

第8章 一阶电路稳态分析

8.1 概述

8.2 零输入响应

8.3 直流激励下的响应

8.3.1 直流电源激励的RC电路

8.3.2 直流电源激励的RL电路

* (自学) 8.3.3 RC电路的方波响应

* (自学) 8.4 正弦激励下的RC电路

8.5 含运算放大器的一阶电路

8.6 线性非时变特性

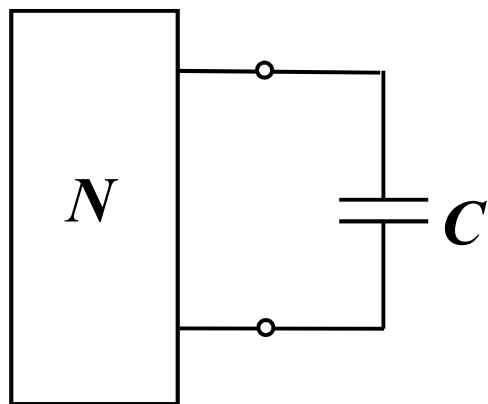
* (自学) 8.6.4 任意电源激励下的零状态响应

* (自学) 8.7 冲击响应计算

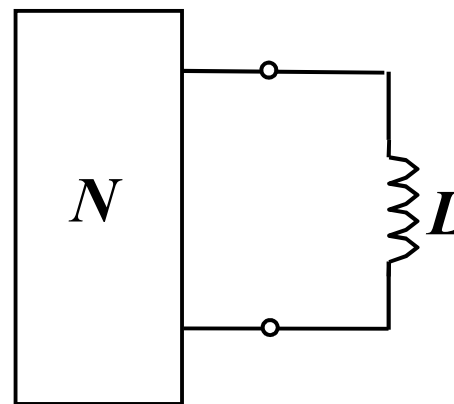
8.1 暂态分析的概述

典型的一阶电路

一阶电路：只含有一个独立储能元件的电路，用一阶微分方程描述。



RC电路

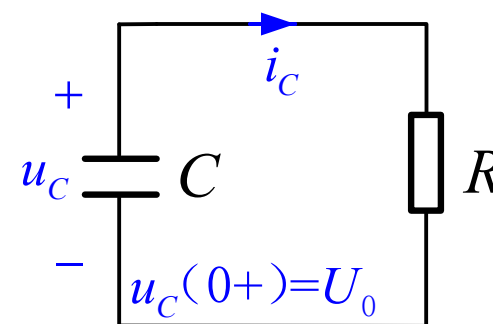
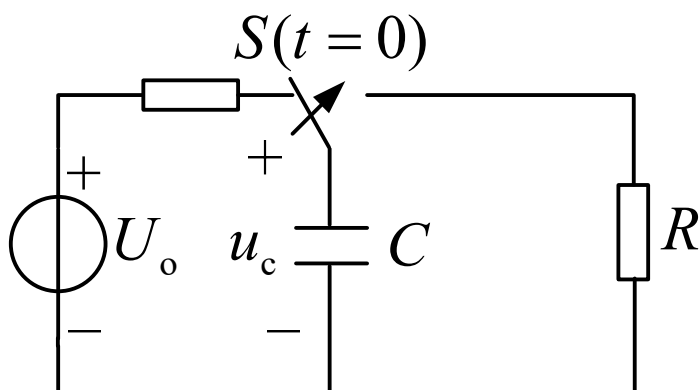


RL电路

8.2 零输入响应 (Zero-input response)

零输入响应：换路后没有独立电源，仅由储能元件初始储能作用于电路产生的暂态过程，又称为自然响应。

8.2.1 RC电路的零输入响应



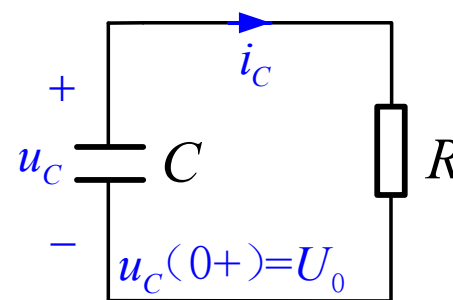
$$t=0_- : u_c(0_-) = U_0;$$

$t=0$: 开关 S 换路。

1 微分方程及零输入响应分析:

由KVL得: $Ri_c - u_c = 0 \quad (t \geq 0)$

$$\begin{cases} RC \frac{du_c}{dt} + u_c = 0 & (t \geq 0) \\ u_c(0_+) = u_c(0_-) = U_0 \end{cases}$$



此微分方程的特征方程为: $RCs + 1 = 0 \quad \Rightarrow s = -\frac{1}{RC}$

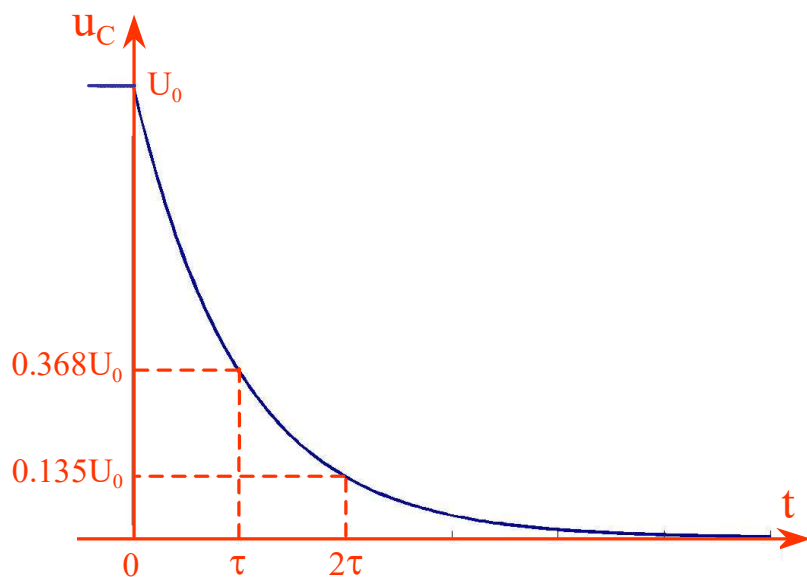
$$\therefore u_c(t) = Ke^{st} = Ke^{-\frac{1}{RC}t} \quad (t \geq 0)$$

$$\because u_c(0_+) = U_0 \quad \therefore u_c(0_+) = Ke^0 = U_0$$

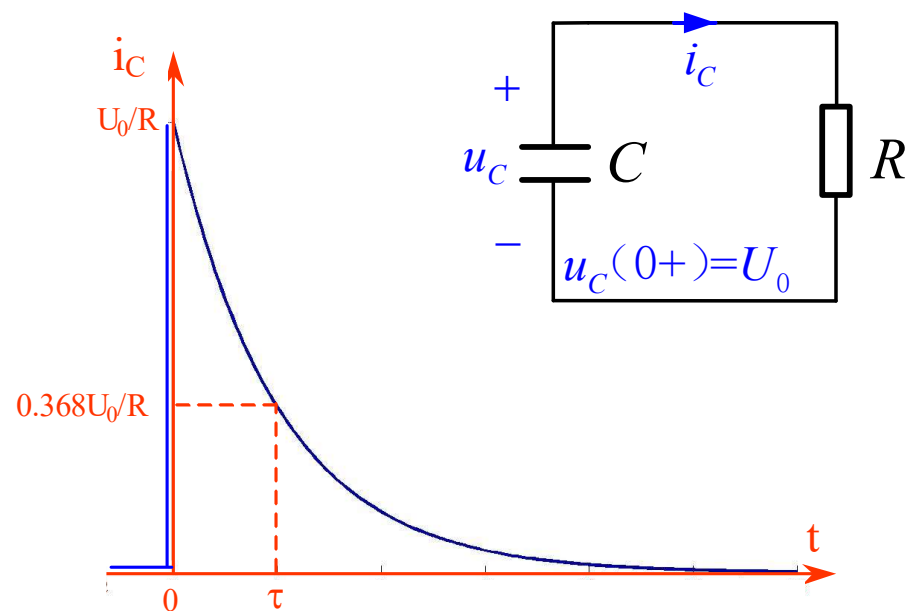
$$u_c(t) = U_0 e^{-\frac{1}{RC}t} \text{ V} \quad (t \geq 0)$$

$$i_c = \frac{u_c}{R} = \frac{U_0}{R} e^{-\frac{1}{RC}t} \text{ A} \quad (t > 0)$$

2 波形:



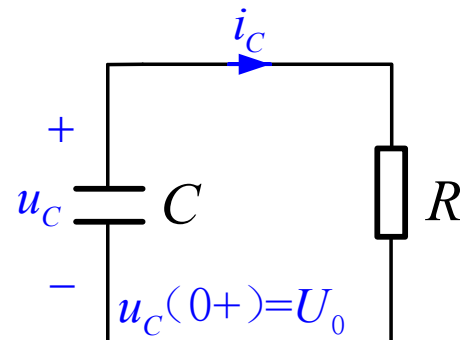
$$u_C(t) = U_0 e^{-\frac{1}{RC}t} \text{ V} \quad (t \geq 0)$$



$$i_C = \frac{u_C}{R} = \frac{U_0}{R} e^{-\frac{1}{RC}t} \text{ A} \quad (t > 0)$$

- 电压、电流均从 $t=0_+$ 开始以同一指数规律衰减到零;
- 电容电压在 $t=0$ 连续, 随时间增长下降趋于0;
- 电容电流在 $t=0$ 时发生了跳变。(电容电压在换路后突然加到电阻上的结果)。随电容电压的下降衰减直至消失。

3 能量转换:



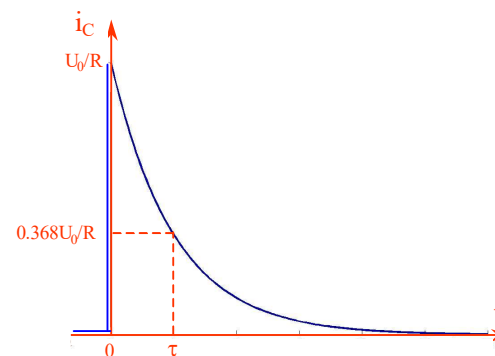
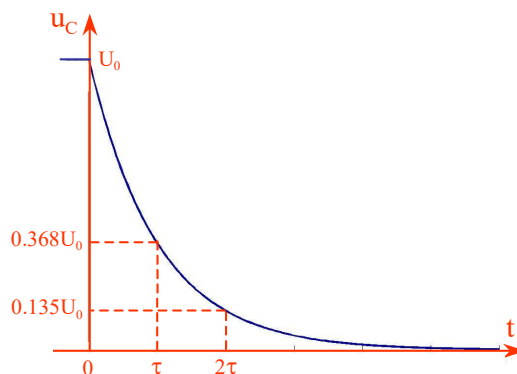
$t=0$ 时刻电容的初始储能为: $w_C(0_+) = \frac{1}{2}CU_0^2$

在整个过渡过程中, 电阻吸收的总能量为:

$$w_R(0, \infty) = \int_0^{\infty} Ri^2 dt = \int_0^{\infty} R\left(\frac{U_0}{R}e^{-\frac{t}{RC}}\right)^2 dt = \frac{1}{2}CU_0^2$$

电阻消耗的能量等于电容元件所存储的初始能量。

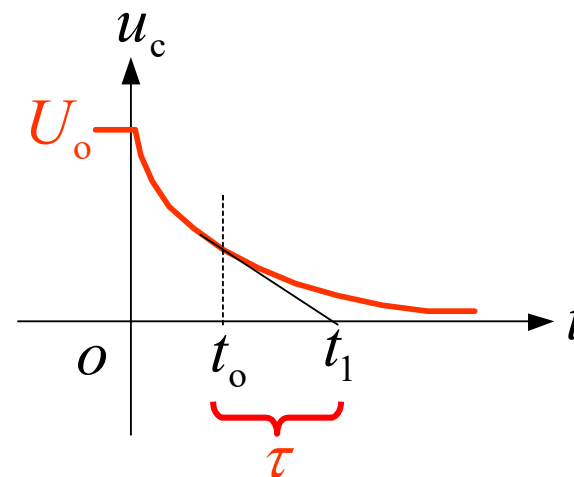
4 时间常数 τ :



- 在给定电压初值的情况下， C 越大，电容中储存的电荷越多，放电时间越长；
- R 越大，放电电流越小，放电时间越长；
- 衰减快慢取决于 RC 乘积

$$\tau = RC$$

$$s = -\frac{1}{\tau}$$



$$[\tau] = [RC] = [\text{欧}][\text{法}] = [\text{欧}]\left[\frac{\text{库}}{\text{伏}}\right] = [\text{欧}]\left[\frac{\text{安秒}}{\text{伏}}\right] = [\text{秒}]$$

4 时间常数 τ :

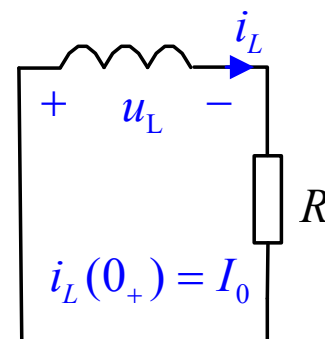
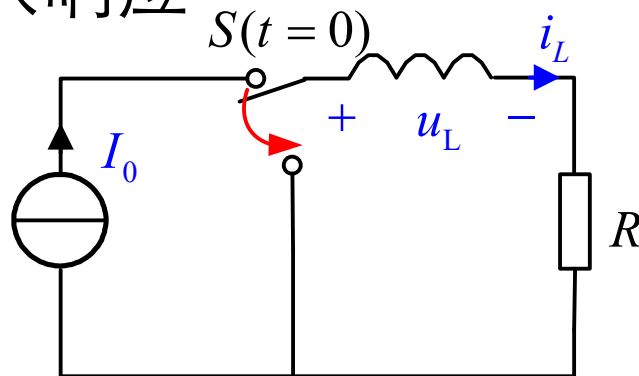
t	0	τ	2τ	3τ	5τ
$u_c = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$	U_0	$U_0 e^{-1}$	$U_0 e^{-2}$	$U_0 e^{-3}$	$U_0 e^{-5}$
	U_0	$0.368 U_0$	$0.135 U_0$	$0.05 U_0$	$0.007 U_0$

- τ : 电容电压衰减到原来电压**36.8%**所需的时间;
- 经过 **$3\tau \sim 5\tau$** , 电容电压衰减至初值的0.7%, 可以认为放电已经结束;
- $s(\tau)$ 与电路的输入无关, 仅取决于电路的结构和参数, 称为固有频率。

8.2.2 RL电路的零输入响应

$t=0$ 时, 开关 S 换路

$t=0_-: i_L(0_-)=I_0$



$$\begin{cases} L \frac{di_L}{dt} + Ri_L = 0 & t \geq 0 \\ i_L(0_+) = i_L(0_-) = I_0 \end{cases}$$

此微分方程的特征方程为:

$$Ls + R = 0 \quad \Rightarrow s = -\frac{R}{L}$$

$$i_L = Ke^{st} = Ke^{-\frac{t}{\tau}} = Ke^{-\frac{R}{L}t} \text{ A} \quad (t \geq 0) \quad \tau = -\frac{1}{s} = \frac{L}{R}$$

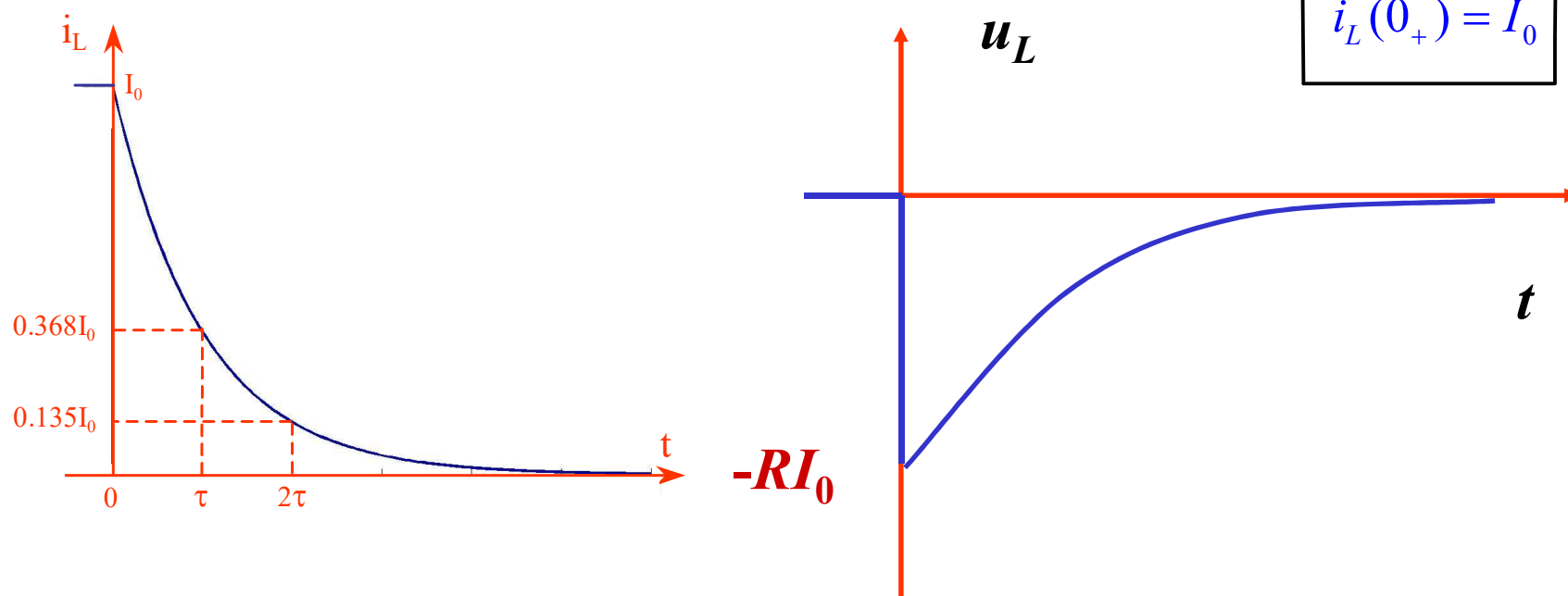
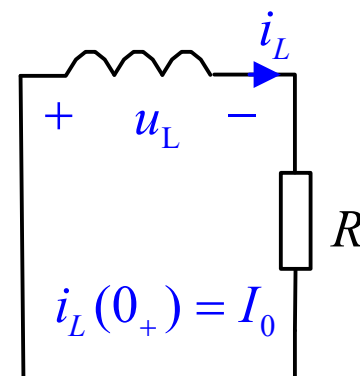
$$= i_L(0_+)e^{-\frac{R}{L}t}$$

$$= I_0 e^{-\frac{R}{L}t} \text{ A} \quad (t \geq 0)$$

$$u_L = -Ri_L = -RI_0 e^{-\frac{R}{L}t} \text{ V} \quad (t > 0)$$

波形：

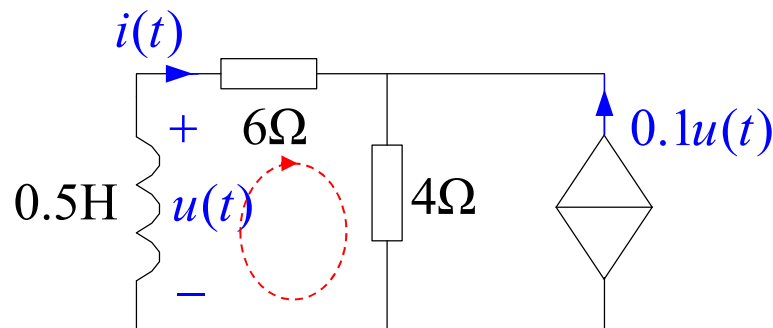
$$i_L = I_0 e^{-\frac{R}{L}t} \text{ A} \quad (t \geq 0) \quad u_L = -RI_0 e^{-\frac{R}{L}t} \text{ V} \quad (t > 0)$$



- 电压、电流以同一指数规律衰减。
- 电感电流在 $t=0$ 连续，随时间增长下降趋于0；
- 电感电压在 $t=0$ 时发生了负跳变。随电感电流的下降衰减直至消失。
- 计算RL 电路的零输入响应关键是：初始值； 时间常数 τ 。

【例1】. $i(0_+) = 150\text{mA}$ 。求 $t > 0$ 时 $u(t)$ 。

方法1：列微分方程



由KVL得： $6i(t) + 4[i(t) + 0.1u(t)] - u(t) = 0$

化简得： $10i(t) - 0.6u(t) = 0$ $10i(t) + 0.6 \times L \frac{di(t)}{dt} = 0$

$$\begin{cases} 0.3 \frac{di(t)}{dt} + 10i(t) = 0 \\ i(0_+) = 150\text{mA} \end{cases}$$

解微分方程得： $i(t) = 150e^{-\frac{100}{3}t} \text{mA} (t \geq 0)$

$$\rightarrow u(t) = -L \frac{di}{dt} = 2.5e^{-\frac{100}{3}t} \text{V} (t > 0)$$

【例1】. $i(0_+) = 150\text{mA}$ 。求 $t > 0$ 时 $u(t)$ 。

方法2：求初值和时间常数

1 计算时间常数

图中端口等效电阻 R 为：

$$u(t) = 6i(t) + 4 \times [i(t) + 0.1u(t)]$$

$$\Rightarrow R = \frac{u(t)}{i(t)} = \frac{50}{3} \Omega$$

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{3}{100} \text{s}$$

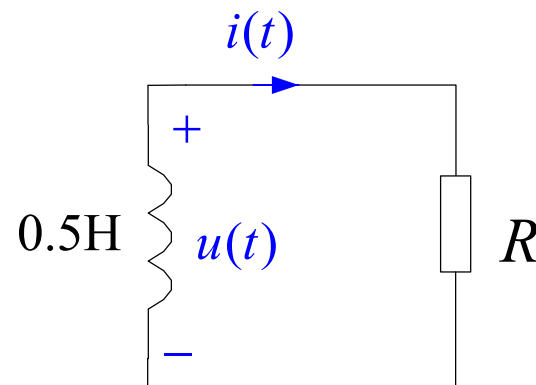
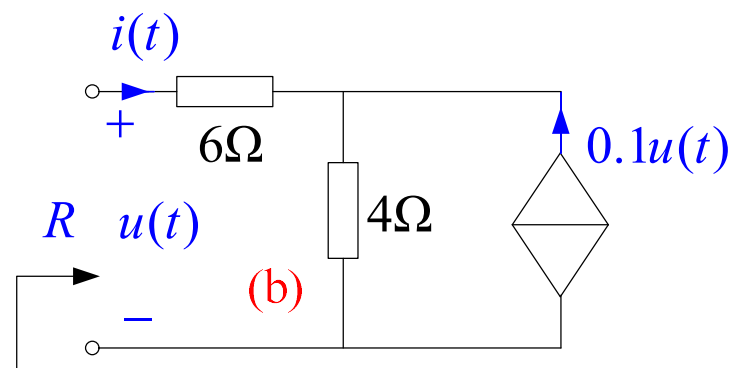
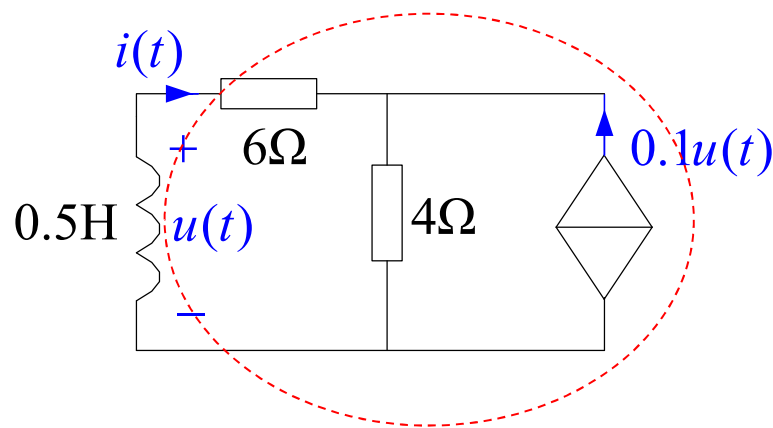
2 初值 $i(0_+) = 150\text{mA}$ ：

$$i(t) = i(0_+)e^{-\frac{t}{\tau}} = 150e^{-\frac{100}{3}t} \text{mA} \quad (t \geq 0)$$

$$\therefore u(t) = \frac{50}{3} \times i(t) = \frac{50}{3} \times 0.15e^{-\frac{100}{3}t} = 2.5e^{-\frac{100}{3}t} \text{V} \quad (t > 0)$$

2021-02-25

电路理论



【例1】. $i(0_+) = 150\text{mA}$ 。求 $t > 0$ 时 $u(t)$ 。

方法3: 计算 u 初值和时间常数:

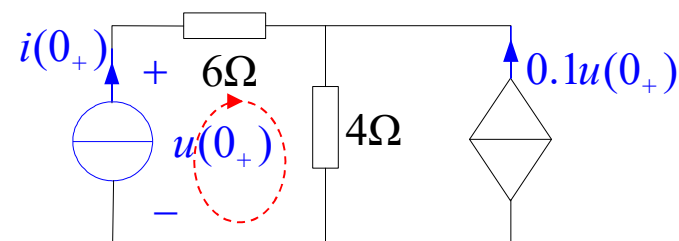
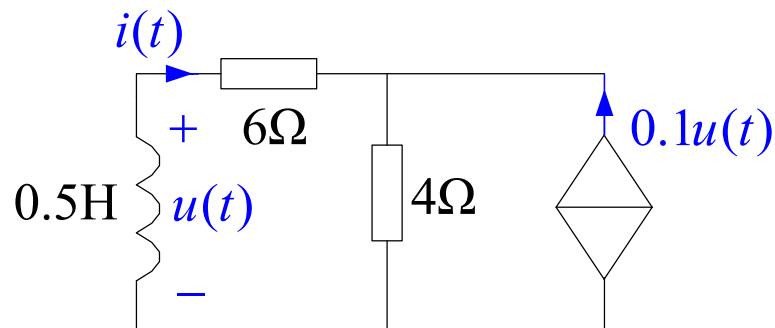
$t = 0_+$ 时刻等效电路如图所示:

由KVL得:

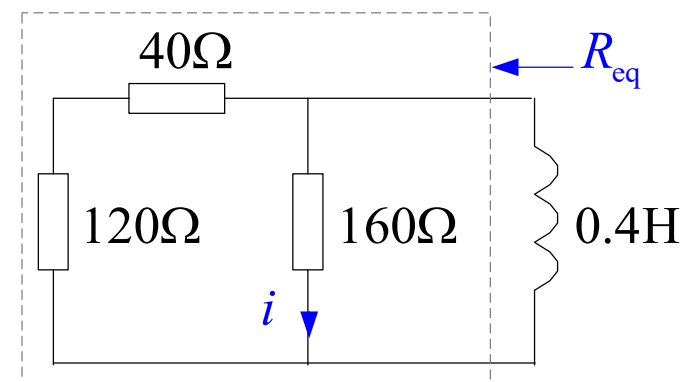
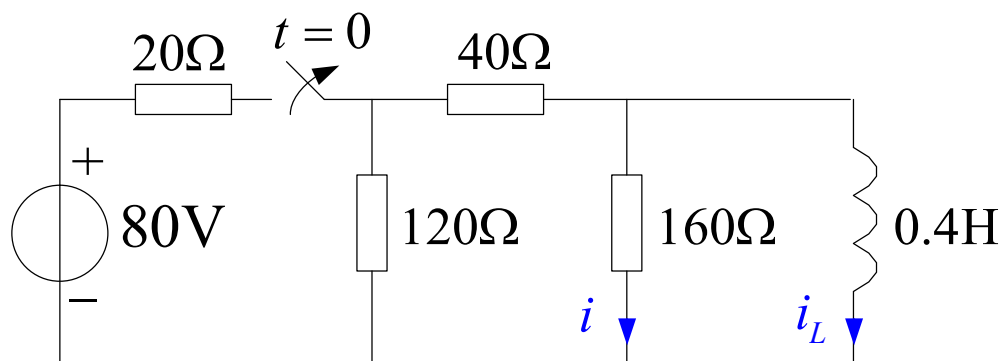
$$u(0_+) = 0.15 \times 6 + [0.15 + 0.1u(0_+)] \times 4$$

$$u(0_+) = 1.5 / 0.6 = 2.5 \text{ V}$$

$$\therefore u(t) = u(0_+)e^{-\frac{t}{\tau}} = 2.5e^{-\frac{100}{3}t} \text{ V} \quad (t > 0)$$



【练习】例8-2-3，求*i*。



1 求时间常数

$$R_{\text{eq}} = 80\Omega$$

$$\tau = \frac{L}{R_{\text{eq}}} = \frac{0.4}{80} = 5 \times 10^{-3} \text{s}$$

2 求初值

$$i_L(0_-) = 1.2\text{A}$$

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 1.2\text{A}$$

$$i(0_+) = -\frac{(120 + 40)}{(120 + 40) + 160} \times i_L(0_+) = -0.6\text{A}$$

$$i = i(0_+)e^{-\frac{t}{\tau}} = -0.6e^{-200t} \text{ A} \quad (t > 0)$$

【例2】. 换路后电路： $u_C(0_+) = 1\text{V}$ 。求零输入响应 u_C 、 i_1 、 i_2 。

解：计算端口等效电阻为：

$$u_C = i_1 + 2 \times [i_1 + i_1]$$

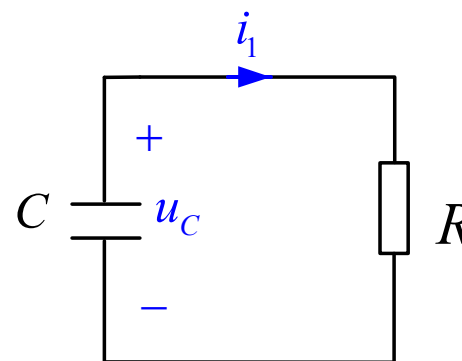
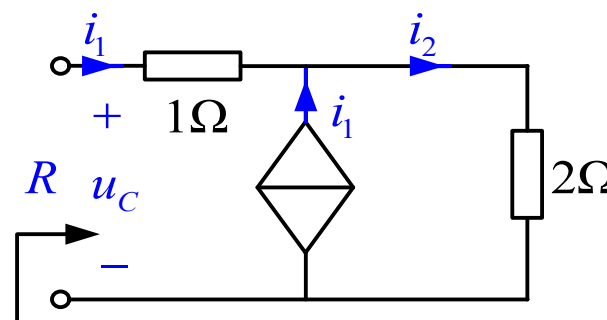
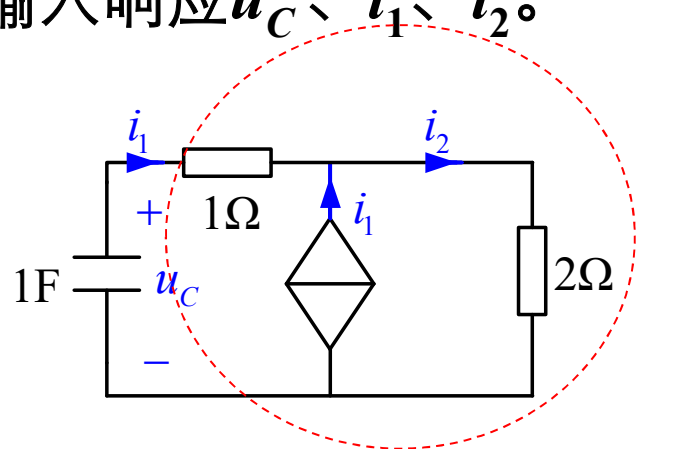
$$\Rightarrow R = \frac{u_C}{i_1} = 5\Omega$$

$$\tau = RC = 5s$$

$$\therefore u_C = u_C(0_+)e^{-\frac{t}{\tau}} = e^{-\frac{t}{5}} \text{ V} \quad (t \geq 0)$$

$$i_1 = \frac{u_C}{R} = \frac{1}{5}e^{-\frac{t}{5}} \text{ A} \quad (t > 0)$$

$$i_2 = 2i_1 = \frac{2}{5}e^{-\frac{t}{5}} \text{ A} \quad (t > 0)$$

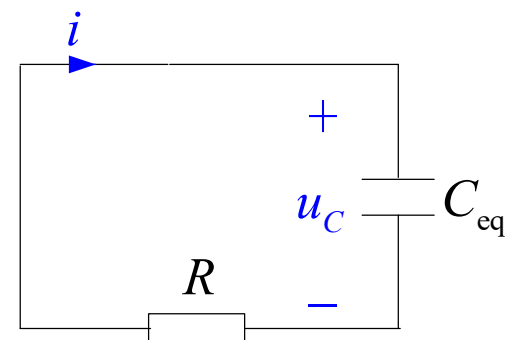
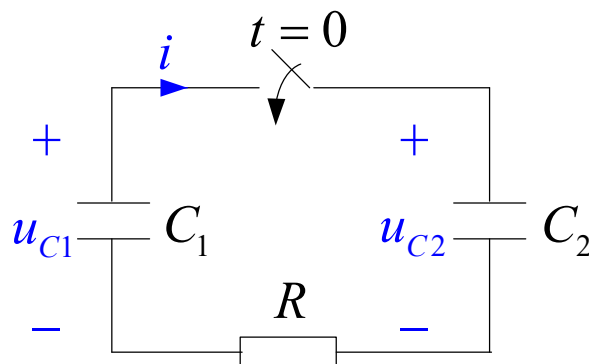


【特例】——例8-2-5：求*i*。

$$u_{C1}(0_-) = U_0$$

$$u_{C2}(0_-) = 0$$

$$C_1 = C_2 = C$$



1 求初值

$$u_{C1}(0_+) = u_{C1}(0_-) = U_0 \quad u_{C2}(0_+) = u_{C2}(0_-) = 0$$

$$u_C(0_+) = u_{C2}(0_+) - u_{C1}(0_+) = -U_0$$

2 求时间常数 $C_{eq} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = 0.5C$ $\tau = RC_{eq} = 0.5RC$

$$u_C = u_C(0_+)e^{-\frac{t}{\tau}} = -U_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (t \geq 0)$$

$$i = i(0_+)e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (t > 0)$$

【课下练习】. 电路处于稳态, $t=0$ 时S闭合, 求零输入响应。

$$u_{C1}, u_{C2}, i_1, i_2, i$$

解: 求初值, 由0-时刻等效电路得出

$$u_{C1}(0_+) = u_{C1}(0_-) = 1 \times (2 + 5) = 5 \text{ V}$$

$$u_{C2}(0_+) = u_{C2}(0_-) = 1 \times 3 = 3 \text{ V}$$

求时间常数:

$$\tau_1 = 1 \times 1 = 1 \text{ s} \quad \tau_2 = 2 \times (2 // 3) = 2.4 \text{ s}$$

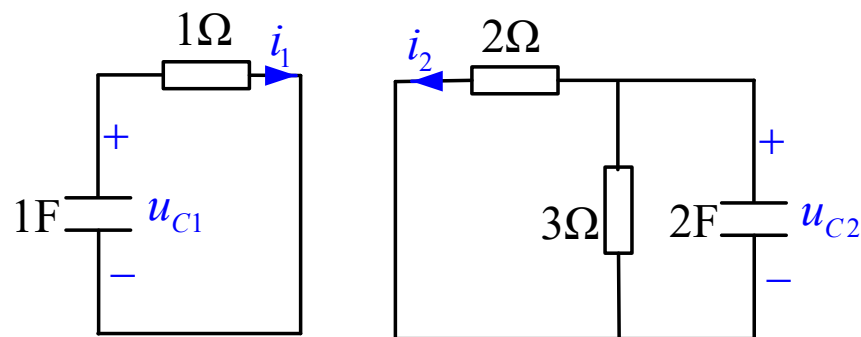
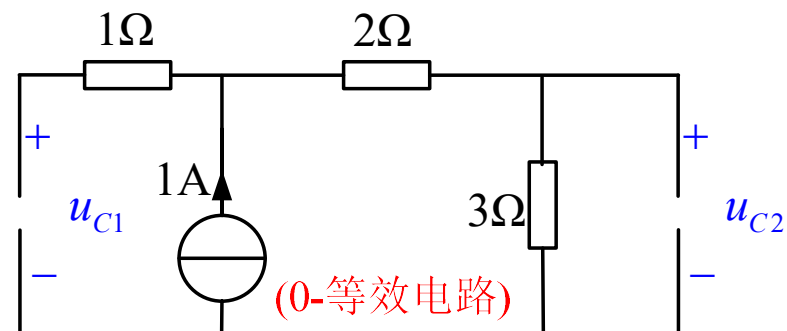
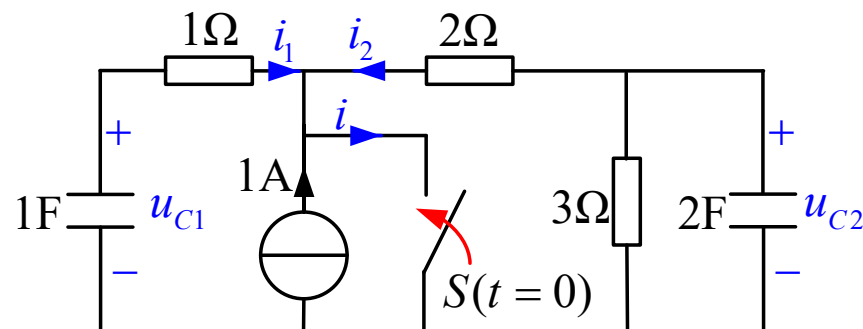
$$\therefore u_{C1} = u_{C1}(0_+) e^{-\frac{t}{\tau}} = 5e^{-t} \text{ V} (t \geq 0)$$

$$u_{C2} = u_{C2}(0_+) e^{-\frac{t}{\tau}} = 3e^{-\frac{t}{2.4}} \text{ V} (t \geq 0)$$

$$i_1 = \frac{u_{C1}}{1} = 5e^{-t} \text{ A} (t > 0)$$

$$i_2 = \frac{u_{C2}}{2} = 1.5e^{-\frac{t}{2.4}} \text{ A} (t > 0)$$

$$i = 1 + i_2 + i_2 = 1 + 5e^{-t} + 1.5e^{-\frac{t}{2.4}} \text{ A} (t > 0)$$



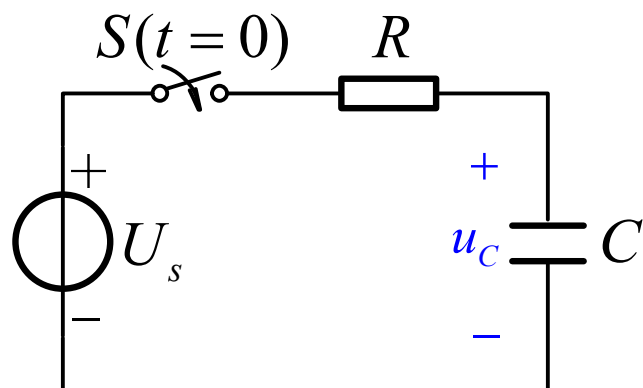
8.3 直流电源激励下的响应

- 零状态响应：换路前电路储能为零，换路后存在独立电源，仅由独立电源形成的暂态过程。
- 全响应：换路前电路已有储能，换路后存在独立电源，储能和独立电源共同作用形成的暂态过程。
- 独立电源有直流电源、阶跃函数、正弦函数及它们的组合，不同类型的独立电源产生的零状态响应及全响应是不同的。本节讨论一阶电路在直流电源激励下暂态过程的变化规律，以及提出三要素法。

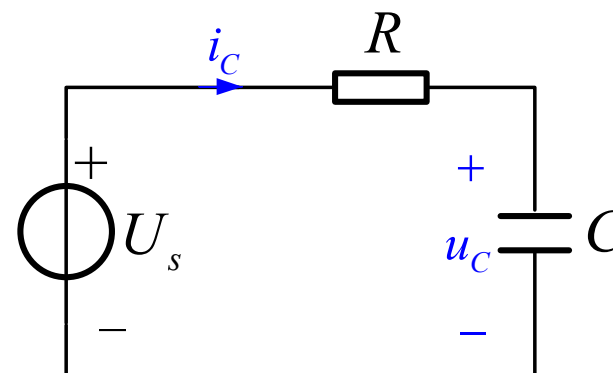
8.3 直流电源激励下的响应

8.3.1 直流电源激励的RC电路

1 零状态响应



$$t=0_-: u_C(0_-)=0$$



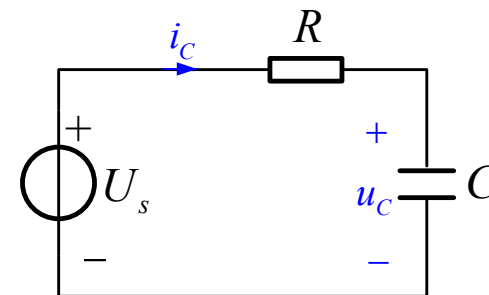
由KVL得:

$$Ri_C + u_C = U_S \quad t > 0$$

$$\begin{cases} RC \frac{du_C}{dt} + u_C = U_S & t > 0 \\ u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0 \end{cases}$$

求解微分方程：

$$\begin{cases} RC \frac{du_C}{dt} + u_C = U_s \\ u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0 \end{cases}$$



解答形式为：

$$u_c = u_{cp} + u_{ch}$$

齐次方程的通解

非齐次方程的特解

$$u_c = u_{cp} + u_{ch} = U_s + ke^{-\frac{t}{RC}} \quad (t \geq 0)$$

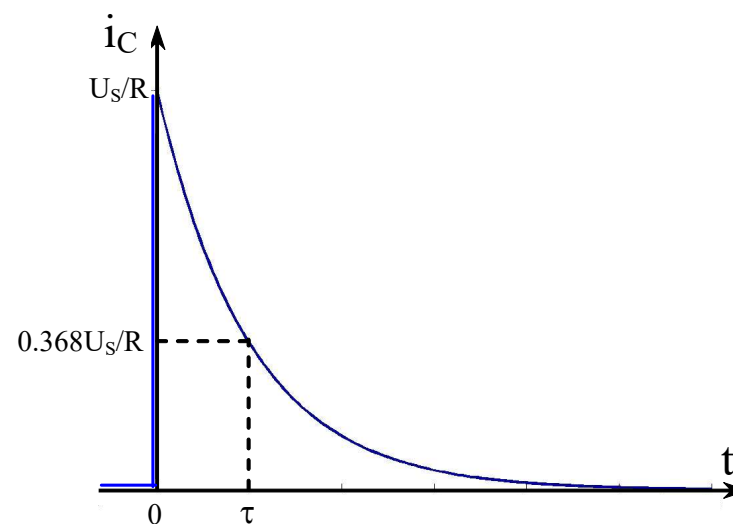
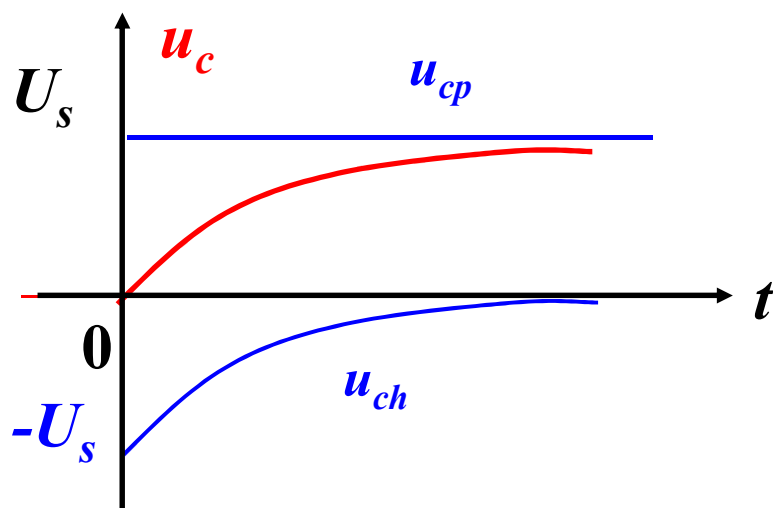
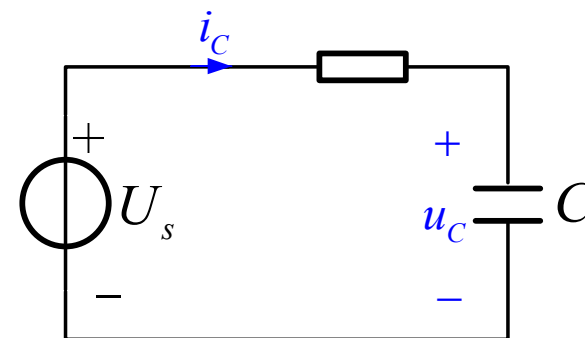
$u_C(0_+) = 0$ ，可解得： $k = -U_s$

$$u_c = U_s - U_s e^{-\frac{t}{RC}} \quad (t \geq 0)$$

$$i_c = \frac{U_s}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \text{ A} \quad (t > 0)$$

问：如果初始值不为0，则电容电压为？

波形:



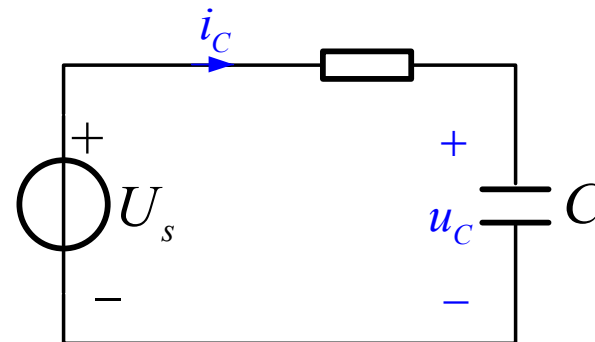
$$u_c = U_s - U_s e^{-\frac{t}{RC}} \quad (t \geq 0)$$

$$i_c = \frac{U_s}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \text{ A} \quad (t > 0)$$

能量流动:

$$u_c = U_s (1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \text{ V} (t \geq 0)$$

$$i_c = \frac{U_s}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \text{ A} (t > 0)$$



在整个过渡过程中，电源提供的总能量为：

$$w_{U_s} = \int_0^{\infty} U_s i_c dt = \int_0^{\infty} U_s \times \frac{U_s}{R} e^{-\frac{t}{RC}} dt = CU_s^2$$

电阻吸收的总能量为：

$$w_R = \int_0^{\infty} Ri_c^2 dt = \int_0^{\infty} R \left(\frac{U_s}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \right)^2 dt = \frac{1}{2} CU_s^2$$

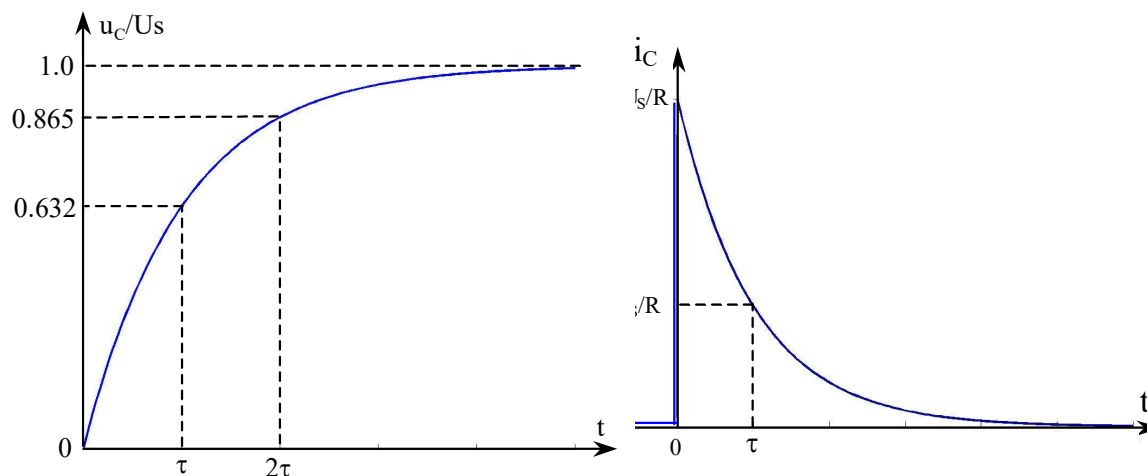
电容吸收的总能量为：

$$w_C = \frac{1}{2} CU_C^2(\infty) = \frac{1}{2} CU_s^2$$

在整个暂态过程中，电源提供的能量有一半被电容吸收，
一般被电阻消耗。

时间常数 τ (RC) :

$$u_C = U_s(1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \text{ V}(t \geq 0)$$



t	0^+	τ	2τ	3τ	4τ	5τ	\dots	∞
u_C/U_s	0	0.632	0.865	0.95	0.982	0.993	\dots	1

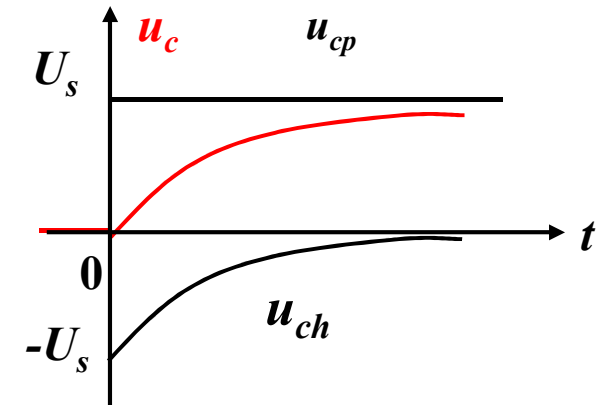
- 响应不同，时间常数的意义不同。对于响应 u_C ，即 τ 等于电容电压上升到稳态值 63.2% 所需的时间。
- 时间常数与激励无关，仅取决于电路的结构和参数，决定了过渡过程的进程。
- 经过 $3\tau \sim 5\tau$ ，电容电压至稳态值的 99.3%，可以认为已经达到稳态。

暂态分量与稳态分量：

$$u_c = u_{ch} + u_{cp} = -U_s e^{-\frac{t}{RC}} + U_s (t \geq 0)$$

暂态分量(自由)

稳态分量(强制)

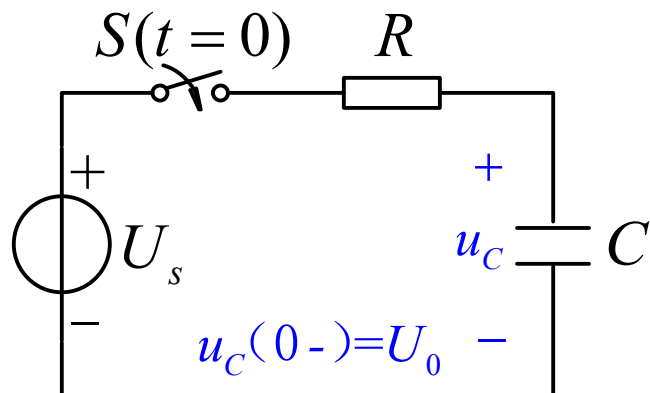


- **暂态响应 (transient response)**：齐次方程的**通解**不受输入的制约，称为自由分量（固有响应）(natural response)。该响应随着时间的增长而衰减到零，又称为暂态分量。
- **稳态响应 (forced response)**：特解受电路输入的制约，而与电路的初始状态无关，称为强制分量；电路达到稳态后，电容元件的稳态电压等于 U_{cp} ，所以 U_{cp} 又称为强制分量。
- 随着时间的增长($t=5\tau$ 后)，零状态响应趋近于稳态响应。此时，通过电容的电流为零，电容如同开路一样。

2 全响应 (complete response)

零状态响应: $u_c = U_s - U_s e^{-\frac{t}{RC}}$

电路的初始状态为 $u_C(0_-) = U_0$, 开关在 $t=0$ 时闭合, 求 u_c 。



由KVL得:

$$\begin{cases} RC \frac{du_c}{dt} + u_c = u_s & (t \geq 0) \\ u_c(0_+) = u_c(0_-) = U_0 \end{cases}$$

$$u_c = u_{cp} + u_{ch} = U_s + k e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$u_c(0_+) = U_0, \text{ 可解得 } k = u_c(0_+) - U_s$$

$$u_c = U_s + [U_0 - U_s] e^{-\frac{t}{RC}} \quad (t \geq 0)$$

2 全响应 (complete response)

$$u_c = U_s + [U_0 - U_s]e^{-\frac{t}{RC}} \quad (t \geq 0)$$

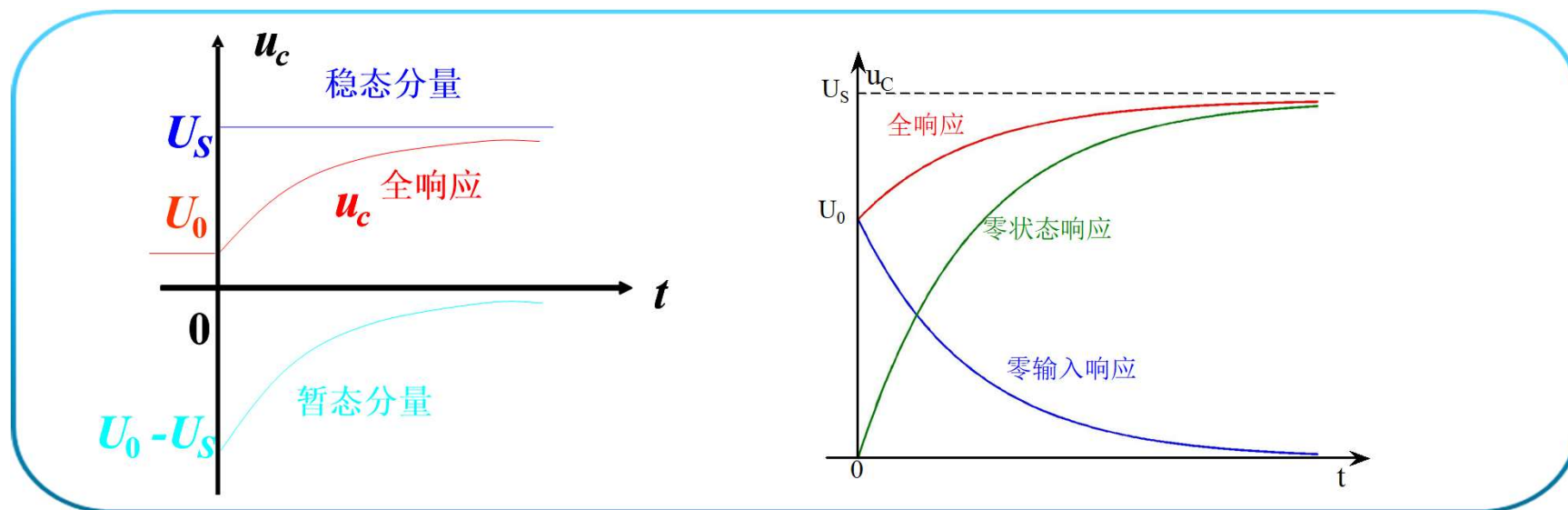
全响应的分解

DC input circuits : $y(t) = [y(0_+) - y(\infty)]e^{-\frac{1}{\tau}t} + y(\infty)$

全响应 = 暂态分量 + 稳态分量

$$y(t) = y(0_+)e^{-\frac{1}{\tau}t} + [y_p(\infty) - y_p(0_+)e^{-\frac{1}{\tau}t}]$$

全响应 = 零输入响应 + 零状态响应



8.3 直流电源激励下的响应

3 三要素法

First - order circuits : $\begin{cases} \frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{\tau} y(t) = f(t) & t > 0 \\ y(0_+) \end{cases}$

$$y(t) = ke^{-\frac{1}{\tau}t} + y_p(t)$$

$$y(t) = [y(0_+) - y_p(0_+)]e^{-\frac{1}{\tau}t} + y_p(t)$$

直流输入



$$y_p(t) = \text{constant} = y_p(0_+) = y(\infty)$$

$$y(t) = [y(0_+) - y(\infty)]e^{-\frac{1}{\tau}t} + y(\infty)$$

三要素：

$$y(0_+)$$

$$y(\infty)$$

$$\tau$$

仅在直流输入一阶电路成立

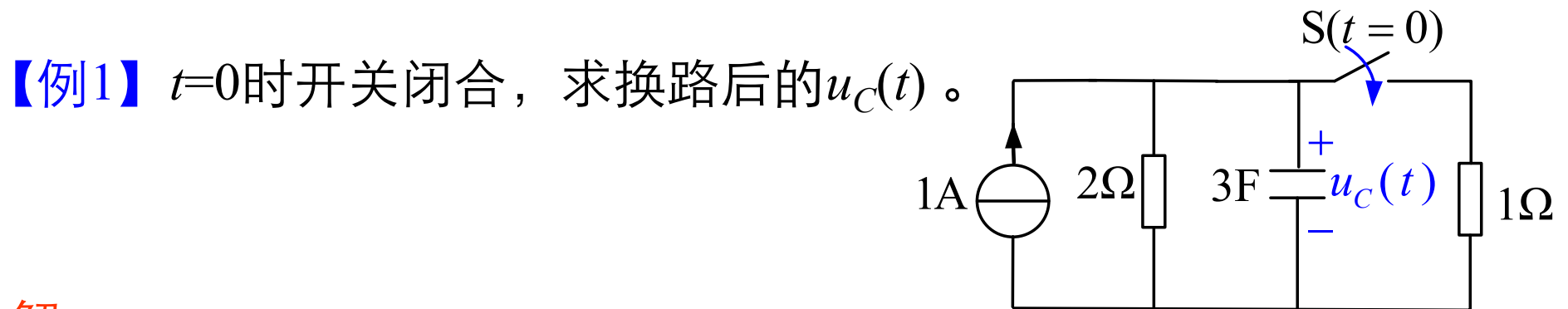
8.3 直流电源激励下的响应

3 三要素法

三要素： $y(0_+)$ $y(\infty)$ τ 仅在直流输入一阶电路成立

三要素的确定

- 初始值 $y(0_+)$ ：用电压为 $u_C(0_+)$ 的直流电压源代替电容、用电流为 $i_L(0_+)$ 的直流电流源代替电感，画出 $t=0_+$ 时刻的等效电路计算 $y(0_+)$
- 稳态值 $y(\infty)$ ：用开路代替电容、短路代替电感画出 $t=\infty$ 时刻的等效电路，计算 $y(\infty)$
- 时间常数 τ ： $\tau=RC$ 或 $\tau=L/R$



解：

1) 求初始值： $u_C(0_+) = u_C(0_-) = 2\text{ V}$

2) 求稳态值： $u_C(\infty) = \frac{2}{2+1} \times 1 = 0.667\text{ V}$

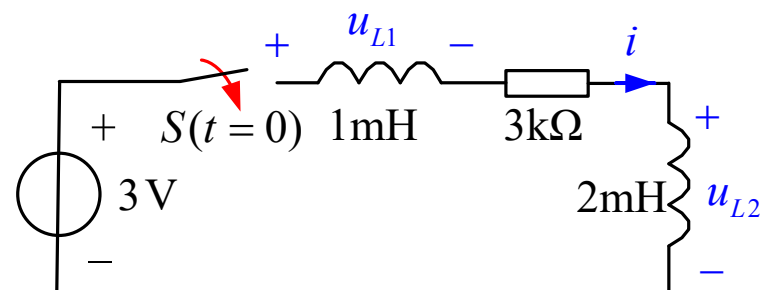
3) 求时间常数： $\tau = RC = \frac{2}{3} \times 3 = 2\text{ s}$

$$\begin{aligned}
 u_C(t) &= u_C(\infty) + [u_C(0^+) - u_C(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} \\
 &= 0.667 + (2 - 0.667)e^{-0.5t} \\
 &= 0.667 + 1.33e^{-0.5t}\text{ V} \quad t \geq 0
 \end{aligned}$$

【例2】： $t=0$ 时 S 闭合，求零状态响应 u_{L1} 与 u_{L2} 。

解：求时间常数

$$\tau = \frac{L_1 + L_2}{R} = 1 \times 10^{-6} \text{ s}$$



求稳态值

$$i_L(\infty) = \frac{U_S}{R} = 1 \text{ mA}$$

$$i = i_L(\infty) + [i_L(0_+) - i_L(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} = 1 - e^{-10^6 t} \text{ mA} \quad (t \geq 0)$$

$$\Rightarrow u_{L1} = L_1 \frac{di}{dt} = e^{-10^6 t} \text{ V} \quad (t > 0)$$

$$u_{L2} = L_2 \frac{di}{dt} = 2e^{-10^6 t} \text{ V} \quad (t > 0)$$

【例 3】： S 打开前电路为零状态。 $t=0$ 时 S 打开， 经过 6 秒后， S 又闭合， 求 $t>0$ 时的 u_C 。

解： $0<t<6s$ 时等效电路如图 (b)：

1 求稳态值： $u_c(\infty) = 1 \times 2 = 2V$

2 求时间常数： $\tau = 2 \times C = 6s$

$$u_C = u_c(\infty)(1 - e^{-\frac{t}{RC}})V$$

$$= 2(1 - e^{-\frac{t}{6}}) \quad V \quad (0 \leq t \leq 6)$$

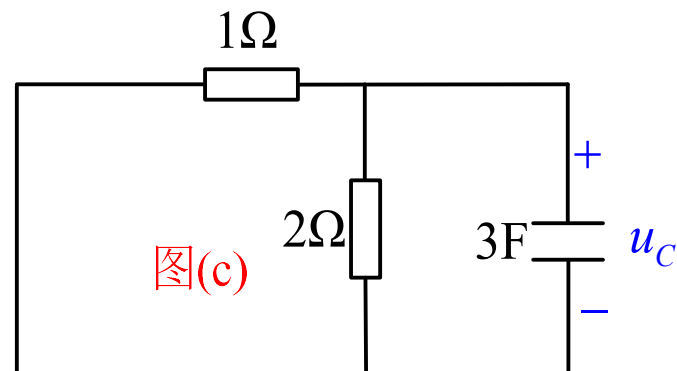
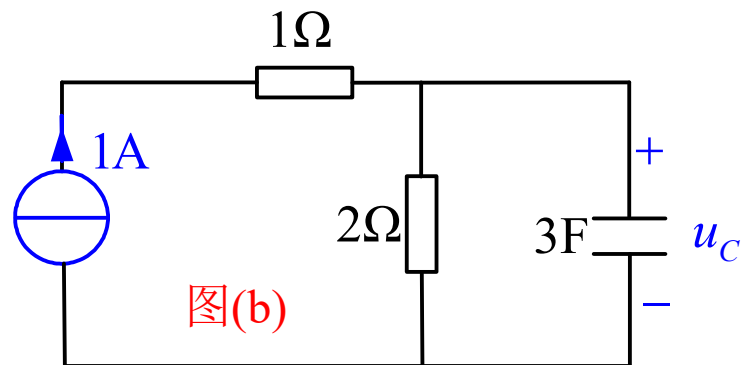
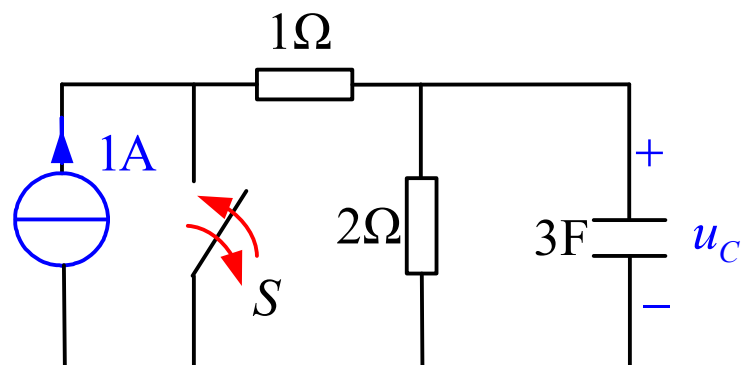
$t>6s$ 时等效电路如图 (c)：

$$u_C(6_+) = u_C(6_-)$$

$$= 2(1 - e^{-\frac{t}{6}}) \Big|_{t=6_-} = 2(1 - e^{-1}) = 1.26 \quad V$$

$$\tau_2 = RC = (1/2) \times C = \frac{2}{3} \times 3 = 2s$$

$$u_C = u_C(6_+)e^{-\frac{t-6}{\tau_2}} = 1.26e^{-\frac{t-6}{2}} \quad V \quad (t \geq 6)$$



【例 3】： S 打开前电路为零状态。 $t=0$ 时 S 打开， 经过 6 秒后， S 又闭合， 求 $t>0$ 时的 u_C 。

解： $0<t<6s$ 时等效电路如图 (b)：

1 求稳态值： $u_c(\infty) = 1 \times 2 = 2V$

2 求时间常数： $\tau = 2 \times C = 6s$

$$u_C = u_c(\infty)(1 - e^{-\frac{t}{RC}})V$$

$$= 2(1 - e^{-\frac{t}{6}}) \quad V \quad (0 \leq t \leq 6)$$

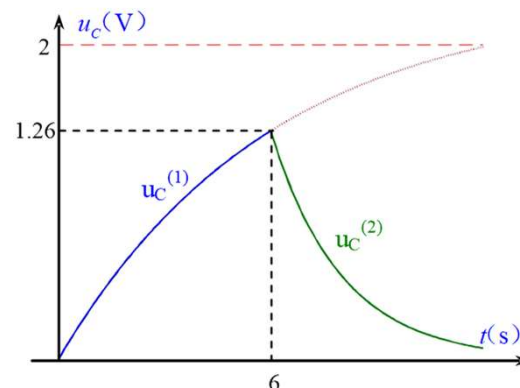
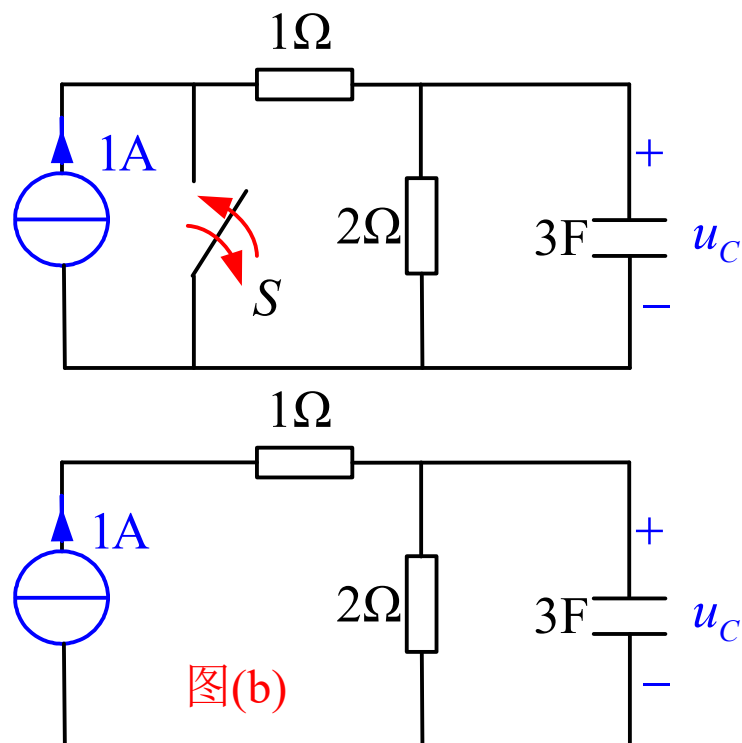
$t > 6s$ 时等效电路如图 (c)：

$$u_C(6_+) = u_C(6_-)$$

$$= 2(1 - e^{-\frac{t}{6}}) \Big|_{t=6_-} = 2(1 - e^{-1}) = 1.26V$$

$$\tau_2 = RC = (1 // 2) \times C = \frac{2}{3} \times 3 = 2s$$

$$u_C = u_C(6_+)e^{-\frac{t-6}{\tau_2}} = 1.26e^{-\frac{t-6}{2}} \quad V \quad (t \geq 6)$$



【练习】：计算 u_c ($t > 0$) 。

三要素法

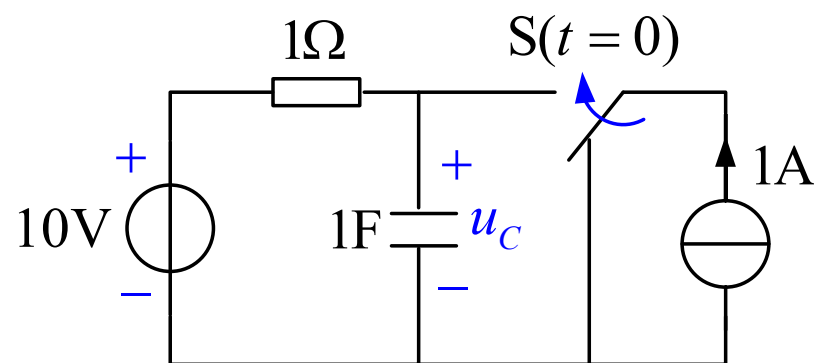
求初始值： $u_c(0_+) = 10V$

求稳态值： $u_c(\infty) = 11V$

求时间常数： $\tau = 1 \times 1 = 1s$

$$u_c(t) = [u_c(0_+) - u_c(\infty)] e^{-\frac{1}{RC}t} + u_c(\infty)$$

$$u_c(t) = (10 - 11)e^{-t} + 11V \quad (t \geq 0)$$



【例 4】：计算 u_{ab} ($t > 0$) .

$$i_L(0_-) = i_L(0_+) = 1A$$

$$i_L(\infty) = 0.5A$$

$$\tau_L = 0.5s$$

$$i_L(t) = [0.5 + (1 - 0.5)e^{-2t}]A$$

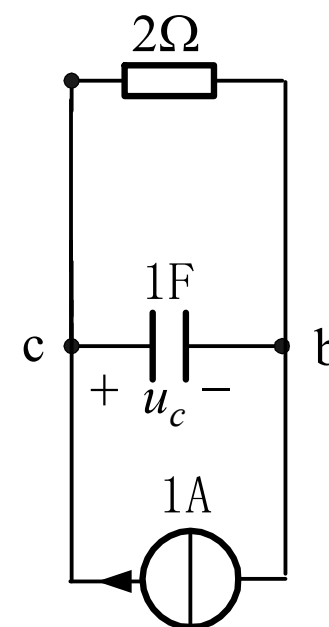
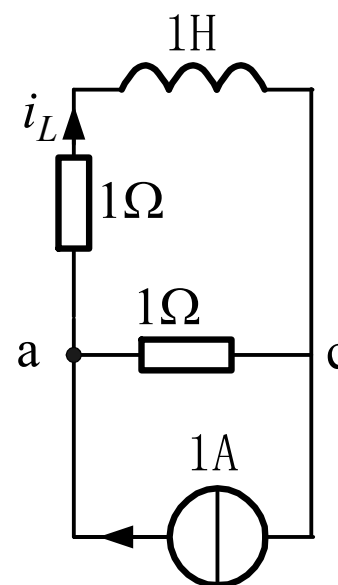
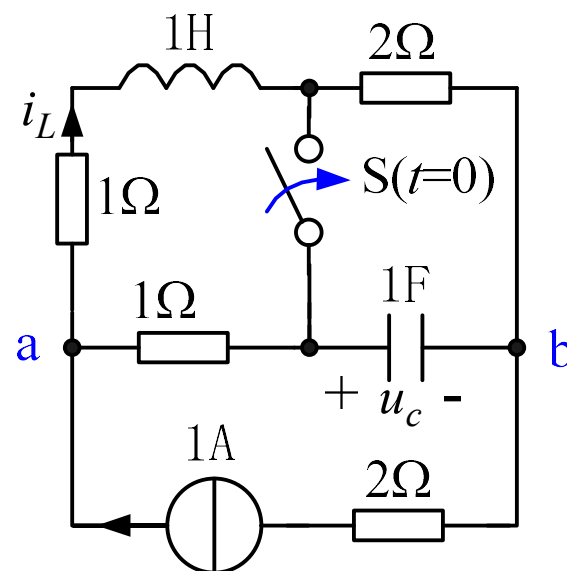
$$u_C(0_-) = u_C(0_+) = 3V$$

$$u_C(\infty) = 2V$$

$$\tau_C = 2s$$

$$u_C(t) = [2 + (3 - 2)e^{-0.5t}]V$$

$$\begin{aligned} u_{ab}(t) &= 1 \times (1 - i_L) + u_C \\ &= (2.5 - 0.5e^{-2t} + e^{-0.5t})V \end{aligned}$$



【例 5】： 电容 C 上无电荷； $t=0$ 时 S_1 闭合，求 $u_C(t)$ ，又当 $t=2\text{s}$ 时， S_2 又闭合，求 $u_C(t)$ 。

解： $0 < t < 2$ 等效电路如图(a)所示

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0 \text{ V}$$

$$u_C(\infty) = 6 \text{ V}$$

$$\tau_C = 0.5 \times 2 = 1 \text{ s}$$

$$u_C(t) = 6 - 6e^{-t} \text{ V} \quad (0 \leq t \leq 2)$$

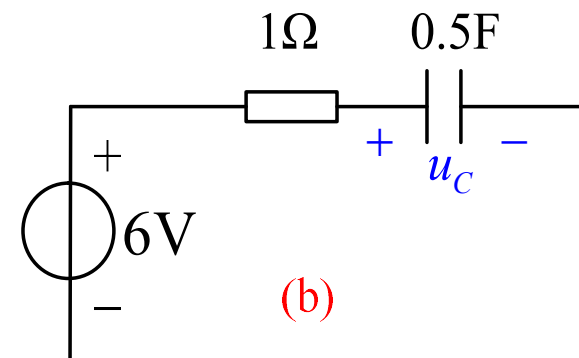
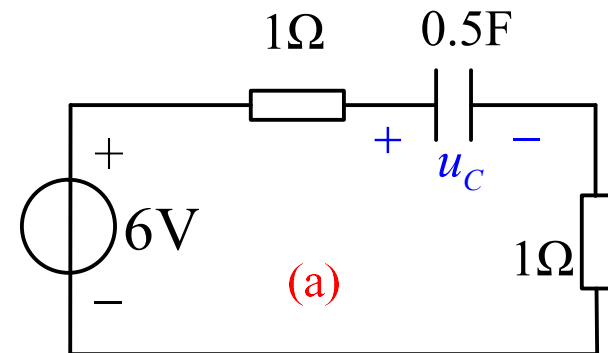
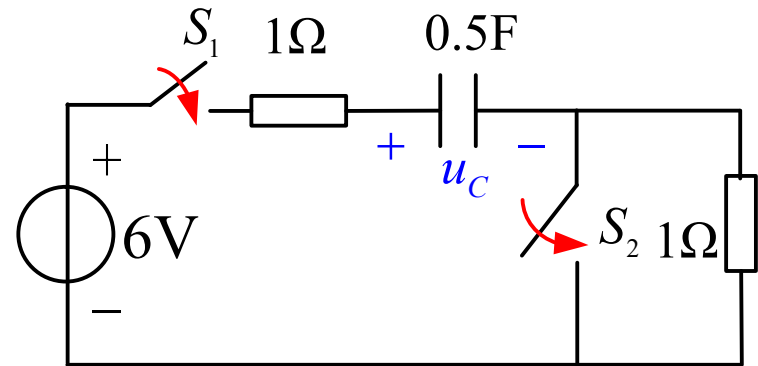
$t > 2$ 等效电路如图(b)所示：

$$u_C(2_+) = u_C(2_-) = 6 - 6e^{-2} = 5.19 \text{ V}$$

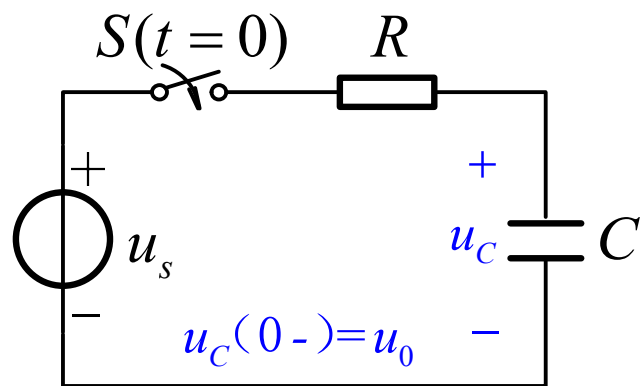
$$u_C(\infty) = 6 \text{ V}$$

$$\tau_C = 0.5 \times 1 = 0.5 \text{ s}$$

$$\begin{aligned} u_C &= u_C(\infty) + [u_C(2_+) - u_C(\infty)]e^{-\frac{t-2}{\tau}} \\ &= 6 + (5.19 - 6)e^{-2(t-2)} \quad (t \geq 2) \end{aligned}$$



* (了解) 8.4 正弦电源激励下的RC电路



$$\begin{cases} RC \frac{du_C}{dt} + u_C = u_s & t > 0 \\ u_C(0_+) = u_C(0_-) = U_0 \end{cases}$$

$$u_C = ke^{-\frac{1}{RC}t} + A_m \cos(\omega t + \theta)$$

$$u_s(t) = U_m \cos(\omega t + \phi)$$

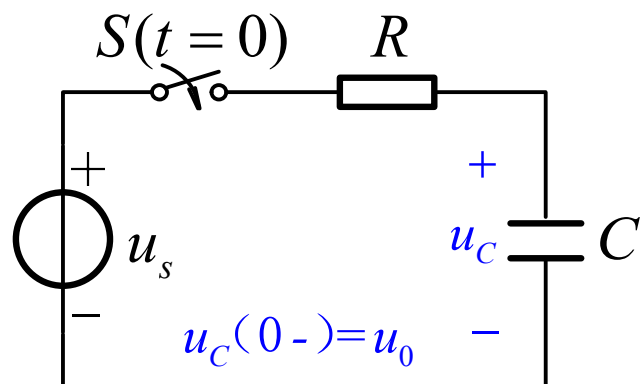
$$u_{CP} = A_m \cos(\omega t + \theta) \quad \begin{cases} A_m = \frac{U_m}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \\ \theta = \phi - \arctan \omega RC \end{cases}$$

$$u_C = (U_0 - A_m \cos \theta) e^{-\frac{1}{RC}t} + A_m \cos(\omega t + \theta)$$

- 暂态分量， 5τ 之后衰减到 0；
- 稳态解是与电源同频率，幅值和初相恒定的正弦函数。

2. 零状态响应分析:

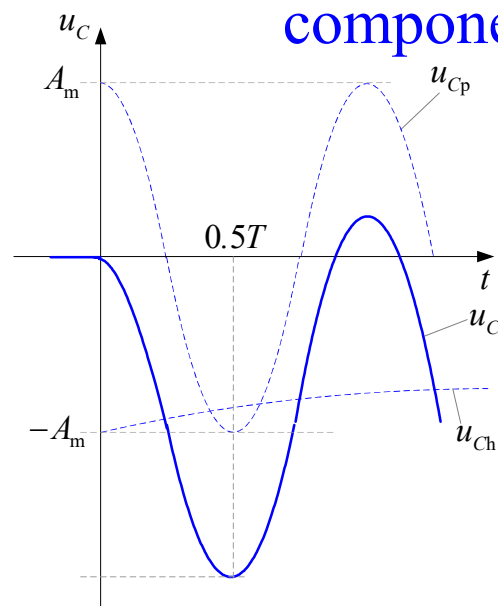
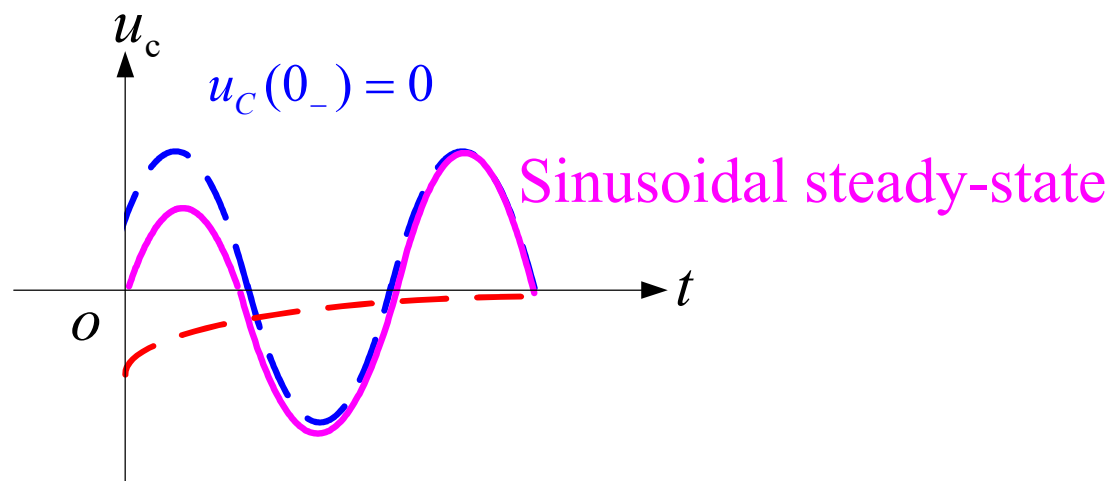
$$u_C = (U_0 - A_m \cos \theta) e^{-\frac{1}{RC}t} + A_m \cos(\omega t + \theta)$$



$$u_C = (-A_m \cos \theta) e^{-\frac{1}{RC}t} + A_m \cos(\omega t + \theta)$$

Transient
component

Steady-state
component



- 设 $0 < \theta < 90^\circ$ ，且 5τ 与 T 接近，则电路经过一个周期达到稳定；
- 设 $\theta = 0^\circ$ ，且 $5\tau \gg T$ ，则电路经过多个周期达到稳定；在 $0.5T$ 附近，电容电压最大，暂态最高电压接近 $2A_m$ 。称为暂态过电压现象。

* (自学) 8.5 含运算放大器电路的一阶电路

例：求 $t > 0$ 的响应 u_o

解：

1)、求初始值： $u_C(0^+) = u_C(0^-) = 0\text{ V}$

2)、求稳态值：

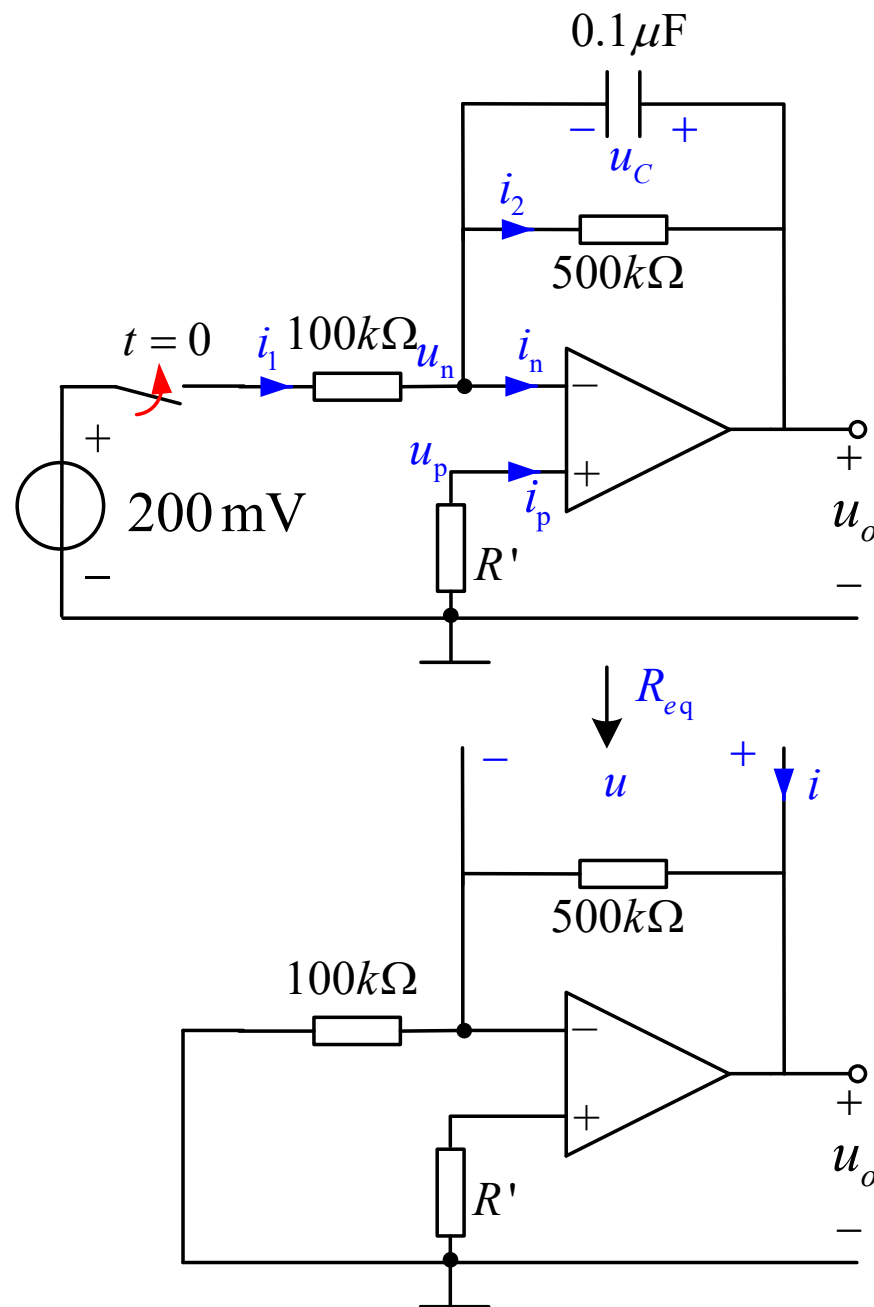
$$u_C(\infty) = -\frac{500}{100} \times 0.2 = -1\text{ V}$$

3)、求时间常数：

$$R_{eq} = \frac{u}{i} = 500\text{ k}\Omega$$

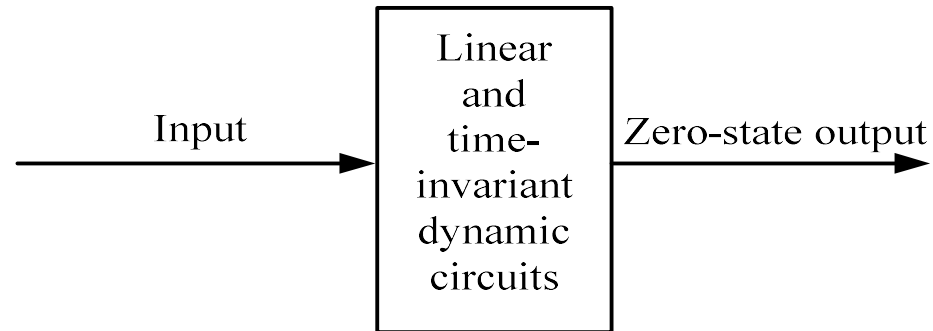
$$\tau = R_{eq} C = 500 \times 10^3 \times 0.1 \times 10^{-6} = 0.05\text{ s}$$

$$\begin{aligned} u_C(t) &= u_C(\infty) + [u_C(0_+) - u_C(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} \\ &= -1 + e^{-20t} \quad (t \geq 0) \end{aligned}$$



8. 6线性非时变特性

零状态响应与激励间的关系



$$\begin{array}{ccc} x_1(t) & \longrightarrow & y_1(t) \\ x_2(t) & \longrightarrow & y_2(t) \end{array}$$

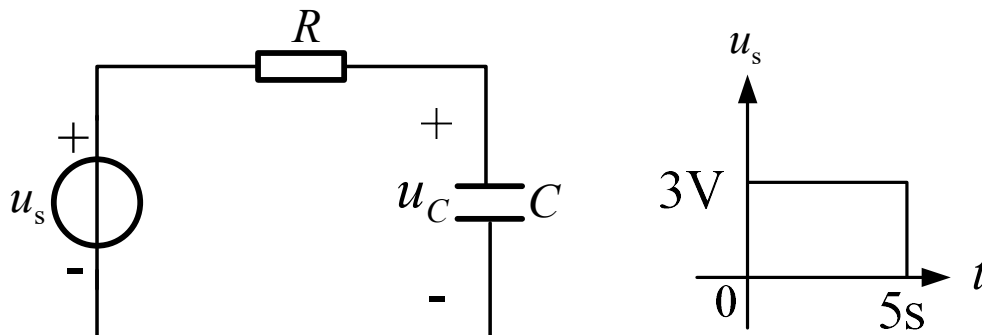
8.6.1线性特性 $k_1 x_1(t) + k_2 x_2(t) \longrightarrow k_1 y_1(t) + k_2 y_2(t)$

8.6.2非时变特性 $x_1(t - t_0) \longrightarrow y_1(t - t_0)$

$$\begin{array}{ccc} \frac{d x_1(t)}{d t} & \longrightarrow & \frac{d y_1(t)}{d t} \\ \int_{-\infty}^t x_1(t) d t & \longrightarrow & \int_{-\infty}^t y_1(t) d t \end{array}$$

8. 6线性非时变特性

【例1】：Find the zero-state response u_c .



设 $u_s = \varepsilon(t)V$ 时, $u_c = s(t)$

$$u_c(0_-) = 0, \quad u_c(\infty) = \varepsilon(t), \quad \tau = RC$$

$$s(t) = [(1 - e^{-\frac{t}{RC}})\varepsilon(t)]V$$

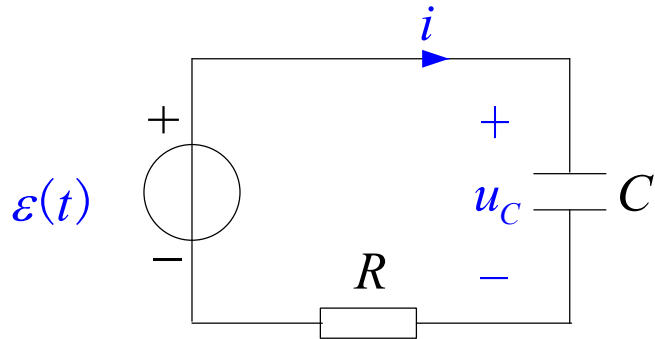
由非时变特性

$$u_s = [3\varepsilon(t) - 3\varepsilon(t-5)]V \quad u_c = 3s(t) - 3s(t-5)$$

$$u_c = [3(1 - e^{-\frac{t}{RC}})\varepsilon(t) - 3(1 - e^{-\frac{t-5}{RC}})\varepsilon(t-5)]V$$

8. 6线性非时变特性

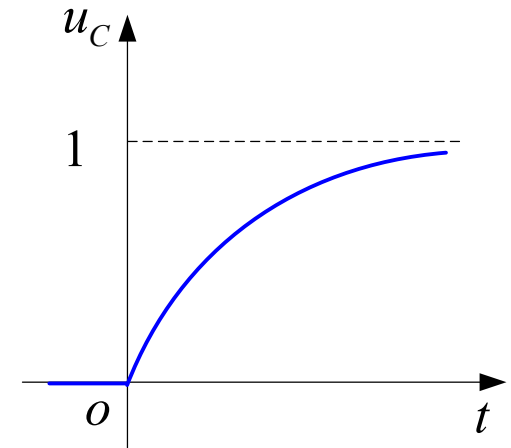
8.6.3单位阶跃响应与单位冲激响应



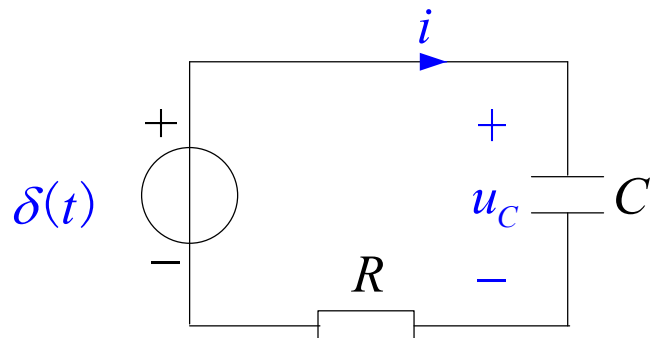
$s(t)$:

$$u_C = (1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \varepsilon(t)$$

$$i(t) = \frac{1}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \varepsilon(t)$$



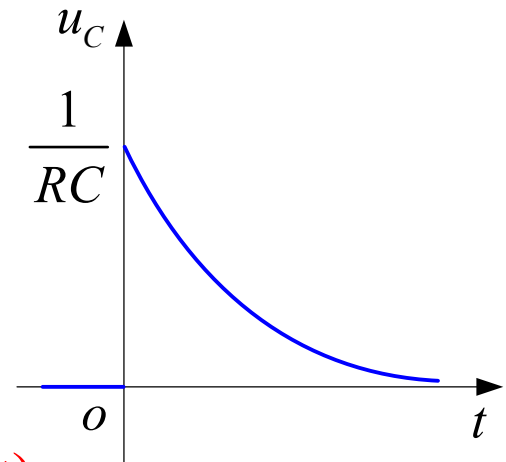
$$\delta(t) = \frac{d\varepsilon(t)}{dt}$$



$h(t)$:

$$u_C(t) = \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} \varepsilon(t)$$

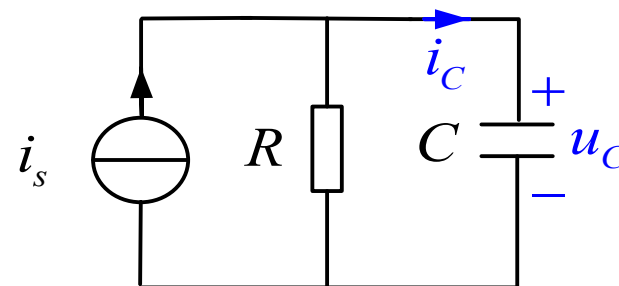
$$i(t) = -\frac{1}{R^2 C} e^{-\frac{t}{RC}} \varepsilon(t) + \frac{1}{R} \delta(t)$$



【例1】已知 $u_c(0^-)=0$ ，求： $i_s(t)$ 为单位冲激激励时电路响应 $u_c(t)$ 和 $i_c(t)$ 。

解求单位阶跃响应 令 $i_s(t)=\varepsilon(t)$

$$u_c(t) = R(1 - e^{-\frac{t}{RC}})\varepsilon(t) \quad i_c = e^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)$$



再求单位冲激响应 令 $i_s(t)=\delta(t)$

$$\begin{aligned} u_c &= \frac{d}{dt} R(1 - e^{-\frac{t}{RC}})\varepsilon(t) = R(1 - e^{-\frac{t}{RC}})\delta(t) + \frac{1}{C} e^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t) \\ &= \frac{1}{C} e^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t) \end{aligned}$$

0

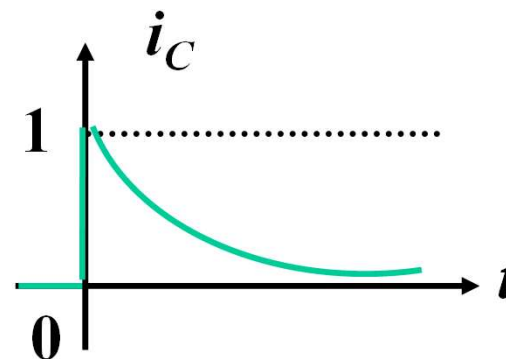
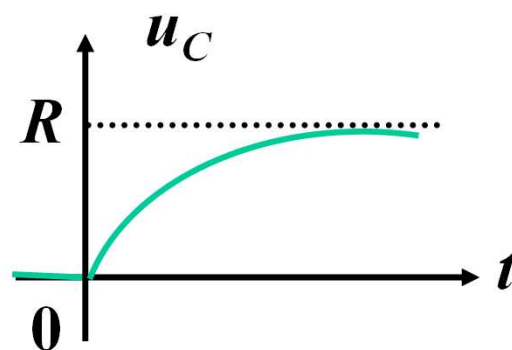
 $f(t)\delta(t)$
 $= f(0)\delta(t)$

$$\begin{aligned} i_c &= \frac{d}{dt} [e^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)] = e^{-\frac{t}{RC}}\delta(t) - \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t) \\ &= \delta(t) - \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t) \end{aligned}$$

$$u_C(t) = R(1 - e^{-\frac{t}{RC}})\varepsilon(t)$$

$$i_c = e^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)$$

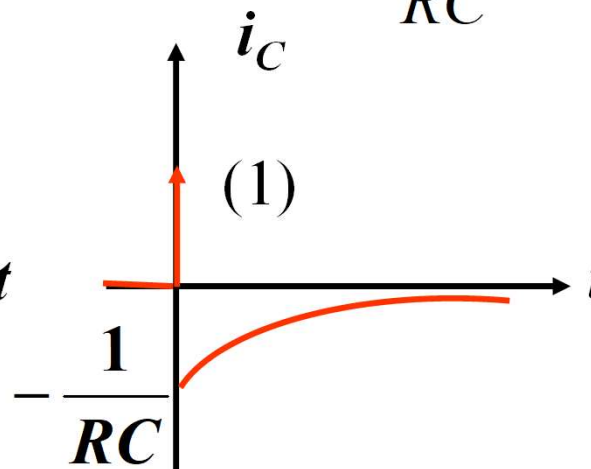
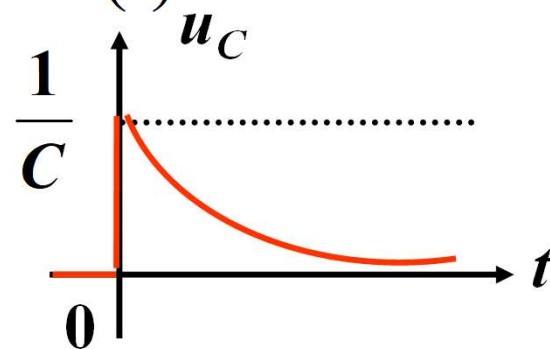
阶跃响应



$$u_C = \frac{1}{C}e^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)$$

$$i_c = \delta(t) - \frac{1}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)$$

冲激响应



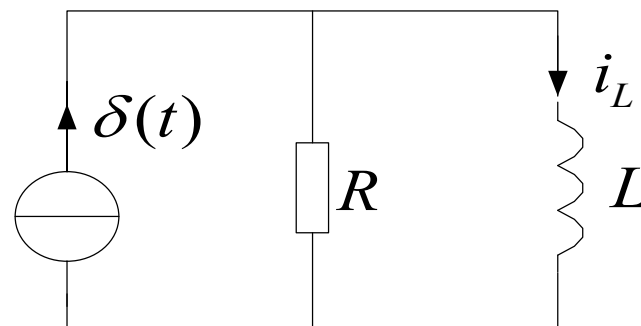
【练习】：Find the impulse response i_L .

由阶跃响应获得冲激响应 设 $i_s = \varepsilon(t)A$

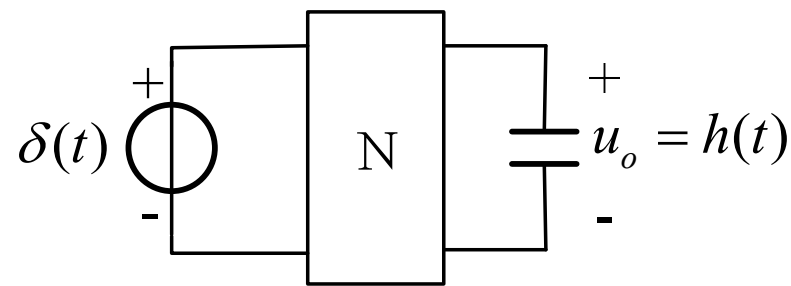
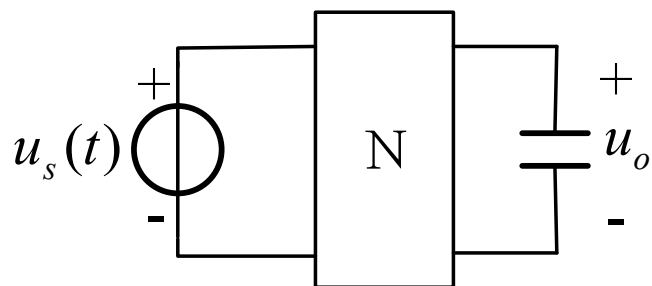
$$i_L(0_+) = 0, \quad i_L(\infty) = \varepsilon(t), \quad \tau = \frac{L}{R}$$

$$\begin{aligned} s(t) = i_L(t) &= i_L(\infty) - i_L(\infty)e^{-\frac{t}{\tau}} \\ &= (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})\varepsilon(t) \end{aligned}$$

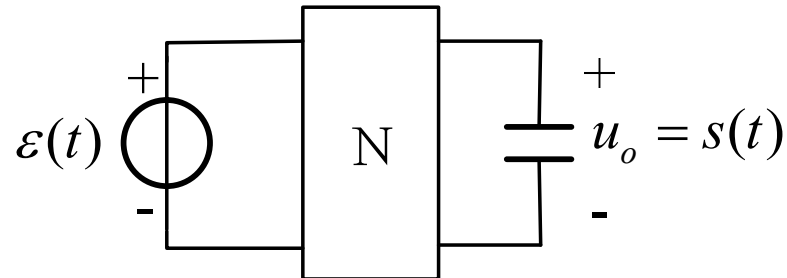
$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{ds(t)}{dt} = (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})\delta(t) + \frac{1}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}\varepsilon(t) \\ &= \frac{1}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}\varepsilon(t) \end{aligned}$$



【例2】：不含独立电源的线性时不变网络N的零输入响应为 $e^{-t}\text{V}$ ；原始储能不变，电压源 $u_s(t) = \delta(t)\text{V}$ 激励下的全响应为 $3e^{-t}\text{V}$ 。试确定 $u_s(t) = \varepsilon(t) - \varepsilon(t-1)\text{V}$ 下的零状态响应。



$$h(t) = (3e^{-t} - e^{-t})\varepsilon(t) = 2e^{-t}\varepsilon(t)$$

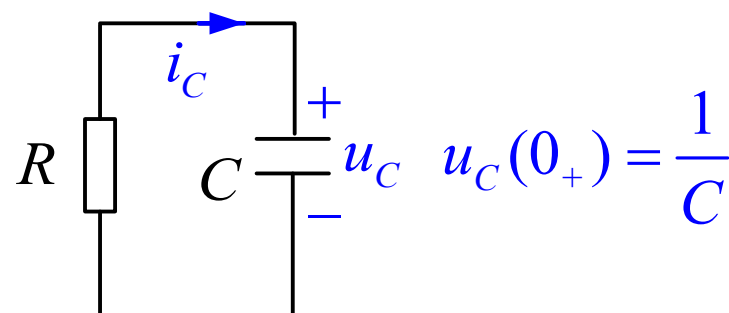
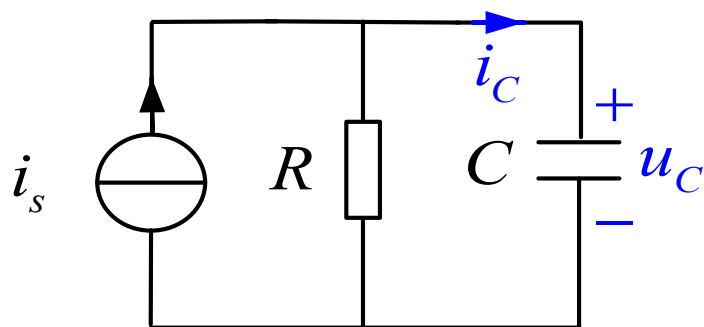


$$s(t) = \int_{-\infty}^t h(t)dt = \int_{-\infty}^t 2e^{-t}\varepsilon(t)dt = \left(\int_0^t 2e^{-t}dt\right)\varepsilon(t) = (2 - 2e^{-t})\varepsilon(t)$$

$$u_o(t) = (2 - 2e^{-t})\varepsilon(t) - [2 - 2e^{-(t-1)}]\varepsilon(t-1)$$

* (自学) 8.7 冲击响应计算

分二个时间段来考虑冲激响应



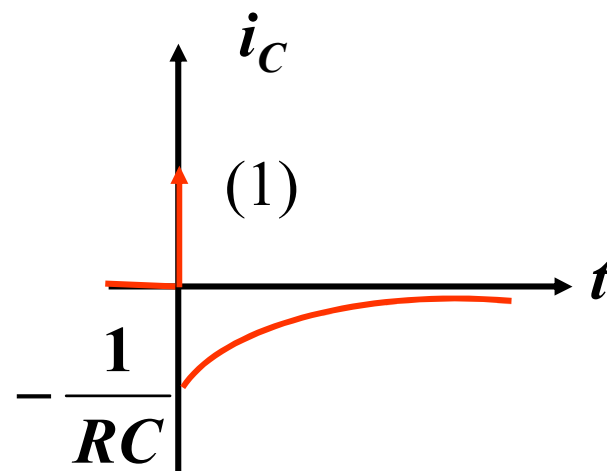
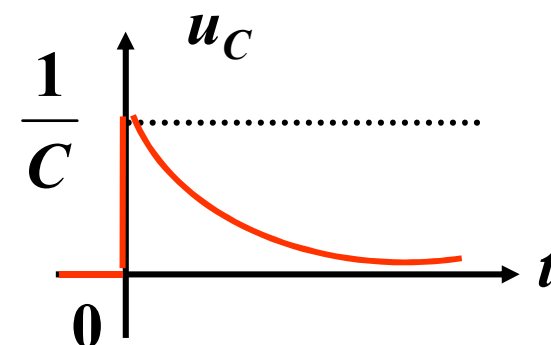
(1). t 在 $0_- \sim 0_+$ 间 $i_c = \delta(t)$

$$u_c(0_+) = u_c(0_-) + \frac{1}{C} \int_{0_-}^{0_+} i_c dt = \frac{1}{C}$$

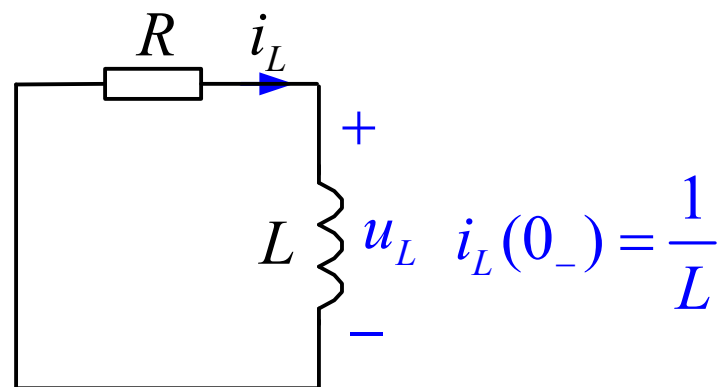
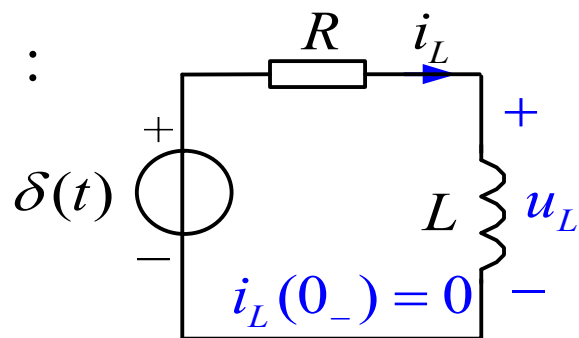
(2). $t > 0^+$ 零输入响应 (RC 放电)

$$u_c = \frac{1}{C} e^{-\frac{t}{RC}} \quad t \geq 0^+ \quad i_c = -\frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} \quad t \geq 0^+$$

$$u_c = \frac{1}{C} e^{-\frac{t}{RC}} \varepsilon(t), \quad i_c = \delta(t) - \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} \varepsilon(t)$$



【例2】：



(1). t 在 $0_- \sim 0_+$ 间 $u_L = \delta(t)$

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) + \frac{1}{L} \int_{0_-}^{0_+} u_L dt = \frac{1}{L}$$

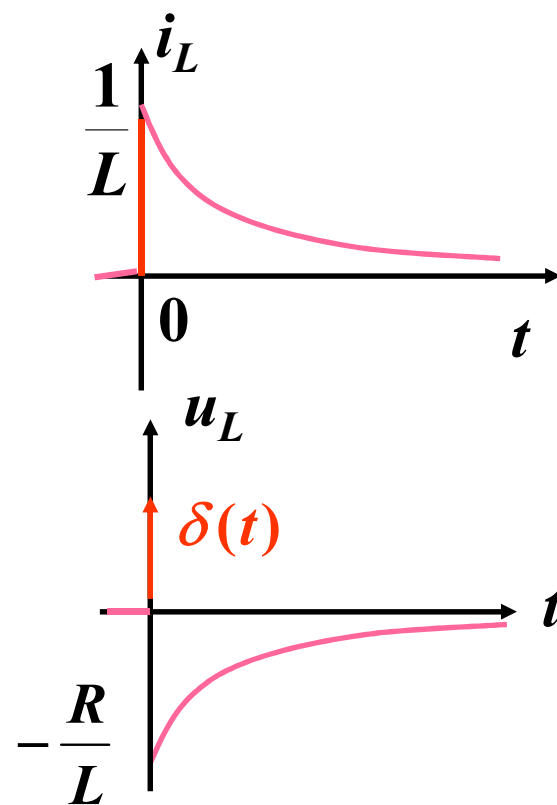
(2). $t > 0_+$ 零输入响应 $\tau = \frac{L}{R}$

$$i_L = \frac{1}{L} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad t \geq 0^+$$

$$u_L = -i_L R = -\frac{R}{L} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad t \geq 0^+$$

$$i_L = \frac{1}{L} e^{-\frac{t}{\tau}} \varepsilon(t)$$

$$u_L = \delta(t) - \frac{R}{L} e^{-\frac{t}{\tau}} \varepsilon(t)$$



计划学时：5学时； 课后学习15学时

作业：

8-2、8-4/ 零输入响应

8-13/ 零状态响应

8-18 /阶跃响应

8-31 /三要素法

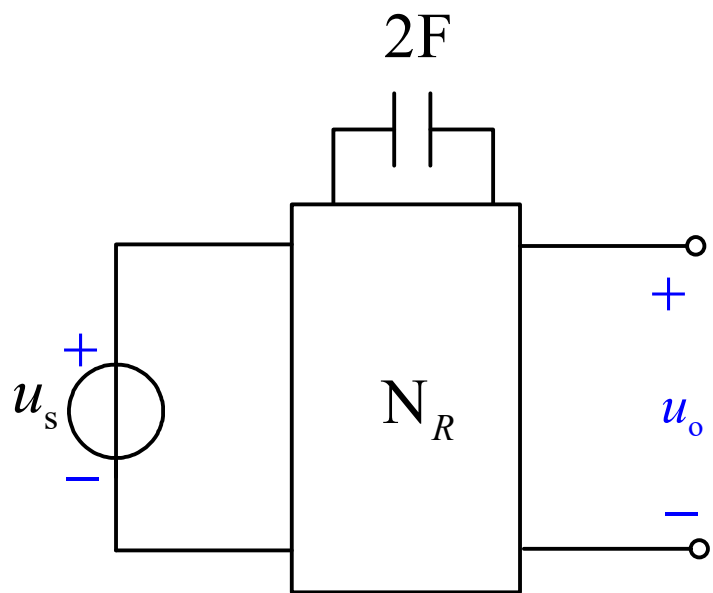
8-41 /线性时不变

8-48/冲激响应

【8-31】： N_R 为线性无源电阻网络，电容的原始储能为0，

当 $u_s = \varepsilon(t)V$ 时， $u_o = (\frac{1}{2} + \frac{1}{8}e^{-\frac{1}{4}t})\varepsilon(t)V$ 。电压源不变，电容换成

2H 的电感。求零状态响应 u_o 。



解：求时间常数

$$RC = 4s \quad R = 2\Omega \quad \tau = \frac{L}{R} = 1s$$

原电路 $u_o(\infty) = \frac{1}{2}V \quad u_o(0_+) = \frac{1}{8} + \frac{1}{2} = \frac{5}{8}V$

电容换为电感后

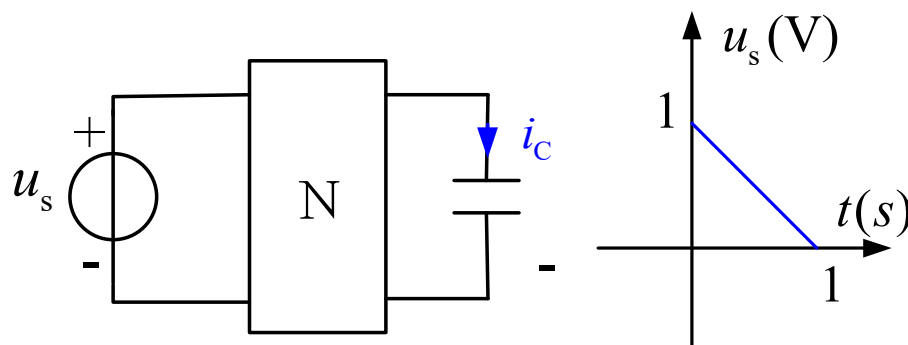
电感电路初态，等效为电容电路的稳态
电感电路稳态，等效为电容电路的初态

$$u_o(0_+) = \frac{1}{2}V \quad u_o(\infty) = \frac{5}{8}V$$

换为电感后零状态响应 u_o 。

$$u_o = [\frac{5}{8} + (\frac{1}{2} - \frac{5}{8})e^{-t}]\varepsilon(t)V$$

【8-41】：不含独立电源的线性时不变网络N的单位阶跃响应为 $i_C = e^{-t} \varepsilon(t) \text{A}$ ，求 u_s 为图示波形时零状态响应。



$$u_s = -(t-1)[\varepsilon(t) - \varepsilon(t-1)] \text{V}$$

$$= \varepsilon(t) - t\varepsilon(t) + (t-1)\varepsilon(t-1)$$

当 $u_s' = \varepsilon(t)$ $i_C' = s(t) = e^{-t} \varepsilon(t) \text{A}$

当 $u_s'' = -t\varepsilon(t)$ 求导得 $\frac{du_s''}{dt} = -\varepsilon(t)$

$$i_C'' = \int_{0-}^t [-s(t)] dt = \int_{0-}^t [-e^{-t} \varepsilon(t)] dt = \int_{0-}^t [(-e^{-t}) dt \varepsilon(t)] = (e^{-t} - 1) \varepsilon(t)$$

当 $u_s''' = (t-1)\varepsilon(t-1)$ 求导得 $\frac{du_s'''}{dt} = (t-1)\delta(t-1) + \varepsilon(t-1) = \varepsilon(t-1)$

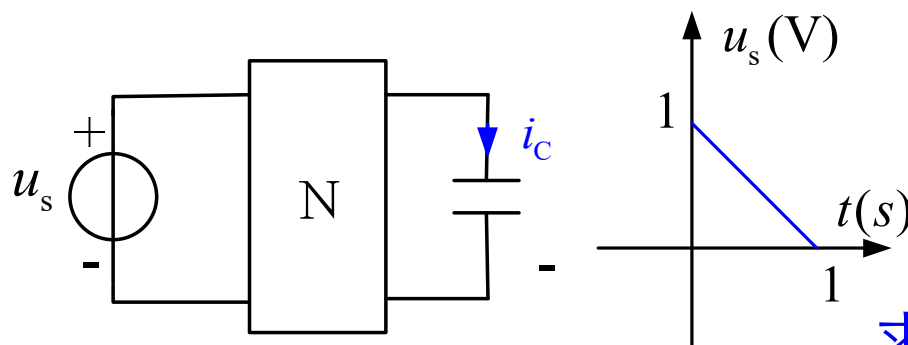
$$i_C''' = \int_{0-}^t [s(t-1)] dt = \int_{0-}^t [e^{-(t-1)} \varepsilon(t-1)] dt = \int_1^t [e^{-(t-1)} dt \varepsilon(t-1)]$$

$$= (1 - e^{-(t-1)}) \varepsilon(t-1)$$

由线性性得

$$i_C = i_C' + i_C'' + i_C''' = e^{-t} \varepsilon(t) + (e^{-t} - 1) \varepsilon(t) + (1 - e^{-(t-1)}) \varepsilon(t-1)$$

【8-41】：不含独立电源的线性时不变网络N的单位阶跃响应为 $i_C = e^{-t} \varepsilon(t) \text{A}$ ，求 u_s 为图示波形时零状态响应。



$$u_s = -(t-1)[\varepsilon(t) - \varepsilon(t-1)] \text{V}$$

$$= \varepsilon(t) - t\varepsilon(t) + (t-1)\varepsilon(t-1)$$

求导得 $\frac{du_s}{dt} = \delta(t) - \varepsilon(t) + \varepsilon(t-1)$

方法2

当 $u_s = \varepsilon(t)$ $i_C = s(t) = e^{-t} \varepsilon(t) \text{A}$

当 $u_s = \delta(t)$ $i_C = h(t) = e^{-t} \delta(t) - e^{-t} \varepsilon(t)$ $= \delta(t) - e^{-t} \varepsilon(t)$

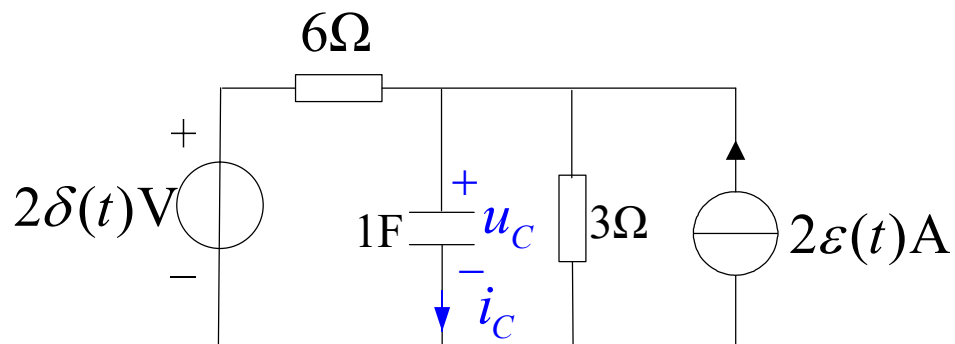
$$i_C = \int_{0-}^t [\delta(t) - e^{-t} \varepsilon(t) - e^{-t} \varepsilon(t) + e^{-(t-1)} \varepsilon(t-1)] dt$$

$$= \varepsilon(t) + 2(e^{-t} - 1)\varepsilon(t) + (1 - e^{-(t-1)})\varepsilon(t-1)$$

$$= 2e^{-t} \varepsilon(t) - \varepsilon(t) + (1 - e^{-(t-1)})\varepsilon(t-1) \text{A}$$

【8-48】：求零状态响应 u_C 、 i_C 。

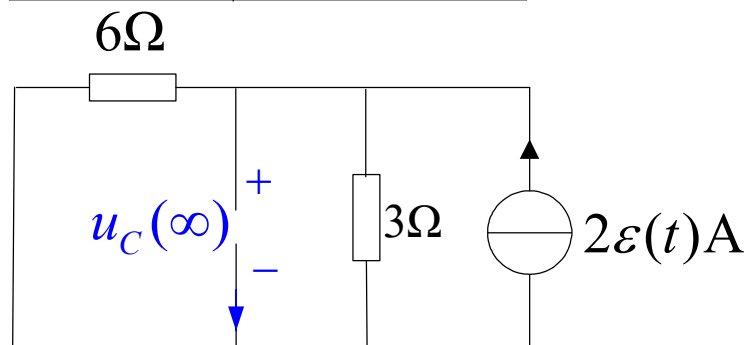
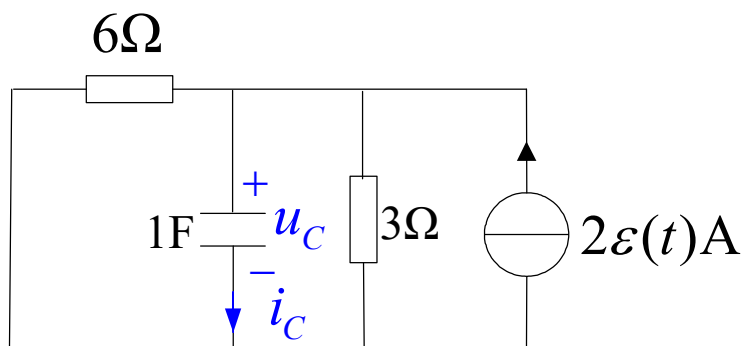
叠加定理， $i_s=2\varepsilon(t)$ A单独作用时：



$$u_C(\infty) = 4V \quad \tau = 1 \times 2 = 2s$$

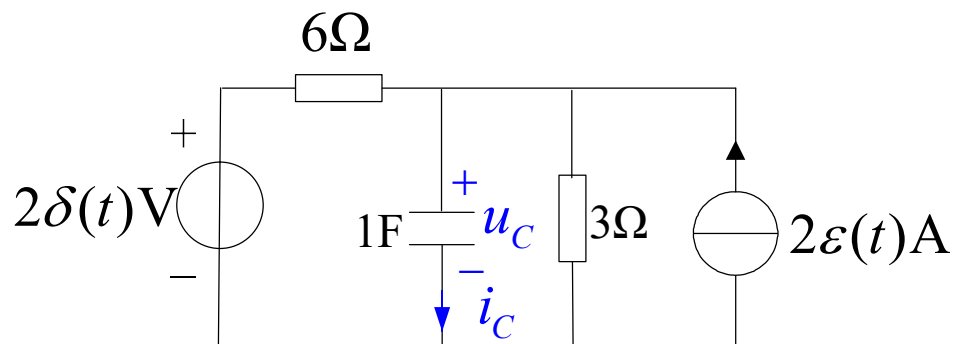
$$u_C'(t) = 4(1 - e^{-0.5t}) \varepsilon(t) \text{ V}$$

$$i_C'(t) = C \frac{du_C}{dt} = 2e^{-0.5t} \varepsilon(t)$$



【8-48】：求零状态响应 u_C 、 i_C 。

叠加定理， $i_s=2\varepsilon(t)$ A单独作用时：



$$u_C(\infty) = 4\text{V} \quad \tau = 1 \times 2 = 2\text{s}$$

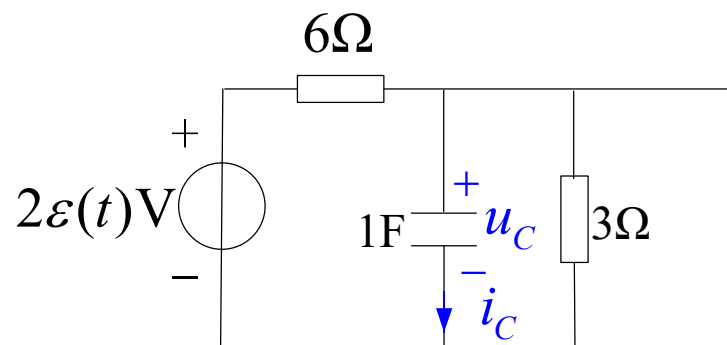
$$u_C'(t) = 4(1 - e^{-0.5t}) \varepsilon(t) \text{ V}$$

$$i_C'(t) = C \frac{du_C}{dt} = 2e^{-0.5t} \varepsilon(t)$$

电压源 $2\delta(t)$ 单独作用，先计算 $u_s=2\varepsilon(t)$ 的阶跃响应：

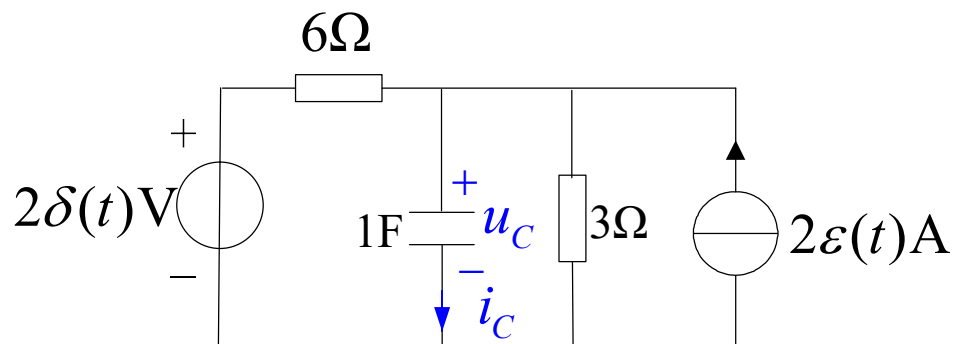
$$u_C(\infty) = \frac{2}{3} \text{V} \quad \tau = 1 \times 2 = 2\text{s} \quad u_C(t) = \frac{2}{3}(1 - e^{-0.5t}) \varepsilon(t) \text{ V}$$

$$i_C(t) = C \frac{du_C}{dt} = \frac{1}{3} e^{-0.5t} \varepsilon(t)$$



【8-48】：求零状态响应 u_C 、 i_C 。

叠加定理， $i_s=2\varepsilon(t)$ A单独作用时：



$$u_C(\infty) = 4V \quad \tau = 1 \times 2 = 2s$$

$$u_c'(t) = 4(1 - e^{-0.5t}) \varepsilon(t) \text{ V}$$

$$i_c'(t) = C \frac{du_C}{dt} = 2e^{-0.5t} \varepsilon(t)$$

电压源 $2\delta(t)$ 单独作用，先计算 $u_s=2\varepsilon(t)$ 的阶跃响应：

$$u_C(\infty) = \frac{2}{3}V \quad \tau = 1 \times 2 = 2s \quad u_c(t) = \frac{2}{3}(1 - e^{-0.5t}) \varepsilon(t) \text{ V}$$

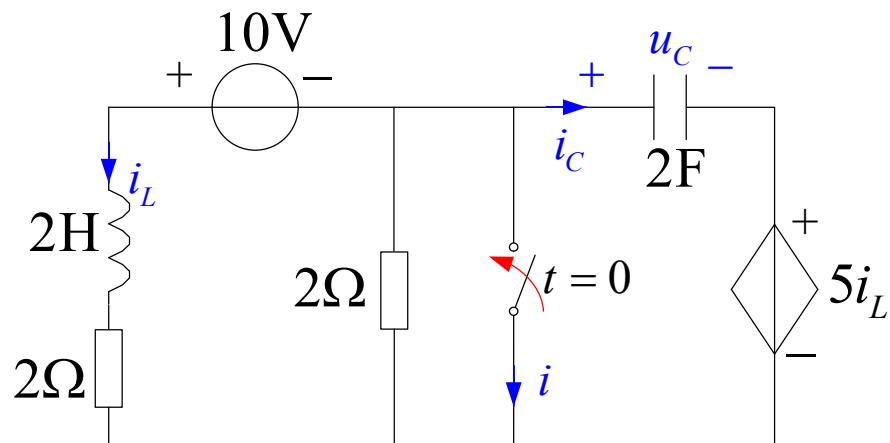
$$i_c(t) = C \frac{du_C}{dt} = \frac{1}{3}e^{-0.5t} \varepsilon(t)$$

$$i_c''(t) = \frac{1}{3}\delta(t) - \frac{1}{6}e^{-0.5t} \varepsilon(t)$$

求导得
$$u_c''(t) = \frac{d[\frac{2}{3}(1 - e^{-0.5t}) \varepsilon(t)]}{dt} = \frac{1}{3}e^{-0.5t} \varepsilon(t)$$

$$u_c = u_c' + u_c'' = (4 - \frac{11}{3}e^{-0.5t}) \varepsilon(t) \text{ V} \quad i_c = i_c' + i_c'' = \frac{1}{3}\delta(t) + \frac{11}{6}e^{-0.5t} \varepsilon(t)$$

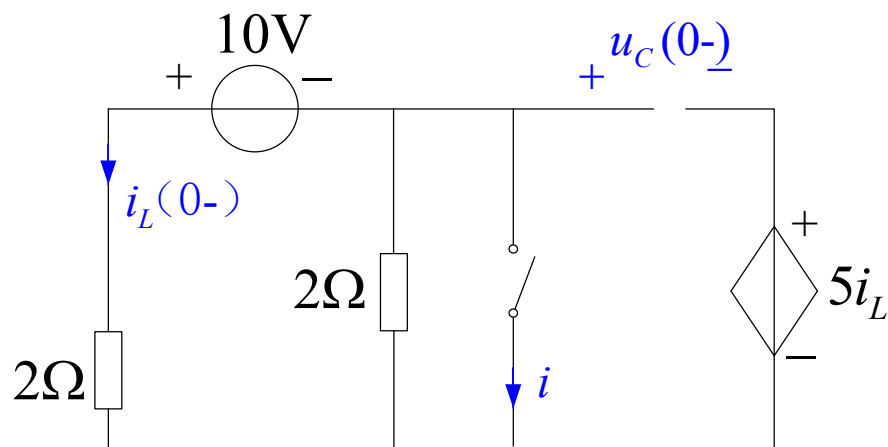
【8-60】 (1)求 $t>0$ 时的响应 i_L (2)求 $t>0$ 时的响应 i (3)求 $t=0$ 时的响应 i 。



(1)求 $t>0$ 时的响应 i_L

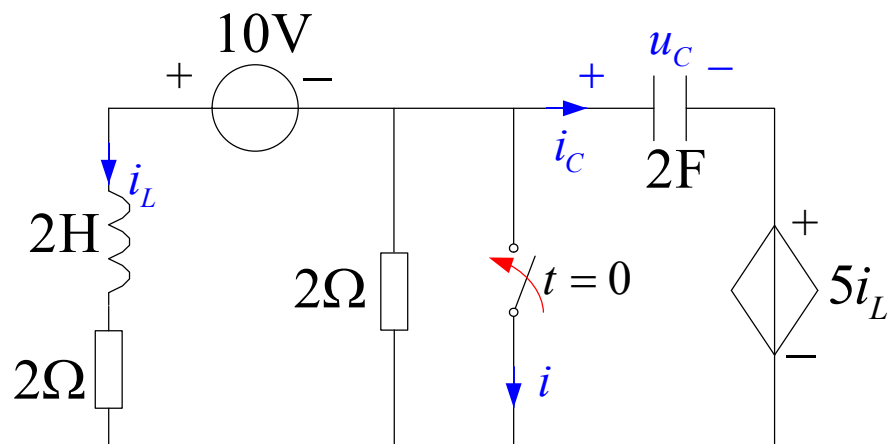
求初始值: $i_L(0^+) = i_L(0^-) = 2.5\text{A}$

$$u_C(0^-) = -2 \times 2.5 - 5 \times 2.5 = -17.5\text{V}$$



0₋等效电路

【8-60】 (1)求 $t>0$ 时的响应 i_L (2)求 $t>0$ 时的响应 i (3)求 $t=0$ 时的响应 i 。



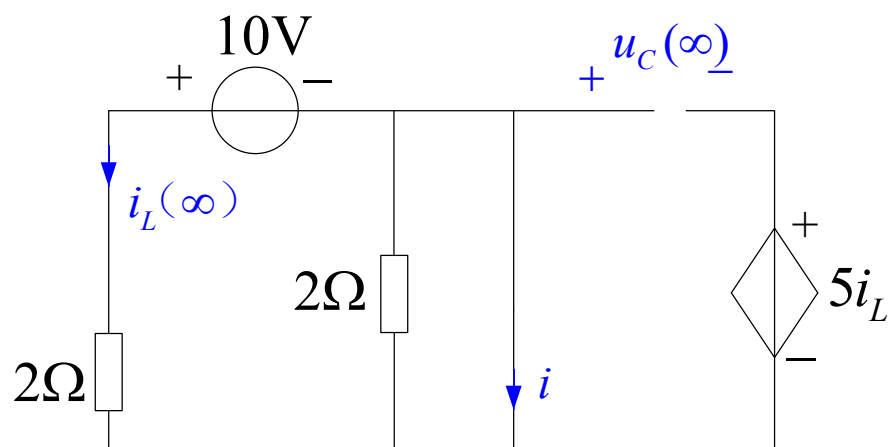
(1)求 $t>0$ 时的响应 i_L

求初始值: $i_L(0^+) = i_L(0^-) = 2.5\text{A}$

$u_C(0^-) = -2 \times 2.5 - 5 \times 2.5 = -17.5\text{V}$

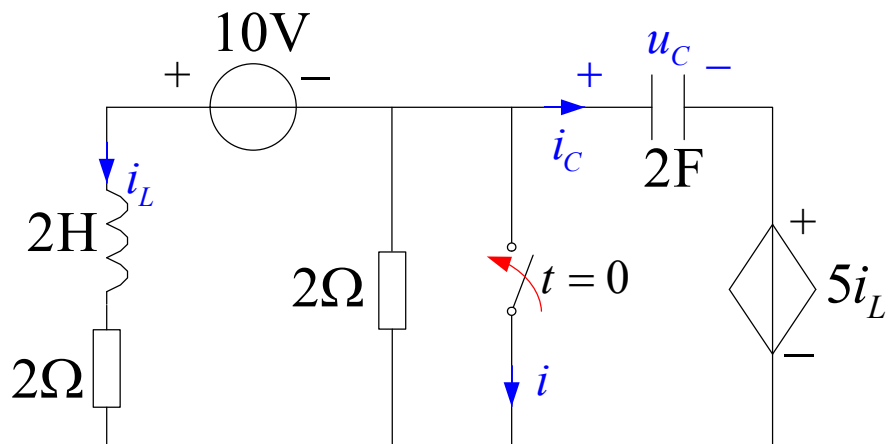
求稳态值:

$i_L(\infty) = 5\text{A}$ $u_C(\infty) = -5 \times 5 = -25\text{V}$



稳态等效电路

【8-60】 (1)求 $t>0$ 时的响应 i_L (2)求 $t>0$ 时的响应 i (3)求 $t=0$ 时的响应 i 。



(1)求 $t>0$ 时的响应 i_L

求初始值: $i_L(0^+) = i_L(0^-) = 2.5\text{A}$

$u_C(0^-) = -2 \times 2.5 - 5 \times 2.5 = -17.5\text{V}$

求稳态值:

$i_L(\infty) = 5\text{A}$ $u_C(\infty) = -5 \times 5 = -25\text{V}$

求时间常数: $\tau = \frac{L}{R} = 1\text{s}$

$$i_L(t) = (5 - 2.5e^{-t})\text{A} \quad (t>0)$$

$$u_C(t) = -5i_L = -25 + 12.5e^{-t}\text{A} \quad (t>0)$$

$$i_C = C \frac{du_C(t)}{dt} = -25e^{-t}\text{A} \quad (t>0)$$

(2)求 $t>0$ 时的响应 i

$$i = -i_C - i_L = 27.5e^{-t} - 5\text{A} \quad (t>0)$$

(3)求 $t=0$ 时的响应 i $u_C(0^+) = -5 \times i_L(0^+) = -12.5\text{V}$

$$u_C(0^+) = u_C(0^-) + \frac{1}{C} \int_{0^-}^0 i_C dt \quad i_C = 10\delta(t)$$

$$i(0) = -10\delta(t) \quad (t=0)$$