本章主要内容

- 谓词逻辑的知识表示与推理

➢ 一阶谓词逻辑表示法

➢ 自然演绎推理

➢ 归结演绎推理

自然演绎推理

- 自然演绎推理：从一组已知为真的事实出发，运用经典逻辑的推理规则推出结论的过程。
- 推理规则：P规则、T规则、假言推理、拒取式推理
  - P规则（前提引入）：在推导的任何步骤上都可以引入前提。
  - T规则（结论引用）：在推导的任何步骤上所得结论都可以作为后继证明的前提。
  - 假言推理：具有两个前提，其中一个前提是假言判断，另一个是此假言判断的前件或后件。假言判断反映了事物情况之间的条件关系，应用假言推理使我们能由某个事物情况是否存在，推出另一事物情况是否存在。
  - 拒取式推理：是在蕴含表达式中，否定后件，得出否定前件的结论。

自然演绎推理

P(x)：x是金属

Q(x)：x能导电

- **假言推理**：　$P,\ \ P \rightarrow Q \Rightarrow Q$

铜是金属，如果是金属则能导电，推出铜能导电

- **拒取式推理**：　$P \rightarrow Q,\ \ \neg Q \Rightarrow \neg P$

“如果是金属则能导电”，“塑料不能导电”推出“塑料不是金属”

自然演绎推理

- 充分条件
  - 如果它是金属，则它能导电；铜是金属，所以铜能导电；塑料不能导电，则塑料不是金属。
  - 如果承认前件就承认后件；如果否认后件就否认前件。
- 必要条件
  - 只有结婚了的人，才有结婚证；小张没有结婚证，所以小张没有结婚；有结婚证的人，肯定已经结婚了。
  - 否认前件就否认后件；承认后件就承认前件
- 充要条件
  - 当且仅当一个数能被2整除，这个数才是偶数；3不能被2整除，所以3不是偶数；3不是偶数，所以3不能被2整除。
  - 承认其中的一个，就必须承认其中的另一个；否认其中的一个，就必须否认其中的另一个

自然演绎推理

- 例： 已知事实：

（1）凡是容易的课程小王(wang)都喜欢；

（2）C 班的课程都是容易的；

（3）ai 是 C 班的一门课程。

求证：小王喜欢 ai 这门课程。

定义谓词：

EASY(x)： x 是容易的

LIKE(y, x)： y喜欢 x

C(x)： x 是 C 班的一门课程

已知事实和结论用谓词公式表示：

$(\forall x)(EASY(x) \rightarrow LIKE(wang, x))$

$(\forall x)(C(x) \rightarrow EASY(x))$

$C(ai)$

$LIKE(wang, ai)$

自然演绎推理

已知事实和结论用谓词公式表示：

(∀x)(EASY(x)→LIKE(wang, x))

(∀x)(C(x)→EASY(x))

C(ai)

LIKE(wang, ai)

应用推理规则进行推理：

(∀x)(EASY(x)→LIKE(wang, x))

EASY(z)→LIKE(wang, z)

全称固化

(∀x)(C(x)→EASY(x))

C(y)→EASY(y)

➤ **全称固化** $(\forall x)P(x) \Rightarrow P(y)$ y为个体域中的任一个体。

例如：

$(\forall x)P(x)$：所有人都会die… y当然也会die …

所以 C(ai), C(y) → EASY(y)

⇒ EASY(ai)

P规则及假言推理，充分条件假言推理

如肯定前件，则肯定后件

所以 EASY(ai), EASY(z) → LIKE(wang, z)

⇒ LIKE(wang, ai)

T规则及假言推理

自然演绎推理

优点：

- 表达定理证明过程自然，易理解
- 拥有丰富的推理规则，推理过程灵活
- 便于嵌入领域启发式知识

- 缺点：
  - 易产生组合爆炸，得到的中间结论一般呈指数形式递增
  - 对大的推理问题不利

本章主要内容

- 谓词逻辑的知识表示与推理

➢ 一阶谓词逻辑表示法

➢ 自然演绎推理

➢ 归结演绎推理

归结演绎推理

- 归结证明过程是一种反驳方法，即不是证明一个公式是有效的，而是证明公式之非是不可满足的
- Herbrand为其奠定了理论基础，Robinson原理使定理证明的机械化变为现实

Robinson

➢反证法： $P \Rightarrow Q$ ，当且仅当 $P \wedge \neg Q \leftrightarrow \boldsymbol{F}$。

- 即Q为P的逻辑结论，当且仅当 $P \wedge \neg Q$是不可满足的。

定理：

Q为P_1，P_2 ，…，P_n 的逻辑结论，当且仅当 $(P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n) \wedge \neg Q$ 是不可满足的。

谓词公式化为子句集

- 同一个命题或谓词公式可以用不同的形式来表达，它们之间是相互等值的
- 将谓词公式转化为与其等价的标准形式，方便做推理
- 一些定义：
  - 原子谓词：不能再分解的命题
  - 文字：原子谓词公式及其否定
  - 子句：任何文字本身及其析取式
  - 空子句：不包含任何文字的子句。空子句不能被任何解释满足，所以它是永假的、不可满足的。
  - 子句集：由子句构成的集合（各子句是合取关系）。

谓词公式 $\xleftrightarrow{\text{容易判定其不可满足性}}$ **子句集**

谓词公式化为子句集

- 合取范式：公式G称为合取范式，当且仅当G有形式$G_1 \wedge G_2 \wedge \ldots G_n$ (n>=1) 其中每个G_i都是文字的析取式
- 析取范式：公式G称为析取范式，当且仅当G有形式$G_1 \vee G_2 \vee \ldots G_n$ (n>=1) 其中每个G_i都是文字的合取式

- 例如：P Q R是原子，则P Q R ¬P ¬Q ¬R都是文字
  - $(P\vee\neg Q\vee R) \wedge (\neg P\vee Q)$ 是合取范式
  - $(\neg P\wedge Q) \vee (P\wedge\neg Q\wedge\neg R)$ 是析取范式

谓词公式化为子句集

- 定理：对任意公式，都有与之等值的合取范式和析取范式

子句集

$(P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q)$ 是合取范式

$\{P \vee \neg Q \vee R, \ \neg P \vee Q\}$ 子句集

- 使用等价式中的连接词化规律消去公式中的连接词
- 反复使用双重否定律和德·摩根律将否定符号移到原子之前
- 反复使用分配律和其他定律得出标准型

鲁滨逊归结原理

- 消解原理，是机器定理证明的基础
- 通过子句集中子句的不可满足性分析，证明谓词公式的不可满足性
- 子句集中的子句是合取关系（与），其中只要有一个子句不可满足，子句集就一定不可满足
- 空子句不可满足
- 子句集中只要有一个子句是空子句，则子句集一定是不可满足的

鲁滨逊归结原理

谓词公式 不可满足性	⟷	子句集 不可满足性

定理:

谓词公式不可满足的充要条件是其子句集不可满足。

命题逻辑消解推理规则

什么是消解?

例1： 小王说他下午或者去图书馆或者在家休息
小王没去图书馆
R：小王下午去图书馆
S：小王下午在家休息

$$\left.\begin{array}{l} R \vee S \\ \neg R \end{array}\right\} \Rightarrow S$$

例2： 如果今天不下雨，我就去你家
今天没有下雨
P：今天下雨
Q：我去你家

$$\neg P \rightarrow Q \leftrightarrow P \vee Q$$

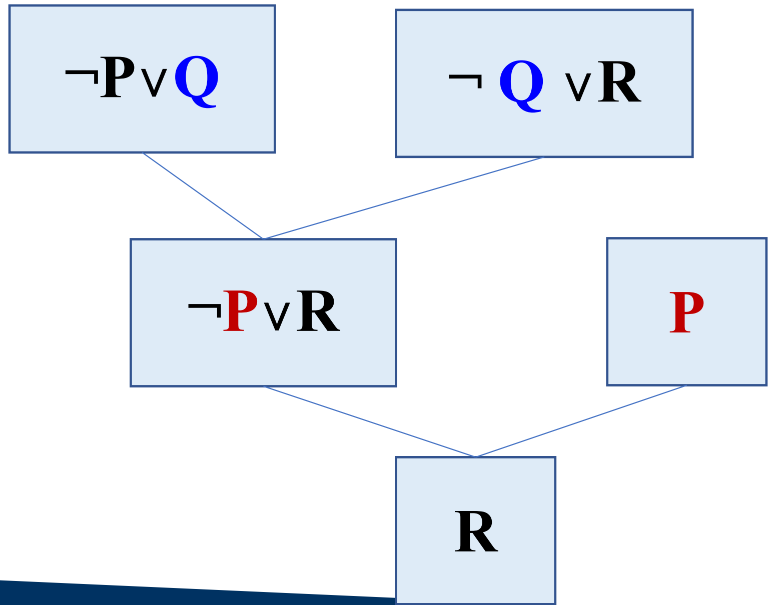
$$\neg P$$

$$\Rightarrow Q$$

命题逻辑消解推理规则

1. 命题逻辑中的归结原理

定义（归结）：设C_1与C_2是子句集中的任意两个子句，如果C_1中的文字L_1与 C_2中的文字L_2互补，那么从C_1和 C_2中分别消去L_1和L_2，并将二个子句中余下的部分析取，构成一个新子句C_{12}。



定理：归结式C_{12}是其亲本子句C_1与C_2的逻辑结论。即如果 C_1与C_2为真，则C_{12}为真。

命题逻辑消解推理规则

- 推论1：设C_1与C_2是子句集S中的两个子句，C_{12}是它们的归结式，若用C_{12}代替C_1与C_2后得到新子句集S_1，则由S_1不可满足性可推出原子句集S的不可满足性，即：

$$\mathrm{S}_1\text{的不可满足性} \Rightarrow S\text{ 的不可满足性}$$

- 推论2：设C_1与C_2是子句集S中的两个子句，C_{12}是它们的归结式，若C_{12}加入原子句集S，得到新子句集S_1，则S与S_1在不可满足的意义上是等价的，即：

$$\mathrm{S}_1\text{的不可满足性} \leftrightarrow S\text{ 的不可满足性}$$

如果经过归结能得到空子句，则立即可得到原子句集S是不可满足的结论。

谓词逻辑消解推理规则

2. 谓词逻辑中的归结原理

子句中含有变元，不能直接消去互补文字，需要先用最一般合一对变元进行代换，然后才能进行归结。

$$C_1 = P(x) \vee Q(x) \qquad C_1\sigma = P(a) \vee Q(a)$$

最一般合一

$$C_2 = \neg P(a) \vee R(y) \qquad C_2\sigma = \neg P(a) \vee R(y)$$

$$\sigma = \{a/x\}$$

$$C_{12} = Q(a) \vee R(y)$$

如果能找到一个公式集的合一，特别是最一般合一，则可使互否的文字形式结构完全一致起来，进而达到消解的目的。

谓词逻辑消解推理规则

- 对于谓词逻辑，归结式是其亲本子句的逻辑结论。
- 对于一阶谓词逻辑，即若子句集是不可满足的，则必存在一个从该子句集到空子句的归结演绎；若子句集存在一个到空子句的演绎，则该子句集是不可满足的。
- 如果没有归结出空子句，则既不能说S不可满足，也不能说S是可满足的。

定理：

Q为P_1，P_2，…，P_n的逻辑结论，当且仅当$(P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n) \wedge \neg Q$是不可满足的。

- 应用归结原理证明定理的过程称为归结反演。
- 用归结反演证明的步骤是：

（1）将已知前提表示为谓词公式P。

（2）将待证明的结论表示为谓词公式Q，并否定得到$\neg Q$。

（3）把谓词公式集$\{P, \neg Q\}$化为子句集S。

（4）应用归结原理对子句集S中的子句进行归结，并把每次归结得到的归结式都并入到S中。如此反复进行，若出现了空子句，则停止归结，此时就证明了Q为真。

归结反演

Q为P_1，P_2 ，…，P_n 的逻辑结论，当且仅当 $(P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n) \wedge \neg Q$ 是不可满足的。

- 例：某公司招聘工作人员，A，B，C三人应试，经面试后公司表示如下想法：

(1) 三人中至少录取一人。

(2) 如果录取 A 而不录取 B，则一定录取 C。

(3) 如果录取 B，则一定录取 C 。

求证：公司一定录取 C。

$P(A) \vee P(B) \vee P(C)$

$P(A) \wedge \neg P(B) \rightarrow P(C)$

$P(B) \rightarrow P(C)$

证明：公司的想法用谓词公式表示——P(x): 录取 x

将待证明的结论表示为谓词公式，并否定：$\neg P(C)$

把上述公式化为子句集：

$P(A) \vee P(B) \vee P(C)$

$\neg P(A) \vee P(B) \vee P(C)$

$\neg P(B) \vee P(C)$

$\neg P(C)$

德·摩根(De Morgen)定律：

$\neg(P \vee Q) \leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$

$\neg(P \wedge Q) \leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$

连 … 式）：$P \rightarrow Q \leftrightarrow \neg P \vee Q$

归结反演

- 例：某公司招聘工作人员，A，B，C三人应试，经面试后公司表示如下想法：

(1) 三人中至少录取一人。

(2) 如果录取 A 而不录取 B，则一定录取 C。

(3) 如果录取 B，则一定录取 C。

求证：公司一定录取 C。

子句集：

(1) $P(A) \vee P(B) \vee P(C)$

(2) $\neg P(A) \vee P(B) \vee P(C)$

(3) $\neg P(B) \vee P(C)$

(4) $\neg P(C)$

(5) $P(B) \vee P(C)$ 由(1)(2)归结

(6) $P(C)$ 由(3)(5)归结

(7) 空 由(4)(6)归结

∴ 结论成立