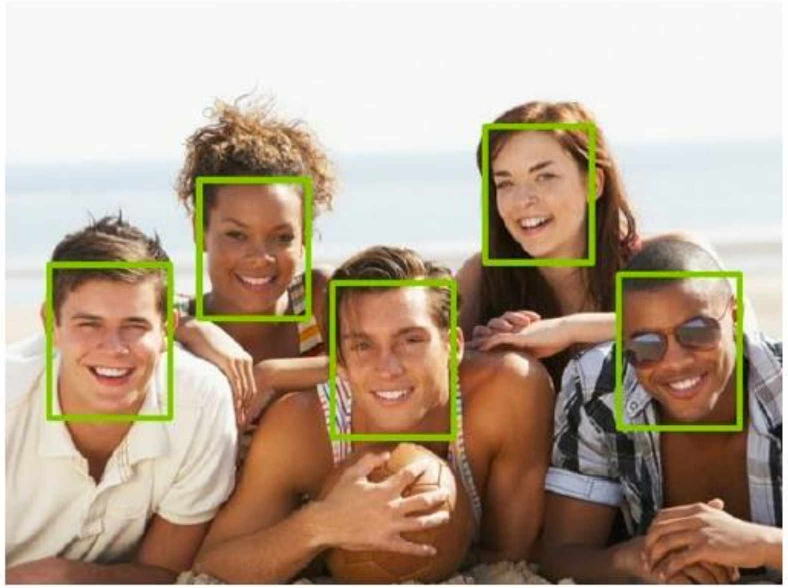
第四讲 Fisher线性判别（*Fisher Discriminant Analysis*）

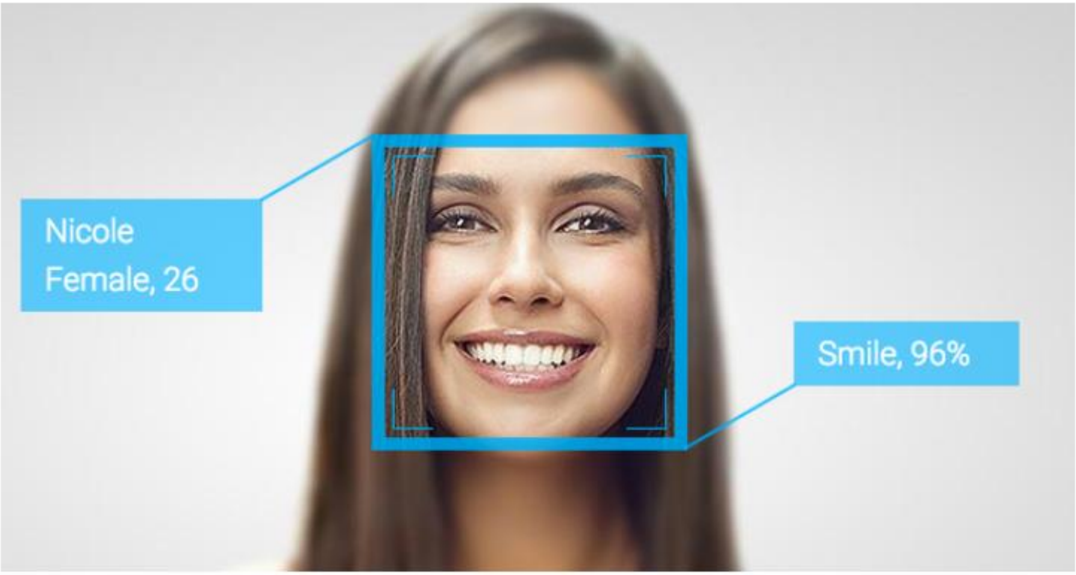
4.1 Fisher线性判别动机 （*The goal of Fisher Linear Discriminant* ）

4.2 Fisher线性判别分析 （*Fisher Discriminant Analysis*）

4.3 Fisher线性判别算法 （*Fisher Discriminant Algorithm*）

应用示例：





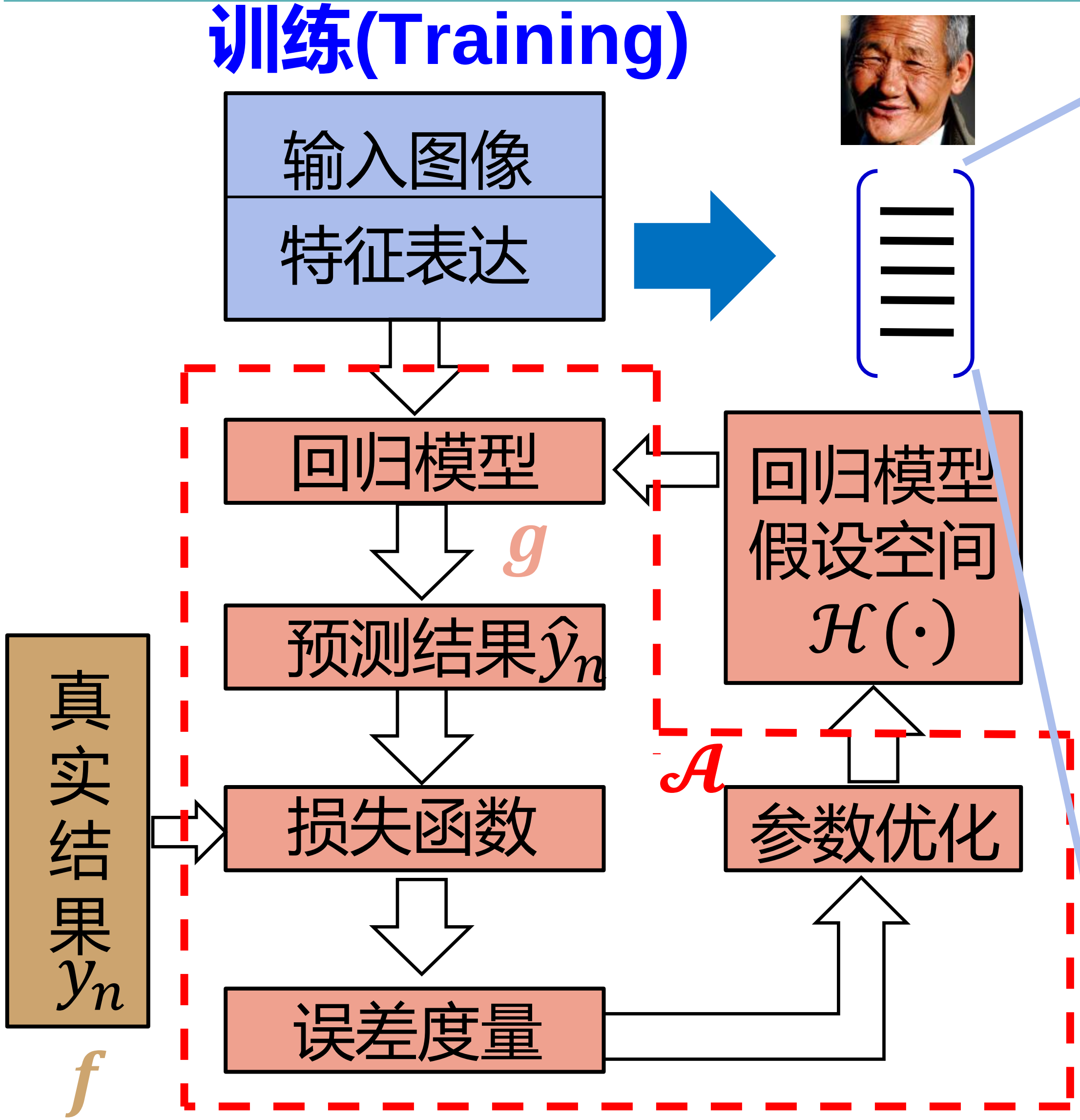
人脸检测
(Detection finds the faces in images)

人脸识别
(Recognition recognizes WHO the person is)

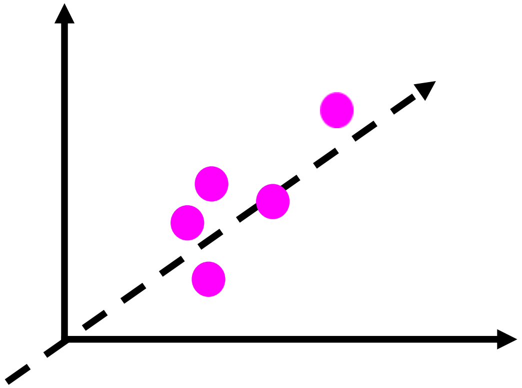
Source: CS131-Standford

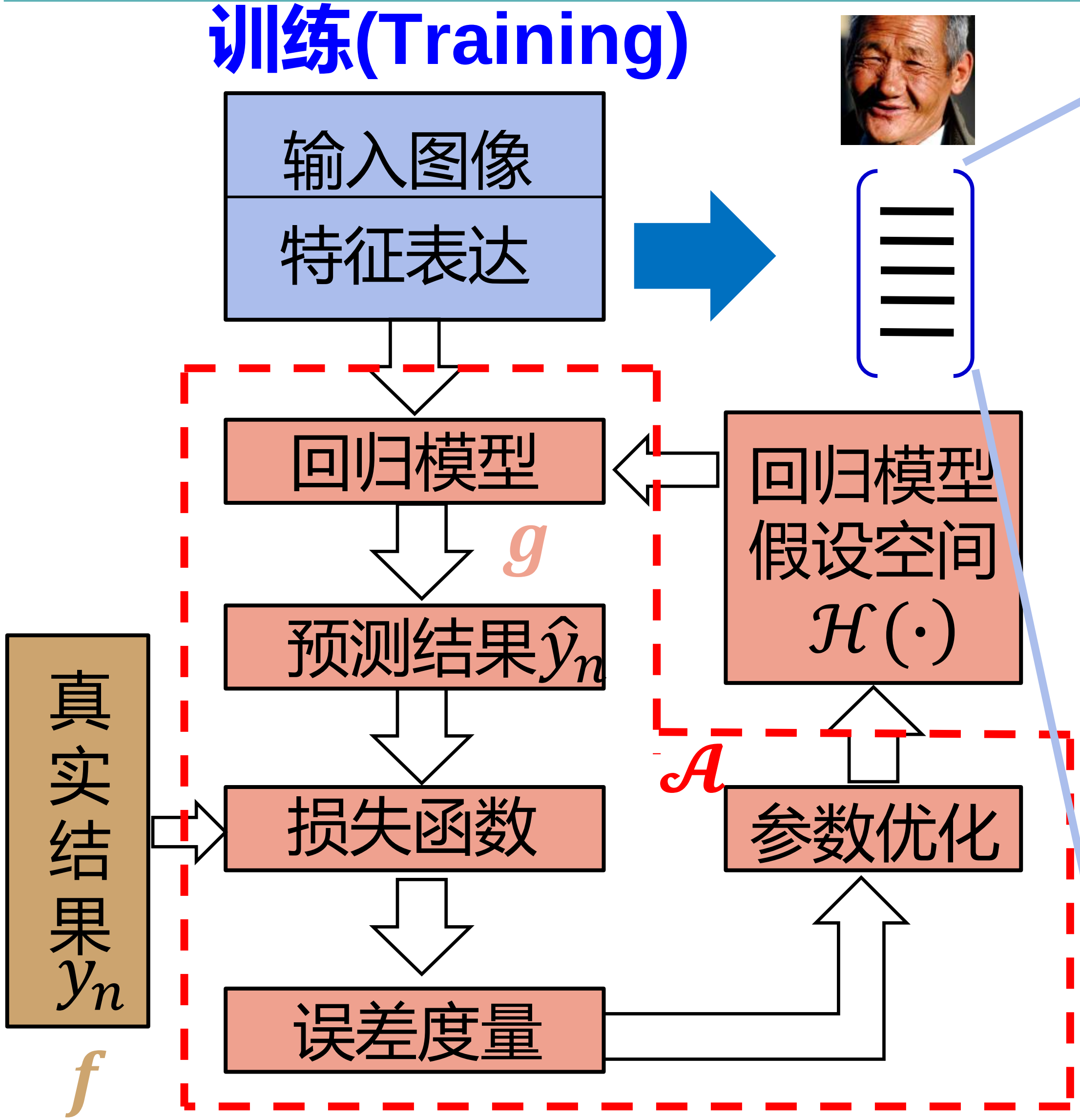
4.1 Fisher线性判别动机

训练(Training)

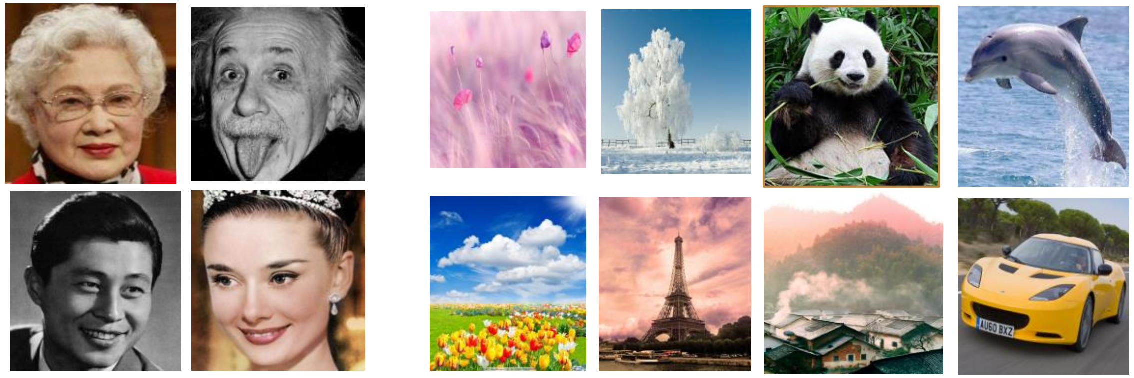


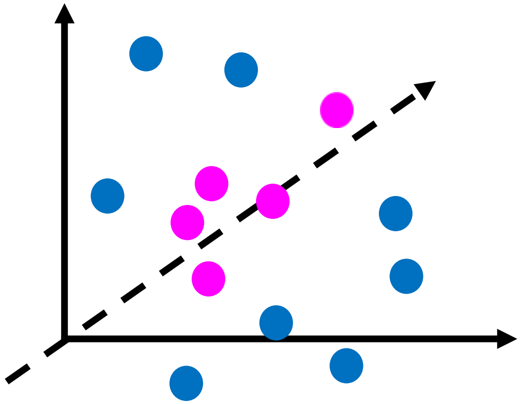
- ➢ 图像是特征空间中的一个“点”





- 图像是特征空间中的一个“点”

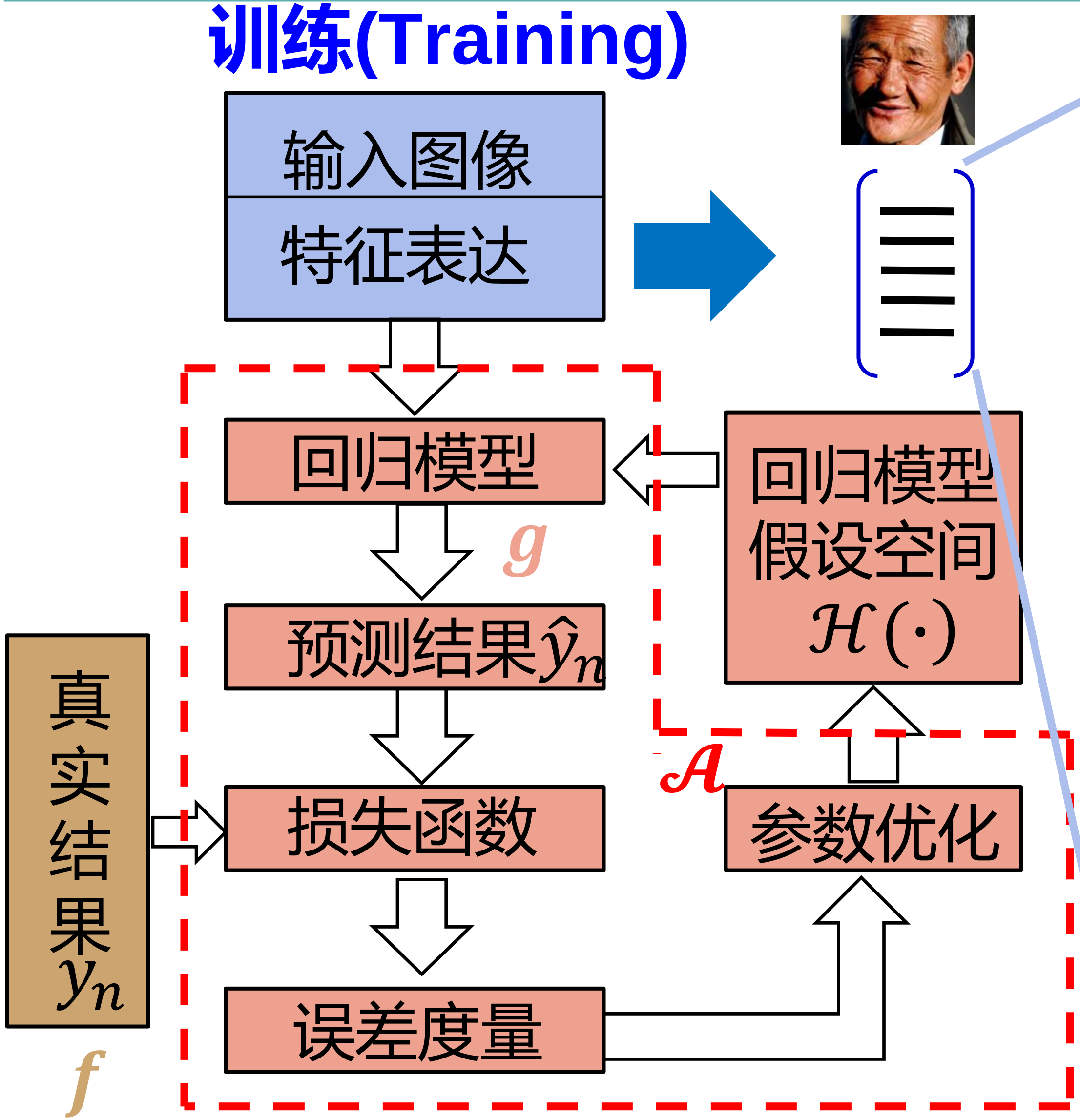




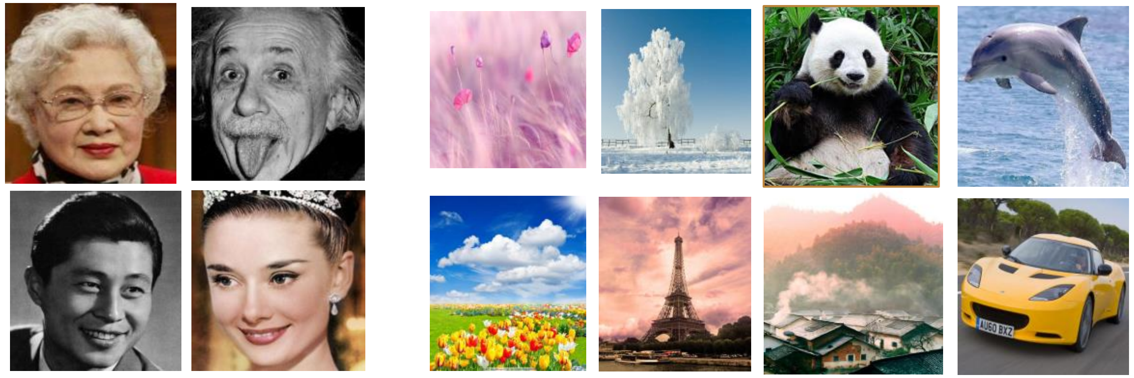
Ref.: CS131-Standford

4.1 Fisher线性判别动机

训练(Training)



➢ 图像是特征空间中的一个“点”

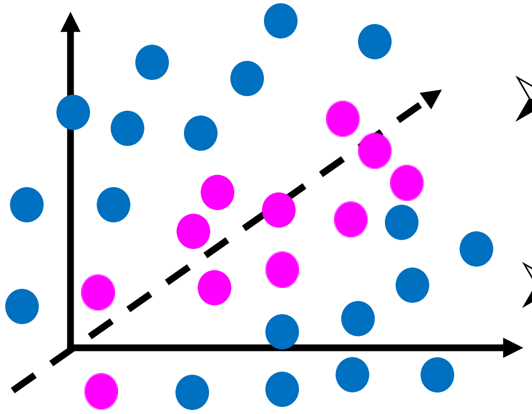


… … … …

➢ 高维特征空间：
例如：100*100*3

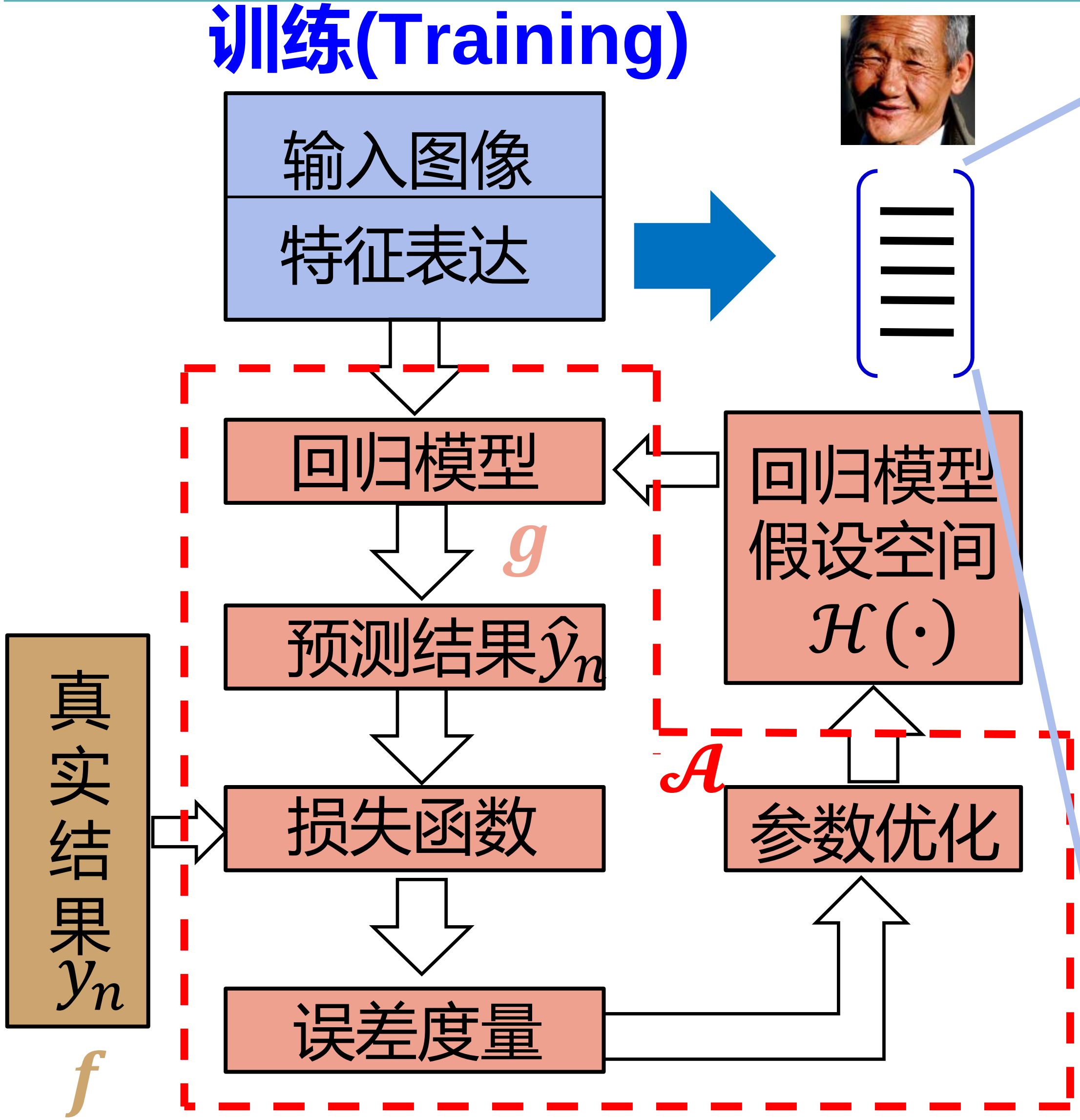
➢ 人脸只是众多样本中的一部分

➢ 人脸在特征空间中分布相对集中

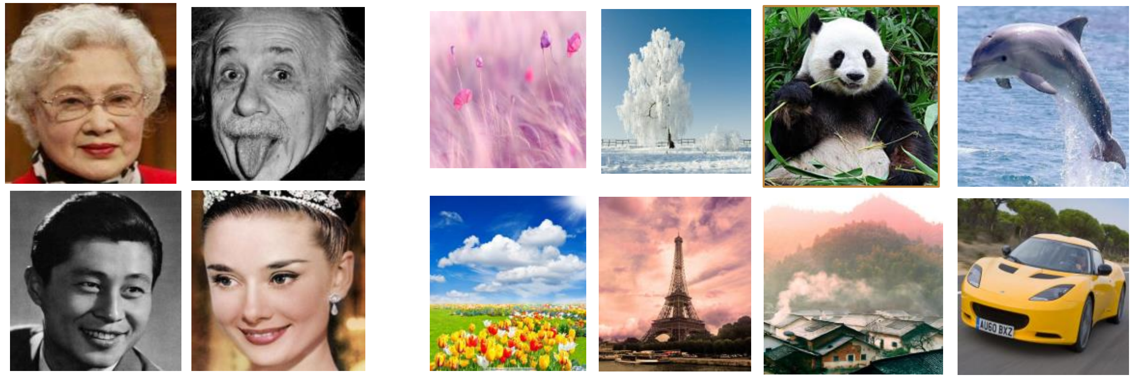


4.1 Fisher线性判别动机

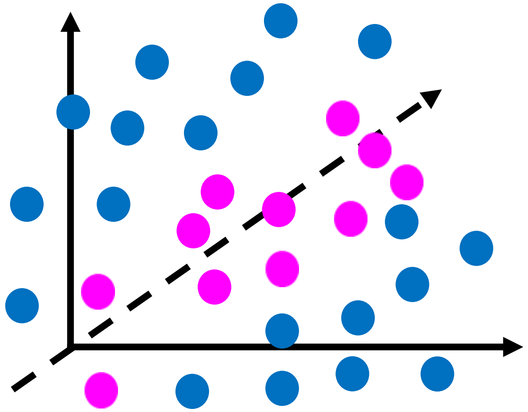
训练(Training)



➢ 图像是特征空间中的一个“点”



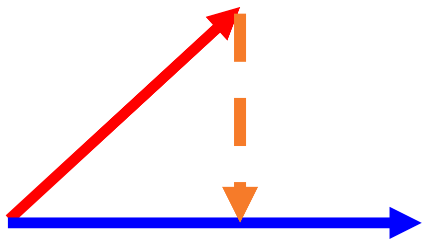
… … … …



核心思想

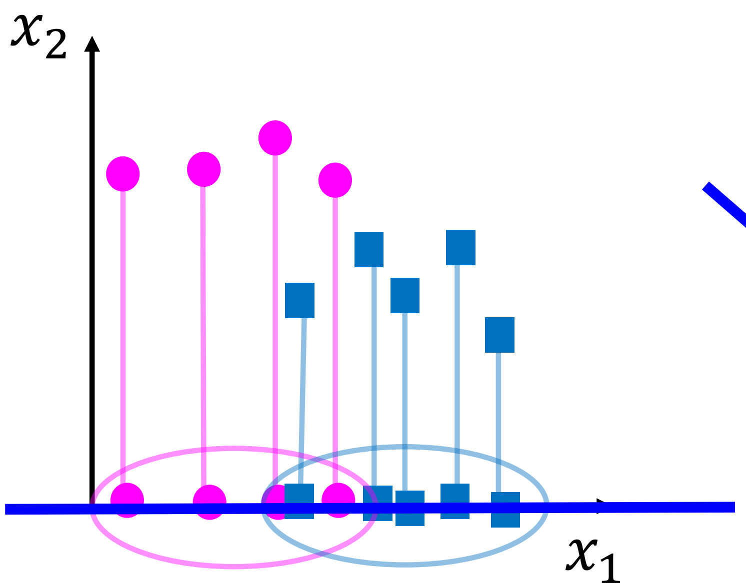
捕获人脸关键特征，将其压缩到低维空间中去。

投影表示：

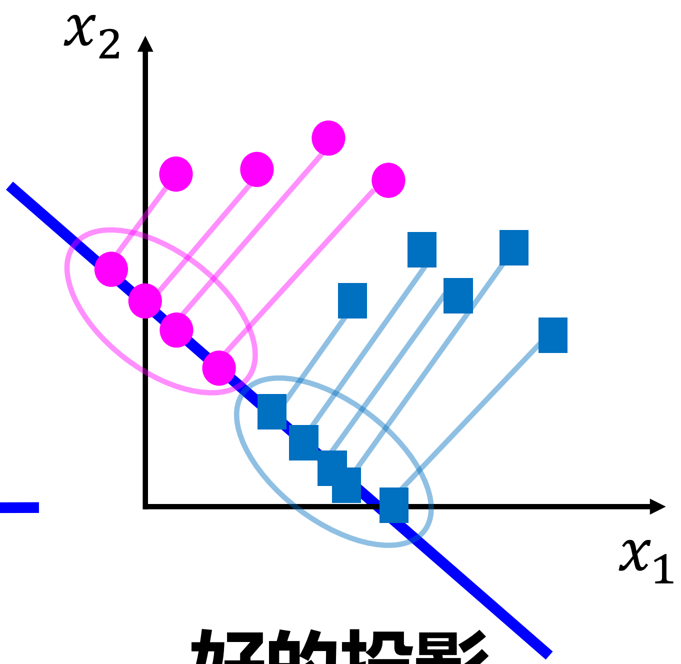


$\boldsymbol{w}^T\mathbf{x} = \|\mathbf{x}\|\|\boldsymbol{w}\|cos\theta$

将 x 向 $\boldsymbol{w}$ 投影
(Project x to $\boldsymbol{w}$)



不是好的投影
(*Poor Projection*)

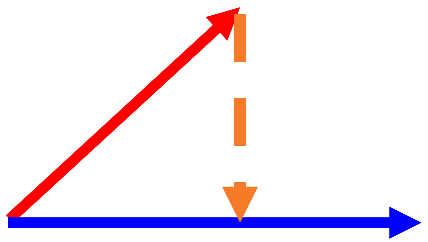


好的投影
(*Good Projection*)

Ref.: CS131-Standford

4.1 Fisher线性判别动机

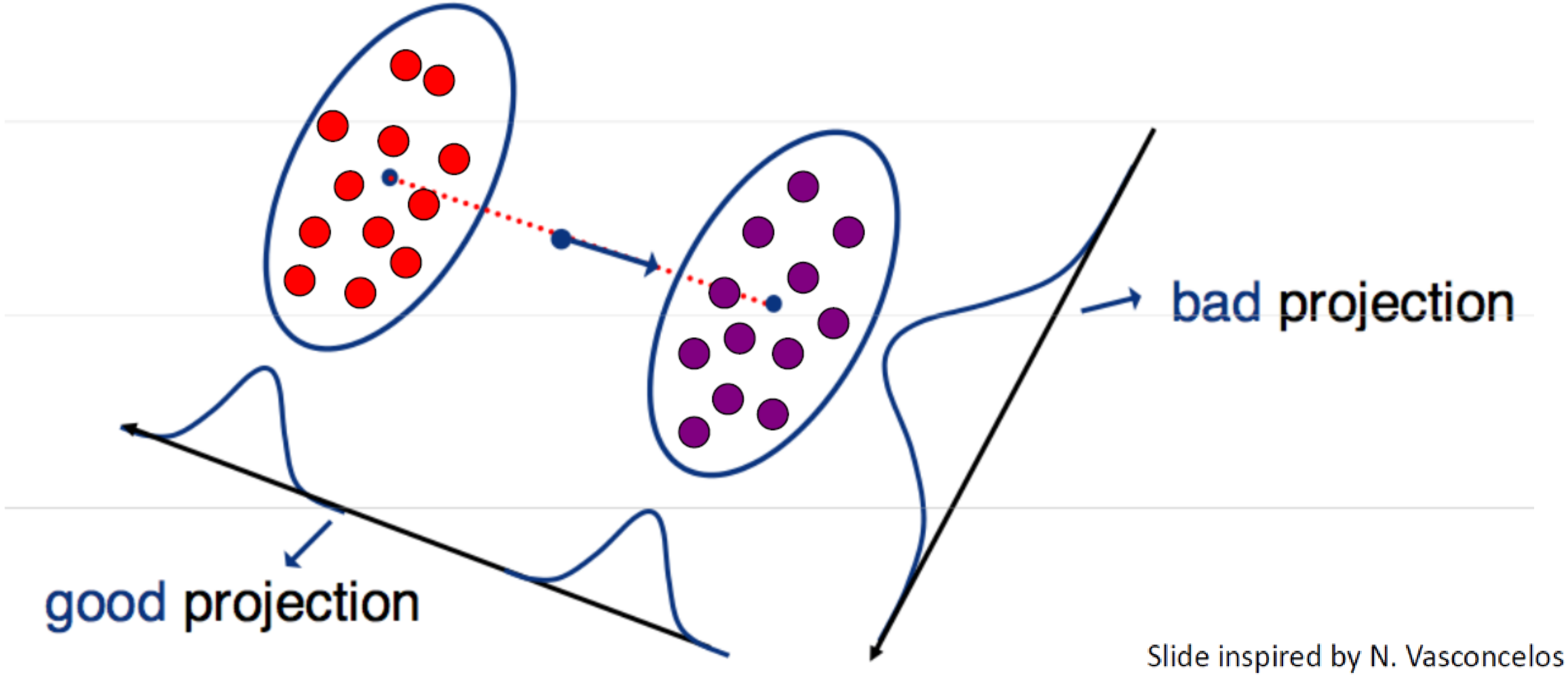
投影表示：



$$\mathbf{w}^T\mathbf{x} = \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{w}\|cos\theta$$

将 x 向 w 投影

（Project x to w ）



Fisher线性判别的目的：在两个类别之间找到最好的区分

（*find the best separation between two classes*）

Ref.: CS131-Standford

Fisher线性判别的目的：

- 在尽可能保留类别可区分性的前提下实现维数减少

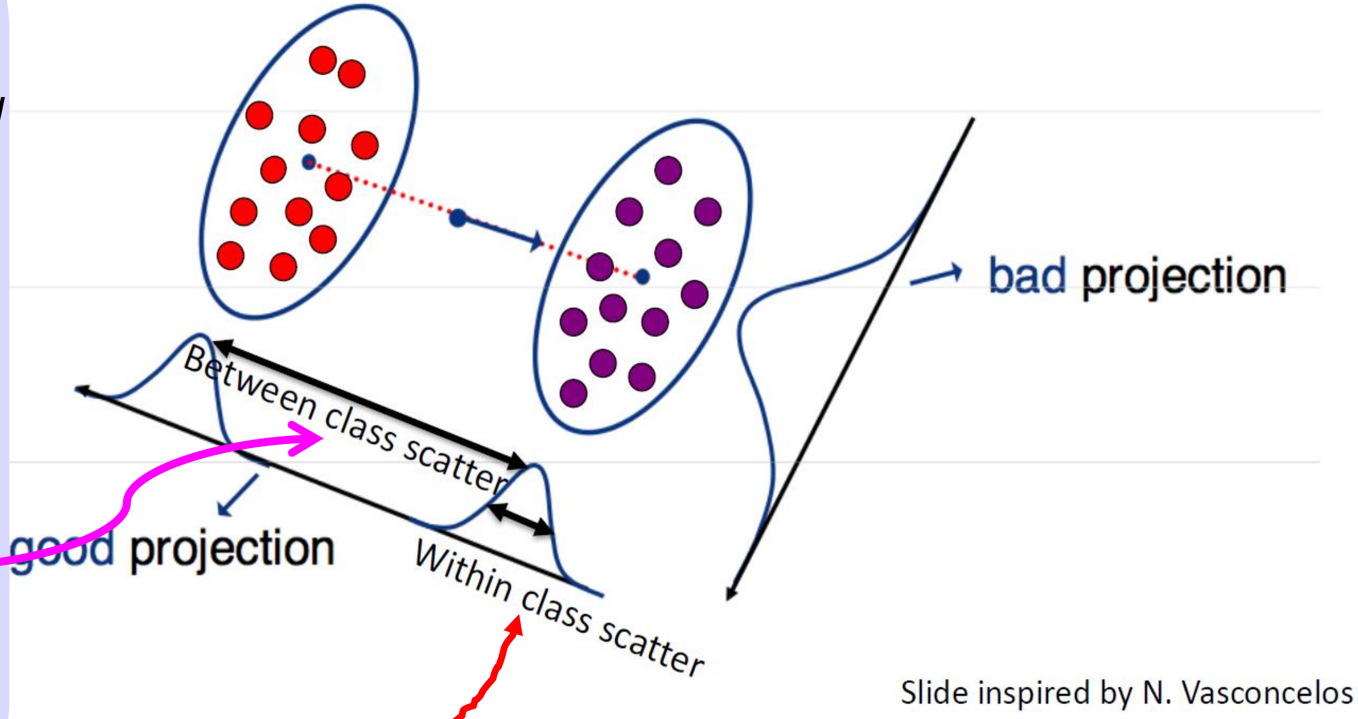
  (*Perform dimensionality reduction "while preserving as much of the class discriminatory information as possible".*)

- 找到让类别最好区分的投影方向

  (*Seeks to find directions along which the classes are best separated.*)

- 同时考虑类内散布和类间散布

  (*Takes into consideration the scatter within-classes but also the scatter between-classes.*)



Ref.: CS131-Standford

4.1 Fisher线性判别动机 （*The goal of Fisher Linear Discriminant* ）

4.2 Fisher线性判别分析 （*Fisher Discriminant Analysis*）

4.3 Fisher线性判别算法 （*Fisher Discriminant Algorithm*）

二分类问题的Fisher线性判别：

学习最佳投影$\boldsymbol{w}^*$，它能将所有样本投影到$\boldsymbol{w}^*$的方向

假设 $s = \boldsymbol{w}^T\mathbf{x}$　　$\mathbf{x} \in \mathcal{R}^d$，$s \in \mathcal{R}^1$

类别集合：$\mathcal{C} = \{c|(1,-1)\}$

第 c 个类别的均值为：$\boldsymbol{\mu}_c = E[\mathbf{x}|y=c] = \frac{1}{N_c}\sum_{n=1}^{N_c}[\mathbf{x}_n|y=c]$

第 c 个类别的协方差为：$\boldsymbol{\Sigma}_c = E[(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu}_c)(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu}_c)^T|y=c]$

$$= \sum_{n=1}^{N_c}[(\mathbf{x}_n-\boldsymbol{\mu}_c)(\mathbf{x}_n-\boldsymbol{\mu}_c)^T|y=c]$$

Ref.: CS131-Standford

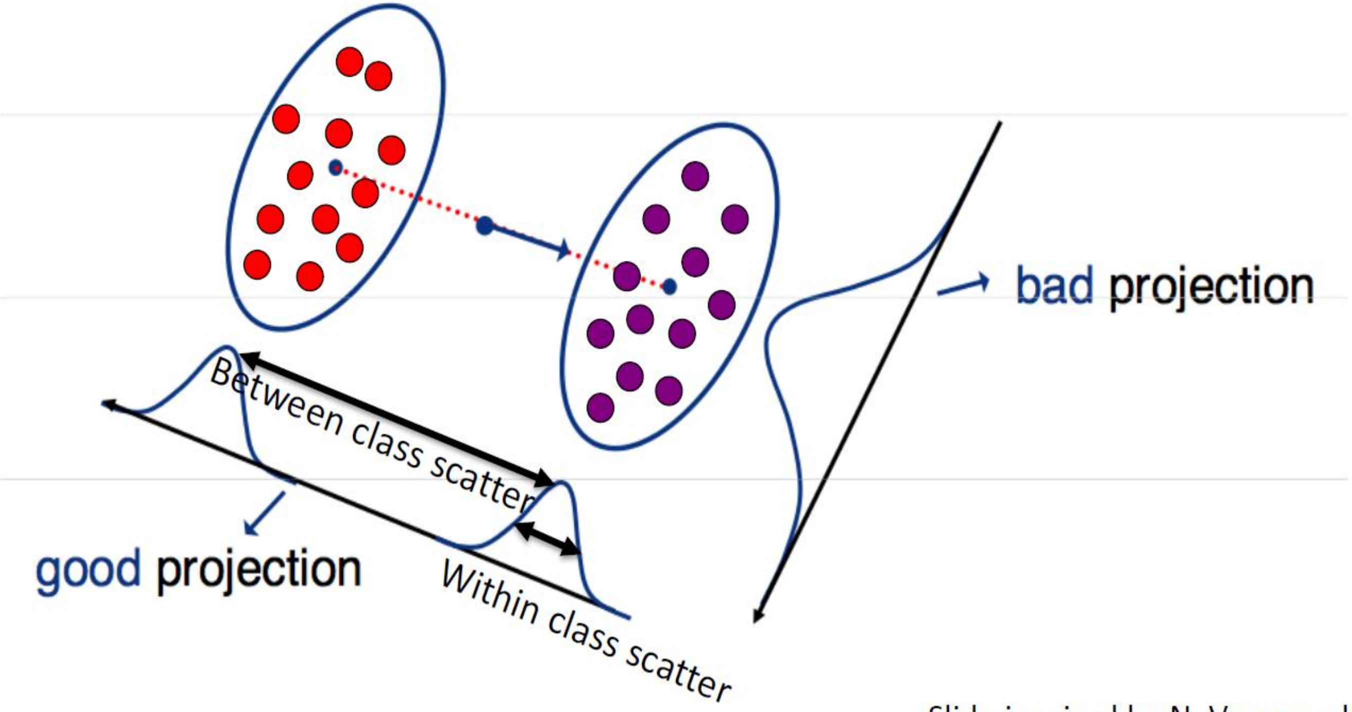
二分类问题的Fisher线性判别：

学习最佳投影$\boldsymbol{w}^*$的目标函数：

$$J(\boldsymbol{w}) = \frac{between\ class\ scatter}{within\ class\ scatter}$$

$$\boldsymbol{w}^* = \underset{\boldsymbol{w}}{argmax}\, J(\boldsymbol{w})$$

$$J(\boldsymbol{w}) = \frac{(E[s|y=1]-E[s|y=-1])^2}{var[s|y=1]+var[s|y=-1]}$$



Slide inspired by N. Vasconcelos

Ref.: CS131-Standford

二分类问题的Fisher线性判别：

学习最佳投影$\mathbf{w}^*$的目标函数：

$$J(\mathbf{w}) = \frac{between\ class\ scatter}{within\ class\ scatter}$$

$$\mathbf{w}^* = \underset{\mathbf{w}}{argmax}\, J(\mathbf{w})$$

$$J(\mathbf{w}) = \frac{(E[s|y=1]-E[s|y=-1])^2}{var[s|y=1]+var[s|y=-1]}$$

$$(E[s|y=1]-E[s|y=-1])^2$$

$$= (E[\mathbf{w}^T\mathbf{x}|y=1]-E[\mathbf{w}^T\mathbf{x}|y=-1])^2$$

$$= (\mathbf{w}^T(E[\mathbf{x}|y=1]-E[\mathbf{x}|y=-1]))^2$$

$$= (\mathbf{w}^T(\boldsymbol{\mu}_1-\boldsymbol{\mu}_{-1}))^2$$

$$= \mathbf{w}^T(\boldsymbol{\mu}_1-\boldsymbol{\mu}_{-1})\,(\boldsymbol{\mu}_1-\boldsymbol{\mu}_{-1})^T\mathbf{w}$$

Ref.: CS131-Standford

二分类问题的Fisher线性判别：

学习最佳投影$\mathbf{w}^*$的目标函数：

$$J(\mathbf{w}) = \frac{between\ class\ scatter}{within\ class\ scatter}$$

$$\mathbf{w}^* = \underset{\mathbf{w}}{argmax}\, J(\mathbf{w})$$

$$J(\mathbf{w}) = \frac{(E[s|y=1]-E[s|y=-1])^2}{var[s|y=1]+var[s|y=-1]}$$

$$(E[s|y=1]-E[s|y=-1])^2$$
$$= \mathbf{w}^T(\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_{-1})(\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_{-1})^T\mathbf{w}$$

$$var[s|y=c] = E[(s - E[s|y=c])^2]$$
$$= E\left[\left(\mathbf{w}^T\mathbf{x} - E[\mathbf{w}^T\mathbf{x}|y=c]\right)^2\right]$$
$$= E\left[\left(\mathbf{w}^T(\mathbf{x} - E[\mathbf{x}|y=c])\right)^2\right]$$
$$= E\left[\left(\mathbf{w}^T(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_c)\right)^2\right]$$
$$= E[\mathbf{w}^T(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_c)(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_c)^T\mathbf{w}]$$
$$= \mathbf{w}^T E[(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_c)(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_c)^T]\mathbf{w}$$
$$= \mathbf{w}^T\boldsymbol{\Sigma}_c\mathbf{w}$$

Ref.: CS131-Standford

二分类问题的Fisher线性判别：

学习最佳投影$\boldsymbol{w}^*$的目标函数：

$$J(\boldsymbol{w}) = \frac{between\ class\ scatter}{within\ class\ scatter}$$

$$\boldsymbol{w}^* = \underset{\boldsymbol{w}}{argmax}\, J(\boldsymbol{w})$$

$$J(\boldsymbol{w}) = \frac{(E[s|y=1]-E[s|y=-1])^2}{var[s|y=1]+var[s|y=-1]}$$

$$(E[s|y=1]-E[s|y=-1])^2 = \boldsymbol{w}^T(\boldsymbol{\mu}_1-\boldsymbol{\mu}_{-1})(\boldsymbol{\mu}_1-\boldsymbol{\mu}_{-1})^T\boldsymbol{w}$$

$$var[s|y=c] = E[(s-E[s|y=c])^2] = \boldsymbol{w}^T\boldsymbol{\Sigma}_c\boldsymbol{w}$$

Ref.: CS131-Standford

二分类问题的Fisher线性判别：

学习最佳投影$\boldsymbol{w}^*$的目标函数：

$$J(\boldsymbol{w}) = \frac{between\ class\ scatter}{within\ class\ scatter}$$

$$\boldsymbol{w}^* = \underset{\boldsymbol{w}}{argmax}\, J(\boldsymbol{w})$$

$$J(\boldsymbol{w}) = \frac{(E[s|y=1]-E[s|y=-1])^2}{var[s|y=1]+var[s|y=-1]}$$

$$(E[s|y=1] - E[s|y=-1])^2$$
$$= \boldsymbol{w}^T(\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_{-1})\,(\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_{-1})^T\boldsymbol{w}$$

$$var[s|y=c] = E[(s - E[s|y=c])^2]$$
$$= \boldsymbol{w}^T\boldsymbol{\Sigma}_c\boldsymbol{w}$$

$$J(\boldsymbol{w}) = \frac{\boldsymbol{w}^T(\boldsymbol{\mu}_1-\boldsymbol{\mu}_{-1})\,(\boldsymbol{\mu}_1-\boldsymbol{\mu}_{-1})^T\boldsymbol{w}}{\boldsymbol{w}^T\boldsymbol{\Sigma}_1\boldsymbol{w} + \boldsymbol{w}^T\boldsymbol{\Sigma}_{-1}\boldsymbol{w}}$$

Ref.: CS131-Standford

二分类问题的Fisher线性判别：

学习最佳投影$\boldsymbol{w}^*$的目标函数：

$$J(\boldsymbol{w}) = \frac{between\ class\ scatter}{within\ class\ scatter}$$

$$\boldsymbol{w}^* = \underset{\boldsymbol{w}}{argmax}\, J(\boldsymbol{w})$$

$$J(\boldsymbol{w}) = \frac{\boldsymbol{w}^T(\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_{-1})(\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_{-1})^T\boldsymbol{w}}{\boldsymbol{w}^T\boldsymbol{\Sigma}_1\boldsymbol{w} + \boldsymbol{w}^T\boldsymbol{\Sigma}_{-1}\boldsymbol{w}}$$

$$\boldsymbol{S}_B = (\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_{-1})(\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_{-1})^T$$

$$\boldsymbol{S}_w = \boldsymbol{\Sigma}_1 + \boldsymbol{\Sigma}_{-1}$$

Ref.: CS131-Standford

4.2 Fisher线性判别分析

二分类问题的Fisher线性判别：

学习最佳投影$\boldsymbol{w}^*$的目标函数：

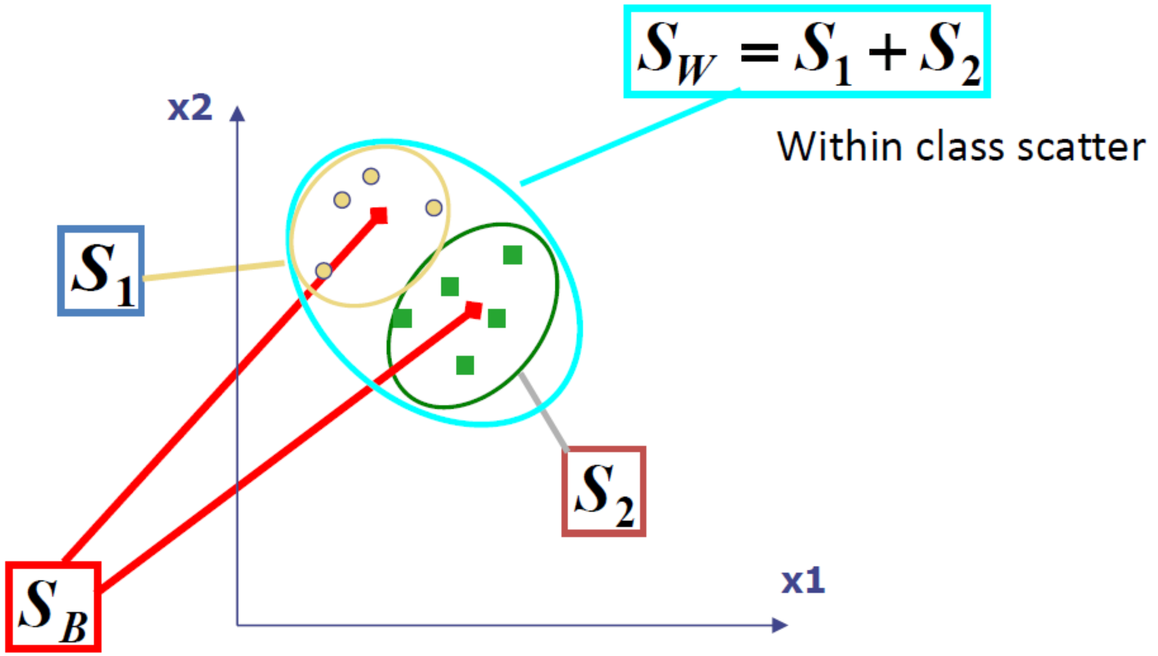
$$J(\boldsymbol{w}) = \frac{between\ class\ scatter}{within\ class\ scatter}$$

$$\boldsymbol{w}^* = \underset{\boldsymbol{w}}{argmax}\, J(\boldsymbol{w})$$

$$J(\boldsymbol{w}) = \frac{\boldsymbol{w}^T \boldsymbol{S}_B \boldsymbol{w}}{\boldsymbol{w}^T \boldsymbol{S}_w \boldsymbol{w}}$$

$$\boldsymbol{S}_B = (\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_{-1})(\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_{-1})^T$$

$$\boldsymbol{S}_w = \boldsymbol{\Sigma}_1 + \boldsymbol{\Sigma}_{-1} = \boldsymbol{S}_1 + \boldsymbol{S}_2$$



Between class scatter

Ref.: CS131-Standford

二分类问题的Fisher线性判别：

学习最佳投影 $\mathbf{w}^*$ 的目标函数：

$$J(\mathbf{w}) = \frac{between\ class\ scatter}{within\ class\ scatter}$$

$$\mathbf{w}^* = \underset{\mathbf{w}}{argmax}\, J(\mathbf{w})$$

$$J(\mathbf{w}) = \frac{\mathbf{w}^T \mathbf{S}_B \mathbf{w}}{\mathbf{w}^T \mathbf{S}_w \mathbf{w}}$$

最大化目标函数问题转化为：

$$\max_{\mathbf{w}} \mathbf{w}^T \mathbf{S}_B \mathbf{w} \quad Subject\ to\ \ \mathbf{w}^T \mathbf{S}_w \mathbf{w} = K$$

利用拉格朗日乘子法(*Lagrange multipliers*)：

$$L(\mathbf{w}, \lambda) = \mathbf{w}^T \mathbf{S}_B \mathbf{w} + \lambda(K - \mathbf{w}^T \mathbf{S}_w \mathbf{w})$$

$$= \mathbf{w}^T (\mathbf{S}_B - \lambda \mathbf{S}_w)\mathbf{w} + \lambda K$$

$$\nabla L_w(\mathbf{w}, \lambda) = \frac{\partial L(\mathbf{w}, \lambda)}{\partial \mathbf{w}} = \mathbf{0}^T$$

$$2(\mathbf{S}_B - \lambda \mathbf{S}_w)\mathbf{w} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{S}_B \mathbf{w} = \lambda \mathbf{S}_w \mathbf{w}$$

Ref.: CS131-Standford

二分类问题的Fisher线性判别：

学习最佳投影 $\boldsymbol{w}^*$ 的目标函数：

$$J(\boldsymbol{w}) = \frac{between\ class\ scatter}{within\ class\ scatter}$$

$$\boldsymbol{w}^* = \underset{\boldsymbol{w}}{argmax}\, J(\boldsymbol{w})$$

$$J(\boldsymbol{w}) = \frac{\boldsymbol{w}^T \boldsymbol{S}_B \boldsymbol{w}}{\boldsymbol{w}^T \boldsymbol{S}_w \boldsymbol{w}}$$

$$\max_{\boldsymbol{w}} \boldsymbol{w}^T \boldsymbol{S}_B \boldsymbol{w} \quad Subject\ to\ \ \boldsymbol{w}^T \boldsymbol{S}_w \boldsymbol{w} = \boldsymbol{K}$$

$$L(\boldsymbol{w}, \lambda) = \boldsymbol{w}^T \boldsymbol{S}_B \boldsymbol{w} - \lambda(\boldsymbol{w}^T \boldsymbol{S}_w \boldsymbol{w} - \boldsymbol{K})$$

$$\nabla L_w(\boldsymbol{w}, \lambda) = \boldsymbol{0}^T$$

$$\boldsymbol{S}_B \boldsymbol{w} = \lambda \boldsymbol{S}_w \boldsymbol{w}$$

如果$\boldsymbol{S}_w^{-1} = (\boldsymbol{\Sigma}_1 + \boldsymbol{\Sigma}_{-1})^{-1}$ 存在,则有：

$$\boldsymbol{S}_w^{-1} \boldsymbol{S}_B \boldsymbol{w} = \lambda \boldsymbol{w}$$

$$\boldsymbol{S}_w^{-1}(\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_{-1})\,(\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_{-1})^T \boldsymbol{w} = \lambda \boldsymbol{w}$$

$$\boldsymbol{S}_w^{-1}(\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_{-1})\, a = \lambda \boldsymbol{w}$$

$$\boldsymbol{S}_w^{-1}(\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_{-1}) = \frac{\lambda}{a} \boldsymbol{w}$$

只关注投影向量的方向：

$$\boldsymbol{w}^* = \boldsymbol{S}_w^{-1}(\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_{-1})$$

Ref.: CS131-Standford

4.2 Fisher线性判别分析

二分类问题的Fisher线性判别：

学习最佳投影 $\mathbf{w}^*$ 的目标函数：

$$J(\mathbf{w}) = \frac{between\ class\ scatter}{within\ class\ scatter}$$

$$\mathbf{w}^* = \underset{\mathbf{w}}{argmax}\, J(\mathbf{w})$$

$$J(\mathbf{w}) = \frac{\mathbf{w}^T \mathbf{S}_B \mathbf{w}}{\mathbf{w}^T \mathbf{S}_W \mathbf{w}}$$

$$\max_{\mathbf{w}} \mathbf{w}^T \mathbf{S}_B \mathbf{w} \quad Subject\ to\ \ \mathbf{w}^T \mathbf{S}_W \mathbf{w} = \mathbf{K}$$

$$L(\mathbf{w}, \lambda) = \mathbf{w}^T \mathbf{S}_B \mathbf{w} - \lambda(\mathbf{w}^T \mathbf{S}_W \mathbf{w} - \mathbf{K})$$

$$\nabla L_W(\mathbf{w}, \lambda) = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{w}^* = \mathbf{S}_W^{-1}(\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_{-1})$$

找到投影向量后，对任一测试样本 $\mathbf{x}$：

$$s = \mathbf{w}^{*T}\mathbf{x} = (\mathbf{S}_W^{-1}(\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_{-1}))^T\mathbf{x}$$

假设类别的判别门限设为 s'：

$$s' = \frac{\mathbf{w}^{*T}(\boldsymbol{\mu}_1 + \boldsymbol{\mu}_{-1})}{2}$$

对任一测试样本 $\mathbf{x}$ 所属类别的判断：

$$\begin{cases} y = 1 & if\ s = \mathbf{w}^{*T}\mathbf{x} > s' \\ y = -1 & if\ s = \mathbf{w}^{*T}\mathbf{x} < s' \end{cases}$$

4.1 Fisher线性判别动机　（*The goal of Fisher Linear Discriminant* ）

4.2 Fisher线性判别分析　（*Fisher Discriminant Analysis*）

4.3 Fisher线性判别算法　（*Fisher Discriminant Algorithm*）

4.3 Fisher线性判别算法

二分类问题的Fisher线性判别算法：

① 获取具有标签的两类样本

② 依据下式得到$\boldsymbol{\mu}_1$ 和$\boldsymbol{\mu}_{-1}$：

$$\boldsymbol{\mu}_c = \frac{1}{N_c}\sum_{n=1}^{N_c}[\mathbf{x}_n|y=c]$$

③ 依据下式得到$\boldsymbol{\Sigma}_1$ 和$\boldsymbol{\Sigma}_{-1}$ ：

$$\boldsymbol{\Sigma}_c = \sum_{n=1}^{N_c}[(\mathbf{x}_n-\mu_c)(\mathbf{x}_n-\mu_c)^T|y=c]$$

④ 计算类内总离差阵：$\boldsymbol{S}_w = \boldsymbol{\Sigma}_1 + \boldsymbol{\Sigma}_{-1}$

⑤ 计算类内总离差阵的逆：$\boldsymbol{S}_w^{-1}$

⑥ 计算最佳投影：$\boldsymbol{w}^* = \boldsymbol{S}_w^{-1}(\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_{-1})$

⑦ 计算判别门限$\boldsymbol{s}'$：$s' = \frac{\boldsymbol{w}^{*T}(\boldsymbol{\mu}_1+\boldsymbol{\mu}_{-1})}{2}$

⑧ 对任一测试样本 $\mathbf{x}$ ：

$$\begin{cases} y=1 & if\ s=\boldsymbol{w}^{*T}\mathbf{x} > s' \\ y=-1 & if\ s=\boldsymbol{w}^{*T}\mathbf{x} < s' \end{cases}$$

4.1 Fisher线性判别动机

在尽可能保留类别可区分性的前提下实现维数减少

4.2 Fisher线性判别分析

找到让类别最好区分的投影方向

4.3 Fisher线性判别算法

通过计算类内散布和类间散布，找到最佳 $\boldsymbol{w}^*$和判别门限s'