概率论与数理统计

Probability and Mathematical Statistics

主讲人：刘显明

课程教材

- 课本


普通高等教育“十三五”规划教材
普通高等院校数学精品教材
十三五
概率论与数理统计
第三版
刘次华 主编

作业


概率论与数理统计练习册
华中科技大学概率统计课程组 编
GAILVLUN YU SHULITONGJI LIANXICE

教辅

教材

1.《概率论与数理统计》（第三版），刘次华主编，华中科技大学出版社.

2.《概率论与数理统计》（第四版），华中科技大学数学与统计学院主编，高等教育出版社.

参考书

1.《概率论与数理统计学习辅导与习题全解》（第三版），华中科技大学数学系，高等教育出版社.

2.《概率论与数理统计练习册》，华中科技大学概率统计课程组编，华中科技大学出版社.

课程网络资源MOOC

https://www.icourse163.org/course/HUST-1003448001

课程范围：1-7章

1-5章 概率论

6-7章 数理统计

概率的发展简史

- **机会游戏的概率**

创始人：(法)帕斯卡，费马，(荷兰)惠更斯

惠更斯 1657《论掷骰子游戏中的计算》-概率最早的论著

- **走出赌博**

(法)拉普拉斯首先明确给出了概率的古典定义，并在概率论中引入了更有力的数学分析工具。1812年出版了他的著作《分析的概率理论》

(法)蒲丰(1707-1788)，几何概率

- **概率的公理化体系**

(俄罗斯)柯尔莫哥洛夫1933年在他的《概率论基础》一书中首次给出了概率的测度论式定义和一套严密的公理体系

概率和生活有关系吗？？？

概率问题一二

? 赌金分配问题（起源的故事之一）

规则：谁先赢5局便赢，获得所有赌金。

问题：赌徒甲赢4局，乙赢3局，赌金如何分配？

请教：帕斯卡，帕与费马交流

结论：3/4:1/4

? 某事件的概率为0，是不是说这个事件是不会发生的事件呢？

概率统计问题一二

扔硬币，出现正面的可能性是1/2，你怎么知道的？ 概率的极限理论--大数定理

实验者	n	n_A	ξ_n
蒲 丰	4048	2048	0.5069
德·摩根	2048	1061	0.5181
皮尔逊	12000	6019	0.5016
皮尔逊	24000	12012	0.5005
罗曼诺夫斯基	80640	39699	0.4923

你知道利用概率知识可近似求复杂的定积分吗？ 蒙特卡罗模拟法-均匀分布

你知道公汽门的高度是怎样设计的吗？ 人的身高的分布-正态分布

你买了一个牌子的鞋子，没两天就坏了，你还准备买这个牌子的鞋子吗？极大似然原理

概率是什么？？？

第一章 随机事件与概率

1.1 随机试验与随机事件

1.2 随机事件的关系、运算及性质

1.3 概率的公理化定义及概率的计算

1.4 条件概率、全概率、贝叶斯公式及事件的独立性

中学教学大纲：随机事件的概率，等可能事件的概率，互斥事件有一个发生的概率，相互独立事件的概率，独立重复试验等. 选修：离散型随机变量的分布列，离散型随机变量的期望值和方差，抽样方法，总体分布的估计，正态分布，线性回归.

1.1 随机试验与随机事件

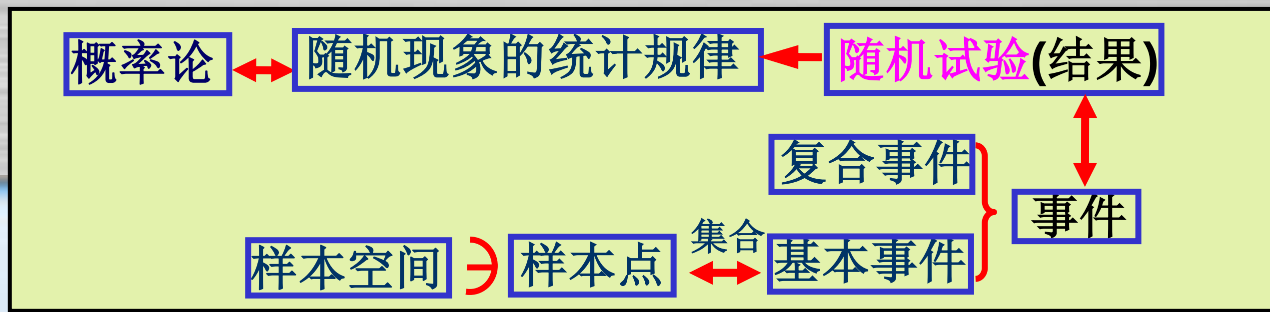
- 必然现象
- 随机现象

概率论 ↔ 随机现象的统计规律 ← 随机试验(结果)

复合事件

事件

样本空间 ∋ 样本点 $\xleftrightarrow{\text{集合}}$ 基本事件

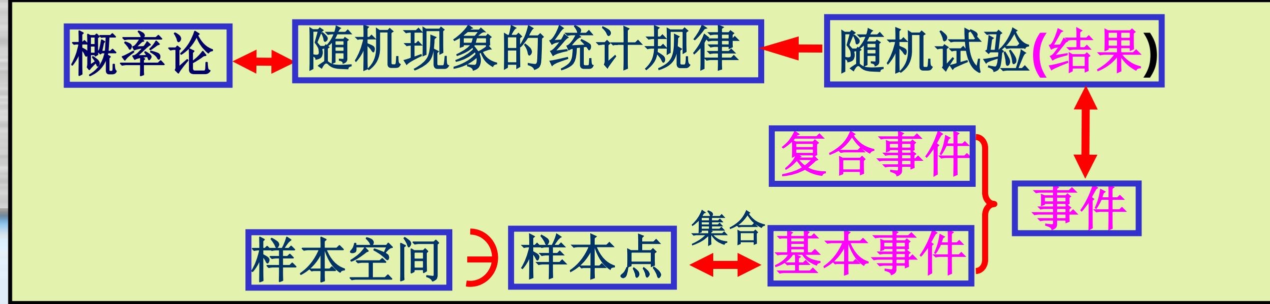


一 随机试验*E*（*experiment*）：

1. 可在相同条件下重复进行；

2. (确定性)事先知道试验可能出现的全部结果；

3. (不确定性)一次试验之前无法确定具体是哪种结果出现。

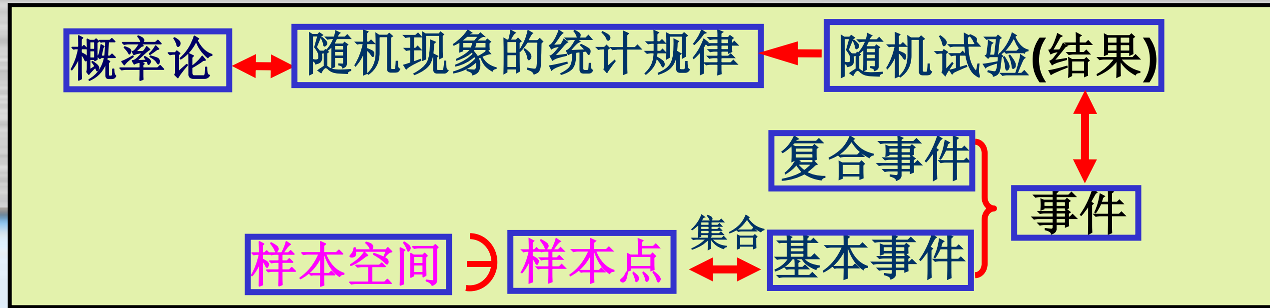


二（随机）事件

试验中每一个可能的结果称为一个**随机事件**，简称“**事件**”. 记作A、B、C等.

- **基本事件**：不可能再分解的事件
- **复合事件**：由若干个基本事件组成的事件

- 必然事件：Ω
- 不可能事件：Φ



三 样本空间和样本点

样本空间：随机试验中所有基本事件的集合，记为Ω .

样本点：样本空间中的元素（基本事件）, 记为ω.

样本空间的特例

E1：抛一枚硬币

E2：抛两枚硬币

E3：任取一个自然数

E4：观察某电器的寿命

1.2 事件的关系、运算和性质

称**事件A发生**当且仅当试验的结果是子集A中的元素

一 事件（集合）的关系和运算

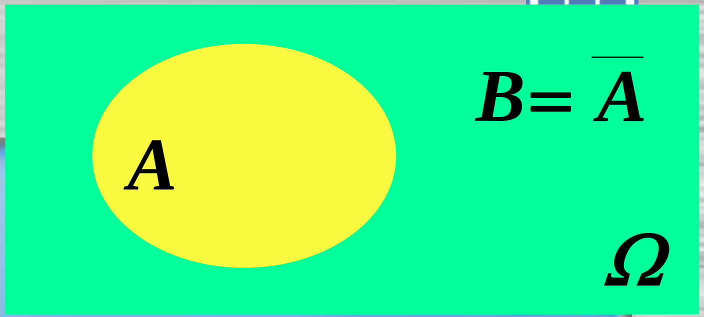
1. 包含与相等　(1) $A \subset B$

(2) $A=B(A \subset B$ 且 $B \subset A)$

2. 事件的并　$A \cup B$　（A、B至少有一个发生）

3. 事件的积　$A \cap B$或AB　（A、B同时发生）

4. 事件的差　$A - B = A\overline{B}$　（A发生且B不发生）



5. 互斥(互不相容)事件　$AB=\Phi$

6. 对立(逆)事件　$AB=\Phi$ 且 $A\cup B=\Omega$.　记$B=\overline{A}$

注　1. A、B互不相容，　$A\cup B$记做$A+B$.

2. 事件的和、积运算及互不相容关系可推广到有限个事件及可列无穷个事件。

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i,\ \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i,\ \bigcap_{i=1}^{n} A_i,\ \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i.$$ 两两互不相容

二 事件的运算律

1、**交换律**：$A\cup B=B\cup A$，$AB=BA$

2、**结合律**：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，

$$(AB)C=A(BC)$$

3、**分配律**：$(A\cup B)C=(AC)\cup(BC)$，

$$(AB)\cup C=(A\cup C)(B\cup C)$$

4、**对偶(De Morgan)律**：

$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B},\quad \overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}$$

推广：$\overline{\bigcup_k A_k}=\bigcap_k \overline{A_k}$，$\overline{\bigcap_k A_k}=\bigcup_k \overline{A_k}$.

例 设A,B,C为三个事件,用A,B,C表示如下事件。

1. A发生而B与C都不发生 $A\bar{B}\bar{C}$
2. A与B都发生而C不发生 $AB\bar{C}$
3. 所有这三个事件同时发生 ABC
4. 这三个事件恰好发生一个 $A\bar{B}\bar{C}+\bar{A}B\bar{C}+\bar{A}\bar{B}C$
5. 这三个事件恰好发生二个 $AB\bar{C}+A\bar{B}C+\bar{A}BC$
6. 这三个事件至少发生一个 $A\cup B\cup C$

或 $A\bar{B}\bar{C}+\bar{A}\bar{B}C+\bar{A}B\bar{C}+AB\bar{C}+A\bar{B}C+\bar{A}BC+ABC$

7. 这三个事件都没有发生 有无基本事件?
8. A发生 有无互斥事件?

小结

- 了解随机试验的概念
- 理解事件、基本事件、样本点、样本空间的概念
- 熟练掌握事件的关系、运算及运算性质

概率是什么？？？

$$P: A \longrightarrow P(A)$$

1.3 事件的概率及计算

一 公理化定义

1. σ域

2. 概率公理化定义

3. 概率的性质

二 经典概率

1. 概率的统计定义（频率）

2. 古典型概率（等可能事件的概率）

3. 几何型概率（等可能事件的概率）

一 公理化定义

1. σ域(σ代数)

设Ω为一样本空间,F是由Ω的一些子集所组成的集合族。如果F满足如下性质:

1) $\Omega \in F$;

2) 若$A \in F$,则$\overline{A} \in F$;

3) 若$A_i \in F\,(i = 1,2,\cdots)$,则$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in F$;

封闭性

则称F为σ域;F中的元素称为事件,称(Ω, F)为可测空间。

σ域(σ代数)的特例

$\Omega=\{\omega1,\omega2,\omega3,\omega4\}$

2. 概率公理化定义

设E是随机试验,Ω是它的样本空间，并设F是Ω上的$\sigma-$代数，即（Ω，F）是一个可测空间。对于E的每一事件$A\in F$赋予一个实数,记为$P(A)$,称为事件A的概率。如果集合函数$P(\cdot)$满足下列条件：

- （1）非负性： $0\le P(A)\le 1$；

$P: F \xrightarrow{\text{映射}} R$

- （2）规范性： $P(\Omega)=1$；

$A \to P(A)$

- （3）可列可加性： $A_1, A_2, \cdots$两两互不相容，则

$$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)=\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

3. 概率的性质

（1） $P(\Phi)=0$；

（2）有限可加性： $A_1,\cdots,A_n$两两互不相容，则

$$P(\bigcup_{k=1}^{n} A_k)=\sum_{k=1}^{n} P(A_k).$$

（3）逆事件公式： $P(\overline{A})=1-P(A)$;

（4）差事件公式： $P(A-B)=P(A)-P(AB)$；

单调性： $B\subset A$，则 $P(B)\le P(A)$；

（5）加法公式： $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$；

一般的，$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\le i<j\le n}P(A_iA_j)$

$$+\sum_{1\le i<j<k\le n}P(A_iA_jA_k)+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n).$$

二 经典概率

1. 概率的统计定义（频率）

$$\boxed{P(A)=\frac{n_A}{n}\,(n\text{较大}),}$$

n_A为事件A在n次重复试验中出现的次数.

注： 1. 满足非负性，规范性，有限可加性.

2. 大数定理(n足够大，频率稳定于概率)

2. 古典型概率（等可能事件的概率）

1) 古典概型E(试验):

(1) 有限性: $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$

(2) 等可能性: $P(\omega_1)=P(\omega_2)=\cdots=P(\omega_n)=\dfrac{1}{n}.$

2) 定义 设 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$ 为古典概型E下的样本空间，事件$A=\{\omega_{a1},\omega_{a2},\cdots,\omega_{am}\}$，定义

$$\boxed{P(A)=\frac{m}{n}=\frac{A\text{中包含的基本事件数}}{\Omega\text{中包含的基本事件数}}}$$

注: 满足非负性，规范性，有限可加性.

3）计算工具：加法原理，乘法原理，C_n^m, A_n^m.

例 一批外形相同的10件产品，其中有4件次品，考察：

E_1：从中任取一件，A_1={取到次品}. $P(A_1)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$

E_2：有放回任取三件，A_2={恰有两件次品}. $P(A_2)=\frac{C_3^2\ 4\times4\times6}{10\times10\times10}$

E_3：无放回任取三件，A_3={恰有两件次品}. $P(A_3)=\frac{C_3^2 4\times3\times6}{10\times9\times8}=\frac{C_4^2C_6^1}{C_{10}^3}$

生日同一天问题

求A={n(n< 365)个人中至少两人在同一天过生日}的概率。

解 $$P(A)=1-P(\bar{A})=1-\frac{365\times 364\times\cdots\times(365-n+1)}{365\times 365\times\cdots\times 365}$$

$$=1-\frac{A_{365}^{n}}{365^{n}}$$

人数	10	20	30	40	50	55	90
P	0.12	0.41	0.71	0.89	0.97	0.99	$1-3\times 10^{-95}$

蒙提霍尔悖论

假设你正在参加一个游戏节目，你被要求在三扇门中选择一扇：其中一扇后面有一辆车；其余两扇后面则是山羊。你选择了一道门，假设是一号门，然后知道门后面有什么的主持人，开启了另一扇后面有山羊的门，假设是三号门。他然后问你："你想选择二号门吗？"转换你的选择对你来说是一种优势吗?

3. 几何型概率（等可能事件的概率）

如果每个事件发生的概率只与构成该事件区域的长度（面积或体积）成比例，则称这样的概率模型为几何概率模型，简称为几何概型。

在几何概型中，事件A的概率的计算公式如下：

$$P(A)=\frac{A\text{的度量(长度、面积或体积)}}{\Omega\text{的度量(长度、面积或体积)}}.$$

注： 满足非负性，规范性，可列可加性.

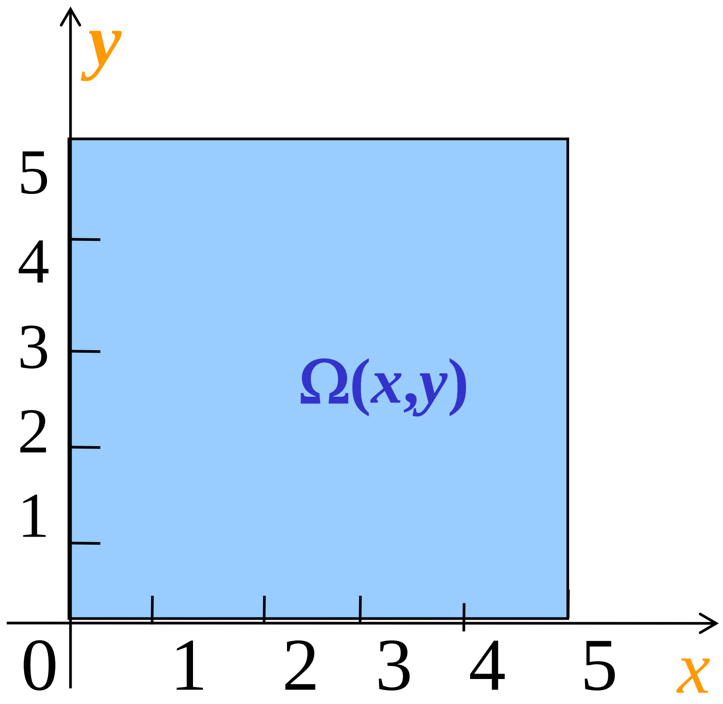
	古典概型	几何概型
所有的基本事件	有限个	无限个
每个基本事件的发生	等可能	等可能
每个基本事件的发生的概率	$1/n$	0
概率的计算		

例. (会面问题) 甲、乙二人约定在12点到下午5点之间在某地会面，先到者等一个小时后即离去, 设二人在这段时间内的各时刻到达是等可能的，且二人互不影响。求二人能会面的概率。

解： 以 x, y 分别表示甲、乙二人到达的时刻，于是

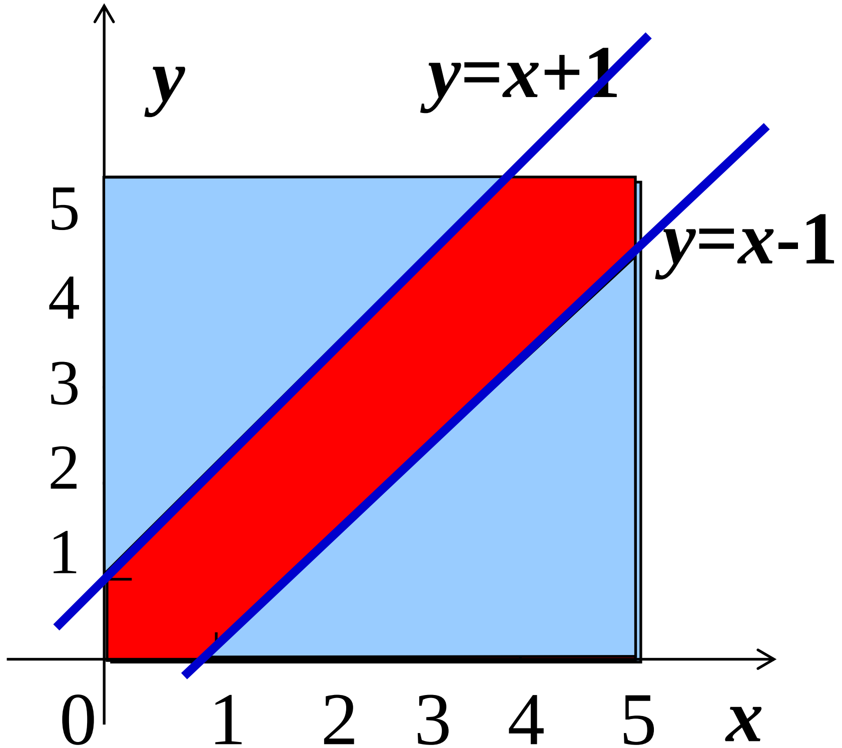
$$0 \le x \le 5,\ 0 \le y \le 5.$$

$$\Omega = \{(x, y): 0 \le x \le 5,\ 0 \le y \le 5\}.$$



二人会面的条件是：$|x-y|\le 1$,

记“两人会面”为事件A, $A=\{(x,y)\in\Omega:|x-y|\le 1\}$.



$$P(A)=\frac{A\text{的度量}}{\Omega\text{的度量}}$$

$$=\frac{25-2\times\frac{1}{2}\times 4^2}{25}=\frac{9}{25}.$$

蒲丰投针问题

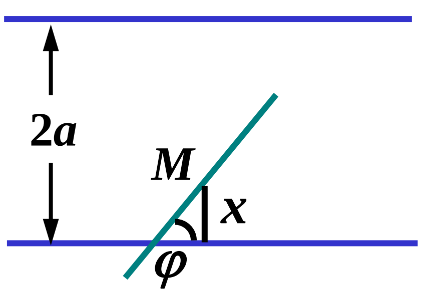
经典欣赏

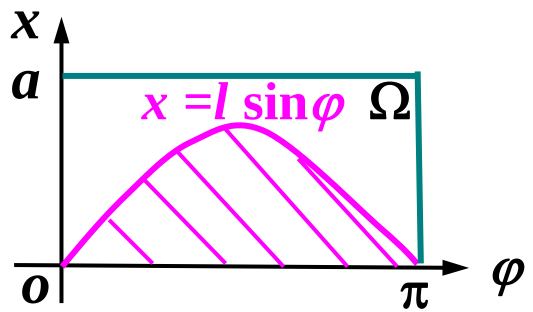
在平面上画有等距离的一族平行线，平行线间的距离为 $2a$，向平面任意投掷一长为 $2l(l<a)$的针，试求此针与平行线相交的概率.

解 以M表示针的中点，以 x 表示针投在平面上之后点M到最近的一条平行线的距离，以φ表示针与此直线的交角.

$$\Omega=\{(\varphi, x): 0\le\varphi\le\pi，\ 0\le x\le a\}$$

$$\{相交\}=A=\{(\varphi, x): 0\le\varphi\le\pi，\ 0\le x\le l\sin\varphi\}$$

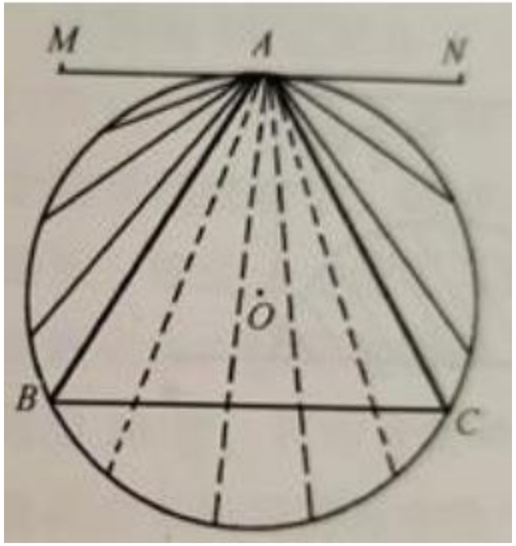


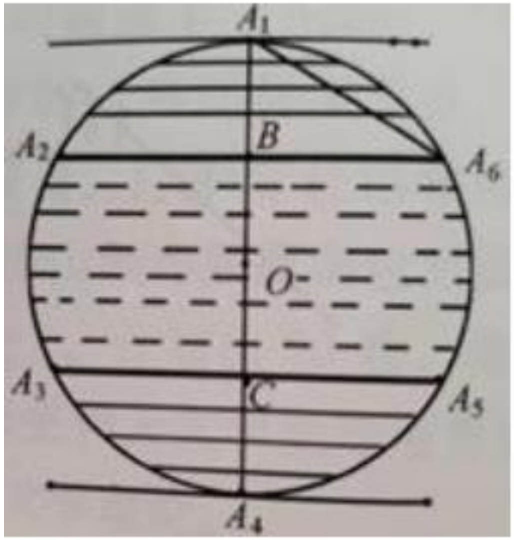


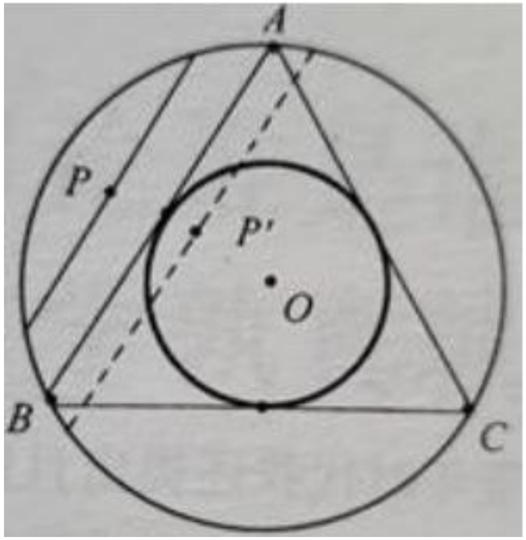
$$P(A)=\frac{A的面积}{\Omega的面积}=\frac{\int_0^{\pi} l\sin\varphi\, d\varphi}{\pi a}=\frac{2l}{\pi a}$$

贝特朗悖论

在一给定圆内所有的弦中任选一条弦，求该弦的长度长于圆的内接正三角形边长的概率？







小结

- 理解概率的公理化定义、几何型概率
- 熟练运用概率的定义、运算性质求事件的概率
- 掌握古典型概率(计算难度同例题、习题)

蒙特卡罗(MonteCarlo)随机模拟方法

经

典

欣

赏

------π的统计估计法

$$\boxed{P(A)=\frac{2l}{\pi a}}$$

用A发生的频率$p=\dfrac{n_A}{n}$代替$P(A)$,得到

$$\boxed{\pi \approx \frac{2l}{ap}}$$

Wolf(1850年)投针5000次，得π≈3. 1596;

Smith(1855)投针3204次，得π≈3. 1554;

Lazzerini(1901)投针34080次，得π≈3. 1415929.

1. 4. 条件概率和事件的独立性

$$P(A)=P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)+\cdots+P(B_n)P(A|B_n)$$

全概率公式

1.**条件概率** $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$

乘法公式

$$P(AB)=P(A)P(B|A)$$

贝叶斯公式

$$P(B_i|A)=\frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(B_j)P(A|B_j)},\quad i=1,2,\cdots,n.$$

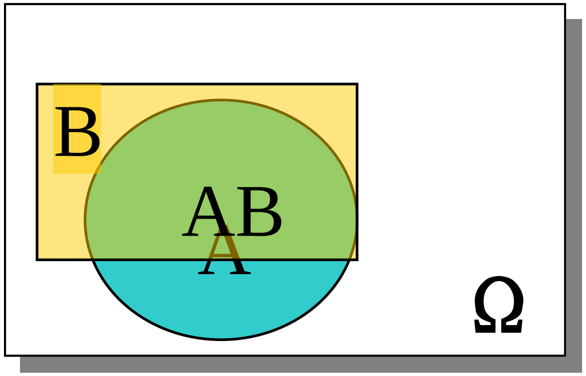
2.**事件的独立：两个事件** $\longrightarrow$ **多个事件**

一 条件概率

1. 定义　设A、B为两随机事件，$P(B)>0$，则称

$$P(A\mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

为B发生的条件下，A发生的条件概率。



2. 计算方法　1）定义

2）缩减的样本空间中求概率

(?) 3. 性质：条件概率是概率，具有概率的性质。

记$P_B(A)=P(A\mid B)$. $eg: P_B(\overline{A})=1-P_B(A)$,

即$P(\overline{A}\mid B)=1-P(A\mid B)$.

二 乘法公式

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{ll} P(AB)=P(B)P(A|B) & P(B)\neq 0 \\ P(AB)=P(A)P(B|A) & P(A)\neq 0 \end{array}}$$

推广：

$$\boxed{P(ABC)=P(A)P(B|A)P(C|AB).}$$

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})$$

例 从含3件次品的10件产品中无返回地取两次，每次任取一件。求两次都取到次品的概率。

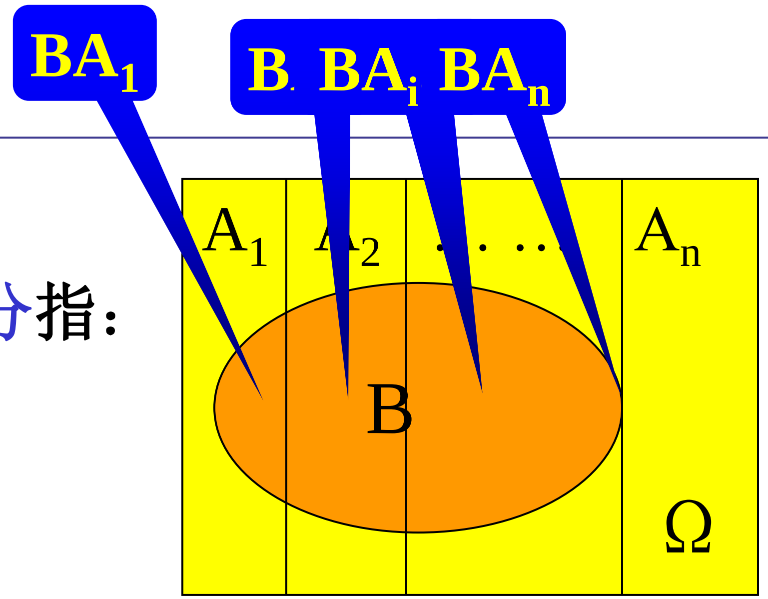
解 记Ω={10件产品中无返回取两件}， A={两件都是次品}，则

$$P(A)=\frac{A\text{中样本点数}}{\Omega\text{中样本点数}}=\frac{3\times 2}{10\times 9}=\frac{1}{15}.$$

$$A_i=\{\text{第}i\text{次取到次品}\}, i=1,2.$$

$$P(A)=P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)=\frac{3}{10}\times\frac{2}{9}=\frac{1}{15}.$$

三 全概率公式



1. 划分的概念

$A_1, A_2, \ldots, A_\infty$是Ω的一个划分指:

(1) $A_iA_j = \Phi$, $i \neq j$

(2) $\sum_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega$

2. 全概率公式 $\boxed{P(B) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)P(B \mid A_i)}$

$$\because \quad P(B) = P(B\Omega) = P(B\sum_{i=1}^{n} A_i) = P(\sum_{i=1}^{n} BA_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(BA_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B \mid A_i)$$

例 两台车床加工同样的零件，第一台的废品率为0.04，第二台的废品率为0.07，加工出来的零件混放，并设第一台加工的零件数是第二台的2倍。现任取一零件，问取到废品的概率是多少？

解 记A_i={取到第i台车床加工的零件}，i=1, 2,

B={取到废品},

$$P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)$$

$$=\frac{2}{3}\times 0.04+\frac{1}{3}\times 0.07=0.05.$$

反问：如果取到废品，它是第一台车床加工的概率多少？

$$P(A_1|B)=\frac{P(A_1B)}{P(B)}=\frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(B)}=\frac{\frac{2}{3}\times 0.04}{0.05}=\frac{8}{15}.$$

$$P(A_2|B)=1-P(A_1|B)=\frac{7}{15}.$$

例：医疗诊断

根据以往的临床记录，某种诊断癌症的试验具有如下的效果：以A表示“试验诊断被检验者患有癌症”，C表示“被诊断者的确患有癌症”， $P(A\,|\,C)=0.95$ ，$P(\overline{A}\,|\,\overline{C})=0.95$ ．现对自然人群进行普查，设被试验的人患有癌症的概率为0.005，即 $P(C)=0.005$，试求 $P(A)$．

分析：

患癌 C

末患癌 $\overline{C}$

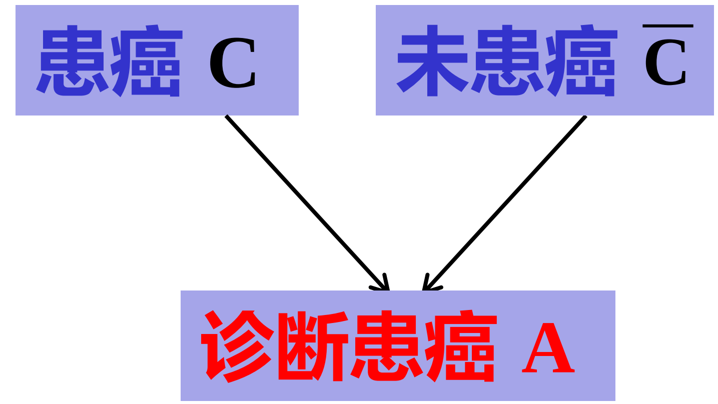
诊断患癌 A

例：医疗诊断

已知：$P(C)=0.005$

$P(A|C)=0.95 \quad P(\bar{A}|\bar{C})=0.95$

求：$P(A)$



解：

$$P(A)=P(C)P(A|C)+P(\bar{C})P(A|\bar{C})$$

$$=0.005\times 0.95+0.995\times \underline{0.05}=0.0545$$

反问：如果试验诊断被检验者患有癌症，被诊断者的确患有癌症的概率是多少?

$$P(C|A)=\frac{P(CA)}{P(A)}=\frac{P(C)P(A|C)}{P(A)}=\frac{P(C)P(A|C)}{P(C)P(A|C)+P(\bar{C})P(A|\bar{C})}$$

$$=\frac{0.005\times 0.95}{0.005\times 0.95+0.995\times 0.05}\approx 0.087.$$

贝叶斯公式

设$A_1, A_2, \ldots, A_n$是Ω的一个划分，则：

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i)P(B \mid A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j)P(B \mid A_j)},\quad i = 1,2,\cdots,n.$$

Thomas Bayes

(英国，1702～1761)

意义

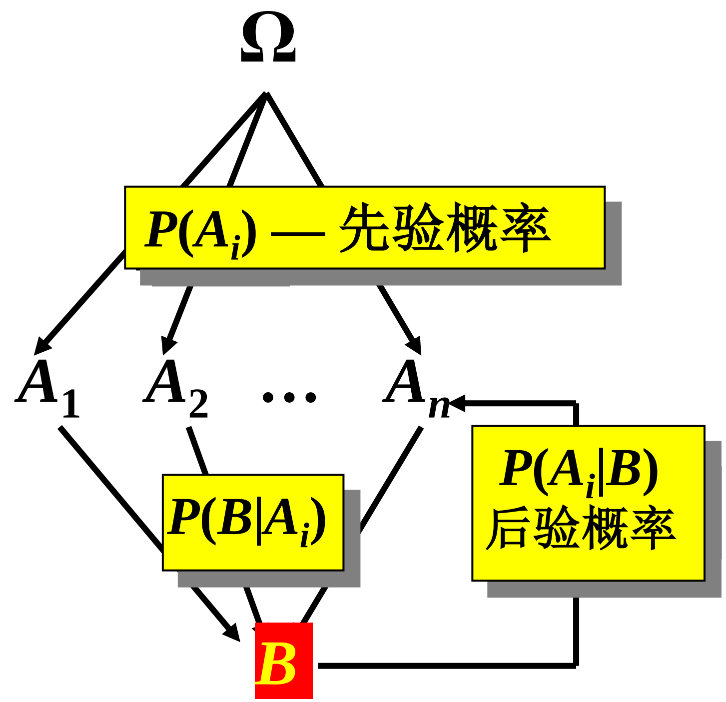
$$P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i)P(B \mid A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j)P(B \mid A_j)}, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

在观察到事件B已经发生的条件下，确定导致B发生的各个原因A_i的的概率

——贝叶斯公式

执果寻因

修正概率

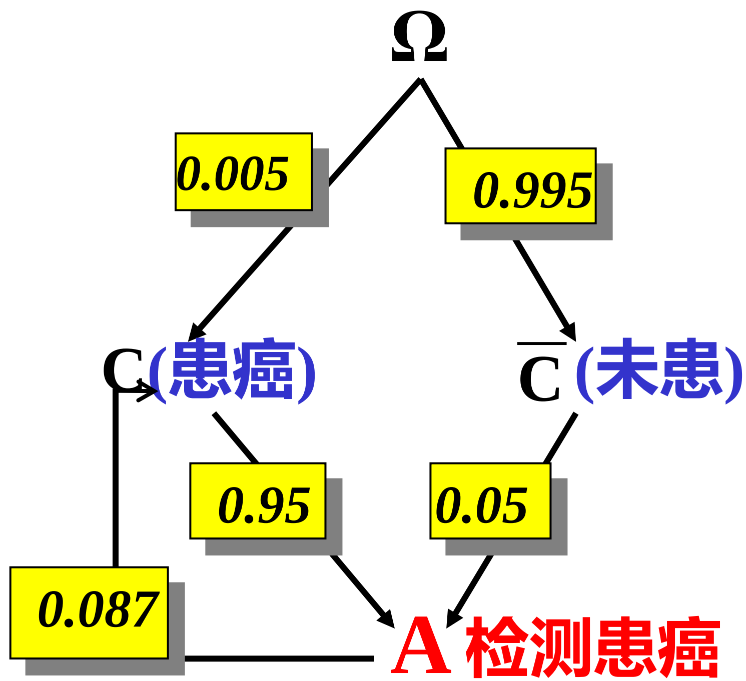


应用:医疗诊断：初诊

结果分析一:

$P(\text{检测患癌} \mid \text{患癌}) = 0.95$

$P(\text{患癌} \mid \text{检测患癌}) \approx 0.087$



结果分析二:

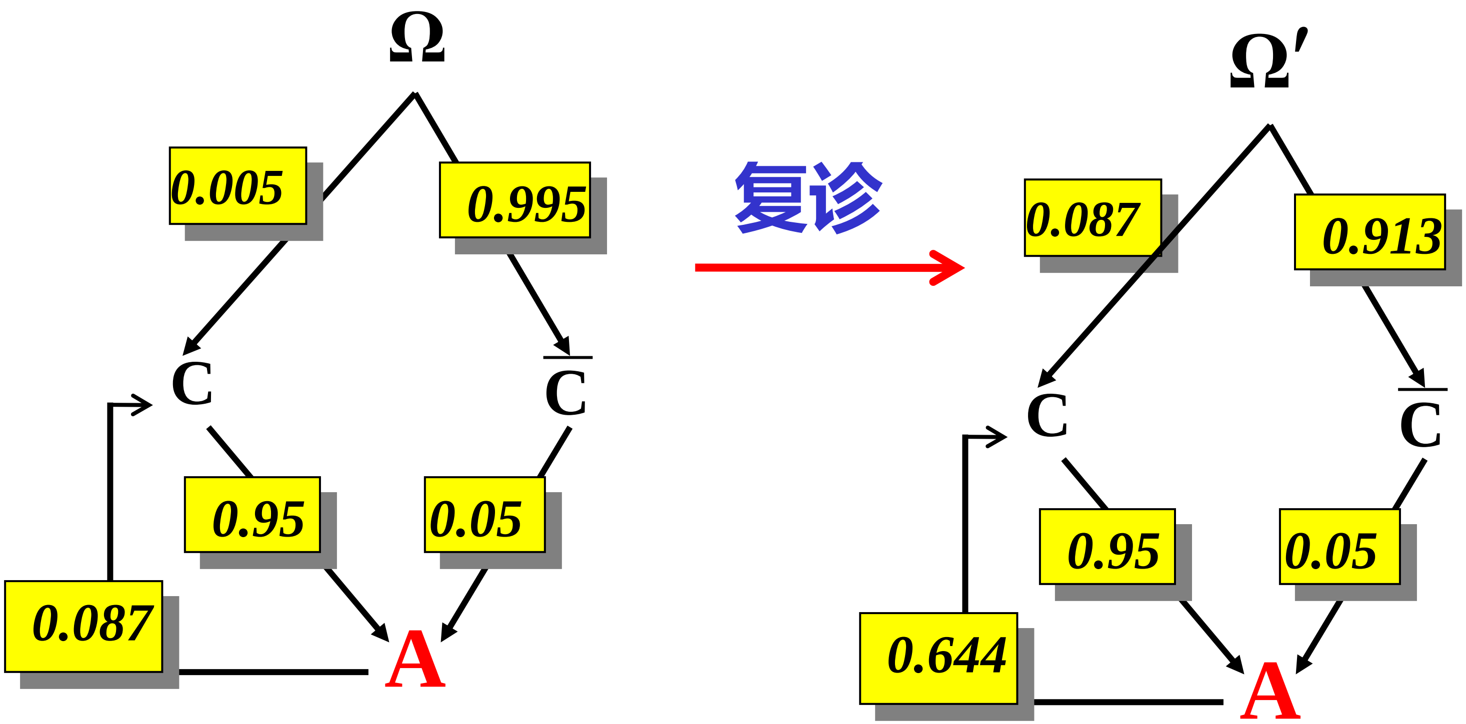
$P(\text{患癌}) = 0.005 \longrightarrow P(\text{患癌} \mid \text{检测患癌}) \approx 0.087$

思考：如何提高诊断正确性？

方法一：**降低错检率。**

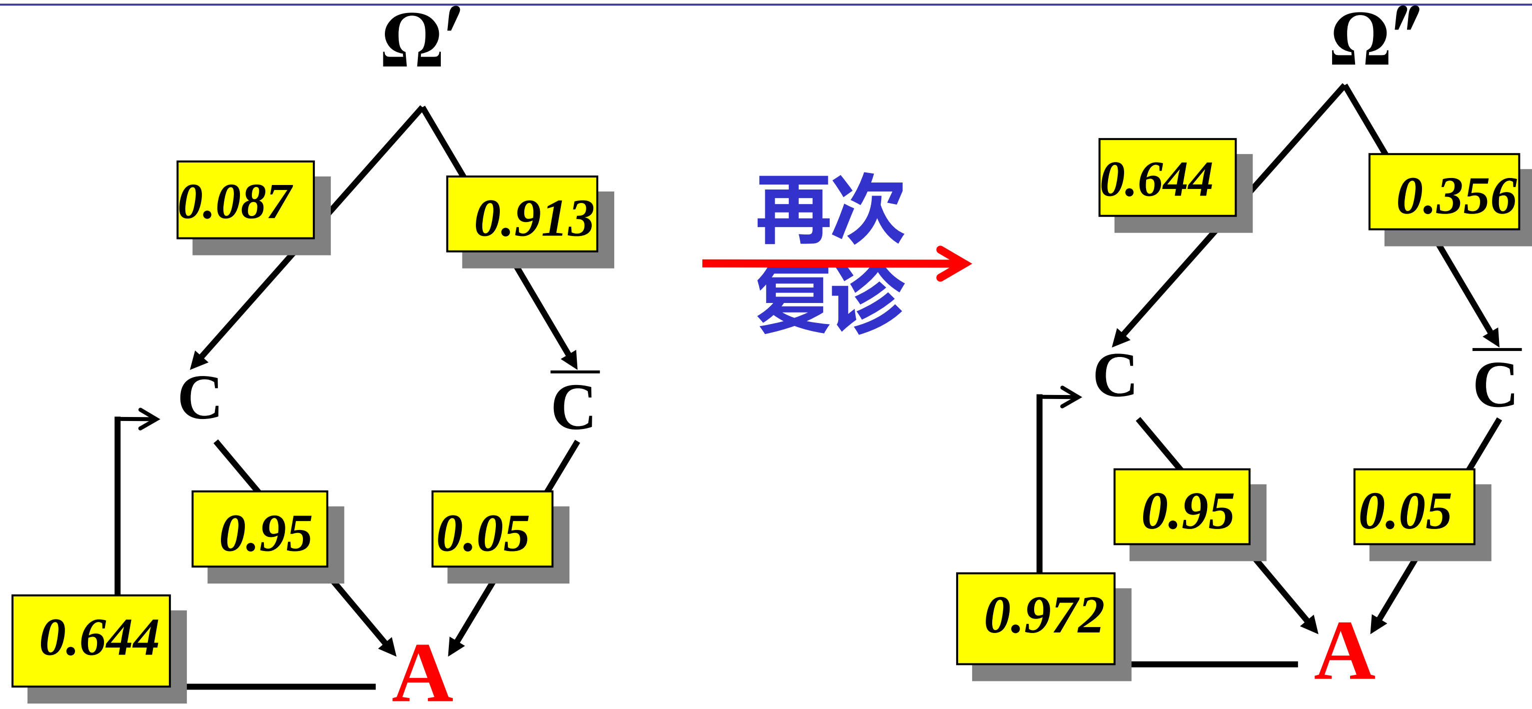
方法二：**复诊！**

医疗诊断：复诊



$$P(C|A)=\frac{P(C)P(A|C)}{P(C)P(A|C)+P(\overline{C})P(A|\overline{C})}=\frac{0.087\times0.95}{0.087\times0.95+0.913\times0.05}\approx0.644.$$

医疗诊断：再次复诊



P(患癌) = 0.005 → P(患癌|初检患癌) ≈ 0.087

新信息

→ P(患癌|复检患癌) ≈ 0.644

→ P(患癌|三检患癌) ≈ 0.972

小结　　贝叶斯公式

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i)P(B \mid A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j)P(B \mid A_j)}, \quad i = 1,2,\cdots,n.$$

应用：

1.执果寻最大可能原因。

2.根据新信息修正概率。

五 事件的独立性

$$P(A)=P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)} \Leftrightarrow P(AB)=P(A)P(B),\ P(B)>0.$$

1. 两个事件的独立

1)定义　若$P(AB)=P(A)P(B)$，则称事件A与B相互独立。

2) 性质

- 设$P(B)>0, A, B$独立$\Leftrightarrow P(A|B)=P(A).$
- A, B独立$\Leftrightarrow A, \overline{B}$独立$\Leftrightarrow \overline{A}, \overline{B}$独立$\Leftrightarrow \overline{A}, B$独立.

2. 多个事件的独立

1) 定义　称 A_1，A_2，…，A_n相互独立，若对其中任意一组事件 A_{i_1}，$A_{i_2},\cdots A_{i_k},(2\le k\le n)$,有

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k})$$

共$C_n^2+C_n^3+\cdots+C_n^n$

$=(1+1)^n-C_n^0-C_n^1$

$=2^n-1-n$个式子.

2) 性质

- 两两独立 $\not\Rightarrow A_1,\cdots,A_n$相互独立。
- $A_1,\cdots,A_n$独立$\Rightarrow$其中任意 $k\ (2\le k\le n)$个事件独立.
- $A_1,\cdots,A_n$独立$\Rightarrow\overline{A_{i1}},\cdots\overline{A_{im}},A_{i\,m+1}\cdots,A_{in}(0\le m\le n)$独立 .
- A,B,C,D相互独立$\Rightarrow A\cup B,C\cup D$相互独立。

例 设某种型号的高射炮，每一门(发射一发炮弹)命中敌机的概率为0.6。欲以99%的把握击中敌机，至少要多少门高射炮？

解 设至少要n门高射炮，A={击中敌机}，

A_i ={第i门高射炮击中敌机}, 则$A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$,

$$P(A) = P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) \geq 99\%$$

$$P(\overline{A}) = P(\overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n}) \leq 0.01$$

$$= P(\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i})$$

解得$n \geq \ln 0.01 / \ln 0.4 \approx 5.026$

故至少要6门高射炮。

小结

$$P(A)=P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)+\cdots+P(B_n)P(A|B_n)$$

全概率公式

1.条件概率 $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$

乘法公式

$$P(AB)=P(A)P(B|A)$$

贝叶斯公式

$$P(B_i|A)=\frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(B_j)P(A|B_j)},\quad i=1,2,\cdots,n.$$

2.事件的独立

第一章结束!

2020/11/19