2018 ～ 2019 学年第一学期

《复变函数与积分变换》课程考试试卷(A卷) (闭卷)

院(系)____________专业班级______________学号_________________姓名_____________

考试日期：2018 年 12 月 2 日　　　　　　　　　　　　　　考试时间：8:30 ~ 11:00

一、单项选择题（*每题 2 分，共 24 分*）.

1. 复数 $3-2i$的主辐角为：(　C　)

A. $-\arctan\frac{3}{2}+\pi$，　　B. $-\arctan\frac{2}{3}+\pi$，　　C. $-\arctan\frac{2}{3}$，　　D. $-\arctan\frac{3}{2}$.

2. $\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}\right)^{10}$的值为：(　B　)

A. $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$，　　B. $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$，　　C. $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$，　　D. $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

3. 在复平面上，下列哪个方程不能表示以z_0为圆心，以$r(>0)$为半径的圆周？ (　C　)

A. $|z-z_0|=r$，　　B. $|z|^2-z_0\bar{z}-\bar{z_0}z+|z_0|^2-r^2=0$，

C. $(z-z_0)^2=r^2$，　　D. $z=z_0+re^{-i\theta}(0\le\theta\le 2\pi)$.

4. 若复变函数$f(z)=v+ui$在区域 D 内解析，则在区域 D 内下列说法一定正确的是：(A　)

A. u是v的共轭调和函数，　　B. v是u的共轭调和函数.

C. $-u$是v的共轭调和函数，　　D. u是$-v$的共轭调和函数.

5. 若曲线 C 为 $z=t-t^2 i, 0\le t\le 1$，则积分 $\int_C (z-1)dz$的值为：(　B　)

A. 1，　　B. -1，　　C. $1+i$，　　D. $1-i$.

6. 积分$\oint_{|z|=1}(\frac{z}{\bar{z}}+\frac{\bar{z}}{z})\,dz$的值为：(　C　)

A. $2\pi i$，　　B. $4\pi i$，　　C. 0，　　D. $-2\pi i$.

7. 若幂级数$\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(z-1)^n$ 在点$z=3$收敛，则该级数一定收敛的点为： (D)

A. $-2+\sqrt{3}i$，　　B. $2+\sqrt{3}i$，　　C. $-1+\sqrt{3}i$，　　D. $1+\sqrt{3}i$.

8. 函数$f(z)=\frac{1}{z}+1+2z$ 在无穷远点的留数为： (　A　)

A. -1，　　B. 1，　　C. -2，　　D. 2.

9. $z=0$是函数$f(z)=\frac{1}{cos\frac{1}{z}}$ 的 (　D　).

A. 可去奇点，　　B. 本性奇点，　　C. 极点，　　D. 非孤立奇点.

10. 级数$\sum_{n=0}^{+\infty}(\frac{2^n}{z^{n+1}}+\frac{z^n}{3^{n+1}})$的收敛环域为：(　B　)

A. $\frac{1}{2}<|z|<3$，　　B. $2<|z|<3$，　　C. $\frac{1}{3}<|z|<2$，　　D. $\frac{1}{3}<|z|<\frac{1}{2}$.

11. 函数$F(\omega)=e^{j\omega}$的 Fourier 逆变换$f(t)$为：(D　)

A .$2\pi\delta(t-1)$，　　B．$2\pi\delta(t+1)$，　　C．$\delta(t-1)$，　　D．$\delta(t+1)$.

12. 函数$f(t)=(t-1)\,(sint\,)\delta(t-2)$的 Fourier 变换$F(\omega)$为：（A）.

A．$e^{-2\omega j}\,sin\,2$，　　B .0，　　C .$e^{2\omega j}\,sin\,2$，　　D．$sin\,2$.

二、(*12 分*) 已知$u(x,y)=2(x-1)y$，验证$u(x,y)$为调和函数，并求二元函数$v(x,y)$，使得函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$为解析函数，且满足$f(2)=-i$.

三、(*12 分*) 将函数$f(z)=\frac{1}{(z-2)(z-4)}$在点$z_0=3$展开为 Laurent 级数。

四、计算下列积分(*每题 5 分，共 10 分*).

1. $\oint_{|z|=2}\frac{\cos z}{(z-\frac{\pi}{2})^{10}}\,dz.$　　　2. $\oint_{|z|=2}\frac{z}{1-z}e^{\frac{1}{z}}\,dz.$

五、计算下列积分(*每题 5 分，共 10 分*).

1. $\int_0^{+\infty}\frac{x^2cos\sqrt{2}x}{x^4+1}\,dx.$　　　2. $\oint_{|z|=2}\frac{z^{33}}{(z^3+3)^3(z^5+5)^5}\,dz.$

六、(*6 分*) 求区域$D=\{z=x+yi:\ -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2},\ y>0\}$在映射$w=\sqrt{\frac{i+e^{iz}}{i-e^{iz}}}$下的像.（**答题过程需用图形表示**）

七、(*10 分*) 求一共形映射$w=f(z)$，将z平面上的区域$D=\{z:\ |z|<1，|z+\sqrt{3}|<2\}$映射到$w$平面的上半平面.（**答题过程需用图形表示**）

八、(*10 分*) 利用 Laplace 变换求解下面常微分方程：

$$x''(t)+x(t)=-3\cos 2t,\quad x(0)=1，,x'(0)=1.$$

九、(*6 分*) 设函数$f(z)$在$|z-z_0|<R$内除z_0为一阶极点外处处解析,且仅有一个一阶零点z_1，$|z_1-z_0|<r<R$，证明：$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-z_0|=r}\frac{zf'(z)}{f(z)}\,dz=z_1-z_0.$

2018-2019学年第一学期《复变函数与积分变换》A卷参考答案

一. CBCAB CDADB DA

二. 解 (1). $\because \frac{\partial u}{\partial x} = 2y$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$

$\frac{\partial u}{\partial y} = 2(x-1)$ $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

$\therefore \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. 即 u 为调和函数

(2) 由 C-R 方程可得

$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 2y$ ... ①

$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = -2(x-1)$ ... ②

① 式关于 y 偏积分可得

$v(x,y) = y^2 + \varphi(x)$

代入 ① 式: $\varphi'(x) = -2(x-1)$

$\therefore \varphi(x) = -x^2 + 2x + c$

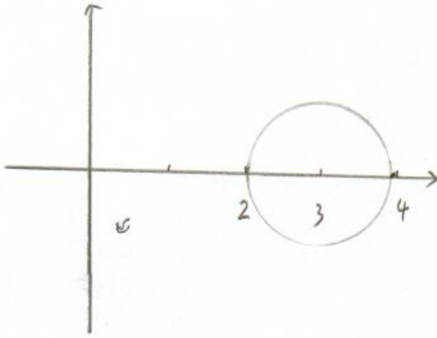
$\therefore v(x,y) = y^2 - x^2 + 2x + c$

即 $f(z) = u + vi = 2(x-1)y + (y^2 - x^2 + 2x + c)i$

由条件 $f(2) = -i$ 得 $c = -1$

$\therefore v(x,y) = y^2 - x^2 + 2x - 1$

三. 解：∵函数 $f(z)$ 在复平面上有两个奇点 $z=2$ 及 $z=4$，因此可分为两个解析环 $0\leq|z-3|<1$ 和 $1<|z-3|<+\infty$



① 当 $0\leq|z-3|<1$ 时

$$f(z)=\frac{1}{(z-2)(z-4)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-4}-\frac{1}{z-2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-3-1}-\frac{1}{z-3+1}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left[-\sum_{n=0}^{+\infty}(z-3)^n-\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(z-3)^n\right]$$

$$=-\frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{+\infty}(z-3)^n+\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(z-3)^n\right]$$

$$=-\sum_{n=0}^{+\infty}(z-3)^{2n}$$

② 当 $1<|z-3|<+\infty$ 时

$$f(z)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-3-1}-\frac{1}{z-3+1}\right)$$

$$=\frac{1}{2(z-3)}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{z-3}}-\frac{1}{1+\frac{1}{z-3}}\right)$$

$$=\frac{1}{2(z-3)}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z-3)^n}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(z-3)^n}\right)$$

$$=\frac{1}{2(z-3)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{(z-3)^{2n+1}}$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(z-3)^{2n+2}}.$$

四解. 1. ∵被积函数在 $|z|<2$ 内仅一个孤立奇点 $z=\frac{\pi}{2}$.

∴由高阶导数定理可得.

$$\oint_{|z|=2} \frac{\cos z}{(z-\frac{\pi}{2})^{10}}\,dz = 2\pi i \left.\frac{(\cos z)^{(9)}}{9!}\right|_{z=\frac{\pi}{2}}$$

$$= 2\pi i \left.\frac{-\sin z}{9!}\right|_{z=\frac{\pi}{2}} = -\frac{2\pi i}{9!}$$

2. ∵函数 $f(z)=\frac{z}{1-z}e^{\frac{1}{z}}$ 在 $|z|<2$ 内有两个孤立奇点.

$z=1$ 为一阶极点, $z=0$ 为本性奇点.

$$\because \operatorname{Res}[f(z),1] = \lim_{z\to 1}(z-1)f(z) = \left.-z e^{\frac{1}{z}}\right|_{z=1} = -e$$

$\operatorname{Res}[f(z),0]$ 可由洛朗展式得到.

$$f(z) = z\left(\frac{1}{1-z}\right)e^{\frac{1}{z}} = z(1+z+z^2+\cdots)\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{3!z^3}+\cdots\right)$$

$$= \cdots + \left(\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots\right)\frac{1}{z}+\cdots$$

$$\therefore \operatorname{Res}[f(z),0] = \frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots = \left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots\right)-2$$

$$= e-2$$

$$\therefore \text{积分} = 2\pi i\left[\operatorname{Res}[f(z),1]+\operatorname{Res}[f(z),0]\right]$$

$$= 2\pi i(-e+e-2) = -4\pi i$$

另解: ∵ $f(z)$ 在 $|z|=2$ 的外部只有 ∞ 为孤立奇点.

∴ $f(z)$ 在 ∞ 的邻域内展开为

$$f(z) = \frac{z}{1-z}e^{\frac{1}{z}} = \frac{1}{\frac{1}{z}-1}e^{\frac{1}{z}}$$

$$= -\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots\right)\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!\,z^2}+\cdots\right)$$

$$= \cdots -2\frac{1}{z}+\cdots \qquad \therefore \operatorname{Res}[f(z),\infty] = 2$$

$$\text{积分} = -2\pi i \operatorname{Res}[f(z),\infty] = -2\pi i\cdot 2 = -4\pi i$$

五. 解: 1. $\int_0^{+\infty} \frac{x^2 \cos\sqrt{2}x}{x^4+1} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 \cos\sqrt{2}x}{x^4+1} dx$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 e^{i\sqrt{2}x}}{x^4+1} dx$$

设 $R(z) = \frac{z^2 e^{i\sqrt{2}z}}{1+z^4}$, 则 $R(z)$ 在上半复平面内有两个一阶极点 $\frac{\sqrt{2}(1+i)}{2}$ 和 $\frac{\sqrt{2}(-1+i)}{2}$

$$\operatorname{Res}\left[R(z), \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\right] = \left.\frac{z^2}{4z^3} \cdot e^{i\sqrt{2}z}\right|_{z=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)}$$

$$= \frac{e^{-1+i}}{2\sqrt{2}(1+i)}$$

$$\operatorname{Res}\left[R(z), \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)\right] = \left.\frac{z^2}{4z^3} e^{i\sqrt{2}z}\right|_{z=\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)}$$

$$= \frac{e^{-1-i}}{2\sqrt{2}(-1+i)}$$

$$\therefore \text{原式} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \cdot 2\pi i \left[\frac{e^{-1+i}}{2\sqrt{2}(1+i)} + \frac{e^{-1-i}}{2\sqrt{2}(-1+i)}\right]$$

$$= \operatorname{Re} \pi i \cdot \frac{e^{-1}}{2\sqrt{2}} \left[\frac{e^{i}}{1+i} + \frac{e^{-i}}{-1+i}\right]$$

$$= \operatorname{Re} \pi i \frac{1}{2\sqrt{2}e} \left(\frac{(\cos 1 + i\sin 1)(1-i)}{2} + \frac{(\cos 1 - i\sin 1)(-1-i)}{2}\right)$$

$$= \operatorname{Re} \pi i \frac{1}{2\sqrt{2}e} (\sin 1 - \cos 1) i$$

$$= \frac{(\sin 1 - \cos 1)\pi}{2\sqrt{2}e}$$

2. 解: ∵ 被积函数在 $|z|=2$ 外只有无穷远点一个孤立奇点

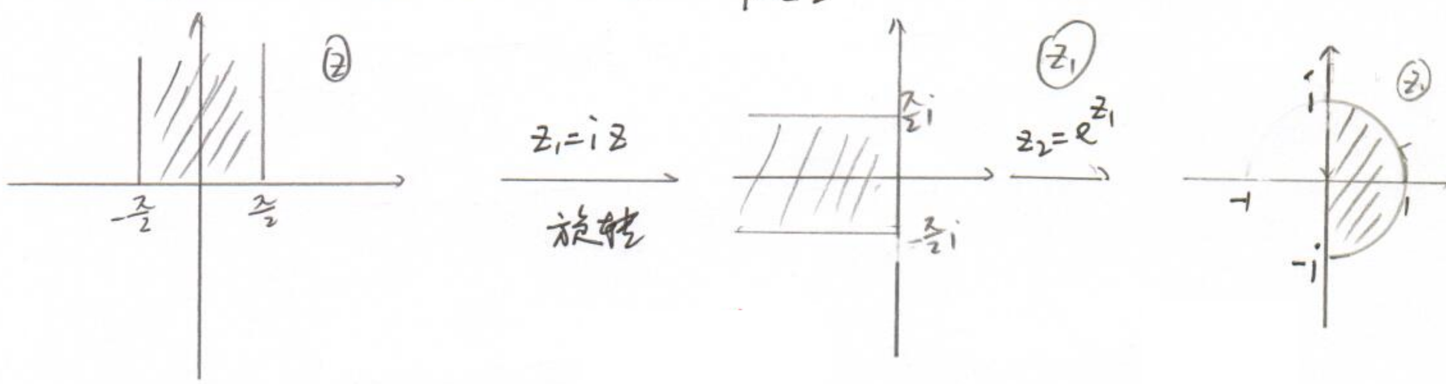
$$\therefore \oint_{|z|=2} \frac{z^{33}}{(z^3+3)^3(z^5+5)^5} dz = -2\pi i \operatorname{Res}\left[\frac{z^{33}}{(z^3+3)^3(z^5+5)^5}, \infty\right]$$

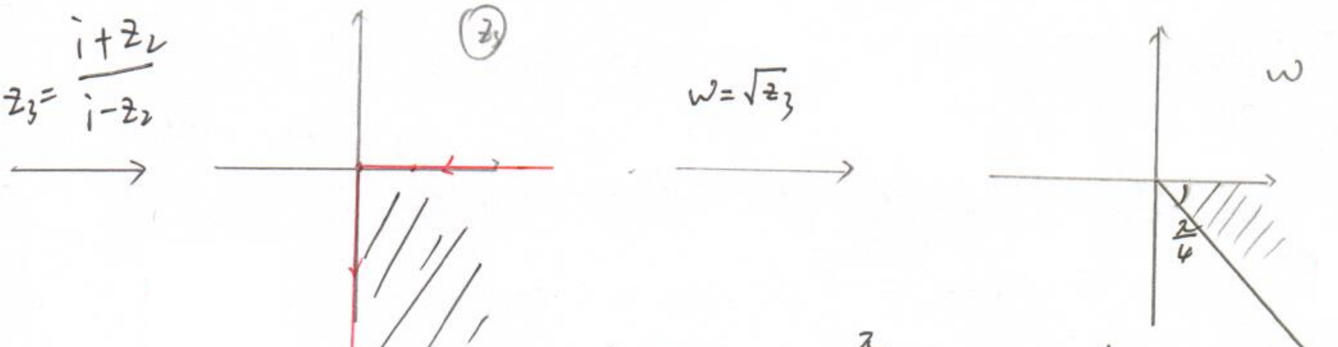
$$= 2\pi i \operatorname{Res}\left[\frac{\left(\frac{1}{z}\right)^{33}}{\left(\frac{1}{z^3}+3\right)^3\left(\frac{1}{z^5}+5\right)^5} \cdot \frac{1}{z^2}, 0\right]$$

$$= 2\pi i \operatorname{Res}\left[\frac{1}{(1+3z^3)^3(1+5z^5)^5} \cdot \frac{1}{z}, 0\right] = 2\pi i$$

六、解：映射 $w=\sqrt{\dfrac{i+e^{iz}}{i-e^{iz}}}$ 可分解为下列映射的复合。

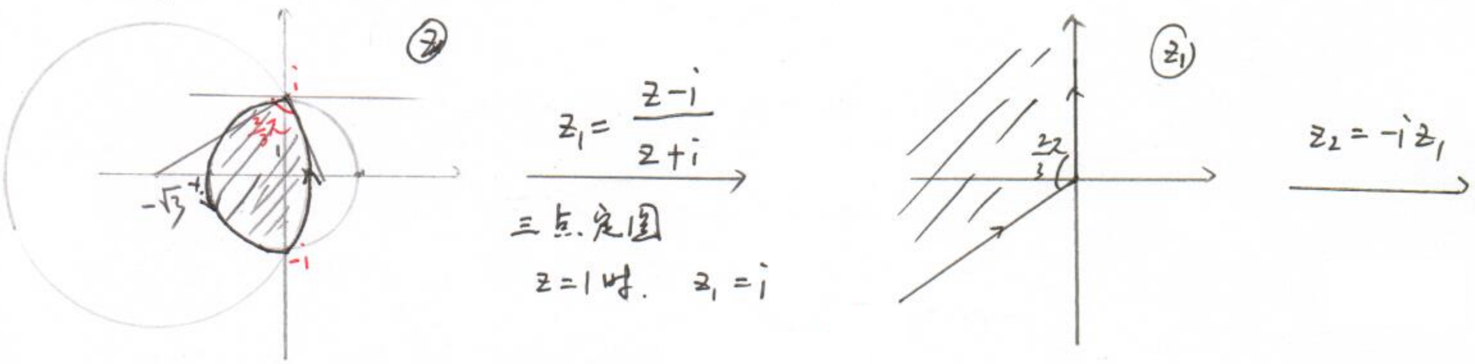
$z_1=iz$，$z_2=e^{z_1}$，$z_3=\dfrac{i+z_2}{i-z_2}$，$w=\sqrt{z_3}$

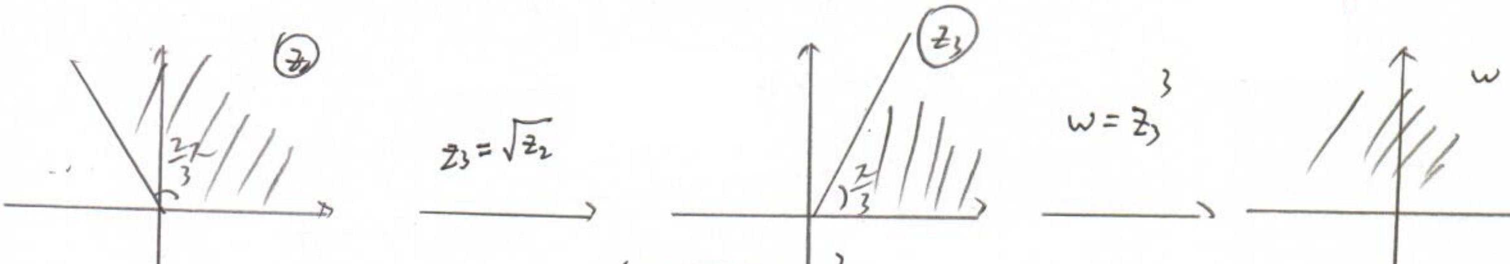




∴像域为 $\{w: -\frac{\pi}{4}<\arg w<0\}$.

七、解：分析可得两圆交点为 $\pm i$，且夹角为 $\frac{2}{3}\pi$。





∴共形映射为 $w=\left(\sqrt{-i\dfrac{z-i}{z+i}}\right)^3$

八. 解: 记 $X(s)=\mathcal{L}(x(t))$. 对方程两边作拉氏变换得

$$s^2X(s)-sx(0)-x'(0)+X(s)=-3\cdot\frac{s}{s^2+4}$$

即 $$s^2X(s)-s-1+X(s)=\frac{-3s}{s^2+4}$$

$$\therefore (s^2+1)X(s)=s+1-\frac{-3s}{s^2+4}=\frac{s^3+s^2+s+4}{s^2+4}$$

解得 $$X(s)=\frac{s^3+s+s^2+4}{(s^2+4)(s^2+1)}=\frac{s}{s^2+4}+\frac{1}{s^2+1}$$

作拉氏逆变换 $x(t)=\mathcal{L}^{-1}(X(s))=\cos 2t+\sin t$

九. 解: ∵ $f(z)$ 在 $|z|<R$ 仅有一个一阶零点 z_1, 一个一阶极点 z_0 则

$$f(z) = \frac{z-z_1}{z-z_0}\varphi(z), \quad \varphi(z) \text{ 在 } |z|<R \text{ 内解析且无零点}$$

$$\because f'(z) = \frac{[(z-z_1)\varphi(z)]'(z-z_0) - (z-z_1)\varphi(z)}{(z-z_0)^2}$$

$$= \frac{\varphi(z)(z-z_0) + (z-z_1)(z-z_0)\varphi'(z) - (z-z_1)\varphi(z)}{(z-z_0)^2}$$

$$\therefore \frac{zf'(z)}{f(z)} = \frac{z\dfrac{\varphi(z)(z-z_0)+(z-z_1)(z-z_0)\varphi'(z)-(z-z_1)\varphi(z)}{(z-z_0)^2}}{\dfrac{z-z_1}{z-z_0}\varphi(z)}$$

$$= z\frac{\varphi(z)(z-z_0)+(z-z_1)(z-z_0)\varphi'(z)-(z-z_1)\varphi(z)}{(z-z_0)(z-z_1)\varphi(z)}$$

$$= \frac{z}{z-z_1} - \frac{z}{z-z_0} + \frac{z\varphi'(z)}{\varphi(z)} \qquad \because \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} \text{ 解析}$$

$$\therefore \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-z_0|=r}\frac{zf'(z)}{f(z)}dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-z_0|=r}\left(\frac{z}{z-z_1} - \frac{z}{z-z_0} + \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}\right)dz$$

由柯西积分公式,

$= z_1 - z_0$. 证毕.

另证. 也可分两步计算:

(1) ∵ z_0 为一阶极点 ∴ $f(z) = \dfrac{\varphi_1(z)}{z-z_0}$, $\varphi_1(z)$ 在 z_0 处解析

$$\therefore f'(z) = \frac{\varphi_1'(z)(z-z_0) - \varphi_1(z)}{(z-z_0)^2}, \qquad \therefore \frac{zf(z)}{f(z)} = z\frac{\varphi_1'(z)(z-z_0)-\varphi_1(z)}{(z-z_0)\varphi_1(z)}$$

$$= \frac{z\varphi_1'(z)}{\varphi_1(z)} - \frac{z}{z-z_0}$$

再根据 z_1 为 $f(z)$ 的零点, 即为 $\varphi_1(z)$ 的一阶零点

$$\varphi_1(z) = (z-z_1)\varphi(z) \qquad \therefore \frac{z\varphi_1'(z)}{\varphi_1(z)} = \frac{z\varphi'(z)}{\varphi(z)} + \frac{z}{z-z_1}$$

类似得证.