人机交互技术：EEG信号处理

- 信号处理的作用
- 滤波器设计

信号处理

信号处理：设计系统（滤波器）把一种信号转换成另一种信号

确定性信号：可以用明确的数学关系或者图表描述的信号。若信号被表示为一确定的时间函数，对于指定的某一时刻，可以确定一相应的函数值，这种信号被称为确定性信号。如正弦波。

随机信号：不能用确定的数学关系式来描述的，不能预测其未来任何瞬时值，任何一次观测只代表其在变动范围中可能产生的结果之一，其值的变动服从统计规律。它不是时间的确定函数，其在定义域内的任意时刻没有确定的函数值。

信号处理

平稳随机信号：均值和相关不随时间变化.

在其中任取一段期间或空间（$t = t_1 - t_k$）里的联合概率分布，与将这段期间任意平移后的新期间（$t = t_1 + \tau - t_k + \tau$）之联合概率分布相等。这样，数学期望和方差这些参数也不随时间或位置变化。

$$p(x_{n+k}, n+k) = p(x_n, n)$$

$$\phi_{xx}(n+k, n) = \phi_{xx}(k) = \varepsilon\{x_{n+k} x_n^*\}$$

广义平稳随机信号：一个随机过程的数学期望及方差与时间无关，而其相关函数仅与τ有关.

$$\mathbb{E}\{x(t)\} = m_x(t) = m_x(t+\tau)\ \forall\tau \in \mathbb{R}$$

$$\mathbb{E}\{x(t_1)x(t_2)\} = R_x(t_1, t_2) = R_x(t_1+\tau, t_2+\tau) = R_x(t_1 - t_2, 0)\ \forall\tau \in \mathbb{R}.$$

系统类型

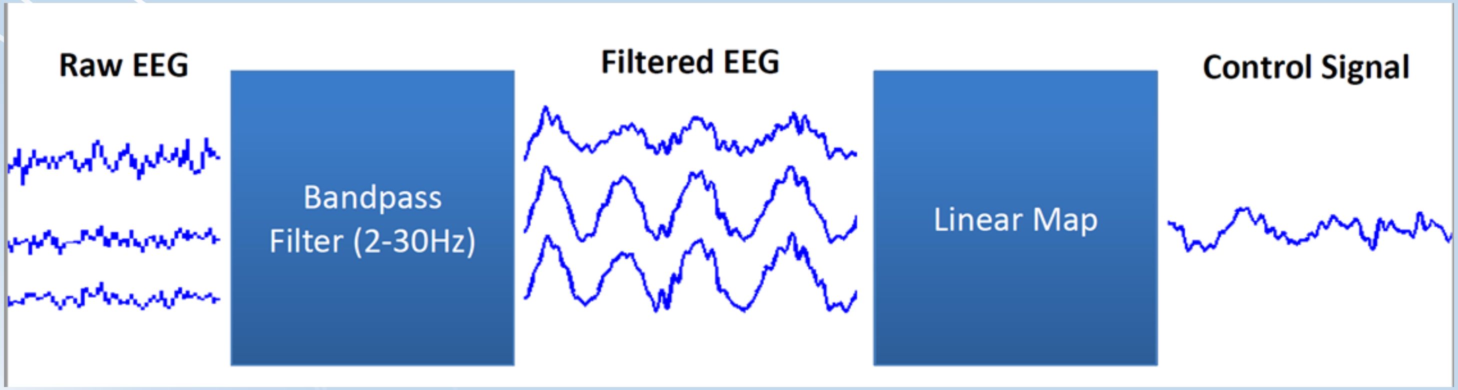
- **静态系统：** 对任意时刻n，系统输出$y(n)$只依赖系统输入$x(n)$
- **动态系统：** 非静态系统
- **因果系统：** 对任意时刻n，系统输出$y(n)$只依赖系统输入$x(m)$，$m \le n$
- **非因果系统：**
- **时不变系统：** 对任意位移k，$y(n-k)=T[x(n-k)]$
- **时变系统：**
- **线性系统：** 对任意输入$x_1(n)$ 和 $x_2(n)$，以及任意常数a_1和a_2，$T[a_1x_1(n)+a_2x_2(n)]=a_1T[x_1(n)]+a_2T[x_2(n)]$
- **非线性系统：**

滤波器类型

- **线性时不变系统：**谱滤波器
- **统计信号处理和自适应滤波：**卡尔曼滤波，递归最小二乘法等

BCI系统

- BCI是实时系统，实时系统一定是因果系统
- BCI通常需要时域滤波，因此是动态系统
- 有些BCI系统是时不变系统，但是自适应BCI系统是时变系统
- 简单的BCI系统是线性系统，但是绝大多数是非线性系统
- BCI系统输出频率远低于输入频率，因此是多频系统

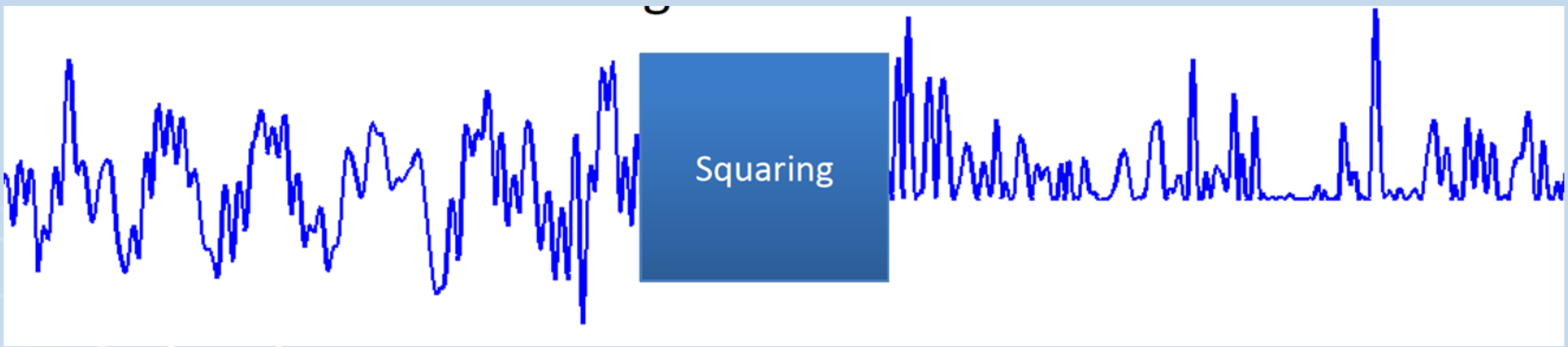


大纲

- 信号处理的作用
- **滤波器设计**

静态滤波器

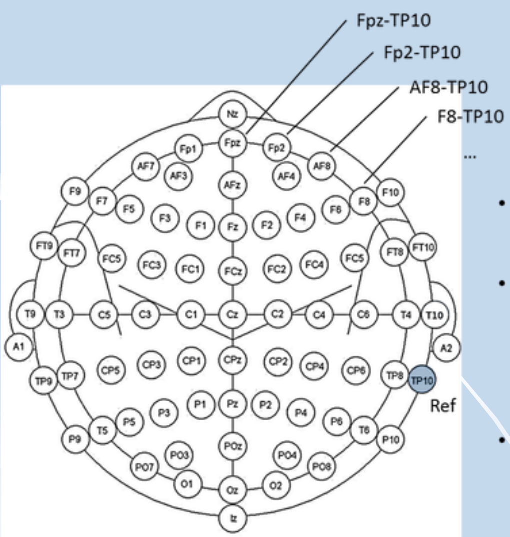
Signal Squaring: $\mathcal{T} = y_i(n) = x_i(n)^2$



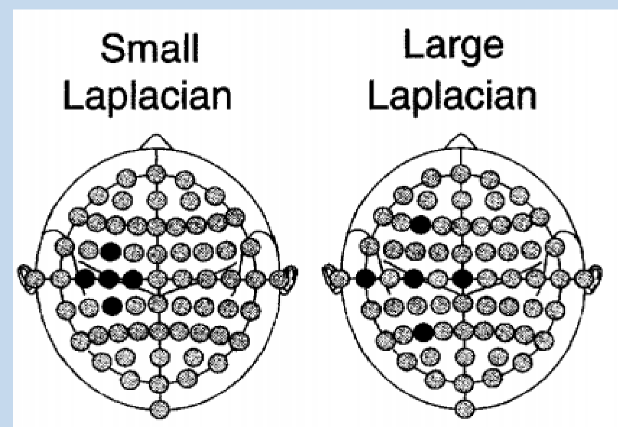
Logarithm: $\mathcal{T} = y_i(n) = \log x_i(n)$

空间滤波器

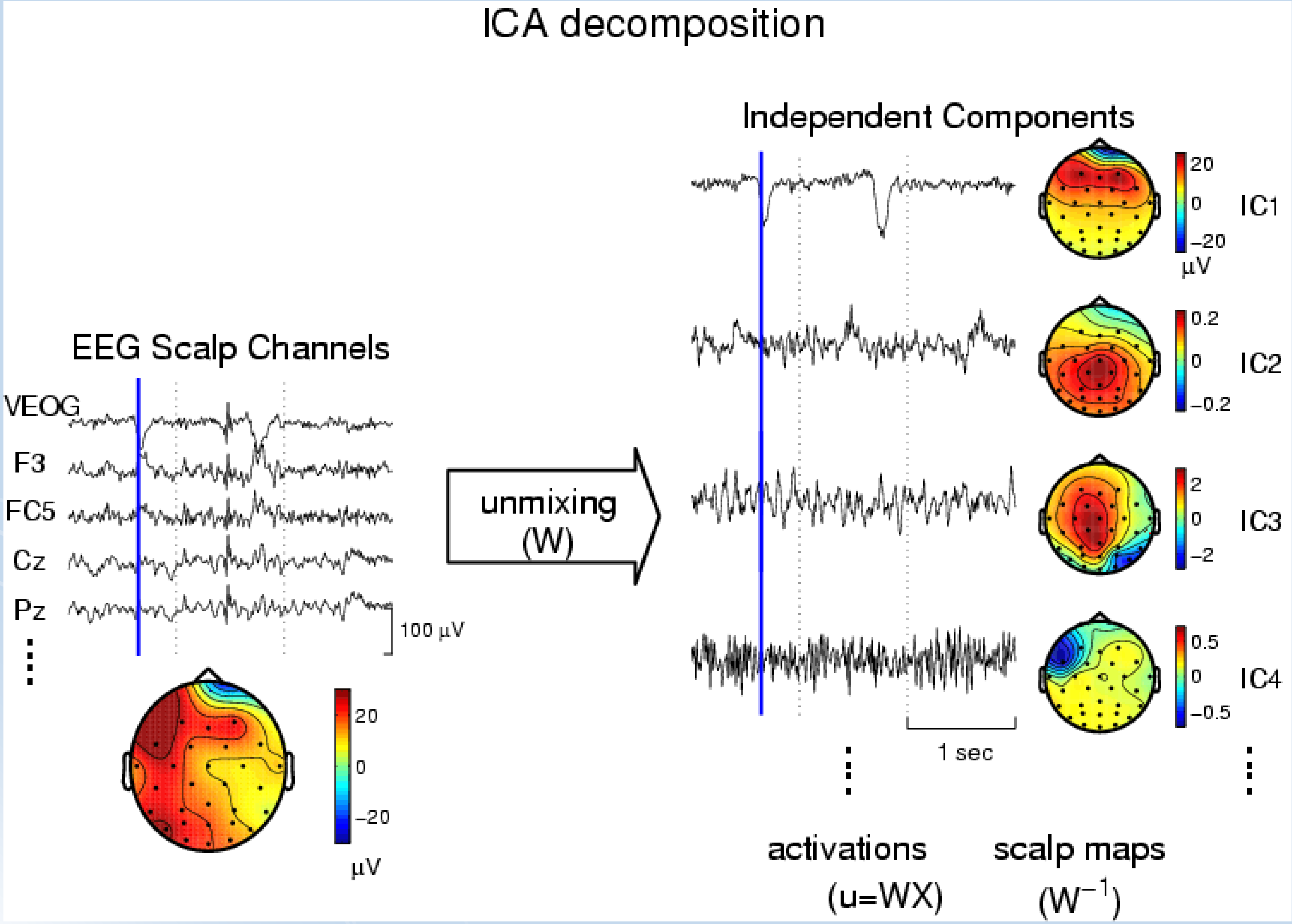
- 把多通道输入信号 $X(n)$ 转换成多通道输出信号 $Y(n)$
- 一般用来提高信噪比，或者近似模拟源信号
- 一般是线性滤波器：$Y(n) = \boldsymbol{M}X(n)$
- 常用空间滤波器：重参考，表面Laplacian, 独立成分分析，共同空间模式



- Average Reference assumption
  Fpz + Fp1 + AF3 + F8 + FT8 + … + TP10 = 0
- First recalculate the activity at reference TP10
  Sum of all electrode activity =
  Fpz + Fp1 + AF3 + F8 + … -64TP10
  minus Fpz + Fp1 + AF3 + F8 + … + TP10 = 0
  TP10 = - (Sum of all electrode activity)/65
- Add up the activity of TP10 to all channels

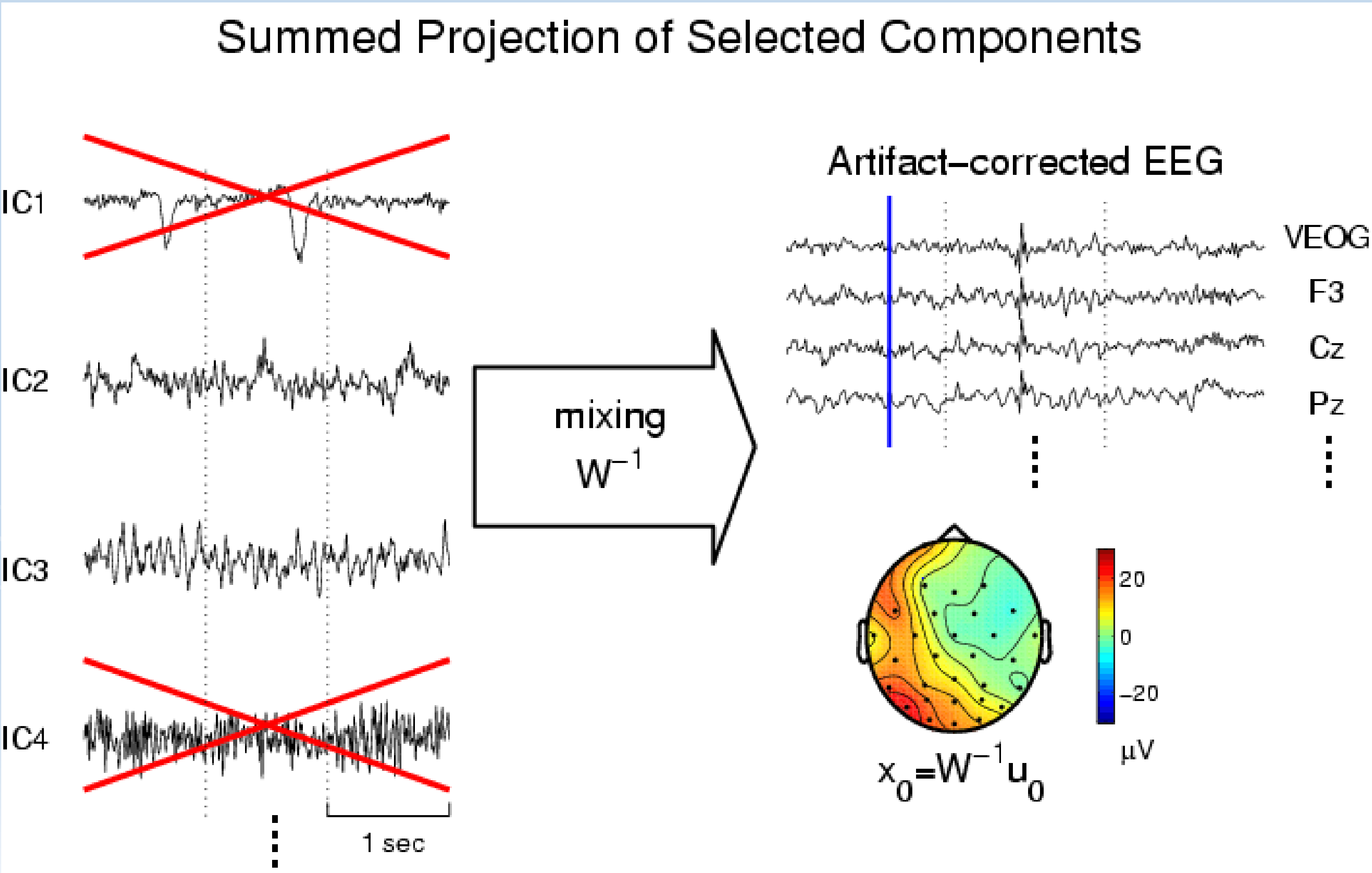


独立成分分析



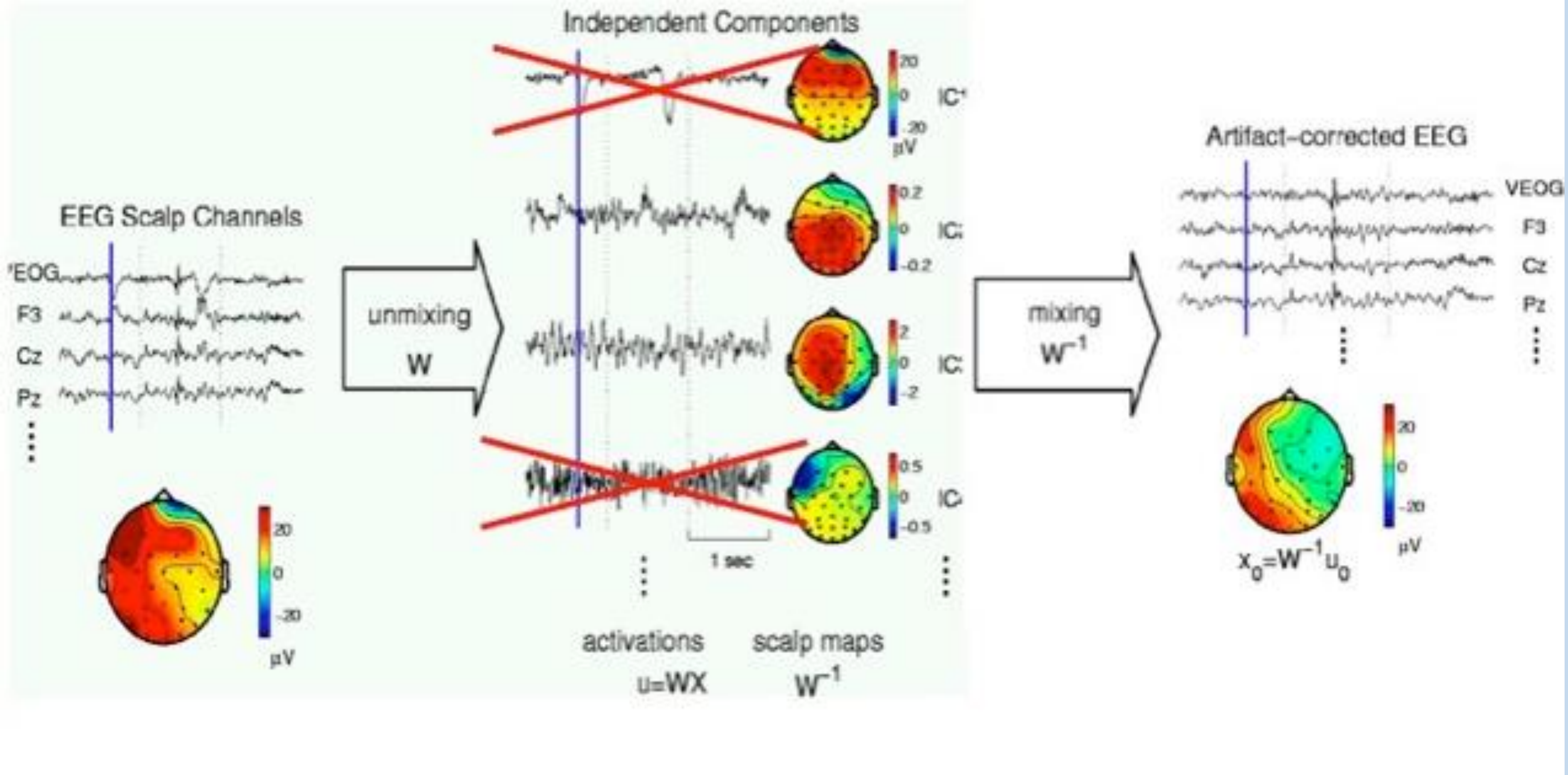
ICA decomposition
EEG Scalp Channels
VEOG
F3
FC5
Cz
Pz
100 µV
20
0
–20
µV
unmixing
(W)
Independent Components
20
0
–20
µV
IC1
0.2
0
–0.2
IC2
2
0
–2
IC3
0.5
0
–0.5
IC4
1 sec
activations
(u=WX)
scalp maps
(W^{-1})

独立成分分析



Summed Projection of Selected Components
IC1
IC2
IC3
IC4
1 sec
mixing
W−1
Artifact−corrected EEG
VEOG
F3
Cz
Pz
20
0
−20
µV
x0=W−1u0

独立成分分析



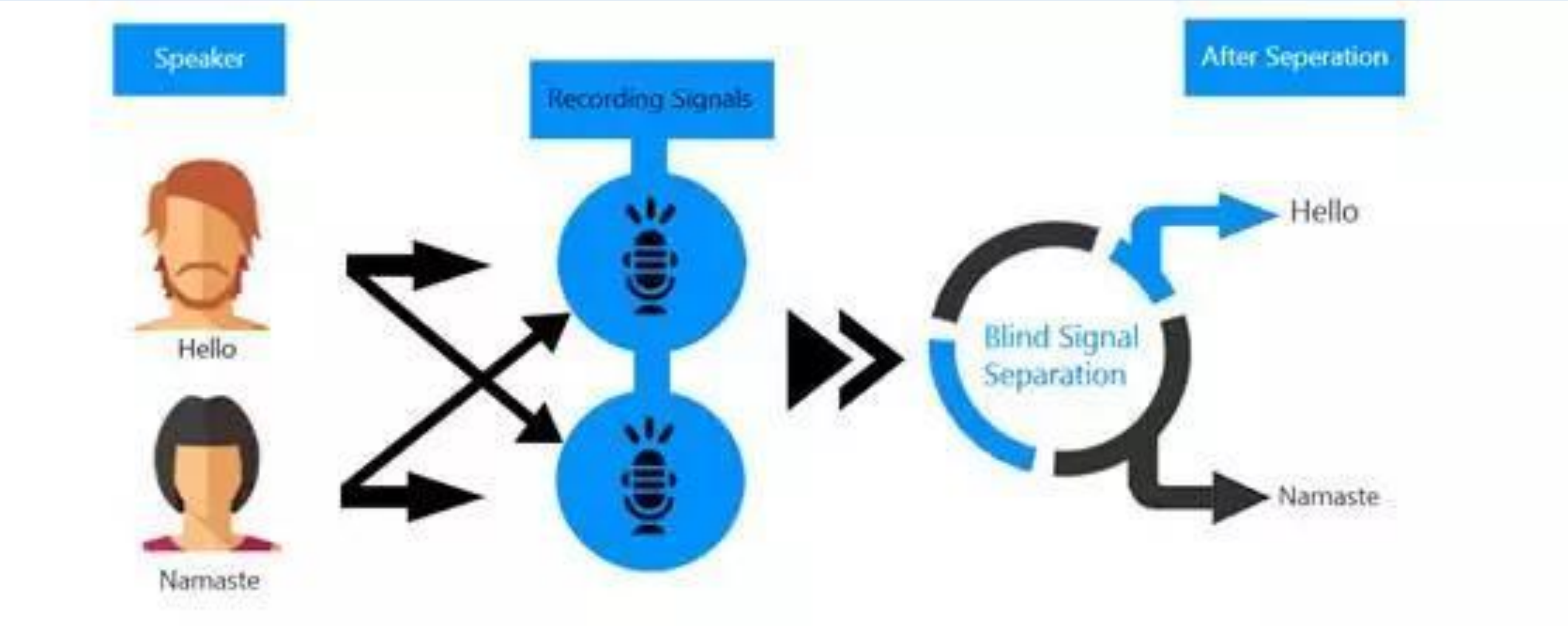
EEG Scalp Channels
VEOG
F3
Cz
Pz
20
0
-20
µV
unmixing
W
Independent Components
20
0
-20
µV
0.2
0
-0.2
2
0
-2
0.5
0
-0.5
1 sec
activations
u=WX
scalp maps
W-1
mixing
W-1
Artifact-corrected EEG
VEOG
F3
Cz
Pz
20
0
-20
µV
x0=W-1u0

盲源分离

- 盲源分离（BSS: Blind Source Separation），又称为盲信号分离，是指在信号的理论模型和源信号无法精确获知的情况下，如何从混迭信号（观测信号）中分离出各源信号的过程。这里的“盲”，指源信号不可测，混合系统特性事先未知这两个方面。
- 盲源分离和盲辨识是盲信号处理的两大类型。盲源分离的目的是求得源信号的最佳估计，盲辨识的目的是求得传输通道的混合矩阵。
- 在生物医学信号处理、阵列信号处理、语音信号识别、图像处理及移动通信等领域得到了广泛的应用。

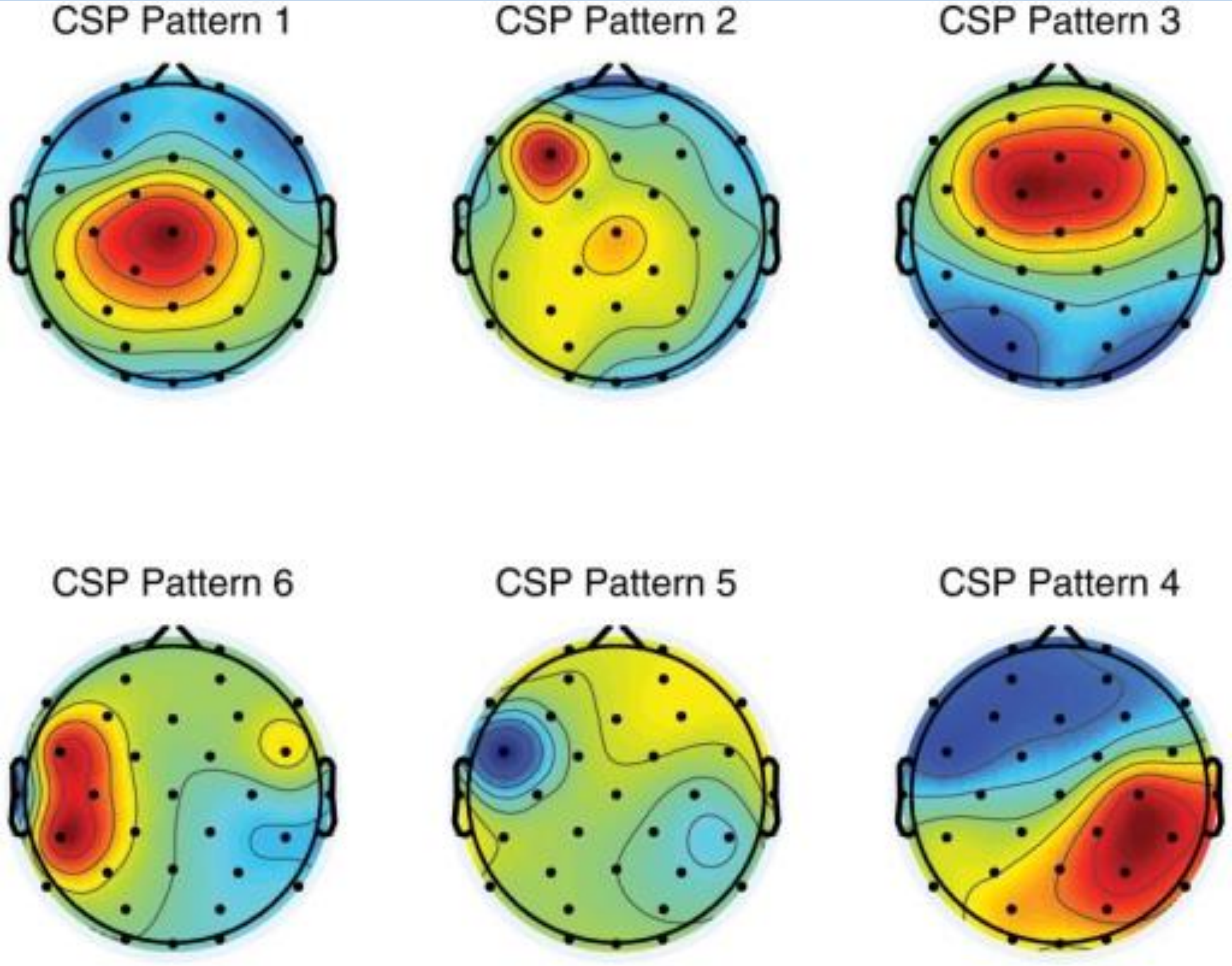
鸡尾酒会问题

“ 鸡尾酒会问题”（cocktail party problem）是在计算机语音识别领域的一个问题，当前语音识别技术已经可以以较高精度识别一个人所讲的话，但是当说话的人数为两人或者多人时，语音识别率就会极大的降低，这一难题被称为鸡尾酒会问题。



共同空间模式（CSP）

设计空间滤波器使两种脑电模式更容易区分



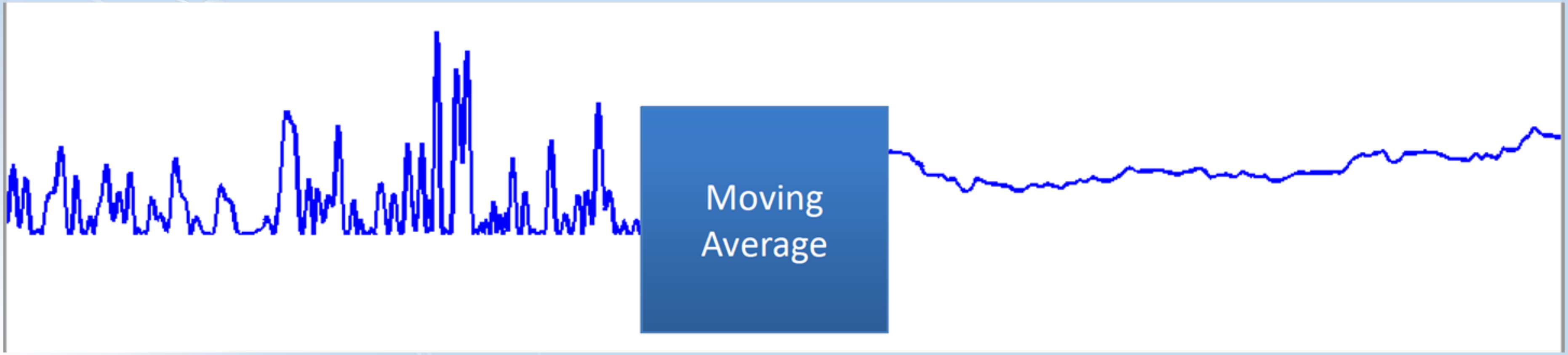
时域滤波器

- 把多通道输入信号$X(n)$ 转换成多通道输出信号 $Y(n)$，其中每一个输出通道$y_i(n)$ 只依赖对应输入通道$x_i(n)$
- 常用时域滤波器：滑动窗口平均，小波变换
- 特殊时域滤波器：谱滤波器

滑动窗口平均

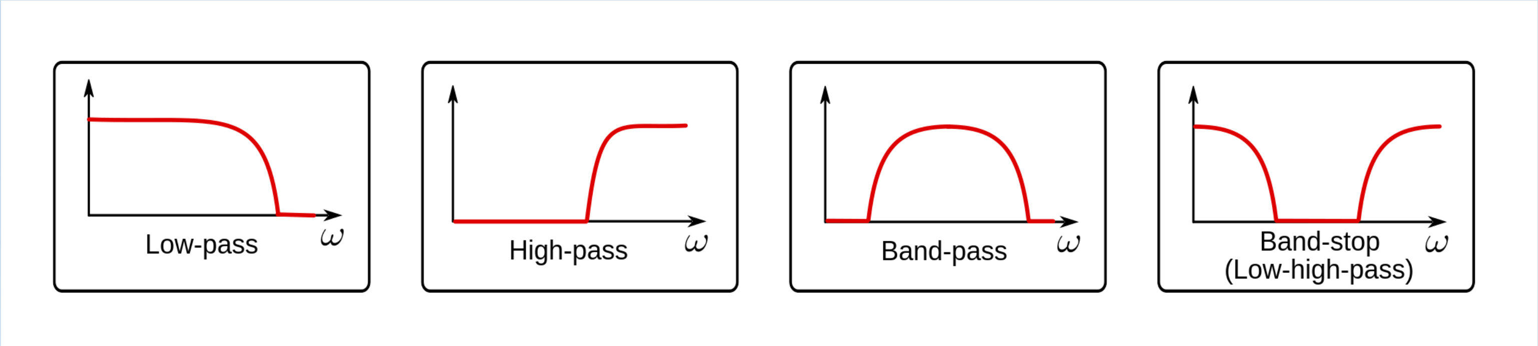
$$y_i(n)=\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}x_i(n-k)$$

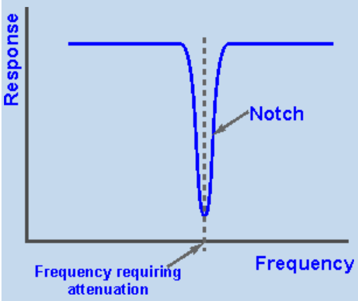
低通滤波器，平滑信号

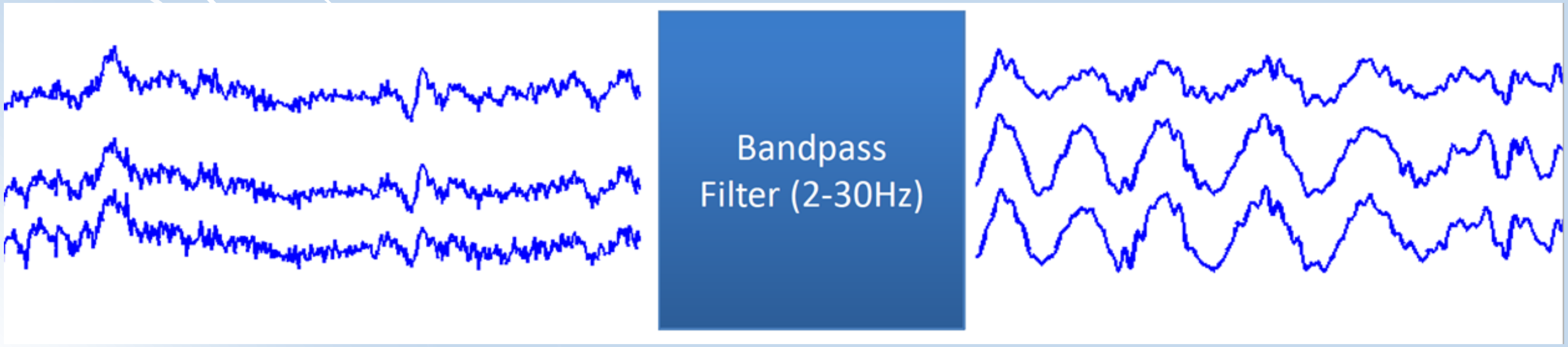


谱滤波器

- 时域滤波器，其设计目的是改变输入信号的频谱
- 信号频谱： $s(n) = \sum_{k=1}^{N} A_k \sin(\omega_k nT + \phi_k)$
- 低通，高通，带通，陷波







卡尔曼滤波器的基本思想

在海图作业中，航海长通常**以前一时刻的船位为基准**，根据航向、船速和海流等一系列因素**推算下一个船位**，但是他并不轻易认为船位就一定在推算船位上，还要选择适当的方法，通过仪器得到**另一个推算船位**。观测和推算这两个船位一般不重合，航海长需要通过分析和判断**选择一个可靠的船位**，作为船舰当前的位置。

卡尔曼滤波思想

以$K-1$时刻的最优估计X_{k-1}为准，预测K时刻的状态变量$\hat{X}_{k/k-1}$，同时又对该状态进行**观测**，得到观测变量Z_k，再在预测与观测之间进行分析，或者说是以观测量对预测量进行**修正**，从而得到K时刻的最优状态估计X_k。

卡尔曼滤波器的基本思想

卡尔曼滤波有几个不同的视角去看：控制、滤波、迭代、概率论……我尽量给出一个简单的视角：加权平均数。

一个新手和一个老手分别去测量一条路的长度。新手测的结果是a，老手测的结果是b，我们用平均数作为这条路的长度， $c = a + b$ 。

考虑到新手水平差一些，老手水平高一些我们可以用加权平均数作为结果， $c = ka + (1-k)b$ 。让老手的权重大一些，新手的权重小一些。这个权重取多少合适呢?

它们是满足正态分布的随机数，a和b的分布的均值是相同的，a的分布的标准差是 σ_a ，b的分布的标准差是 σ_b 。那么c也是一个满足正态分布的随机数，c的分布的均值和a、b是相同的，而c的标准差是 $\sigma_c = \sqrt{k^2\sigma_a^2 + (1-k)^2\sigma_b^2}$ 。这个结论是根据简单的概率统计知识得到的。

为了让结果尽量准确、让c的标准差最小，应该取权重为 $k = \sigma_b^2/(\sigma_a^2 + \sigma_b^2)$ 。此时c的标准差为 $\sigma_c = \sigma_a\sigma_b/\sqrt{\sigma_a^2 + \sigma_b^2}$ 。这是二次函数的最值。

此时，c就是a和b的最优的加权平均数。如果又有人测到了d，可以用c和d再用上面的方法继续做加权平均数。这是一个可以迭代计算的最优的加权平均数。

卡尔曼滤波器的特点

（1）卡尔曼滤波处理的对象是**随机信号**；

（2）被处理的信号**无有用和干扰之分**，滤波的目的是要估计出所有被处理的信号(区别于维纳滤波)；

（3）系统的白噪声激励和测量噪声并不是需要滤除的对象，它们的统计特性是估计过程中需要利用的信息；（区别最小二乘）

（4）算法是**递推的**，且使用状态空间法在**时域内**设计滤波器，适用于对**多维随机过程**的估计；

（5）被估计量既可以**是平稳**的，也可以**是非平稳**的；

（6）估计过程中，只需要考虑**过程噪声和测量噪声**及**当前时刻系统状态的统计特性**。（计算机计算时，所占空间小）

卡尔曼滤波器公式

无控制离散型卡尔曼滤波器的基本公式

系统的状态方程: $x(k)=\phi_{k,k-1}*x(k-1)+\Gamma_{k-1}w(k-1)$

系统的测量方程: $Z(k)=C_k*x(k)+v(k)$

$w(k-1)$ 为过程噪声; $v(k)$ 为测量噪声; Γ 为噪声驱动阵

系统测量方程的输出量 $Z(k)$ 是可以实际测量的量。

如果 $w(k-1)$ $v(k)$ 满足

$$E[w_k]=0, Cov[w_k,w_j]=Q_k\delta_{kj};$$

$$E[V_k]=0, Cov[V_k,V_j]=R_k\delta_{kj}; Cov[W_k,V_j]=0$$

Q_k 为过程噪声的协方差，其为**非负定阵**;

R_k 为测量噪声的协方差，其为**正定阵**。

卡尔曼滤波器公式

无控制离散型卡尔曼滤波的基本方程

(1) 状态的一步预测方程:

$$\hat{x}_{k/k-1} = \phi_{k,k-1} * x_{k-1}$$

(2) 均方误差的一步预测:

$$\hat{P}_{k/k-1} = \phi_{k,k-1} * P_{k-1} * \phi_{k,k-1}^{T} + \Gamma_{k-1} Q_{k-1} \Gamma_{k-1}^{T}$$

(3) 滤波增益方程（权重）:

$$H_k = \hat{P}_{k/k-1} * C_k^T \left[C_k * \hat{P}_{k/k-1} * C_k^T + R_k \right]^{-1}$$

(4) 滤波估计方程（K时刻的最优值）:

$$x_k = \hat{x}_{k/k-1} + H_k \left[Z_k - C_k * \hat{x}_{k/k-1} \right]$$

(5) 均方误差更新矩阵（K时刻的最优均方误差）:

$$P_k = \left[I - H_k * C_k \right] * \hat{P}_{k/k-1}$$

卡尔曼滤波器示例

假设我们要研究一个房间的温度，以一分钟为时间单位。根据我们的经验判断，这个房间的**温度是恒定**的，但是对我们的经验不是完全相信，可能存在上下几度的偏差，我们把该偏差看做是高斯白噪声。另外，我们在房间里放一个温度计，温度计也不准确，测量值会与实际值存在偏差，我们也把这偏差看做是高斯白噪声。现在，我们要根据我们的**经验温度**和温度计的**测量值**及它们**各自的噪声**来估算出房间的实际温度。

卡尔曼滤波器示例

假如我们要估算 k 时刻的实际温度值。首先你要**根据 k-1 时刻的温度值，来预测 k 时刻的温度（K时刻的经验温度）**。因为你相信温度是恒定的，所以你会得到 k 时刻的温度预测值是跟 k-1 时刻一样的，假设是**23 度（*公式一）**，同时该值**（预测值）的高斯噪声的偏差是5 度**（5 是这样得到的：如果k-1 时刻估算出的最优温度值的偏差是 3，你对自己预测的不确定度是 4 度，他们平方相加再开方，就是 5 **（*公式二）**）。然后，你从温度计那里得到了 k时刻的温度值，假设是**25 度**，同时该值的偏差是**4 度**。

卡尔曼滤波器示例

现在，我们用于估算K时刻房间的实际温度有两个温度值：估计值23度和测量值25度。究竟实际温度是多少呢？是相信自己还是相信温度计？**究竟相信谁多一点？**我们需要用他们的均方误差来判断。

因为，$H^2=\frac{5^2}{5^2+4^2} \Rightarrow H=0.78$ **（*公式三）**，所以我们可以**估算出K时刻的最优温度值**为：$23+0.78*(25-23)=24.56$ 度 **（*公式四）**。

得到了K时刻的最优温度，下一步就是对K+1时刻的温度值进行最优估算，需要得到K时刻的最优温度（24.56）的偏差，算法如下：

$\sqrt{(1-H)*5^2}=2.35$ **（*公式五）**

就这样，卡尔曼滤波器就不断的把均方误差递归，从而估算出最优的温度值，运行速度快，且**只保留上一时刻的协方差**。

Thank you!