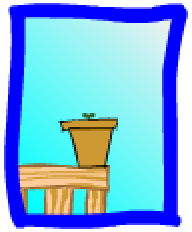
第三章 多维随机变量及其分布

3.1 多维随机变量$(X_1, X_2,\ldots, X_n)$

3.2 条件分布

3.3 随机变量的独立性

3.4 多维随机变量函数的分布



注：此章是第二章维数的提升，注意联系。

3.1 多维随机变量

一 多维R.V.

1. 多维R.V.定义
2. 二维R.V.的分布函数及边缘分布的概念
3. 二维R.V.的分布函数的性质

二 二维D.R.V.

1. 二维D.R.V.及分布列定义
2. 分布列性质

三 二维C.R.V.

1. 二维C.R.V.及密度函数定义
2. 密度函数性质
3. 常见二维C.R.V.(均匀分布，正态分布)

四 边缘分布的计算

3.1 多维随机变量

一 多维随机变量

1. 定义 (Ω,F)为可测空间。 $X_1, X_2,\ldots, X_n$为R.V.，若对任意实数$x_1, x_2 ,\ldots, x_n$, $\{X_1 \le x_1,\ldots, X_n \le x_n\}\in F$，则称$(X_1, X_2,\ldots, X_n)$为$n$维随机变量(向量)。

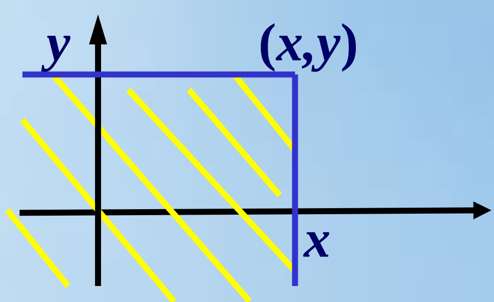
注 若F为最大σ域，$X_1, X_2,\ldots, X_n$为Ω上的R.V.，则有序组$(X_1, X_2,\ldots, X_n)$为n维随机变量。

设有R.V.(X, Y). 称

$$\boxed{F(x, y) = P\{X\le x, Y\le y\}, \quad x, y\in R}$$

为R.V.(X, Y) 的(联合)分布函数。称$X(Y)$的分布函数$F_X(x)(F_Y(y))$为(X, Y) 关于$X(Y)$的边缘分布函数。

注1



注2 $F_X(x) = P(X\le x) = F(x, +\infty)$

$= P(X\le x, \Omega) = P(X\le x, Y\le +\infty)$

$F_Y(y) = F(+\infty, y)$

3 分布函数的性质

（1）$F(x, y)$关于x或y单调不减性；

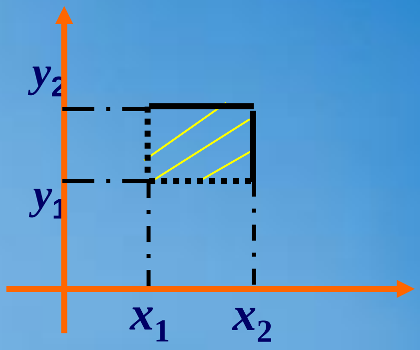
（2）有界性： $0\le F(x, y)\le 1$，且

$$F(+\infty,+\infty)=1.\quad F(-\infty,y)=0=F(x,-\infty),$$

（3）关于x或y右连续性；

（4）对$x_1\leqslant x_2$，$y_1\leqslant y_2$，有

$$F(x_2,y_2)-F(x_1,y_2)-F(x_2,y_1)+F(x_1,y_1)$$
$$=P(x_1<X\le x_2, y_1<Y\le y_2)\ \ge 0$$



注：上述性质也是鉴别一个二元实函数是否是某个二维R.V.的分布函数的充分条件.

二 二维离散型随机变量

1.定义 若二维R.V.(X,Y)只取有限对或可数对实数值，则称(X,Y)是**二维离散型随机变量**。

设 (X, Y) 所有可能取值为$(x_i, y_j),\ i, j=1,2,\cdots$

称

$$P(X=x_i, Y=y_j)=p_{ij},\quad i,j=1,2,\cdots$$

为(X,Y)的**联合概率分布**或**分布列**。

注1　分布列的表格形式：

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j}	$\cdots$
$\vdots$	$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$
$\vdots$	$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$

注2　$F(x,y)=P(X\le x, Y\le y)$

$$=\sum_{x_i\le x, y_j\le y} p_{ij}.$$

2 分布列的性质

（1）非负性： $p_{ij} \geq 0$， $i, j = 1, 2, \cdots$;

（2）规范性： $\sum_i \sum_j p_{ij} = 1.$

例　设X等可能地在1,2,3,4中取值，另一整数Y等可能地在1~X中取值，求(X, Y)的联合分布列。

解 $P(X=i,Y=j)=P(X=i)P(Y=j\,|\,X=i)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{i}$，$j\le i$，$i=1,2,3,4$

$P(X=1,Y=1)=P(X=1)P(Y=1\,|\,X=1)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{1}=\frac{1}{4}$

$P(X=2,Y=1)=P(X=2)P(Y=1\,|\,X=2)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$

X \ Y	1	2	3	4
1	$\frac{1}{4}$	0	0	0
2	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	0
3	$\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	0
4	$\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

三 二维连续型随机变量

1.定义 R.V.(X,Y)的分布函数为$F(x,y)$. 若存在非负函数$f(x,y)$, 对任意实数x, y, 有

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)dudv,$$

则称(X,Y)为二维C.R.V. , 称$f(x,y)$为其(联合)概率密度。

注1 若$f(x,y)$连续，则 $f(x,y)=\dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}$.

注2 几何意义：$F(x,y)$为以$f(x,y)$为曲顶，$(-\infty, x] \times (-\infty, y]$为底的体积.

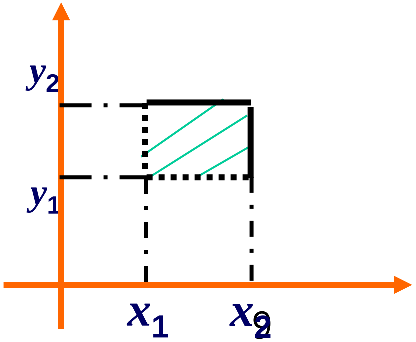
注3 $P(x_1 < X \le x_2,\ y_1 < Y \le y_2)=\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} f(u,v)dudv$

$= F(x_2,y_2) -$ …

$= (\int_{-\infty}^{x_2}\int_{-\infty}^{y_2} - \int_{-\infty}^{x_2}\int_{-\infty}^{y_1} \cdots \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}) f(u,v)dudv$

一般, $B\subset R^2$,

$$P((X,Y)\in B)=\iint_B f(x,y)dxdy.$$

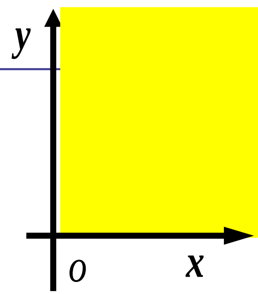


2 概率密度的性质

（1）非负性：　　$f(x,y) \geq 0$;

（2）规范性：　　$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = 1.$

例 设二维随机变量(X,Y)的概率密度为



$$f(x,y)=\begin{cases} ke^{-(2x+3y)}, & x\geq 0, y\geq 0, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

(1)求k；(2)求分布函数$F(x,y)$；(3)求$P\{X>Y\}$.

解 (1)由 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1$

$$1=\int_{0}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty} ke^{-(2x+3y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=k\int_{0}^{+\infty} e^{-2x}\mathrm{d}x\int_{0}^{+\infty} e^{-3y}\mathrm{d}y=\frac{k}{6} \Rightarrow k=6.$$

(2) $F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$

$$=\begin{cases} \int_{0}^{x}\int_{0}^{y} 6e^{-(2u+3v)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v=(1-e^{-2x})(1-e^{3y}), & x\geq 0, y\geq 0, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

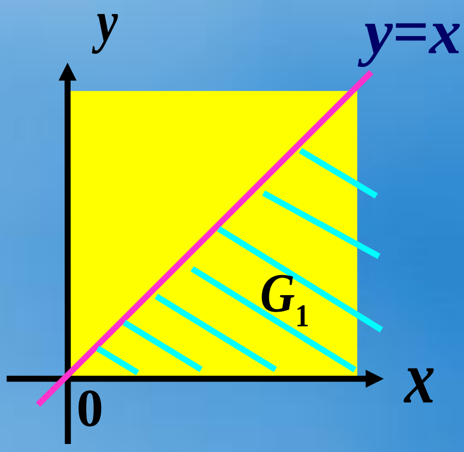
$$f(x,y)=\begin{cases}6e^{-(2x+3y)}, & x\ge 0, y\ge 0,\\ 0, & 其它.\end{cases}$$

（3）以G表示区域$\{(x,y)|x>y\}$，则有

$$P\{X>Y\}=P\{(X,Y)\in G\}$$

$$=\iint_G f(x,y)dxdy=\iint_{G_1} 6e^{-(2x+3y)}dxdy$$

$$=\int_0^{\infty}dx\int_0^x 6e^{-(2x+3y)}dy=\frac{3}{5}$$



例 设随机变量(X, Y)的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases} Ax, & 0<x<1,\quad 0<y<x, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

求 (1)常数A； (2) $P(X>\frac{3}{4})$； (3) $P(Y<\frac{1}{2})$；
(4) $P(X<\frac{1}{4}, Y<\frac{1}{2})$； (5) $P(X=Y)$； (6) $P(X+Y<1)$.

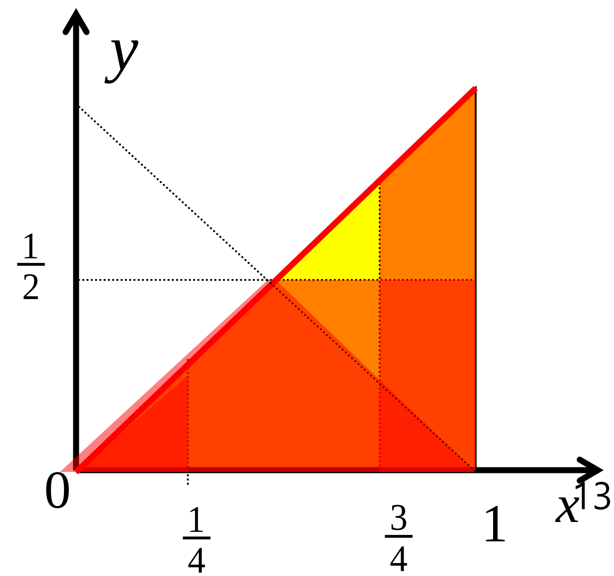
解(6) $P(X+Y<1) = \int_0^{\frac{1}{2}}[\int_y^{1-y} 3x dx]dy = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{3}{2}(1-2y)dy = \frac{3}{4}-\frac{3}{8} = \frac{3}{8}$

(2) $P(X>\frac{3}{4}) = \int_{\frac{3}{4}}^{1}[\int_0^x 3x dy]dx = 1-(\frac{3}{4})^3 = \frac{37}{64}$

(3) $P(Y<\frac{1}{2}) = \int_0^{\frac{1}{2}}[\int_y^{1} 3x dx]dy = \frac{3}{4}-\frac{1}{16} = \frac{11}{16}$

(4) $P(X<\frac{1}{4}, Y<\frac{1}{2}) = \int_0^{\frac{1}{4}}[\int_0^x 3x dy]dx = \frac{1}{64}$

(5) $P(X=Y)$ $=0$



3 常见的二维C.R.V

(1) **均匀分布** 设G为平面上的有界区域，其面积为S. 若R.V.(X, Y)有概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{S}, & (x,y)\in G,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

则称(X, Y)在区域G上服从**均匀分布**.

注 设$G_1\subset G$, G_1的面积为S_1, 则 $P((X,Y)\in G_1)=\iint\limits_{G_1}\frac{1}{S}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{S_1}{S}$
这正是几何概型的情形。

(2) 正态分布

若R.V.(X, Y)的概率密度为

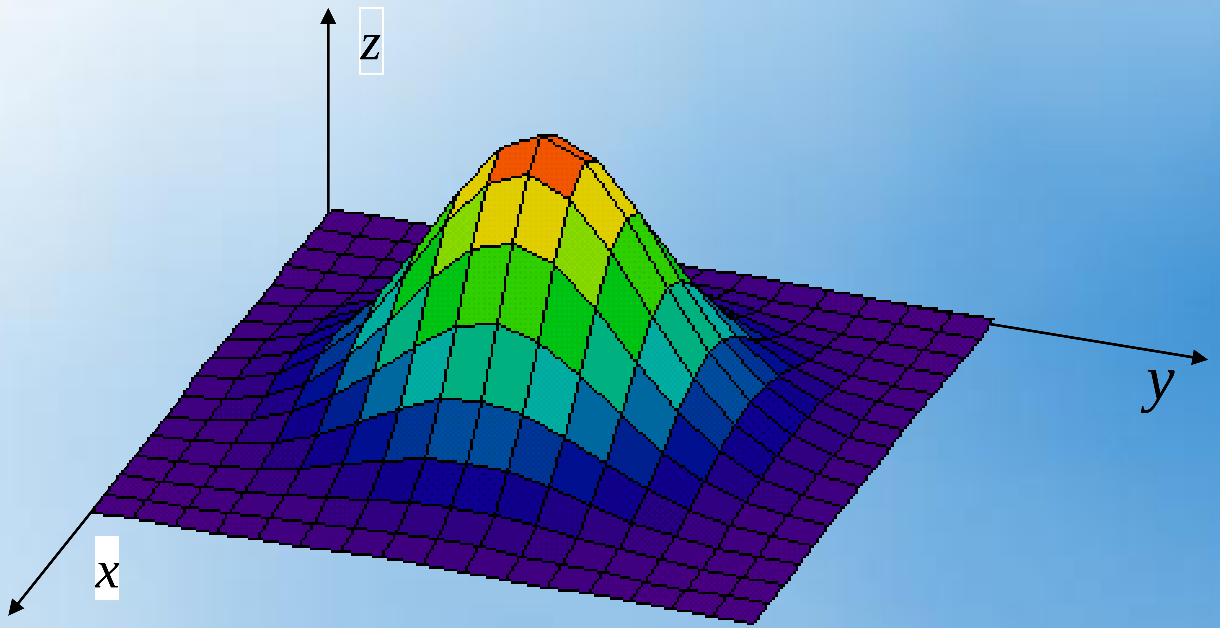
$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

$$-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty$$

其中参数$\mu_1,\mu_2\in\mathrm{R},\sigma_1,\sigma_2>0,|\rho|<1.$

则称(X, Y)服从参数为 $\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho$ 的二维正态分布，记作$(X, Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho).$

二维正态分布概率密度图



小结

- 了解多维随机变量的概念
- 深入理解二维R.V.的分布函数的定义和性质
- 深入理解D.R.V.及分布列的概念和性质, C.R.V.及联合概率密度的概念和性质，会熟练求解相关参数，事件的概率和分布函数(分布列)等
- 熟记二维均匀分布定义及二维正态分布的性质

四. 边缘分布的计算

(1) 二维D.R.V.的边缘分布(列)

设R.V.(X, Y) 的概率分布为

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij}, \quad i, j = 1,2,\cdots$$

则

$$P(X=x_i) = \sum_j p_{ij} = p_{i\cdot}$$

$$= P(X=x_i, \Omega) = P\left(X = x_i \bigcap \bigcup_j (Y = y_j)\right)$$

$$= P\left(\bigcup_j (X = x_i, Y = y_j)\right) = \sum_j P(X = x_i, Y = y_j)$$

$$P\{Y = y_j\} = \sum_i p_{ij} = p_{\cdot j}$$

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$	P_X
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$	$p_{1\cdot}$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j}	$\cdots$	$p_{2\cdot}$
$\vdots$	$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$	$\vdots$
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$	$p_{i\cdot}$
$\vdots$	$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$	$\vdots$
P_Y	$p_{\cdot 1}$	$p_{\cdot 2}$	$\cdots$	$p_{\cdot j}$	$\cdots$	1

注 联合分布 $\rightleftarrows$ 边缘分布

例 设X,Y的分布列分别为

X	-1	0	1
P	1/4	1/2	1/4

Y	0	1
P	1/2	1/2

且$P(XY=0)=1$. 求(X,Y)的联合分布列。

解

$X \backslash Y$	0	1	
-1	1/4	0	1/4
0	0	1/2	1/2
1	1/4	0	1/4
	1/2	1/2	

2 二维C.R.V的边缘分布

设C.R.V.(X,Y)的概率密度为$f(x,y)$,则

$$F_X(x)=F(x,+\infty)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{+\infty}f(u,v)dudv=\int_{-\infty}^{x}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(u,v)dv\right]du$$

故X的边缘密度 $$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$$

同理Y的边缘密度 $$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx$$

例 设$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$，求$X$和$Y$的边缘密度。

注 联合分布可以导出边缘分布，但反之不然。

$$f(x,y)=\frac{\exp\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)}{\sigma_1}\frac{(y-\mu_2)}{\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}]\}}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}\sigma_1\sigma_2}$$

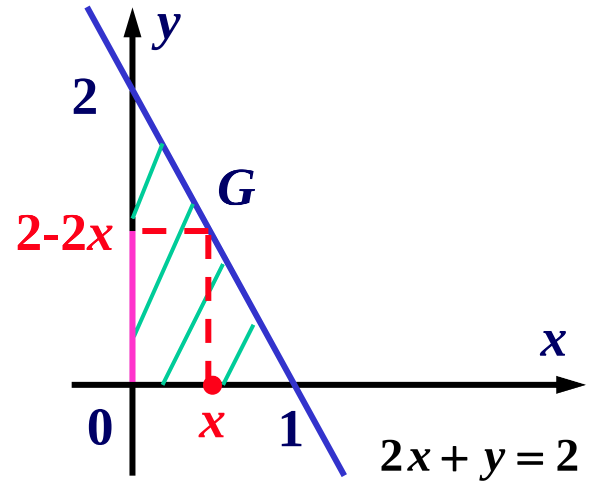
令 $u=\frac{x-\mu_1}{\sigma_1},\ v=\frac{y-\mu_2}{\sigma_2},$， 则

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}}\exp[-\frac{u^2-2\rho uv+v^2}{2(1-\rho^2)}]dv$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}}\exp[-\frac{(v-\rho u)^2}{2(\sqrt{1-\rho^2})^2}]dv\,\exp[-\frac{(1-\rho^2)u^2}{2(1-\rho^2)}]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}.$$ 即 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$

例 设(X,Y)在如图的区域G上服从均匀分布, 求 X和Y的边缘密度。



解 $$f(x,y)=\begin{cases}1, & (x,y)\in G,\\ 0 & \text{其它}.\end{cases}$$

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$$

$$=\begin{cases}\int_0^{2-2x}1dy=2-2x, & 0\le x\le 1,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

同理, $$f_Y(y)=\begin{cases}1-y/2, & 0\le y\le 2,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

注 均匀分布的边缘分布不一定是均匀分布。

3.2 条件分布

一 问题

身高$X\sim N(170, 4^2)$，体重$Y\sim N(59, 2^2)$. $X|Y=50 \sim N(?,?)$

二 条件分布

X,Y为R.V., B为事件.

$F(x|B)=P(X\le x|B)$，称为X在B下的条件分布函数。

特别，称

$F(x|y)=F(x|Y=y)$ 为$Y=y$时, X的条件分布函数。

$$F_{X|Y}(x|y) \overset{\text{定义}}{=} \lim_{\Delta y\to 0} P(X\le x|y<Y\le y+\Delta y) = \cdots$$

$$=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{F(x,y+\Delta y)-F(x,y)}{F_Y(y+\Delta y)-F_Y(y)}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{[F(x,y+\Delta y)-F(x,y)]/\Delta y}{[F_Y(y+\Delta y)-F_Y(y)]/\Delta y}=\frac{\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y}}{f_Y(y)}$$

三 离散情形

定义 设 (X,Y) 的联合分布列为 $P(X=x_i,Y=y_j)=p_{ij},i,j=1,2,\ldots$

$$P(X=x_i\mid Y=y_j)=\frac{P(X=x_i,\ Y=y_j)}{P(Y=y_j)}=\frac{P_{ij}}{P_{\bullet j}},\ i=1,2\cdots$$

称为在 $Y=y_j$ 条件下 X 的条件分布列。

$$P(Y=y_j\mid X=x_i)=\frac{P(X=x_i,Y=y_j)}{P(X=x_i)}=\frac{p_{ij}}{p_{i\bullet}},\ j=1,2\cdots$$

称为在 $X=x_i$ 条件下 Y 的条件分布列。

例 设某医院一天出生的婴儿数为X，其中男婴数为Y，已知(X,Y)的联合分布列为：

$$P(X=n,Y=m)=e^{-14}\frac{7.14^m}{m!}\cdot\frac{6.86^{n-m}}{(n-m)!}\qquad \begin{array}{l} n=0,1,\cdots \\ m=0,1,\cdots,n \end{array}$$

求X与Y的边缘分布和条件分布。

解 $$P(X=n)=\sum_{m=0}^{n}\frac{n!}{m!(n-m)!}7.14^m 6.86^{n-m}\frac{e^{-14}}{n!}=\frac{(7.14+6.86)^n}{n!}e^{-14}$$

$X\sim P(14)$ $\qquad n=0,1,\cdots$

$$P(Y=m)=\sum_{n=m}^{\infty}\frac{6.86^{n-m}}{(n-m)!}e^{-6.86}\times\frac{7.14^m}{m!}e^{-7.14}=\frac{7.14^m}{m!}e^{-7.14},\ m=0,1,\cdots$$

$Y\sim P(7.14)$

$$P(Y=m\mid X=n)=\frac{e^{-14}\dfrac{7.14^m}{m!}\cdot\dfrac{6.86^{n-m}}{(n-m)!}}{\dfrac{14^n}{n!}e^{-14}}=C_n^m\left(\frac{7.14}{14}\right)^m\left(\frac{6.86}{14}\right)^{n-m}$$

$m=0,1,\cdots n$

（n固定）

$Y\mid X=n\sim B(n,\quad 0.51)$

四 连续情形

定义 设(X,Y)的联合密度, 边缘密度分别为$f(x,y)$, $f_X(x)$, $f_Y(y)$

$$f_{X|Y}(x\,|\,y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

称为在$Y=y$条件下X的条件概率密度。

$$f(y\,|\,x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}$$

称为在$X=x$条件下Y的条件概率密度。

例 $(X,Y) \sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$, 求 $f(x|y)$ 和 $f(y|x)$.

解 $$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

$$=\frac{\dfrac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}\sigma_1\sigma_2}\exp\{-\dfrac{1}{2(1-\rho^2)}[\dfrac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\dfrac{(x-\mu_1)}{\sigma_1}\dfrac{(y-\mu_2)}{\sigma_2}+\dfrac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}]\}}{\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}\exp\{-\dfrac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}\}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}}\exp\{-\frac{[x-(\mu_1+\dfrac{\sigma_1}{\sigma_2}\rho(y-\mu_2))]^2}{2\sigma_1^2(1-\rho^2)}\}$$

即 $$X|Y=y \sim N(\mu_1+\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\rho(y-\mu_2),\quad \sigma_1^2(1-\rho^2))$$

$$Y|X=x \sim N(\mu_2+\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\rho(x-\mu_1),\quad \sigma_2^2(1-\rho^2))$$

一 随机变量独立的定义

$(X_1,\cdots,X_n)$为n维随机变量。其联合分布函数 $F(x_1,\cdots,x_n)=P(X_1\le x_1,\cdots,X_n\le x_n)$,边缘分布函数 $F_{X_i}(x_i)=P(X_i\le x_i)$. 若

$$\boxed{F(x_1,\cdots,x_n)=\prod_{i=1}^{n}F_{X_i}(x_i),\quad 任意x_1,\cdots,x_n\in \mathrm{R},}$$

则称$X_1,\ldots,X_n$相互独立。

二 随机变量独立的性质

(1) D.R.V.(X,Y). 设其所有取值为$(x_i, y_j), i, j = 1,2,\cdots$

$$\boxed{X,Y\text{独立} \Leftrightarrow P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i)P(Y = y_j), i, j = 1,2\cdots}$$

即$p_{ij} = p_{i\cdot}p_{\cdot j}, i, j = 1,2,\cdots.$

(2) C.R.V.(X,Y).

$$\boxed{X,Y\text{独立} \Leftrightarrow f(x,y) = f_X(x)f_Y(y),\ \text{任意}x, y \in \mathrm{R}.}$$

注 X,Y独立$\Leftrightarrow f(x|y) = f_X(x)$, 任意$x, y \in \mathrm{R}$.

(3) $\boxed{X_1,\cdots,X_n\text{独立} \Rightarrow \text{其中任意}k(1 < k \le n)\text{个也独立}}$。

(4) $\boxed{X_1,\cdots,X_n\text{独立} \Rightarrow \text{它们的函数}g_1(X_1),\cdots,g_n(X_n)\text{也独立。}}$

例 设$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$,则$X,Y$相互独立$\Leftrightarrow \rho=0$.

证明:"$\Leftarrow$" 若$\rho=0$. 下证$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$.

$$f(x,y)=\frac{\exp\{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\}}{2\pi\sigma_1\sigma_2}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}$$

"$\Rightarrow$" 若$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$. 则$f(\mu_1,\mu_2)=f_X(\mu_1)f_Y(\mu_2)$.

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}\Rightarrow\sqrt{1-\rho^2}=1\Rightarrow\rho=0$$

例　讨论下面D.R.V. (X,Y)的独立性.

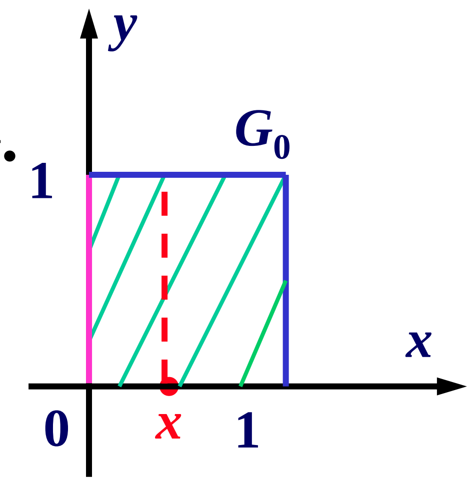
$X \backslash Y$	-1	0	2	$p_{i\cdot}$
1/2	$2/20$	$1/20$	$2/20$	$1/4$
1	$2/20$	$1/20$	$2/20$	$1/4$
2	$4/20$	$2/20$	$4/20$	$1/2$
$p_{\cdot j}$	$2/5$	$1/5$	$2/5$	

$\because p_{ij} = p_{i\cdot}\,p_{\cdot j} \quad i, j = 1, 2, 3$　故X与Y独立.

例 设(X,Y)在下列区域上服从均匀分布, X,Y是否独立?

$(1)\ G_0 = \{(x,y): 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}.$

$(2)\ G = \{(x,y): 2x + y \le 2, x \ge 0, y \ge 0\}.$



解 (1) $f(x,y) = \begin{cases} 1, & (x,y) \in G_0, \\ 0 & \text{其它}. \end{cases}$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \begin{cases} \int_0^1 1dy = 1, & 0 \le x \le 1, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

同理, $f_Y(y) = \begin{cases} 1, & 0 \le y \le 1, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$

$\therefore f(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$, 故$X,Y$相互独立。

思考 什么时候均匀分布的边缘分布是均匀分布?

小结

- 熟练掌握二维D.R.V.(C.R.V.)的边缘分布列(边缘密度)的计算
- 会根据定义式求二维D.R.V.(C.R.V.)的条件分布
- 深入理解R.V.独立的定义和性质，据此熟练证明随机变量独立与否

3.4 多维R.V.的函数的分布

设$z=g(x,y)$为一函数，令$Z=g(X,Y)$, 其中X,Y为R.V., 若Z也为R.V.，称 Z为R.V. (X,Y)的函数。

问题：已知(X,Y)的分布或X和Y的分布，如何求Z的分布？

3.4 多维R.V.的函数的分布

一 多维离散情形

二 多维连续情形

1. 分布函数法
2. 公式法(和，商，最大(小)值分布公式)

三 一般情形（混合）

1. 分布函数法

一 多维离散情形

例 已知(X,Y)的分布列如表，

求$X+Y$，XY的分布。

$X \backslash Y$	0	2	-2
1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$
-1	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$

解

P	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$
(X,Y)	(1,0)	(1,2)	(1,-2)	(-1,0)	(-1,2)	(-1,-2)
$X+Y$	1	3	-1	-1	1	-3
XY	0	2	-2	0	-2	2

$X+Y$	-3	-1	1	3
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{5}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$

XY	-2	0	2
P	$\frac{4}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{2}{10}$

例 设$X\sim P(\lambda_1)$, $Y\sim P(\lambda_2)$且相互独立，求 $Z=X+Y$ 的分布。

解 $P(Z=k)=P(X+Y=k)$ $\quad k=0,1,2\cdots$

$$=\sum_{i=0}^{k}P(X=i)P(Y=k-i)$$

$$=\sum_{i=0}^{k}\frac{\lambda_1^i e^{-\lambda_1}}{i!}\ \frac{\lambda_2^{k-i}e^{-\lambda_2}}{(k-i)!}$$

$$=\left[\sum_{i=0}^{k}\frac{k!}{i!(k-i)!}\lambda_1^i\lambda_2^{k-i}\right]\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!}$$

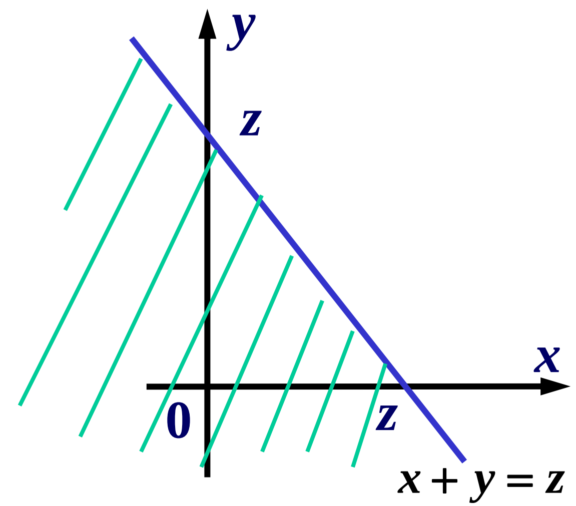
$$=(\lambda_1+\lambda_2)^k\ \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!}$$

$X+Y\sim P(\lambda_1+\lambda_2)$.

二 多维连续情形

1. 分布函数法

例 设(X,Y)的概率密度为$f(x,y)$，求$Z=X+Y$的概率密度。



解 $F_Z(z)=P(Z\le z)=P(X+Y\le z)$

$$=\iint\limits_{x+y\le z} f(x,y)\,dxdy$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{z-x} f(x,y)\,dy$$

$$\overset{x+y=t}{=}\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{z} f(x,t-x)\,dt=\int_{-\infty}^{z}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,t-x)\,dx\right]dt$$

$$\therefore\ f_Z(z)=F'(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)\,dx.$$

1. 公式法 设(X,Y)的概率密度为$f(x,y)$.

(1)和的分布 $Z=X+Y$的概率密度为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)dx \overset{或}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y,y)dy.$$

特别，若X,Y相互独立，则

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx \overset{或}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y)f_Y(y)dy.$$

(2)商的分布 $Z=X/Y$的概率密度为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} |y|f(zy,y)dy.$$

例 设$X\sim N(0,1)$与$Y\sim N(0,1)$独立，求$Z=X+Y$的分布。

解

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y)\,f_Y(y)dy$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(z-y)^2}{2}}\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy$$

$$=\frac{(1/\sqrt{2})}{\sqrt{2\pi}}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}(1/\sqrt{2})}\exp[-\frac{(y-z/2)^2}{2(1/\sqrt{2})^2}]dy\right]\ e^{-\frac{z^2}{4}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}}\ e^{-\frac{z^2}{2(\sqrt{2})^2}},\qquad X+Y\sim N(0,\ 2).$$

一般的，若$X_i\sim N(\mu_i,\ \sigma_i^2)$, $i=1,2,\dots,n$,相互独立, 则对任何实数$a_1,\dots,a_n$,

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\sim N(\sum_{i=1}^{n} a_i\mu_i,\ \ \sum_{i=1}^{n} a_i^2\sigma_i^2)}$$

例 设$X\sim U[0,1]$, $Y\sim U[0,1]$, 且X与Y相互独立, 求$Z=X+Y$的密度函数。

解
$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

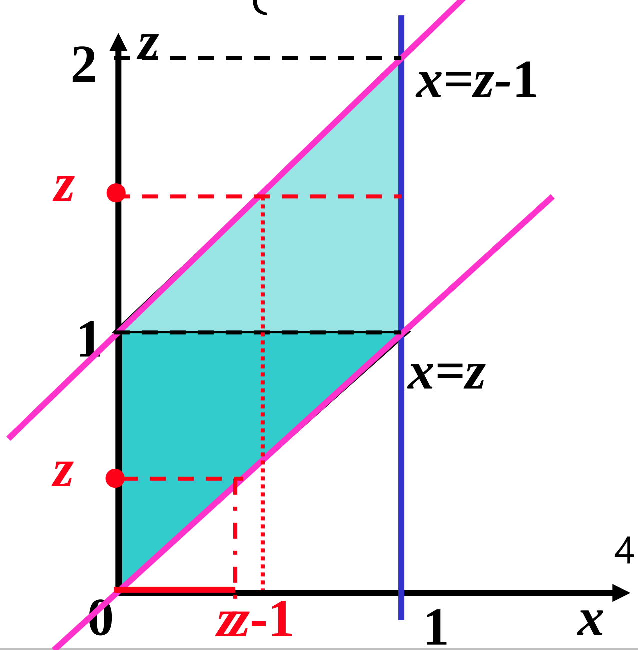
$$f_Y(y)=\begin{cases}1, & 0\le y\le 1,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx$$

$$=\begin{cases}\int_0^z dx=z, & 0\le z<1\\ \int_{z-1}^1 dx=2-z, & 1\le z<2\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

注意到被积函数的非零区域为:

$$\begin{cases}0\le x\le 1\\ 0\le z-x\le 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0\le x\le 1\\ x\le z\le 1+x\end{cases}$$

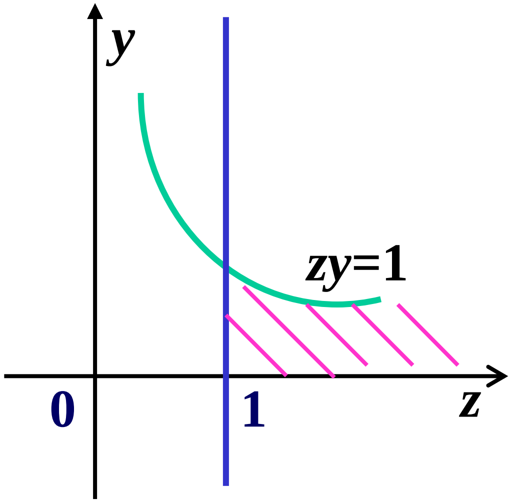


例　设(X,Y)的联合概率密度如下，求$Z=X/Y$的分布.

$$f(x,y)=\begin{cases}3x, & 0<x<1, 0<y<x,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

解　$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|y|f(zy,y)dy$$

$$\begin{cases}0<zy<1\\ 0<y<zy\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0<y<1/z\\ 1<z\end{cases}$$



$$=\begin{cases}0, & z\le 1,\\ \int_0^{1/z} y\cdot 3zydy=z^{-2}, & z>1.\end{cases}$$

(3) $\max\{X_1,\ldots,X_n\}$, $\min\{X_1,\ldots,X_n\}$的分布

设$X_1,\cdots,X_n$为相互独立的随机变量，分布函数分别为$F_1(x_1),\cdots,F_n(x_n)$.

$$F_{\max}(x)=P\{\max\{X_1,\cdots,X_n\}\le x\}=F_1(x)\cdots F_n(x).$$

$$=P\{X_1\le x,\cdots,X_n\le x\}=P(X_1\le x)\cdots P(X_n\le x)$$

$$F_{\min}(x)=P\{\min\{X_1,\cdots,X_n\}\le x\}=1-[1-F_1(x)]\cdots[1-F_n(x)].$$

$$=1-P\{\min\{X_1,\cdots,X_n\}>x\}=1-P(X_1>x,\cdots,X_n>x)$$

$$=1-P(X_1>x)\cdots P(X_n>x)$$

$$f(x)=F'(x).$$

三 一般情形 ——分布函数法

例 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$,Y的分布列为

Y	-1	1
P	1/3	2/3

且X,Y独立，求$Z=XY$的分布。

解 $F_Z(z)=P(Z\le z)=P(XY\le z)$

$$=P(XY\le z\,|\,Y=-1)P(Y=-1)+P(XY\le z\,|\,Y=1)P(Y=1)$$

$$=P(-X\le z\,|\,Y=-1)\cdot 1/3+P(X\le z\,|\,Y=1)\cdot 2/3$$

$$=1/3\cdot P(X\ge -z)+2/3P(X\le z)$$

$$=\frac{1}{3}\cdot(1-\Phi(\frac{-z-\mu}{\sigma}))+\frac{2}{3}\cdot\Phi(\frac{z-\mu}{\sigma})=\frac{1}{3}\cdot\Phi(\frac{z+\mu}{\sigma})+\frac{2}{3}\cdot\Phi(\frac{z-\mu}{\sigma})$$

$$\therefore f_Z(z)=F'(z)=\frac{1}{3\sigma}\cdot\varphi(\frac{z+\mu}{\sigma})+\frac{2}{3\sigma}\cdot\varphi(\frac{z-\mu}{\sigma}).$$

小结

- 熟练求解二维D.R.V.函数的分布列
- 熟练掌握二维C.R.V.函数的概率密度求解方法

  1. 分布函数法(万能方法)

  2.公式法(和，商，最大最小的分布)

- 掌握一般二维R.V.函数的分布(分布函数法与全概率公式的结合)

解答题

练

习

1.(14’)设二维随机变量(X,Y)的密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases} 24y(1-x) & 0\le x\le 1,\ 0\le y\le x, \\ 0 & \text{其它}. \end{cases}$$

(1)求关于X及Y的边缘密度函数；
(2)判断X与Y是否独立，并说明理由；
(3)求$Z=X+Y$的密度函数。

(提示：C.R.V.的边缘密度，独立，和的分布计算和证明)

解答题

练

习

2.(8’)某箱装有100件产品，其中一，二和三等品分别为80，10和10件，现从中随机地抽取一件，记

$$Z_i=\begin{cases}1, & \text{若抽到}i\text{等品}, \\ 0, & \text{其它}.\end{cases} \quad (i=1,2,3)$$

试求随机变量Z_1和Z_2的联合概率分布。

(提示：二维离散型随机变量分布列的计算)

解答题

练

习

3.(10') 设随机变量(X,Y)在矩形$G=\{(x,y):0<x<2,\ 0<y<1\}$上服从均匀分布，记

$$U=\begin{cases}0, & 若X\le Y,\\ 1, & 若X>Y,\end{cases}\qquad V=\begin{cases}0, & 若X\le 2Y,\\ 1, & 若X>2Y,\end{cases}$$

(1)求(U,V)的联合分布；(2)求U与V的相关系数。

(提示：D.R.V.的分布的计算，相关系数的计算)

解答题

练

习

4.(10’)设随机变量(X,Y)的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}(3/2)x, & 0<x<1, -x<y<x, \\ 0, & \text{其它。}\end{cases}$$

(1)求关于X及Y的边缘密度函数;

(2)X与Y是否独立?

(3)求$Z=X+Y$的密度函数。

(提示：二维C.R.V.的边缘密度,和的分布的计算，独立性的证明)

解答题

练习

5.(8’)设随机变量(X,Y)的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-(x+y)}, & x>0, y>0, \\ 0, & \text{其它。} \end{cases}$$

求(1)$Z=X+Y$的密度函数;

(2)$W=(1/2)(X+Y)$的密度函数。

(提示:C.R.V.函数的分布)

解答题

练

习

6.(8’)设随机变量(X,Y)的联合概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}1/\pi, & x^2+y^2\le 1,\\ 0, & \text{其它。}\end{cases}$$

问X与Y是否相互独立，是否不相关？并说明理由。

(提示：二维C.R.V.的边缘密度的计算，独立性的证明)

解答题(2010考研数一)

练

习

7.(11’)设随机变量(X,Y)的联合概率密度函数为

$$f(x,y)=Ae^{-2x^2+2xy-y^2},\ -\infty<x,y<+\infty,$$

求常数A及条件密度$f_{Y|X}(y|x)$.

Key: $A=\pi^{-1}, f(y|x)=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2+2xy-y^2}$

(提示：二维C.R.V.的边缘密度的计算，密度函数的规范性)

第三章结束!

THE END