啟動到盪至最高點的整個過程的高度，則最有可能是下列哪張圖表？

(1)高度



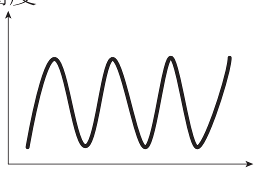
時間

(2)高度



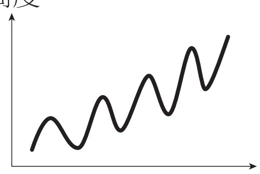
時間

(3)高度



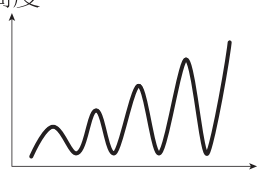
時間

(4)高度



時間

(5)高度



時間

解題觀念：週期性函數圖形

參考答案：(5)

試題解析：因為擺盪的過程中每次擺盪的最高點會愈來愈高，且每次擺盪都會經過一樣的最低點，故選(5)。

19. 某日小稜跟朋友到「十鼓仁糖文創園區」遊玩，事先查了一些設施的開放時間，記錄如下表，園區將開放時段分為上午、下午與星光三個時段，為了讓行程不至於太過匆忙，所以小稜規劃每個時段最多安排三個設施且每個設施剛好都玩過一次，則小稜的行程有幾種排法？

設施		上午	下午	星光
極限設施	蜘蛛人		13:10-17:10	
	飛天宅急便		13:10-17:10	18:10-20:15
	糖晶落體	11:10-12:15	13:10-17:10	18:10-20:15
	擎天之柱		13:10-17:10	
	極限大擺盪	11:10-12:15	13:10-17:10	
天堂上的鞦韆		11:10-12:15	13:10-17:10	18:10-20:15
煙囪滑梯		09:30-12:15	13:10-17:10	18:10-20:15
大流瀑滑梯			13:10-17:10	

解題觀念：排列組合

參考答案：432

試題解析：因為所有設施都可以在下午時段遊玩，故將下午遊玩的項目放在最後討論。

〔STEP1〕先分配每個時段安排的設施數量。

（上午、星光、下午）:（2、3、3）、（3、2、3）、（3、3、2），

其中因為上午與星光時段可玩的設施只有五項，

所以只能有（2、3、3）、（3、2、3）兩種。

〔STEP2〕分析上午與星光時段可玩的設施。

上午或星光時段可以玩的項目只有糖晶落體、天堂上的鞦韆、煙囪滑梯、極限大擺盪、飛天宅急便這五項設施。其中：

① 糖晶落體、天堂上的鞦韆、煙囪滑梯：三個項目兩時段都可以玩。

② 極限大擺盪：星光時段不能玩。

③ 飛天宅急便：上午時段不能玩。

〔STEP3〕討論（上午、星光、下午）:（2、3、3）的數量。

因為上午或星光時段可以玩的項目只有五項，所以這五項設施一定要規劃在上午或星光時段玩，因為極限大擺盪星光時段不能玩，所以一定要規劃在早上時段，所以方法數有 $\left(C_1^1\times C_1^3\right)\times C_3^3\times C_3^3\times 2!\times 3!\times 3!=216$ 種。

〔STEP4〕討論（上午、星光、下午）:（3、2、3）的數量。

因為上午或星光時段可以玩的項目只有五項，所以這五項設施一定要規劃在上午或星光時段玩，因為極限大擺盪星光時段不能玩，所以一定要規劃在早上時段，所以方法數有 $\left(C_1^1\times C_2^3\right)\times C_2^2\times C_3^3\times 3!\times 2!\times 3!=216$ 種。

故共有 432 種行程安排方法。

評分標準：

① 正確分配每個時段安排的設施數量，給 2 分。

② 知道（上午、星光、下午）:（3、3、2）的方法數為 0，給 1 分。

③ 正確計算每種分配模式的方法數，給 2 分。

20.「大齒輪舞臺」是「十鼓仁糖文創園區」的一個表演舞臺，舞臺構造是由 5 個不同大小的圓形大齒輪所構成。如今園區舉辦一個紙飛機大賽，參賽者由起點射出紙飛機，若紙飛機降落在最大的齒輪舞臺上，可以獲得獎勵。小榮參加了這項活動，為了更精準地計算最佳飛行距離，他設計了一個平面坐標，把起點放在坐標原點，單位長為 1 公尺，最大齒輪舞臺所在的位置以 $x^2+y^2-24x-10y+160=0$ 來表示。則要讓紙飛機恰好落在最大的齒輪舞臺上，紙飛機的水平位移 d 要滿足 $|d-a|\le b$ ，其中 a,b 為實數，則數對 $(a,b)=$_____。

解題觀念：絕對值、圓方程式、點與圓的關係

參考答案：$(13,3)$

試題解析：最大齒輪舞臺 $x^2+y^2-24x-10y+160=0$ 可化簡為 $(x-12)^2+(y-5)^2=9$，

可得此圓的圓心為 $(12,5)$ ，半徑為 3。

而起點到圓心的距離為 $\sqrt{(12-0)^2+(5-0)^2}=13$ ，

代表起點到此圓最大的距離為 $13+3=16$ ，而最小的距離為 $13-3=10$ ，

要讓紙飛機恰好落在最大的齒輪舞臺上，

則紙飛機的水平位移 d 要滿足 $10\le d\le 16$，可表示為 $|d-13|\le 3$ ，

故 $(a,b)=(13,3)$。

評分標準：

① 將圓方程式化簡為 $(x-12)^2+(y-5)^2=9$，給 2 分。

② 計算出起點到圓心的距離為 13，給 1 分。

③ 正確寫出 $(a,b)=(13,3)$，給 2 分。

參考公式及可能用到的數值

1. 首項為 a，公差為 d 的等差數列前 n 項之和 $S=\dfrac{n\left(2a+(n-1)d\right)}{2}$；

   首項為 a，公比為 r（$r\neq 1$）的等比數列前 n 項之和 $S=\dfrac{a\left(1-r^n\right)}{1-r}$。

2. 一維數據 $X:x_1,x_2,\cdots,x_n$，算術平均數 $\mu_x=\dfrac{1}{n}\left(x_1+x_2+\cdots+x_n\right)$，

   標準差 $\sigma_x=\sqrt{\dfrac{1}{n}\left[\left(x_1-\mu_x\right)^2+\left(x_2-\mu_x\right)^2+\cdots+\left(x_n-\mu_x\right)^2\right]}$

   $=\sqrt{\dfrac{1}{n}\left[\left(x_1^{\,2}+x_2^{\,2}+\cdots+x_n^{\,2}\right)-n\mu_x^{\,2}\right]}$。

3. 二維數據 $(X,Y):(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n)$，

   相關係數 $r_{XY}=\dfrac{\left(x_1-\mu_x\right)\left(y_1-\mu_y\right)+\left(x_2-\mu_x\right)\left(y_2-\mu_y\right)+\cdots+\left(x_n-\mu_x\right)\left(y_n-\mu_y\right)}{n\sigma_x\sigma_y}$，

   最適合直線（迴歸直線）方程式為 $y-\mu_Y=r_{XY}\dfrac{\sigma_Y}{\sigma_X}\left(x-\mu_X\right)$。

4. $\triangle ABC$ 的正弦定理：$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$（$R$ 為外接圓半徑）。

   $\triangle ABC$ 的餘弦定理：$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$。

5. 三角比的和角公式：

   $\sin\left(A+B\right)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$，

   $\cos\left(A+B\right)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$，

   $\tan\left(A+B\right)=\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$。

6. 正、餘弦函數的疊合公式：設 a、b 是不全為 0 的實數，則

   $a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin\left(x+\theta\right)$，其中 θ 滿足 $\cos\theta=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\sin\theta=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$。

7. 參考數值：$\sqrt{2}\approx 1.414$，$\sqrt{3}\approx 1.732$，$\sqrt{5}\approx 2.236$，$\sqrt{7}\approx 2.646$，$\pi\approx 3.142$。

8. 對數值：$\log 2\approx 0.3010$，$\log 3\approx 0.4771$，$\log 5\approx 0.6990$，$\log 7\approx 0.8451$。

9. 角錐體積 $=\dfrac{1}{3}\times$ 底面積 $\times$ 高。