

龍騰文化

113 學年度學科能力測驗全真模擬試卷

數學 A 考科

請於考試開始鈴響起，在答題卷簽名欄位以正楷簽全名

名師/柳宗佑老師

【教用卷】

—作答注意事項—

考試時間：100分鐘

作答方式：

- 選擇（填）題用 2B 鉛筆在「答題卷」上作答；更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。
- 除題目另有規定外，非選擇題用筆尖較粗之黑色墨水的筆在「答題卷」上作答；更正時，可以使用修正液（帶）。
- 考生須依上述規定劃記或作答，若未依規定而導致答案難以辨識或評閱時，恐將影響考生成績並損及權益。
- 答題卷每人一張，不得要求增補。
- 選填題考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子劃記。

選擇（填）題計分方式：

- 單選題：每題有 n 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項。各題答對者，得該題的分數；答錯、未作答或劃記多於一個選項者，該題以零分計算。
- 多選題：每題有 n 個選項，其中至少有一個是正確的選項。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得該題全部的分數；答錯 k 個選項者，得該題 $\frac{n-2k}{n}$ 的分數；但得分低於零分或所有選項均未作答者，該題以零分計算。
- 選填題每題有 n 個空格，須全部答對才給分，答錯不倒扣。

※試題中參考的附圖均為示意圖，試題後附有參考公式及數值。

祝考試順利

版權所有・侵害者必究

如需試卷檔案，請登入龍騰線上題測→各科 word 資源區

龍騰文化

肯定自己 ▶ 肯定不同

學用卷定價 20 元

贈品禁止轉售

#1



62001N11_ER/A/

第壹部分、選擇（填）題（占85分）

一、單選題（占35分）

說明：第 1 題至第 7 題，每題 5 分。

1. 已知數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足 $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = n^2 - 2n + 4$ ，令數列 $\langle b_n \rangle = \langle a_{n+1} - a_n \rangle$ ，

求 $b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_{20} = ?$

- (1) 30 (2) 32 (3) 34 (4) 36 (5) 38

解題觀念：級數

參考答案：(4)

試題解析： $b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_{20} = (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + (a_4 - a_3) + \dots + (a_{21} - a_{20})$

$$= a_{21} - a_1$$

$$= (S_{21} - S_{20}) - S_1$$

$$= (21^2 - 2 \times 21 + 4) - (20^2 - 2 \times 20 + 4) - (1^2 - 2 \times 1 + 4)$$

$$= 36,$$

故選(4)。

2. 保險公司針對 10 歲以上的貓推出以下一年期寵物保險：「此一年期保費 1 萬元，投保的貓若在投保後一年內生重病（須進行手術）給付 2 萬元（只付一次），死亡給付 5 萬元；否則不予理賠。」保險公司根據過往的統計資料估計，一隻 10 歲以上的貓，在一年內死亡的機率為 5%，生重病（須進行手術）的機率為 20%。請問保險公司對於每份保單的利潤期望值為下列何者？

- (1) 1500 元 (2) 3000 元 (3) 3500 元 (4) 6500 元 (5) 8700 元

解題觀念：期望值

參考答案：(3)

試題解析： $10000 - 20000 \times 0.2 - 50000 \times 0.05 = 3500$ ，故選(3)。

3. 次數不小於 3 的多項式 $f(x)$ 以 $(x-a)(x-b)$ ， $(x-b)(x-c)$ ， $(x-c)(x-a)$ 除之，餘式分別得到 $x-2$ ， $2x+1$ ， $-2x+3$ ，則

- (1) $a > b > c$ (2) $b > a > c$ (3) $c > a > b$ (4) $c > b > a$ (5) $a > c > b$

解題觀念：餘式定理

參考答案：(5)

試題解析：設 $f(x) = (x-a)(x-b)Q_1(x) + x-2 \dots \dots \textcircled{1}$

$$= (x-b)(x-c)Q_2(x) + 2x+1 \dots \dots \textcircled{2}$$

$$= (x-c)(x-a)Q_3(x) - 2x+3 \dots \dots \textcircled{3},$$

$$\text{由 } \textcircled{1} \textcircled{2} \Rightarrow f(b) = b-2 = 2b+1 \Rightarrow b = -3,$$

$$\text{由 } \textcircled{2} \textcircled{3} \Rightarrow f(c) = 2c+1 = -2c+3 \Rightarrow c = \frac{1}{2},$$

$$\text{由 } \textcircled{1} \textcircled{3} \Rightarrow f(a) = a-2 = -2a+3 \Rightarrow a = \frac{5}{3},$$

所以 $a > c > b$ ，故選(5)。

4. 搭乘飛機出國時，旅客須經一電子儀器檢查，如有金屬物品在身上儀器會發出聲音的機率是 98%，但有時即使身上無金屬物品儀器也有可能發出聲音，其機率是 5%，已知一般乘客身上帶有金屬物品的機率是 20%：若某旅客經過儀器檢查時發出聲音，則他身上有金屬物品的機率為？ (1) $\frac{49}{59}$ (2) $\frac{14}{15}$ (3) $\frac{28}{33}$ (4) $\frac{49}{50}$ (5) $\frac{98}{99}$

解題觀念：貝氏定理

參考答案：(1)

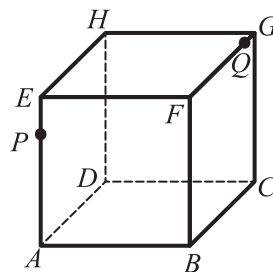
試題解析：



$$P_1 + P_3 = 0.196 + 0.04 \Rightarrow \frac{P_1}{P_1 + P_3} = \frac{0.196}{0.236} = \frac{49}{59}, \text{ 故選(1)。}$$

5. 右圖為一棱長為 8 的正立方體，若 P 在 \overline{AE} 上且 $\overline{AP} : \overline{PE} = 3 : 1$ ， Q 在 \overline{FG} 上且 $\overline{FQ} : \overline{QG} = 7 : 1$ ， R 在 \overline{BF} 上，則當 R 點坐標為哪個選項時，可使 $\triangle PQR$ 的面積有最小值？

- (1) $(8,8,8)$ (2) $\left(8,8,\frac{806}{113}\right)$ (3) $\left(8,8,\frac{759}{113}\right)$ (4) $\left(8,8,\frac{106}{15}\right)$ (5) $\left(8,8,\frac{96}{15}\right)$



解題觀念：直線和直線的關係

參考答案：(2)

試題解析：坐標化，令 D 為原點、 \overrightarrow{DA} 為 x 軸正向， \overrightarrow{DC} 為 y 軸正向，

\overrightarrow{DH} 為 z 軸正向，則 $A(8,0,0)$ 、 $E(8,0,8)$ 、 $F(8,8,8)$ 、 $G(0,8,8)$ ，

由 P 在 \overline{AE} 上且 $\overline{AP} : \overline{PE} = 3 : 1$ ，可知： $P(8,0,6)$ ，

由 Q 在 \overline{FG} 上且 $\overline{FQ} : \overline{QG} = 7 : 1$ ，可知： $Q(1,8,8)$ ，

$$\text{則 } \overrightarrow{PQ} : \frac{x-8}{7} = \frac{y-0}{-8} = \frac{z-6}{-2} \text{ 且 } \overrightarrow{BF} : \begin{cases} x=8 \\ y=8 \end{cases},$$

取 \overrightarrow{PQ} 上一點 $S(8+7t, -8t, 6-2t)$ ， \overrightarrow{BF} 上一點 $R(8,8,s)$ ，

因為 \overrightarrow{PQ} 與 \overrightarrow{BF} 的關係為歪斜，

所以當 \overline{RS} 為 \overrightarrow{PQ} 與 \overrightarrow{BF} 的公垂線段時， $\triangle PQR$ 的面積有最小值，

$$\overrightarrow{RS} = (7t, -8t-8, 6-2t-s), \begin{cases} \overrightarrow{RS} \perp \overrightarrow{QP} \\ \overrightarrow{SR} \perp \overrightarrow{BF} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (7t, -8t-8, 6-2t-s) \cdot (7, -8, -2) = 0 \\ (7t, -8t-8, 6-2t-s) \cdot (0, 0, 8) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 117t + 2s = -52 \\ 2t + s = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = -\frac{64}{113} \\ s = \frac{806}{113} \end{cases}, \text{ 則 } R\left(8,8,\frac{806}{113}\right), \text{ 故選(2)。}$$

6. 設矩陣 $M(a, x) = \begin{bmatrix} a+3 & x-a \\ x+3 & -2 \end{bmatrix}$ ，其中 a 為整數， $M^{-1}(a, x)$ 為 $M(a, x)$ 的反矩陣，若對於任意的實數 x ， $M^{-1}(a, x)$ 恆存在，則這樣的 a 值共有幾個？
- (1) 0 (2) 2 (3) 4 (4) 7 (5) 無限多個

解題觀念：二階反方陣

參考答案：(4)

試題解析：對任意實數 x ，矩陣 M 恆有反矩陣 M^{-1} 存在，即行列式值不等於零

$$\Rightarrow -2(a+3) - (x-a)(x+3) \neq 0, \text{ 對任意實數 } x \text{ 均成立}$$

$$\Rightarrow -2(a+3) - (x-a)(x+3) = 0, \text{ 無實數解,}$$

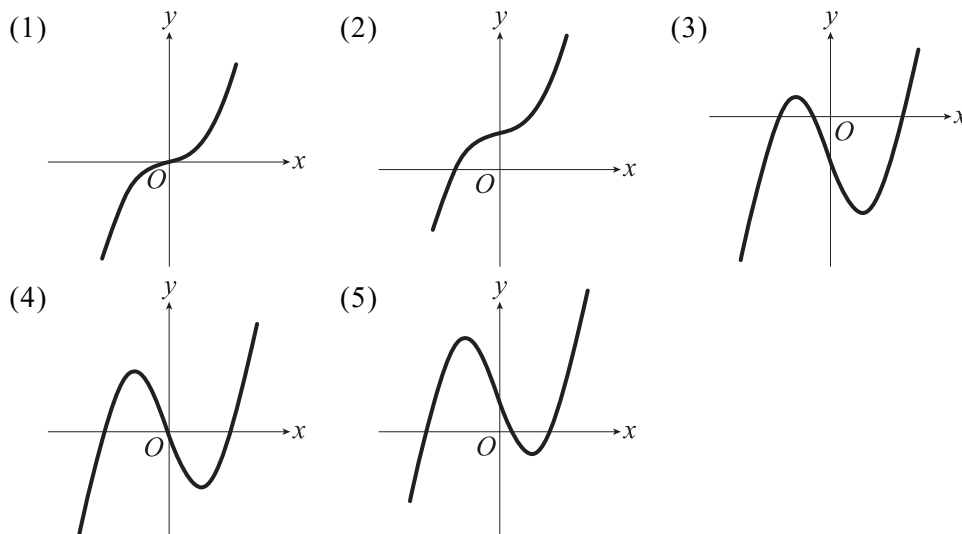
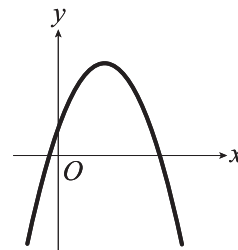
$$\text{展開得 } x^2 + (3-a)x + (6-a) = 0, \text{ 無實數解,}$$

$$\text{判別式 } (3-a)^2 - 4(6-a) < 0 \Rightarrow a^2 - 2a - 15 < 0 \Rightarrow (a-5)(a+3) < 0$$

$$\Rightarrow -3 < a < 5 \Rightarrow a = -2 \sim 4,$$

共 7 個，故選(4)。

7. 騰騰在練習畫 $y = ax^2 + bx + c$ 的圖形時，不小心把係數 a 與 b 的「正負符號」看錯，在計算、列式與繪圖都沒有出錯的情況下，畫出右圖。試問下列哪一個圖形最有可能是三次函數 $y = ax^3 + bx + c$ 的圖形？



解題觀念：三次函數的圖形

參考答案：(5)

試題解析：由騰騰畫的圖形可知：

①拋物線開口向下，則原二次函數的係數 a 應為正數。

②拋物線對稱軸 ($x = -\frac{b}{2a}$) 在 y 軸右側，則原二次函數的係數 b 應為負數。

③拋物線與 y 軸交點在 x 軸上方，則原二次函數的常數項 c 應為正數。

則題目所求之三次函數 $y = ax^3 + bx + c$ 中，因為 $a > 0$ 、對稱中心 $(-\frac{0}{3a}, c)$ 在 y 軸

正向、 $ab < 0$ 可知圖形類型應為 ，故選(5)。

二、多選題（占25分）

說明：第 8 題至第 12 題，每題 5 分。

8. 數線上有 $A(a)$ 、 $B(b)$ 、 $P(x)$ 三點，已知 $a < b$ 且 $\overline{PA} : \overline{PB} = 5 : 3$ ，試問下列哪些選項正確？

(1) $5|x-a|=3|x-b|$ (2) P 必在 \overline{AB} 上 (3) 若 $a=8$ 且 $x=13$ ，則 $b=16$

(4) 若 $x=12$ 且 $b=24$ ，則 $a=-8$ (5) $x \geq \frac{a+b}{2}$

解題觀念：數線上的分點公式

參考答案：(4)(5)

試題解析：(1) 由 $\overline{PA} : \overline{PB} = 5 : 3$ 得 $|x-a| : |x-b| = 5 : 3 \Rightarrow 3|x-a| = 5|x-b|$ ，故錯誤。

(2) 若 P 在 \overline{AB} 上，則 $x = \frac{3}{8}a + \frac{5}{8}b$ ，若 P 在 \overline{AB} 外，則 $x = \frac{5}{2}b - \frac{3}{2}a$ ，故錯誤。

(3) 由(2)可算得 $b=16$ 或 10 ，故錯誤。

(4) 由(2)可算得 $a=-8$ ，故正確。

(5) 若 P 在 \overline{AB} 上，則 $x = \frac{3a+5b}{8} > \frac{4a+4b}{8} = \frac{a+b}{2}$ ，

若 P 在 \overline{AB} 外，則 $x = \frac{5}{2}b - \frac{3}{2}a > b > \frac{a+b}{2}$ ，故正確。

故選(4)(5)。

9. 在平面坐標上，已知 $\vec{u} = (1, -1)$ ， $\vec{v} = (1, 2) + k(4, 3)$ ，其中 $0 \leq k \leq 5$ ，下列哪些選項正確？

(1) 找得到 k 值，滿足 $\vec{u} // \vec{v}$ (2) 找得到 k 值，滿足 $\vec{u} \perp \vec{v}$

(3) 找得到 k 值，滿足內積 $\vec{u} \cdot \vec{v} = 4$ (4) 找得到 k 值，滿足內積 $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3\sqrt{3}$

(5) 找得到 k 值，滿足 \vec{v} 對 \vec{u} 的正射影為 $(3, -3)$

解題觀念：向量的內積

參考答案：(2)(3)

試題解析： $\vec{v} = (1, 2) + k(4, 3) = (4k+1, 3k+2)$ 。

(1) $\frac{4k+1}{1} = \frac{3k+2}{-1} \Rightarrow k = -\frac{3}{7}$ ，不在 k 範圍內，故錯誤。

(2) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (4k+1) - (3k+2) = k-1 = 0 \Rightarrow k=1$ 滿足 k 範圍，故正確。

(3) $\vec{u} \cdot \vec{v} = k-1 = 4 \Rightarrow k=5$ 滿足 k 範圍，故正確。

(4) $\vec{u} \cdot \vec{v} = k-1 = 3\sqrt{3} \Rightarrow k = 3\sqrt{3} + 1 > 5$ ，不在範圍內，故錯誤。

(5) \vec{v} 在 \vec{u} 上的正射影 = $\frac{(4k+1) \cdot 1 + (3k+2) \cdot (-1)}{1^2 + (-1)^2} \cdot (1, -1) = \frac{k-1}{2} \cdot (1, -1) = (3, -3)$

$\Rightarrow k=7 > 5$ ，不在範圍內，故錯誤。

故選(2)(3)。

10. 分科測驗成績公布後，柳老師想了解班上同學有考分科測驗數學甲的成績與學測數學 A 成績的相關性，因此調查了班上幾位同學的學測數學 A 成績與分科測驗數學甲成績，如下表。請選出正確的選項。

學測數學 A x (級分)	9	11	12	13	15
分科數學甲 y (級分)	42	40	44	43	46

- (1) 五位同學的學測數學 A 成績平均為 12 級分
 (2) 五位同學的分科測驗數學甲成績平均為 43 級分
 (3) x, y 的相關係數 r 為 $\frac{3}{5}$
 (4) y 對 x 的迴歸直線方程式為 $y = \frac{3}{5}x + \frac{179}{5}$
 (5) 柳老師的班上有另一位同學也有考分科測驗的數學甲，但無論怎麼問他都不願意告知成績，已知他的學測數學 A 成績為 8 級分，則由其他同學的成績表現來推估，這位不願告知成績的同學他的數學甲成績應該為 40 級分

解題觀念：最小平方方法與迴歸直線

參考答案：(1)(2)(5)

試題解析：(1) $\mu_x = \frac{9+11+12+13+15}{5} = 12$ ，故正確。

(2) $\mu_y = \frac{42+40+44+43+46}{5} = 43$ ，故正確。

(3)

$x - \mu_x$	-3	-1	0	1	3
$y - \mu_y$	-1	-3	1	0	3
$(x - \mu_x)^2$	9	1	0	1	9
$(y - \mu_y)^2$	1	9	1	0	9
$(x - \mu_x)(y - \mu_y)$	3	3	0	0	9

$r = \frac{3+3+0+0+9}{\sqrt{9+1+0+1+9}\sqrt{1+9+1+0+9}} = \frac{3}{4}$ ，故錯誤。

(4) $m = \frac{3+3+0+0+9}{9+1+0+1+9} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$ ，

$L: y - 43 = \frac{3}{4}(x - 12) \Rightarrow y = \frac{3}{4}x + 34$ ，故錯誤。

(5) 將 $x = 8$ 代入迴歸直線方程式得： $y = \frac{3}{4} \times 8 + 34 = 40$ ，

可推估成績為 40 級分，故正確。

故選(1)(2)(5)。

11. 已知兩函數： $f(x) = \sin x + \cos x$ ， $g(x) = \sin x \cos x$ ，其中 $x \in R$ ，若 $h(x) = f(x) + g(x)$ ，則下列哪些選項是正確的？

- (1) $f(x)$ 的週期為 π (2) $g(x)$ 的週期為 π (3) $f(x)$ 的最小值為 $-\sqrt{2}$
(4) $g(x)$ 的最小值為 -1 (5) $h(x)$ 的最小值為 $-\sqrt{2}-1$

解題觀念：正弦與餘弦函數的疊合

參考答案：(2)(3)

試題解析：(1) $f(x) = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ ， $f(x)$ 的週期為 2π ，故錯誤。

(2) $g(x) = \frac{1}{2} \sin 2x \Rightarrow g(x)$ 的週期為 π ，故正確。

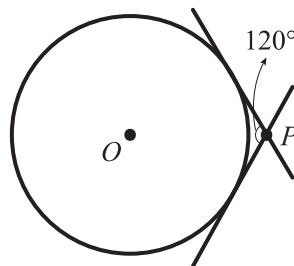
(3) $f(x) = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow -\sqrt{2} \leq f(x) \leq \sqrt{2}$ ，故正確。

(4) $g(x) = \frac{1}{2} \sin 2x \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq g(x) \leq \frac{1}{2}$ ，故錯誤。

(5) 因為 $[f(x)]^2 = 1 + 2 \sin x \cos x$ ，所以 $g(x) = \sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x = \frac{[f(x)]^2 - 1}{2}$
 $\Rightarrow h(x) = f(x) + \frac{[f(x)]^2 - 1}{2} = \frac{1}{2} [f(x) + 1]^2 - 1$ ，此時 $-1 \leq h(x) \leq \sqrt{2} + \frac{1}{2}$ ，故錯誤。

故選(2)(3)。

12. 如圖，過圓 $C: x^2 + y^2 = 3$ 外一點 P ，可以向圓 C 作出兩條鈍角為 120° 的切線，令原點為 O ， P 對圓 C 作兩切線的切點為 Q 、 R ，則下列敘述中，正確選項為何？



- (1) P 點坐標可能是 $(-2, 0)$
(2) 依題意過 P 點向圓 C 作出之切線段長必定為 $\sqrt{3}$
(3) 符合題意之 P 點都在圓 $x^2 + y^2 = 4$ 上
(4) 符合題意之 P 點中，與直線 $L: 3x + 4y = 24$ 之最近距離為 $\frac{4}{5}$
(5) 四邊形 $OQPR$ 的面積為 $\sqrt{3}$

解題觀念：圓的切線

參考答案：(1)(3)(5)

試題解析：(1) $\triangle OPQ$ 為 $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ 的直角三角形且 $\overline{OQ} = \sqrt{3}$ ，可推得 $\overline{OP} = 2$ ，
所以 $(-2, 0)$ 可為 P 點坐標，故正確。

(2) 承(1)，切線段長 $= \overline{PQ} = 1$ ，故錯誤。

(3) 承(1)，因為動點 P 滿足 $\overline{OP} = 2$ ，所以 P 的軌跡為以原點為圓心、半徑為 2 的圓，即所有動點 P 皆在圓 $x^2 + y^2 = 4$ 上，故正確。

$$(4) \text{ 因為原點到直線 } L \text{ 的距離 } d(O, L) = \frac{|-24|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{24}{5},$$

所以動點 P 到直線 L 的最近距離 $= d(O, L) - 2 = \frac{14}{5}$ ，故錯誤。

$$(5) \text{ 四邊形 } OQPR \text{ 的面積} = 2 \times \triangle OPQ \text{ 面積} = 2 \times \frac{1}{2} \times 1 \times \sqrt{3} = \sqrt{3}，\text{故正確。}$$

故選(1)(3)(5)。

三、選填題（占25分）

說明：第 13 題至第 17 題，每題 5 分。

13. 某一班共有 40 人，問卷調查家裡有養貓或狗的人數，從統計資料顯示此班有 34 人有養貓，18 人有養狗。已知同時有養貓與狗的有 A 人；有養貓但沒有養狗的有 B 人；沒有養貓但有養狗的有 C 人，若 A, B, C 的最大值分別為 x, y, z ，求序組

$$(x, y, z) = \underline{\left(\textcircled{13-1} \textcircled{13-2}, \textcircled{13-3} \textcircled{13-4}, \textcircled{13-5} \right)}。$$

解題觀念：計數原理

參考答案：(18, 22, 6)

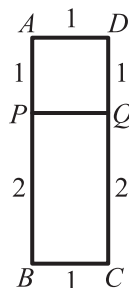
試題解析： $18 + 34 - 40 \leq A \leq 18 \Rightarrow 12 \leq A \leq 18$ ，

$$16 \leq B = 34 - A \leq 22、0 \leq C = 18 - A \leq 6，$$

$$\text{故 } x = 18，y = 22，z = 6 \Rightarrow (x, y, z) = (18, 22, 6)。$$

14. 如圖，有一長寬分別為 3 和 1 的長方形 $ABCD$ ，現在沿著 \overline{PQ} 對折使得平面

$$APQD \text{ 與平面 } PBCQ \text{ 的二面角為 } 60^\circ，\text{則 } \cos \angle AQC = \frac{\sqrt{\textcircled{14-1}}}{\textcircled{14-2}}。$$

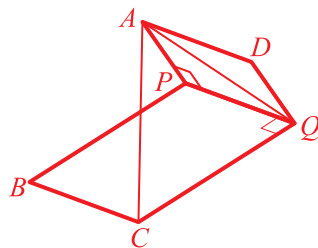


解題觀念：平面和平面的關係

參考答案： $\frac{\sqrt{2}}{4}$

試題解析： $\overline{AQ} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ ，

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{AC}|^2 &= |\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QC}|^2 = |\overrightarrow{AP}|^2 + |\overrightarrow{PQ}|^2 + |\overrightarrow{QC}|^2 \\ &\quad + 2 \cdot (\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{PQ}) + 2 \cdot (\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{QC}) + 2 \cdot (\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{QC}) \\ &= 1^2 + 1^2 + 2^2 + 2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \cos 120^\circ = 4 \\ \Rightarrow \overline{AC} &= 2 \Rightarrow \cos \angle AQC = \frac{(\sqrt{2})^2 + 2^2 - 2^2}{2 \cdot \sqrt{2} \cdot 2} = \frac{\sqrt{2}}{4}。 \end{aligned}$$



15. 若觀察電腦硬碟的容量會發現，硬碟外包裝上標榜的容量比在電腦中我們所看到的實際容量來得大，這是因為在外包裝的容量上製造商採用十進位計算方式，與電腦系統用的二進位不同，所以才會造成這樣的誤差。已知在電腦系統中最小的單位是位元組(Byte)，每 1024Byte 為 1KiB，每 1024KB 為 1MiB，每 1024MB 為 1GiB；而硬碟廠商使用一般常用的十進位表示法，每 1000Byte 為 1KB，每 1000KB 為 1MB，每 1000MB 為 1GB。以 120GB 的硬碟為例，硬碟廠商容量計算方法：

$$120\text{GB} = 120000\text{MB} = 120000000\text{KB} = 120000000000 \text{ 位元組}$$

換算成電腦系統計算方法：

$$120000000000 \text{ 位元組} / 1024 = 117187500\text{KiB} / 1024 \approx 114440.9\text{MiB} / 1024 \approx 111.8\text{GiB}$$

現有一支外包裝上標註 256GB 的隨身碟，它的實際容量約為 $\frac{(15-1)(15-2)(15-3)}{(15-1)(15-2)(15-3)}$ GiB

(四捨五入至整數位) ($\log 4.09 \approx 0.612$ 、 $\log 4.19 \approx 0.622$ 、 $\log 4.29 \approx 0.632$ 、 $\log 4.39 \approx 0.642$)

解題觀念：常用對數

參考答案：239

試題解析：256GB = 256 × 1000³ 位元組 = 256000000000 位元組，

$$\begin{aligned} 256000000000 \div 1024^3 &= (2^8 \times 10^9) \div 2^{30} = 10^9 \div 2^{22} \approx 10^9 \div (10^{0.301})^{22} \\ &= 10^9 \div 10^{6.622} \approx 10^3 \div 4.19 \approx 238.66 \approx 239, \end{aligned}$$

故廠商標榜 256GB 的隨身碟實際容量約為 239GiB。

16. 遊戲「猜數字」的玩法為：一個人設定一組四個號碼皆相異的數字為謎底，給另一個人猜。對方每猜一組數字，出題者要依據對方的答案給提示，提示以「 $xAyB$ 」呈現，其中 x 表數字正確且位置正確的個數， y 表數字正確但位置錯誤的個數，對方再依據出題者給的提示做下一次的回答。小龍與小騰玩猜數字的遊戲，一開始由小龍出題，當小騰回答「0827」時，小龍回覆「0A2B」，則小騰從所有可能的答案中，一次就猜到正確答案的機率為

$$\frac{(16-1)}{(16-2)(16-3)(16-4)(16-5)}。$$

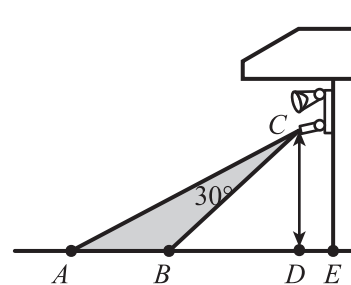
解題觀念：古典機率的定義

參考答案： $\frac{1}{1260}$

試題解析：先討論「2B」為何並將其分別排至原本以外的位子，再另外選兩個數字作排列，則在所有可能的答案中，

$$\text{一次就猜對的機率為 } \frac{1}{C_2^4 \times C_2^6 \times (4! - 2 \times 3! + 2!)} = \frac{1}{1260}。$$

17. 龍龍在他家門口安裝了感應燈，感應燈位於 D 點正上方的 C 點處。感應區域為三角形 ABC 的內部及邊界(如圖陰影處)。已知 A 到 B 的距離是 4 公尺， B 到 C 的距離是 $4\sqrt{2}$ 公尺， $\angle ACB = 30^\circ$ 。地面上的 B 點距離門口處的 E 點 5 公尺。龍龍身高 175 公分，由門口處的 E 點沿著直線 AE 走向 B 點，則龍龍走了 (17-1) . (17-2) (17-3) 公尺後感應燈就會發亮。(四捨五入至



小數點後第二位， $\tan 75^\circ = 2 + \sqrt{3}$)

解題觀念：正弦定理

參考答案：4.53

試題解析：由正弦定理得： $\frac{4\sqrt{2}}{\sin \angle CAB} = \frac{4}{\sin 30^\circ}$ ，

$$\text{解得 } \sin \angle CAB = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \angle CAB = 45^\circ,$$

$$\tan \angle CBD = \tan(30^\circ + 45^\circ) = \tan 75^\circ = 2 + \sqrt{3} \approx 3.732,$$

$$\text{又 } \frac{1.75}{\tan \angle CBD} \approx \frac{1.75}{3.732} \approx 0.469,$$

故所求為 $5 - 0.469 = 4.531 \approx 4.53$ 。

第貳部分、混合題或非選擇題（占15分）

說明：本部分共有 1 題組，每一子題配分標於題末。限在標示題號作答區內作答。選擇題與「非選擇題作圖部分」使用 2B 鉛筆作答，更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。非選擇題請由左而右橫式書寫，作答時必須寫出計算過程或理由，否則將酌予扣分。

18-20 題為題組

新聞報導：「某公司長期在深夜時於某河川排放有毒物質，造成河川周圍土地嚴重汙染，經專家指出，此有毒物質每 3 年僅能衰減 10%，須經過非常長的時間才能讓土地回復健康。」

18. 10 年後，河川周圍土地的有毒物質含量比例可表示為下列哪個選項？（單選題，3 分）

- (1) $\frac{2}{3}$ (2) 66% (3) $0.9^{\frac{2}{3}}$ (4) $0.9^{\frac{10}{3}}$ (5) 0.9^{10}

解題觀念：有理數指數與指數律

參考答案：(4)

試題解析：每 3 年有毒物質剩 $1 - 10\% = 90\%$ ，

$$10 = 3 \times \frac{10}{3} \text{ 年後，有毒物質剩 } 0.9^{\frac{10}{3}}, \text{ 故選(4)。}$$

19. 假設目前土地中此有毒物質的含量為 A ，經 x 年後此有毒物質的含量以指數函數 $Q(x)$ 表示，求指數函數 $Q(x)$ （非選擇題，6 分）

解題觀念：有理數指數與指數律

參考答案： $A\left(\frac{9}{10}\right)^{\frac{x}{3}}$

試題解析：有毒物質原有： A ，

$$3 \text{ 年後： } A(1-10\%)^1，$$

$$6 \text{ 年後： } A(1-10\%)^2，$$

\vdots
 \vdots

$$x = 3 \times \frac{x}{3} \text{ 年後： } A(1-10\%)^{\frac{x}{3}}，$$

$$\text{故 } Q(x) = A(1-10\%)^{\frac{x}{3}} = A\left(\frac{9}{10}\right)^{\frac{x}{3}}。$$

評分標準：①分別條列出 3 年後、6 年後、…的有毒物質含量，得 3 分。

②正確表示出 $Q(x) = A\left(\frac{9}{10}\right)^{\frac{x}{3}}$ ，得 3 分。

20. 經植物學專家勘查後指出：「河川周圍土地必須在有毒物質含量衰減至目前的 10% 時，才有機會使植物得以生存」則至少要經過多少年（取整數），河川周圍的土地才能使植物得以生存？（非選擇題，6 分）

解題觀念：對數律與換底公式

參考答案：66 年

試題解析： $A(0.9)^{\frac{x}{3}} \leq \frac{1}{10}A \rightarrow \left(\frac{9}{10}\right)^{\frac{x}{3}} \leq \frac{1}{10} \dots\dots$ ，

$$\text{兩邊同取 } \log \Rightarrow \frac{x}{3} \log\left(\frac{9}{10}\right) \leq -1$$

$$\Rightarrow \frac{x}{3}(0.9542-1) \leq -1 \Rightarrow x \geq 65.5，$$

故至少要經過 66 年，河川周圍的土地才能使植物得以生存。

評分標準：①列出不等式 $A(0.9)^{\frac{x}{3}} \leq \frac{1}{10}A$ ，得 2 分。

②解得 $x \geq 65.5$ ，得 3 分。

③正確回答至少要經過 66 年，得 1 分。

參考公式及可能用到的數值

1. 首項為 a ，公差為 d 的等差數列前 n 項之和 $S = \frac{n(2a + (n-1)d)}{2}$ ，

首項為 a ，公比為 r ($r \neq 1$) 的等比數列前 n 項之和 $S = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$ 。

2. 一維數據 $X: x_1, x_2, \dots, x_n$ ，算術平均數 $\mu_x = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$ ，

$$\begin{aligned}\text{標準差 } \sigma_x &= \sqrt{\frac{1}{n}[(x_1 - \mu_x)^2 + (x_2 - \mu_x)^2 + \dots + (x_n - \mu_x)^2]} \\ &= \sqrt{\frac{1}{n}[(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) - n\mu_x^2]} \text{。}\end{aligned}$$

3. 二維數據 $(X, Y): (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ ，

$$\text{相關係數 } r_{XY} = \frac{(x_1 - \mu_x)(y_1 - \mu_y) + (x_2 - \mu_x)(y_2 - \mu_y) + \dots + (x_n - \mu_x)(y_n - \mu_y)}{n\sigma_x\sigma_y} \text{，}$$

最適合直線（迴歸直線）方程式為 $y - \mu_y = r_{XY} \frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \mu_x)$ 。

4. $\triangle ABC$ 的正弦定理： $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ (R 為外接圓半徑)，

$\triangle ABC$ 的餘弦定理： $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$ 。

5. 三角比的和角公式：

$$\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B \text{，}$$

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B \text{，}$$

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} \text{。}$$

6. 正、餘弦函數的疊合公式：設 a 、 b 是不全為 0 的實數，則

$$a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \theta) \text{，其中 } \theta \text{ 滿足 } \cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{，} \sin \theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{。}$$

7. 參考數值： $\sqrt{2} \approx 1.414$ ， $\sqrt{3} \approx 1.732$ ， $\sqrt{5} \approx 2.236$ ， $\sqrt{7} \approx 2.646$ ， $\pi \approx 3.142$ 。

8. 對數值： $\log 2 \approx 0.3010$ ， $\log 3 \approx 0.4771$ ， $\log 5 \approx 0.6990$ ， $\log 7 \approx 0.8451$ 。

9. 角錐體積 $= \frac{1}{3} \times \text{底面積} \times \text{高}$ 。