龍騰文化

114 學年度分科測驗全真模擬試卷

數學甲考科

請於考試開始鈴響起，在答題卷簽名欄位以正楷簽全名

龍騰數學科編輯小組

—作答注意事項—

考試時間：80 分鐘

作答方式：

- 選擇（填）題用 2B 鉛筆在「答題卷」上作答；更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。
- 除題目另有規定外，非選擇題用筆尖較粗之黑色墨水的筆在「答題卷」上作答；更正時，可以使用修正液（帶）。
- 考生須依上述規定劃記或作答，若未依規定而導致答案難以辨識或評閱時，恐將影響成績並損及權益。
- 答題卷每人一張，不得要求增補。
- 選填題考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子劃記。

選擇（填）題計分方式：

- 單選題：每題有 n 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項。各題答對者，得該題的分數；答錯、未作答或劃記多於一個選項者，該題以零分計算。
- 多選題：每題有 n 個選項，其中至少有一個是正確的選項。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得該題全部的分數；答錯 k 個選項者，得該題 $\frac{n-2k}{n}$ 的分數；但得分低於零分或所有選項均未作答者，該題以零分計算。
- 選填題每題有 n 個空格，須全部答對才給分，答錯不倒扣。

※試題中參考的附圖均為示意圖，試題後附有參考公式及數值。

祝考試順利

如需試卷檔案，請登入龍騰線上題測→各科 word 資源區

龍騰文化
肯定自己 ➤ 肯定不同

定價 20 元

62001N12-E B

第壹部分、選擇（填）題（占 **76** 分）

一、單選題（占 **18** 分）

說明：第 1 題至第 3 題，每題 6 分。

1. 對一實數 x ，以 $[x]$ 表示不大於 x 的最大整數，試問下列哪個選項中的極限存在？

   (1) $\lim\limits_{x\to 0}[x+3]$　(2) $\lim\limits_{x\to 1}\left[x^2\right]$　(3) $\lim\limits_{x\to 0}\left([x]-x\right)$　(4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{[x]}{x}$　(5) $\lim\limits_{x\to 0}x^2\left[\dfrac{1}{x}\right]$

2. 已知三次函數 $f(x)=ax^3-3x^2+bx+7$ 的圖形沒有水平切線，若不等式 $f(x)>0$ 的解為 $x>-1$，則 a 的整數解個數為下列何者？

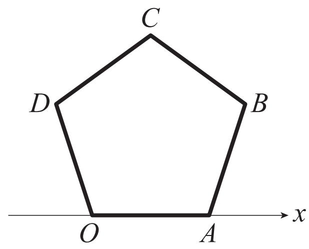
   (1)1 個　(2)2 個　(3)3 個　(4)4 個　(5)5 個

3. 在$\triangle ABC$中，$\angle A = 90^\circ$，$\overline{AB} = 2$，$\overline{AC} = 1$。設P，Q兩點滿足$\overrightarrow{AP} = k\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AQ} = (1-k)\overrightarrow{AC}$，其中$0 < k < 1$。若$\overrightarrow{BQ} \cdot \overrightarrow{CP} = -2$，則實數$k$的值為何？
(1)$\frac{1}{2}$　(2)$\frac{1}{3}$　(3)$\frac{2}{3}$　(4)$\frac{3}{4}$　(5)$\frac{4}{5}$

二、多選題（占 **40** 分）

說明：第 4 題至第 8 題，每題 8 分。

4. 正五邊形$OABCD$，其中O為原點，A點在x軸上如圖所示，試問下列選項何者正確？



(1) $\overleftrightarrow{AB}$與$\overleftrightarrow{OC}$兩直線斜率相等，且為此五個點中任意兩點形成的直線中最大的斜率
(2) 此 5 個點中，任意兩點形成的不同向量共有 10 個
(3) 若$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$，則$\overrightarrow{OP}$終點$P$落在直線$\overleftrightarrow{CD}$上
(4) $\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{OA}|^2$
(5) $\overrightarrow{OD}$在$\overrightarrow{OA}$上的正射影為$(\cos\frac{2\pi}{5})\overrightarrow{OA}$

5. 空間中，O 為原點，向量 $\overrightarrow{OA}=(-2,2,1)$，$\overrightarrow{OB}=(2,1,2)$，$\overrightarrow{OC}=(4,c_2,c_3)$ 為一長方體相鄰的三邊，又 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OD}$，$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OE}$，$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OF}$，試選出正確的選項。

(1) $c_2+c_3=2$

(2) $\left|\left(\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}\right)\cdot\overrightarrow{OC}\right|=108$

(3) $\cos\angle EOF=\dfrac{3}{5}$

(4)四面體 $ODEF$ 的體積為 18

(5)若點 P 在平面 $x+2y-2z=0$ 上，則必有實數 α，β 使得 $\overrightarrow{OP}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}$

6. 有 4 個人以擲公正骰子來決定參加甲遊戲或乙遊戲。約定：擲出 1 或 2 點的人參加甲遊戲，擲出點數大於 2 的人參加乙遊戲。設隨機變數 X，Y 分別表示參加甲，乙遊戲的人數，且 $Z=|X-Y|$，試選出正確的選項。

(1) 機率 $P(X=2)=\dfrac{8}{27}$

(2) 機率 $P(X>Y)=\dfrac{5}{27}$

(3) 兩期望值 $E(X)$ 與 $E(Y)$ 的和等於 4

(4) 期望值 $E(Z)=\dfrac{148}{81}$

(5) 變異數 $Var(Z)<5$

7. 已知函數 $f\left(x\right)=x^5+2x^4-x^3-5x^2+4$，試選出正確的選項。

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f\left(n\right)}{f\left(n+5\right)}=0$　(2) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{f\left(x\right)-f\left(-1\right)}{x+1}=0$　(3) $f'(1)=0$

(4)函數 $f\left(x\right)$ 在區間 $\left[1,2\right]$ 遞增

(5)在坐標平面上 $y=f\left(x\right)$ 的圖形與直線 $y=3$ 恰有兩個交點

8. 已知複數 $z=\cos\dfrac{2\pi}{5}+i\sin\dfrac{2\pi}{5}$，$\overline{z}$ 為 z 的共軛複數，下列哪些選項為正實數？

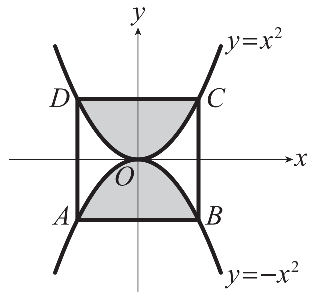
(1) z^5　(2) $\left(\overline{z}\right)^{10}$　(3) $z+\overline{z}$　(4) $z\times\overline{z}$　(5) $\dfrac{\overline{z}}{z}$

三、選填題（占 18 分）

說明：第 9 題至第 11 題，每題 6 分。

9. 在空間中，C 是平面 E：$x+y+z=4$ 上的一個圓，圓心為 $M(1,1,2)$，$P(2,0,2)$ 為圓 C 上一點，直線 L：$\frac{x-2}{1}=\frac{y}{b}=\frac{z-2}{c}$ 是平面 E 上切圓 C 於 P 點的切線，求數對 $(b,c)=$ (9−1, 9−2 9−3) 。

10. 坐標平面上，正方形的四個頂點 $A(-1,-1)$，$B(1,-1)$，$C(1,1)$，$D(-1,1)$ 分別在拋物線 $y=x^2$ 與 $y=-x^2$ 上，如圖所示。若鋪色區域的面積為 S，正方形的面積為 R，則 $\frac{S}{R}$ 的值為 $\frac{\text{10−1}}{\text{10−2}}$ （化為最簡分數）



11. 已知等比數列 $\langle a_n\rangle$ 滿足 $a_2=2$，$a_5=\frac{1}{4}$，且令 $T_n=a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_na_{n+1}$，求 $\lim_{n\to\infty}T_n=$ $\frac{\text{11−1 11−2}}{\text{11−3}}$ 。

第貳部分、混合題或非選擇題（占 **24** 分）

說明：本部分共有 2 題組，選填題每題 2 分，非選擇題配分標於題末。限在答題卷標示題號的作答區內作答。選填題與「非選擇題作圖部分」使用 2B 鉛筆作答，更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。非選擇題請由左而右橫式書寫，作答時必須寫出計算過程或理由，否則將酌予扣分。

12-14 為題組

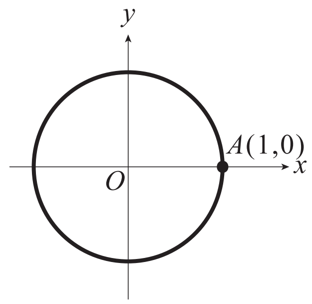
已知滿足$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ a & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ b \end{bmatrix}$的點$(x,y,z)$在空間中所成的圖形為一直線 L。

12. 求數對$(a,b)=$ (12−1 12−2 , 12−3 12−4) （非選擇題，4 分）

13. 若直線 L 的參數式為$\begin{cases} x=ut \\ y=-4+vt \\ z=w-3t \end{cases}, t\in\mathbb{R}$，求實數 u, v, w 之值。（非選擇題，3 分）

14. 求點 $A(0,0,-2)$ 到直線 L 的距離（非選擇題，5 分）

15-17 為題組



有甲乙兩人一開始在複數平面上的點 $A(1,0)$ 處，甲乙兩人同時開始等速率的在單位圓的圓周上移動，如右圖所示。甲依逆時針的方向移動，在時間為 t 秒時移動到複數 $(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})^t$ 所代表的點；乙依順時針方向移動，在時間 t 秒時移動到 $(\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6})^t$ 所代表的點，其中 t 為正整數，請回答下列問題。

15. 若甲在第 m 秒移動到 x 軸上，則 m 的最小值為下列何者？（單選題，2 分）

(1) 2　(2) 4　(3) 6　(4) 8　(5) 10

16. 從出發開始，甲乙兩人第一次相遇之位置會落在哪個象限？（非選擇題，4 分）

17. 兩人是否可以在 x 軸上相遇？試說明理由？（非選擇題，6 分）

參考公式及可能用到的數值

1. 級數和：$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ； $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$
2. 三角函數的和角公式：$\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$
$\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B$
$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1-\tan A\tan B}$
3. ΔABC 的正弦定理：$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ （ R 為 ΔABC 外接圓半徑）
ΔABC 的餘弦定理：$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$
4. 一維數據 $X: x_1, x_2, \cdots, x_n$ ，
算術平均數 $\mu_X = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ ；標準差 $\sigma_X = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_X)^2} = \sqrt{\frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n} x_i^{\ 2} - n\mu_X^{\ 2})}$
5. 二維數據 $(X,Y):(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n)$ ，
相關係數 $r_{X,Y} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_X)(y_i - \mu_Y)}{n\sigma_X\sigma_Y}$
最適直線（迴歸直線）方程式 $y - \mu_Y = r_{X,Y}\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x - \mu_X)$
6. 參考數值：$\sqrt{2} \approx 1.414, \sqrt{3} \approx 1.732, \sqrt{5} \approx 2.236, \sqrt{6} \approx 2.449, \pi \approx 3.142$
7. 對數值：$\log 2 \approx 0.3010$, $\log 3 \approx 0.4771$, $\log 5 \approx 0.6990$, $\log 7 \approx 0.8451$
8. 若 $X \sim B(n,p)$ 為二項分布，則期望值 $E(X) = np$ ，變異數 $Var(X) = np(1-p)$ ；
若 $X \sim G(p)$ 為幾何分布，則期望值 $E(X) = \frac{1}{p}$ ，變異數 $Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$ 。