2018 年-2019 学年度第一学期
华中科技大学本科生课程考试试卷(B 卷)

课程名称：运筹学（一）　　课程类别　☐公共课 ■专业课　　考试形式　☐开卷 ■闭卷

所在院系：自动化学院　专业及班级：________　考试日期：2019.1.6

学　号：__________________姓名：______________任课教师：______________

题号	一	二	三	四	五	六	总分
分数							

得分	评卷人

一、　（20 分）试用大 M 法求解以下线性规划问题，并指出解属于哪一类解，为什么？

$$\min\ z = 2x_1 + 3x_2 + x_3$$
$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 \ge 8 \\ 3x_1 + 2x_2 \ge 6 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

解：将上述问题化为标准型：

$$\min\ z = 2x_1 + 3x_2 + x_3 + Mx_5 + Mx_7$$
$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 8 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_6 + x_7 = 6 \\ x_1, \cdots, x_7 \ge 0 \end{cases}$$

初始单纯形表为：

c_j	2	3	1	0	M	0	M	θ

C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
M	x_5	8	1	[4]	2	-1	1	0	0	8/4
M	x_7	6	3	2	0	0	0	-1	1	6/2
σ_j			2-4M	3-6M	1-2M	M		M		

选取x_2为换入变量，x_5为换出变量，进行第一次迭代。

第一次迭代后的表格：

c_j			2	3	1	0	M	0	M	θ
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
3	x_2	2	1/4	1	1/2	-1/4	1/4	0	0	8
M	x_7	2	[5/2]	0	-1	1/2	-1/2	-1	1	4/5
σ_j			5/4-5/2M	0	-1/2+M	3/4-M/2	3/2M-3/4	M	0	

选取x_1为换入变量，x_7为换出变量，进行第二次迭代。

第二次迭代后的表格：

c_j	2	3	1	0	M	0	M	θ

C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
3	x_2	9/5	0	1	3/5	-3/10	3/10	1/10	-1/10	
2	x_1	4/5	1	0	-2/5	1/5	-1/5	-2/5	2/5	
σ_j			0	0	0	1/2	M-1/2	1/2	M-1/2	

所有非基变量的检验数都是$\sigma_j \geq 0$ ，该解为最优解，最优解为：

$\left[x_1, x_2, x_3\right] = \left[4/5, 9/5, 0\right]$ ，最优值为：$z^* = 3*9/5 + 2*4/5 = 7$ 。

由于非基变量x_3 的检验数为 0，所以该解为无穷多最优解。

得分	评卷人

二、（10 分）表 1 是某一求极大化问题的单纯形表，表中无人工变量，a_1, a_2, c_1, c_2, d为待定常数，试说明a_1, a_2, c_1, c_2, d分别取何值时，以下结论成立：

a） **表中解为唯一最优解；**

b） **表中解为无穷多最优解之一；**

c） **下一步迭代将以x_1替换基变量x_5；**

d） **该线性规划问题具有无界解；**

表 1

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_3	d	4	a_1	1	0	0
x_4	2	−1	−5	0	1	0

x_5	3	a_2	-3	0	0	1
$c_j - z_j$		c_1	c_2	0	0	0

答:

a) 表中解为唯一最优解: $d \geq 0, c_1 < 0, c_2 < 0$;

b) 表中解为无穷多最优解之一: $d \geq 0, c_1 \leq 0, c_2 \leq 0, c_1 * c_2 = 0$;

c) 下一步迭代将以x_1替换基变量x_5: $d \geq 0, c_1 > 0, a_2 > 0, \frac{3}{a_2} < \frac{d}{4}$

d) 该线性规划问题具有无界解: $d \geq 0, c_2 > 0, a_1 \leq 0$;

得分	评卷人

三（20 分）、已知线性规划问题：

$$\max z = -5x_1 + 5x_2 + 13x_3$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 20 & ① \\ 12x_1 + 4x_2 + 10x_3 \leq 90 & ② \\ x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

假设在上述线性规划问题的第①个约束条件中加入松弛变量x_4，第②个约束条件中加入松弛变量x_5（这里$x_4, x_5 \geq 0$），用单纯形法求解，初表和终表如表 2 和表 3 所示。

（1）填完初表和终表的空白处。

（2）求使最优基变量不改变的b_2（即约束条件②的右端常数项）的取值范围。

（3）求使最优解不发生变化的c_3（即目标函数中x_3的价值系数）的取值范围。

（4）根据终表，求对偶问题的最优解。

表 2 初表

c_j			-5	5	13	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
			-1	1	3	1	0
			12	4	10	0	1
σ_j							

表 3 终表

c_j	-5	5	13	0	0
C_B X_B b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
	-1	1		1	0
	16	0		-4	1
σ_j					

解：（1）

初表

c_j			-5	5	13	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_4	20	-1	1	3	1	0
0	x_5	90	12	4	10	0	1
σ_j			-5	5	13	0	0

终表

c_j			-5	5	13	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
5	x_2	20	-1	1	3	1	0
0	x_5	10	16	0	-2	-4	1
σ_j			0	0	-2	-5	0

（2）b_2变化，会影响 b 列取值，为保证最优基变量不变，则有：

$$B^{-1}\begin{bmatrix}20\\b_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\-4 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}20\\b_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}20\\-80+b_2\end{bmatrix}\geq 0$$

得出：$b_2\geq 80$

（3）c_3变化，只会影响x_3的检验数，若最优解不发生变化，则：

$$\sigma_3=c_3-15\geq 0\Rightarrow c_3\geq 15。$$

（4）对偶问题的最优解：

解法 1：对偶问题的最优解等于原问题松弛变量所对应检验数的相反数，故对偶问题最优解：$Y=[5\ 0]$。

解法 2：$Y=C_BB^{-1}=[5\quad 0]\begin{bmatrix}1 & 0\\-4 & 1\end{bmatrix}=[5\quad 0]$。

得分	评卷人

四、（20 分）已知某运输问题的产量、销量、及产地到销地的单位运价表如表 4 所示，试求最优的运输调拨方案。

表 4

销地 产地	甲	乙	丙	丁	戊	产量
1	10	20	5	9	10	5
2	2	10	8	30	6	6
3	1	20	7	10	4	2
4	8	6	3	7	5	9
销售	4	4	6	2	4	

解：先将不平衡运输问题转化为平衡运输问题，因为是产大于销，所以增加一列，即虚拟一个销地，其单位运价为 0，销量为产量与销量的差额，即 22-20=2.如下表

销地 产地	甲	乙	丙	丁	戊	己	产量
1	10	20	5	9	10	0	5
2	2	10	8	30	6	0	6
3	1	20	7	10	4	0	2
4	8	6	3	7	5	0	9
销售	4	4	6	2	4	2	

（3 分）

用最小元素法，求得初始可行方案，如下表。初始解（3 分）

销地 产地	甲	乙	丙	丁	戊	己	产量
1		1		2		2	5
2	2	3			1		6
3	2						2
4			6		3		9
销售	4	4	6	2	4	2	

计算检验数　第一次迭代（检验数的计算 4 分，调整运量 4 分）

产地\销地	甲	乙	丙	丁	戊	己	u_i
1	10 -2	20 0	5 -9	9 0	10 -6	0 0	0
2	2 0	10 0	8 4	30 31	6 0	0 10	-10
3	1 0	20 11	7 4	10 12	4 -1	0 11	-11
4	8 7	6 -3	3 0	7 9	5 0	0 11	-11
v_j	12	20	14	9	16	0	

调整运量，得到新的调运方案

产地\销地	甲	乙	丙	丁	戊	己	产量
1		1		2		2	5
2	2	3			1		6
3	2						2
4			6		3		9
销售	4	4	6	2	4	2	

调整运量

产地\销地	甲	乙	丙	丁	戊	己	产量
1		0	1	2		2	5
2	2	4					6
3	2						2

4			5		4		9
销售	4	4	6	2	4	2	

再计算检验数

计算检验数 第二次迭代（2 次-6 次迭代 5 分）

销地 产地	甲	乙	丙	丁	戊	己	u_i
1	$\boxed{10}$ -2	$\boxed{20}$ 0	$\boxed{5}$ 0	$\boxed{9}$ 0	$\boxed{10}$ 3	$\boxed{0}$ 0	0
2	$\boxed{2}$ 0	$\boxed{10}$ 0	$\boxed{8}$ 13	$\boxed{30}$ 31	$\boxed{6}$ 9	$\boxed{0}$ 10	-10
3	$\boxed{1}$ 0	$\boxed{20}$ 11	$\boxed{7}$ 13	$\boxed{10}$ 12	$\boxed{4}$ 8	$\boxed{0}$ 11	-11
4	$\boxed{8}$ -2	$\boxed{6}$ -12	$\boxed{3}$ 0	$\boxed{7}$ 0	$\boxed{5}$ 0	$\boxed{0}$ 2	-2
v_j	12	20	5	9	7	0	

调整运费

销地 产地	甲	乙	丙	丁	戊	己	产量
1			1	2		2	5
2	2	4					6
3	2						2
4		0	5		4		9
销售	4	4	6	2	4	2	

计算检验数 第三次迭代

销地 产地	甲	乙	丙	丁	戊	己	u_i

1	$\boxed{10}$ 10	$\boxed{20}$ 12	$\boxed{5}$ 0	$\boxed{9}$ 0	$\boxed{10}$ 3	$\boxed{0}$ 0	0
2	$\boxed{2}$ 0	$\boxed{10}$ 0	$\boxed{8}$ 1	$\boxed{30}$ 19	$\boxed{6}$ -3	$\boxed{0}$ -2	2
3	$\boxed{1}$ 0	$\boxed{20}$ 11	$\boxed{7}$ 1	$\boxed{10}$ 0	$\boxed{4}$ -4	$\boxed{0}$ -1	1
4	$\boxed{8}$ 10	$\boxed{6}$ 0	$\boxed{3}$ 0	$\boxed{7}$ 0	$\boxed{5}$ 0	$\boxed{0}$ 2	-2
v_j	0	8	5	9	7	0	

调整运费

销地 / 产地	甲	乙	丙	丁	戊	己	产量
1			1	2		2	5
2	4	2					6
3					2		2
4		2	5		2		9
销售	4	4	6	2	4	2	

计算检验数 第四次迭代

销地 / 产地	甲	乙	丙	丁	戊	己	u_i
1	$\boxed{10}$ 10	$\boxed{20}$ 12	$\boxed{5}$ 0	$\boxed{9}$ 0	$\boxed{10}$ 3	$\boxed{0}$ 0	0
2	$\boxed{2}$ 0	$\boxed{10}$ 0	$\boxed{8}$ 1	$\boxed{30}$ 19	$\boxed{6}$ -3	$\boxed{0}$ -2	2
3	$\boxed{1}$ 4	$\boxed{20}$ 15	$\boxed{7}$ 5	$\boxed{10}$ 4	$\boxed{4}$ 0	$\boxed{0}$ 3	-3

4	$\boxed{8}$ 10	$\boxed{6}$ 0	$\boxed{3}$ 0	$\boxed{7}$ 0	$\boxed{5}$ 0	$\boxed{0}$ 2	-2
v_j	0	8	5	9	7	0	

调整运费

销地 产地	甲	乙	丙	丁	戊	己	产量
1			1	2		2	5
2	4	0			2		6
3					2		2
4		4	5				9
销售	4	4	6	2	4	2	

第五次迭代

销地 产地	甲	乙	丙	丁	戊	己	u_i
1	$\boxed{10}$ 10	$\boxed{20}$ 12	$\boxed{5}$ 0	$\boxed{9}$ 0	$\boxed{10}$ 6	$\boxed{0}$ 0	0
2	$\boxed{2}$ 0	$\boxed{10}$ 0	$\boxed{8}$ 1	$\boxed{30}$ 19	$\boxed{6}$ 0	$\boxed{0}$ -2	2
3	$\boxed{1}$ 1	$\boxed{20}$ 12	$\boxed{7}$ 2	$\boxed{10}$ 1	$\boxed{4}$ 0	$\boxed{0}$ 0	0
4	$\boxed{8}$ 10	$\boxed{6}$ 0	$\boxed{3}$ 0	$\boxed{7}$ 0	$\boxed{5}$ 3	$\boxed{0}$ 2	-2
v_j	0	8	5	9	4	0	

调整运费

销地 产地	甲	乙	丙	丁	戊	己	产量

1			1	2		2	5
2	4				2	0	6
3					2		2
4		4	5				9
销售	4	4	6	2	4	2	

第 6 次迭代

产地 \ 销地	甲	乙	丙	丁	戊	己	u_i
1	$\boxed{10}$ 8	$\boxed{20}$ 12	$\boxed{5}$ 0	$\boxed{9}$ 0	$\boxed{10}$ 4	$\boxed{0}$ 0	0
2	$\boxed{2}$ 0	$\boxed{10}$ 2	$\boxed{8}$ 3	$\boxed{30}$ 21	$\boxed{6}$ 0	$\boxed{0}$ 0	0
3	$\boxed{1}$ 1	$\boxed{20}$ 14	$\boxed{7}$ 4	$\boxed{10}$ 3	$\boxed{4}$ 0	$\boxed{0}$ 2	-2
4	$\boxed{8}$ 5	$\boxed{6}$ 0	$\boxed{3}$ 0	$\boxed{7}$ 0	$\boxed{5}$ 1	$\boxed{0}$ 2	-2
v_j	2	8	5	9	6	0	

由上表可知，调运方案为最优方案 运费为

Min z=90. (6 分　结果正确)

得分	评卷人

五（15 分）试建立如下问题的目标规划模型（只建模不求解）。某工厂生产 I,II 两种产品，已知相关数据见表 5，在工厂决策时，依次考虑如下的条件：

1) 根据市场信息，产品 I 的销售量有下降的趋势，故考虑产品 I 的产量不大于产品 II;
2) 应尽可能充分利用设备台时，但不希望加班;
3) 应尽可能达到并超过计划利润指标 56 元。

表 5

	I	II	拥有量
原材料（kg）	**3**	**2**	**10**
设备（hr）	**1**	**2**	**12**
利润（元/件）	**8**	**10**	

解：设 x_1, x_2 分别表示产品 I, II 的产量，其目标规划模型如下：

$$\min z = P_1 d_1^+ + P_2\left(d_2^- + d_2^+\right) + P_3 d_3^-$$

$$s.t.\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 10 \\ x_1 - x_2 + d_1^- - d_1^+ = 0 \\ x_1 + 2x_2 + d_2^- - d_2^+ = 12 \\ 8x_1 + 10x_2 + d_3^- - d_3^+ = 56 \\ x_1, x_2, d_i^-, d_i^+ \ge 0, i = 1,2,3 \end{cases}$$

得分	评卷人

六、（**15** 分）有甲乙丙丁 4 个工人，要分别指派他们完成 ABCD 不同的 4 项工作，每人做各项工作所消耗的时间如表 6 所示。应如何指派工作，才能使总的消耗时间最少？

表 6

工作 / 工人	A	B	C	D
甲	**5**	**10**	**7**	**4**
乙	**2**	**5**	**6**	**7**
丙	**3**	**13**	**11**	**7**
丁	**11**	**8**	**10**	**9**

解：

设 0-1 型决策变量为x_{ij}，其中，x_{ij}=1 表示指派第 i 个工人完成第 j 项工作，x_{ij}=0 表示不指派第 i 个工人完成第 j 项工作，i,j=1,2,3,4。第 1，2，3，4 个工人分别代表甲乙丙丁。第 1,2,3,4 项工作分别代表 ABCD 四项工作。记C_{ij}表示第 i 个工人完成第 j 项工作所消耗的时间,i,j=1,2,3,4。则指派问题的数学模型为：

$$\min_x Z = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} C_{ij}x_{ij}$$

$$s.t.\ \sum_{j=1}^{4} x_{ij} = 1, i = 1,2,3,4$$

$\sum_{i=1}^{4} x_{ij} = 1, j = 1,2,3,4$，$x_{ij} = 0$ 或 $1, i, j, = 1,2,3,4$

采用匈牙利法求解，步骤入下所示。

（1） 将矩阵

$$\begin{vmatrix} 5 & 10 & 7 & 4 \\ 2 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 13 & 11 & 7 \\ 11 & 8 & 10 & 9 \end{vmatrix}$$

的每行元素都减去该行的最小值，得到

$$\begin{vmatrix} 1 & 6 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 10 & 8 & 4 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

（2） 将（1）中的结果矩阵的每列都减去该列的最小值，得到

$$\begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 10 & 6 & 4 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

（3） 在（2）中的结果矩阵的各行各列中寻找独立 0 元，并记以⓪。⓪所在行和列的其他 0 元素记为Ø。得到

$$\begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 & ⓪ \\ ⓪ & 3 & 2 & 5 \\ Ø & 10 & 6 & 4 \\ 3 & Ø & ⓪ & 1 \end{vmatrix}$$

（4） 独立 0 元的个数为 3<4，还未找到最优解，需要增加 0 元。将（3）中的结果矩阵中无⓪的行，标记√。得到

$$\begin{array}{c} \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 & ⓪ \\ ⓪ & 3 & 2 & 5 \\ Ø & 10 & 6 & 4 \\ 3 & Ø & ⓪ & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \surd \\ \\ \end{matrix} \end{array}$$

（5） 在（4）中的结果矩阵中标记√的行中 0 元所在的列，标记为√。得到

$$\begin{array}{cc} \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 & \textcircled{0} \\ \textcircled{0} & 3 & 2 & 5 \\ \emptyset & 10 & 6 & 4 \\ 3 & \emptyset & \textcircled{0} & 1 \end{vmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \surd \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{cccc} \surd & & & \end{array} & \end{array}$$

（6） 在（5）的结果矩阵中，标记√的列中◎元所在的行，标记为√。得到

$$\begin{array}{cc} \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 & \textcircled{0} \\ \textcircled{0} & 3 & 2 & 5 \\ \emptyset & 10 & 6 & 4 \\ 3 & \emptyset & \textcircled{0} & 1 \end{vmatrix} & \begin{array}{c} \\ \surd \\ \surd \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{cccc} \surd & & & \end{array} & \end{array}$$

（7） 标记为√的行中所有 0 元所在列都已被标记为√。在（6）中的结果矩阵中，将无√的行，以及标记为√的列划线，得到

$$\begin{array}{cc} \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 & \textcircled{0} \\ \textcircled{0} & 3 & 2 & 5 \\ \emptyset & 10 & 6 & 4 \\ 3 & \emptyset & \textcircled{0} & 1 \end{vmatrix} & \begin{array}{c} \\ \surd \\ \surd \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{cccc} \surd & & & \end{array} & \end{array}$$

（8） 选取（7）中的结果矩阵中未被划线覆盖的元素中的最小元素，也就是 2。将标记√的行的所有元素都减去最小元素，再将标记为√的列的所有元素都加上最小元素。得到

$$\begin{array}{cc} \begin{vmatrix} 3 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 8 & 4 & 2 \\ 5 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{array}{c} \\ \surd \\ \surd \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{cccc} \surd & & & \end{array} & \end{array}$$

（9） 重复（3）的处理。在（8）的结果矩阵中重新寻找独立 0 元。得到

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 & 1 & \textcircled{0} \\ \emptyset & 1 & \textcircled{0} & 3 \\ \textcircled{0} & 8 & 4 & 2 \\ 5 & \textcircled{0} & \emptyset & 1 \end{vmatrix}$$

（10）独立 0 元的个数为 4 个，因此，找到最优解。

最优解为：$x_{14} = x_{23} = x_{31} = x_{42} = 1$,其余$x_{ij}$都为 0。最优值 Z=$C_{14} + C_{23} + C_{31} + C_{42}$=21.

因此，应指派甲完成工作 D，乙完成工作 C，丙完成工作 A，丁完成工作 B。此时总耗时最少，为 Z=21。