



5、频域分析

时域分析的缺陷

高阶系统的分析难以进行；

难以研究系统参数和结构变化对系统性能的影响；

频域分析的目的

以输入信号的频率为变量，在频率域，研究系统的结构参数与性能的关系。

无需求解微分方程，**图解**(频率特性图)法间接揭示系统性能并指明改进性能的方向；

易于实验分析；

优点：

可推广应用于含有延迟环节的系统；

可方便设计出有效抑制噪声的系统。

- ❖ 频率响应
- ❖ 频率特性的基本概念
- ❖ 频率特性的图形表示法
 - ✓ 极坐标图（幅相曲线、Nyquist图）
 - ✓ bode图（对数幅频特性和相频特性）
- ❖ 频域稳定性判据
- ❖ 稳定裕度及与时域性能的关系
- ❖ 用开环频率特性分析闭环性能

5.1 频率特性的基本概念

1、频率响应

频率响应是指系统输入为**正弦函数输入**时，系统输出响应的**稳态分量**。

不失一般性，考虑如下线性定常系统：

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N(s)}{(s-s_1)(s-s_2)\cdots(s-s_n)}$$

当输入为正弦输入 $r(t) = A \sin \omega t$

其拉氏变换为 $R(s) = \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2} = \frac{A\omega}{(s+j\omega)(s-j\omega)}$

相应的输出为：

$$\begin{aligned} C(s) = G(s)R(s) &= \frac{N(s)}{(s-s_1)(s-s_2)\cdots(s-s_n)} \cdot \frac{A\omega}{(s+j\omega)(s-j\omega)} \\ &= \frac{b}{s+j\omega} + \frac{\bar{b}}{s-j\omega} + \frac{a_1}{s-s_1} + \frac{a_2}{s-s_2} + \cdots + \frac{a_n}{s-s_n} \end{aligned}$$

经拉氏反变换，可得系统的输出

$$c(t) = b e^{-j\omega t} + \bar{b} e^{j\omega t} + a_1 e^{s_1 t} + a_2 e^{s_2 t} + \dots + a_n e^{s_n t}$$

对于稳定的系统，系统输出的稳态分量为

$$c_{ss}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} c(t) = b e^{-j\omega t} + \bar{b} e^{j\omega t}$$

其中：

$$b = G(s) \frac{A\omega}{(s+j\omega)(s-j\omega)} \cdot (s+j\omega) \Big|_{s=-j\omega} = -\frac{G(-j\omega)A}{2j}$$

$$\bar{b} = G(s) \frac{A\omega}{(s+j\omega)(s-j\omega)} \cdot (s-j\omega) \Big|_{s=j\omega} = \frac{G(j\omega)A}{2j}$$

$$G(j\omega) = |G(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)} \quad \varphi(\omega) = \angle G(j\omega) = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im} G(j\omega)}{\operatorname{Re} G(j\omega)}$$

$$G(-j\omega) = |G(-j\omega)| e^{j\varphi(-\omega)} = |G(j\omega)| e^{-j\varphi(\omega)}$$

因此:

$$\begin{aligned}
 c_{ss}(t) &= -|G(j\omega)|e^{-j\varphi(\omega)} \cdot \frac{Ae^{-j\omega t}}{2j} + |G(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)} \frac{Ae^{j\omega t}}{2j} \\
 &= |G(j\omega)|A \cdot \frac{e^{j(\omega t + \varphi)} - e^{-j(\omega t + \varphi)}}{2j} \\
 &= C \sin(\omega t + \varphi)
 \end{aligned}$$

其中 $C = |G(j\omega)|A$ 为输出稳态分量的幅值

$\varphi(\omega) = \angle G(j\omega) = \arctg \frac{\text{Im } G(j\omega)}{\text{Re } G(j\omega)}$ 为输出与输入的相位差

稳定的线性定常系统在正弦激励下的稳态输出仍然为同频率的正弦信号，且输出与输入的幅值比为 $|G(j\omega)|$ ，相位差为 $\angle G(j\omega)$ 。输出信号的幅值和相角是频率的函数，随频率而变化。幅值与相角都与传递函数 $G(s)$ 有一定关系。

$G(j\omega) = G(s)\big|_{s=j\omega}$ 定义为频率特性

频率特性与传递函数的关系 $G(j\omega) = G(s)|_{s=j\omega}$

频率特性：表征了系统在不同频率的正弦信号输入时，其稳态输出随频率而变化(ω 由0变到 ∞)的特性。

$$G(j\omega) = |G(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)}$$

幅频特性：当 ω 由0到 ∞ 变化时， $G(j\omega)$ 的模的变化特性，记为 $|G(j\omega)|$ 。

相频特性：当 ω 由0到 ∞ 变化时， $G(j\omega)$ 的相位的变化特性，记为 $\angle G(j\omega)$ 或记为 $\varphi(\omega)$ 。

幅频特性与相频特性一起构成系统的频率特性。

$$G(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega)$$

实频特性：当 ω 由0到 ∞ 变化时， $G(j\omega)$ 的实部的变化特性，记为 $U(\omega)$ 。

虚频特性：当 ω 由0到 ∞ 变化时， $G(j\omega)$ 的虚部的变化特性，记为 $V(\omega)$ 。

例：求一阶系统 $G(s) = \frac{K}{Ts + 1}$ 的**频率特性**及在正弦输入 $x_i(t) = X \sin \omega t$ 作用下的**频率响应**。

解：**频率特性** $G(j\omega) = G(s)|_{s=j\omega} = \frac{K}{j\omega T + 1}$

$$|G(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}}$$

$$\varphi(\omega) = \angle G(j\omega) = -\arctg \omega T$$

对于正弦输入 $x_i(t) = X \sin \omega t$ ，根据**频率响应**的定义：

$$\begin{aligned} c_{ss}(t) &= X |G(j\omega)| \sin[\omega t + \varphi(\omega)] \\ &= \frac{KX}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}} \sin(\omega t - \arctg \omega T) \end{aligned}$$



几点说明：

频率特性是传递函数的特例，是定义在复平面虚轴上的传递函数，因此频率特性与系统的微分方程、传递函数一样反映了系统的固有特性。

频率特性的意义：系统输出的傅立叶变换和输入的傅立叶变换的比值。

便于实验建模。

5.2 频率特性的图形表示法

频域分析是一种图解方法，系统分析和设计都是建立在频率特性的图形基础之上。

❖ 幅相曲线——**Nyquist**图（或极坐标图）

❖ **Bode**图——对数幅频特性和相频特性

5.2.1 幅相曲线——Nyquist图

$$G(j\omega) = |G(j\omega)|e^{j\phi(\omega)}$$

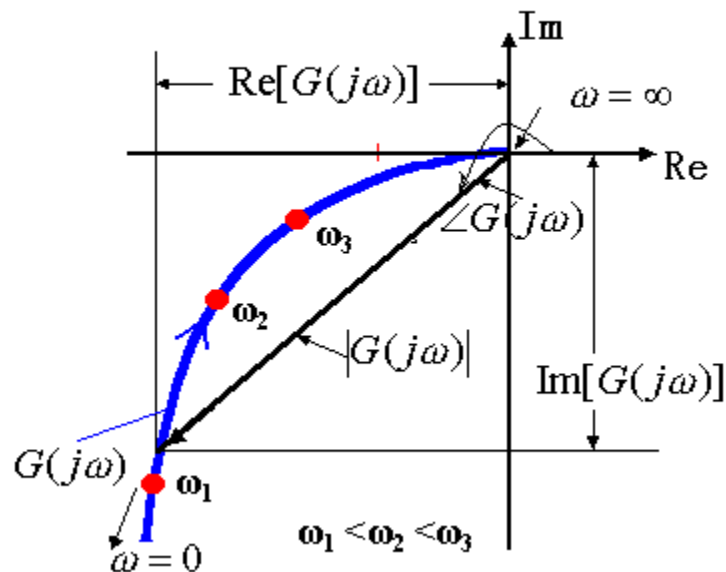
$$G(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega)$$

在复平面上，以 ω 为第三参量，随 ω ($0 \sim \infty$) 的变化，向量 $G(j\omega)$ 端点的变化曲线（轨迹），称为系统的幅相频率特性曲线。得到的图形称为系统的奈奎斯特图或极坐标图。

向量 $G(j\omega)$ 的长度等于 $|G(j\omega)|$;

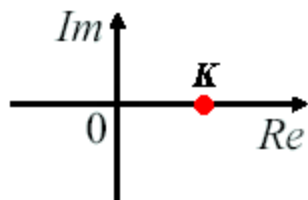
由正实轴方向沿逆时针方向绕原点旋转为正方向至向量 $G(j\omega)$ 方向的角度等于 $\phi(\omega)$ ($\angle G(j\omega)$)

如何绘制极坐标图？

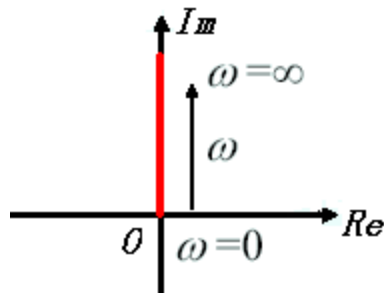


类似的方法，可画出典型环节的幅相曲线。

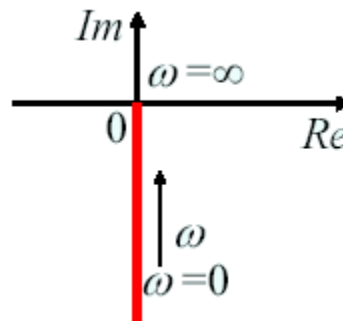
$$G(j\omega) = K$$



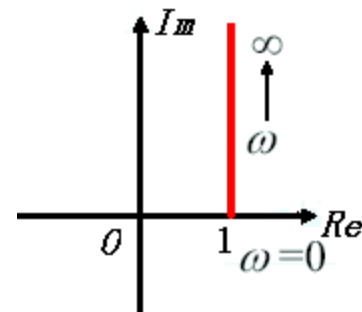
$$G(j\omega) = j\omega$$



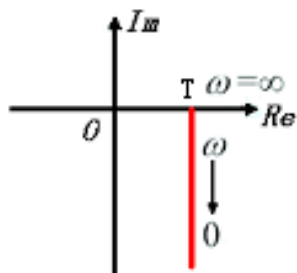
$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$$



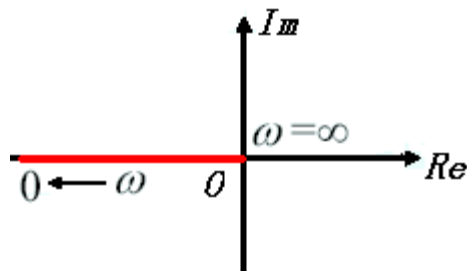
$$G(j\omega) = 1 + j\omega$$



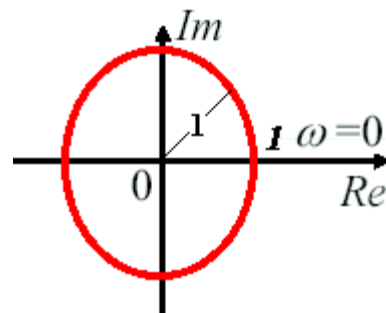
$$G(j\omega) = \frac{1 + j\omega T}{j\omega}$$



$$G(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^2}$$



$$G(j\omega) = e^{-j\omega T}$$



$$G(j\omega) = \frac{1 + j\omega T}{1 + j\omega aT}, a > 1$$

例：绘制一阶惯性环节的幅相曲线

$$G(s) = \frac{1}{Ts + 1}$$

$$U = \frac{1}{1 + \omega^2 T^2} \quad V = \frac{-\omega T}{1 + \omega^2 T^2}$$

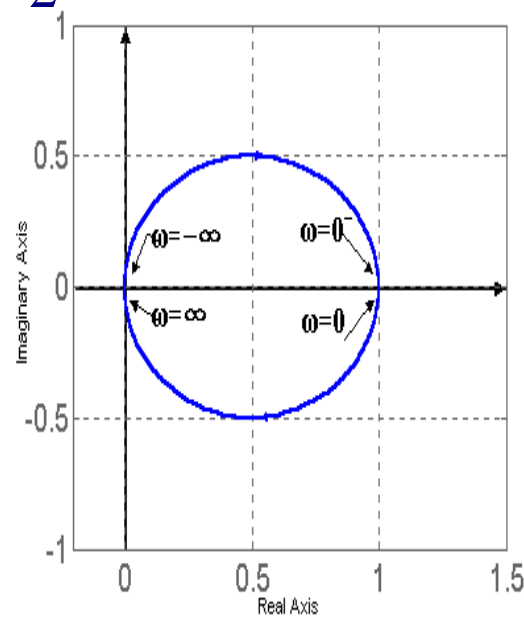
$$\left(U - \frac{1}{2}\right)^2 + V^2 = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \omega^2 T^2}{1 + \omega^2 T^2}\right)^2 + \left(\frac{-\omega T}{1 + \omega^2 T^2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

这是圆心在 (0.5, 0) 半径为 0.5 的半圆。

$$\omega = \frac{1}{T} \text{ 时, } \varphi = \arctg(-1) = -45^\circ$$

若作出对应 ω ($-\infty, 0$) 的幅相曲线,
则为上半圆, 关于实轴对称。

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= \frac{1}{j\omega T + 1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}} \angle -\arctg \omega T \\ &= \frac{1}{1 + \omega^2 T^2} + j \frac{-\omega T}{1 + \omega^2 T^2} \end{aligned}$$



例：绘制二阶环节的幅相曲线 $G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}, \zeta > 0$

$$G(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2 + 2\zeta\omega_n(j\omega) + \omega_n^2} = \frac{1}{(j\frac{\omega}{\omega_n})^2 + 2\zeta(j\frac{\omega}{\omega_n}) + 1} = \frac{1}{1 - (\frac{\omega}{\omega_n})^2 + j(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n})}$$

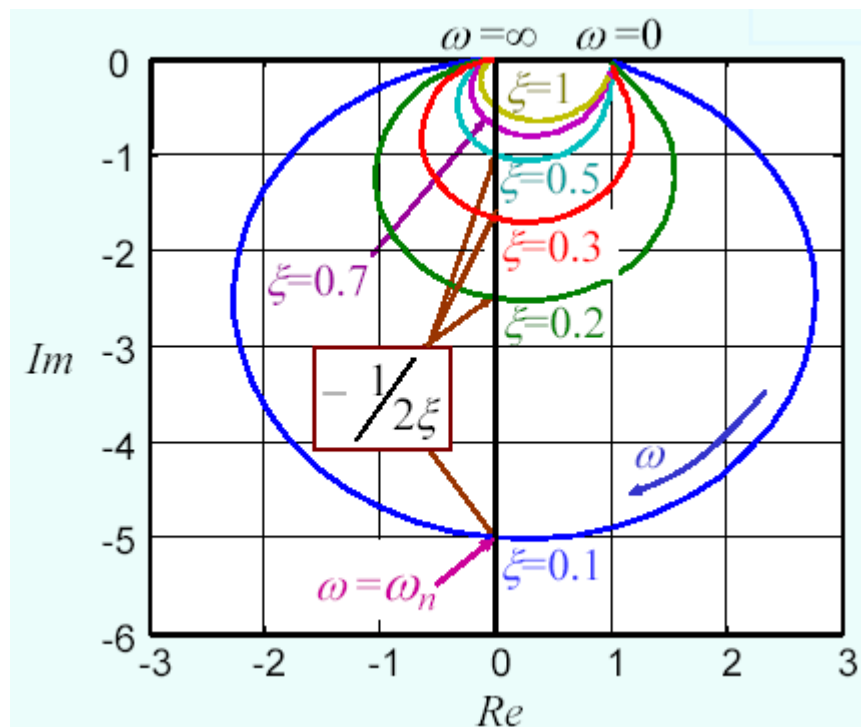
$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2})^2 + 4\zeta^2(\frac{\omega}{\omega_n})^2}}$$

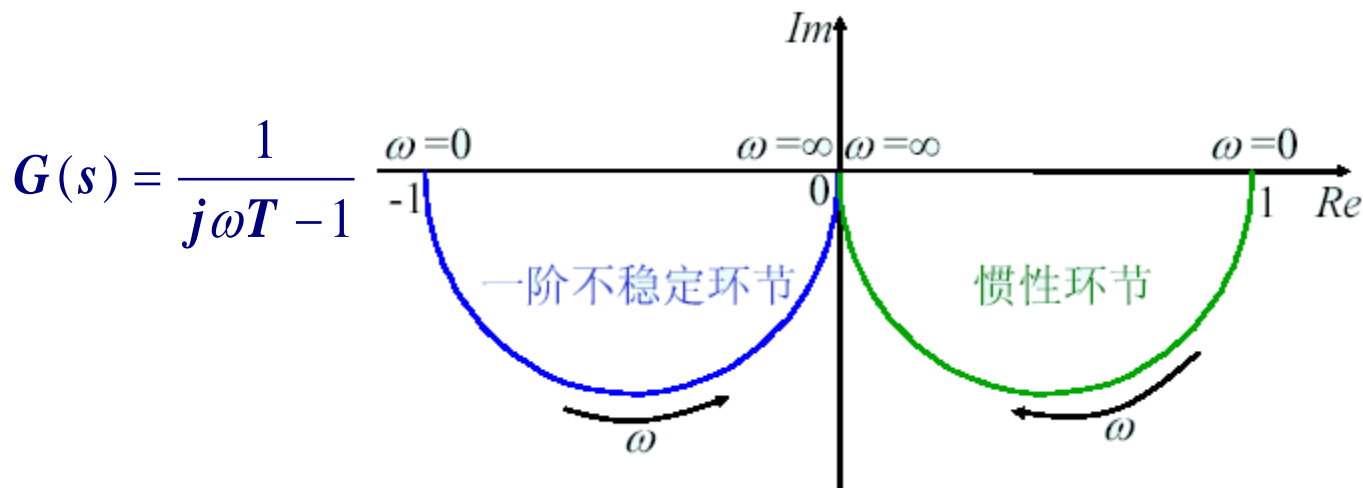
$$\varphi(j\omega) = -\arctg \frac{2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}}{1 - (\frac{\omega}{\omega_n})^2}$$

$$\omega = 0 \quad |G(j\omega)| = 1 \quad \varphi(j\omega) = 0^\circ$$

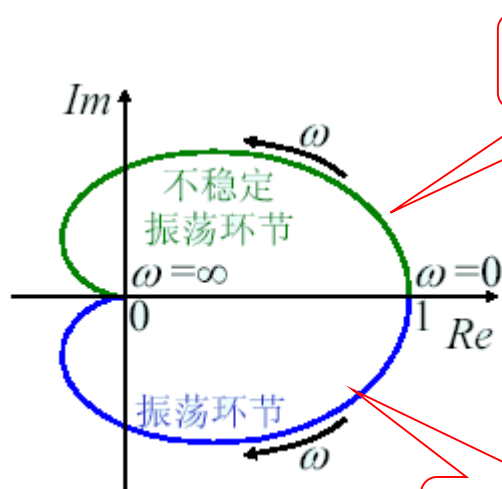
$$\omega = \omega_n \quad |G(j\omega)| = \frac{1}{2\zeta} \quad \varphi(j\omega) = -90^\circ$$

$$\omega = \infty \quad |G(j\omega)| = 0 \quad \varphi(j\omega) = -180^\circ$$





$G(s) = \frac{1}{j\omega T + 1}$



$\zeta < 0$

$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$

$\zeta > 0$

例：绘制 $G(s) = \frac{1}{s(Ts + 1)}$ 的幅相曲线

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega(j\omega T + 1)} = -\frac{T}{1 + \omega^2 T^2} - j\frac{1}{\omega(1 + \omega^2 T^2)}$$

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\omega\sqrt{1 + \omega^2 T^2}} \quad \varphi(\omega) = -90^\circ - \arctg \omega T$$

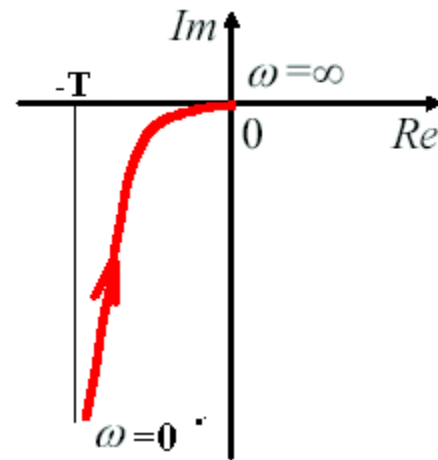
$$U = \frac{-T}{1 + \omega^2 T^2} \quad V = \frac{-1}{\omega(1 + \omega^2 T^2)}$$

$$\omega = 0 \quad |G(j\omega)| = \infty \quad \varphi(0) = -90^\circ$$

$$U = -T \quad V = -\infty$$

$$\omega = \infty \quad |G(j\omega)| = 0 \quad \varphi(j\omega) = -180^\circ$$

$$U = 0 \quad V = 0$$



例：绘制 $G(s)H(s) = \frac{K(\tau s + 1)}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$ 的幅相曲线

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{K(j\omega\tau + 1)}{j\omega(j\omega T_1 + 1)(j\omega T_2 + 1)}$$

$$|G(j\omega)H(j\omega)| = K \frac{\sqrt{\omega^2 \tau^2 + 1}}{\omega \sqrt{\omega^2 T_1^2 + 1} \sqrt{\omega^2 T_2^2 + 1}}$$

$$\angle G(j\omega)H(j\omega) = \arctg \omega \tau - 90^\circ - \arctg \omega T_1 - \arctg \omega T_2$$

$$\omega = 0 \quad |G(j\omega)| = \infty \quad \varphi(0) = -90^\circ$$

$$\omega = \infty \quad |G(j\omega)| = 0 \quad \varphi(j\omega) = -180^\circ$$

$$U(\omega) = \frac{K[(T_1 + T_2) - \tau(1 - \omega^2 T_1 T_2)]}{-(1 + \omega^2 T_1^2)(1 + \omega^2 T_2^2)}$$

$$V(\omega) = \frac{jK[(1 - \omega^2 T_1 T_2 + \omega^2 \tau(T_1 + T_2))]}{-\omega(1 + \omega^2 T_1^2)(1 + \omega^2 T_2^2)}$$

$$U(\omega) = \frac{K[(T_1 + T_2) - \tau(1 - \omega^2 T_1 T_2)]}{-(1 + \omega^2 T_1^2)(1 + \omega^2 T_2^2)}$$

$$V(\omega) = \frac{jK[(1 - \omega^2 T_1 T_2 + \omega^2 \tau(T_1 + T_2))]}{-\omega(1 + \omega^2 T_1^2)(1 + \omega^2 T_2^2)}$$

$$\omega = 0 \quad U(0) = -K(T_1 + T_2 - \tau) \quad V(0) = -\infty$$

$$T_1 + T_2 > \tau \quad U(0) < 0 \quad \text{起点在虚轴左侧}$$

$$T_1 + T_2 < \tau \quad U(0) > 0 \quad \text{起点在虚轴右侧}$$

$$T_1 + T_2 = \tau \quad U(0) = 0 \quad \text{起点在虚轴上}$$

求曲线与负实轴的交点, 令

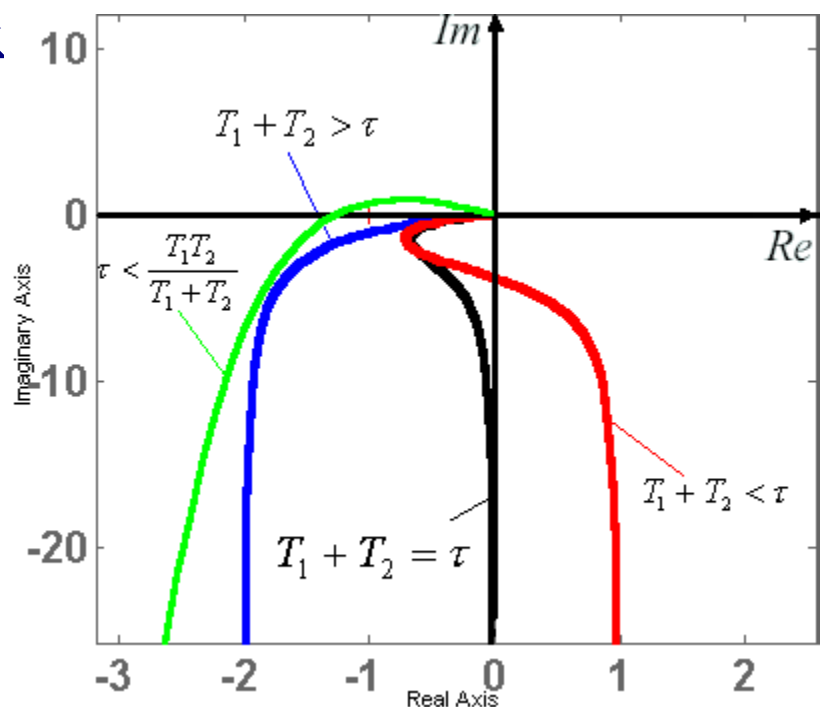
$$V(\omega) = \frac{jK[(1 - \omega^2 T_1 T_2 + \omega^2 \tau(T_1 + T_2))]}{-\omega(1 + \omega^2 T_1^2)(1 + \omega^2 T_2^2)} = 0$$

得

$$\omega_c = \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2 - \tau(T_1 + T_2)}}$$

$$\tau < \frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2} \quad \text{才有解}$$

有零点, Nyquist曲线可能出现凹凸。



系统开环Nyquist图的绘制

将开环传递函数表示成若干典型环节的串联形式:

$$GH(j\omega) = G_1(j\omega)G_2(j\omega)\cdots G_n(j\omega)$$

将频率特性写成幅值与相角的形式:

$$GH(j\omega) = |G_1(j\omega)||G_2(j\omega)|\cdots |G_n(j\omega)|\angle[\varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega) + \cdots \varphi_n(\omega)]$$

$$|GH(j\omega)| = |G_1(j\omega)||G_2(j\omega)|\cdots |G_n(j\omega)|$$

$$\varphi(\omega) = \angle[\varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega) + \cdots \varphi_n(\omega)]$$

求 $|GH(0)|$ 、 $|GH(\infty)|$ 、 $\varphi(0)$ 和 $\varphi(\omega)$

求起点时用实频特性和虚频特性 可能更准确一些

补充必要的特征点(如与坐标轴的交点), 根据 $|GH(j\omega)|$ 和 $\varphi(\omega)$ 的变化趋势, 画出Nyquist 图的大致形状。

Nyquist图的一般形状

考虑如下系统:

$$GH(j\omega) = \frac{K(1+j\omega\tau_1)(1+j\omega\tau_2)\cdots(1+j\omega\tau_m)}{(j\omega)^v(1+j\omega T_1)(1+j\omega T_2)\cdots(1+j\omega T_{n-v})} \quad (m < n)$$

$$T_i > 0 (i = 1 \cdots n - v) \quad \tau_j > 0 (j = 1 \cdots m)$$

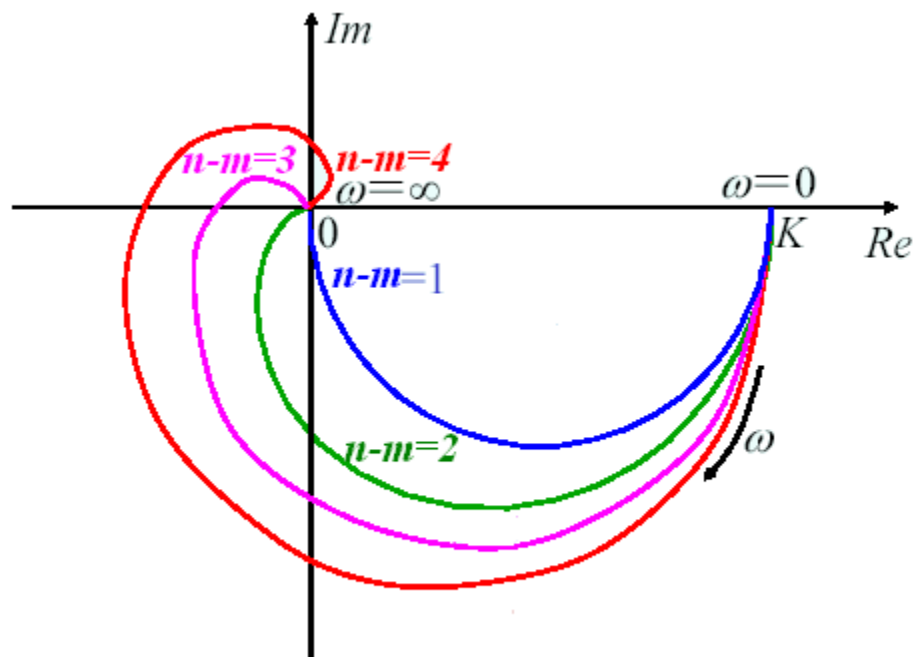
0型系统 ($v = 0$)

$$\omega = 0 \quad |G(j\omega)| = K$$

$$\varphi(0) = 0^\circ$$

$$\omega = \infty \quad |G(j\omega)| = 0$$

$$\varphi(\infty) = -(n - m) \times 90^\circ$$



只包含惯性环节或振荡环节的0型系统Nyquist图

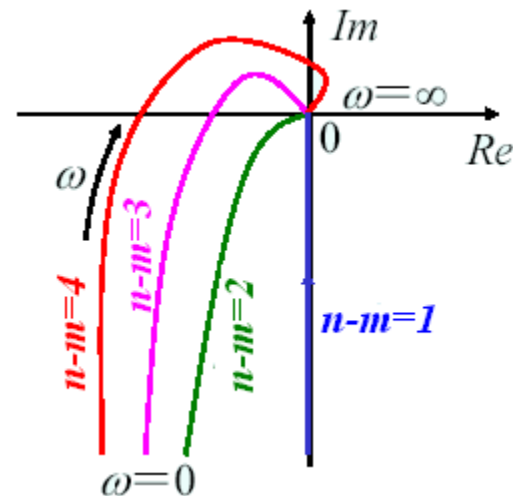
$$GH(j\omega) = \frac{K(1+j\omega\tau_1)(1+j\omega\tau_2)\cdots(1+j\omega\tau_m)}{(j\omega)^v(1+j\omega T_1)(1+j\omega T_2)\cdots(1+j\omega T_{n-v})} \quad (m < n)$$

$$T_i > 0 (i = 1 \cdots n - v) \quad \tau_j > 0 (j = 1 \cdots m)$$

I型系统 ($v=1$)

$$\omega = 0 \quad |G(j\omega)| = \infty \quad \varphi(0) = -90^\circ$$

$$\omega = \infty \quad |G(j\omega)| = 0 \quad \varphi(\infty) = -(n - m) \times 90^\circ$$



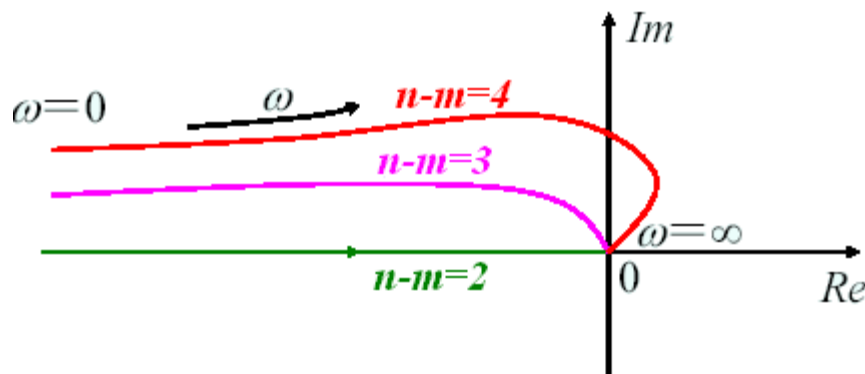
II型系统 ($v=2$)

$$\omega = 0 \quad |G(j\omega)| = \infty$$

$$\varphi(0) = -180^\circ$$

$$\omega = \infty \quad |G(j\omega)| = 0$$

$$\varphi(\infty) = -(n - m) \times 90^\circ$$

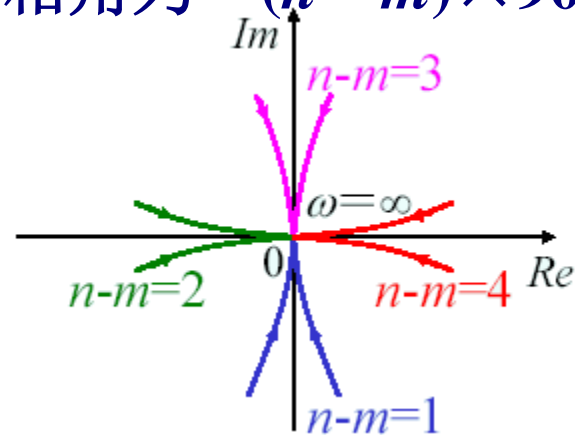
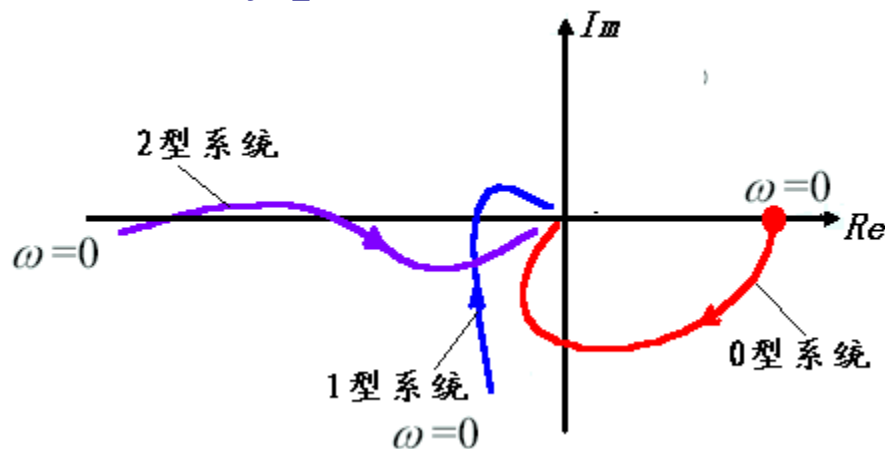


对于零极点均在左半平面时(最小相位系统)

开环没有积分环节, Nyquist曲线起点自实轴上的某一有限远点;
开环如果含有 ν 个积分环节的系统, Nyquist曲线起点自幅角为 $(-\nu \times 90^\circ)$ 的无穷远处。

$n = m$ 时, Nyquist曲线终点止于实轴上的某一有限远点。

$n > m$ 时, Nyquist曲线终点幅值为0, 而相角为 $-(n-m) \times 90^\circ$ 。



不含一阶或二阶微分环节(不含零点)的系统, 相角滞后单调增加。
含有一阶或二阶微分环节的系统(含零点), 由于相角非单调变化,
Nyquist曲线可能出现凹凸。

例：绘制 $G(s) = \frac{1}{s(Ts-1)}$ 的幅相曲线

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\omega \sqrt{1 + \omega^2 T^2}} \quad \varphi(\omega) = -90^\circ - (180^\circ - \arctg \omega T)$$

$$= -270^\circ + \arctg \omega T$$

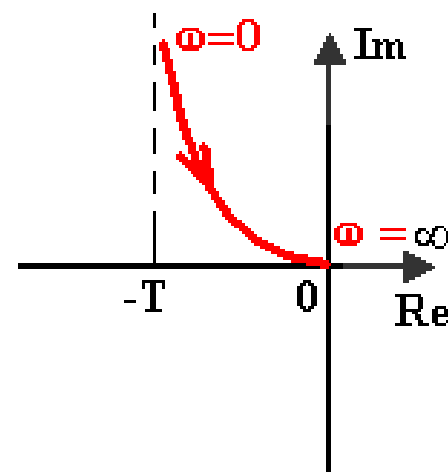
$$\omega = 0 \quad |G(j\omega)| = \infty \quad \varphi(0) = -270^\circ$$

$$\omega = \infty \quad |G(j\omega)| = 0 \quad \varphi(j\omega) = -180^\circ$$

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega(j\omega T + 1)} = -\frac{T}{1 + \omega^2 T^2} + j \frac{1}{\omega(1 + \omega^2 T^2)}$$

$$U = \frac{-T}{1 + \omega^2 T^2} \quad V = \frac{1}{\omega(1 + \omega^2 T^2)}$$

$$\omega = 0 \quad U = -T \quad V = \infty$$

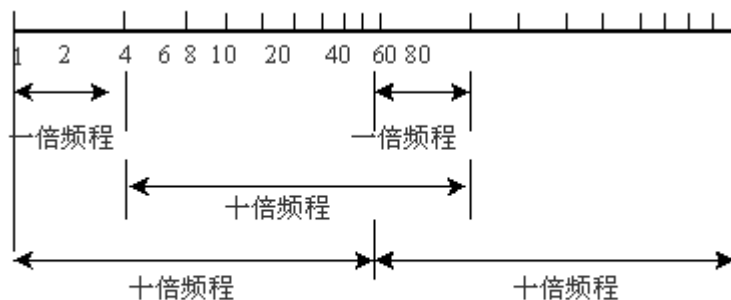


5.2.2 bode图——对数幅频特性和相频特性

波德(Bode)图 (由对数幅频特性和相频特性组成)

对数幅频特性: 单位为分贝 (dB)

横坐标: 以10为底的对数分度表示的角频率, 单位 rad/s ;



采用对数分度的座标

纵坐标: 线性分度, 表示幅值 $|G(j\omega)|$ 对数的20倍, 即:

$$L(\omega) = 20 \lg |G(j\omega)|$$

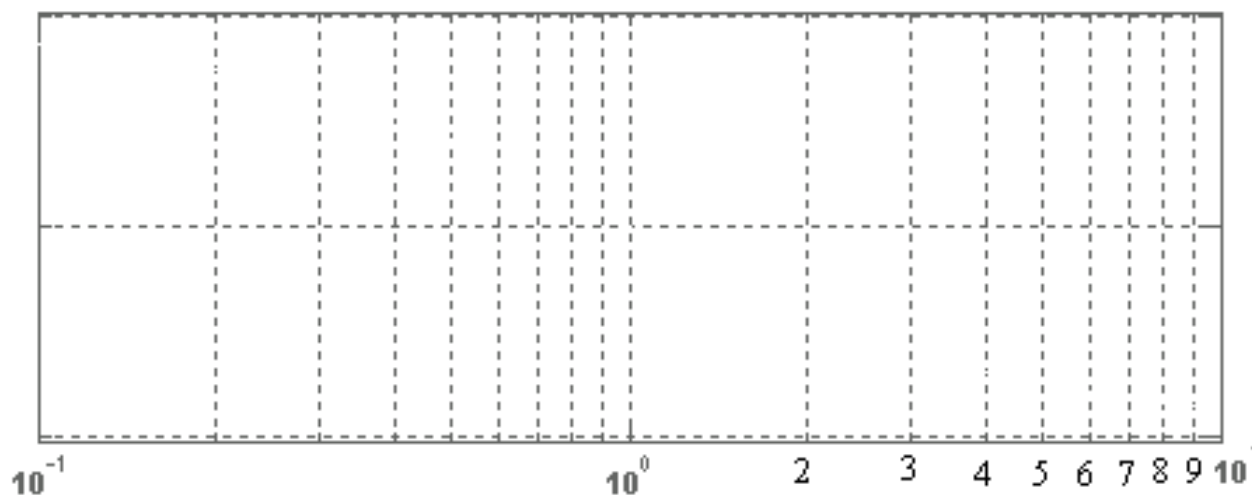
相频特性

横坐标: 与对数幅频特性图相同。


纵坐标: 线性分度, 频率特性的相角 $\varphi(\omega)$ 单位为 度($^\circ$)

几点说明:

- ❖ 在对数频率特性图中, 由于横坐标采用了**对数分度**, 因此 $\omega=0$ 不可能在横坐标上表示出来, 横坐标一般标注 ω 的自然数值;
- ❖ 选用对数坐标是因为可以拓宽所能表示的频率范围。
- ❖ 频率变化10倍, 在对数坐标上是等距的, 等于一个单位。



- ❖ 在对数频率特性图中, 横坐标的等距为10倍频率, 称为**十倍频程**, 记为**decade**或简写为**dec**;


$$G(j\omega) = G_1(j\omega)G_2(j\omega)G_3(j\omega)$$

$$L(\omega) = 20 \lg G(j\omega)$$

$$= 20 \lg G_1(j\omega) + 20 \lg G_2(j\omega) + 20 \lg G_3(j\omega)$$

$$= L_1(\omega) + L_2(\omega) + L_3(\omega)$$

$$\varphi(\omega) = \varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega) + \varphi_3(\omega)$$

幅值采用对数的**优点**

- 幅值相乘变为相加，简化作图；
- 可以利用**渐近直线**绘制近似的对数幅频特性曲线；

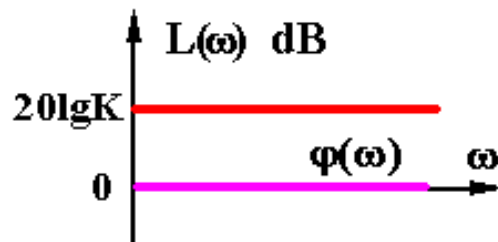
例：绘制下列典型环节的bode图

1、比例环节

$$G(j\omega) = K$$

$$L(\omega) = 20 \lg K$$

$$\varphi(\omega) = 0^\circ$$

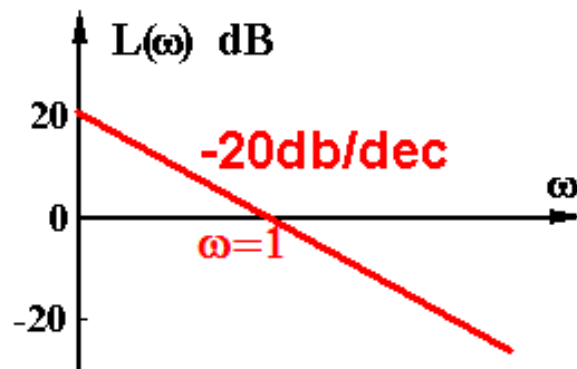


2、积分环节

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$$

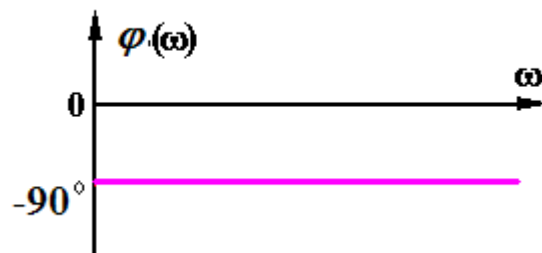
$$L(\omega) = -20 \lg \omega$$

$$\varphi(\omega) = -90^\circ$$



斜率为 -20 dB/dec

一定通过 $(1, 0 \text{ dB})$ 点



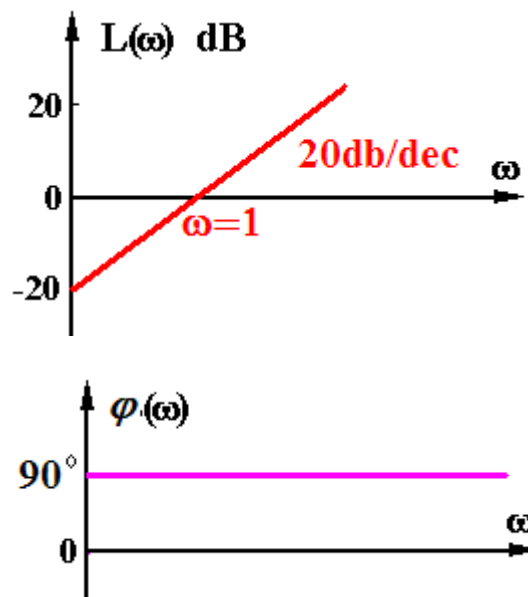
3、微分环节 $G(j\omega) = j\omega$

$$L(\omega) = 20 \lg \omega$$

$$\varphi(\omega) = 90^\circ$$

斜率为20db/dec

一定通过 (1,0db)点



4、惯性环节 $G(j\omega) = \frac{1}{j\omega T + 1}$

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}}$$

$$L(\omega) = 20 \lg \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}} = -20 \lg \sqrt{1 + \omega^2 T^2}$$

$$\varphi(\omega) = -\arctg \omega T$$

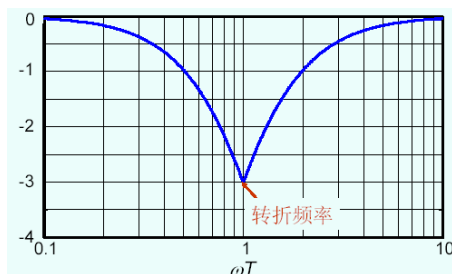
$$L(\omega) = -20 \lg \sqrt{1 + \omega^2 T^2}$$

$$\varphi(\omega) = -\arctg \omega T$$

低频段 $\omega T \ll 1$ 时, $L(\omega) \approx 0$ 0分贝线, 称**低频渐近线**

高频段 $\omega T \gg 1$ 时, $L(\omega) \approx -20 \lg \omega T = -20 \lg \omega - 20 \lg T$

斜率为 -20dB/dec 的直线, 称**高频渐近线**, 与0分贝线交于 $1/T$ 处;
称 $\omega = 1/T$ 为转折频率。 此处误差最大, 为 -3 分贝。

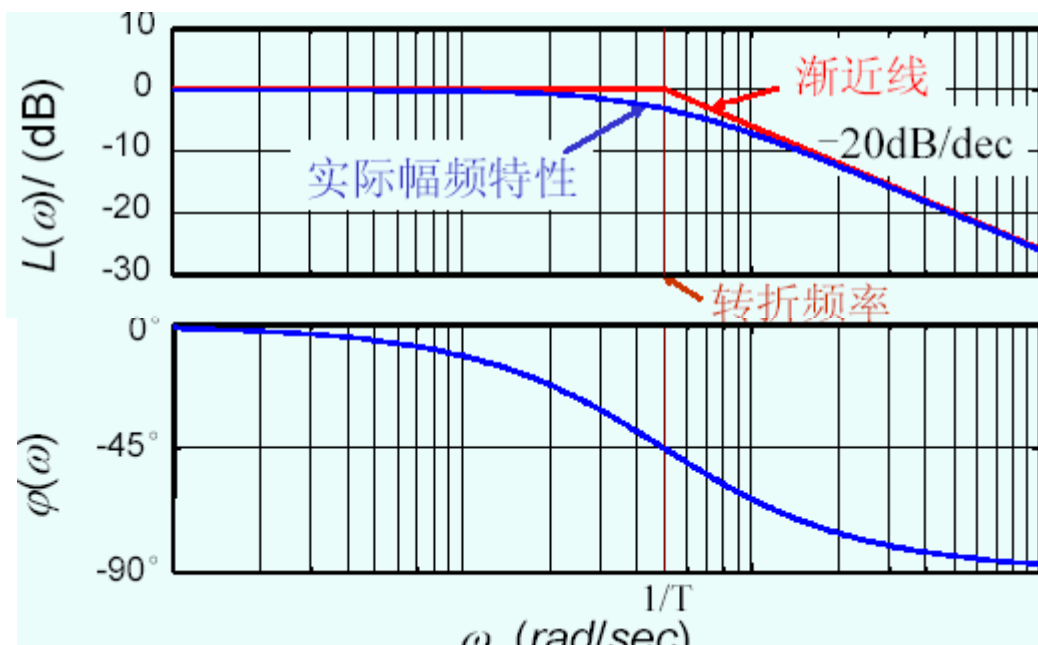


相频特性为单调下降

$$\omega = 0, \quad \varphi(0) = 0^\circ$$

$$\omega = 1/T, \quad \varphi(\omega) = -45^\circ$$

$$\omega = \infty, \quad \varphi(\infty) = -90^\circ$$



4、惯性环节

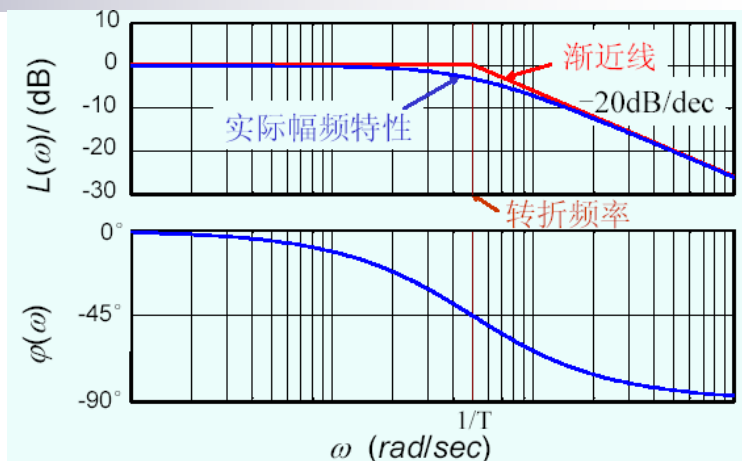
$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega T + 1}$$

由0分贝线和-20db/dec斜率的2条渐近线组合而成

相交点称为转折频率

$$\omega = \frac{1}{T}$$

转折频率处误差最大



5、比例微分 $G(j\omega) = j\omega T + 1$

$$L(\omega) = 20 \lg \sqrt{1 + \omega^2 T^2}$$

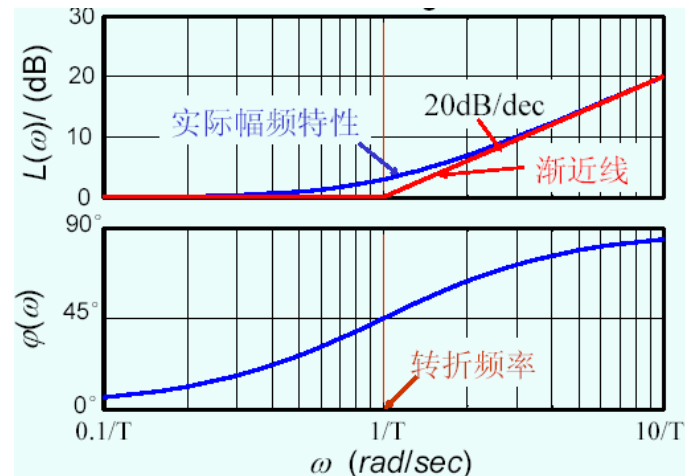
$$\varphi(\omega) = \arctg \omega T$$

由0分贝线和20db/dec斜率的2条渐近线组合而成

相交点称为转折频率

$$\omega = \frac{1}{T}$$

转折频率处误差最大



6、二阶环节

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}, \zeta > 0$$

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2})^2 + 4\zeta^2(\frac{\omega}{\omega_n})^2}} \quad \varphi(j\omega) = -\arctg \frac{2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - (\frac{\omega}{\omega_n})^2}$$

$$L(\omega) = 20 \lg |G(j\omega)| = -20 \lg \sqrt{(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2})^2 + 4\zeta^2(\frac{\omega}{\omega_n})^2}$$

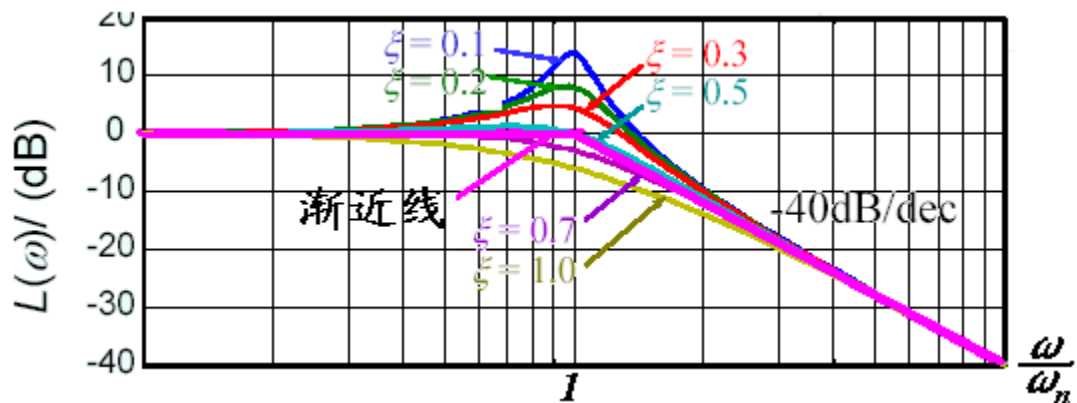
低频段 $\omega \ll \omega_n$ 时, $L(\omega) \approx 0$ 0分贝线, 称低频渐近线

高频段 $\omega \gg \omega_n$ 时, $L(\omega) \approx -20 \lg(\frac{\omega}{\omega_n})^2 = -40 \lg \omega + 40 \lg \omega_n$

斜率为 -40dB/dec 的直线, 称高频渐近线, 与0分贝线交于 $\omega = \omega_n$ 处; 称 $\omega = \omega_n$ 为转折频率。

当 $\omega = \omega_n$ $L(\omega) = -20 \lg 2\zeta$

当 ζ 比较小时, $L(\omega)$ 可以高出零分贝, 即 $G(j\omega)$ 的模大于1, 输出幅值高于输入幅值, 由于谐振造成的。



$$L(\omega) = 20 \lg |G(j\omega)| = -20 \lg \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + 4\zeta^2 \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

$$\text{令 } f(\omega) = \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + 4\zeta^2 \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

$$f'(\omega) = \frac{4\omega^3}{\omega_n^4} - \frac{4\omega}{\omega_n^2} + \frac{8\zeta^2 \omega}{\omega_n^2} = 0$$

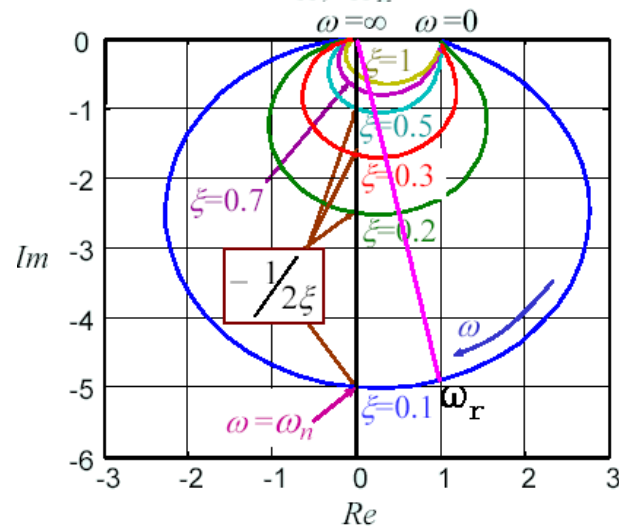
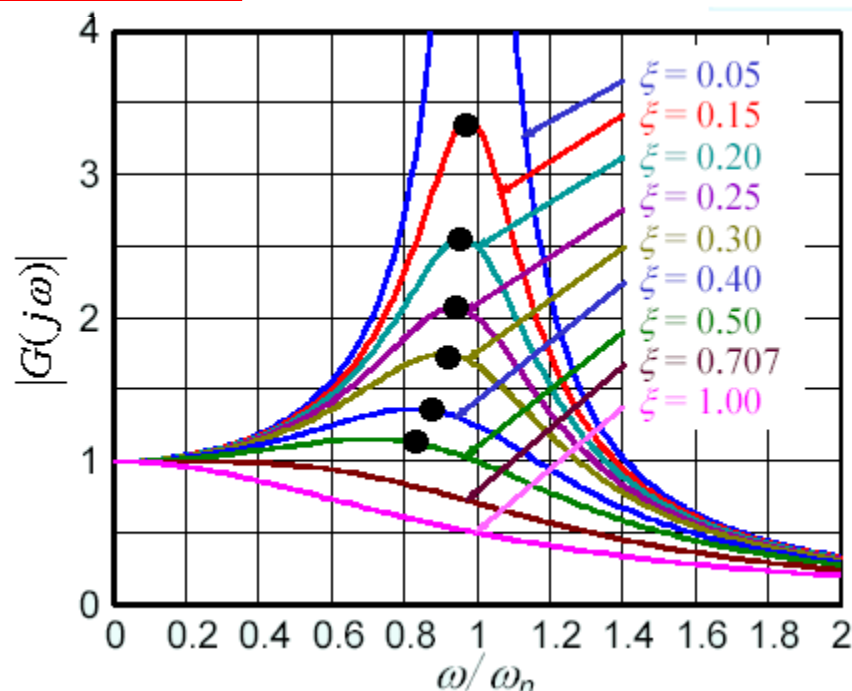
$$\text{在 } \omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}$$

产生极值

称 ω_r 为谐振频率；

$$\text{产生谐振的条件} \quad \zeta \leq \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.707$$

$$\text{其峰值为 } M_r = \frac{1}{2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2}}$$



由图可见，当 ζ 较小时，由于在 $\omega = \omega_n$ 附近存在谐振，幅频特性渐近线与实际特性存在较大的误差， ζ 越小，误差越大。
当 $0.38 < \zeta < 0.7$ 时，误差不超过3dB。

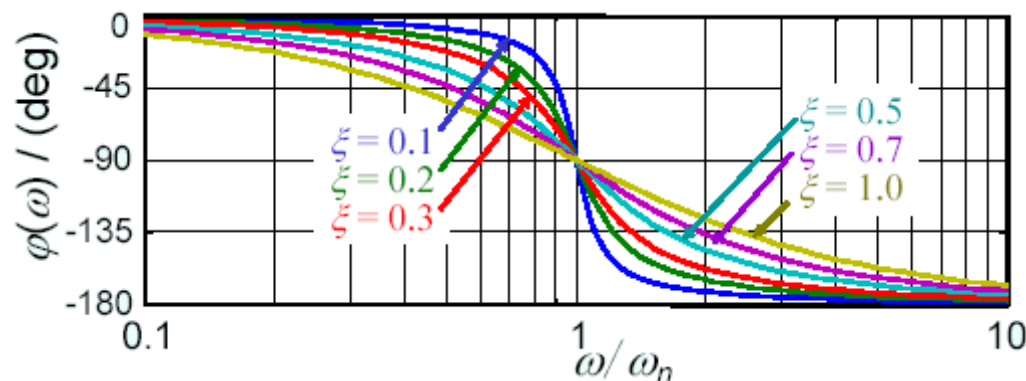
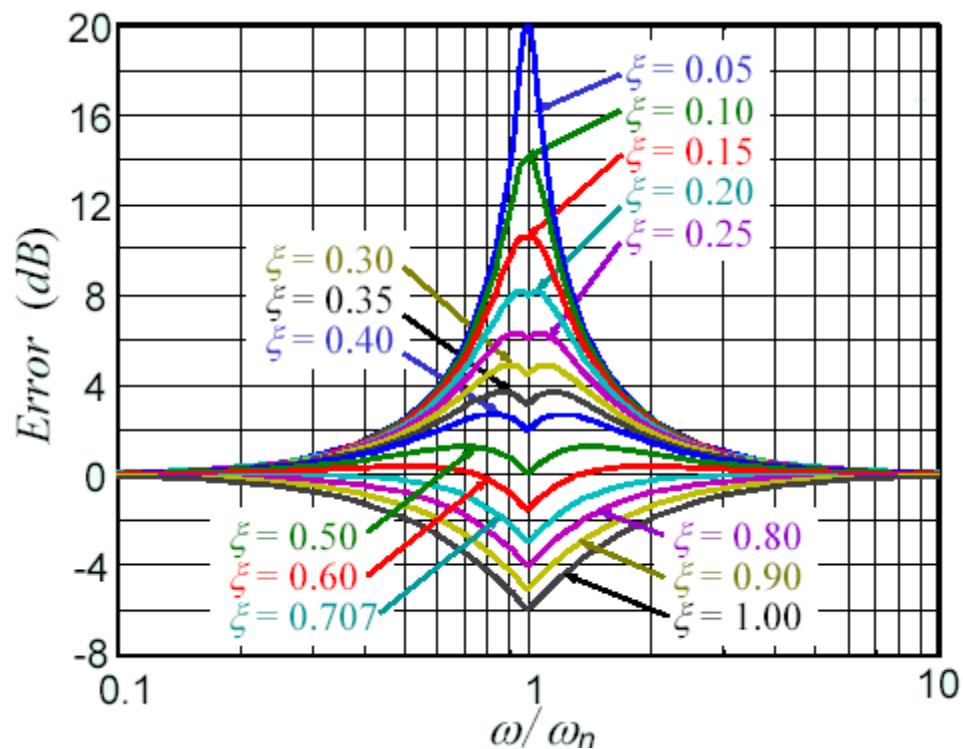
$$\varphi(j\omega) = -\arctg \frac{2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

$$\omega = 0, \quad \varphi(0) = 0^\circ$$

$$\omega = \omega_n, \quad \varphi(\omega) = -90^\circ$$

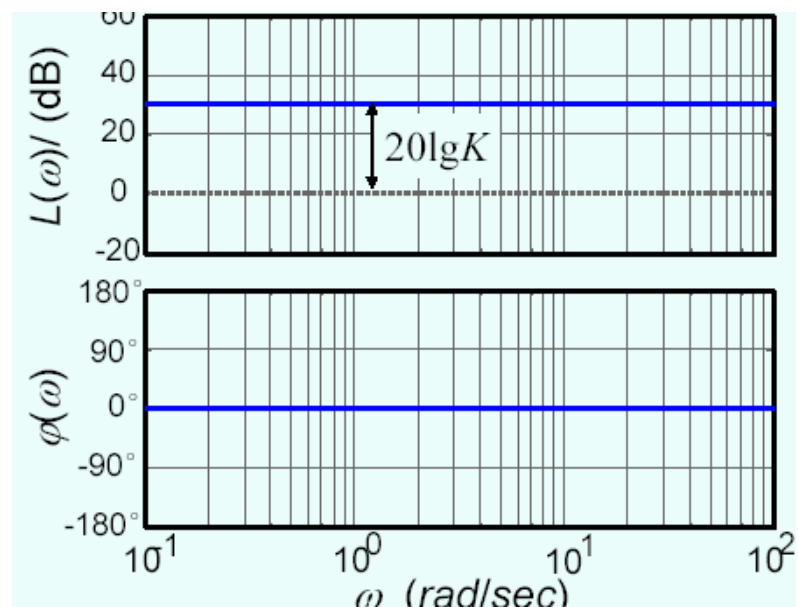
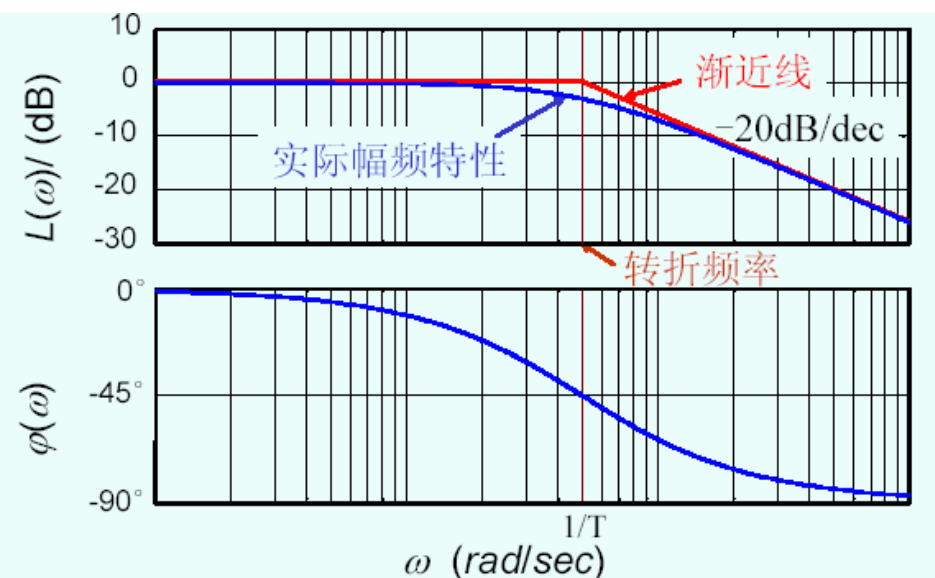
$$\omega = \infty, \quad \varphi(\infty) = -180^\circ$$

ζ 越大，相位变化越平缓。

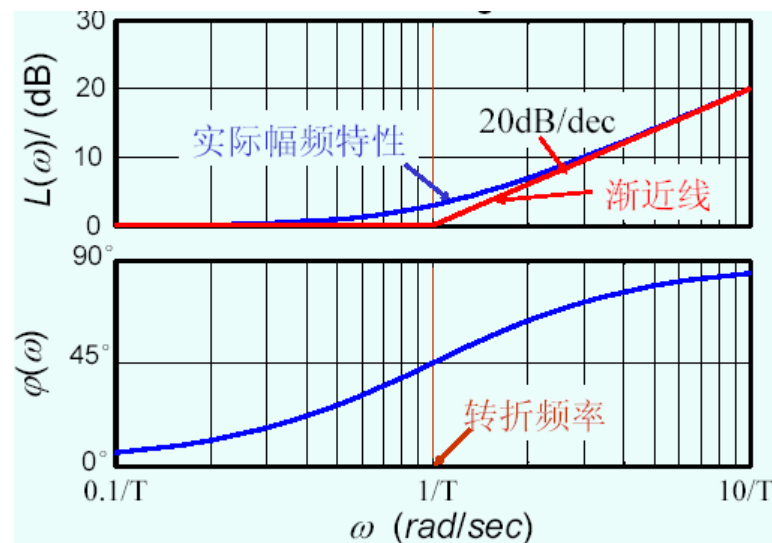


$$G(j\omega) = K$$

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega T + 1}$$

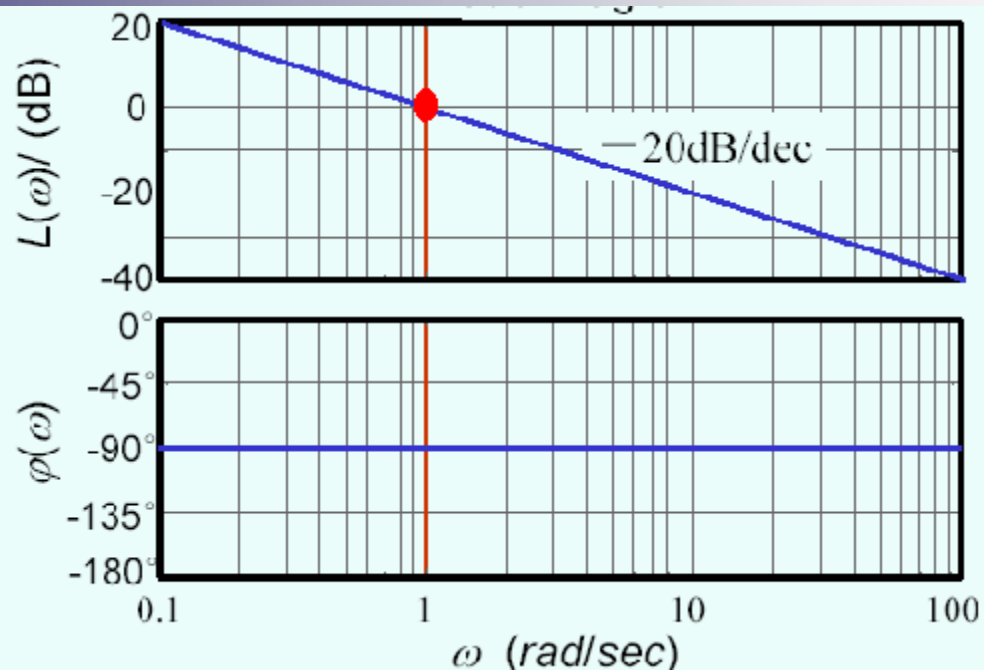


$$G(j\omega) = j\omega T + 1$$

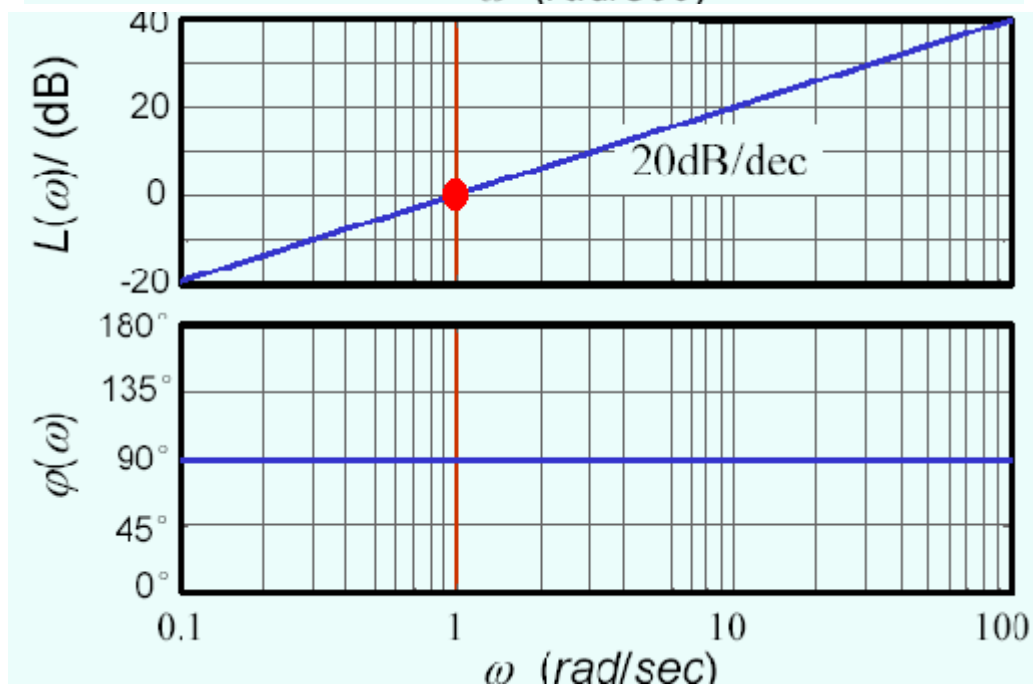


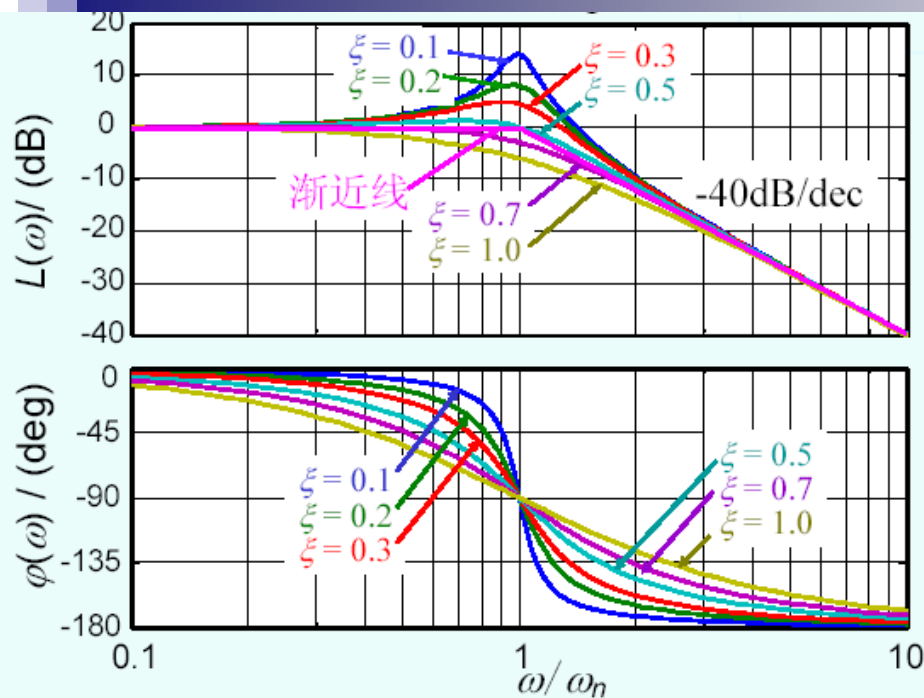
互为倒数的系统对数幅频特性关于0分贝线对称

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$$

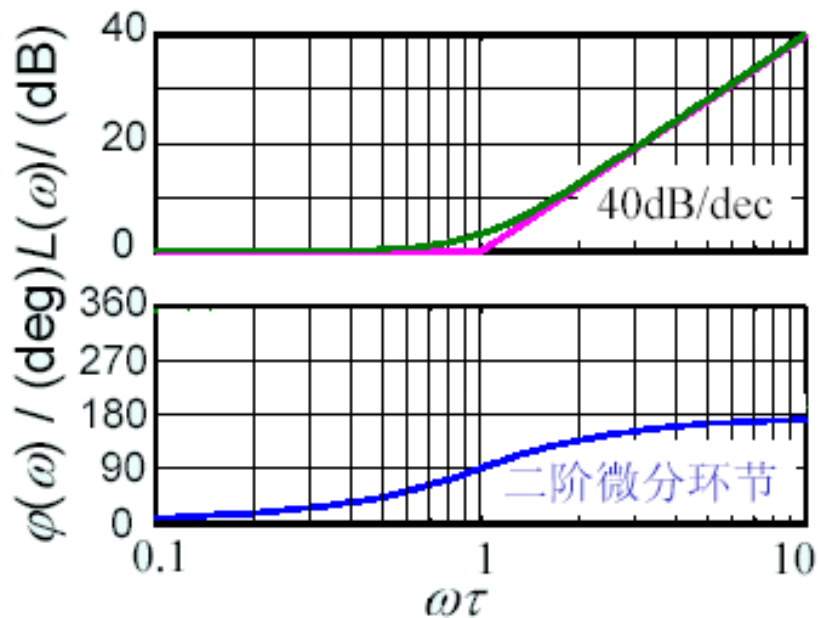


$$G(j\omega) = j\omega$$





$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}, \zeta > 0$$



$$G(s) = \tau^2 s^2 + 2\zeta\tau s + 1, \zeta > 0$$

系统开环bode图的绘制

将开环传递函数表示成若干典型环节的串联形式:

$$GH(j\omega) = G_1(j\omega)G_2(j\omega)\cdots G_n(j\omega)$$

将频率特性写成幅值与相角的形式:

$$GH(j\omega) = |G_1(j\omega)||G_2(j\omega)|\cdots |G_n(j\omega)|\angle[\varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega) + \cdots \varphi_n(\omega)]$$

$$|GH(j\omega)| = |G_1(j\omega)||G_2(j\omega)|\cdots |G_n(j\omega)|$$

$$L(\omega) = 20\lg|GH(j\omega)| = 20\lg|G_1(j\omega)||G_2(j\omega)|\cdots |G_n(j\omega)|$$

$$= 20\lg|G_1(j\omega)| + 20\lg|G_2(j\omega)| + \cdots 20\lg|G_n(j\omega)|$$

$$= L_1(\omega) + L_2(\omega) + \cdots + L_n(\omega)$$

$$\varphi(\omega) = \angle[\varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega) + \cdots \varphi_n(\omega)]$$

对数幅频特性和相频特性都可以由各环节的对数幅频特性和相频特性叠加而成。

比绘制开环系统的幅相曲线方便。

例：已知系统的开环传递函数如下：

$$G(s) = \frac{1000(0.5s + 1)}{s(2s + 1)(s^2 + 10s + 100)}$$

试绘制系统的开环Bode图。

解：

$$G(s) = 10 \cdot (0.5s + 1) \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{(2s + 1)} \cdot \frac{100}{(s^2 + 10s + 100)}$$

易知系统开环包括了五个典型环节：

$$G_1(s) = 10$$

$$G_2(s) = \frac{1}{s}$$

$$G_3(s) = (0.5s + 1)$$

转折频率： $\omega_3 = 2 \text{ rad/s}$

$$G_4(s) = \frac{1}{(2s + 1)}$$

转折频率： $\omega_4 = 0.5 \text{ rad/s}$

$$G_5(s) = \frac{100}{(s^2 + 10s + 100)}$$

转折频率： $\omega_5 = 10 \text{ rad/s}$

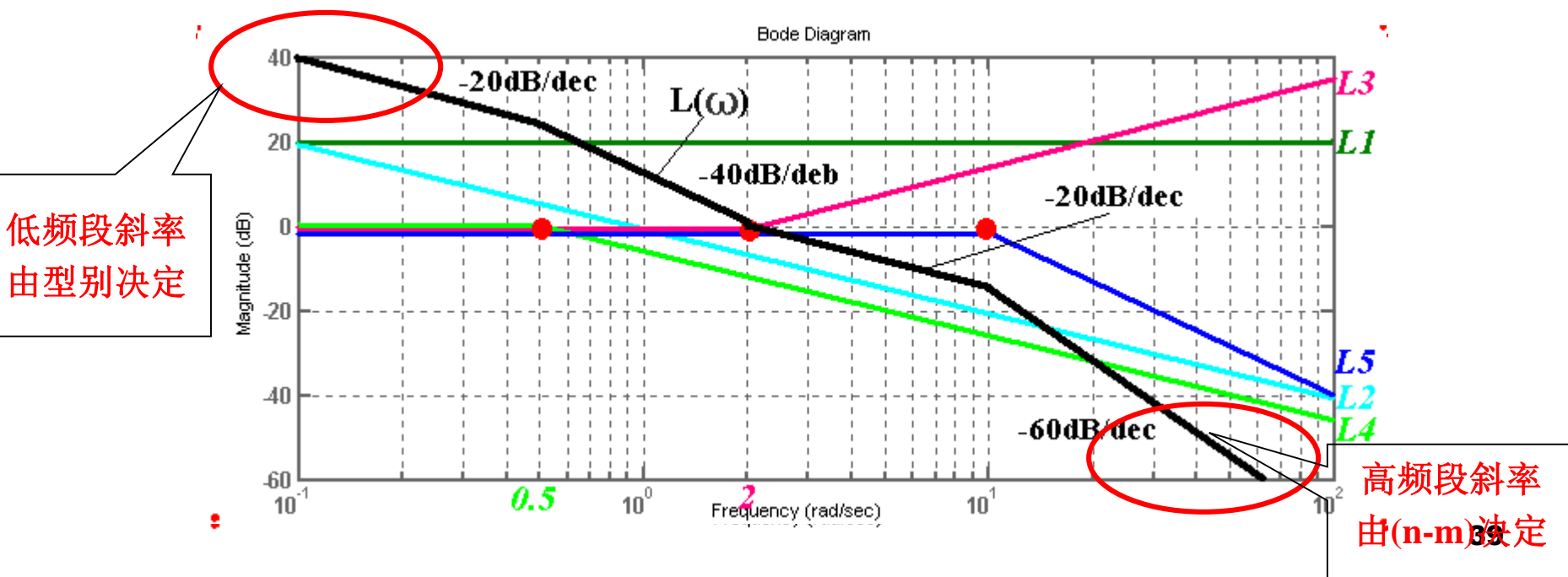
$$G_1(s) = 10 \quad G_2(s) = \frac{1}{s} \quad G_3(s) = (0.5s + 1) \quad \text{转折频率: } \omega_3 = 2 \text{ rad/s}$$

$$G_4(s) = \frac{1}{(2s + 1)} \quad \text{转折频率: } \omega_4 = 0.5 \text{ rad/s}$$

$$G_5(s) = \frac{100}{(s^2 + 10s + 100)} \quad \text{转折频率: } \omega_5 = 10 \text{ rad/s}$$

开环对数幅频及相频特性为:

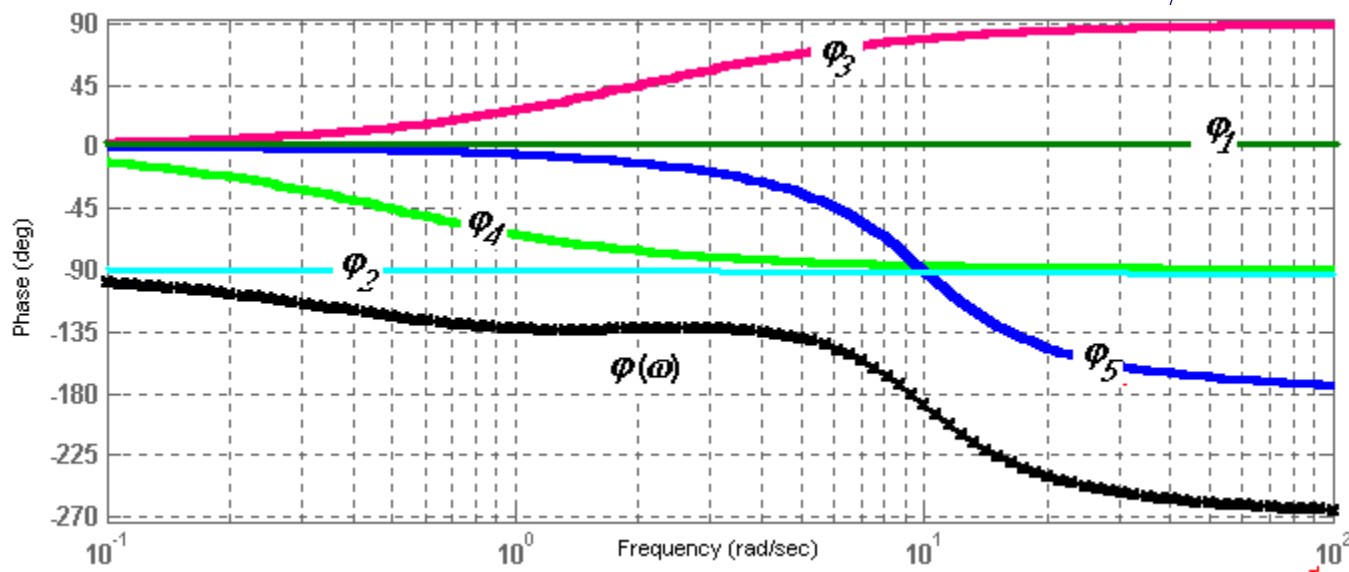
$$L(\omega) = 20 \lg |GH(j\omega)| = L_1(\omega) + L_2(\omega) + L_3(\omega) + L_4(\omega) + L_5(\omega)$$



$$G(s) = \frac{1000(0.5s + 1)}{s(2s + 1)(s^2 + 10s + 100)}$$

$$\varphi(\omega) = \varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega) + \varphi_3(\omega) + \varphi_4(\omega) + \varphi_5(\omega)$$

$$= 0^\circ - 90^\circ + \arctg 0.5\omega - \arctg 2\omega - \arctg \frac{\omega/10}{1 - \omega^2/100}$$



I型系统，起始相位为 $-90^\circ \times N = -90^\circ$ ，
 $(n-m)=3$ ，终止相位为 $-90^\circ \times (n-m) = -270^\circ$
 与幅相曲线结论一致。

低频段： 频率低于最小转折频率的部分；

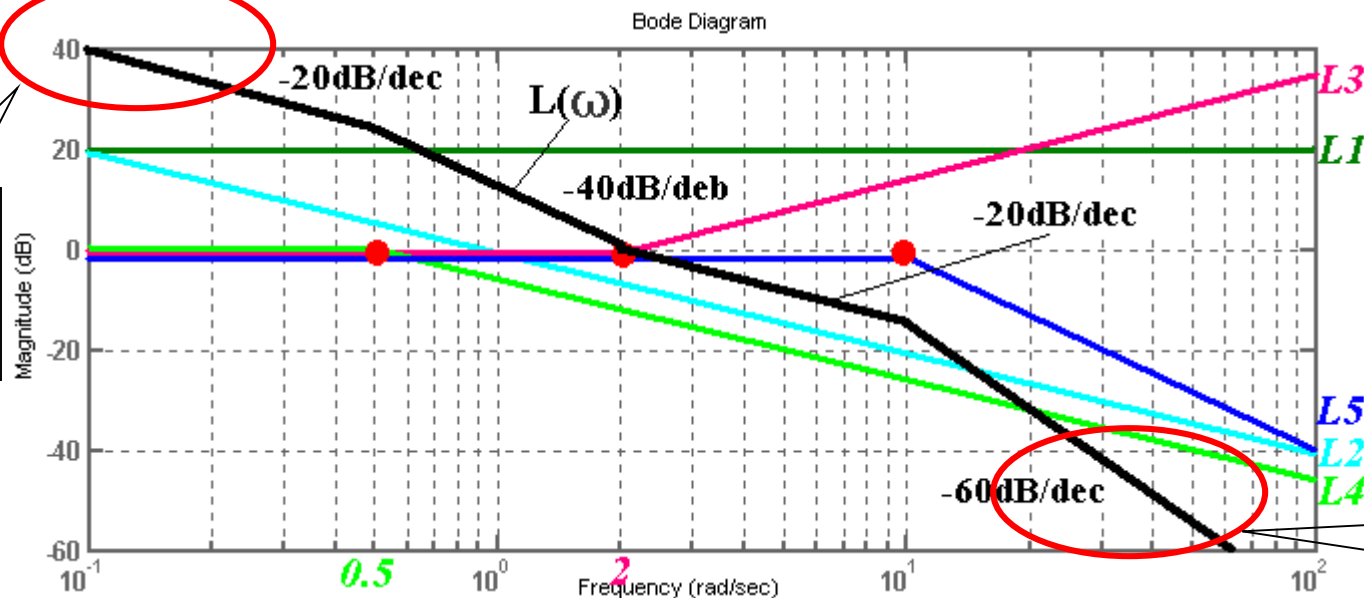
高频段： 频率高于最大转折频率的部分；

Bode图的特点

低频段的斜率取决于积分环节的数目 ν ，斜率为 $-20\nu\text{dB/dec}$ 。
注意到低频段的对数幅频特性可写为：

$$L(\omega) = 20 \lg K - 20\nu \lg \omega$$

当 $\omega = 1 \text{ rad/s}$ 时， $L(\omega) = 20\lg K$ ，即低频段的对数幅频特性或其延长线在 $\omega = 1 \text{ rad/s}$ 时的数值等于 $20\lg K$ 。



低频段
由型别
决定

高频段
由 $(n-m)$
决定

对数幅频特性的渐近线每经过一个转折点，其斜率相应发生变化，斜率变化量由当前转折频率对应的环节决定。

惯性环节，斜率下降20dB/dec；

振荡环节，下降40dB/dec；

一阶比例微分环节，上升20dB/dec；

二阶微分环节，上升40dB/dec。

$$GH(j\omega) = \frac{K(1+j\omega\tau_1)\cdots(1+j\omega\tau_p)[(j\omega\tau_{p+1})^2 + 2\zeta\tau_{p+1}(j\omega) + 1]\cdots}{(j\omega)^v(1+j\omega T_1)\cdots(1+j\omega T_q)[(j\omega T_{q+1})^2 + 2\zeta T_{q+1}(j\omega) + 1]\cdots}$$

各环节的转折频率即为时间常数的倒数：

$$\frac{1}{\tau_1}, \frac{1}{\tau_2}, \dots, \frac{1}{\tau_p}, \frac{1}{\tau_{p+1}}, \dots, \frac{1}{T_1}, \frac{1}{T_2}, \dots, \frac{1}{T_q}, \frac{1}{T_{q+1}}, \dots$$

绘制开环系统Bode图的步骤

1、化 $G(j\omega)$ 为尾1标准型

2、顺序列出转折频率

3、确定基准线 { 基准点 $(\omega = 1, L(1) = 20 \lg K)$ { 第一转折频率之左的特性及其延长线
斜率 $-20 \cdot \nu \text{ dB/dec}$

4、叠加作图 { 一阶 { 惯性环节 **-20dB/dec**
比例微分 **+20dB/dec**
二阶 { 振荡环节 **-40dB/dec**
二阶微分 **+40dB/dec**

5、修正 { ① 两惯性环节转折频率很接近时
② 振荡环节 $\zeta \notin (0.38, 0.8)$ 时

6、检查 { ① $L(\omega)$ 最右端曲线斜率=**-20(n-m) dB/dec**
② 转折点数=(惯性)+(比例微分)+(振荡)+(二阶微分)
③ $\varphi(\omega) \Rightarrow$ **-90° (n-m)**

例：如图所示为最小相位系统的对数幅频特性，求传递函数。

解：由低频段可知，I型系统；

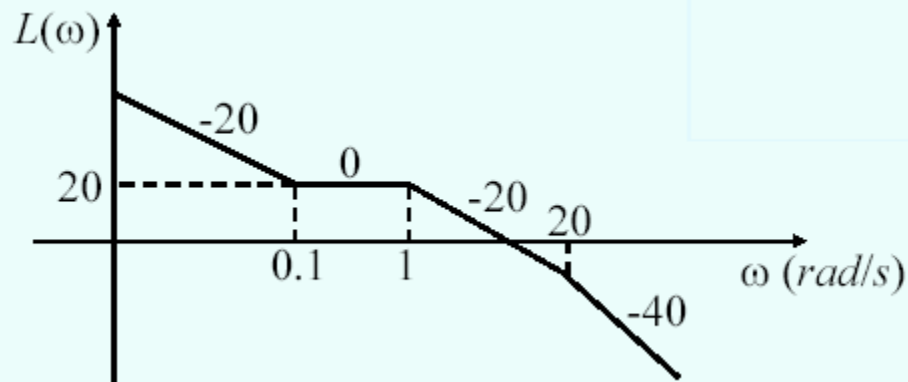
高频段可知 $(n-m)=2$ ；

转折频率有三个：

$\omega_1=0.1$ ，（比例微分环节）

$\omega_2=1$ ，（一阶惯性环节）

$\omega_3=20$ （一阶惯性环节）



$$G_1 = (1 + j10\omega)$$

$$G_2 = \frac{1}{j\omega + 1}$$

$$G_3 = \frac{1}{j0.05\omega + 1}$$

系统开环频率特性为

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{K(1 + j10\omega)}{j\omega(1 + j\omega)(1 + j0.05\omega)}$$

注意到， $(\lg 0.1, 20)$ 和 $(\lg 1, 20\lg K)$ 两点位于斜率为 -20dB/dec 的直线上。由：

$$\frac{20 - 20\lg K}{\lg 0.1 - \lg 1} = -20 \quad \text{得} \quad \mathbf{K=1}$$

传递函数为：

$$GH(s) = \frac{(1 + 10s)}{s(1 + s)(1 + 0.05s)}$$

如果根据实验测出频率特性的对数幅频特性和相频特性，则可以求出相应的传递函数。

最小相位系统根据对数幅频特性，求传递函数的步骤：

- 由低频段斜率确定系统型别 $-20\nu \text{ dB/dec}$;
- 根据转折点确定转折频率和环节数目;
- 根据斜率变化确定环节特点（零点或极点）
- 根据低频线段（或延长线）必须经过 $(1, 20\lg K)$ 点，求 K

例：已知最小相位系统的渐近幅频特性如图所示，试求取各系统的开环传递函数，并作出相应的相频特性曲线。

解：几型系统？

二型系统，有2个积分环节

几个转折频率？

2个转折频率

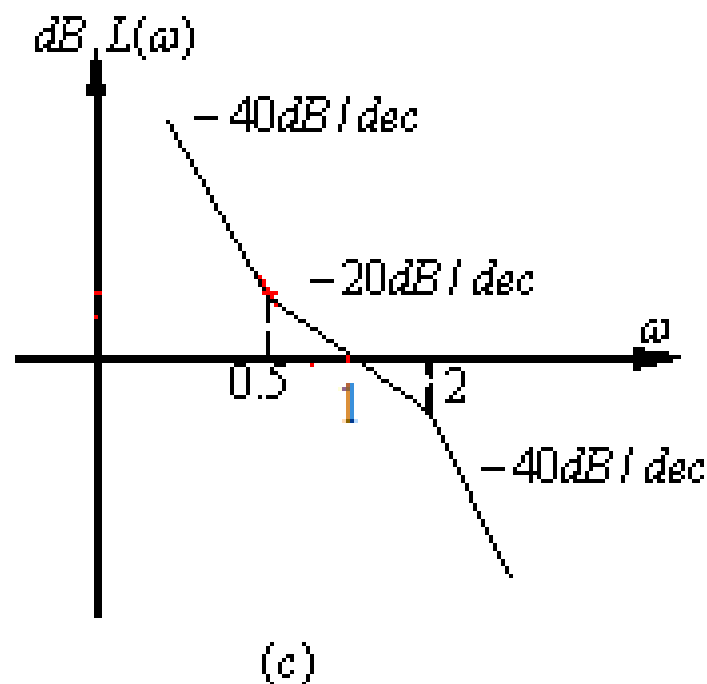
$\omega_1=0.5$ （比例微分环节）

$$G_1 = (1 + j2\omega)$$

$\omega_2=2$, （一阶惯性环节）

$$G_2 = \frac{1}{j0.5\omega + 1}$$

$$G(s) = \frac{K(1 + 2s)}{s^2(1 + 0.5s)}$$

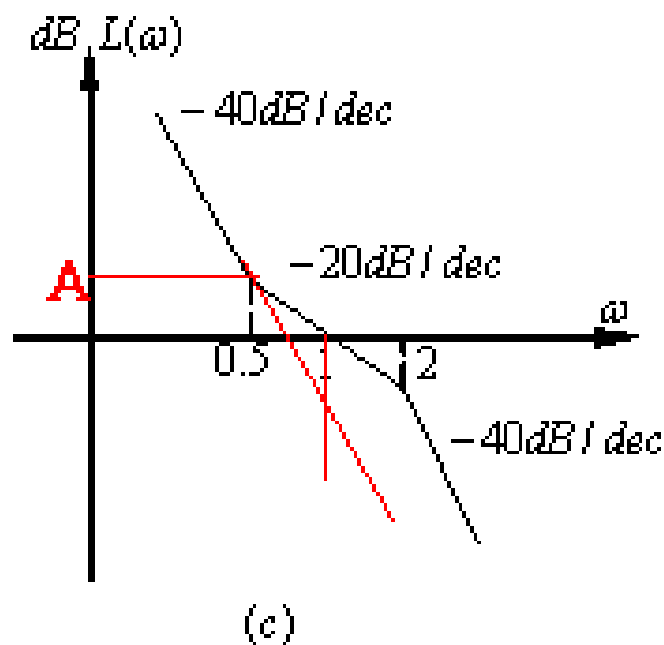


$$G(s) = \frac{K(1 + 2s)}{s^2(1 + 0.5s)}$$

$$\frac{A - 20 \lg K}{\lg 0.5 - \lg 1} = -40, \quad \frac{A - 0}{\lg 0.5 - \lg 1} = -20$$

解得 $K = 0.5$

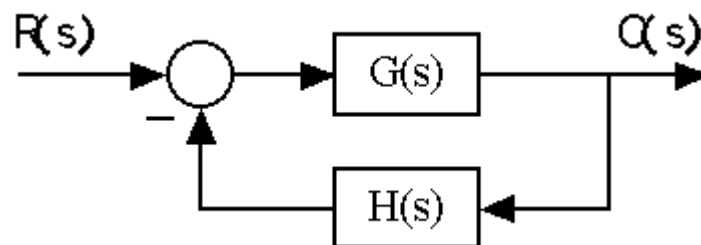
$$G(s) = \frac{0.5(1 + 2s)}{s^2(1 + 0.5s)}$$



5.3稳定性分析——Nyquist判据

闭环传递函数为

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$



为了保证系统稳定，特征方程 $1+GH(s)=0$ 的全部根，都必须位于左半 s 平面。

奈奎斯特稳定判据正是将开环频率特性 $G(j\omega)H(j\omega)$ 与 $1+GH(s)=0$ 在右半 s 平面内的根数联系起来的判据。

这种方法无须求出闭环极点，得到广泛应用。

1、幅角原理

复变函数 $F(s)$ 为
$$F(s) = \frac{(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)}$$

s 平面上一条封闭的曲线 Γ_s 不通过 $F(s)$ 的奇点；

映射在 $F(s)$ 平面上也是一条封闭的曲线 Γ_F

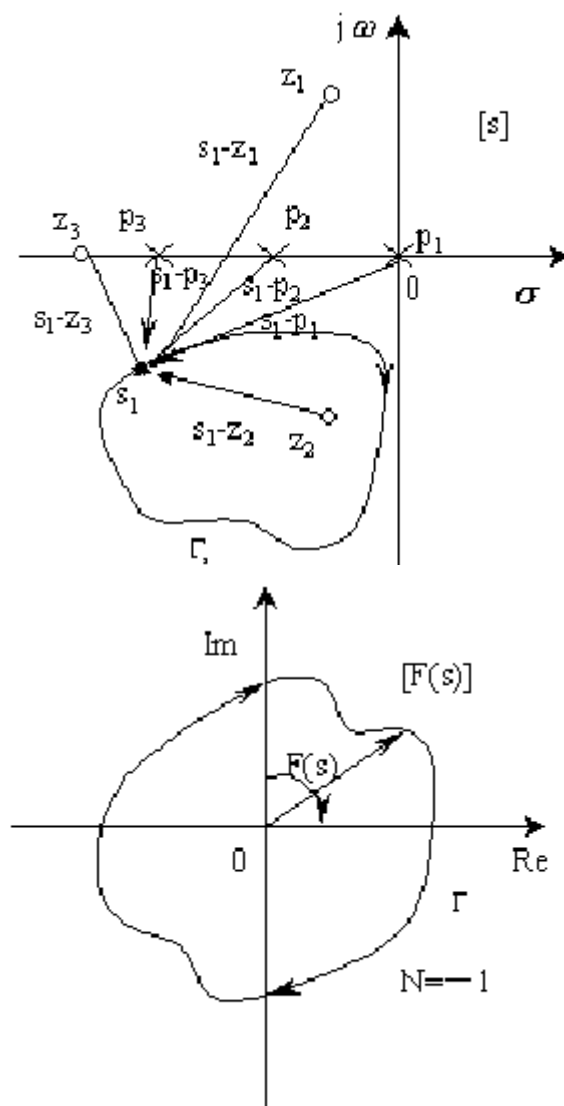
封闭的曲线 Γ_s 上任取一点 s_1 ，其辅助函数 $F(s)$ 对应的幅角为

$$\angle F(s) = \sum_{i=1}^m \angle(s - z_i) - \sum_{j=1}^n \angle(s - p_j)$$

当解析点 s_1 沿封闭曲线按顺时针方向旋转一周后再回到起始点时，封闭曲线外的零极点
到 s_1 的向量旋转了0度，封闭曲线内的零极点
指向 s_1 的向量旋转了 -2π ，

$$\angle F(s_1) = -2\pi(Z - P)$$

Z和**P**为封闭曲线内的零极点数



$$\angle F(s_1) = -2\pi(Z - P)$$

表明封闭的曲线 Γ_F 围绕原点**顺时针**方向转 $(Z-P)$ 圈

若用 N 代表曲线 Γ_F 围绕原点**逆时针**方向转的圈数

$$N = P - Z$$

幅角原理：

S 平面一封闭曲线 Γ_s **顺时针**包围 $F(s)$ 的零点
个数为 Z ,极点个数为 P ;

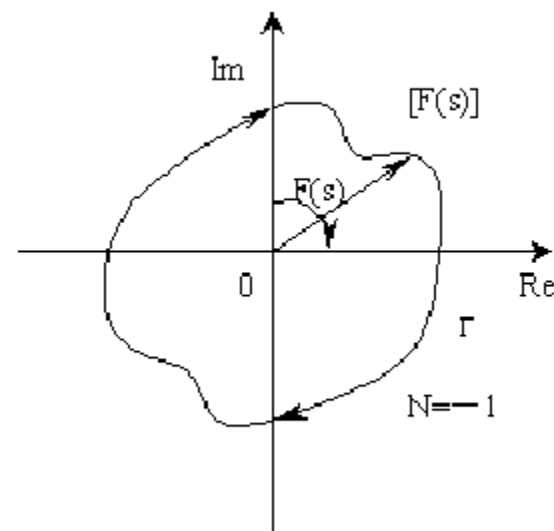
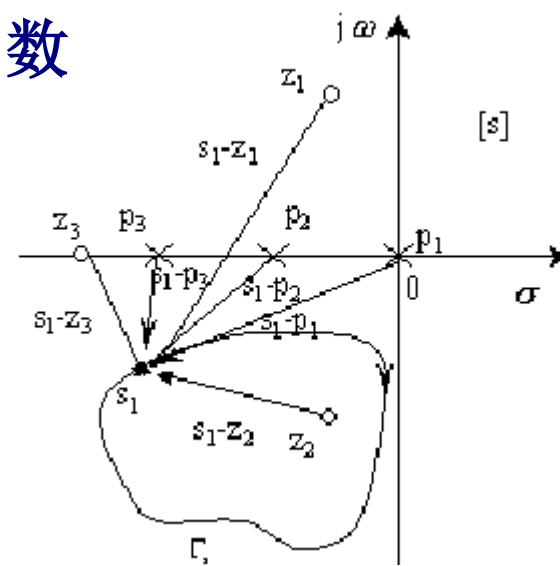
Γ_s 在 $F(s)$ 平面映射的曲线 Γ_F **逆时针**围绕原
点旋转的圈数为 N

$$N = P - Z$$

$N > 0$ 表示逆时针包围的圈数;

$N < 0$ 表示顺时针包围的圈数;

封闭曲线与形状无关



2、Nyquist判据（奈氏判据）的证明

1) 辅助函数

定义复变函数 $F(s)$ 为

$$F(s) = 1 + G(s)H(s)$$

若开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

$$F(s) = 1 + G(s)H(s) = 1 + \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N(s) + D(s)}{D(s)}$$

辅助函数的极点(P)就是开环传递函数的极点

零点(Z)就是闭环传递函数的极点

找一条合适的封闭曲线 Γ_s 顺时针包围 $F(s)$ 的零点个数为Z,
极点个数为P;

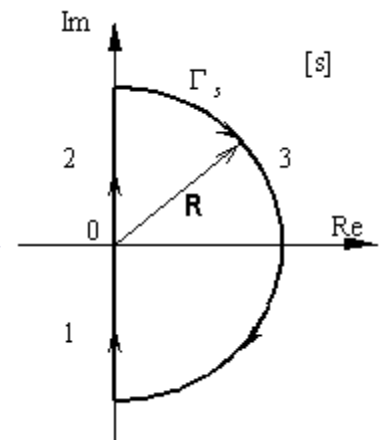
曲线 Γ_F 逆时针围绕原点旋转的圈数为N

$$N = P - Z$$

$$Z = P - N$$

2) 封闭曲线 Γ_s

关心的是 $F(s)=1+G(s)H(s)$ 在 s 右半平面的极点数，所以在 s 平面的封闭曲线 Γ_s 应包括整个 s 右半平面。



半圆的半径为无穷大

但封闭曲线的条件是不通过 $F(s)$ 的奇点；

下面分虚轴上有开环极点和没有开环极点两种情况讨论

❖ 虚轴上无开环极点

将封闭曲线 Γ_s 分为三段讨论映射

第1段，负虚轴； $s = -j\omega$

第2段，正虚轴； $s = j\omega$

第3段，无穷大半圆。 $s = \lim_{R \rightarrow \infty} R e^{j\phi}$

$$s = -j\omega$$

$$F(s)\Big|_{s=-j\omega} = 1 + |G(-j\omega)H(-j\omega)|e^{j\angle G(-j\omega)H(-j\omega)}$$

$$s = j\omega$$

ω 在 $(-\infty, 0)$ 频率特性

$$F(s)\Big|_{s=j\omega} = 1 + |G(j\omega)H(j\omega)|e^{j\angle G(j\omega)H(j\omega)}$$

ω 在 $(0, \infty)$ 频率特性

$$s = \lim_{R \rightarrow \infty} Re^{j\phi}$$

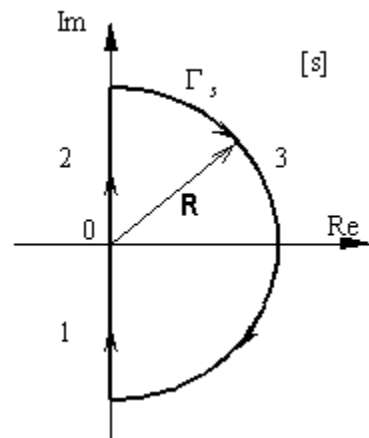
$$1 + G(s)H(s)\Big|_{s=\lim_{R \rightarrow \infty} Re^{j\phi}} = 1 + \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}\Big|_{s=\lim_{R \rightarrow \infty} Re^{j\phi}}$$

$$= 1 + \left(\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{b_m}{a_n} \cdot \frac{1}{R^{n-m}} \right) e^{-j(n-m)\phi}$$

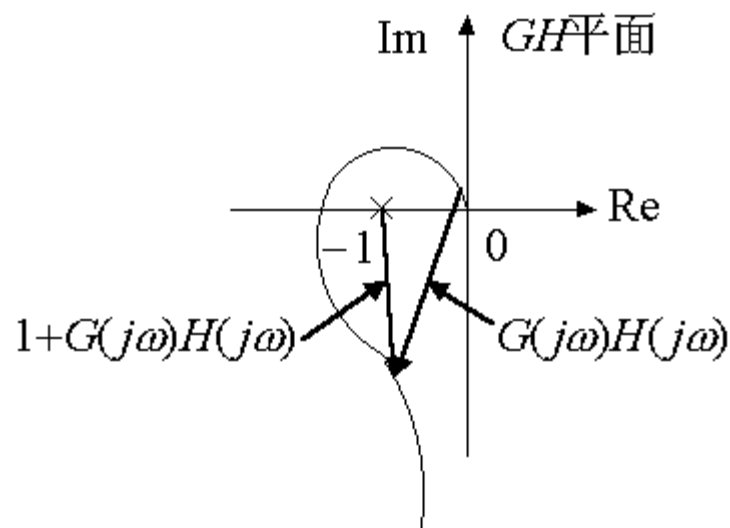
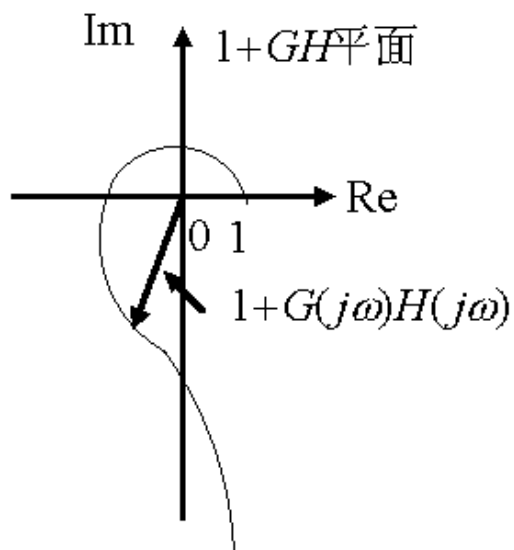
当 $n > m$ 时，映射 $1 + G(j\omega)H(j\omega)$ 平面的 $(1, j0)$ ；

当 $n = m$ 时，映射 $1 + G(j\omega)H(j\omega)$ 平面的实轴上某点；

映射平面转到了 $1 + G(j\omega)H(j\omega)$ 平面上 Γ_F 。



映射平面转到了 $1+G(j\omega)H(j\omega)$ 平面上 Γ_F 。



$1+G(j\omega)H(j\omega)$ 曲线对原点的包围，恰等于 $G(j\omega)H(j\omega)$ 轨迹对 $-1+j0$ 点的包围

$F(s)=1+G(s)H(s)$ 在右半 s 平面的零点数为 Z 与极点数 P 以及 $G(j\omega)H(j\omega)$ 在 $G(j\omega)H(j\omega)$ 平面上逆时针围绕 $-1+j0$ 点旋转的圈数 N 的关系

$$Z=P-N$$

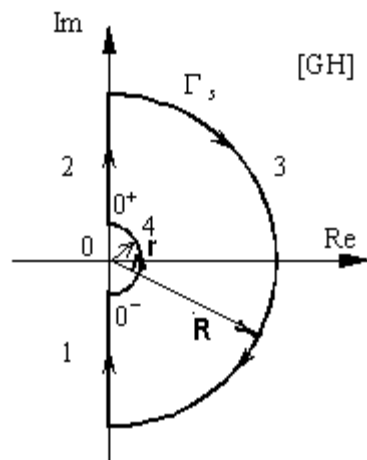
稳定的充要条件是： $P=N$

❖ 虚轴上有开环极点的情况

如

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(Ts + 1)}$$

Γ_s 曲线增加第4部分, 以原点为圆心, 无穷小半径逆时针作圆, 那么第4段为



$$0^- < \omega < 0^+ \quad s = \lim_{r \rightarrow 0} r e^{j\theta} \quad -90^\circ < \theta < 90^\circ$$

$$G(s)H(s) \bigg|_{s=\lim_{r \rightarrow 0} r e^{j\theta}} = \frac{K(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1) \dots (\tau_m s + 1)}{s^v (T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \dots (T_n s + 1)} \bigg|_{s=\lim_{r \rightarrow 0} r e^{j\theta}}$$

$$= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{K}{r^v} e^{-jv\theta} = \infty e^{-jv\theta} \quad -90^\circ \cdot v < v \cdot \theta < v \cdot 90^\circ$$

第4部分映射到 $G(j\omega)H(j\omega)$ 平面上为半径无穷大的圆弧, 圆弧角度为顺时针 $v\pi$;

对于虚轴上有共轭虚根, 也可采用类似的方法。

关于稳定性的充要条件仍然是 **P=N**

3、Nyquist判据应用举例

步骤:

- 绘制出幅相曲线 $G(j\omega)H(j\omega)$ 曲线[ω 在 $(0,\infty)$]
- 关于实轴对称的绘制出 ω 在 $(-\infty,0)$ 范围的 $G(j\omega)H(j\omega)$ 曲线;
- 若是 v 型系统, 从 0^- 到 0^+ 顺时针补画 $v\pi$ 圆弧; 形成封闭曲线。
- 判断所绘制封闭曲线围绕 $-1+j0$ 点圈数 N ;
- 已知开环传递函数在右半平面的极点数 P
- 最后可得 $Z=P-N$

若 $Z=0$,系统稳定; 否则系统不稳定, 且有 Z 个不稳定根。

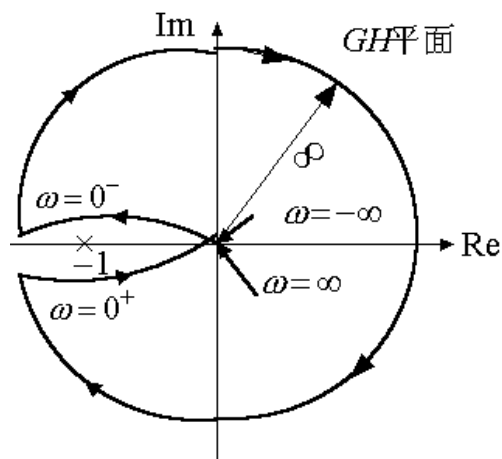
例：已知开环传递函数为 $G(s)H(s) = \frac{K(\tau s + 1)}{s^2(Ts + 1)}$, ($T > 0, \tau > 0$)

试用奈氏判据分析当 $T > \tau$, $T = \tau$ 和 $T < \tau$ 时系统的稳定性。

解：

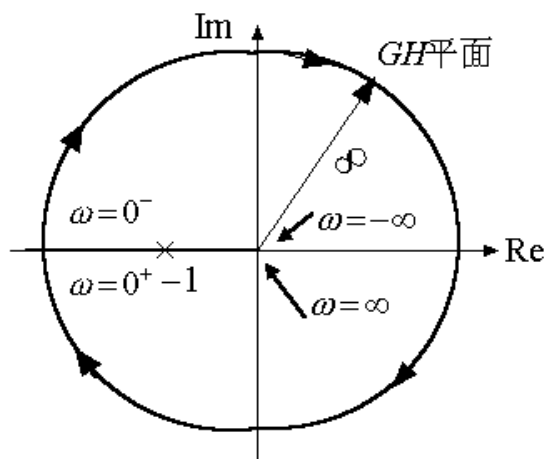
$$|G(j\omega)| = \frac{K \sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}}{\omega^2 \sqrt{1 + \omega^2 T^2}} \quad \varphi(\omega) = -180^\circ + \arctg \omega \tau - \arctg \omega T$$

$T < \tau$



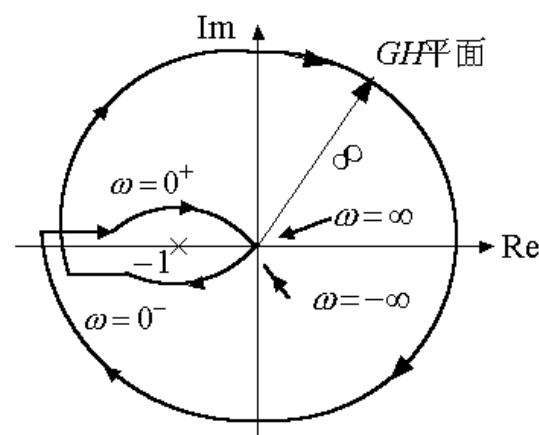
$P=0, N=0$
 $Z=0$, 稳定

$T = \tau$



经过 $-1+j0$ 点
临界稳定

$T > \tau$



$P=0, N=-2$
 $Z=P-N=2$
不稳定

例设一个闭环系统具有下列开环传递函数：

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(Ts - 1)}$$

试确定该闭环系统的稳定性。

解：

$$\varphi(\omega) = -90^\circ - 180^\circ + \arctg T\omega = -270^\circ + \arctg \omega T$$

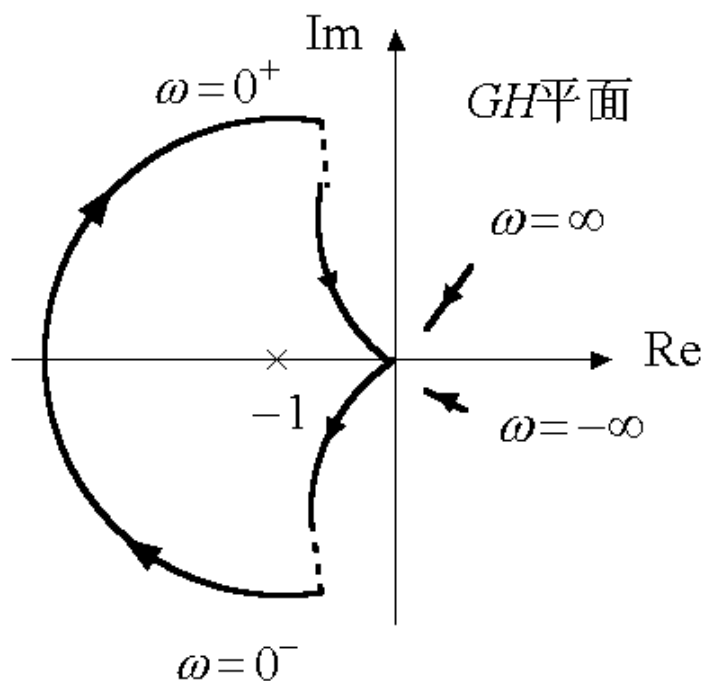
$$|G(j\omega)H(j\omega)| = \frac{K}{\omega \sqrt{1 + \omega^2 T^2}}$$

$$P=1$$

$$N=-1$$

$$Z=P-N=2$$

系统不稳定，有两个不稳定根。



例 已知单位反馈系统开环传递函数, 分析系统稳定性。

解: $P = 1$

$$G(s) = \frac{K}{Ts - 1}$$

$$|G(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{1+T^2\omega^2}} \quad \angle G(j\omega) = -(180^\circ - \arctan \omega T)$$

$$G(j0) = K \angle -180^\circ \qquad G(j\infty) = 0 \angle -90^\circ$$

$$G(j\omega) = \frac{-K}{1+T^2\omega^2} + \frac{-KT\omega}{1+T^2\omega^2}j$$

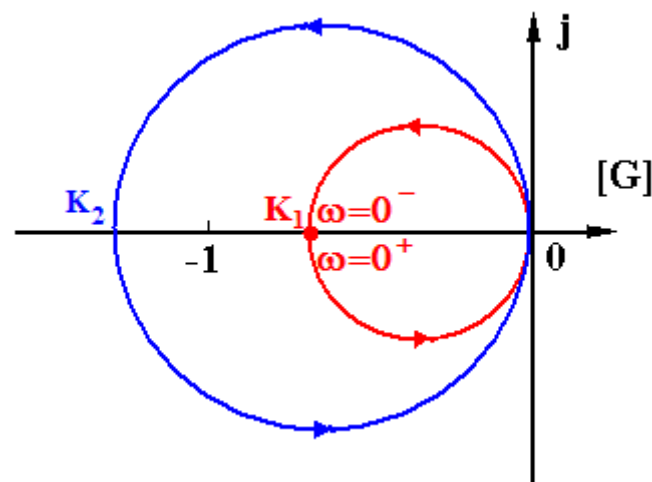
$$K_1 < 1 \quad N = 0$$

$$Z = P - N = 1 - 0 = 1 \quad (\text{不稳定})$$

$$K_2 > 1 \quad N = 1$$

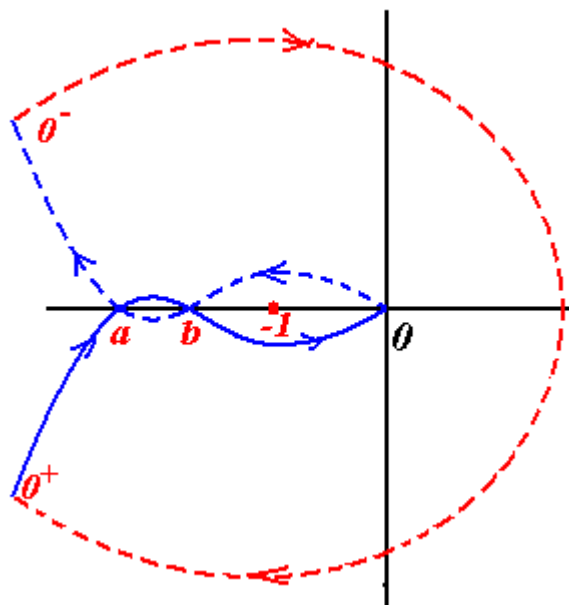
$$Z = P - N = 1 - 1 = 0 \quad (\text{稳定})$$

$K = 1$ 穿过(-1, $j0$)点 (临界稳定)



a点: 由下而上穿过 $-1 \sim -\infty$ 段实轴, 对应顺时针包围 $(-1, j0)$ 点

b点: 由上而下穿过 $-1 \sim -\infty$ 段实轴, 对应逆向包围 $(-1, j0)$ 点



Nyquist判据中“穿越”的概念(只需绘制 $\omega 0 \sim \infty$ 的幅相曲线即可)

穿越: 指开环Nyquist曲线穿过 $(-1, j0)$ 点**左边实轴**时的情况。

正穿越: ω 增大时, Nyquist曲线**由上而下**穿过 $-1 \sim -\infty$ 段实轴。

正穿越次数用 N^+ 表示。

正穿越时, 相角增加, 相当于Nyquist曲线**逆时针**包围 $(-1, j0)$ 点一圈。

负穿越: ω 增大时, Nyquist曲线**由下而上**穿过 $-1 \sim -\infty$ 段实轴。负穿越相当于Nyquist曲线**顺时针**包围 $(-1, j0)$ 点一圈。负穿越次数用 N^- 表示。

那么有 $N=2(N^+ - N^-)$

奈氏判据可以叙述为 $Z=P-2(N^+ - N^-)$

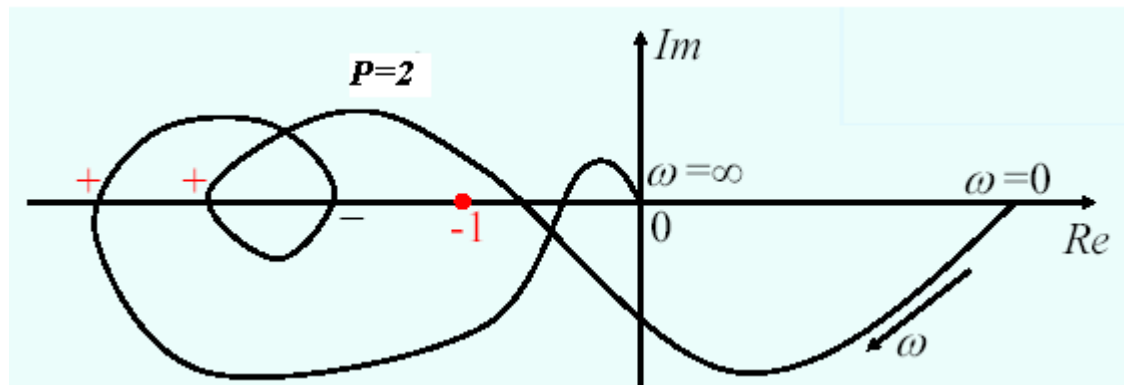
Nyquist稳定判据：当 ω 由0变化到 ∞ 时，穿越（-1，j0）**左边实轴**

$$N^+ = 2$$

$$N^- = 1$$

$$Z = P - 2(N^+ - N^-) = 2 - 2(2 - 1) = 0$$

所示系统闭环稳定。

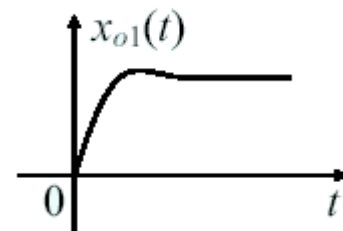
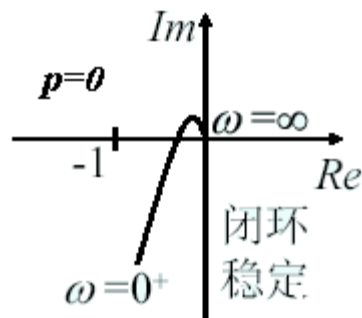
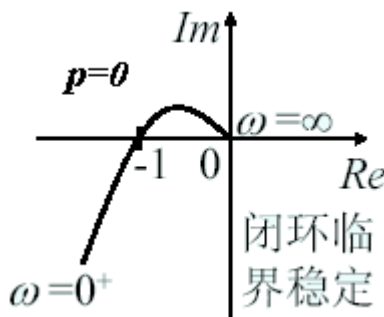
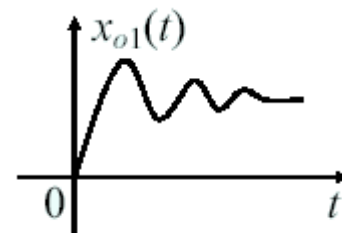
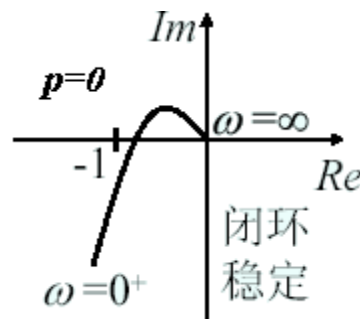
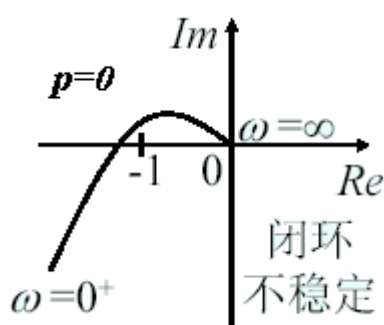


5.4 相对稳定性——幅值裕度和相位裕度

相对稳定性

时域分析中可以用超调量或者特征根靠近虚轴的远近来衡量。

频域分析中也有衡量相对稳定性的量，就是幅值裕度和相位裕度。

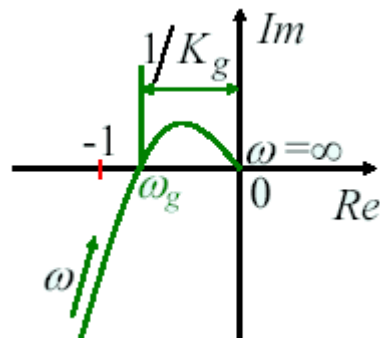


结论：开环Nyquist曲线与 $(-1, j0)$ 点的接近程度可以反映系统闭环的相对稳定性，即稳定程度。

1、幅值裕度 K_g

开环频率特性曲线与GH平面负实轴的交点频率称为**相位穿越频率**，显然它应满足

$$\angle G(j\omega_g)H(j\omega_g) = -180^\circ$$



幅值裕度 K_g ：是指相位穿越频率所对应的开环幅频特性的倒数值，即

$$K_g = \frac{1}{|G(j\omega_g)H(j\omega_g)|}$$

或
$$K_g(dB) = -20 \lg |G(j\omega_g)H(j\omega_g)|$$

对于开环系统没有右半平面的极点情况，即 **$P=0$** ，

$K_g > 1$ [$K_g(dB) > 0$]代表系统稳定；

$K_g = 1$ [$K_g(dB) = 0$]代表系统临界稳定；

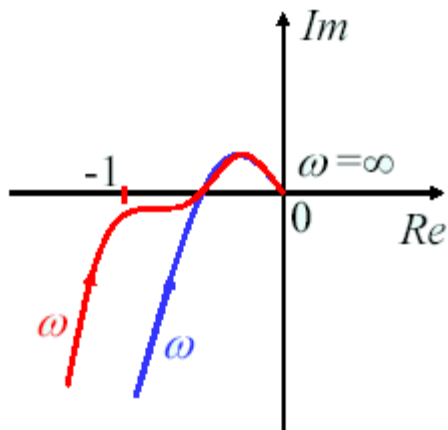
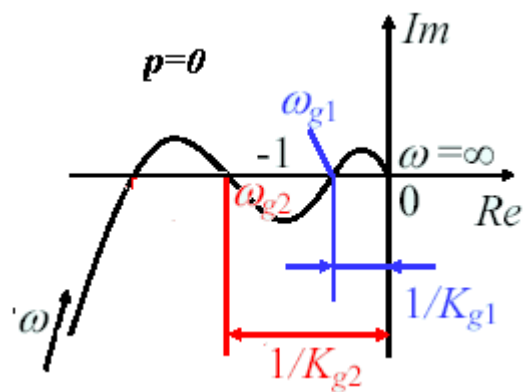
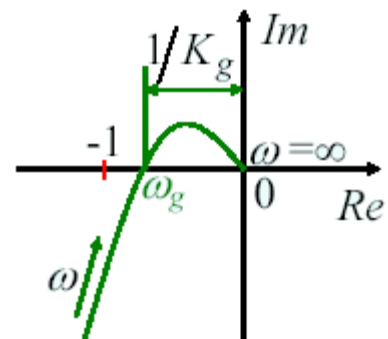
$K_g < 1$ [$K_g(dB) < 0$]代表系统不稳定。

对于开环系统有右半平面的极点情况,情况复杂，有时正好相反。

开环系统没有右半平面的极点情况：

幅值裕度的物理意义可表述为：

在保持系统稳定条件下，开环增益所
允许增加的最大倍数或最大分贝数。



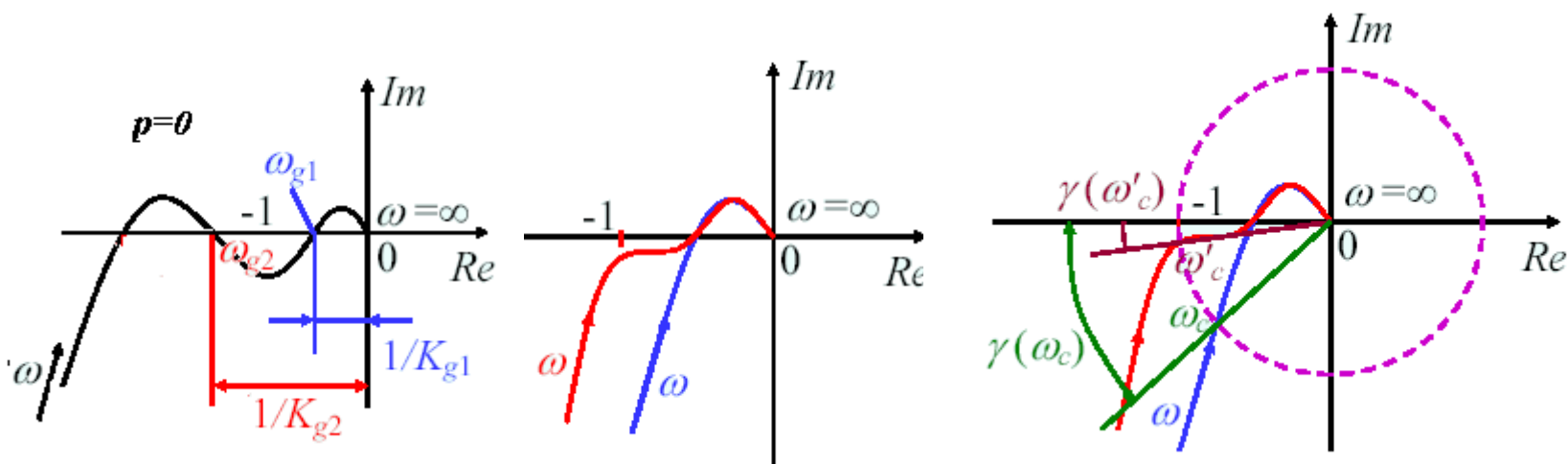
幅值裕度的局限

◆ 条件稳定系统

条件稳定系统需要两个幅值裕度 $K_{g1}(>1)$ 和 $K_{g2}(<1)$ 共同表示。

物理意义： 条件稳定系统开环增益放大 K_{g1} 或缩小 K_{g2} 倍时，系统均达到临界稳定状态。

◆ 幅值裕度相同但稳定程度不同的系统



2、相位裕度 $\gamma(\omega_c)$

幅值穿越频率 ω_c

开环Nyquist曲线与单位圆的交点对应的频率 ω_c 称为幅值穿越频率，又称剪切频率。

$$|G(j\omega_c)H(j\omega_c)| = 1 \quad 20 \lg |G(j\omega_c)H(j\omega_c)| = 0$$

相位裕度

是指幅值穿越频率所对应的相移 与 -180° 角的差值，即

$$\gamma = \varphi(\omega_c) - (-180^\circ) = \varphi(\omega_c) + 180^\circ$$

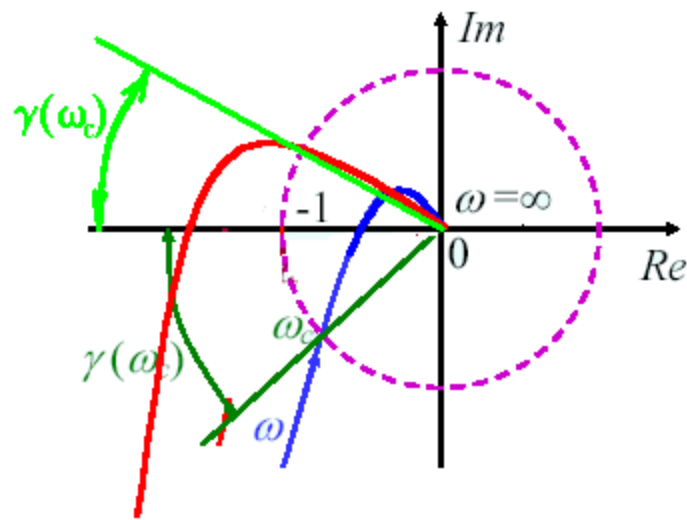
对于开环系统在右半平面无极点时，

闭环系统稳定，则有 $\gamma > 0$ ；

闭环系统临界稳定，则有 $\gamma = 0$ ；

闭环系统不稳定，则有 $\gamma < 0$ ；

对于开环有右半平面的极点时，情况复杂。

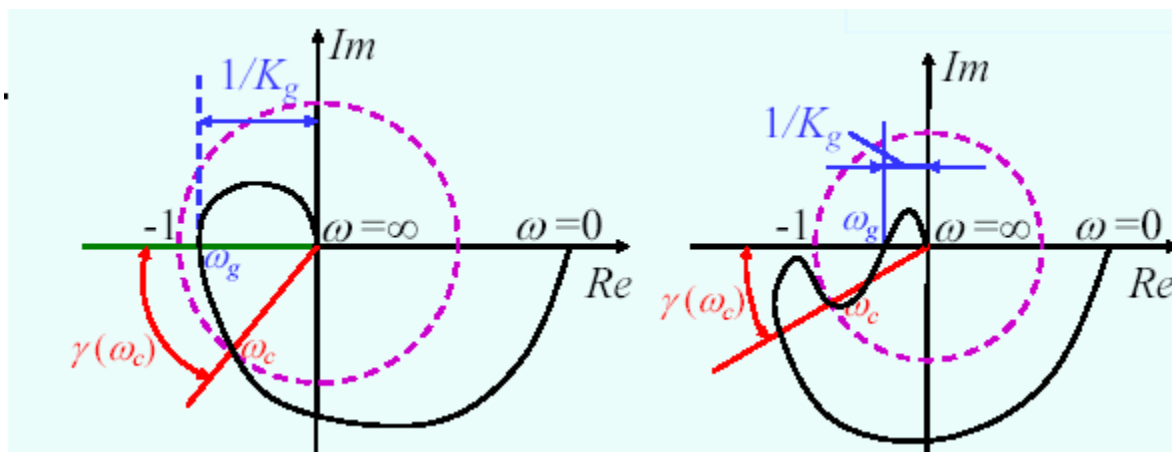


相位裕度的含义：

就是在幅值穿越频率 ω_c 上，使系统开环Nyquist曲线穿过 $(-1, j0)$ 点（即达到临界稳定）尚可增加（对于开环稳定的系统）的相位滞后量 $\gamma(\omega_c)$ 。

相位裕度的局限

相位裕度相同但稳定程度也可能不同的系统



由此可见，应同时考虑幅值裕度和相位裕度来说明系统的稳定程度。最小相位系统，只有幅值裕度和相位裕度都是正值时，系统才是稳定的。一般要求：

$$K_g > 6\text{dB} \text{ 或 } K_g > 2 \text{ 且 } \gamma(\omega_c) = 30^\circ \sim 60^\circ$$

3、幅值裕度与相位裕度计算

(1) 根据定义求

先根据相位等于 -180° ，求出相应的相位穿越频率 ω_g ，然后代入幅值的公式求幅值裕度 K_g 。根据幅值等于1求相应的幅值穿越频率 ω_c ，然后根据定义求相位裕度。

例：已知

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(T_1s + 1)(T_2s + 1)}$$

求幅值裕度。

解：

$$|G(j\omega)H(j\omega)| = \frac{K}{\omega \sqrt{1 + \omega^2 T_1^2} \sqrt{1 + \omega^2 T_2^2}}$$

$$\varphi(\omega) = -90^\circ - \arctg \omega T_1 - \arctg \omega T_2$$

求出相应的相位穿越频率 ω_g

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(T_1s + 1)(T_2s + 1)}$$

$$\varphi(\omega_g) = -90^\circ - \arctg \omega_g T_1 - \arctg \omega_g T_2 = -180^\circ$$

$$\arctg \omega_g T_1 + \arctg \omega_g T_2 = 90^\circ$$

$$\frac{\omega_g T_1 + \omega_g T_2}{1 - \omega_g^2 T_1 T_2} = \infty \longrightarrow \omega_g = \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}} \longrightarrow$$

$$|G(j\omega_g)H(j\omega_g)| = \frac{K \sqrt{T_1 T_2}}{\sqrt{1 + T_2/T_1} \sqrt{1 + T_1/T_2}} = \frac{K T_1 T_2}{T_1 + T_2}$$

$$\longrightarrow K_g = \frac{T_1 + T_2}{K T_1 T_2}$$

若 $T_1=1, T_2=0.25$

$$K_g = \frac{5}{K}$$

显然闭环稳定时, 要求: $K < 5$



$$G(s)H(s) = \frac{10}{s(s+1)(0.25s+1)}$$

求相位裕度

首先求剪切频率 ω_c

$$|G(j\omega_c)H(j\omega_c)| = \frac{10}{\omega_c \sqrt{1+\omega_c^2} \sqrt{1+\omega_c^2(0.25)^2}} = 1$$

$$\omega_c^2(1+\omega_c^2)(1+0.0625\omega_c^2) = 100$$

用凑试法

$$\omega_c \approx 2.78 \text{ rad/s}$$

代入相位裕度的定义式

$$\begin{aligned} \gamma &= \varphi(\omega_c) + 180^\circ \\ &= -90^\circ - \arctg \omega_c - \arctg \omega_c 0.25 + 180^\circ \\ &= 90^\circ - 70.2^\circ - 34.8^\circ = -15^\circ \end{aligned}$$

系统不稳定。

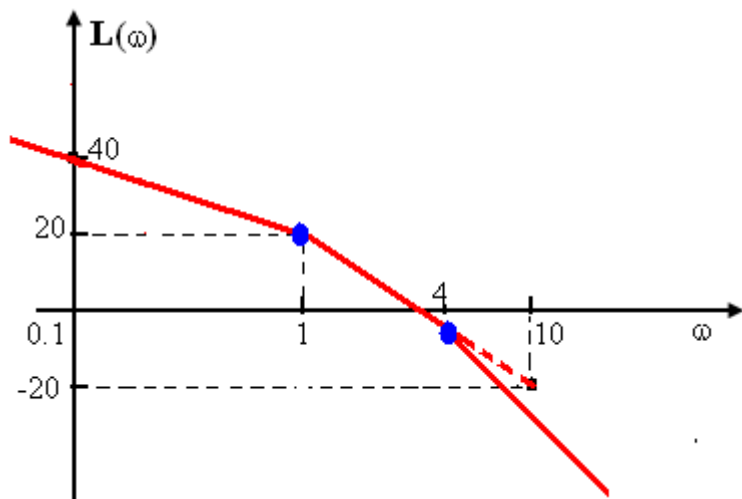
当系统阶次较高时， ω_g 和 ω_c 用解析法不好求，可用作图法求。⁷¹

$$G(s)H(s) = \frac{10}{s(s+1)(0.25s+1)}$$

求相位裕度

解：绘制Bode图

$$|G(j\omega_c)H(j\omega_c)| = \frac{10}{\omega_c \sqrt{1+\omega_c^2} \sqrt{1+\omega_c^2 (0.25)^2}} = 1$$



依据Bode图近似求剪切频率 ω_c

$$|G(j\omega_c)H(j\omega_c)| = \frac{10}{\omega_c \omega_c 1} = 1$$

$$\omega_c = \sqrt{10} = 3.16$$

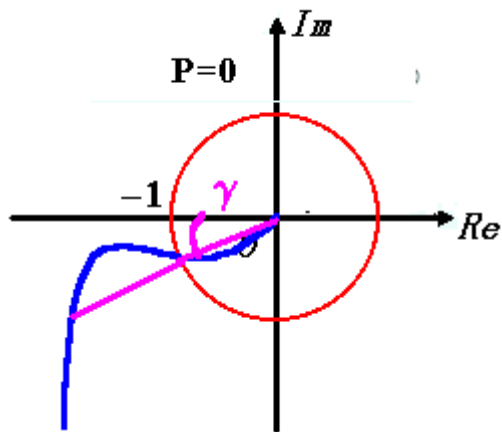
代入相位裕度的定义式

$$\begin{aligned} \gamma &= \varphi(\omega_c) + 180^\circ = -90^\circ - \arctg \omega_c - \arctg \omega_c 0.25 + 180^\circ \\ &= 90^\circ - 72.4^\circ - 38.3^\circ = -20.7^\circ \end{aligned}$$

利用Bode图近似求出的剪切频率比实际的要偏大。

(2) 根据图形求

根据幅相曲线求幅值裕度



$$K_g = ?$$

$$K_g = \infty$$

由幅相曲线求幅值裕度

$$G(s) = \frac{5}{s(\frac{s}{2}+1)(\frac{s}{10}+1)} = \frac{100}{s(s+2)(s+10)}$$

将 $G(j\omega)$ 分解为实部、虚部形式

$$G(j\omega) = \frac{100}{j\omega(2+j\omega)(10+j\omega)} = \frac{-1200\omega - j100(20-\omega^2)}{\omega(4+\omega^2)(100+\omega^2)} = U + jV$$

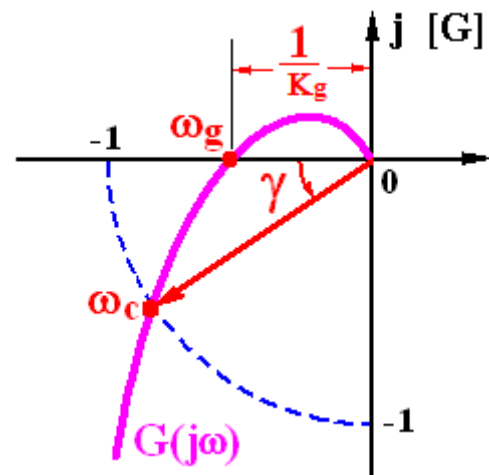
$$\text{令 } \text{Im}[G(j\omega)] = V = 0$$

$$\text{得 } \omega_g = \sqrt{20} = 4.47$$

$$\text{代入实部 } U(\omega_g) = -0.4167$$

$$|G(\omega_g)| = 0.4167$$

$$K_g = \frac{1}{|G(j\omega_g)|} = \frac{1}{0.4167} = 2.4$$



例 $G(s) = \frac{5}{s(\frac{s}{2}+1)(\frac{s}{10}+1)} = \frac{100}{s(s+2)(s+10)}$, 求 γ , K_g°

解法I: 由定义求

令 $|G(j\omega_c)| = 1 = \frac{100}{\omega_c \sqrt{\omega_c^2 + 2^2} \sqrt{\omega_c^2 + 10^2}}$

$$\omega_c^2 [\omega_c^4 + 104\omega_c^2 + 400] = 1000$$

试根得

$$\omega_c = 2.9$$

$$\gamma = 180^\circ + \angle G(j\omega_c) = 180^\circ + \varphi(2.9)$$

$$= 180^\circ - 90^\circ - \arctg \frac{2.9}{2} - \arctg \frac{2.9}{10}$$

$$= 90^\circ - 55.4^\circ - 16.1^\circ = 18.5^\circ$$

$$G(s) = \frac{5}{s(\frac{s}{2}+1)(\frac{s}{10}+1)} = \frac{100}{s(s+2)(s+10)}$$

$$\text{令 } \varphi(\omega_g) = -180^\circ = -90^\circ - \arctg \frac{\omega_g}{2} - \arctg \frac{\omega_g}{10}$$

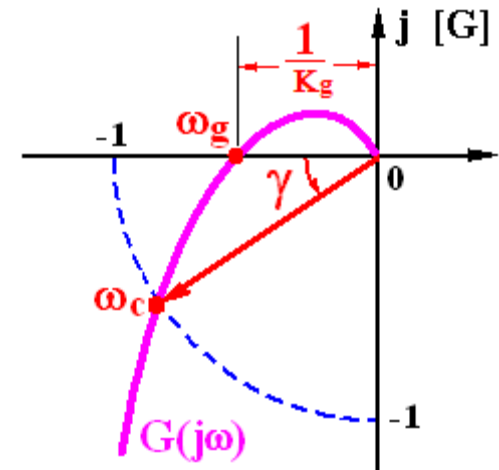
可得

$$\arctg \frac{\omega_g}{2} + \arctg \frac{\omega_g}{10} = 90^\circ$$

$$\frac{\frac{\omega_g}{2} + \frac{\omega_g}{10}}{1 - \frac{\omega_g^2}{20}} = \tg 90^\circ \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \omega_g^2 &= 20 \\ \omega_g &= 4.47 \end{aligned}$$

$$K_g = \frac{1}{|G(j\omega_g)|}$$

$$= \frac{\omega_g \sqrt{\omega_g^2 + 2^2} \sqrt{\omega_g^2 + 10^2}}{100} \quad \omega_g = 4.47 = 2.4 \quad (7.6 \text{ dB})$$



解法II：由Bode图求相位裕度

$$G(s) = \frac{5}{s(\frac{s}{2} + 1)(\frac{s}{10} + 1)}$$

由 $L(\omega)$ ：

$$|G(j\omega_c)| = 1 = \frac{5}{\omega_c \cdot \frac{\omega_c}{2} \cdot 1} = \frac{10}{\omega_c^2}$$

得 $\omega_c = \sqrt{10} = 3.16 > 2.9$

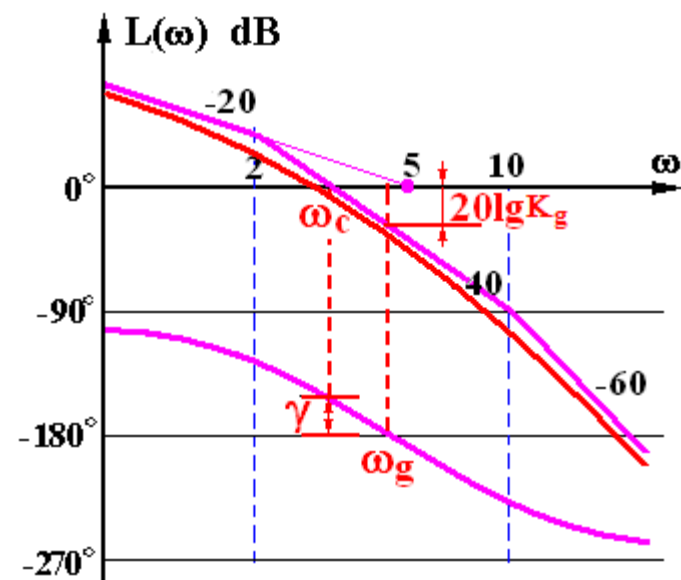
$$\gamma = 180^\circ + \angle G(j\omega_c) = 180^\circ + \varphi(3.16)$$

$$= 180^\circ - 90^\circ - \arctg \frac{3.16}{2} - \arctg \frac{3.16}{10}$$

$$= 90^\circ - 57.67^\circ - 17.541^\circ = 14.8^\circ < 18.5^\circ$$

$$\omega_g = \sqrt{2 \times 10} = 4.47$$

$$K_g = \frac{1}{|G(j4.47)|} = \frac{1}{0.4167} = 2.4$$



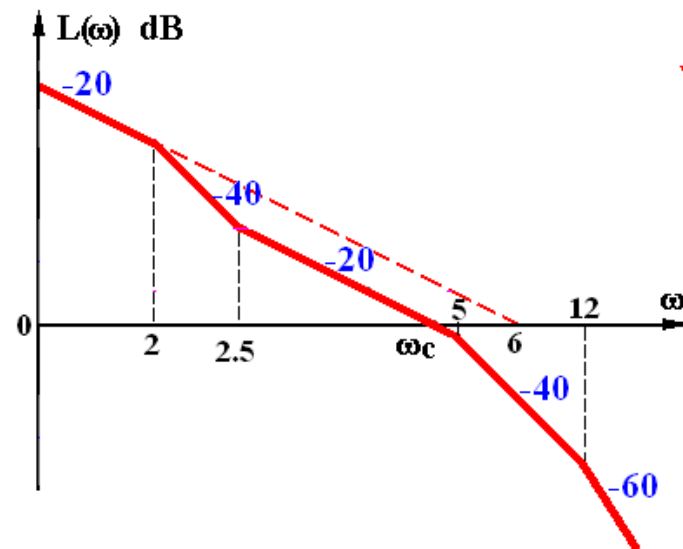
例

$$G(s) = \frac{6(\frac{s}{2.5} + 1)}{s(\frac{s}{2} + 1)(\frac{s}{5} + 1)(\frac{s}{12.5} + 1)}, \text{ 求 } \gamma, K_g^\circ$$

解. 作 $L(\omega)$ 求 ω_c

$$G(j\omega_c) = 1 = \frac{6 \times \frac{\omega_c}{2.5}}{\omega_c \cdot \frac{\omega_c}{2} \cdot 1 \cdot 1} = \frac{6 \times 2}{2.5\omega_c}$$

$$\omega_c = \frac{6 \times 2}{2.5} = 4.8$$



$$\gamma = 180^\circ + \angle G(j\omega_c)$$

$$= 180^\circ + \arctg \frac{4.8}{2.5} - 90^\circ - \arctg \frac{4.8}{2} - \arctg \frac{4.8}{5} - \arctg \frac{4.8}{12.5}$$

$$= 180^\circ + 62.5^\circ - 90^\circ - 67.4^\circ - 43.8^\circ - 21^\circ = 20.3^\circ$$

求 ω_g

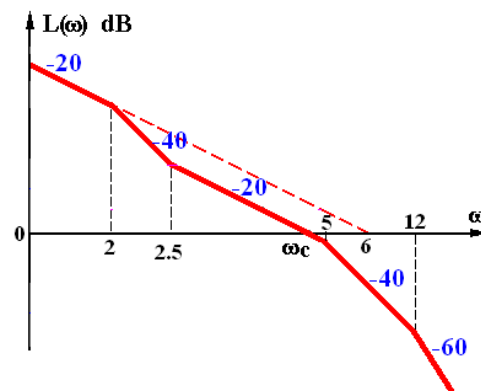
$$G(s) = \frac{6(\frac{s}{2.5} + 1)}{s(\frac{s}{2} + 1)(\frac{s}{5} + 1)(\frac{s}{12.5} + 1)}$$

$$\varphi(\omega_g) = \arctg \frac{\omega_g}{2.5} - 90^\circ - \arctg \frac{\omega_g}{2} - \arctg \frac{\omega_g}{5} - \arctg \frac{\omega_g}{12.5} = -180^\circ$$

$$\arctg \frac{\omega_g}{12.5} + \arctg \frac{\omega_g}{5} + \arctg \frac{\omega_g}{2} - \arctg \frac{\omega_g}{2.5} = 90^\circ$$

$$\arctg \left[\frac{\frac{\omega_g}{12.5} + \frac{\omega_g}{5}}{1 - \frac{\omega_g^2}{12.5 \times 5}} \right] + \arctg \left[\frac{\frac{\omega_g}{2} - \frac{\omega_g}{2.5}}{1 + \frac{\omega_g^2}{2 \times 2.5}} \right] = 90^\circ$$

$$\arctg \frac{[A] + [B]}{1 - [A] \cdot [B]} = 90^\circ \Rightarrow [A] \cdot [B] = 1$$



整理得 $\omega_g^4 - 49.75\omega_g^2 - 312.5 = 0$ 解出 $\omega_g = 7.4$ (rad / s)

$$K_g = \frac{1}{|G(j\omega_g)|} = \frac{\omega_g \sqrt{\omega_g^2 + 2^2} \sqrt{\omega_g^2 + 5^2} \sqrt{\omega_g^2 + 12.5^2}}{300 \cdot \sqrt{\omega_g^2 + 2.5^2}} = 3.135$$

小结

稳定裕度的概念 (开环频率指标)

稳定裕度的定义

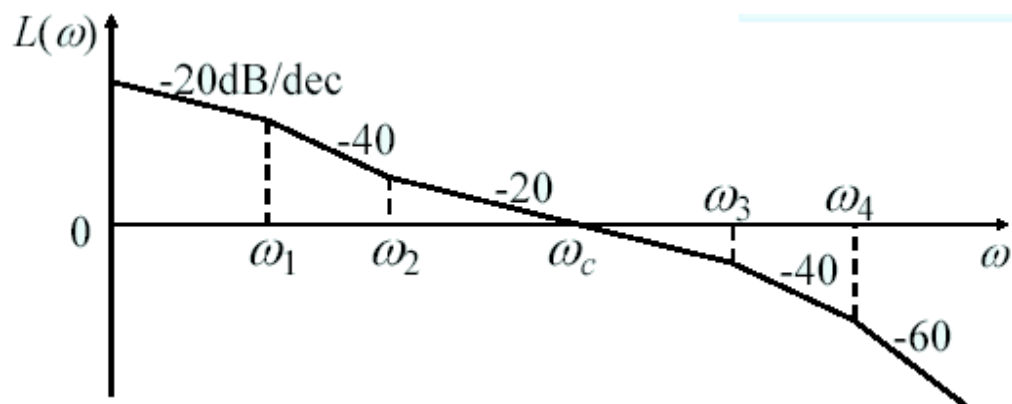
剪切频率	ω_c	$ G(j\omega_c) = 1$
相角裕度	γ	$\gamma = 180^\circ + \angle G(j\omega_c)$
相位穿越频率	ω_g	$\angle G(j\omega_g) = -180^\circ$ 或令虚部为零
幅值裕度	K_g	$K_g = \frac{1}{ G(j\omega_g) }$

稳定裕度的意义 γ, K_g 的物理意义

稳定裕度计算方法

$L(\omega) \Rightarrow \omega_c \Rightarrow \gamma = 180^\circ + \varphi(\omega_c)$
$\varphi(\omega) = -180^\circ \Rightarrow \omega_g \Rightarrow K_g = \frac{1}{ GH(j\omega_g) }$

5.5 用开环频率特性分析闭环性能



1、三频段理论分析系统性能

开环对数幅频特性

低频段(第一个转折频率 ω_1 之前的频段)

中频段($\omega_1 \sim 10 \omega_c$)

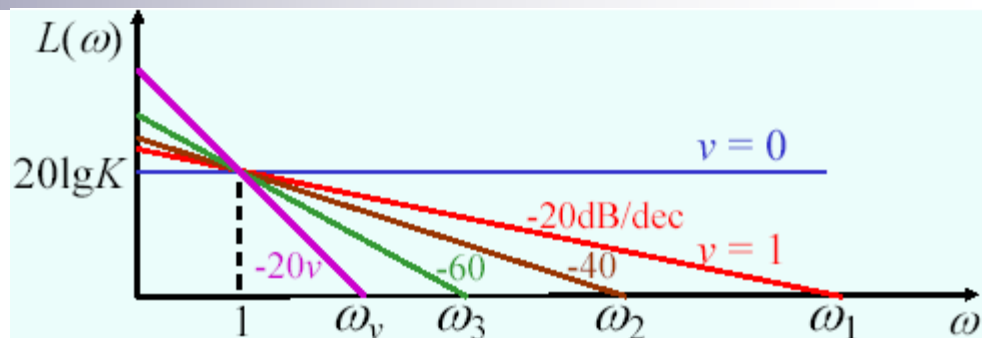
高频段(最后转折频率 以后的频段)

分别表征了系统的稳态性能、动态性能和抗干扰的能力。

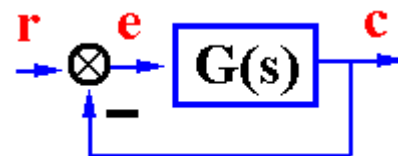
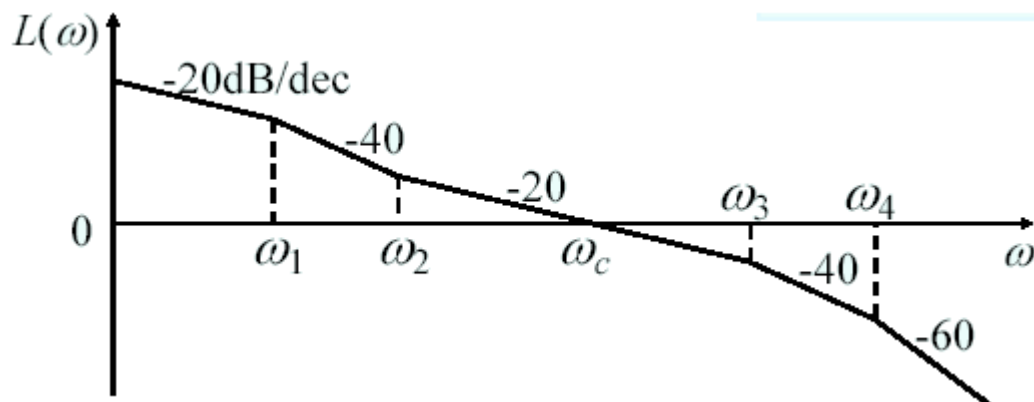
1) 低频段

由型别和K决定的，

稳态性能要求型别越高越好；



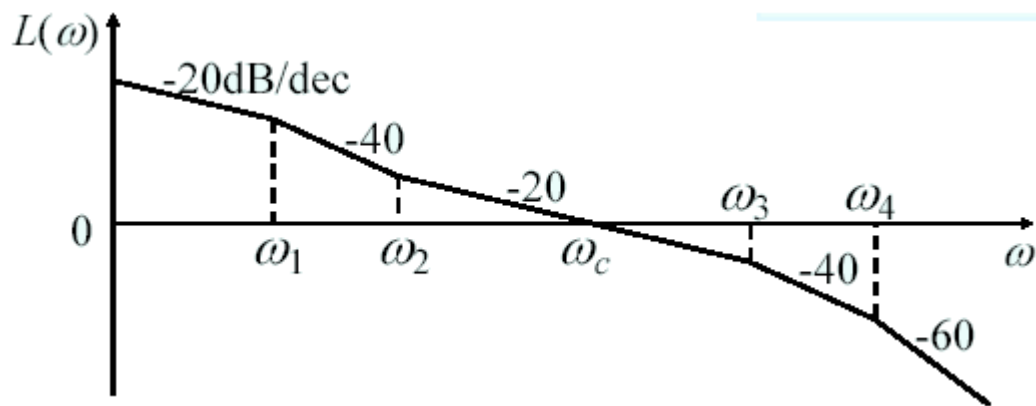
2) 高频段:



$$G_B(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)} \quad \xrightarrow{|G(s)| \ll 1} \quad |G_B(s)| \approx |G(s)| \ll 1$$

要求衰减越快，抗扰动性能越好。

最好 -40dB/dec 斜率或 -60dB/dec 斜率



3) 中频段 (ω_c 附近)

中频段反映系统的相对稳定性。

二阶系统相对稳定性与动态性能

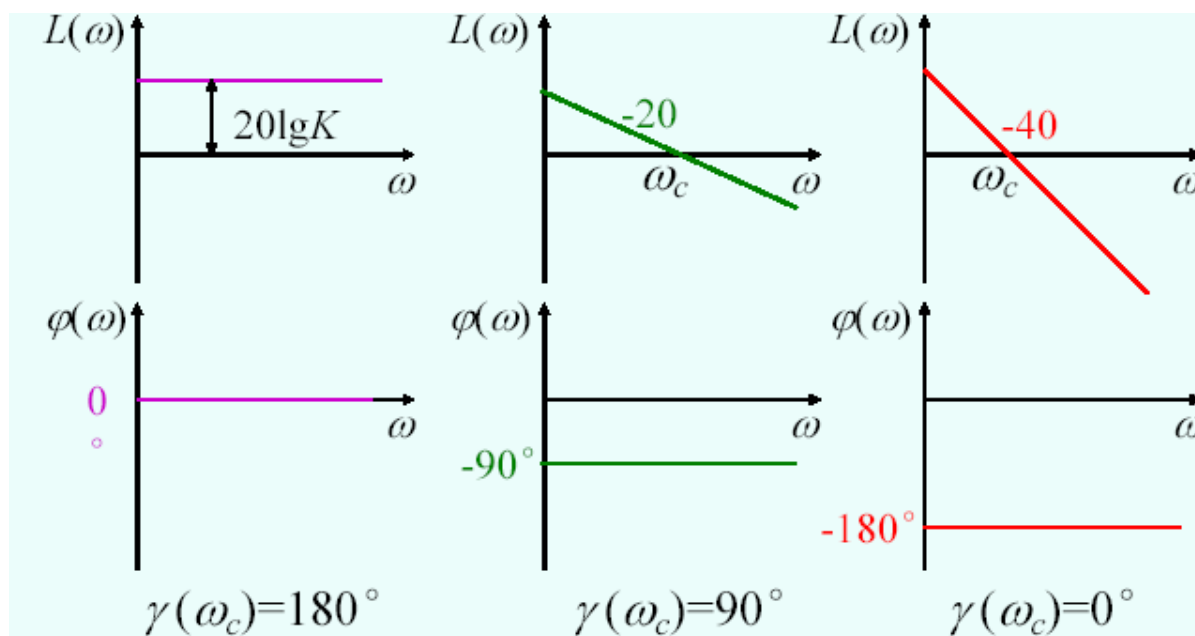
最小相位系统的相位裕量主要取决于开环对数幅频特性中频段的斜率，

同时，低频段和高频段的斜率、中频段的带宽等都对系统的相位裕量有影响。



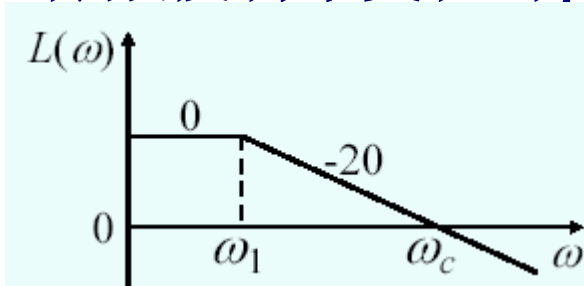
3) 中频段 (ω_c 附近)

当低、中、高频段斜率相同



斜率负的越大，相位裕度越小。

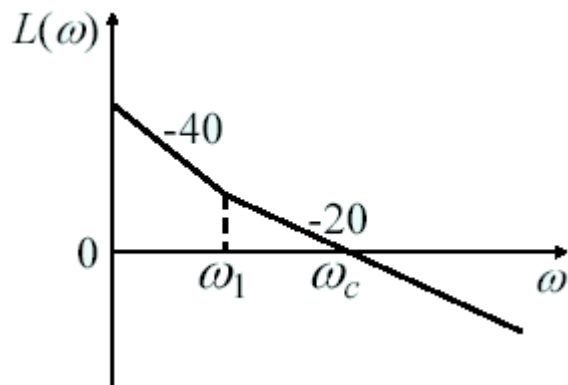
(1) 低频段斜率变化对 γ 的影响



$$\varphi(\omega) = -\arctg \frac{\omega}{\omega_1}$$

$$G(s)H(s) = \frac{K}{(\frac{1}{\omega_1}s + 1)}$$

$$\gamma = 180^\circ - \arctg \frac{\omega_c}{\omega_1} > 90^\circ$$



$$\varphi(\omega) = -180^\circ + \arctg \frac{\omega}{\omega_1}$$

$$G(s)H(s) = \frac{K(\frac{1}{\omega_1}s + 1)}{s^2}$$

$$\gamma = \arctg \frac{\omega_c}{\omega_1} > 45^\circ$$

低频段有更大的斜率将导致相位裕量减小（原来为 90° ），影响的大小与 ω_c/ω_1 有关， ω_1 离 ω_c 越远，影响越小。

(2) 高频段斜率变化对 γ 的影响

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(\frac{1}{\omega_2}s + 1)}$$

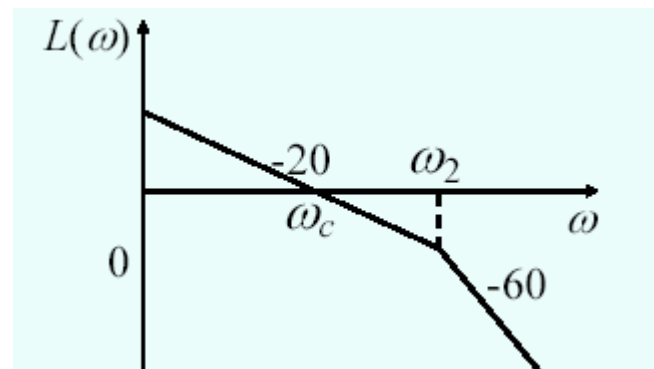
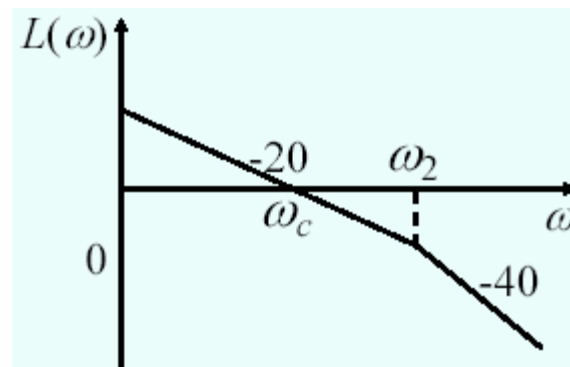
$$\varphi(\omega) = -90^\circ - \arctg \frac{\omega}{\omega_2}$$

$$\gamma = 90^\circ - \arctg \frac{\omega_c}{\omega_2} > 45^\circ$$

$$G(s)H(s) = \frac{K\omega_2^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_2s + \omega_2^2)}$$

$$\varphi(\omega) = -90^\circ - \arctg \frac{2\zeta \frac{\omega}{\omega_2}}{1 - (\frac{\omega}{\omega_2})^2}$$

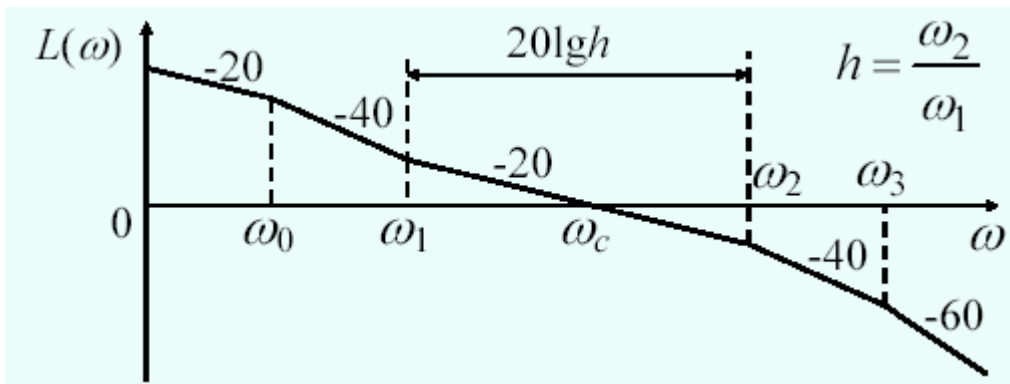
$$\gamma = 90^\circ - \arctg \frac{2\zeta \frac{\omega_c}{\omega_2}}{1 - (\frac{\omega_c}{\omega_2})^2} > 0^\circ$$



高频段有更大的斜率同样导致相位裕量减小。

ω_2 离 ω_c 越远，影响越小。

(3) 高、低频段斜率对 γ 的影响



$$\gamma = 90^\circ - \arctg \frac{\omega_c}{\omega_0} + \arctg \frac{\omega_c}{\omega_1} - \arctg \frac{\omega_c}{\omega_2} - \arctg \frac{\omega_c}{\omega_3}$$

当 $\omega_1 \ll \omega_c \ll \omega_2$

$$\gamma \approx \arctg \frac{\omega_c}{\omega_1} - \arctg \frac{\omega_c}{\omega_2} > 0$$

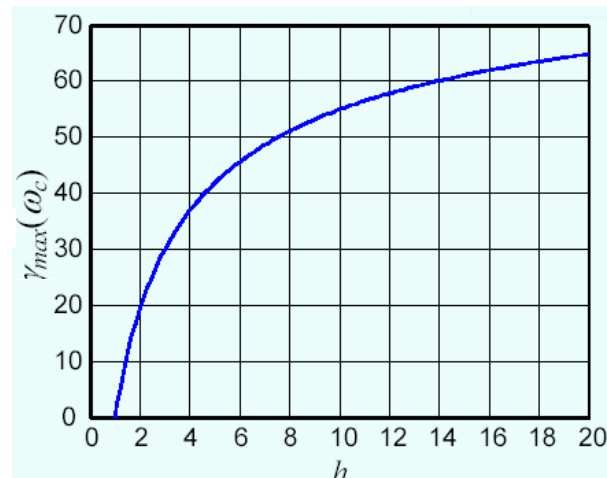
易知： ω_1 、 ω_2 离 ω_c 越远，即 $h = \omega_2 / \omega_1$ 越大，相位裕量 γ 越大。

当

$$\omega_c = \sqrt{\omega_1 \omega_2} = \frac{\omega_2}{\sqrt{h}} = \omega_1 \sqrt{h}$$

γ 最大

$$\gamma_{\max} \approx \arctg \sqrt{h} - \arctg \frac{1}{\sqrt{h}} = \arctg \frac{h-1}{2\sqrt{h}}$$



结论

一个设计合理的系统：

中频段的斜率以 -20dB/dec 为宜；

低频段和高频段可以有更大的斜率。

低频段斜率大，提高稳态性能；

高频段斜率大，抗高频干扰能力强。

但中频段必须有足够的带宽，以保证系统的相位裕量，带宽越大，相位裕量越大。

ω_c 的大小取决于系统的快速性要求。 ω_c 大，快速性好，但抗扰能力下降。

三频段理论

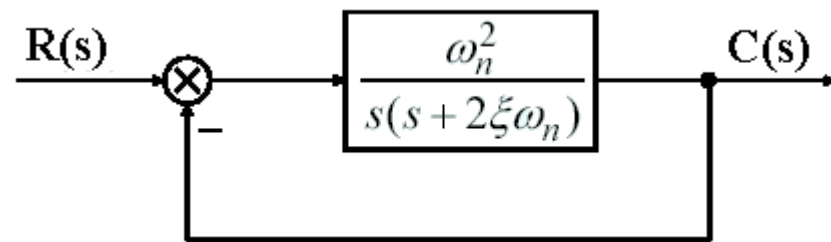
	频段	对应性能	希望形状
$L(\omega)$	低频段	$\left\{ \begin{array}{l} \text{开环增益 } K \\ \text{系统型别 } \nu \end{array} \right.$ 稳态误差 e_{ss}	陡, 高
	中频段	$\left\{ \begin{array}{l} \text{剪切频率} \\ \text{相位裕度 } \gamma \end{array} \right.$ 动态性能 $\left\{ \begin{array}{l} \sigma \% \\ t_s \end{array} \right.$	缓, 宽
	高频段	系统抗高频干扰的能力	低, 陡

三频段理论并没有提供设计系统的具体步骤,
但它给出了调整系统结构改善系统性能的原则和方向

2、二阶系统稳定裕度与时域性能指标的关系

标准二阶系统

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\zeta\omega_n)}$$



可以求出剪切频率 ω_c ，令

$$|G(j\omega_c)| = 1 \quad \frac{\omega_n^2}{\omega_c \sqrt{\omega_c^2 + 4\zeta^2\omega_n^2}} = 1$$

$$\omega_c^4 + 4\zeta^2\omega_n^2\omega_c^2 - \omega_n^4 = 0$$

求出 $\omega_c = \omega_n \sqrt{\sqrt{1 + 4\zeta^4} - 2\zeta^2} \quad \left(\frac{\omega_c}{\omega_n}\right)^2 = \sqrt{4\zeta^4 + 1} - 2\zeta^2$

代入相位裕度

$$\gamma = 180^\circ - 90^\circ - \arctg\left(\frac{\omega_c}{2\zeta\omega_n}\right) = \arctg\left(\frac{2\zeta\omega_n}{\omega_c}\right)$$

$$= \arctg \frac{2\zeta}{\sqrt{\sqrt{1 + 4\zeta^4} - 2\zeta^2}}$$

准确关系，相位裕度仅与阻尼比有关。

$$\gamma = \arctg \frac{2\zeta}{\sqrt{\sqrt{1+4\zeta^4}-2\zeta^2}} \quad \omega_c = \omega_n \sqrt{\sqrt{1+4\zeta^4}-2\zeta^2}$$

$$\sigma_p = e^{\frac{-\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100\%$$

二阶系统 γ 与最大超调量存在确定的关系。

$$\gamma = 60^\circ \longrightarrow \zeta = 0.6 \longrightarrow \sigma_p = 10\%$$

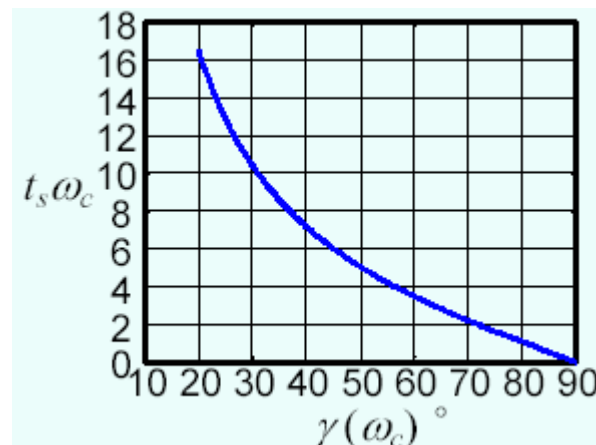
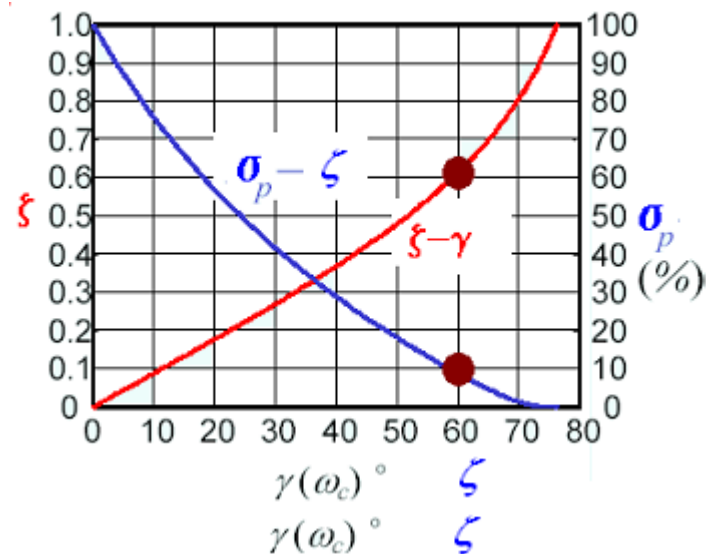
调节时间与 ζ 和 ω_n 有关,
而 ω_n 与 ω_c 有关,都与 γ 有关

$$t_s \approx \frac{3}{\zeta\omega_n} = \frac{3\sqrt{\sqrt{1+4\zeta^4}-2\zeta^2}}{\zeta\omega_c}$$

$$t_s\omega_c \approx \frac{3\sqrt{\sqrt{1+4\zeta^4}-2\zeta^2}}{\zeta} = \frac{6}{\operatorname{tg}\gamma}$$

对确定的 $\gamma(\omega_c)$ (或 ξ), t_s 与 ω_c 成反比。

二阶系统 γ 和 ω_c 与系统动态性能密切相关

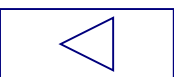


例 已知系统结构图，求 ω_c ，并确定 $\sigma\%$ ， t_s 。

解. 绘制 $L(\omega)$ 曲线

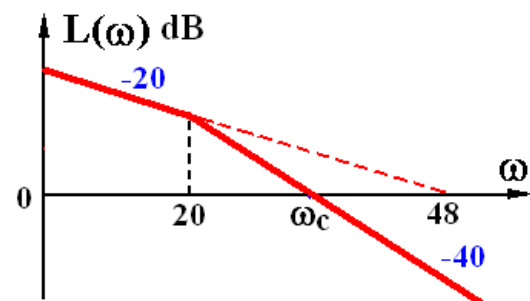
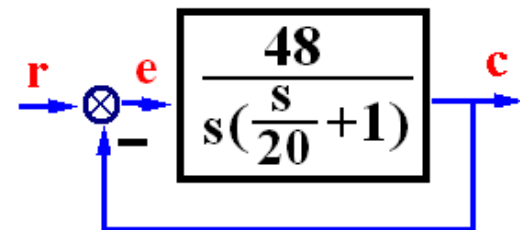
$$\omega_c = \sqrt{20 \times 48} = 31$$

$$\gamma = 180^\circ - 90^\circ - \arctg \frac{31}{20} = 90^\circ - 57.2^\circ = 32.8^\circ$$



$$\sigma \% \underset{\zeta=0.29}{\overset{\gamma=32.8^\circ}{=}} 37 \%$$

$$\begin{aligned} t_s &= \frac{6}{\omega_c \cdot \text{tg} \gamma} \\ &= \frac{6}{31 \times \text{tg} 32.8^\circ} \\ &= 0.3 \end{aligned}$$



按时域方法：

$$\begin{cases} \omega_n = \sqrt{960} = 31 \\ \zeta = \frac{20}{2 \times 31} = 0.3226 \end{cases}$$

$$\sigma \% = e^{-\zeta \pi / \sqrt{1-\zeta^2}} = 35.3 \%$$

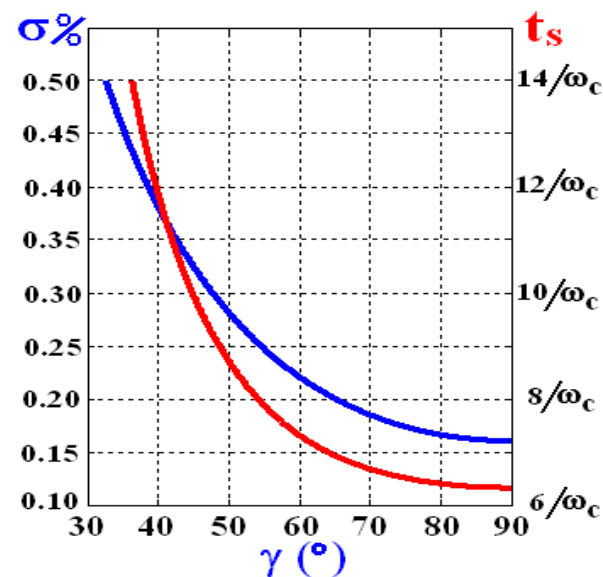
$$t_s = \frac{3}{\zeta \omega_n} = \frac{3}{10} = 0.3$$

3、高阶系统稳定裕度与时域性能指标的关系

$$\sigma\% = \left[0.16 + 0.4 \left(\frac{1}{\sin \gamma} - 1 \right) \right] \times 100\%$$

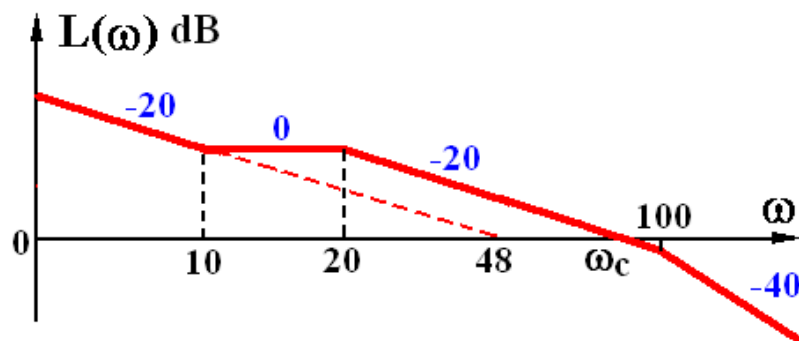
$$t_s = \frac{\pi}{\omega_c} \left[2 + 1.5 \left(\frac{1}{\sin \gamma} - 1 \right) + 2.5 \left(\frac{1}{\sin \gamma} - 1 \right)^2 \right]$$

$$(35^\circ \leq \gamma \leq 90^\circ)$$



例 已知单位反馈系统 $G(s)$, 求 ω_c , γ ; 确定 $\sigma\%$, t_s 。

$$G(s) = \frac{48(\frac{s}{10} + 1)}{s(\frac{s}{20} + 1)(\frac{s}{100} + 1)}$$



解. 绘制 $L(\omega)$ 曲线

$$G(j\omega) = \frac{48(\frac{j\omega}{10} + 1)}{j\omega(\frac{j\omega}{20} + 1)(\frac{j\omega}{100} + 1)} \quad |G(j\omega)| = \frac{48 \cdot \frac{\omega_c}{10}}{\omega_c \cdot \frac{\omega_c}{20} \cdot 1} = 1$$

$$\frac{\omega_c}{48} = \frac{20}{10} \quad \omega_c = 48 \times 2 = 96$$

$$\gamma = 180^\circ + \varphi(\omega_c)$$

$$= 180^\circ + \arctg \frac{96}{10} - 90^\circ - \arctg \frac{96}{20} - \arctg \frac{96}{100}$$

$$= 180^\circ + 84^\circ - 90^\circ - 78.2^\circ - 43.8^\circ = 52.1^\circ$$

$$\omega_c = 96 \quad \gamma = 52.1^\circ$$

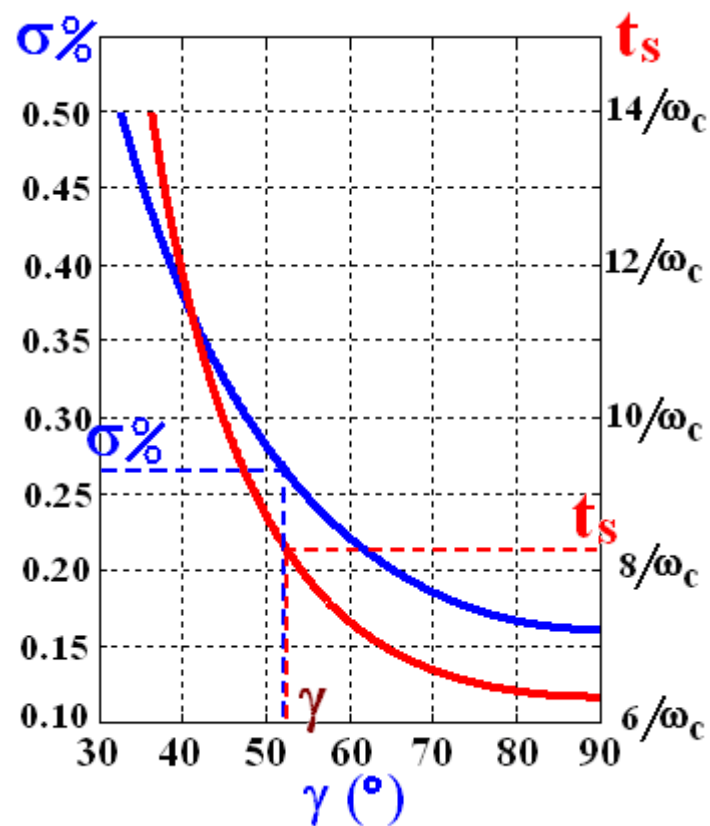
用频域法估算高阶系统动态性能

$$L(\omega) \Rightarrow \omega_c \Rightarrow \gamma \Rightarrow \sigma \%$$

$$t_s = \frac{a}{\omega_c}$$

$$\sigma \% \stackrel{\gamma=52.1^\circ}{=} 27 \%$$

$$t_s = \frac{8.2}{\omega_c} = \frac{8.2}{96} = 0.0854s$$



5.6 闭环频率特性

研究闭环频率特性的必要性

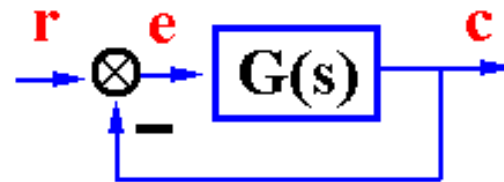
闭环频率特性的一些特征量在实际工程中应用十分广泛；

通过实验方法很容易得到系统的闭环频率特性

通过闭环频率特性可以估算系统的性能指标。

5.6.1 闭环对数频率特性绘制

$$G_K(s) = \frac{K}{s(T_1s + 1)(T_2s + 1)}$$



$$G_B(j\omega) = \frac{G(j\omega)}{1 + G(j\omega)} = \frac{K}{j\omega(jT_1\omega + 1)(jT_2\omega + 1) + K}$$

$$= M(\omega) \cdot e^{j\alpha(\omega)}$$

$$\begin{cases} M(\omega) = |G_B(j\omega)| \\ \alpha(\omega) = \angle G_B(j\omega) \end{cases}$$

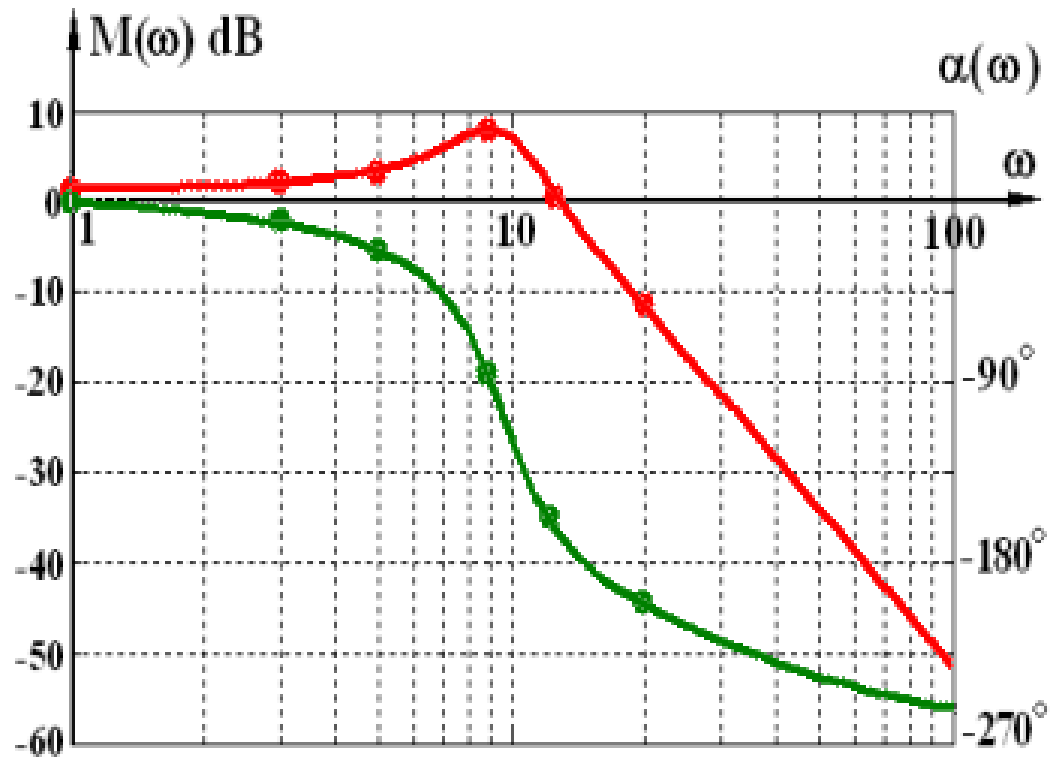
闭环幅频特性和相频特性不好绘制

以往等M圆等N圆的方法绘制

还有Nichols方法绘制

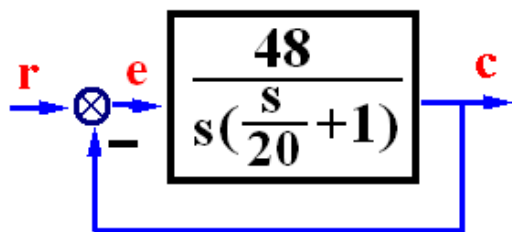
现在借助Matlab绘制闭环幅频特性和相频特性

$$G_B(j\omega) = \frac{G(j\omega)}{1+G(j\omega)} = \frac{K}{j\omega(jT_1\omega + 1)(jT_2\omega + 1) + K}$$

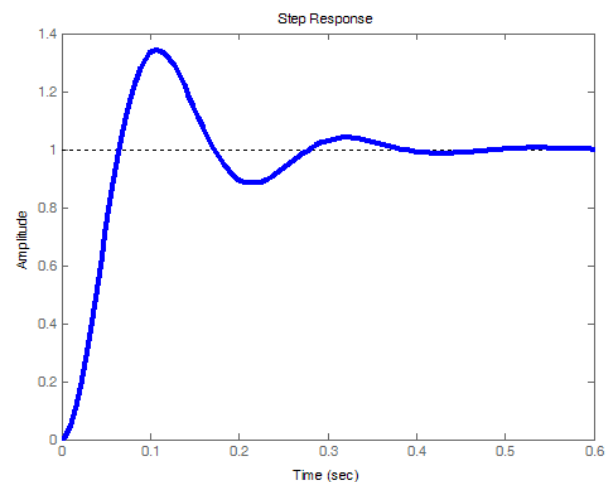
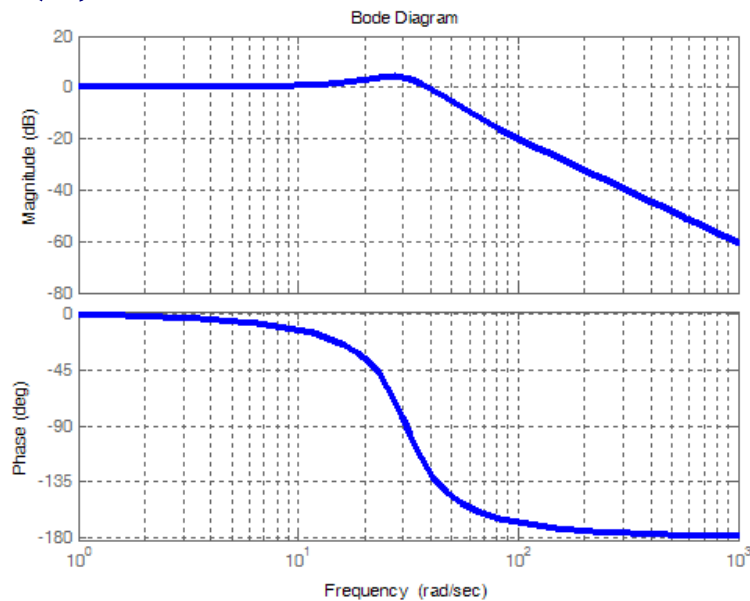
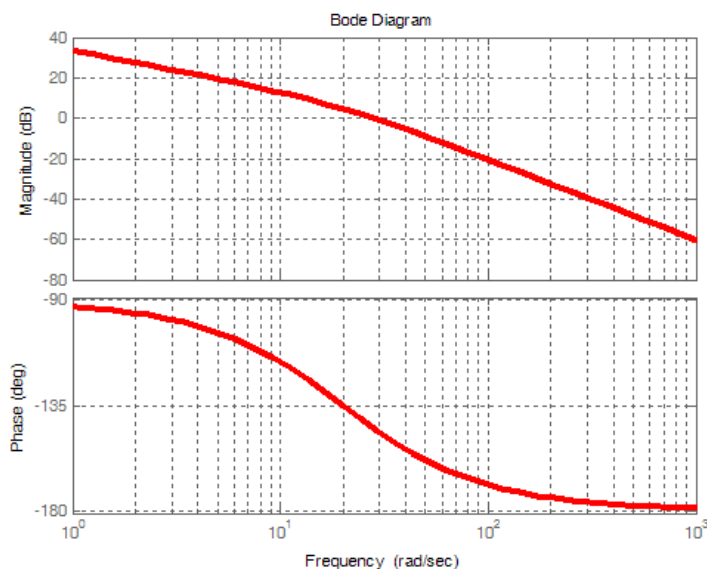


5.6.2 闭环频率特性频域性能指标

1、一般闭环频率特性与时域性能关系



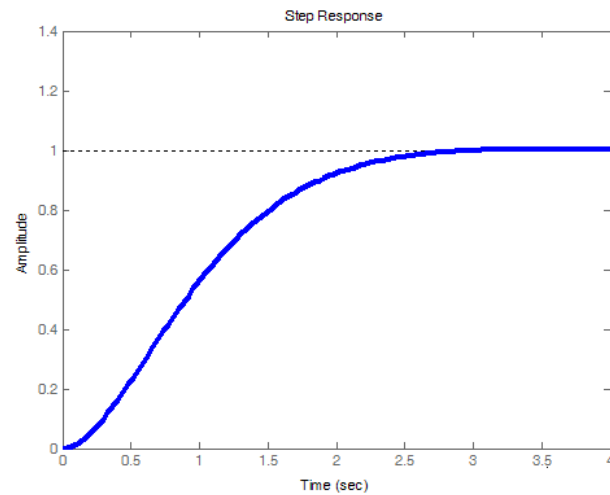
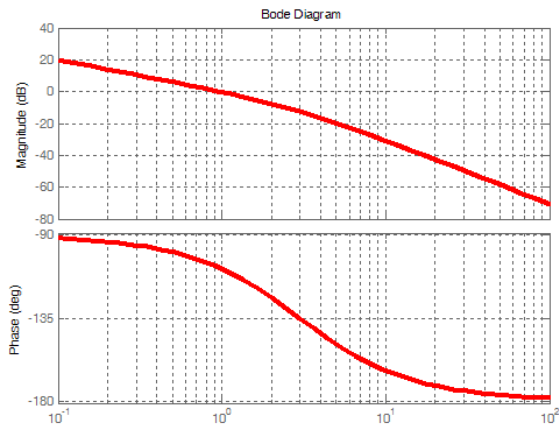
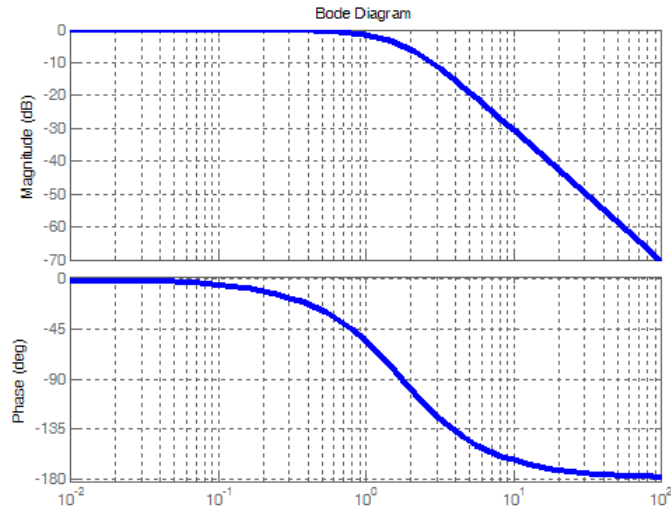
$$\zeta = 0.29$$



$$G(s) = \frac{3}{s(s+3)}$$

$$G_B(s) = \frac{3}{s^2 + 3s + 3}$$

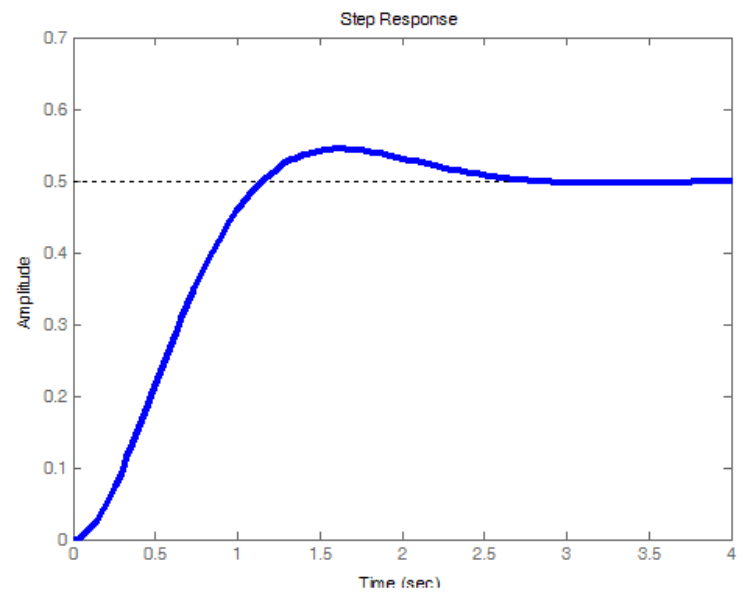
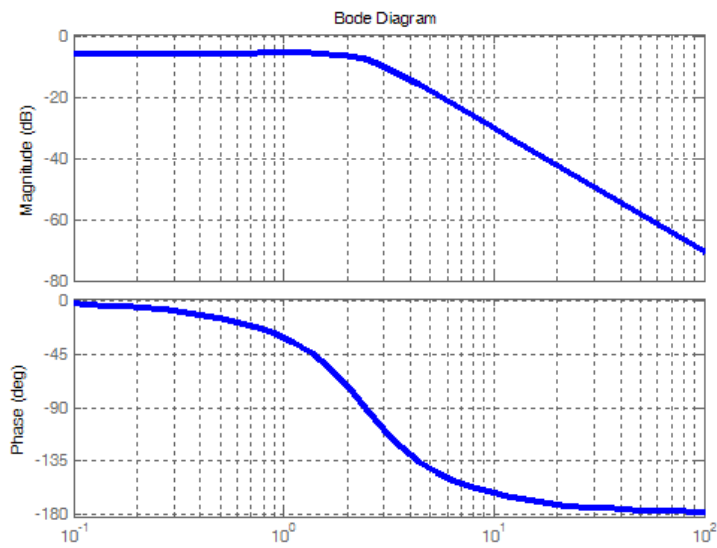
$$\zeta = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.866$$



$$G(s) = \frac{3}{s(s+3)}$$

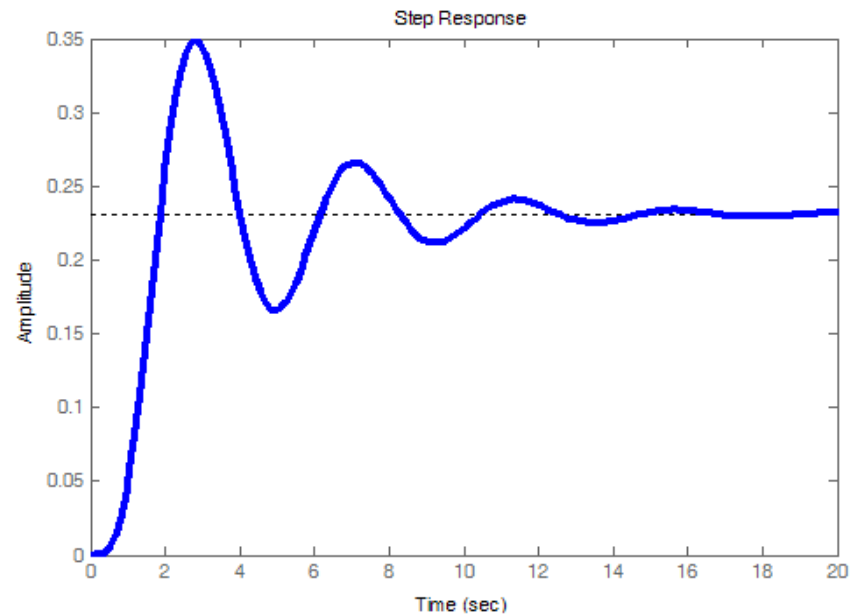
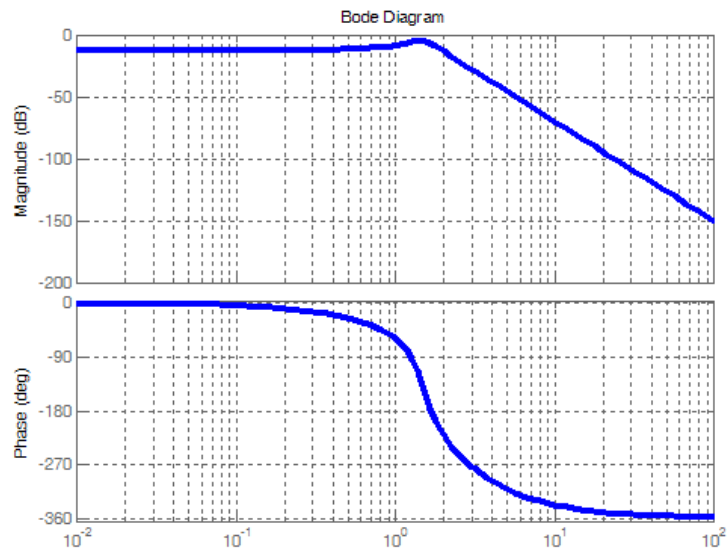
$$H(s) = 2$$

$$G_B(s) = \frac{3}{s^2 + 3s + 6}$$



$$G(s) = \frac{3}{(s^2 + s + 2)(s^2 + 3s + 5)}, H = 1$$

$$G_B(s) = \frac{3}{s^4 + 4s^3 + 10s^2 + 11s + 13}$$



2、 闭环频率特性的几个特征量

1) 零频值 $M_0 = M(0)$

与时域闭环稳态值对应

$$M(0) = K_B \quad \text{或} \quad M(0)(dB) = 20 \lg K_B$$

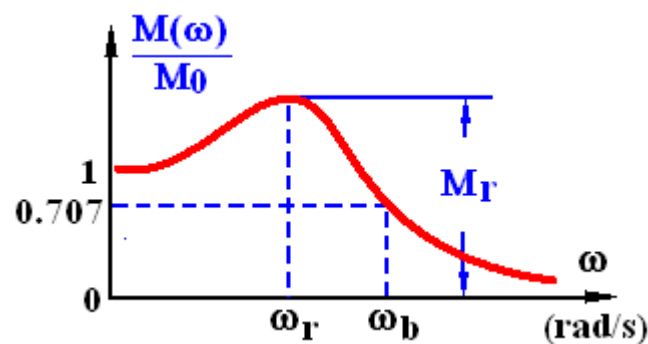
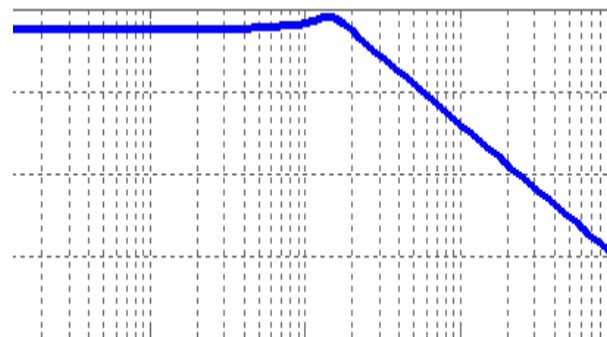
2) 谐振频率 ω_r 和谐振峰值 M_r

对二阶欠阻尼系统

$$M_r = \frac{1}{2\zeta \sqrt{1-\zeta^2}} \quad \omega_r = \omega_n \sqrt{1-2\zeta^2}$$

3) 带宽频率 ω_b

$M(\omega)$ 下降到 $0.707 M(0)$ 对应的频率值
称为带宽频率，用 ω_b 表示



闭环频率特性

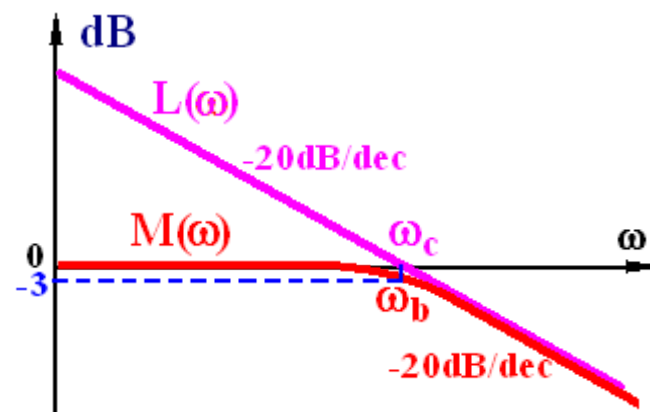
3、 闭环频率特性的特征量与性能指标的关系

1) 一阶系统

$$G(s) = \frac{1}{Ts} \quad \omega_c = 1/T$$

$$G_B(s) = \frac{1}{Ts + 1} \quad \omega_b = 1/T$$

$$t_s = 3T = \frac{3}{\omega_c} = \frac{3}{\omega_b}$$



2) 二阶系统

$$G_B(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$M_r = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}, \zeta < 0.707 \quad \omega_r = \omega_n \sqrt{1-2\zeta^2}$$

$$\sigma_p = e^{-\pi \sqrt{\frac{M_r - \sqrt{M_r^2 - 1}}{M_r + \sqrt{M_r^2 - 1}}}}, M_r \geq 1$$

$$t_p \omega_r = \pi \sqrt{\frac{1-2\zeta^2}{1-\zeta^2}} \quad t_s \omega_r = \frac{3}{\zeta} \sqrt{1-2\zeta^2}$$

$$\sigma_p = e^{-\pi \sqrt{\frac{M_r - \sqrt{M_r^2 - 1}}{M_r + \sqrt{M_r^2 - 1}}}}, M_r \geq 1$$

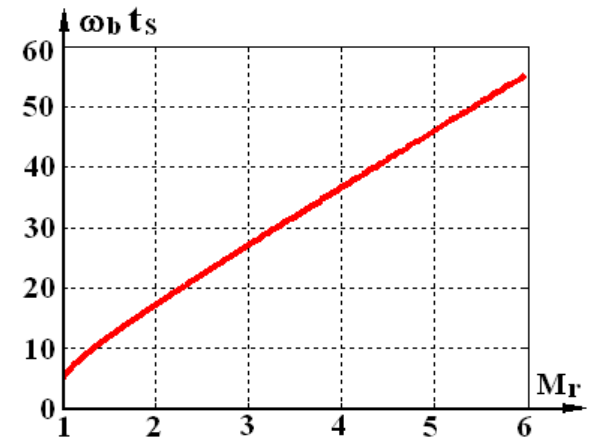
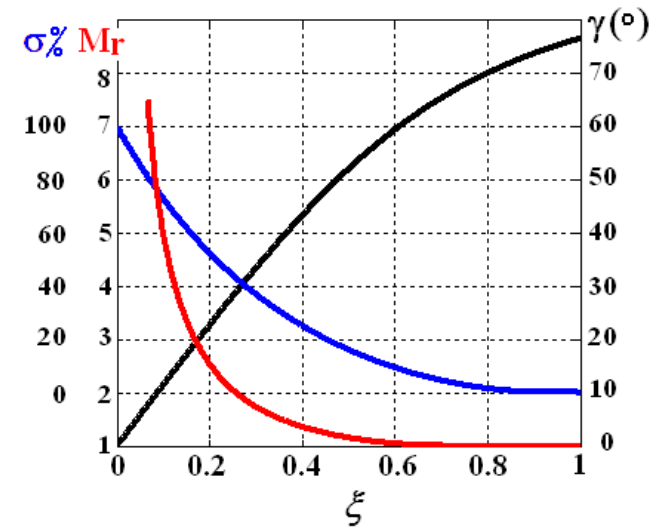
$$M_r = \frac{1}{2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2}}, \zeta < 0.707$$

$$M(\omega_b) = \frac{\omega_n^2}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega_b^2)^2 + (2\zeta \omega_n \omega_b)^2}} = 0.707$$

$$\omega_b = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2 + \sqrt{2 - 4\zeta^2 + 4\zeta^4}}$$

$$t_s = 3/\zeta \omega_n$$

$$\omega_b t_s = \frac{3}{\zeta} \sqrt{1 - 2\zeta^2 + \sqrt{2 - 4\zeta^2 + 4\zeta^4}}$$



3) 高阶系统

$$M_r \approx \frac{1}{\sin \gamma}$$

$$\sigma \% = [0.16 + 0.4(M_r - 1)] \times 100\%$$

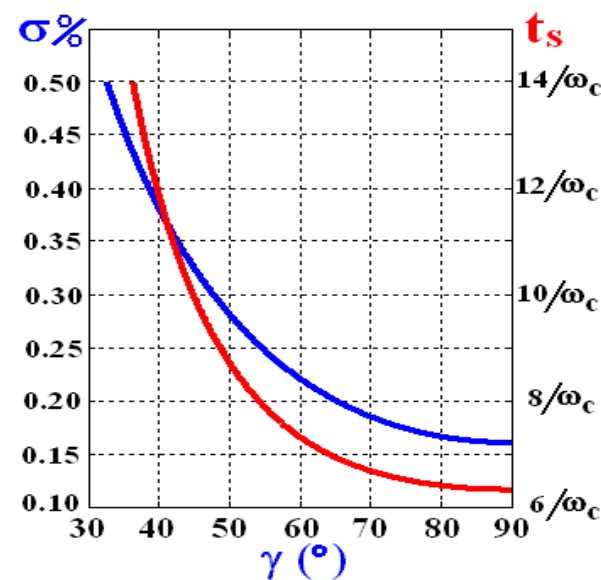
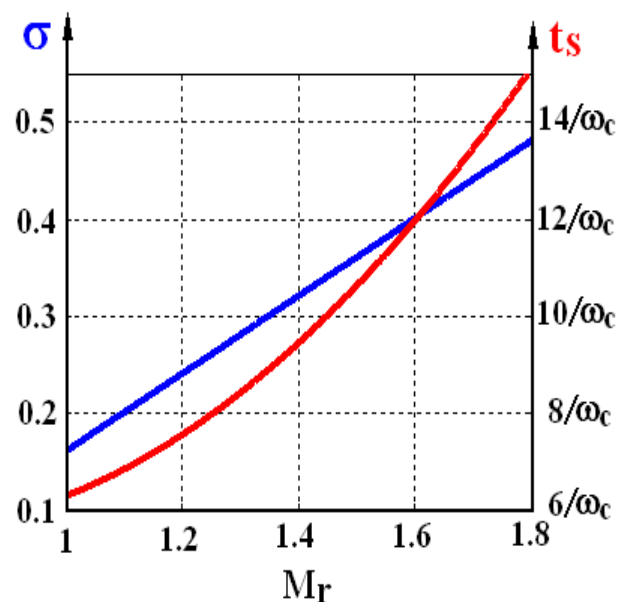
$$t_s = \frac{\pi}{\omega_c} [2 + 1.5(M_r - 1) + 2.5(M_r - 1)^2]$$

($1 \leq M_r \leq 1.8$)

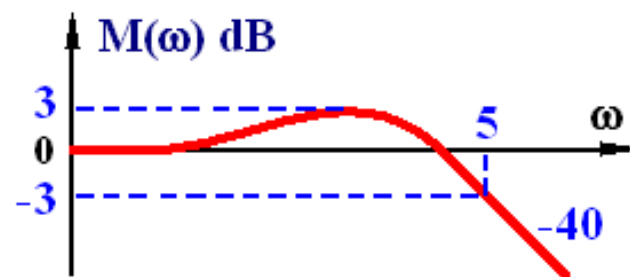
$$\sigma \% = \left[0.16 + 0.4 \left(\frac{1}{\sin \gamma} - 1 \right) \right] \times 100\%$$

$$t_s = \frac{\pi}{\omega_c} \left[2 + 1.5 \left(\frac{1}{\sin \gamma} - 1 \right) + 2.5 \left(\frac{1}{\sin \gamma} - 1 \right)^2 \right]$$

($35^\circ \leq \gamma \leq 90^\circ$)



例：实验测得某闭环系统的对数幅频特性如图所示，试确定系统的动态性能。

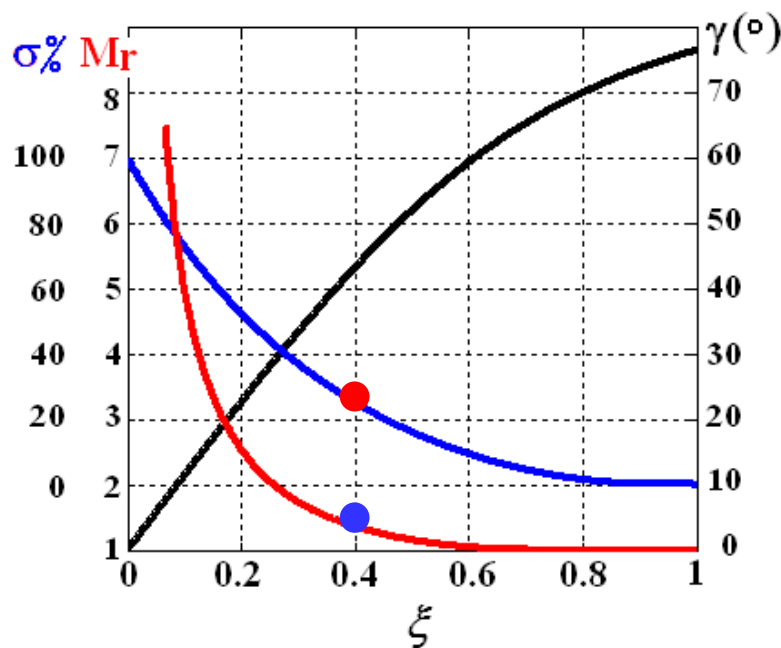
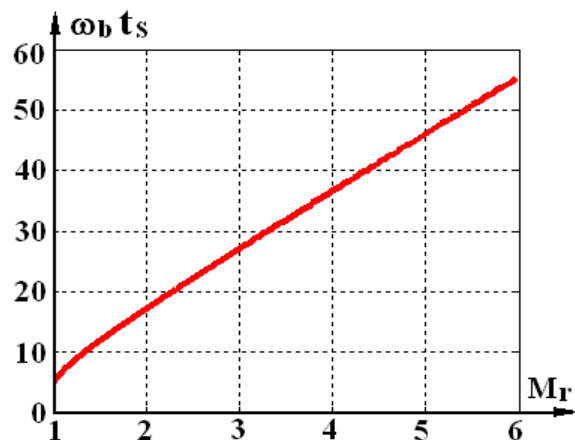


解. 依图，可以确定是欠阻尼二阶系统

$$20 \lg M_r = 3 \text{ dB}$$

$$M_r = 10^{\frac{3}{20}} = 1.4125$$

$$\zeta = 0.4 \quad \sigma \% = 25 \%$$



$$\omega_b = 5$$

$$t_s \cdot \omega_b = 9$$

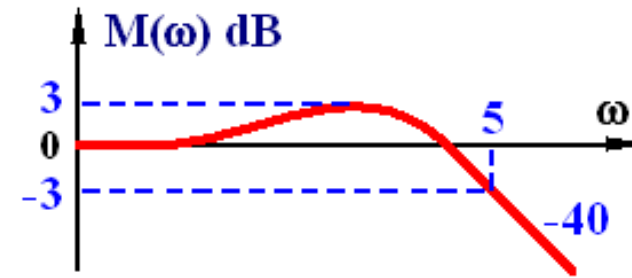
$$t_s = 9/5 = 1.8 \text{ s}$$



$$20\lg M_r = 3 \text{ dB}$$

$$\omega_b = 5$$

$$M_r = 10^{\frac{3}{20}} = 1.4125$$



由
$$M_r = \frac{1}{2\zeta \sqrt{1-\zeta^2}}$$
 解出 ζ , ω_n

$$\zeta = 0.384$$

$$\sigma_p = e^{-\pi \sqrt{\frac{M_r - \sqrt{M_r^2 - 1}}{M_r + \sqrt{M_r^2 - 1}}}} = 27.1\%$$

$$\omega_b = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2 + \sqrt{2 - 4\zeta^2 + 4\zeta^4}}$$

$$\omega_n = \frac{\omega_b}{\sqrt{1 - 2\zeta^2 + \sqrt{2 - 4\zeta^2 + 4\zeta^4}}} = 3.6$$

$$t_s = \frac{3}{\zeta \omega_n} = 2.1 \text{ s}$$

例 一台记录仪的传递函数为 $G_B(s) = \frac{1}{Ts + 1}$, 要求在5Hz以内时,

记录仪的振幅误差不大于被测信号的10%, 试确定记录仪应

有的带宽 $\omega_b = ?$

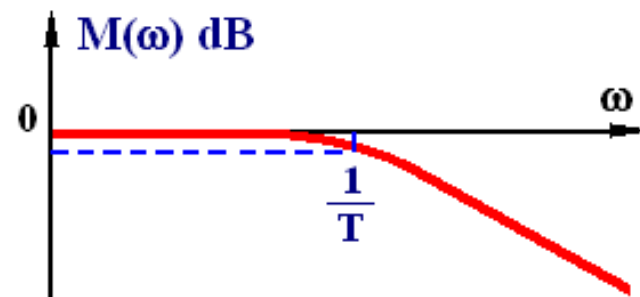
解. 依题意, $\omega = 5 \times 2\pi = 10\pi$ (rad/s)

要求 $\left| \frac{1}{1 + jT\omega} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + T^2\omega^2}} \geq 0.9$

即 $T^2\omega^2 + 1 \leq \frac{1}{0.9^2}$

$$T \leq \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{1}{0.9^2} - 1} \Big|_{\omega=10\pi} = 0.0154$$

$$\omega_b = \frac{1}{T} \geq \frac{1}{0.0154} = 64.833 \text{ (rad/s)}$$



小结

- ❖ 频率响应与频率特性的关系
- ❖ 频率特性的物理意义
- ❖ 典型环节及开环系统的频率特性图
 - Nyquist图
 - Bode图
- ❖ 频域稳定性判据
 - Nyquist稳定判据
 - 包围、穿越
- ❖ 相对稳定性
 - 幅值裕度
 - 相位裕度
- ❖ 频域性能指标与时域性能指标
- ❖ 开环Bode图与闭环性能的对应关系

matlab

`nyquist(num,den)`

`[re,im,w]=nyquist(num,den)`

`[re,im,w]=nyquist(num,den,w)`

绘制Nyquist图

`bode(num,den)`

`[mag,phase,w]=bode(num,den)`

`[mag,phase,w]=bode(num,den,w)`

绘制Bode图

`margin(num,den)`

求幅值裕度和相位裕度

`[gm,pm,wcg,wcp]=margin(mag,phase)`

作业

P164 5-1

P164 5-2 3) 5) 8)

P165 5-9 4) 5)

P166 5-13 b) d)

P164 5-3 5-5

P165 5-6 b) e) 5-7

P166 5-10 5-12 5-14 5-15

P167 5-19