龍騰文化

114 學年度學科能力測驗全真模擬試卷

數學 A 考科

請於考試開始鈴響起，在答題卷簽名欄位以正楷簽全名

西苑高中/陳威旭老師

—作答注意事項—

考試時間：100分鐘

作答方式：

- 選擇（填）題用 2B 鉛筆在「答題卷」上作答；更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。
- 除題目另有規定外，非選擇題用筆尖較粗之黑色墨水的筆在「答題卷」上作答；更正時，可以使用修正液（帶）。
- 考生須依上述規定劃記或作答，若未依規定而導致答案難以辨識或評閱時，恐將影響考生成績並損及權益。
- 答題卷每人一張，不得要求增補。
- 選填題考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子劃記。

選擇（填）題計分方式：

- 單選題：每題有 n 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項。各題答對者，得該題的分數；答錯、未作答或劃記多於一個選項者，該題以零分計算。
- 多選題：每題有 n 個選項，其中至少有一個是正確的選項。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得該題全部的分數；答錯 k 個選項者，得該題 $\frac{n-2k}{n}$ 的分數；但得分低於零分或所有選項均未作答者，該題以零分計算。
- 選填題每題有 n 個空格，須全部答對才給分，答錯不倒扣。

※試題中參考的附圖均為示意圖，試題後附有參考公式及數值。

祝考試順利

龍騰文化
肯定自己 ➤ 肯定不同

定價 20 元

62001N11_E/B/0

第壹部分、選擇（填）題（占85分）

一、單選題（占30分）

說明：第 1 題至第 6 題，每題 5 分。

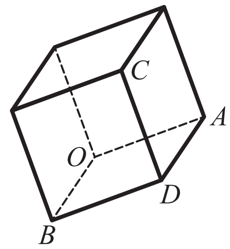
1. 已知 $\left(\sqrt{7}+2\right)^5\left(\sqrt{7}-2\right)^n>243$，其中 n 為整數。請選出正確的選項。

(1) n 的最大值為 4　(2) n 的最小值為 4　(3) n 的最小值為 6　(4) n 的最大值為 6
(5) n 為任意整數。

2. 三次函數 $y=f(x)$ 的各項係數皆為實數。已知廣域看 $y=f(x)$ 的圖形很接近 $y=-2x^3$ 的圖形，而局部看 $y=f(x)$ 在 $x=0$ 附近的圖形卻近似於直線 $y=3x-4$，且 $f(x)$ 除以 $x-1$ 的餘式為 6，則 $f(x)$ 除以 x^2-x+1 的餘式為下列哪一個選項？

(1) 0　(2) 6　(3) $10x-7$　(4) $12x-11$　(5) $7x-12$。

3. 已知一個正立方體的三個頂點的坐標為 $O(0,0,0)$，$A(1,2,2)$，$B(2,-2,1)$，另一個頂點 C 與其它頂點的相關位置如右圖。請問 C 點同時也是下列哪一個平面上的點？



(1) $x+y-z=5$　(2) $x-y+z=5$　(3) $x-y-z=5$　(4) $x+y+z=7$
(5) $x-y+z=7$。

4. 已知一袋中有 10 個大小相同的球，其中編號 1 的有 1 個，編號 2 的有 2 個，編號 3 的有 3 個，編號 4 的有 4 個，今從袋中一次取出 3 個球，則取出的球編號和為 8 的機率為下列哪一個選項？

(1) $\frac{3}{10}$　(2) $\frac{11}{28}$　(3) $\frac{11}{60}$　(4) $\frac{17}{20}$　(5) $\frac{11}{30}$。

5. $\triangle ABC$ 中，內切圓半徑為 $\sqrt{3}$ ，$\overline{BC}=8$ ，$\angle C=60°$，則 $\triangle ABC$ 的周長為哪一個選項？

(1) $2\sqrt{3}+6$ (2) $4\sqrt{3}+8$ (3) 16 (4) 18 (5) 20 。

6. 已知二元一次聯立方程式 $\begin{cases}(\cos 73°)x-(\sin 73°)y=-\sin 43° \\ (\sin 73°)x+(\cos 73°)y=\cos 43°\end{cases}$ 的解為 $x=a$ ， $y=b$ ，則

$\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a \\ b\end{bmatrix}$ 為下列哪一個選項？ (1) $\begin{bmatrix}-1 \\ 0\end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix}0 \\ -1\end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix}1 \\ 0\end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix}0 \\ 1\end{bmatrix}$ (5) $\begin{bmatrix}\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}$ 。

二、多選題（占30分）

說明：第 7 題至第 12 題，每題 5 分。

7. 已知 $a_n=3.5\times 100^n-35$ ，n 為正整數。若 a_n 所有位數的數字和為 b_n ，請選出正確的選項。

(1) $\log a_{35}<70$

(2) $\log a_{35}-\log a_{34}<2$

(3) $\langle 10^{b_n}\rangle$ 為等比數列

(4) $\left\langle \log\dfrac{a_n+35}{10^{b_n}}\right\rangle$ 為等差數列

(5) $b_6+b_7+b_8+\cdots+b_{13}=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{12}$ 。

8. 已知 a 、b 為實數，A 、B 、C 、P 為坐標平面上四點，O 為原點，且 $\left|\overrightarrow{PA}\right|+\left|\overrightarrow{PB}\right|=\left|\overrightarrow{AB}\right|$ 。

若 $\overrightarrow{OP}=a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}$ ，則 $a\times b$ 的值可能為下列哪些選項？

(1) $-\frac{1}{4}$ (2) 1 (3) $\frac{1}{2}$ (4) $\frac{1}{4}$ (5) $\frac{1}{6}$ 。

9. 關於多項式函數圖形的交點，請選出正確的選項。

(1) $y=x^3$ 與 $y=x^2$ 的圖形恰有 2 個相異交點

(2) $y=x^2+x+3$ 與 $y=2x^2-x+5$ 的圖形沒有交點

(3) $y=x^3$ 與 $y=3x^2-3x+1$ 的圖形沒有交點

(4) $y=x^4+5$ 與 $y=x^2+5$ 的圖形恰有 2 個相異交點

(5) $y=x^4$ 與 $y=2x^2-1$ 的圖形恰有 2 個相異交點。

10. 已知兩圓的方程式為 $x^2+y^2=4$ 與 $x^2+y^2-6x=0$，圓心分別為 O_1 與 O_2，兩相異直線 L、M 皆同時與兩圓相切，其中直線 L 的斜率大於 0，直線 M 的斜率小於 0，兩直線相交於 P 點。請選出正確的選項。

(1) $\overline{O_1O_2}=3$　(2) $\overline{PO_1}=6$　(3)直線 M 的斜率為 $-\frac{1}{3}$

(4)若兩直線 L 與 M 的銳夾角為 α，則 $\cos\alpha=\frac{7}{9}$

(5)若直線 N 通過點 $(3,0)$ 且和直線 M 垂直於點 A，和直線 L 交於點 B，則 $\overline{AB}$ 的長度為 7。

11. 連續投擲一枚公正硬幣（具有正、反兩面），當連續出現三個正面時，停止投擲。假設每一次投擲皆為獨立事件，請選出正確的選項。

(1)某人需要投擲第 4 次的機率為 $\frac{7}{8}$

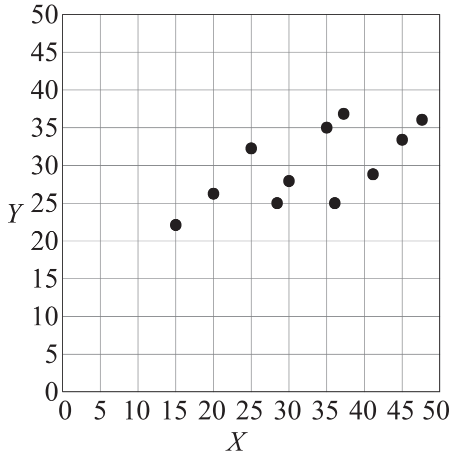
(2)某人投擲 5 次才停止的機率為 $\frac{1}{16}$

(3)已知某人投擲了 4 次還沒停止，則第 5 次停止的機率為 $\frac{2}{13}$

(4)設某人恰投擲 9 次時停止的機率為 p，則 $p=\frac{3}{64}$

(5)承選項(4)，某人投擲 9 次還不能停止的機率為 $1-p$。

12. 某次數學測驗分為選擇題與非選擇題兩部分。右列的散布圖中每個點 (X,Y) 分別代表一位學生於此兩部分的得分，其中 X 表該生選擇題的得分，Y 表該生非選擇題的得分。設 $Z=X+Y$ 為各生在該測驗的總分。共有11位學生的得分數據。試問以下哪些選項是正確的？



(1) X 的中位數大於 Y 的中位數
(2) X 的標準差大於 20
(3) X 的標準差大於 Y 的標準差
(4) Z 的中位數 $=X$ 的中位數 $+Y$ 的中位數
(5)以最小平方法求出 Y 對 X 的迴歸直線，其斜率大於 0 。

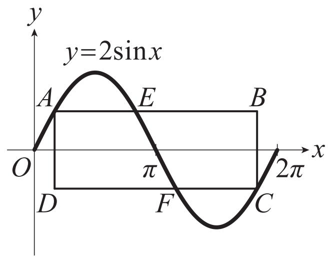
三、選填題（占25分）

說明：第 13 題至第 17 題，每題 5 分。

13. 有一種「多層膜」的鏡片，號稱可以過濾藍光保護眼睛。若將一般的鏡片塗上一層保護膜可使一單位藍光的強度減少 20%，而且當藍光的強度低於 0.01 單位時，這種「多層膜」的鏡片就可以保護眼睛。試問一般的鏡片至少應該塗 ⑬-1 ⑬-2 層的保護膜，才能變成多層膜的鏡片保護眼睛。（無條件進位取至整數位，已知 $\log 2 \approx 0.3010$）

14. 已知 x 是整數，指數函數 $y=9^x-3^{x+1}-15$ 的最小值為 ⑭-1 ⑭-2 ⑭-3 。

15. 如圖，在 $0 \le x \le 2\pi$ 的範圍內，已知 $y=2\sin x$ 的圖形與長方形 $ABCD$ 交於 A、E、F、C 四點，其中 $\overline{AD}=2$。若 $\overline{AB}$ 平行 x 軸，且 $\overline{AE}=\overline{CF}$，則長方形 $ABCD$ 的面積為 $\dfrac{⑮\text{-}1\ ⑮\text{-}2\ \pi}{⑮\text{-}3}$ 。（化為最簡分數）



16. 空間中有一直線 L：$\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-5}{2}=z-4$。已知 A，B 兩點皆在 L 上，其中 A 為 $(3,5,4)$。過 L 外一點 $P(5,-1,-6)$ 作直線垂直 L 於 B 點，則三角形 PAB 的面積為 $⑯\text{-}1\sqrt{⑯\text{-}2\ ⑯\text{-}3}$ 。（化為最簡根式）

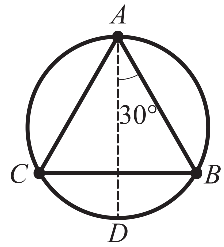
17. 已知三角形三邊長為 a、b、c，所對應的頂點分別為 A、B、C。若三元一次聯立方程式
$$\begin{cases} ax+\left(a^2+ab\right)y+a^2z=3 \\ bx+b^2y+\left(ab+b^2\right)z=4 \\ \left(a+b\right)x+c^2y+c^2z=5 \end{cases}$$
無解，則 $\angle C=\dfrac{⑰\text{-}1}{⑰\text{-}2}\pi$。

第貳部分、混合題或非選擇題（占**15**分）

說明：本部分共有 1 題組，每一子題配分標於題末。限在標示題號作答區內作答。選擇題與「非選擇題作圖部分」使用 2B 鉛筆作答，更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。非選擇題請由左而右橫式書寫，作答時必須寫出計算過程或理由，否則將酌予扣分。

<u>第 18 至 20 題為題組</u>

工匠想在半徑50公尺的圓形池塘上，建造一座三角形的木橋跨越池面。已知 $\overline{AD}$ 為圓形池塘的直徑，工匠先在 $\overline{AD}$ 的右側圓上找一點 B，使得 $\angle DAB = 30°$，然後在 $\overline{AD}$ 的左側圓上找一點 C，並將 A、B、C 三點連接起來，如圖所示，試回答下列問題。



18. B、D的距離為下列哪一選項？（單選題，3分）

(1) 30 公尺　(2) $50\sqrt{3}$ 公尺　(3) 50 公尺　(4) $25\sqrt{3}$ 公尺　(5) 25 公尺。

19. 令 $\angle DAC = \theta$ 且 θ 為銳角，若木橋的總長度（即 $\triangle ABC$ 的周長，單位：公尺）可表示成 $a\sin\theta + b\cos\theta + c$ 的形式，其中 a,b,c 為實數，求 a,b,c 的值。（非選擇題，6 分）

20. 試求出木橋最長的長度，此時 $\angle DAC$ 為何？（非選擇題，6分）

參考公式及可能用到的數值

1. 當兩事件 A 與 B 滿足 $P(A\cap B)=P(A)P(B)$ 時，稱 A 與 B 為獨立事件。
2. 正、餘弦函數的疊合公式：設 a 、 b 是不全為 0 的實數，則
   $a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\theta)$，其中 θ 滿足 $\cos\theta=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ ， $\sin\theta=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 。
3. 二維數據 (X,Y)：$(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n)$ ，
   相關係數 $r_{X,Y}=\dfrac{(x_1-\mu_X)(y_1-\mu_Y)+(x_2-\mu_X)(y_2-\mu_Y)+\cdots+(x_n-\mu_X)(y_n-\mu_Y)}{n\sigma_X\sigma_Y}$ ，
   迴歸直線（最適合直線）方程式 $y-\mu_Y=r_{X,Y}\dfrac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x-\mu_X)$。
4. 餘式定理：多項式 $f(x)$ 除以 $(ax-b)$ 的餘式為 $f\left(\dfrac{b}{a}\right)$。
5. 參考數值：$\sqrt{2}\approx 1.414$ ，$\sqrt{3}\approx 1.732$ ，$\sqrt{5}\approx 2.236$ ，$\sqrt{6}\approx 2.449$ ，$\pi\approx 3.14159$ 。
6. 對數值：$\log 2\approx 0.3010$ ，$\log 3\approx 0.4771$ ，$\log 5\approx 0.6990$ ，$\log 7\approx 0.8451$ 。
7. 設 a ，b 皆為正數，則：
   (1) $\log ab=\log a+\log b$ 。
   (2) $\log\dfrac{b}{a}=\log b-\log a$ 。
   (3) $\log a^n=n\log a$（ n 為實數）。
8. 令 $\triangle ABC$ 的邊長 $\overline{BC}=a$ ，$\overline{AC}=b$ ，$\overline{AB}=c$ ，
   (1) $\triangle ABC$ 的正弦定理：$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$ ，R 為 $\triangle ABC$ 外接圓半徑。
   (2) $\triangle ABC$ 的餘弦定理：$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$ 。
9. $C_n^m=\dfrac{m!}{n!\times(m-n)!}$ ，$P_n^m=\dfrac{m!}{(m-n)!}$ 。
10. 當兩個非零向量 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 的夾角為 θ（ $0^\circ\le\theta\le 180^\circ$ ）時，定義 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 的內積為
    $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=\left|\overrightarrow{a}\right|\left|\overrightarrow{b}\right|\cos\theta$ 。
11. 當 A ，B 為兩事件且 $P(A)>0$ 時，將「在事件 A 發生的條件下，事件 B 發生的機率」稱為條件機率，以符號 $P(B|A)$ 表示，也就是 $P(B|A)=\dfrac{n(A\cap B)}{n(A)}=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$ 。