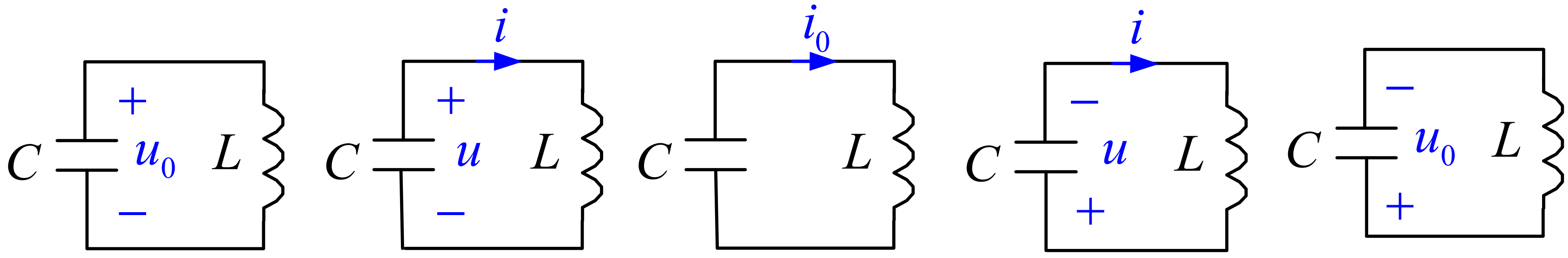
第9章
二阶电路的暂态分析

9.1 概述

二阶电路及能量流动

能用二阶微分方程描述的电路称为二阶电路，有两个独立的储能元件。



初始时刻，

$u_c(0_-)=u_0$

$i_L(0_-)=0$

电容放电 $\longrightarrow$ 电流增长

$\frac{di}{dt}=0$

电容电压为0，

电流为最大值，

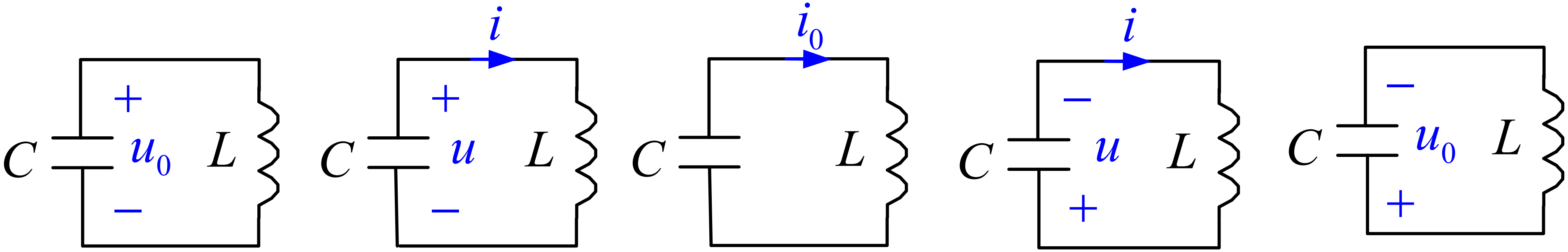
能量存入电感

电容充电 $\longrightarrow$ 电流减小

与初始时刻相同。

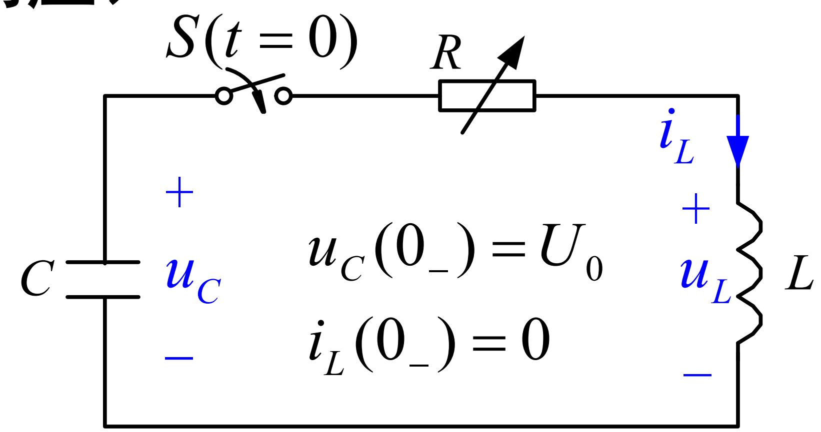
9.1 概述

二阶电路及能量流动



- 由电容和电感两种不同储能元件构成的电路中，储能在电场和磁场之间往返转移。
- 电流和电压不断改变大小和极性，形成周而复始的震荡。这种由初始储能引起的震荡是等幅的。
- 如果电路中存在电阻，则振幅不可能相等，幅度将逐渐衰减而趋于0.
- 如果电阻过大,储能在初次转移时被电阻吸收，则不会产生震荡。

9.2 零输入响应（自然响应）



$$
\begin{cases}
LC\dfrac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2}+RC\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C=0 \\
u_C(0_+)=u_C(0_-)=U_0 \\
\left.\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right|_{0_+}=\dfrac{i_C(0_+)}{C}=\dfrac{i_L(0_+)}{C}=0
\end{cases}
$$

特征根

$$s_{1,2}=\frac{-RC\pm\sqrt{(RC)^2-4LC}}{2LC}$$

$$=-\frac{R}{2L}\pm\sqrt{(\frac{R}{2L})^2-\frac{1}{LC}}$$

$$=-\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-\omega_0^2}$$

讨论

（1）$\alpha>\omega_0 \quad \rightarrow R>2\sqrt{\dfrac{L}{C}}$

过阻尼情况

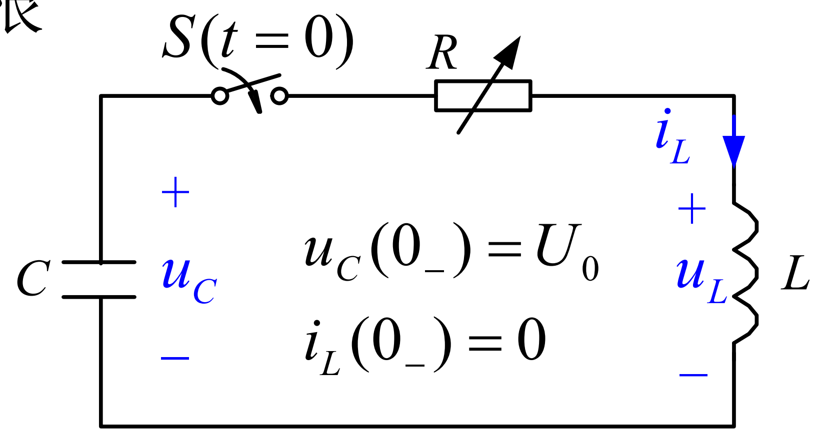
（2）$\alpha<\omega_0 \quad \rightarrow R<2\sqrt{\dfrac{L}{C}}$

欠阻尼情况

（3）$\alpha=\omega_0 \quad \rightarrow R=2\sqrt{\dfrac{L}{C}}$

临界阻尼情况

1． $R > 2\sqrt{\dfrac{L}{C}}$ s_1 ，s_2 不等的负实根



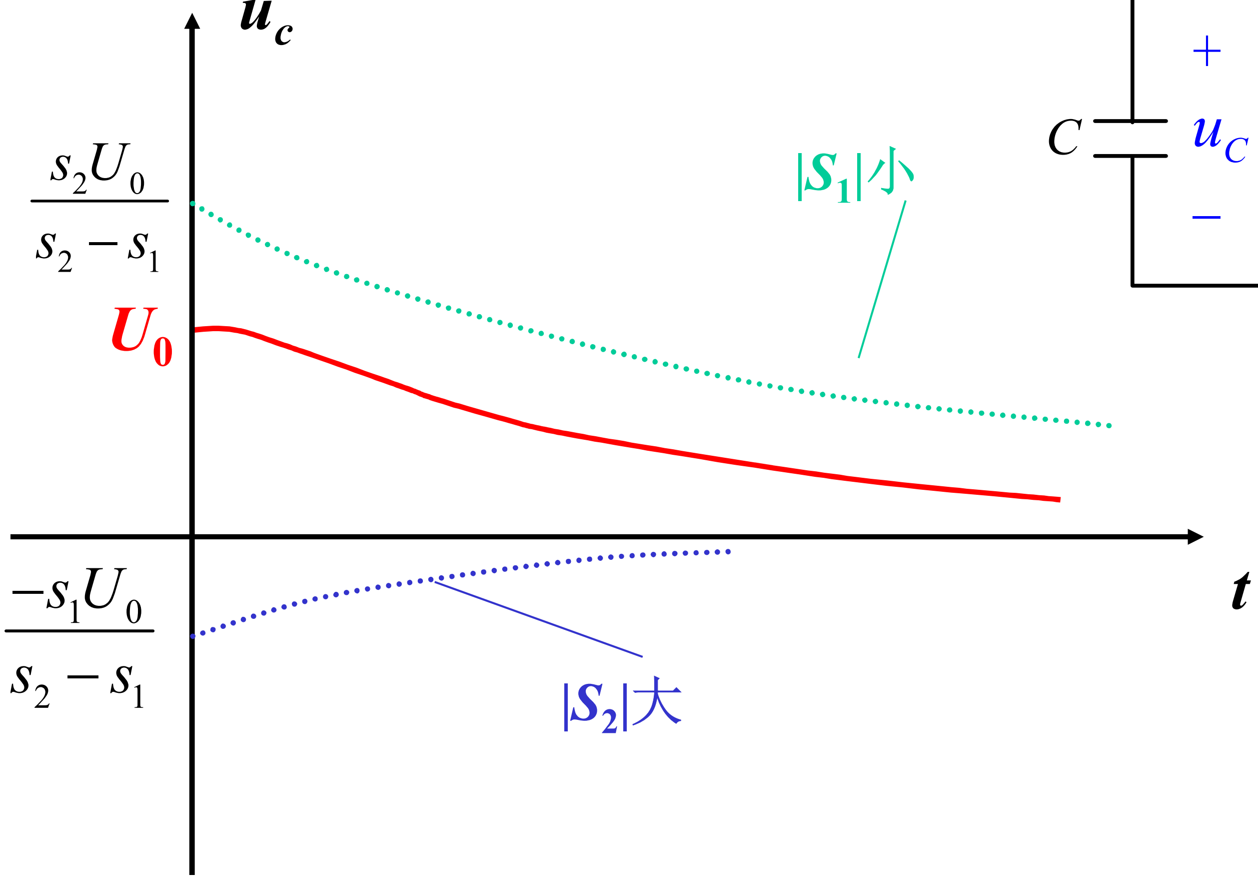
$$u_C = k_1 e^{s_1 t} + k_2 e^{s_2 t}$$

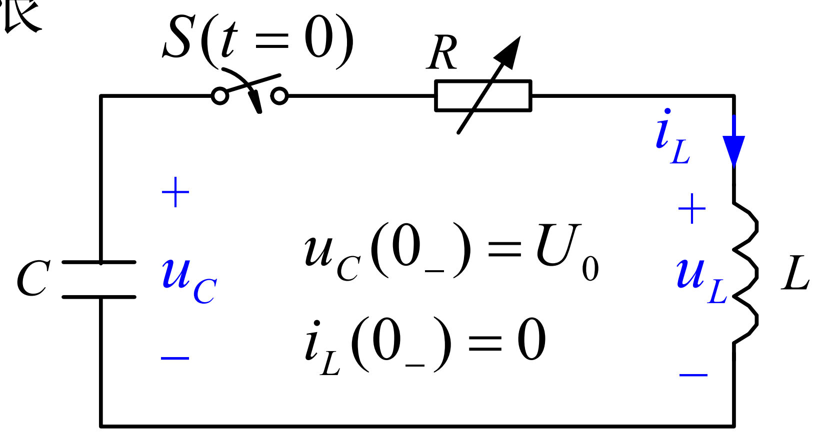
$$\begin{cases} u_C(0^+) = U_0 \rightarrow k_1 + k_2 = U_0 \\ \dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(0^+) = 0 \rightarrow s_1 k_1 + s_2 k_2 = 0 \end{cases}$$

$$\therefore k_1 = \frac{s_2}{s_2 - s_1} U_0 \qquad k_2 = \frac{-s_1}{s_2 - s_1} U_0$$

$$\boxed{u_C = \frac{U_0}{s_2 - s_1}(s_2 e^{s_1 t} - s_1 e^{s_2 t})}$$

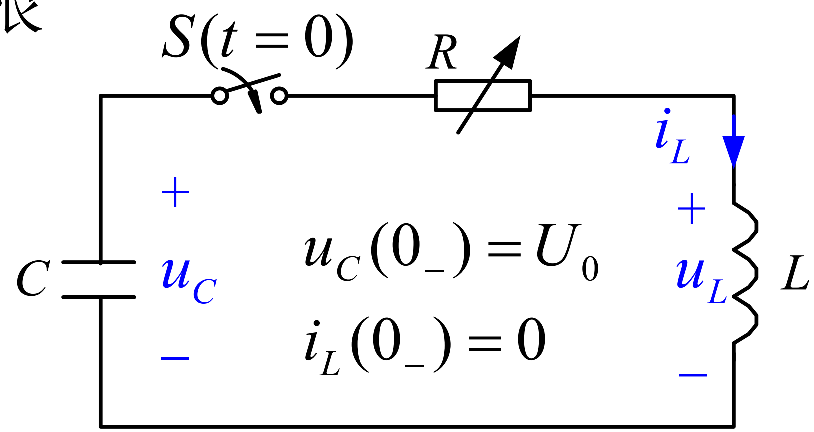
1． $R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ s_1 ，s_2 不等的负实根

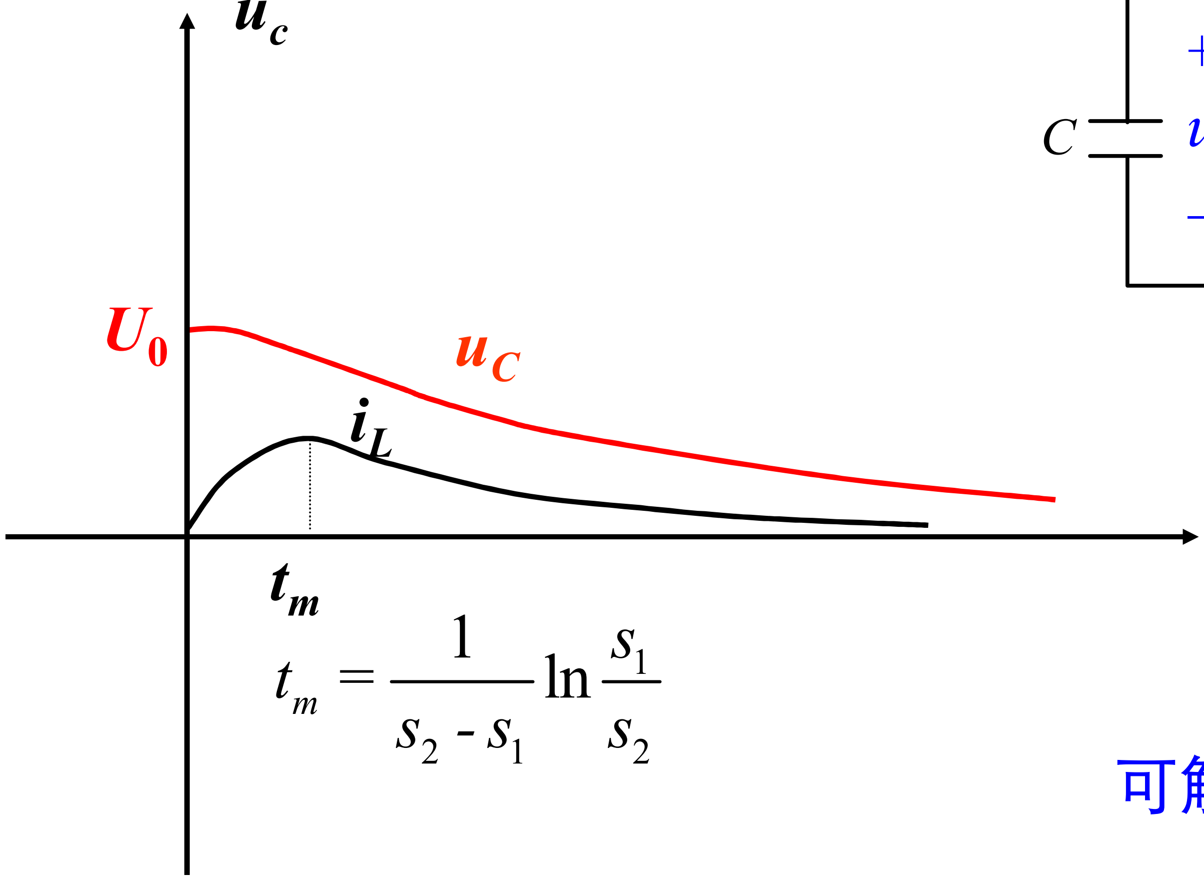




$$\boxed{u_C = \frac{U_0}{s_2 - s_1}(s_2 e^{s_1 t} - s_1 e^{s_2 t})}$$ 设$|s_1| < |s_2|$

1． $R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$　s_1 ，s_2 不等的负实根





$$t_m = \frac{1}{s_2 - s_1} \ln \frac{s_1}{s_2}$$

$t=0_+$　$i_L=0$　,$t=\infty$　$i_L=0$

$t = t_m$ 时i 最大

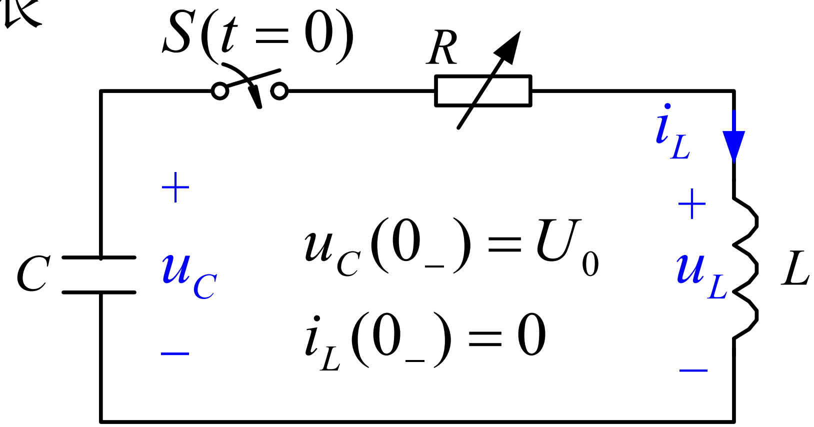
令 $\frac{di_L}{dt}=0$

可解得i_L达到极值的时间t_m

$$u_C = \frac{U_0}{s_2 - s_1}(s_2 e^{s_1 t} - s_1 e^{s_2 t})$$

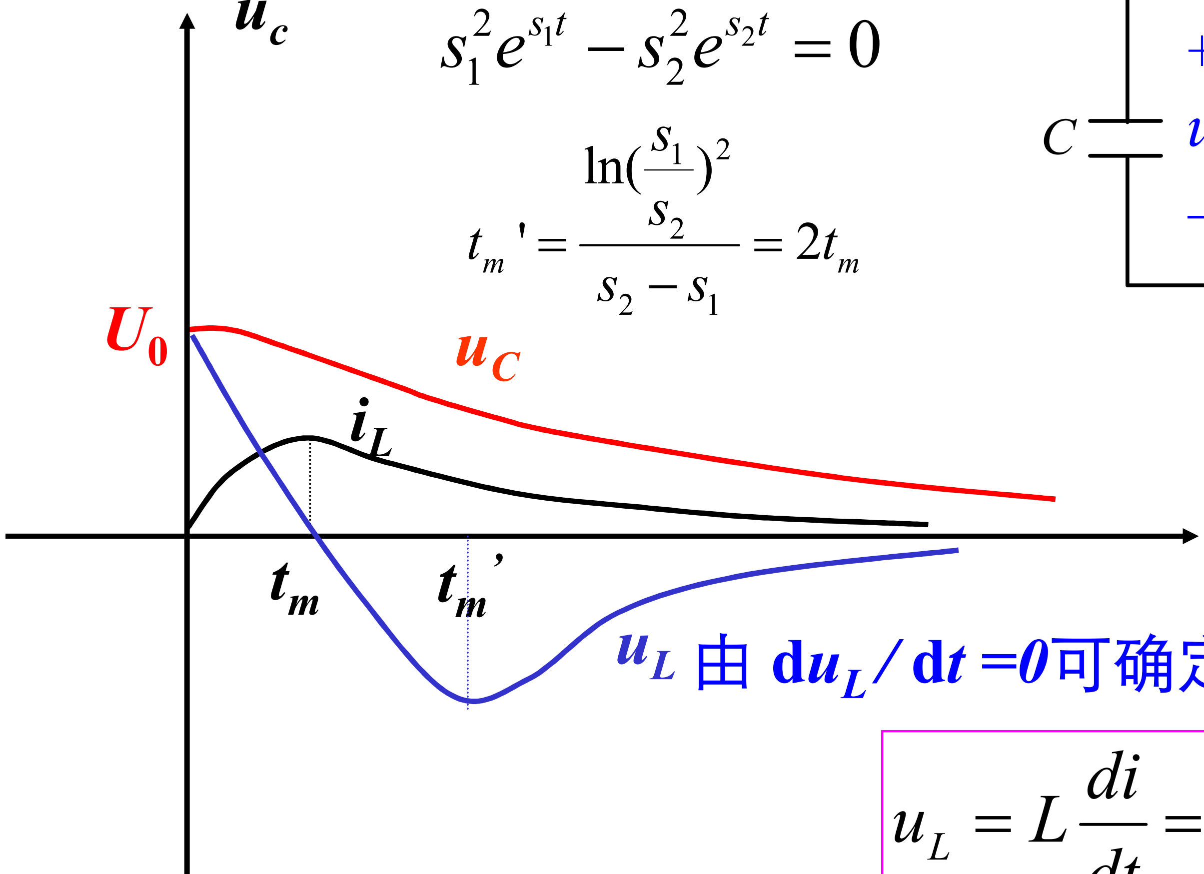
$$i_L = -C\frac{du_C}{dt} = \frac{CU_0 s_1 s_2}{(s_1 - s_2)}(e^{s_1 t} - e^{s_2 t})$$

1． $R > 2\sqrt{\dfrac{L}{C}}$　s_1 ，s_2 不等的负实根



$$s_1^2 e^{s_1 t} - s_2^2 e^{s_2 t} = 0$$

$$t_m' = \frac{\ln\left(\dfrac{s_1}{s_2}\right)^2}{s_2 - s_1} = 2t_m$$



$u_L(0+)=U_0$　$u_L(\infty)=0$

$0 < t < t_m$　i 增加，$u_L > 0$

$t > t_m$，i 减小，$u_L < 0$

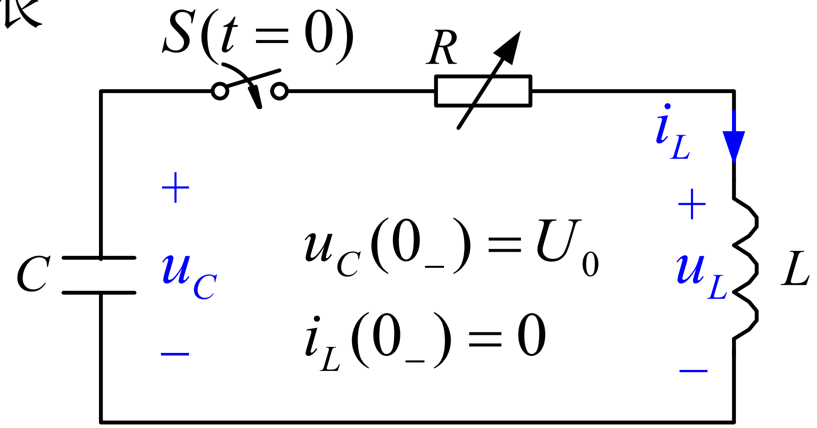
u_L 由 $du_L/dt = 0$ 可确定 u_L 为极小值的时间 t_m'

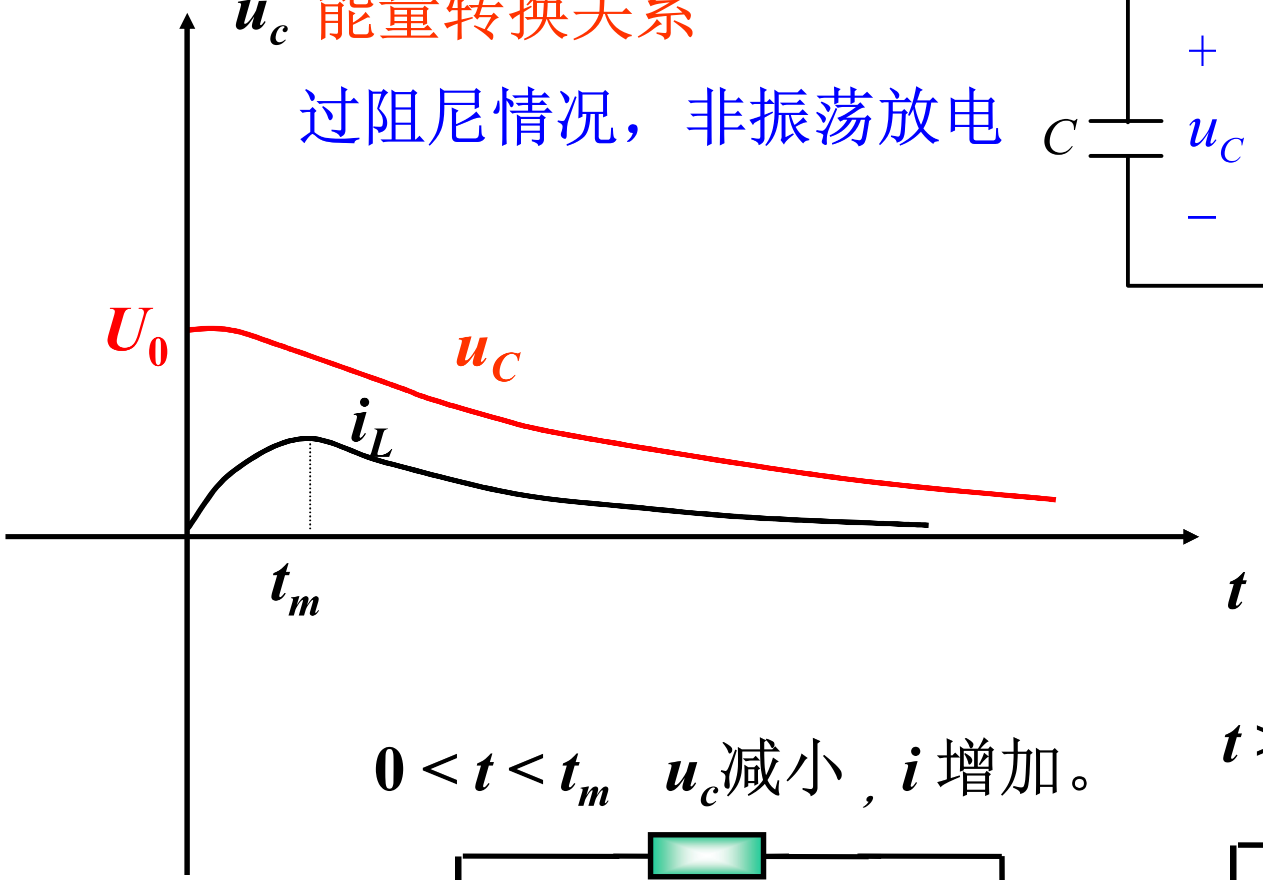
$$\boxed{u_L = L\frac{di}{dt} = \frac{-U_0}{(s_2 - s_1)}(s_1 e^{s_1 t} - s_2 e^{s_2 t})}$$

$$\boxed{u_C = \frac{U_0}{s_2 - s_1}(s_2 e^{s_1 t} - s_1 e^{s_2 t})}$$

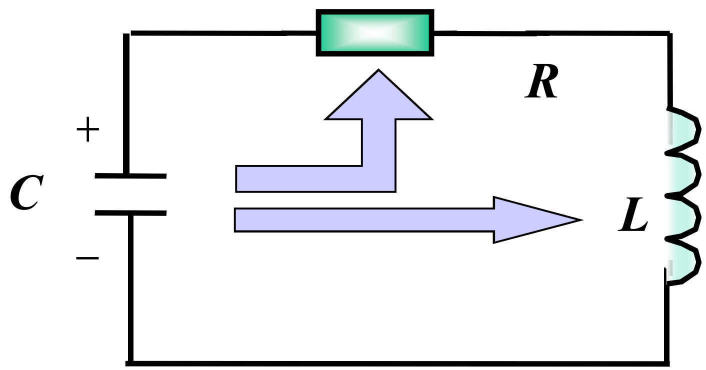
$$\boxed{i_L = -C\frac{du_C}{dt} = \frac{CU_0 s_1 s_2}{(s_2 - s_1)}(e^{s_1 t} - e^{s_2 t})}$$

1． $R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$　s_1 ，s_2 不等的负实根

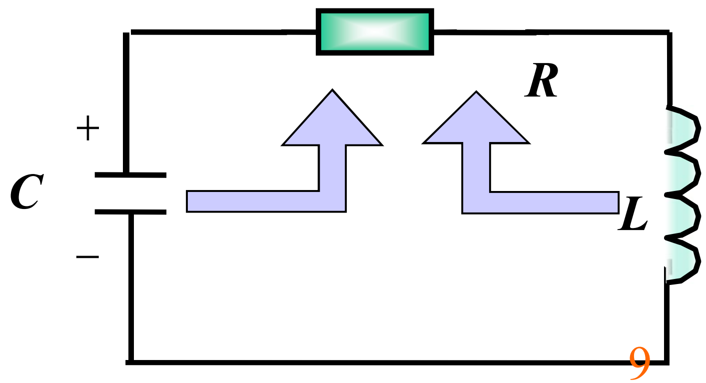




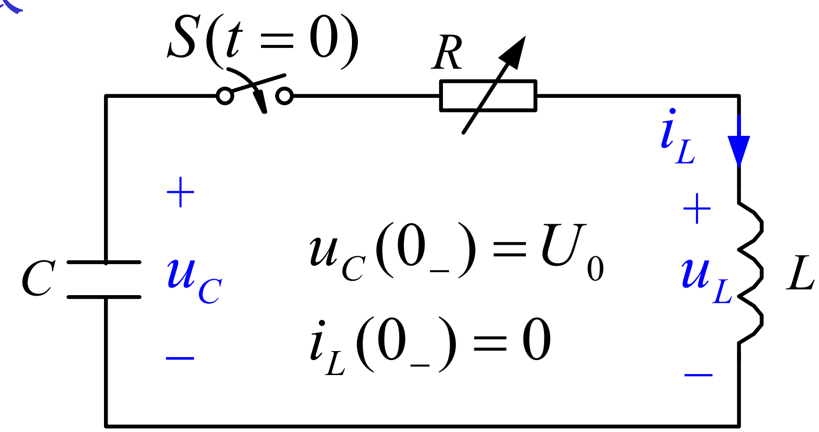
$0 < t < t_m$　u_c减小，i 增加。



$t > t_m$　u_c减小，i 减小.



2. $R < 2\sqrt{\dfrac{L}{C}}$ 特征根为一对共轭复根



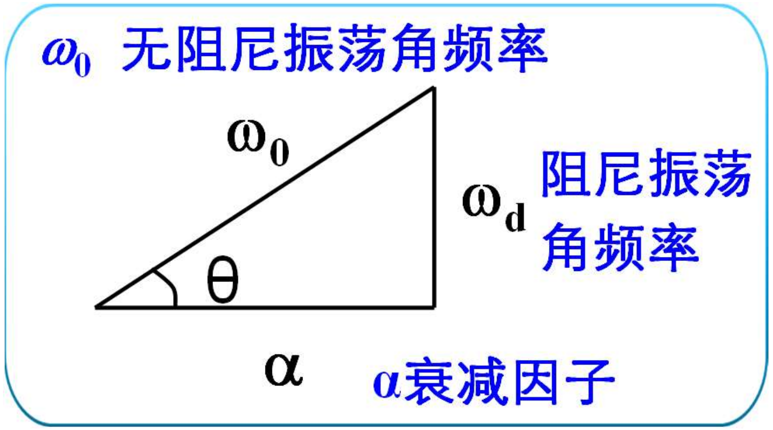
$$s_{1,2} = -\alpha \pm \mathrm{j}\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = -\alpha \pm \mathrm{j}\omega_\mathrm{d}$$

$$\boxed{u_C = k\mathrm{e}^{-\alpha t}\sin(\omega_\mathrm{d} t + \theta)}$$

由初始条件

$$\begin{cases} u_C(0_+) = U_0 \rightarrow k\sin\theta = U_0 \\ \dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(0^+) = 0 \rightarrow -\alpha\sin\theta + \omega_d\cos\theta = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad k = \frac{\omega_0 U_0}{\omega_d}, \quad \theta = \tan^{-1}\frac{\omega_d}{\alpha}$$

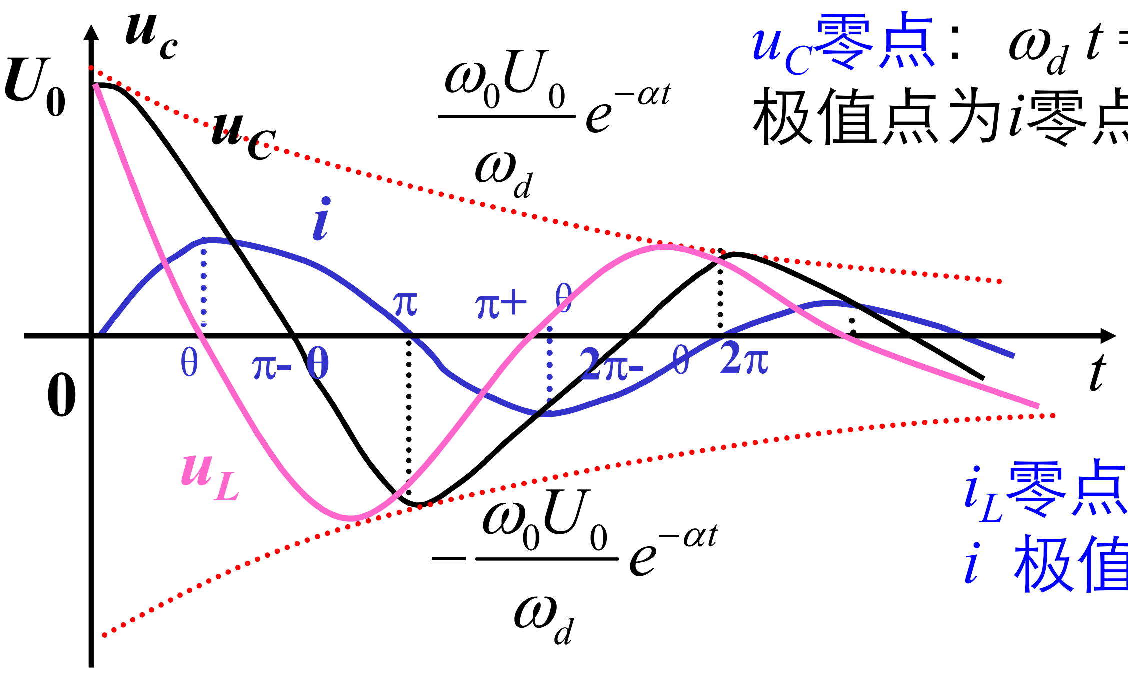


$$\boxed{u_C = \frac{U_0\omega_0}{\omega_d} e^{-\alpha t}\sin(\omega_d t + \theta)}$$

$$\boxed{i_L = -C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = \frac{U_0}{\omega_d L} e^{-\alpha t}\sin\omega_d t}$$

$$\boxed{u_L = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = -\frac{U_0\omega_0}{\omega_d} e^{-\alpha t}\sin(\omega_d t - \theta)}$$

2. $R < 2\sqrt{\dfrac{L}{C}}$ 特征根为一对共轭复根



u_C零点：$\omega_d t = \pi - \theta$，$2\pi - \theta$ ... $n\pi - \theta$，u_C 极值点为i零点。

i_L零点：$\omega_d t = 0, \pi, 2\pi$ ... $n\pi$，
i 极值点为u_L零点。

u_L零点：$\omega_d t = \theta,\ \pi + \theta$，... $n\pi + \theta$

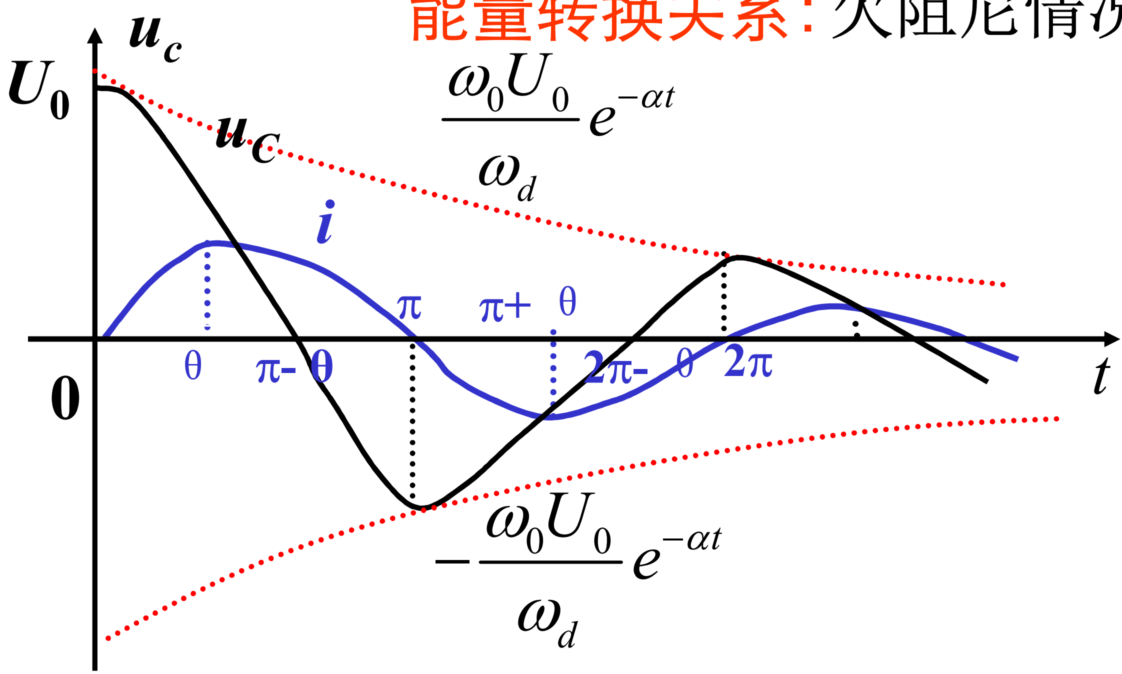
$$u_C = \frac{U_0 \omega_0}{\omega_d} e^{-\alpha t} \sin(\omega_d t + \theta)$$

$$i_L = -C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = \frac{U_0}{\omega_d L} e^{-\alpha t} \sin \omega_d t$$

$$u_L = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = -\frac{U_0 \omega_0}{\omega_d} e^{-\alpha t} \sin(\omega_d t - \theta)$$

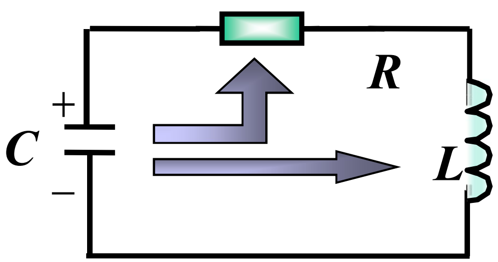
2. $R < 2\sqrt{\dfrac{L}{C}}$　特征根为一对共轭复根

能量转换关系: 欠阻尼情况，衰减振荡



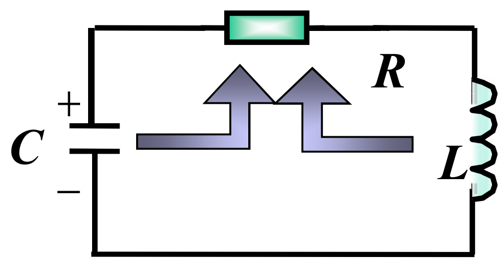
$0 < \omega_d t < \theta$

u_C减小，i 增大



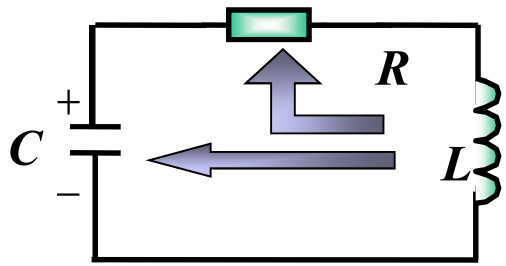
$\theta < \omega_d t < \pi - \theta$

u_C减小，i 减小



$\pi - \theta < \omega_d t < \pi$

$|u_C|$增大，i 减小



2. $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$　特征根为一对共轭复根

$$u_C = \frac{U_0\omega_0}{\omega_d} e^{-\alpha t}\sin(\omega_d t + \theta)$$

$$i_L = -C\frac{du_C}{dt} = \frac{U_0}{\omega_d L} e^{-\alpha t}\sin\omega_d t$$

$$u_L = -\frac{U_0\omega_0}{\omega_d} e^{-\alpha t}\sin(\omega_d t - \theta)$$

特例　**$R = 0$**　$\Rightarrow \alpha = 0$

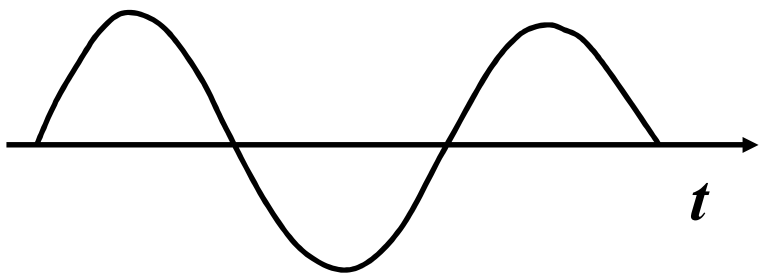
$$s_{1,2} = \pm j\omega_0$$

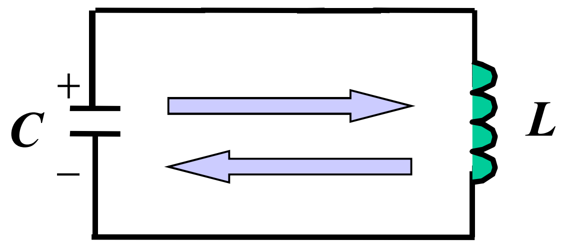
$$\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}\ ,\ \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$u_C = U_0\sin(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}) = U_0\cos\omega_0 t = u_L$$

$$i = -U_0\omega_0 C\sin\omega_0 t$$

等幅振荡：无阻尼





3． $R=2\sqrt{\frac{L}{C}}$ s_1 ，s_2 相等的实根

$$s_{1,2}=-\alpha \qquad u_C=(k_1+k_2 t)\mathrm{e}^{-\alpha t}$$

由初始条件 $\begin{cases} u_C(0_+)=U_0 \rightarrow k_1=U_0 \\ \dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(0_+)=0 \rightarrow k_1(-\alpha)+k_2=0 \end{cases}$ $\begin{cases} k_1=U_0 \\ k_2=U_0\alpha \end{cases}$

$$\boxed{\begin{aligned} u_C &= U_0(1+\alpha\, t)e^{-\alpha\, t} \\ i &= -C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}=\frac{U_0}{L}te^{-\alpha\, t} \\ u_L &= L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=U_0(1-\alpha\, t)e^{-\alpha\, t} \end{aligned}}$$

- 非振荡放电，临界阻尼情况
- 能量转换过程与阻尼类似

二阶电路响应变化规律：

$R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ 过阻尼，非振荡放电 $u_c = k_1 e^{s_1 t} + k_2 e^{s_2 t}$

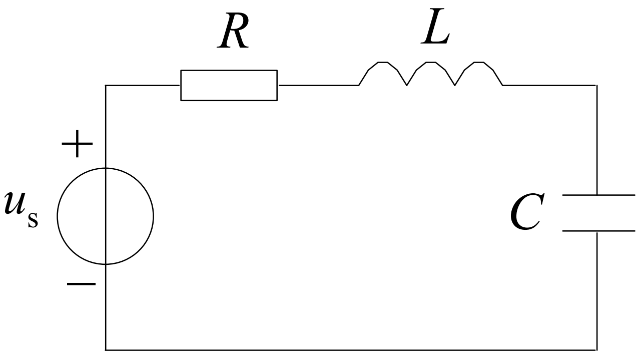
$R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ 临界阻尼，非振荡放电 $u_c = e^{-\alpha t}(k_1 + k_2 t)$

$R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ 欠阻尼，振荡放电 $u_c = k e^{-\alpha t}\sin(\omega t + \theta)$

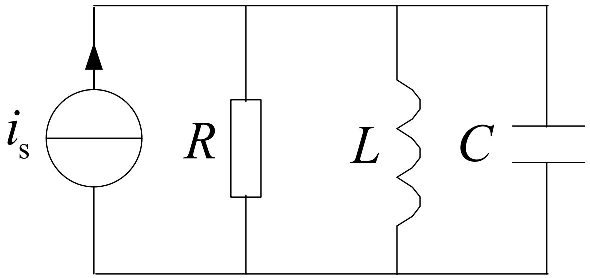
由 $\begin{cases} u_C(0^+) \\ \frac{du_C}{dt}(0^+) \end{cases}$ 定积分常数

可推广应用于一般二阶电路

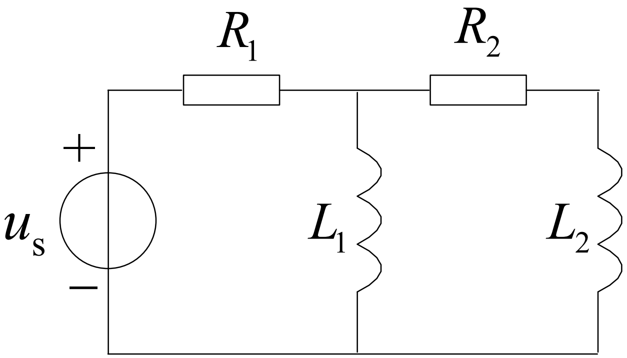
二阶电路



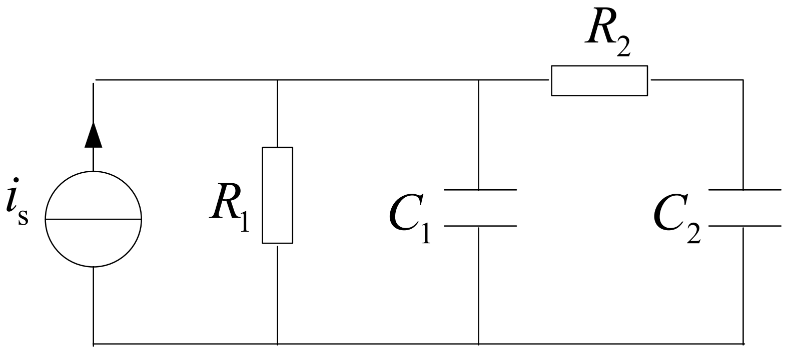
RLC串联电路



RLC并联电路



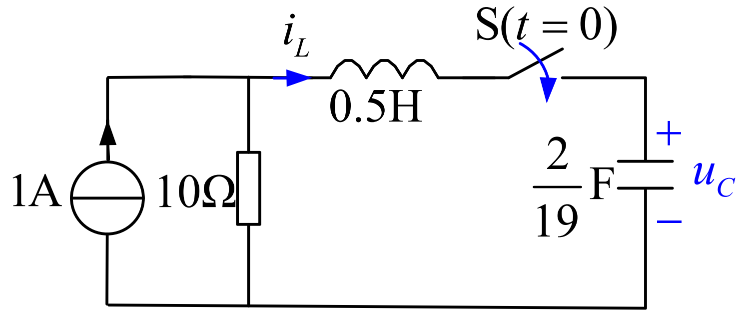
一般二阶电路



一般二阶电路

9.3 直流电源激励下的响应

全响应——二阶电路响应计算



$u_C(0_-)$=15V,$i_L(0_-)$=0A

$$u_C(0_+)=u_C(0_-)=15\text{V} \qquad i_L(0_+)=i_L(0_-)=0$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right|_{0_+}=\frac{i_C(0_+)}{C}=\frac{i_L(0_+)}{C}=0$$

$$\text{KVL:}\quad 0.5\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{2}{19}\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right)+10\left(\frac{2}{19}\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}-1\right)+u_C=0$$

$$\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2}+20\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+19u_C=190 \qquad s_{1,2}=-10\pm\sqrt{100-19}=\begin{cases}-1\\-19\end{cases}$$

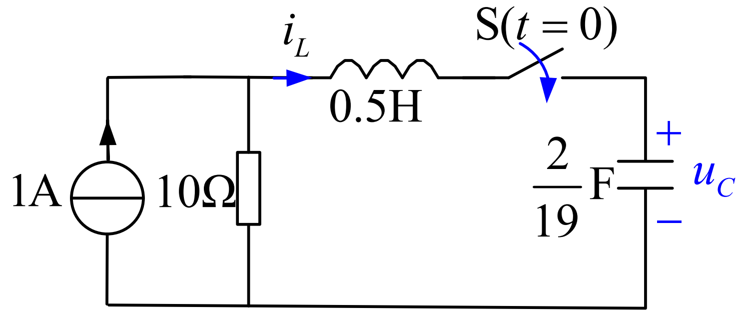
$$u_C=k_1\mathrm{e}^{-t}+k_1\mathrm{e}^{-19t}+10 \qquad \boxed{u_C=\frac{95}{18}\mathrm{e}^{-t}-\frac{5}{18}\mathrm{e}^{-19t}+10}$$

$$k_1=\frac{95}{18} \qquad k_2=-\frac{5}{18} \qquad \boxed{i_L=C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}=-\frac{95}{18}\mathrm{e}^{-t}+\frac{95}{18}\mathrm{e}^{-19t}}$$

两种分析思路——列写方程

9.3 直流电源激励下的响应

全响应——二阶电路响应计算



$u_C(0_-)$=15V,$i_L(0_-)$=0A

$$u_C(0_+)=u_C(0_-)=15\text{V} \qquad i_L(0_+)=i_L(0_-)=0$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right|_{0_+}=\frac{i_C(0_+)}{C}=\frac{i_L(0_+)}{C}=0$$

$$\alpha=\frac{R}{2L}=10 \qquad \omega_0{}^2=\frac{1}{LC}=19$$

$$s_{1,2}=-\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-\omega_0{}^2}=-10\pm\sqrt{100-19}=\begin{cases}-1\\-19\end{cases}$$

$$u_{Ch}=k_1\mathrm{e}^{-t}+k_1\mathrm{e}^{-19t}$$

$$u_C=\frac{95}{18}\mathrm{e}^{-t}-\frac{5}{18}\mathrm{e}^{-19t}+10$$

$$u_{Cp}=u_C(\infty)=10$$

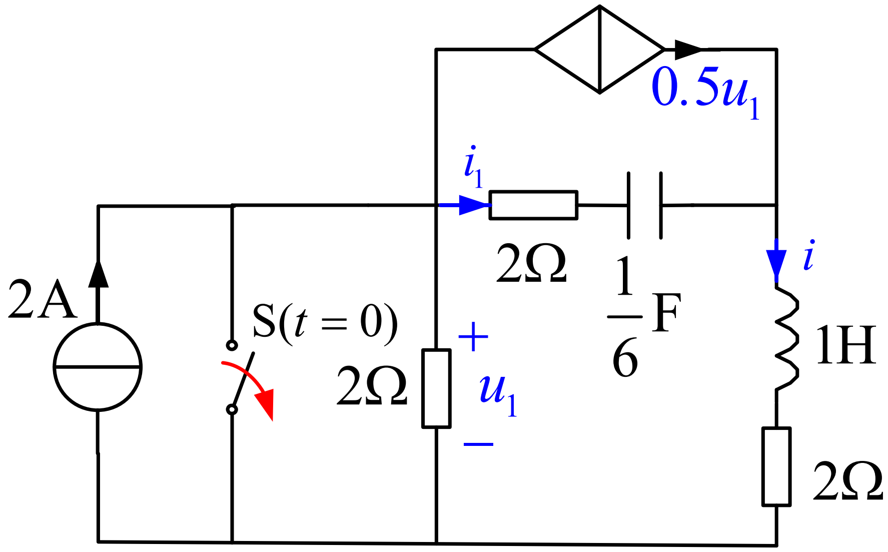
$$u_C=k_1\mathrm{e}^{-t}+k_1\mathrm{e}^{-19t}+10$$

两种分析思路——套用结论

9.3 直流电源激励下的响应

零状态响应

求所示电路中电流 ***i*** 的零状态响应。



解：**1** 列写微分方程 由**KVL**

$$-u_1+2i_1+6\int i_1 dt+\frac{di}{dt}+2i=0$$

$$u_1=2(2-i)$$

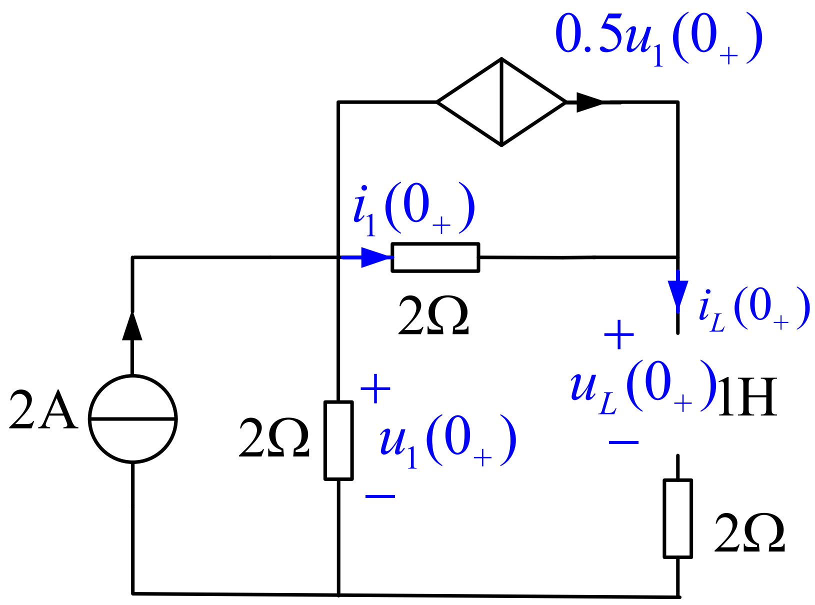
$$i_1=i-0.5u_1=2i-2$$

$$\boxed{\frac{d^2i}{dt^2}+8\frac{di}{dt}+12i=12}$$

2 求初值及稳态值

$$\begin{cases} i(0_+)=i(0_-)=0 \\ \left.\dfrac{di}{dt}\right|_{0_+}=\dfrac{1}{L}u_L(0_+)=8\text{V} \end{cases}$$

$$u_L(0_+)=0.5u_1\times 2+u_1=8\text{V}$$

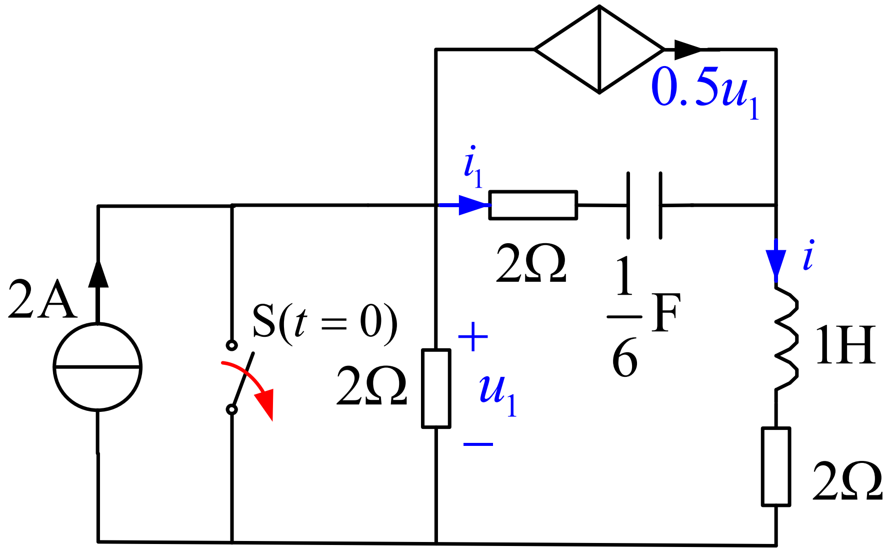


0_+等效电路

9.3 直流电源激励下的响应

零状态响应

求所示电路中电流 ***i*** 的零状态响应。



解：1 列写微分方程 **由KVL**

$$-u_1+2i_1+6\int i_1 dt+\frac{di}{dt}+2i=0$$

$$u_1=2(2-i)$$

$$i_1=i-0.5u_1=2i-2$$

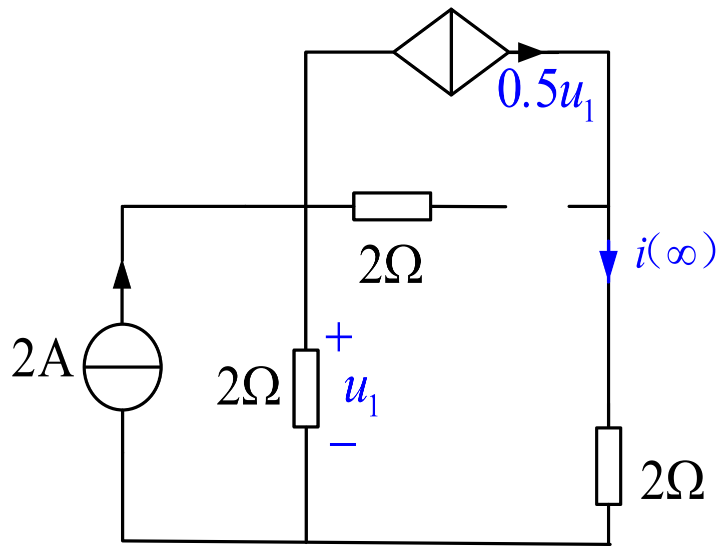
$$\boxed{\frac{d^2i}{dt^2}+8\frac{di}{dt}+12i=12}$$

2 求初值及稳态值

$$\begin{cases} i(0_+)=i(0_-)=0 \\ \left.\frac{di}{dt}\right|_{0_+}=\frac{1}{L}u_L(0_+)=8\text{V} \end{cases}$$

***i*(∞)=1A**

$$u_L(0_+)=0.5u_1\times 2+u_1=8\text{V}$$

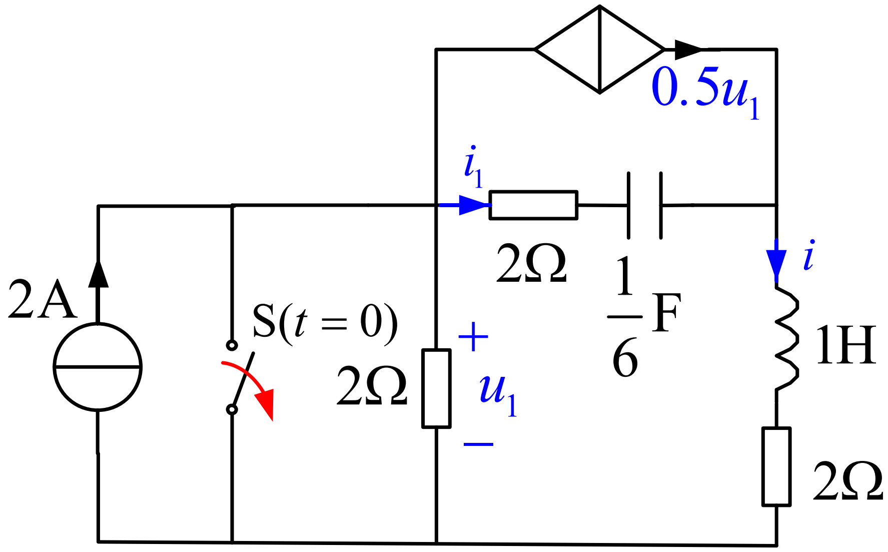


∞等效电路

9.3 直流电源激励下的响应

零状态响应

求所示电路中电流 i 的零状态响应。



解：1 列写微分方程 由KVL

$$\frac{d^2 i}{dt^2}+8\frac{di}{dt}+12i=12$$

2 求初值及稳态值

$$\begin{cases} i(0_+)=i(0_-)=0 \\ \left.\dfrac{di}{dt}\right|_{0_+}=8\mathrm{V} \end{cases}$$

3 求特征根

$$s^2+8s+12=0$$

$$s_1=-2,\quad s_2=-6$$

4 求解微分方程

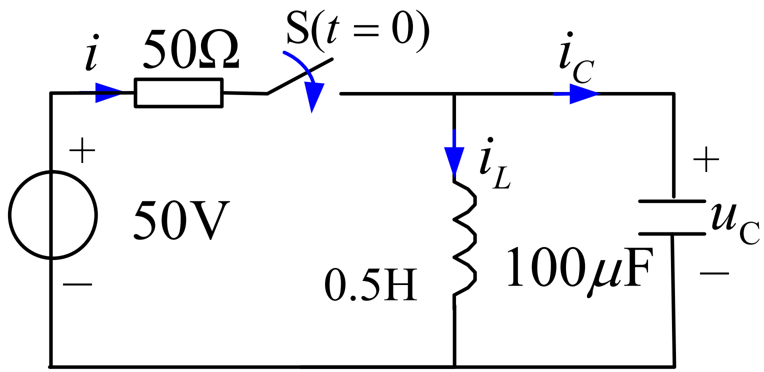
$$i=1+k_1e^{-2t}+k_2e^{-6t}$$

$$\begin{cases} 0=1+k_1+k_2 \\ 8=-2k_1-6k_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1=0.5 \\ k_2=-1.5 \end{cases}$$

$$i(t)=1+0.5e^{-2t}-1.5e^{-6t}\ \mathrm{A}\quad t\geq 0$$

9.4 一般二阶电路

已知：$i_L(0\text{-})=2\text{A}$， $u_C(0\text{-})=0$，求：$i_L(t)$



解 ： 1 列微分方程，由KCL得：

$$i_R = i_L + i_C$$

$$\frac{50 - L\dfrac{di_L}{dt}}{R} = i_L + C\frac{du_C}{dt} \qquad u_C = u_L = L\frac{di_L}{dt}$$

$$\frac{d^2 i_L}{dt^2} + 200\frac{di_L}{dt} + 2\times10^4 i_L = 2\times10^4$$

2 求初值及稳态值

$i_L(0_+)=2\text{A}$，$u_C(0_+)=0$ （已知）

$$\left.\frac{di_L}{dt}\right|_{0+} = \frac{1}{L}u_L(0_+) = \frac{1}{L}u_C(0_+) = 0$$

$i_L(\infty)=1\text{A}$

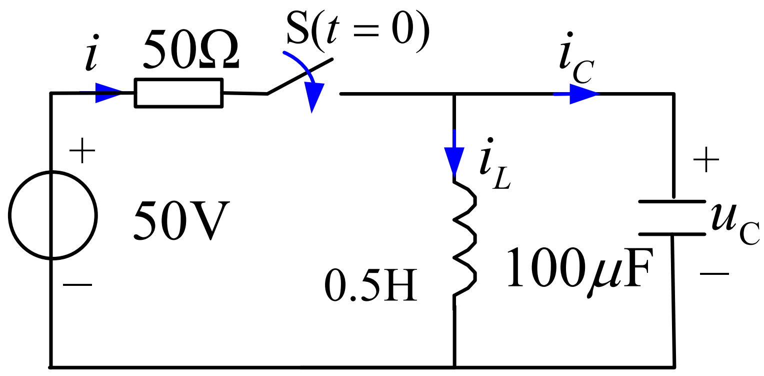
3 求特征根

$$s^2 + 200s + 20000 = 0$$

$$s_{1,2} = -100 \pm j100$$

9.4 一般二阶电路

已知：$i_L(0-)=2A$，　$u_C(0-)=0$，求：$i_L(t)$



解 ：1 列微分方程，由KCL得：

$$\frac{d^2 i_L}{dt^2}+200\frac{di_L}{dt}+2\times10^4 i_L=2\times10^4$$

2 求初值及稳态值

$i_L(0_+)=2A$，$u_C(0_+)=0$ （已知）

$$\frac{di_L}{dt}\Big|_{0+}=\frac{1}{L}u_L(0_+)=\frac{1}{L}u_C(0_+)=0$$

$i_L(\infty)=1A$

3 求特征根

$$s_{1,2}=-100\pm j100$$

4 求解微分方程

$$i_L=1+ke^{-100t}\sin(100t+\theta)$$

$$\begin{cases}1+k\sin\theta=2\\ -100k\sin\theta+100k\cos\theta=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}k=\sqrt{2}\\ \theta=45^\circ\end{cases}$$

$$\therefore i_L(t)=1+\sqrt{2}e^{-100t}\sin(100t+45^\circ)A\quad t\geq0$$

解二阶过渡过程包括以下几步:

- 换路后($t>0^+$)电路列写微分方程
- 求特征根，由根的性质写出自由分量（积分常数待定）
- 求强制分量（稳态分量）
- 全解=自由分量+强制分量
- 将初值$f(0^+)$和$f'(0^+)$代入全解，定积分常数求响应
- 讨论物理过程，画出波形

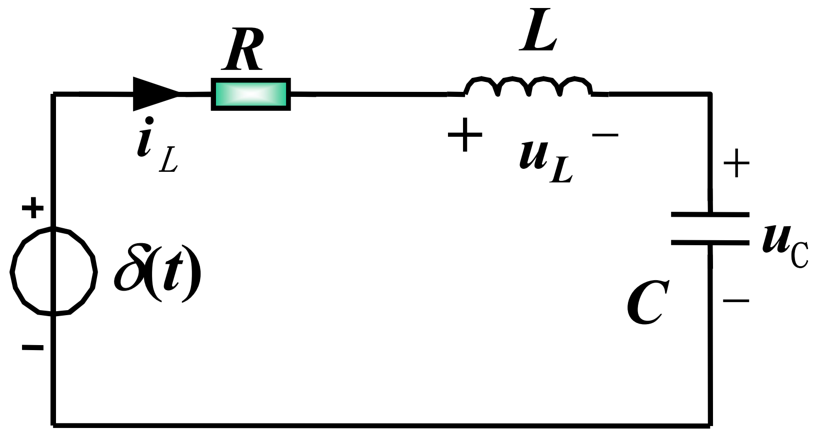
*（自学）9.6 二阶电路的冲激响应

t 在0^-至0^+间

$$u_L = \delta(t)$$

$$i_L(0^+) = i_L(0^-) + \frac{1}{L}\int_{0^-}^{0^+} u_L dt = \frac{1}{L}$$

$$u_c(0^+) = u_c(0^-) = 0$$



$u_C(0^-)=0$ ， $i_L(0^-)=0$

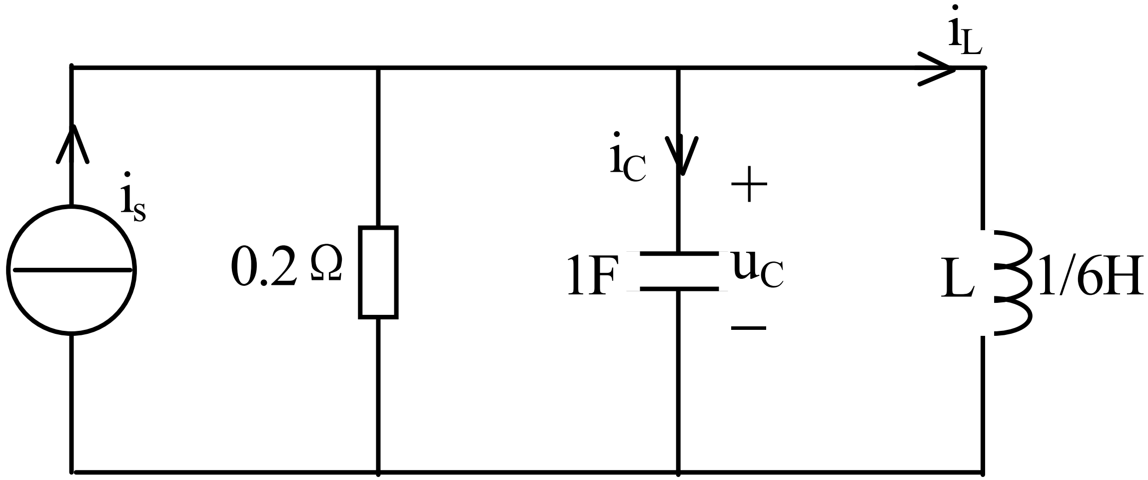
$t>0^+$ 为零输入响应

$$Ri_L + u_L + u_C = 0 \qquad i_L = C\frac{du_C}{dt} \qquad u_L = L\frac{di_L}{dt} = LC\frac{d^2u_C}{dt^2}$$

$$LC\frac{d^2u_c}{dt^2} + RC\frac{du_c}{dt} + u_c = 0$$

$$u_C(0^+) = u_C(0^-) = 0 \qquad u_C'(0^+) == \frac{1}{C}i_C(0^+) = \frac{1}{LC}$$

例:$i_S = \delta(t)$, 求i_L冲击响应.



解：化为零输入响应

$$u_C(0_-) = i_L(0_-) = 0$$

t=0- 时,$i_C(0) = \delta(t)$

$$u_C(0_+) = \frac{1}{C}\int_{0-}^{0+}\delta(t)dt = 1V$$

列微分方程，由KCL得：

$$i_R + i_C + i_L = 0 \qquad i_R = \frac{u_L}{0.2} = \frac{5}{6}\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} \qquad i_C = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{6}\frac{\mathrm{d}^2 i_L}{\mathrm{d}t^2}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2 i_L}{\mathrm{d}t^2} + 5\dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} + 6i_L = 0 \\ i_L(0_+) = 0A \\ i_L'(0_+) = \dfrac{1}{L}u_C(0_+) = 6A \end{cases}$$

$$i_L = (6e^{-2t} - 6e^{-3t})\ \varepsilon(t)\,\mathrm{A}$$

计划学时：2学时；课后学习4学时

作业：
9-5，9-7，9-9 /二阶电路零输入响应
9-13，9-15/二阶电路在直流激励下的响应
9-19 /二阶电路全响应