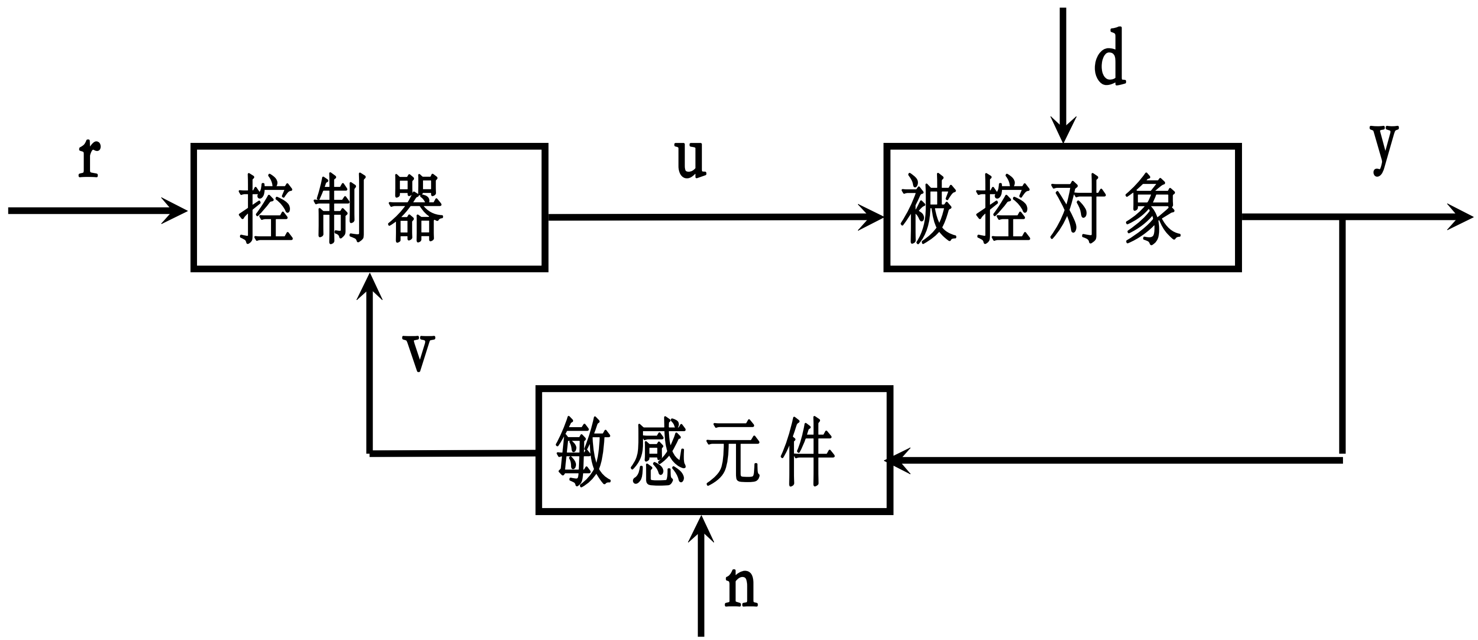


图1 传统反馈系统

问题：

如何设计控制器？

如何在控制器设计时体现人的经验？

讲解内容（today）

模糊控制是智能控制的重要组成部分，其数学基础对正确理解模糊控制重要。

第二章　模糊控制的数学基础（1）

2.1概述

2.1.1模糊概念

2.1.2模糊性与随机性

2.2模糊集合

2.2.1普通集合

2.2.2模糊集合

2.2.3模糊集合与普通集合的联系

第2章　模糊控制的数学基础（2）

2.3模糊关系与模糊关系合成

2.3.1模糊关系的基本概念

2.3.2模糊关系合成

2.3.3模糊关系的性质

2.4模糊推理

2.4.1模糊语言与语言变量

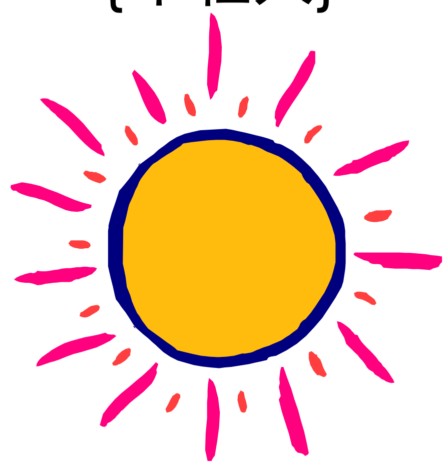
2.4.2模糊命题与模糊条件语句

2.4.3模糊推理

2.1.1 模糊概念

- 一些概念在特定的场合有明确的外延，例如国家、货币、法定年龄等。对于这些明确的概念，在现代数学里常常用经典集合来表示。如：集合A={法定年龄人群}，{大于6的实数}
- 还有一些概念在一些场合不具有明确的外延，例如年龄大小、冷与热，风的强弱等。这样的概念，相对于明确的概念，我们称之为模糊概念。B={年轻人}=?

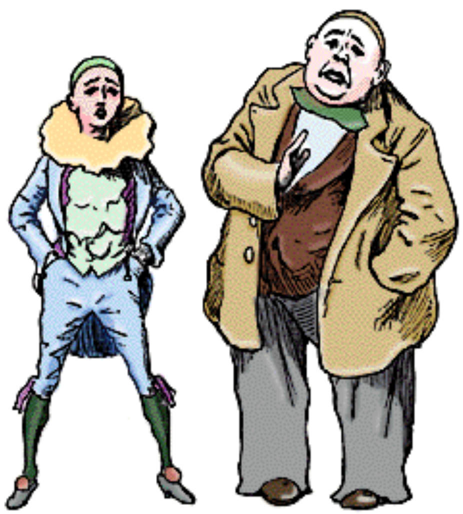
年龄大小



天气冷热

风的强弱

雨的大小



人的胖瘦

个子高低

传统的集合论在模糊概念面前就显得软弱无力了，**模糊集合论**正是处理模糊概念的有力工具。

客观世界中的模糊性、不确定性、含糊性等等有多种表现形式。在模糊集合论中主要处理没有精确定义的这一类模糊性，其主要有两种表现形式。

- ✓ 一是许多概念没有一个清晰的外延。例如我们不可能在年龄上划两道线，在两道线内就是**年轻人**，在其外就截然不是年轻人。
- ✓ 另一个是概念本身的开放性(Open Texture)，例如关于什么是聪明，我们永远不可能列举出它应满足的全部条件。**{聪明人}**

因此总是有不确定性存在，由于对象本身没有精确的定义，普通的集合论无法被应用。

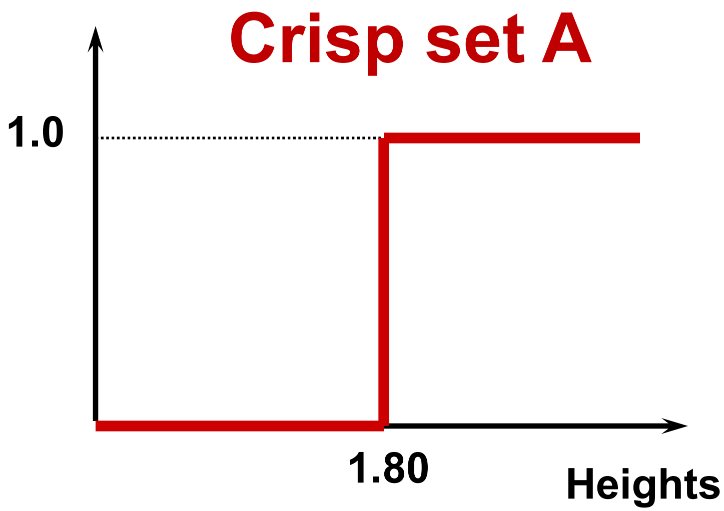
7

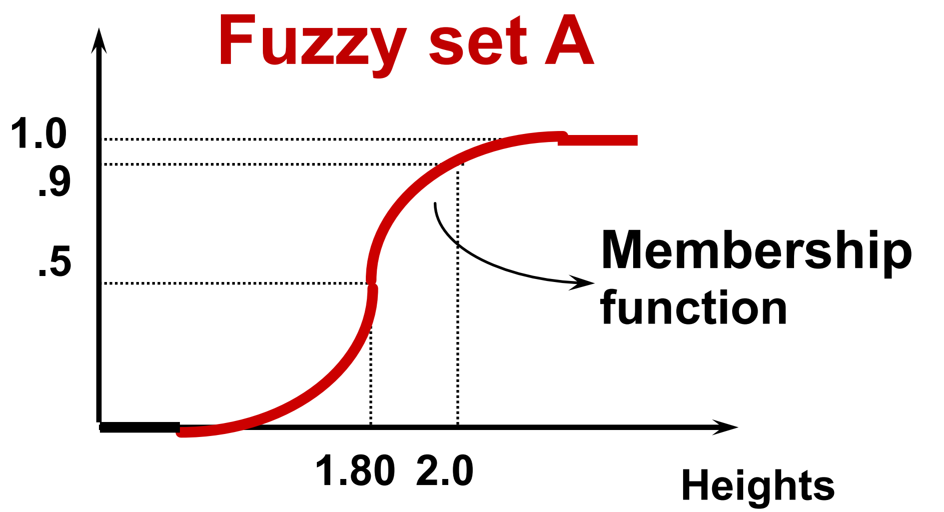
- 经典集合论中，一个元素x要么属于某个集合A：x ∈A,此时其特征函数值为1，要么x不属于某个集合A：x ∉ A,此时其特征值为0.
- 而模糊概念中没有这种非此即彼的现象，
- *L.A.Zadeh* 在模糊集合论中提出，将特征函数的取值由二值逻辑{0, 1}扩大到闭区间[0, 1]，用一个隶属函数$\mu_a(x)$表示x∈A的程度， $\mu_a(x)$的取值在0～1之间。

8

从经典集合过渡到模糊集合：（1.个子高于1.8米；2.个子高）

A = Set of tall people





2.1.2 模糊性与随机性

- 模糊集合研究的是不确定性，这种不确定性是事物本身形态和类属的不确定性。

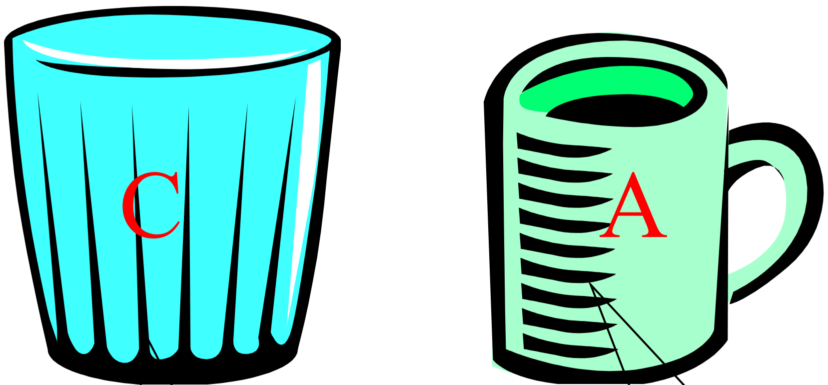
  例：降雨量，｛雨量大小｝

- 另一种不确定性 —— 随机性。随机性是在事件是否发生的表现出来的不确定性，而事件本身的形态和类属是确定的。

  例：投掷硬币，｛正反面｝

模糊与概率的差别：

口极渴的人饮用哪杯液体？



$L = \{可饮液体的集合\}$

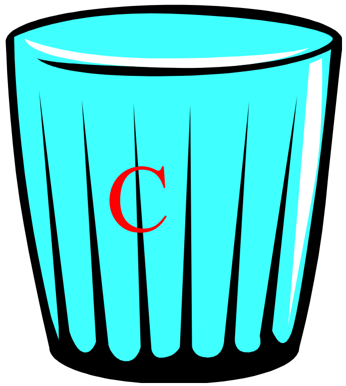
$\mu_L(C) = 0.91$

$P_r[A \in L] = 0.91$

模糊： 强调该饮料是否为可饮用饮料的属性

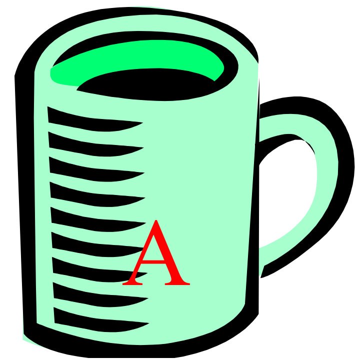
概率： 强调饮用该饮料的事件发生的可能性

啤酒



$$\mu_L(C) = 0.91$$

盐酸



$$P_r[A \in L] = 0$$

1）模糊隶属函数表示物体（对象）对不精确定义性质的相似程度。

2）概率把信息转变为事件发生或出现的频度。

 12

- 随机性—— 外在的不确定性，
- 模糊性 ——内在的不确定性。
- 概率论方法，事件出现的可信度[0, 1]中的一个数，关于它出现的知识的一个测量；
- 模糊性——对象无精确定义。必须要有一个函数X→[0, 1],即隶属函数来刻画它。
- 从信息观点看，随机性只涉及信息的量，模糊性关系到信息的意义、信息的定性。
- 模糊性是一种比随机性更深刻的不确定性，模糊性的存在比随机性的存在更为广泛。

2.2.1　普通集合

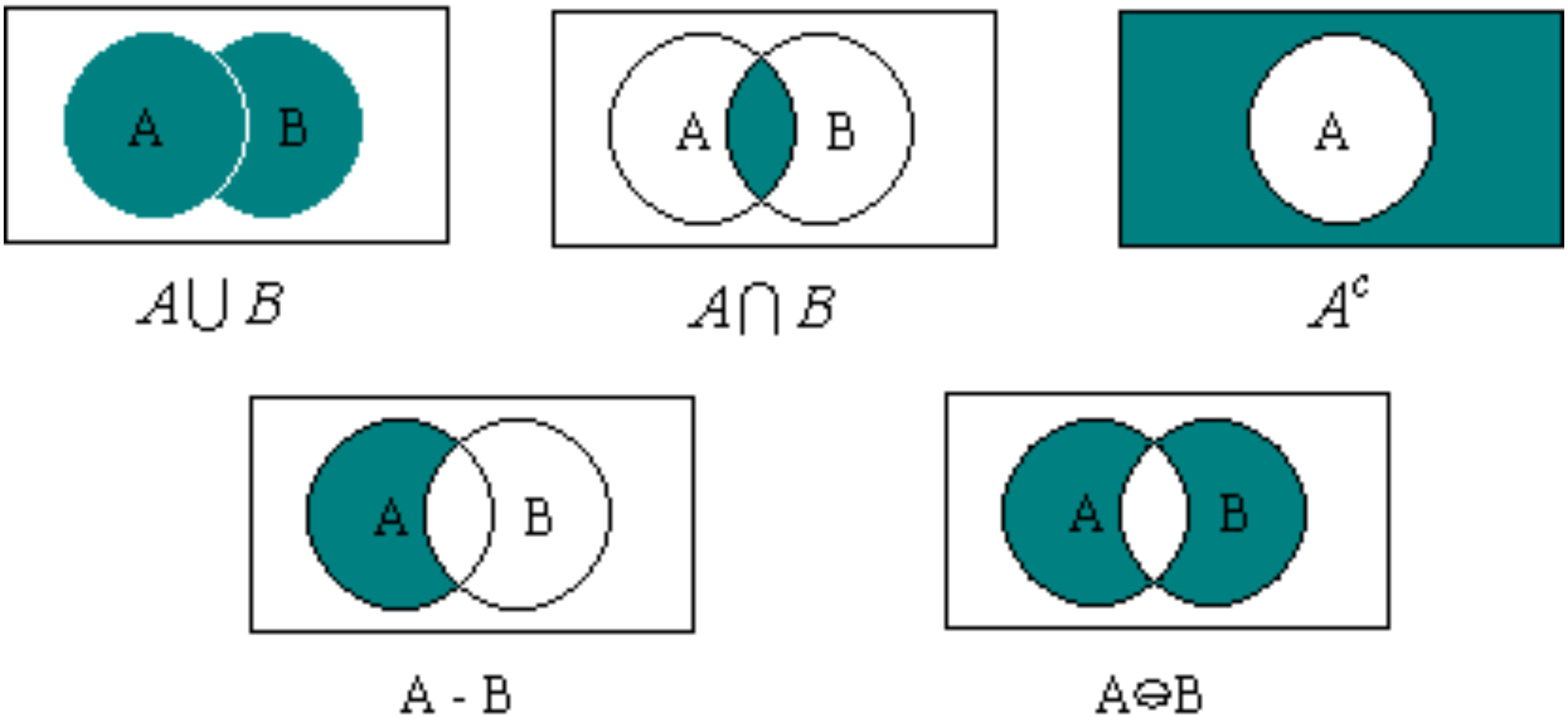
1. 集合的概念

回顾：论域，元素，集合的概念

集合的运算等

Why： 描述对象特性，用于分析，推理，控制。

- 以上集合的运算可以用图解来表示，称为文氏图(Veitch图)，如下图所示



集合运算示意图

2. 集合的运算性质

设A、B、C∈P(X)，其交、并等运算具有以下性质(注意到它们是成对出现的)；

① 幂等律$A\cup A=A, A\cap A=A$

② 交换律$A\cup B=B\cup A$, $A\cap B=B\cap A$

③ 结合律$(A\cup B)\cup C= A\cup(B\cup C)$，$(A\cap B)\cap C= A\cap(B\cap C)$

④ 分配律$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

⑤ 同一律$A\cup\Omega=\Omega$, $A\cap\Omega=A$

$A\cup \emptyset = A$，$A\cap \emptyset = \emptyset$

⑥ 复原律$(A^C)^C = A$

⑦ 互补律$A \cup A^C = \Omega, A \cap A^C = \emptyset$

⑧ 对偶性（也称”De-Morgan律”）

$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$

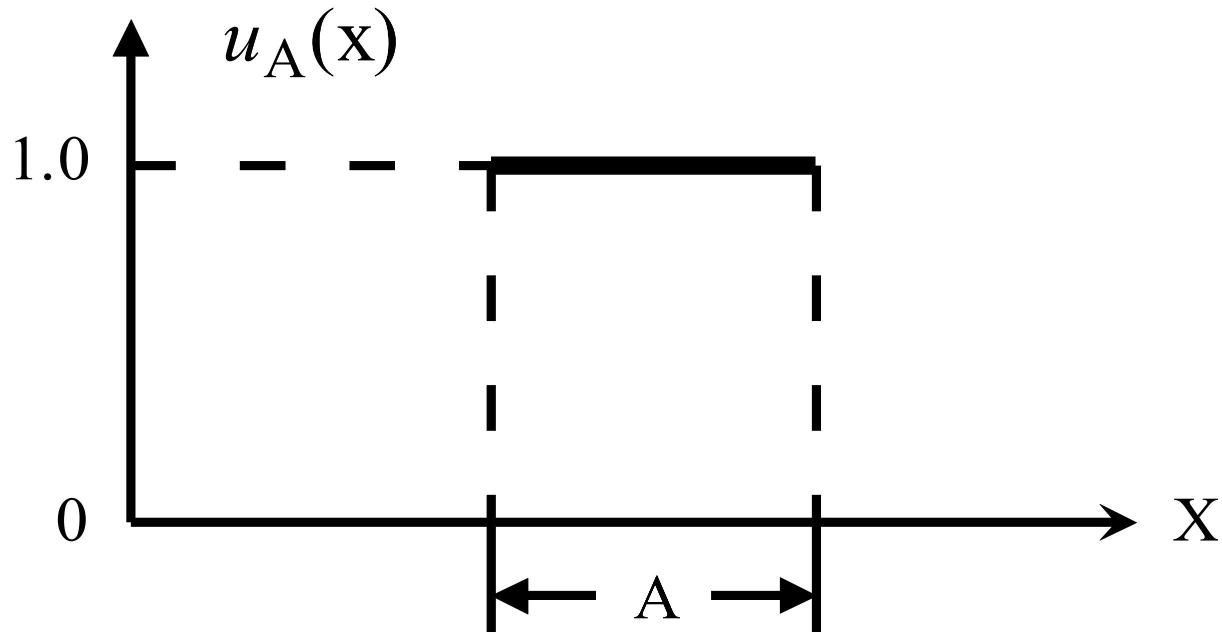
$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

3. 特征函数

设A是论域X上的集合，记

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & 当x \in A时 \\ 0, & 当x \notin A时 \end{cases} \qquad (6\text{-}10)$$

为集合A的特征函数，如图示：



式（6-10）表明，对于任给$x \in X$，都有唯一确定的特征函数$\mu_A(x) \in \{0, 1\}$与之对应，这样的对应关系称为映射。我们可以将A表示为

$$\mu_A(x): X \rightarrow \{0, 1\}$$

上式表明$\mu_A(x)$是从X到{0, 1}的一个映射，它唯一确定了集合A，

$$A = \{x | \mu_A(x) = 1\}$$

特征函数$\mu_A(x)$表征了元素x对集合A的隶属程度。

当$\mu_A(x)=1$时，表示x完全属于A；

当$\mu_A(x)=0$时，表示x完全不属于A。

2.2.2模糊集合

1. 模糊集合的概念

定义6.1 模糊集合：设X是论域，X上的一个实值函数用$\mu_A(x)$来表示，即

$\mu_A(x)$：$X \rightarrow [0, 1]$

对于x∈X，$\mu_A(x)$称为x对A的隶属度，而$\mu_A(x)$称为**隶属函数**。定义如下：

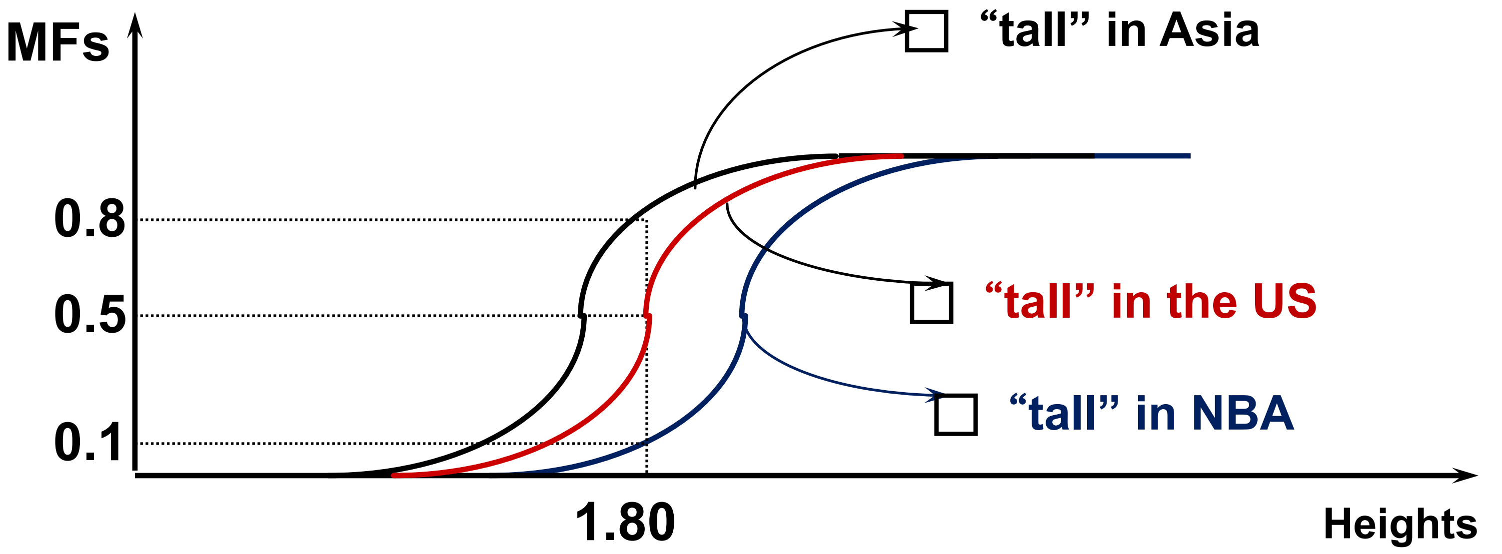
模糊集合A：$A = \{(x, \mu_A(x)) | x \in X\}$

函数$\mu_A(x)$：具体的数，其大小反映了x对于模糊集合A的隶属程度，表示x属于A的程度高低。

Membership Functions(MFs):

Characteristics of MFs:

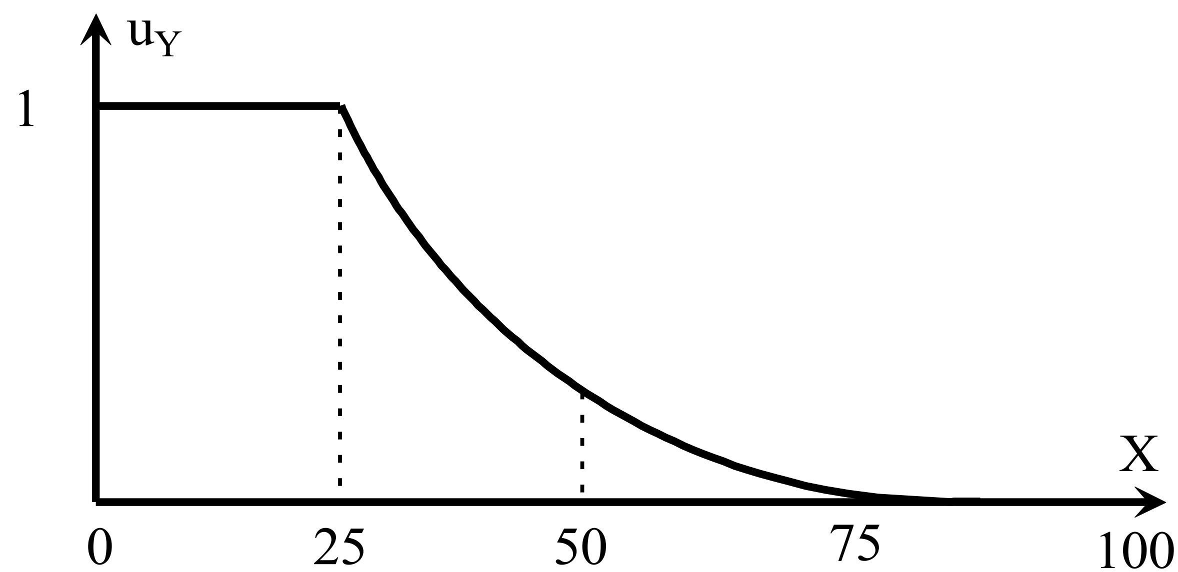
- Subjective measures
- Not probability functions



例6-1以年龄为论域，取X＝[0, 200]。Zadeh 给出“年轻”的模糊集Y，其隶属函数是

$$Y(x)=\begin{cases} 1, & 0\le x\le 25 \\ \left[1+\left(\dfrac{x-25}{5}\right)^2\right]^{-1}, & 25<x\le 100 \end{cases}$$

Y的图像用隶属函数



.

22

2。模糊集合的表达方式有以下几种：

① 向量表示法

当论域X为有限点集，即$X=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$时，X上的模糊集可以用向量A来表示，即

$$A=(\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n)$$

这里$\mu_i=A(x_i), i=1, 2, \ldots, n$ 。

- 一般地，若一向量的每个坐标都在[0, 1]之中，则称其为模糊向量。
- 在向量表示法中，隶属度**为零的项不能省略**。

② *Zadeh* 表示法

给定有限论域X＝{x_1, x_2, ..., x_n}，A为X上的模糊集合，

$$A = \frac{\mu_1}{x_1} + \frac{\mu_2}{x_2} + \cdots + \frac{\mu_n}{x_n}$$

- 其中 $\frac{\mu_i}{x_i}$ 并不表示“分数”，而是论域中地元素x_i与其隶属度A(x_i)之间地对应关系。
- “＋”号也不表示求和，而是表示将各项汇总，表示集合概念。
- **若μ_i＝0，可以略去该项**。

③ 序偶表示法

将论域中的元素x_i与隶属度$A(x_i)$构成序偶来表示A，则

$$A=\{(x_1, A(x_1)), (x_2, A(x_2)), \ldots, (x_n, A(x_n))\}$$

◆此种方法隶属度为零的项可不列入

例2-2　设X={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}, 以A表示“小的数”，分别写出上述三种模糊集合的表示方式。

- Zadeh表示法：

$$A=\frac{1}{1}+\frac{0.9}{2}+\frac{0.7}{3}+\frac{0.5}{4}+\frac{0.3}{5}+\frac{0.1}{6}+\frac{0}{7}+\frac{0}{8}+\frac{0}{9}+\frac{0}{10}$$

为了简略起见，常常把$A(x_i)=0$的部分省去，即

$$A=\frac{1}{1}+\frac{0.9}{2}+\frac{0.7}{3}+\frac{0.5}{4}+\frac{0.3}{5}+\frac{0.1}{6}$$

- 向量表示法：
- 序偶表示法：

0.1)}

例2.2-1

对某种产品的质量两项指标进行抽查评估，现随机选出5个产品进行检验，它们的质量情况分别为：

第一项指标：$x_1 = 80, x_2 = 72, x_3 = 65, x_4 = 98, x_5 = 53$

第二项指标：$x_1 = 90, x_2 = 82, x_3 = 75, x_4 = 95, x_5 = 73$

试确定模糊集合Q1 和Q2，表示该组产品的两项指标“质量水平”这个模糊概念的隶属程度。

■ 解：

$$Q_1 = \frac{0.8}{x_1} + \frac{0.72}{x_2} + \frac{0.65}{x_3} + \frac{0.98}{x_4} + \frac{0.53}{x_5}$$

$$Q_2 = \frac{0.9}{x_1} + \frac{0.82}{x_2} + \frac{0.75}{x_3} + \frac{0.95}{x_4} + \frac{0.73}{x_5}$$

2. 隶属函数

- 普通集合用特征函数来刻划，模糊集合用隶属函数作定量描述。
- 特征函数的值域为集合{0, 1}，隶属函数的值域为区间[0, 1]。
- 隶属函数是特征函数的扩展和一般化。图6-4表示了两种函数的关系。

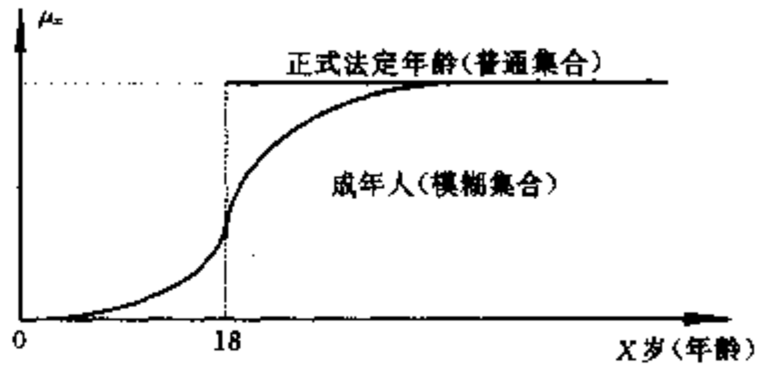
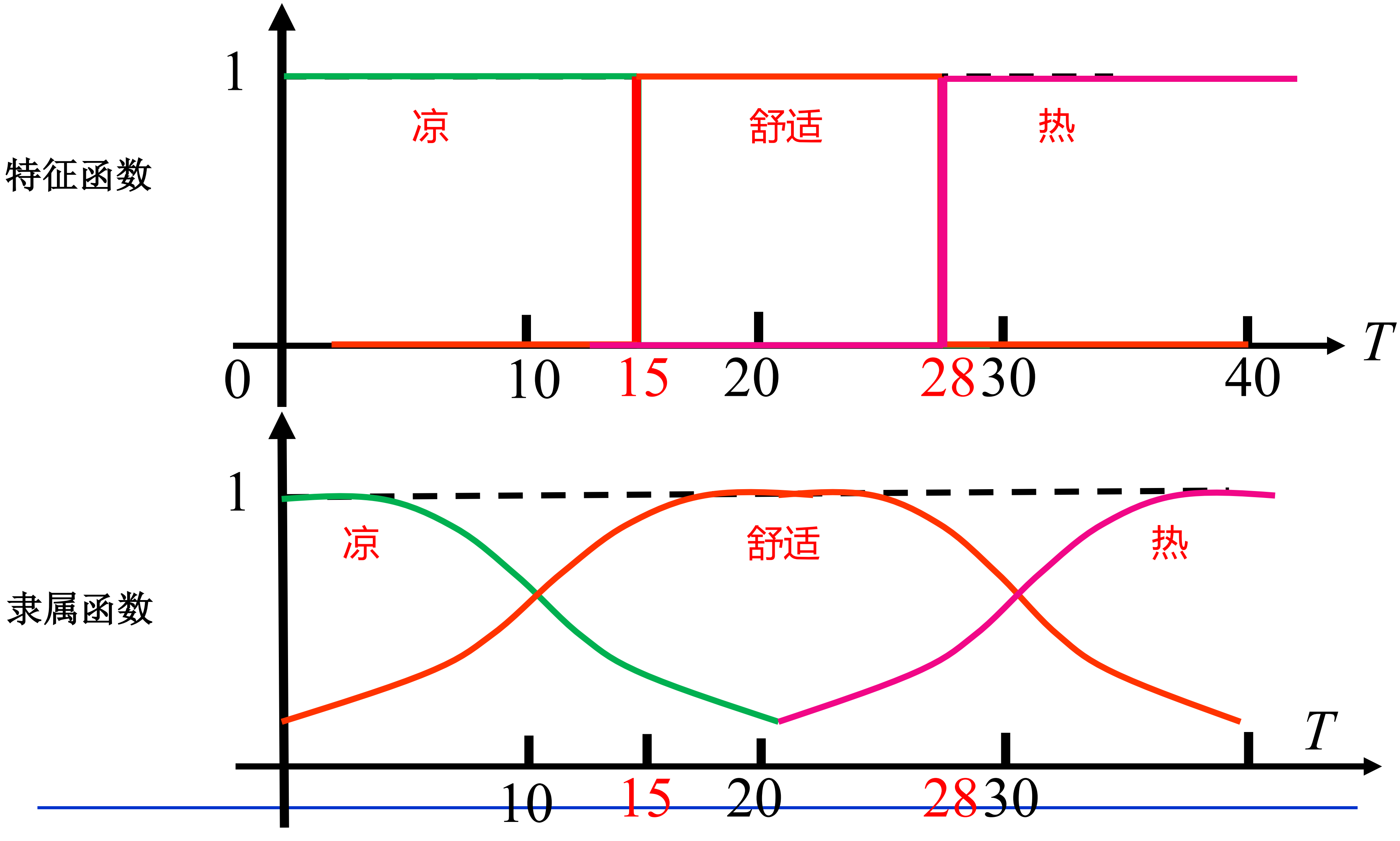


图 6-4 两种函数的关系

特征函数 VS 隶属函数



隶属函数与特征函数的比较

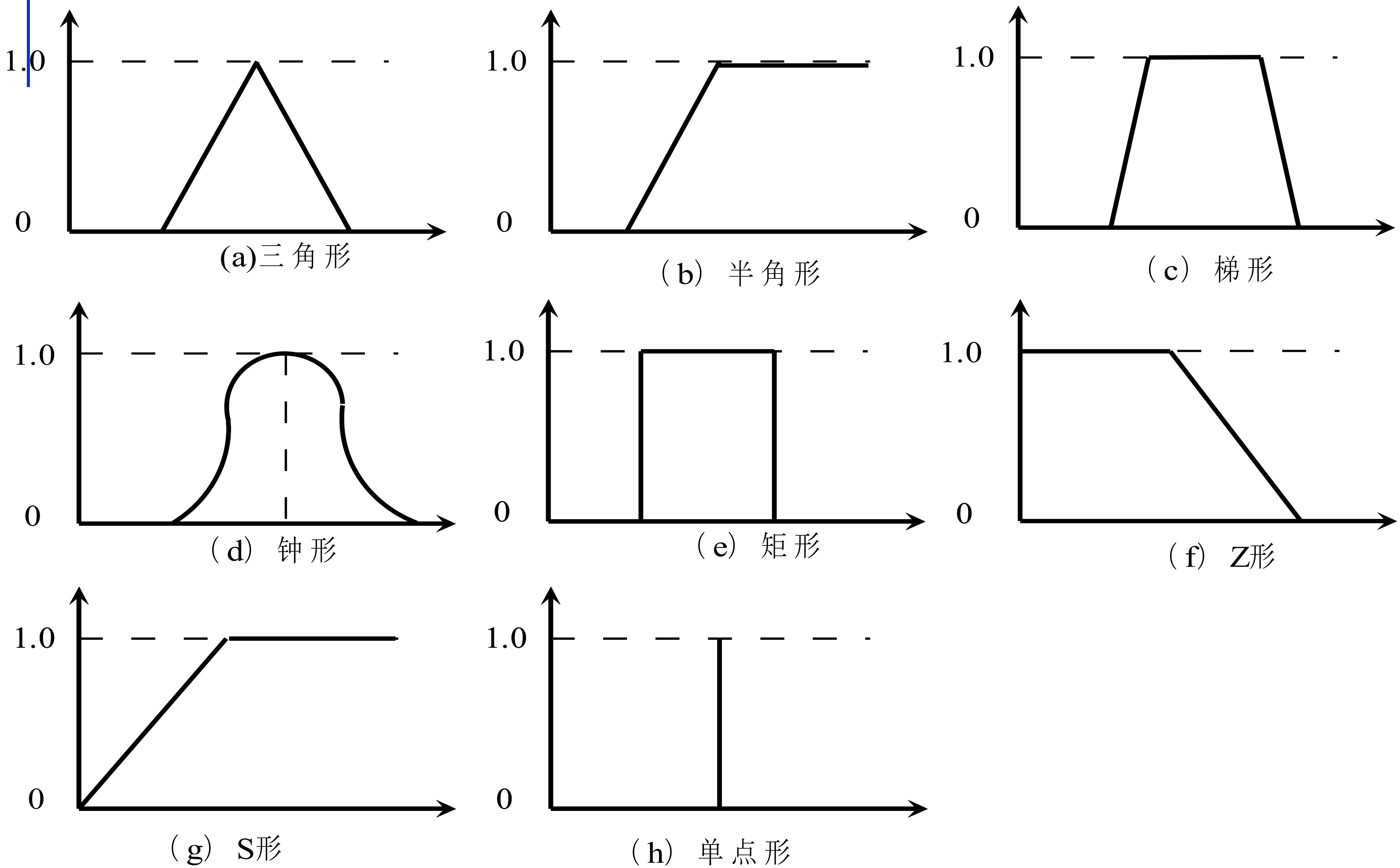


图 6－ 5 常 用 的 隶 属 函 数 性 状

32

隶属度函数MATLAB表示

一、几种典型的隶属函数

在Matlab中已经开发出了11种隶属函数，即双S形隶属函数（dsigmf）、联合高斯型隶属函数（gauss2mf）、高斯型隶属函数（gaussmf）、广义钟形隶属函数（gbellmf）、II型隶属函数(pimf)、双S形乘积隶属函数（psigmf）、S状隶属函数（smf）、S形隶属函数（sigmf）、梯形隶属函数（trapmf）、三角形隶属函数（trimf）、Z形隶属函数（zmf）。

在模糊控制中应用较多的隶属函数有以下6种隶属函数。

（1）高斯型隶属函数

高斯型隶属函数由两个参数σ 和c确定：

$$f(x,\sigma,c)=e^{-\frac{(x-c)^2}{2\sigma^2}}$$

其中参数σ通常为正，参数c用于确定曲线的中心。Matlab表示为

$$\text{gaussmf}(x,[\sigma,c])$$

(2) 广义钟型隶属函数

广义钟型隶属函数由三个参数**a**，**b**，**c**确定：

$$f(x,a,b,c)=\frac{1}{1+\left|\frac{x-c}{a}\right|^{2b}}$$

其中参数**b**通常为正，参数**c**用于确定曲线的中心。**Matlab**表示为

gbellmf(x,[a,b,c])

(3) S形隶属函数

S形函数sigmf(x,[a c])由参数a和c决定：

$$f(x,a,c)=\frac{1}{1+e^{-a(x-c)}}$$

其中参数a的正负符号决定了S形隶属函数的开口朝左或朝右，用来表示“正大”或“负大”的概念。Matlab表示为

sigmf(x,[a,c])

（4）梯形隶属函数

梯形曲线可由四个参数a，b，c，d确定：

$$f(x,a,b,c,d)=\begin{cases}0 & x\le a\\ \dfrac{x-a}{b-a} & a\le x\le b\\ 1 & b\le x\le c\\ \dfrac{d-x}{d-c} & c\le x\le d\\ 0 & x\ge d\end{cases}$$

其中参数a和d确定梯形的“脚”，而参数b和c确定梯形的“肩膀”。Matlab表示为：trapmf(x,[a,b,c,d])

(5)三角形隶属函数

三角形曲线的形状由三个参数**a**，**b**，**c**确定：

$$f(x,a,b,c)=\begin{cases}0 & x\le a\\ \dfrac{x-a}{b-a} & a\le x\le b\\ \dfrac{c-x}{c-b} & b\le x\le c\\ 0 & x\ge c\end{cases}$$

其中参数**a**和**c**确定三角形的“脚”，而参数**b**确定三角形的“峰”。 **Matlab**表示为 trimf(x,[a,b,c])

38

（6）Z形隶属函数

这是基于样条函数的曲线，因其呈现Z形状而得名。参数a和b确定了曲线的形状。Matlab表示为

$$zmf(x,[a,b])$$

有关隶属函数的MATLAB设计，见著作：

楼顺天，胡昌华，张伟，基于MATLAB的系统分析与设计-模糊系统，西安：西安电子科技大学出版社，2001

例2.2-2 隶属函数的设计：针对上述描述的6种隶属函数进行设计。M为隶属函数的类型，其中M=1为高斯型隶属函数，M=2为广义钟形隶属函数，M=3为S形隶属函数，M=4为梯形隶属函数，M=5为三角形隶属函数，M=6为Z形隶属函数。Chap3_2.m。

3. 模糊集合的运算

- 定义6.6　设A、B为X中的两个模糊集，隶属函数分别为μ_A和μ_B，则模糊集A和B的并集$A \cup B$，交集$A \cap B$和补集A^C的运算可通过它们的隶属函数来定义。

① 并集$\mu_{A \cup B}(x) = \mu_A(x) \vee \mu_B(x)$

其中“V”表示二者比较后取大值。（析取）

② 交集$\mu_{A \cap B}(x) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x)$

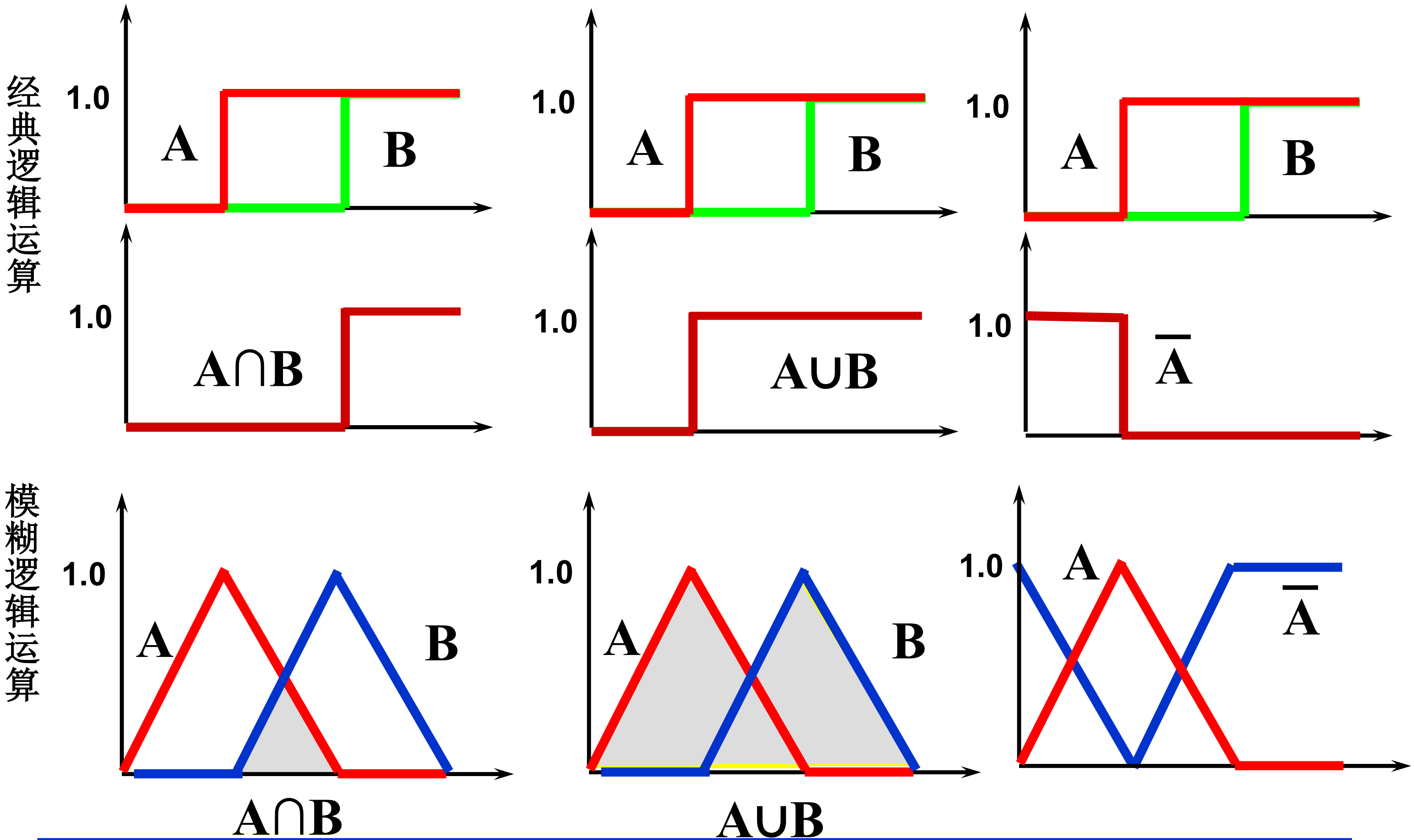
其中“Λ”表示二者比较后取小值。（合取）

③ 补集 μ_{A^c}（x）$= 1 - \mu_A(x)$

模糊集合的基本运算表

1. 模糊集合的相等	$\mu_A(x)=\mu_B(x)\Rightarrow A=B$
2. 模糊集合的包含关系	$\mu_A(x)\le\mu_B(x)\Rightarrow A\subseteq B$
3. 模糊空集	$\mu_A(x)=0\Rightarrow A=\phi$
4. 模糊集合的并集	$\mu_C(x)=\mu_A(x)\vee\mu_B(x)$ $=\max[\mu_A(x),\mu_B(x)]\Rightarrow C=A\bigcup B$
5. 模糊集合的交集	$\mu_C(x)=\mu_A(x)\wedge\mu_B(x)$ $=\min[\mu_A(x),\mu_B(x)]\Rightarrow C=A\bigcap B$
6. 模糊集合的补集	$\mu_B(x)=1-\mu_A(x)\Rightarrow B=\overline{A}\ \overline{A}$
7. 模糊集合的直积	$\mu_{A\times B}(x)=\min[\mu_A(x),\mu_B(x)]$ $\mu_{A\times B}(x)=\mu_A(x).\mu_B(x)$

模糊集合的基本运算



模糊集合运算的基本性质

1.分配律	$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$
2.结合律	$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$ $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$
3.交换律	$A\cup B=B\cup A$　　$A\cap B=B\cap A$
4.吸收律	$(A\cap B)\cup A=A$　　$(A\cup B)\cap A=A$
5.幂等律	$A\cup A=A$　　$A\cap A=A$
6.同一律	$A\cup X=X, A\cap X=A, A\cup\phi=A, A\cap\phi=\phi$
7.达.摩根律	$\overline{(A\cup B)}=\overline{A}\cap\overline{B}$　　$\overline{(A\cap B)}=\overline{A}\cup\overline{B}$

例2-3 设论域 $X=\{x_1, x_2, ..., x_5\}$

$$A=\frac{0.2}{x_1}+\frac{0.7}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{0.5}{x_5} \qquad B=\frac{0.5}{x_1}+\frac{0.3}{x_2}+\frac{0.1}{x_4}+\frac{0.7}{x_5}$$

则：

$$A\bigcup B=\frac{(0.2\vee 0.5)}{x_1}+\frac{(0.7\vee 0.3)}{x_2}+\frac{(1\vee 0)}{x_3}+\frac{(0\vee 0.1)}{x_4}+\frac{(0.5\vee 0.7)}{x_5}$$

$$=\frac{0.5}{x_1}+\frac{0.7}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{0.1}{x_4}+\frac{0.7}{x_5}$$

$$A\bigcap B=\frac{(0.2\wedge 0.5)}{x_1}+\frac{(0.7\wedge 0.3)}{x_2}+\frac{(1\wedge 0)}{x_3}+\frac{(0\wedge 0.1)}{x_4}+\frac{(0.5\wedge 0.7)}{x_5}$$

$$=\frac{0.2}{x_1}+\frac{0.3}{x_2}+\frac{0}{x_3}+\frac{0}{x_4}+\frac{0.5}{x_5}$$

$$A^c=\frac{0.8}{x_1}+\frac{0.3}{x_2}+\frac{0}{x_3}+\frac{1}{x_4}+\frac{0.5}{x_5}$$

2.2.3 模糊集合与普通集合的联系

- 当我们在处理实际问题的某个时刻，要对模糊概念有个明确的认识和判决时，要判断某个元素对模糊集的明确归属，这就要求模糊集与普通集合可以依据某种法则相互转换。
- 模糊集合的截集，分解定理描述了模糊集合与普通集合之间的关系。

1. λ截集
2. 分解定理

1. λ截集

模糊集合A本身是一个没有确定边界的集合，但是如果约定，凡x对A的隶属度到达或超过某个λ水平者才算是A的成员，那么模糊集合A就变成了普通集合A_λ。

定义6.8 设A∈F(X)，任取λ∈[0, 1],记 $A_\lambda = \{x\in X: A(x)\geq\lambda\}$

称A_λ为A的λ截集，其中λ称为阈值或置信水平。又记

$A_\lambda^+ = \{x\in X: A(x) > \lambda\}$

称A_λ^+为A的λ强截集。

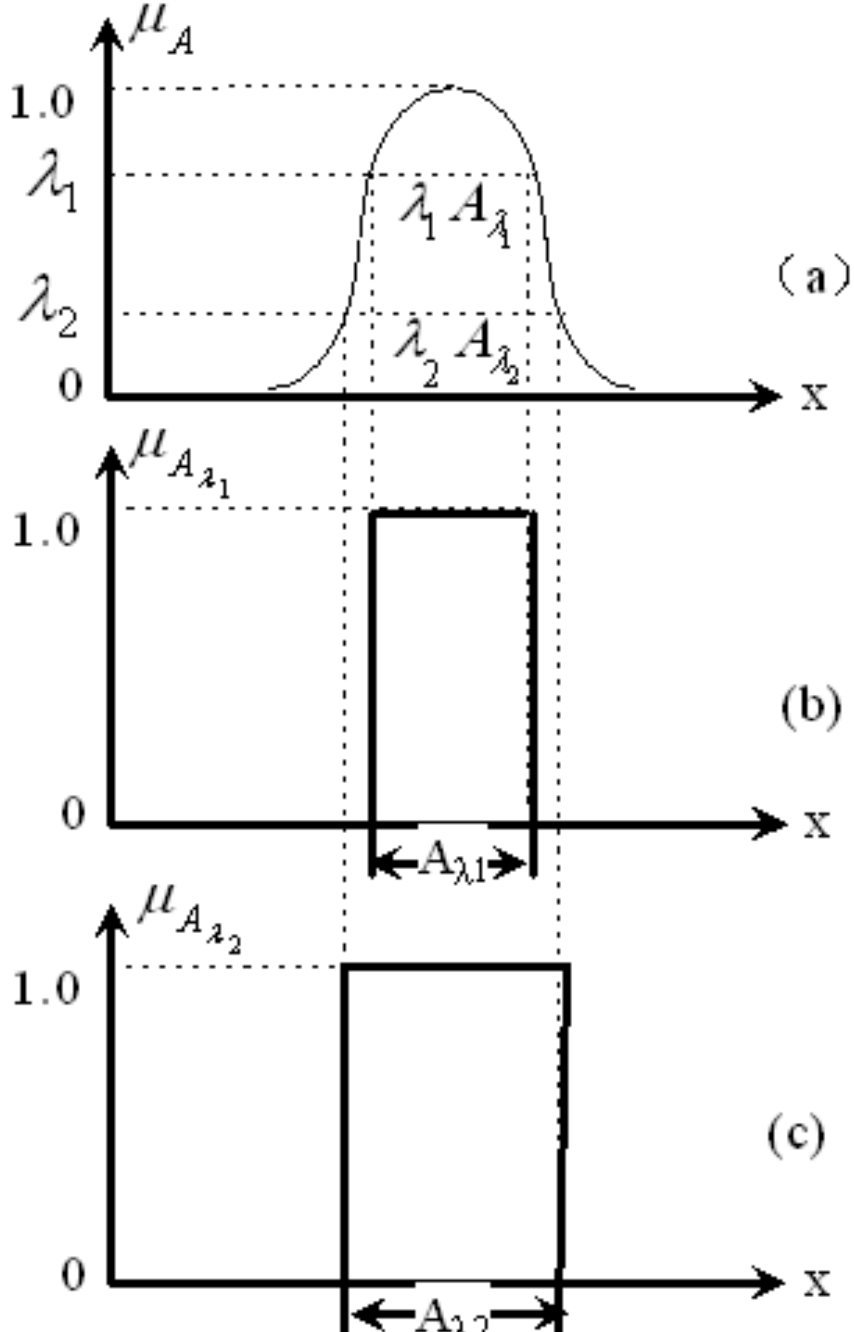


图6-8 截集

图6-8 给出了λ_1， $\lambda 2$ ($\lambda 1>\lambda 2$)对应的λ截集$A_{\lambda 1}$，$A_{\lambda 2}$ ($A_{\lambda 1} \subset A_{\lambda 2}$) 图形。

图6-8(b)，(c)为$A_{\lambda 1}$，$A_{\lambda 2}$ 的特征函数描述。

- 当$\lambda = 1$时，得到的最小水平截集A_1称为模糊集A的核，当$\lambda = 0^+$时，得到最大的水平截集称为A的支集，记为

$$\mathrm{Sup}A = \{x | x \in X, \mu_A(x) > 0\}$$

若A的核A_1非空，则称A为正规模糊集，否则称为非正规模糊集。

例2-4 设A = (0.5, 0.8, 0.7, 1, 0.2)是有限论域X上的一个模糊集，于是

$$A_1 = \{x_4\}$$

$$A_{1^+} = 0$$

$$A_{0.5} = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$$

$$A_{0.5^+} = \{x_2, x_3, x_4\}$$

$$A_0 = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$$

$$A_{0^+} = A_{0^-}$$

由向量表示，即以特征函数方式来表示：

$$A_1 = (0,0,0,1,0)$$

$$A_{1^+} = (0,0,0,0,0)$$

$$A_{0.5} = (1,1,1,1,0)$$

$$A_{0.5^+} = (0,1,1,1,0)$$

$$A_0 = A_{0^+} = (1,1,1,1,1)$$

$$A_1 = \{x_4\}$$

$$A_{1^+} = 0$$

$$A_{0.5} = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$$

$$A_{0.5^+} = \{x_2, x_3, x_4\}$$

$$A_0 = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$$

$$A_{0^+} = A_{0^-}$$

应该注意到，A$_\lambda$是不模糊的。

2. 分解定理

分解定理说明，任何一个模糊集可由一类普通集合套来表示。

定义2.9 设A是普通集合，λ∈[0, 1]，做数量积运算，得到一个特殊的模糊集λA, 其隶属函数为

$$\mu_{\lambda A}(x)=\begin{cases}\lambda, & x\in A\\ 0, & x\notin A\end{cases}$$

分解定理：设A为论域X上的模糊集合， A_λ 是A的截集，则有 $\boxed{A=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda A_\lambda}$

例2-5 设 $A=\frac{0.1}{x_1}+\frac{0.3}{x_2}+\frac{0.7}{x_3}+\frac{1}{x_4}+\frac{0.6}{x_5}+\frac{0.2}{x_6}$，则

$$A_{0.1}=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\}$$

$$0.1A_{0.1}=\frac{0.1}{x_1}+\frac{0.1}{x_2}+\frac{0.1}{x_3}+\frac{0.1}{x_4}+\frac{0.1}{x_5}+\frac{0.1}{x_6}$$

$$A_{0.2}=\{x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\}$$

$$0.2A_{0.2}=\frac{0.2}{x_2}+\frac{0.2}{x_3}+\frac{0.2}{x_4}+\frac{0.2}{x_5}+\frac{0.2}{x_6}$$

$$A_{0.3}=\{x_2,x_3,x_4,x_5\}$$

$$0.3A_{0.3}=\frac{0.3}{x_2}+\frac{0.3}{x_3}+\frac{0.3}{x_4}+\frac{0.3}{x_5}$$

$$A_{0.6} = \{x_3, x_4, x_5\}$$

$$0.6A_{0.6} = \frac{0.6}{x_3} + \frac{0.6}{x_4} + \frac{0.6}{x_5}$$

$$A_{0.7} = \{x_3, x_4\}$$

$$A_{0.7} = \frac{0.7}{x_3} + \frac{0.7}{x_4}$$

$$A_1 = \{x_4\}$$

$$1A_1 = \frac{1}{x_4}$$

由$A=\bigcup\limits_{\lambda\in[0,1]}\lambda A_{\lambda}$，得

$$\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda A_{\lambda}=0.1A_{0.1}\cup 0.2A_{0.2}\cup 0.3A_{0.3}\cup 0.6A_{0.6}\cup 0.7A_{0.7}\cup 1A_{1}$$

$$=\frac{0.1}{x_1}+\frac{0.3}{x_2}+\frac{0.7}{x_3}+\frac{1}{x_4}+\frac{0.6}{x_5}+\frac{0.2}{x_6}=A$$

将模糊集合表示为一系列截集（确定性的）之和（**利用已经的熟悉知识来理解相对新的知识**）

55

2.3 模糊关系与模糊关系合成

- ✓ 集合论中的“关系”抽象地刻划了事物的“精确性”的联系，而模糊关系则从更深刻的意义上表现了事物间更广泛的联系。
- ✓ 模糊关系的抽象更接近与人的思维。模糊关系理论是许多应用原理和方法的基础。
- ✓ **模糊关系的基本概念，模糊矩阵的表示方法及其运算，模糊关系的合成。**

2.3.1 模糊关系的基本概念

1. 关系的基本知识

定义2.10 集合的笛卡儿积（关系的论域）：给定集合X和Y，由全体(x, y) (x∈X, y∈Y)组成的集合，叫做X与Y的笛卡儿积(或称直积)，记做X×Y，

$$X\times Y = \{(x, y)|(x\in X, y\in Y)\}$$

例6-6 设X = {0, 1}，Y= {a, b, c}，则

$$X\times Y = \{(0,a),(0,b),(0,c),(1,a),(1,b),(1,c)\}$$

$$Y\times X = \{(a,0),(a,1),(b,0),(b,1),(c,0),(c,1)\}$$

一般地， $X\times Y \neq Y\times X$

考虑一个用出水阀门控制水箱液位高度的问题，用变量 x,y 分别描述水位高低与阀门开度 ，且x,y的取值范围为{1, 2, 3, 4, 5）。

1、怎么描述如果水位高于2，那么阀门开度大于3这一关系？（关系矩阵）

2、怎么描述如果水位很高，那么阀门开度很大这一关系？

定义2.11 关系：存在集合X和Y，它们的笛卡儿积$X \times Y$的一个子集R叫做X到Y的二元关系，简称关系:$R \subseteq X \times Y$

序偶(x, y) 是笛卡儿积$X \times Y$的元素，它是无约束的组对，若给组对以约束，便体现了一种特定的关系。受到约束的序偶则形成了$X \times Y$的一个子集。

- 若$X = Y$，则称R是X中的关系。
- 如果$(x, y) \in R$，则称X和Y有关系R，记作 xRy;

59

- 如果(x, y) ∉ R，则X和Y没有关系，记作 $x\overline{R}y$

  也可用特征函数表示为

$$\mu_R(x,y)=\begin{cases}1, & (x,y)\in R\\ 0, & (x,y)\notin R\end{cases}$$

- 当X和Y都是有限集合时，关系可以用矩阵来表示，称关系矩阵。设X = {x_1, x_2, …, x_m}, Y = {y_1, y_2, …, y_n}，则R可以表示为

$$R=[r_{ij}],\quad r_{ij}=\mu_R(x_i,y_j)$$

例2-7 设X = Y = {1, 2, 3, 4, 5, 6}，X×Y中的X>Y的关系可用关系矩阵R表示，

$$R=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R=[r_{ij}]，\quad r_{ij}=\mu_R(x_i, y_j)$$

由例中可见，矩阵中的元素或等于1或等于0，将这种矩阵称为布尔矩阵。

2. 模糊关系的概念

- 模糊关系是指笛卡儿积上的模糊集合，表示多个集合的元素间所具有的某种关系的程度。
- **定义2.14** 所谓X，Y两集合的笛卡儿积

$$X \times Y = \{(x, y) | (x \in X, y \in Y)\}$$

中的一个模糊关系R，是指以X×Y为论域的一个模糊子集，序偶(x, y)的隶属度为$\mu_R(x,y)$。

$\mu_R(x,y)$在实轴的闭区间[0, 1]取值，它的大小反映了(x, y)具有关系R的程度。

- 设X是m个元素构成的有限论域，Y是n个元素的有限论域。对于X到Y的一个模糊关系R，可以用一个m×n阶矩阵表示为

$$R=\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{m1} & r_{m2} & \cdots & r_{mn} \end{bmatrix}$$

或

$$R=[r_{ij}],\ \ r_{ij}=\mu_R(x_i,y_j)$$

- 我们称一个矩阵是模糊矩阵，如果它的每个元素属于[0, 1]。令

$$F_{m\times n}=\{R=[r_{ij}];0\le r_{ij}\le 1\}$$

$F_{m\times n}$表示m×n阶模糊矩阵的全体。

- 在有限论域之间，普通集合与布尔矩阵建立了一一对应的关系，模糊关系与模糊矩阵建立了一一对应的关系，通常都把模糊矩阵和模糊关系看作是同一回事，均以R表示。

模糊关系举例

例1：设X是实数集合，并x，y∈X，对于“y比x大得多”的模糊关系R，其隶属度函数可表示为：

$$\mu_R(x,y)=\begin{cases}0 & x\geq y\\ \dfrac{1}{1+(\dfrac{10}{y-x})^2} & x<y\end{cases}$$

对于“y和x大致相等”的模糊关系R，其隶属度函数可表示为：

$$\mu_R(x,y)=e^{-\alpha|x-y|}\qquad \alpha>0$$

3. 模糊关系的运算

- 由于模糊矩阵本身是表示一个模糊关系的子集R，因此根据模糊集的并、交、补运算的定义，模糊矩阵也可看作相应的运算.
- 设模糊矩阵R和Q是X×Y上的模糊关系，

$R=(r_{ij})_{m\times n}$，$Q=(q_{ij})_{m\times n}$(i=1, 2, ... , m；j= 1, 2, ... , n)。

模糊矩阵的并、交、补运算为

① 模糊矩阵并 $R\bigcup Q=(r_{ij}\vee q_{ij})$

② 模糊矩阵交 $R\bigcap Q=(r_{ij}\wedge q_{ij})$

③ 模糊矩阵补 $R^c=(1-r_{ij})$

例6-8 设 $R=\begin{bmatrix}0.3 & 0.2 & 1\\ 0.8 & 1 & 0\end{bmatrix}$, $Q=\begin{bmatrix}0.3 & 0 & 0.7\\ 0.1 & 0.8 & 1\end{bmatrix}$

则

$$R\cup Q=\begin{bmatrix}0.3\vee 0.3 & 0.2\vee 0 & 1\vee 0.7\\ 0.8\vee 0.1 & 1\vee 0.8 & 0\vee 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.3 & 0.2 & 1\\ 0.8 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$R\cap Q=\begin{bmatrix}0.3\wedge 0.3 & 0.2\wedge 0 & 1\wedge 0.7\\ 0.8\wedge 0.1 & 1\wedge 0.8 & 0\wedge 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.3 & 0 & 0.7\\ 0.1 & 0.8 & 0\end{bmatrix}$$

$$R^c=\begin{bmatrix}0.7 & 0.8 & 0\\ 0.2 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

④ 矩阵的截阵

$$R_\lambda = (\lambda r_{ij})_{m\times n}，\quad \lambda \in [0,1]$$

$$R_\lambda = \{(x,y) \mid \mu_R(x,y) \geq \lambda\}$$

例2-9 设X={x_1, x_2, x_3}，Y={y_1 ,y_2 ,y_3, y_4}，X×Y中的R为

$$R=\begin{bmatrix}0.3 & 0.8 & 1 & 0\\ 0.5 & 1 & 0.3 & 0.9\\ 1 & 0.2 & 0.6 & 0.7\end{bmatrix}$$

则 $$R_{0.8}=\{(x,y)\,|\,\mu_R(x,y)\geq 0.8\}$$

$$=\{(x_1,y_2),(x_1,y_3),(x_2,y_2),(x_2,y_4),(x_3,y_1)\}$$

或用截矩阵表示为

$$R_{0.8}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

69

考虑一个用出水阀门控制水箱液位高度的问题，用变量 x,y 分别描述水位高低与阀门开度 ，且x,y的取值范围为{1, 2, 3, 4, 5）。

1、怎么描述如果水位高于2，那么阀门开度大于3这一关系？（关系矩阵）

2、怎么描述如果水位很高，那么阀门开度很大这一关系？