龍騰文化

112 學年度學科能力測驗全真模擬試卷

數學 A 考科　解答卷

■答案

第壹部分：

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13-1	13-2
5	4	5	5	4	1	234	2345	2345	135	5	234	1	6
13-3	13-4	13-5	13-6	13-7	13-8	13-9	13-10	13-11	13-12	14-1	14-2	14-3	14-4
0	0	0	0	3	4	0	5	0	3	5	0	1	5
14-5	14-6	14-7	15-1	16-1	16-2	16-3	17-1	17-2	17-3				
6	2	5	5	2	1	2	3	9	0				

第貳部分：

18.	19.	20.
5	432	$(13,3)$

■解析

1. 〔小組賽階段〕

每個小組有 4 個球隊，每個球隊之間都會互相對戰一次，所以每個小組會進行 $\frac{4\times 3}{2}=6$ 場比賽，總共有 8 個小組，故小組賽共有 $8\times 6=48$ 場比賽。

〔淘汰賽階段〕

一共有 $8\times 2=16$ 個球隊進入淘汰賽，在 4 強出爐前一共會淘汰 12 支球隊，

所以會有 12 場比賽，4 強出爐後會進行 2 場 4 強賽、1 場季軍戰、1 場冠軍戰，

淘汰賽共有 $12+2+1+1=16$ 場比賽。

最後得 2022 世界盃足球賽的會內賽總共會有 $48+16=64$ 場球賽。故選(5)。

2. 假設兩個恆星的光度值分別為 a 、 b ，則 $\log a=5.3$ 且 $\log b=2.3$ ，可得 $\log a-\log b=5.3-2.3=3$

$\Rightarrow \log\frac{a}{b}=3\Rightarrow \frac{a}{b}=10^3=1000$ 。故選(4)。

3. 由圖可知：

B 、 C 二組數據的相關係數皆為 1，

A 、 D 二組數據的相關係數皆為 0，

E 數據的相關係數為 -1 ，

則 $r_B=r_C>r_A=r_D>r_E$ 。

故選(5)。

4. $\log_3 a_3+\log_3 a_7=4$

$\Rightarrow \log_3 a_3a_7=4\Rightarrow a_3a_7=81\Rightarrow a_5=9$ ，

$\log_2 a_4+\log_2 a_8=6$

$\Rightarrow \log_2 a_4a_8=6\Rightarrow a_4a_8=64\Rightarrow a_6=8$ ，

所以 $r=\frac{a_6}{a_5}=\frac{8}{9}$ 。

故選(5)。

5. 令這 1000 位使用者點讚的比例為 P ，

已知這 1000 位使用者中是男性的機率為 $\frac{620}{1000}=\frac{31}{50}$ ，

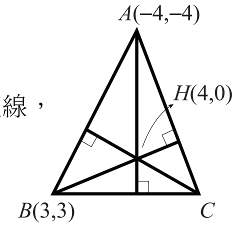
且點讚與否與使用者性別為獨立事件，

所以 $\frac{186}{1000}=\frac{31}{50}\times P\Rightarrow P=\frac{186}{1000}\times\frac{50}{31}\Rightarrow P=\frac{3}{10}$ ，

則這 1000 位使用者中是女性且點讚的人數為 $380\times P=380\times 0.3=114$ （位）。

故選(4)。

6. $\overleftrightarrow{AH}: x-2y=4$，



則 $\overleftrightarrow{BC}$ 為垂直 $\overleftrightarrow{AH}$ 且通過 B 點的直線，

其方程式為：$2x+y=9$，

$\overleftrightarrow{BH}: 3x+y=12$，

則 $\overleftrightarrow{AC}$ 為垂直 $\overleftrightarrow{BH}$ 且通過 A 點的直線，

其方程式為：$x-3y=8$，

解聯立方程組：$\begin{cases}2x+y=9\\x-3y=8\end{cases}$，得 $(x,y)=(5,-1)$，

所以 C 點坐標為 $(5,-1)$。

故選(1)。

7. (1) ╳：$\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$ 為伸縮矩陣，伸縮倍數不為 1，

無法伸縮回原本的位置。

(2) ○：$\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos 60^\circ & -\sin 60^\circ\\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ\end{bmatrix}$ 為一逆時針方向旋轉 60° 的旋轉矩陣，重複旋轉 6 次即會變換到原位置。

(3) ○：$\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos 210^\circ & -\sin 210^\circ\\ \sin 210^\circ & \cos 210^\circ\end{bmatrix}$ 為一逆時針方向旋轉 210° 的旋轉矩陣，重複旋轉 12 次即會變換到原位置。

(4) ○：$\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos 120^\circ & \sin 120^\circ\\ \sin 120^\circ & -\cos 120^\circ\end{bmatrix}$ 為對直線 $y=\tan 60^\circ x$ 的直線鏡射的鏡射矩陣，重複鏡射 2 次即會變換到原位置。

(5) ╳：$\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2}\\0 & 1\end{bmatrix}$ 為一推移矩陣，無法將點推移回原本的位置。

故選(2)(3)(4)。

8. (1) ╳：令三邊長分別為 x、$x+1$、$x+2$ 英吋，

可得 $\begin{cases}x>0\\x+(x+1)>x+2\\x^2+(x+1)^2<(x+2)^2\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}x>0\\x>1\\-1<x<3\end{cases}\Rightarrow 1<x<3\Rightarrow x=2$，

則此三角形的三邊長分別為 2、3、4 英吋。

(2) ○：$\cos A=\dfrac{2^2+3^2-4^2}{2\times 2\times 3}=-\dfrac{1}{4}$。

(3) ○：$\cos B=\dfrac{3^2+4^2-2^2}{2\times 3\times 4}=\dfrac{7}{8}$。

(4) ○：$\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\sqrt{1-\dfrac{49}{64}}=\dfrac{\sqrt{15}}{8}$，

三角形面積為 $\dfrac{1}{2}\times 4\times 3\times\dfrac{\sqrt{15}}{8}=\dfrac{3\sqrt{15}}{4}$（平方英吋）。

(5) ○：此圓形旗幟的最小半徑即為此三角形的外接圓半徑，假設此半徑為 R，

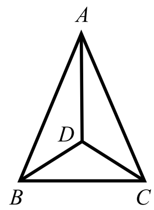
則 $R=\dfrac{2\times 3\times 4}{4\times\dfrac{3\sqrt{15}}{4}}=\dfrac{8}{15}\sqrt{15}$（英吋）。

故選(2)(3)(4)(5)。

9. $\triangle ABD$、$\triangle BCD$、$\triangle ACD$ 的面積相等，

故 D 可能為下列兩種情況（設 O 為原點）：

〔情況 1〕



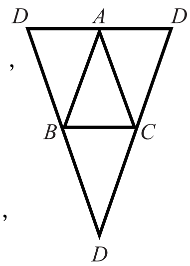
D 為 $\triangle ABC$ 的重心，

故 $\overrightarrow{OD}=\dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)$

$=\left(\dfrac{2+3+4}{3},\dfrac{2+0+1}{3}\right)=(3,1)$，

則 D 的坐標可能為 $(3,1)$。

〔情況 2〕



A、B、C、D 恰形成一平行四邊形，

若此平行四邊形為 $ABDC$，

則 $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

$=(2,2)+(1,-2)+(2,-1)=(5,-1)$，

若此平行四邊形為 $ADBC$，

則 $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}=(4,1)+(-1,-1)+(-2,1)=(1,1)$，

若此平行四邊形為 $ADCB$，

則 $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}=(3,0)+(1,1)+(-1,2)=(3,3)$，

則 D 的坐標可能為 $(5,-1)$、$(1,1)$、$(3,3)$。

故選(2)(3)(4)(5)。

10. 已知函數的廣域特徵圖形近似於 $y=x^3$，可知 $a=1$，

則可假設此三次函數 $f(x)=(x-2)^3+p(x-2)+1$，

將 $(0,-9)$ 帶入可得 $-8-2p+1=-9\Rightarrow p=1$，

得此三次函數

$f(x)=(x-2)^3+(x-2)+1=x^3-6x^2+13x-9$。

(1) ○：$a=1$。

(2) ╳：$b=-6$。

(3) ○：$f(1)=1^3-6\times1^2+13\times1-9=-1$。

(4) ╳：$f(x)=x^3-6x^2+13x-9$

$$=(x+2)^3-12(x+2)^2+49(x+2)-67$$，

故在 $x=-2$ 附近的局部特徵近似於直線 $49(x+2)-67$。

(5) ○：因為函數值範圍包含負無限大到無限大，故必有一實數 x_0 滿足 $f(x_0)=2022$。

故選(1)(3)(5)。

11. 設 $O(0,0,0)$ 且 $\overrightarrow{OP}=(1,0,0)$、$\overrightarrow{CA}=(0,1,0)$、$\overrightarrow{OJ}=(0,0,1)$，則可知 $A(0,1,2)$、$M(2,0,1)$、$N(3,0,1)$、$B(1,1,2)$、$I(1,1,1)$、$F(3,1,2)$。

(1) ○：$\overline{AM}=\sqrt{2^2+(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{6}$。

(2) ○：已知 $\overline{AM}=\sqrt{6}$，$\overline{OM}=\sqrt{2^2+0^2+1^2}=\sqrt{5}=\overline{OA}$，

則 $\cos\angle OAM=\dfrac{\overline{AM}^2+\overline{AO}^2-\overline{OM}^2}{2\times\overline{AM}\times\overline{AO}}$

$$=\frac{6+5-5}{2\times\sqrt{6}\times\sqrt{5}}=\frac{3}{\sqrt{30}}$$。

(3) ○：直線 AJ 與直線 LN 不平行也不相交，所以直線 AJ 與直線 LN 為歪斜線。

(4) ○：直線 AJ 與直線 SN 同時垂直直線 JN，所以直線 AJ 與直線 SN 的距離為 $\overline{JN}=3$。

(5) ╳：平面 BIO 平行平面 FLQ，且平面 BIO 的方程式為 $x-y=0$，

則 $d(F,\text{平面}BIO)=\dfrac{|3-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}$，

所以平面 BIO 與平面 FLQ 的距離為 $\sqrt{2}$。

故選(5)。

12. 已知四次多項式 $f(x)$ 除以 $x-1$、$x-2$、$x-3$ 之餘式分別為 5、8、13，可令

$f(x)=(px+q)(x-1)(x-2)(x-3)+(ax^2+bx+c)$，

由餘式定理可知 $\begin{cases}f(1)=a+b+c=5\\ f(2)=4a+2b+c=8\\ f(3)=9a+3b+c=13\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\ b=0\\ c=4\end{cases}$，

得 $f(x)=(px+q)(x-1)(x-2)(x-3)+x^2+4$，

則 $f(x)$ 除以 $(x-1)(x-2)$ 的餘式為 x^2+4 除以 $(x-1)(x-2)$ 的餘式 $3x+2$，

$f(x)$ 除以 $(x-1)(x-3)$ 的餘式為 x^2+4 除以 $(x-1)(x-3)$ 的餘式 $4x+1$，

$f(x)$ 除以 $(x-2)(x-3)$ 的餘式為 x^2+4 除以 $(x-2)(x-3)$ 的餘式 $5x-2$，

$f(x)$ 除以 $2(x-2)(x-3)$ 的餘式為 x^2+4 除以 $2(x-2)(x-3)$ 的餘式 $5x-2$，

$f(x)$ 除以 $(x-1)(x-2)(x-3)$ 的餘式為 x^2+4，

故選(2)(3)(4)。

13. 外野草皮的預估面積為

$$\frac{1}{2}\times400^2\times\frac{2\pi}{3}-\frac{1}{2}\times90\times90\times\sin120^\circ\times2$$

$=\dfrac{160000\pi}{3}-4050\sqrt{3}$ 平方英呎。

14. 不同發財金金額的機率表如下：

發財金金額	600	500	400
機率	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^2$	$\left(\frac{1}{2}\right)^3$

發財金金額	300	200	100
機率	$\left(\frac{1}{2}\right)^4$	$\left(\frac{1}{2}\right)^5$	$\left(\frac{1}{2}\right)^6$

則小六該次求得發財金的期望值為

$$600\times\frac{1}{2}+500\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+400\times\left(\frac{1}{2}\right)^3+300\times\left(\frac{1}{2}\right)^4$$

$$+200\times\left(\frac{1}{2}\right)^5+100\times\left(\frac{1}{2}\right)^6$$

$=300+125+50+18.75+6.25+1.5625$

$=501.5625$（元）。

15. $\begin{cases}x+2y-z=kx\\ kx+y+3z=2x\\ 2x+4y+kz=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(1-k)x+2y-z=0\\ (k-2)x+y+3z=0\\ 2x+4y+kz=0\end{cases}$，

可寫成增廣矩陣：$\left[\begin{array}{ccc|c}1-k&2&-1&0\\ k-2&1&3&0\\ 2&4&k&0\end{array}\right]$

$$\xrightarrow[\text{第3列+第2列}\times(-4)]{\text{第1列+第2列}\times(-2)}\left[\begin{array}{ccc|c}5-3k&0&-7&0\\ k-2&1&3&0\\ 10-4k&0&k-12&0\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\text{第3列+第1列}\times\left(\frac{k-12}{7}\right)}\left[\begin{array}{ccc|c}5-3k&0&-7&0\\ k-2&1&3&0\\ \frac{-3k^2+13k+10}{7}&0&0&0\end{array}\right]$$，

因為此三平面交於一線，所以 $\dfrac{-3k^2+13k+10}{7}=0$

$\Rightarrow 3k^2-13k-10=0$

$\Rightarrow (3k+2)(k-5)=0$

$\Rightarrow k=5$ 或 $k=\frac{-2}{3}$（不合）。

16. 已知 $\sin\theta\cos\theta=\frac{(\sin\theta+\cos\theta)^2-1}{2}$，

則 $f(\theta)=\frac{\sin\theta\cos\theta}{1+\sin\theta+\cos\theta}=\frac{\frac{(\sin\theta+\cos\theta)^2-1}{2}}{1+\sin\theta+\cos\theta}$

$=\frac{(\sin\theta+\cos\theta+1)(\sin\theta+\cos\theta-1)}{2(1+\sin\theta+\cos\theta)}$

$=\frac{(\sin\theta+\cos\theta-1)}{2}$

$=\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta\right)-1\right)$

$=\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}(\cos 45°\sin\theta+\sin 45°\cos\theta)-1\right)$

$=\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}\sin(45°+\theta)-1\right)$

$=\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)-1\right)$，

當 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 時，$f(\theta)$ 有最大值 $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$。

17. 令 $\overrightarrow{v_1}=(a,-b,c)$、$\overrightarrow{v_2}=(2,1,2)$、$\overrightarrow{v_3}=(-p,q,-r)$，

則 $\left|\overrightarrow{v_1}\right|=\sqrt{a^2+(-b)^2+c^2}=13$，$\left|\overrightarrow{v_2}\right|=\sqrt{2^2+1^2+2^2}=3$，

$\left|\overrightarrow{v_3}\right|=\sqrt{(-p)^2+q^2+(-r)^2}=10$，

$\begin{vmatrix} a & -b & c \\ 2 & 1 & 2 \\ -p & q & -r \end{vmatrix}$ 的最大值可視為 $\overrightarrow{v_1}$、$\overrightarrow{v_2}$、$\overrightarrow{v_3}$ 三個向量所張成平行六面體的最大體積，

而當 $\overrightarrow{v_1}$、$\overrightarrow{v_2}$、$\overrightarrow{v_3}$ 兩兩互相垂直時，三個向量所張成平行六面體的最大體積為 $13\times3\times10=390$。

18. 因為擺盪的過程中每次擺盪的最高點會愈來愈高，且每次擺盪都會經過一樣的最低點，故選(5)。

19. 因為所有設施都可以在下午時段遊玩，故將下午遊玩的項目放在最後討論。

〔STEP1〕先分配每個時段安排的設施數量。

（上午、星光、下午）：（2、3、3）、（3、2、3）、（3、3、2），

其中因為上午與星光時段可玩的設施只有五項，

所以只能有（2、3、3）、（3、2、3）兩種。

〔STEP2〕分析上午與星光時段可玩的設施。

上午或星光時段可以玩的項目只有糖晶落體、天堂上的鞦韆、煙囪滑梯、極限大擺盪、飛天宅急便這五項設施。

其中：

① 糖晶落體、天堂上的鞦韆、煙囪滑梯：三個項目兩時段都可以玩。

② 極限大擺盪：星光時段不能玩。

③ 飛天宅急便：上午時段不能玩。

〔STEP3〕討論（上午、星光、下午）：（2、3、3）的數量。

因為上午或星光時段可以玩的項目只有五項，所以這五項設施一定要規劃在上午或星光時段玩，因為極限大擺盪星光時段不能玩，所以一定要規劃在早上時段，所以方法數有 $(C_1^1\times C_1^3)\times C_3^3\times C_3^3\times2!\times3!\times3!=216$ 種。

〔STEP4〕討論（上午、星光、下午）：（3、2、3）的數量。

因為上午或星光時段可以玩的項目只有五項，所以這五項設施一定要規劃在上午或星光時段玩，因為極限大擺盪星光時段不能玩，所以一定要規劃在早上時段，所以方法數有 $(C_1^1\times C_2^3)\times C_2^2\times C_3^3\times3!\times2!\times3!=216$ 種。

故共有 432 種行程安排方法。

20. 最大齒輪舞臺 $x^2+y^2-24x-10y+160=0$ 可化簡為 $(x-12)^2+(y-5)^2=9$，

可得此圓的圓心為 $(12,5)$，半徑為 3。

而起點到圓心的距離為 $\sqrt{(12-0)^2+(5-0)^2}=13$，

代表起點到此圓最大的距離為 $13+3=16$，

而最小的距離為 $13-3=10$，

要讓紙飛機恰好落在最大的齒輪舞臺上，

則紙飛機的水平位移 d 要滿足 $10\le d\le16$，

可表示為 $|d-13|\le3$，

故 $(a,b)=(13,3)$。

評分標準：

① 將圓方程式化簡為 $(x-12)^2+(y-5)^2=9$，給 2 分。

② 計算出起點到圓心的距離為 13，給 1 分。

③ 正確寫出 $(a,b)=(13,3)$，給 2 分。