2、控制系统的数学模型

2.1 概述

- 了解数学模型的概念
- 了解系统的概念

2.1.1 关于数学模型

（1）什么是数学模型

数学模型是描述系统输入输出（或变量）关系的数学表达式。

（2）数学模型的形式

多样的，同一系统可以有不同形式的数学模型，与系统特点和应用场合有关。

动态模型：微分方程、偏微分方程、差分方程等

静态方程：代数方程

（3）建立数学模型应注意的问题：

准确性、 简化性

（4）建模方式

√ 机理建模：根据运动规律、动力学或电气等原理。

实验建模：根据输入输出数据。

2.1.2 关于系统

（1）线性系统：满足叠加原理的系统

（2）非线性系统：不满足叠加原理的系统

（3）集中参数系统：变量仅仅是时间的函数。（动态方程是微分方程）

（4）分布参数系统：变量不仅是时间函数，而且还是空间的函数。（动态方程是偏微分方程）

如很大的蒸馏罐，温度有梯度。

（5）线性定常系统：微分方程的系数为常数。

如 $$\frac{d^3y}{dt^3}+2\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dy}{dt}=u(t)$$

（6）线性时变系统：微分方程的系数是时间的函数。

$$\frac{d^3y}{dt^3}+2t\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dy}{dt}=u(t)$$

2.1.3 本章内容

本章讨论的系统

仅限于单输入单输出集中参数线性定常系统

或

可以线性化的非线性单输入单输出集中参数系统

本章要求掌握的

微分方程

传递函数

方块图（方框图或结构图）

信号流图

2.2 时域模型——微分方程

- 建立系统或元件的微分方程的步骤
- 典型系统（**R-L-C**电路，直流电动机，阻尼器弹簧系统）
- 非线性系统线性化方法

2.2.1 建立系统或元件微分方程的步骤

- 确定系统或元件的输入输出变量
- 根据物理或化学定律列出原始方程
- 在适当情况下进行简化
- 消去中间变量，得到系统或元件输入输出的微分方程

注意：

列写微分方程式时

输出量及其各阶导数项列写在方程式左端；

输入项及其各阶导数项列写在方程式右端；

并将输出项的系数为1。

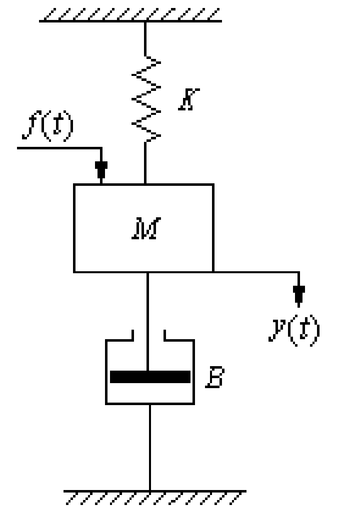
微分方程

2.2.2 典型系统的微分方程

（1）机械位移系统

如图表示一个弹簧—质量—阻尼器系统。外力*f (t)*，系统产生的位移*y(t)*，运动部件质量用M表示；B为阻尼器的阻尼系数。K为弹簧的 弹性系数

要求写出系统在外力*f (t)*作用下的运动方程式。



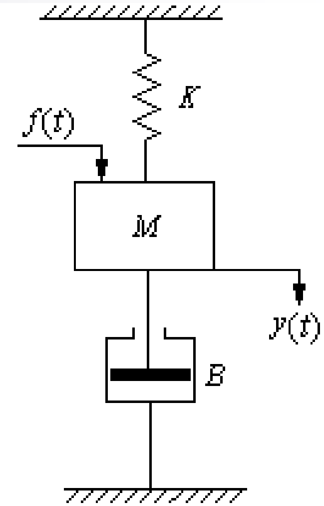
1）*f (t)*是系统的输入，*y(t)*是系统的输出。

2）列出原始方程式。根据牛顿第二定律，有：

$$f(t) - f_1(t) - f_2(t) = M\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}$$

微分方程

$$f(t)-f_1(t)-f_2(t)=M\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}$$



式中 $f_1(t)$——阻尼器阻力；

$$f_1(t)=B\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}$$

$f_2(t)$——弹簧力。

$$f_2(t)=Ky(t)$$

忽略了弹簧质量

$f_1(t)$和$f_2(t)$为中间变量，消去中间变量，整理得

$$M\frac{\mathrm{d}^2y(t)}{\mathrm{d}t^2}+B\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}+Ky(t)=f(t)$$

方程两边同时除以 K

$$\frac{M}{K}\frac{\mathrm{d}^2y(t)}{\mathrm{d}t^2}+\frac{B}{K}\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}+y(t)=\frac{1}{K}f(t)$$

令 $T_B=\frac{B}{K}$ $\quad T_M^2=\frac{M}{K}$

微分方程

$$\frac{M}{K}\frac{\mathrm{d}^2 y(t)}{\mathrm{d}t^2}+\frac{B}{K}\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}+y(t)=\frac{1}{K}f(t)$$

$$T_B=\frac{B}{K} \qquad T_M^2=\frac{M}{K}$$

则有

$$T_M^2\frac{\mathrm{d}^2 y(t)}{\mathrm{d}t^2}+T_B\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}+y(t)=\frac{1}{K}f(t)$$

***f(t)*为N=kg m/s^2，t为s，M为kg，*y(t)*为m，B为N s/m，K为N/m。**

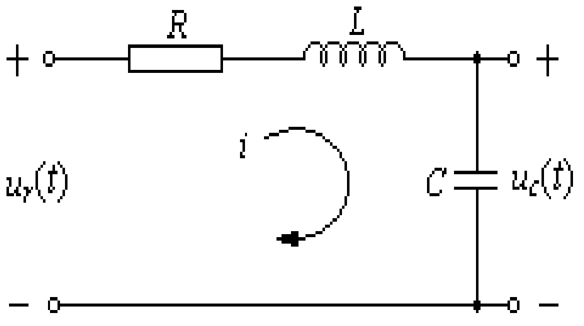
显然**T_B的单位为s，而T^2_M的单位为s^2**

称T_B和T_M为系统的时间常数。

1/K为该系统 的传递系数，它的意义是：稳态时系统的输出与输入之比。又称放大系数。

微分方程

（2）R-L-C电路



$u_r(t)$ 为输入电压， $u_c(t)$为输出电压，输出端开路。

要求列出$u_c(t)$与$u_r(t)$的方程关系式。

根据克希霍夫定律可写出原始方程式：

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+Ri+u_c(t)=u_r(t)$$

$$i=C\frac{du_c(t)}{dt}$$

$$LC\frac{\mathrm{d}^2u_c(t)}{\mathrm{d}t^2}+RC\frac{\mathrm{d}u_c(t)}{\mathrm{d}t}+u_c(t)=u_r(t)$$

微分方程

$$LC\frac{\mathrm{d}^2u_c(t)}{\mathrm{d}t^2}+RC\frac{\mathrm{d}u_c(t)}{\mathrm{d}t}+u_c(t)=u_r(t)$$

$$\frac{L}{R}RC\frac{\mathrm{d}^2u_c(t)}{\mathrm{d}t^2}+RC\frac{\mathrm{d}u_c(t)}{\mathrm{d}t}+u_c(t)=u_r(t)$$

令 T_1=L/R，T_2=RC

$$T_1T_2\frac{\mathrm{d}^2u_c(t)}{\mathrm{d}t^2}+T_2\frac{\mathrm{d}u_c(t)}{\mathrm{d}t}+u_c(t)=u_r(t)$$

式中T_1、T_2为电路的两个时间常数。当t的单位为秒时，它们的单位也为秒。其传递系数为1。

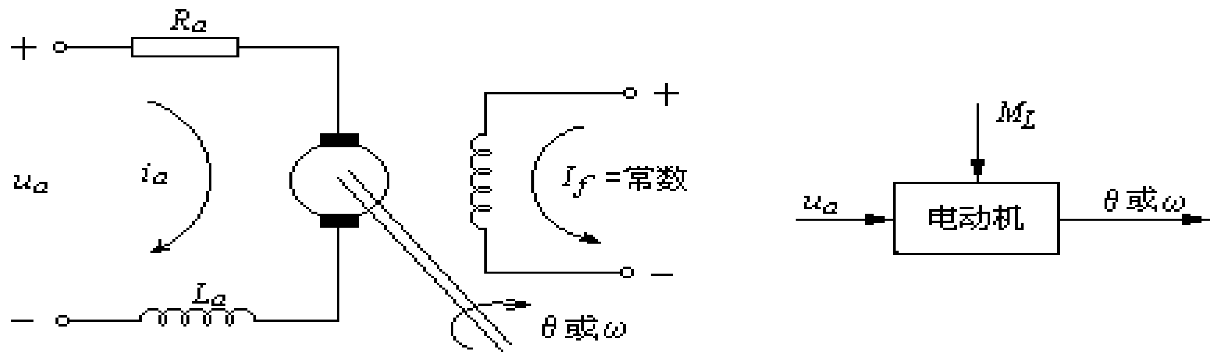
相似系统：

R-L-C电路与弹簧—质量—阻尼器系统具有相同结构的微分方程。

微分方程

（3）直流电动机

（磁场固定不变，用电枢电压来控制的直流电动机。）



控制输入为电枢电压u_a，输出轴角位移θ或角速度ω为输出，负载转矩M_L变化为主要扰动。

求输入与输出关系微分方程式。

原理：

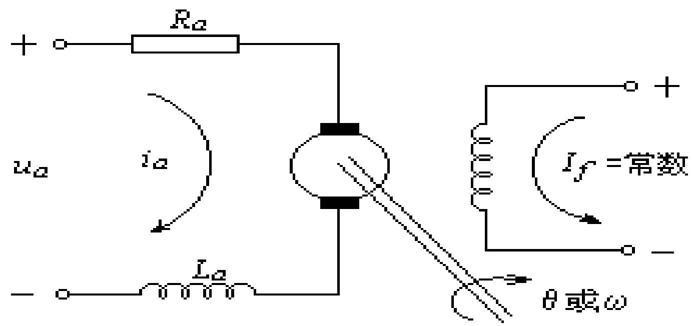
电枢回路产生电枢电流与电机的励磁磁通相互作用产生电磁转矩M_d从而拖动负载机械旋转运动；

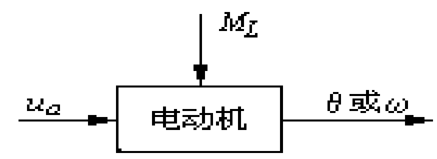
由于电机转动会产生一个反电势；

近似：不计电枢反应、涡流效应和磁滞影响

电机绕组温度在瞬变过程中不变

微分方程





电枢回路： $$L_a\frac{\mathrm{d}i_a}{\mathrm{d}t}+R_ai_a+E_a=u_a$$

其中E_a为电机产生的反电势，且为

$$E_a=K_e\omega$$ 其中K_e为反电势系数

而电磁转矩M_d（也称 电动机转矩）（牛顿 米）为：

$$M_d=K_mi_a$$ K_m为 电动机转矩系数（牛顿 米/安）。

根据刚体旋转定律，可写运动方程式

$$J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}+M_L=M_d$$ J为转动部分转动惯量（公斤 米²）；

微分方程

$$\begin{cases} L_a \dfrac{\mathrm{d}i_a}{\mathrm{d}t} + R_a i_a + E_a = u_a \\ E_a = K_e \omega \\ M_d = K_m i_a \\ J \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} + M_L = M_d \end{cases}$$

其中i_a、E_a、M_d为中间变量；

K_e、K_m为常数；

M_L为负载输入；

u_a为参考输入；

ω为系统输出；

微分方程

消去中间变量整理后

$$\frac{L_a J}{K_e K_m}\frac{\mathrm{d}^2\omega}{\mathrm{d}t^2}+\frac{R_a J}{K_e K_m}\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}+\omega=\frac{1}{K_e}u_a-\frac{R_a}{K_e K_m}M_L-\frac{L_a}{K_e K_m}\frac{\mathrm{d}M_L}{\mathrm{d}t}$$

令 $T_m=\dfrac{R_a J}{K_e K_m}$ $T_a=\dfrac{L_a}{R_a}$

则有

$$T_a T_m\frac{\mathrm{d}^2\omega}{\mathrm{d}t^2}+T_m\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}+\omega=\frac{1}{K_e}u_a-\frac{T_m}{J}M_L-\frac{T_a T_m}{J}\frac{\mathrm{d}M_L}{\mathrm{d}t}$$

式中 $\mathbf{T_m}$——机电时间常数，（秒）；

$\mathbf{T_a}$——电动机电枢回路时间常数，一般要比Tm小。

微分方程

以上是输入为电枢电压u_a，输出为角速度ω，负载矩M_L扰动输入的情况，系统是一个2阶线性定常微分方程。

若输出为电动机的转角θ，则有

$$T_a T_m \frac{\mathrm{d}^3\theta}{\mathrm{d}t^3} + T_m \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{K_e} u_a - \frac{T_m}{J} M_L - \frac{T_a T_m}{J} \frac{\mathrm{d}M_L}{\mathrm{d}t}$$

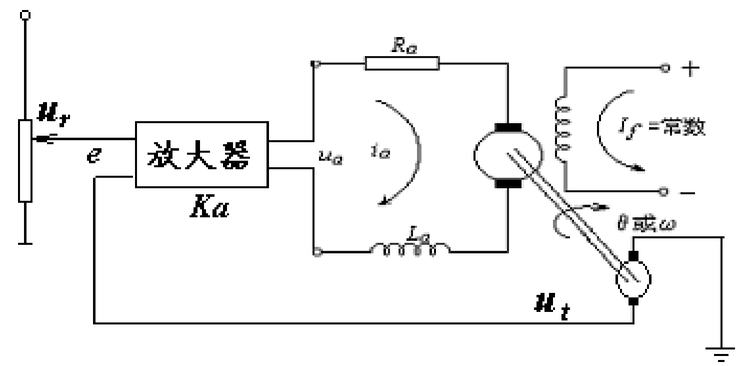
是一个3阶线性定常微分方程

微分方程

（5）反馈系统微分方程

与开环系统不同之处为：

系统输入为u_r,而不是u_a。



$$T_aT_m\frac{\mathrm{d}^2\omega}{\mathrm{d}t^2}+T_m\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}+\omega=\frac{1}{K_e}u_a-\frac{T_m}{J}M_L-\frac{T_aT_m}{J}\frac{\mathrm{d}M_L}{\mathrm{d}t}$$

设放大器没有惯性，输出与输入成正比

$$u_a=K_ae \qquad e=u_r-u_t$$

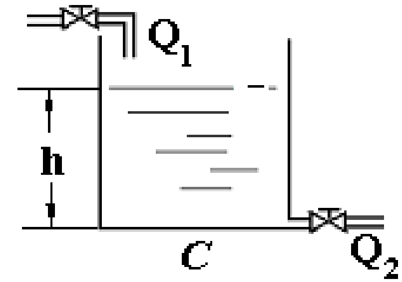
测速发电机输出为u_t,输入为ω $\qquad u_t=K_t\omega$

消去中间变量得

$$T_aT_m\frac{\mathrm{d}^2\omega}{\mathrm{d}t^2}+T_m\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}+(1+\frac{K_aK_t}{K_e})\omega=\frac{K_a}{K_e}u_r-\frac{T_m}{J}M_L-\frac{T_aT_m}{J}\frac{\mathrm{d}M_L}{\mathrm{d}t}$$

微分方程

（6）液位流体过程



如图，Q_1为流入量，也是输入量，Q_2为流出量，h为液位高度，为系统输出，C为水箱的截面积。

$$Q_1 - Q_2 = C\frac{dh}{dt}$$

$$Q_2 = \alpha\sqrt{\frac{2g\Delta p}{\gamma}} = k\sqrt{h}$$

其中g为重力加速度，γ为液体密度，α为流体系数

$$k = \alpha\sqrt{\frac{2g}{\gamma}}$$ 为常数（当液体固定时）

消去中间变量Q_2, 则有 $$C\frac{dh}{dt} + k\sqrt{h} = Q_1$$

这是一个一阶非线性微分方程

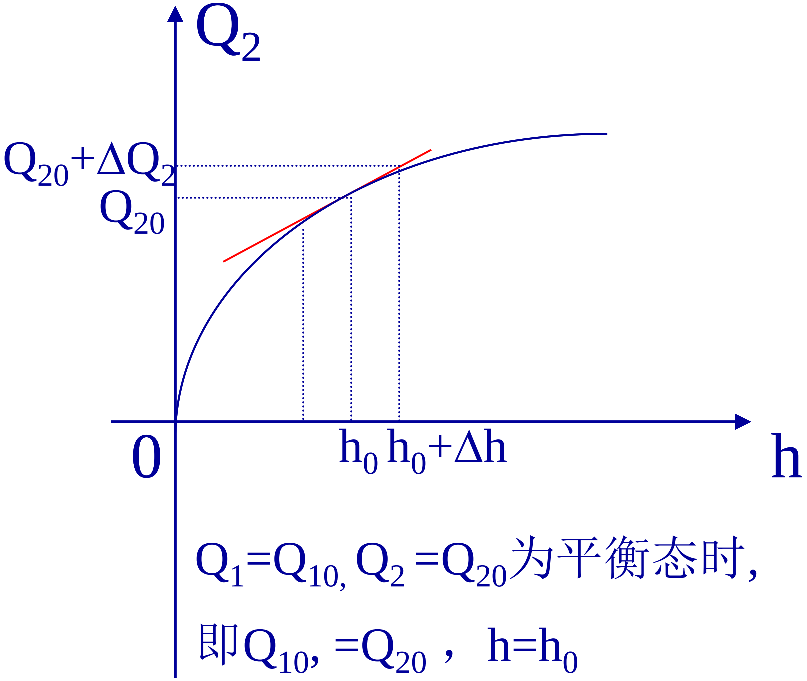
2.2.3 非线性方程线性化方法

从液位系统可知

$$Q_1 - Q_2 = C\frac{dh}{dt}$$

$$Q_2 = \alpha\sqrt{\frac{2g\Delta p}{\gamma}} = k\sqrt{h}$$

但如果在某一**静态工作点**附近（**h_0**，**Q_{20}**）作小的变化，就可以近似线性化：



$Q_1=Q_{10}, Q_2=Q_{20}$为平衡态时，

即$Q_{10}=Q_{20}$， $h=h_0$

当$Q_1=Q_{10}+\Delta Q_1, Q_2=Q_{20}+\Delta Q_2, h=h_0+\Delta h$

$$\frac{\Delta Q_2}{\Delta h} = K^{'}$$

$$C\frac{d\Delta h}{dt} + K^{'}\Delta h = \Delta Q_1$$

$$\frac{C}{K'}\frac{d\Delta h}{dt} + \Delta h = \frac{1}{K'}\Delta Q_1$$

此时系统近似为线性系统

微分方程

这种近似方法称为“小信号理论”或“小偏差理论”

这种近似方法应用的前提条件是：

控制系统有一个额定工作状态，称为预定工作点。

输出偏离预定工作点的偏差量很小。

具体方法：

将非线性函数在预定工作点邻域内进行泰勒展开，并忽略二阶以上的展开项。

若非线性函数为 $z=f(x,y)$, (x_0,y_0) 处为预定工作点

那么在预定工作点邻域内进行泰勒展开得：

$$z=f(x,y)=f(x_0,y_0)+\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}(x-x_0)+\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}(y-y_0)+\cdots$$

忽略△x、△y的二次幂以上的展开项，有

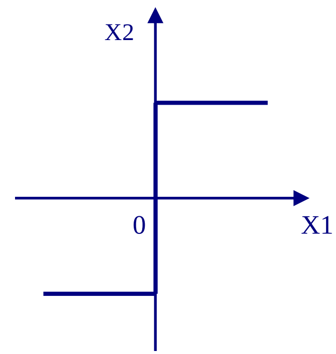
$$\Delta z=f(x,y)-f(x_0,y_0)=\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}\Delta x+\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}\Delta y$$

微分方程

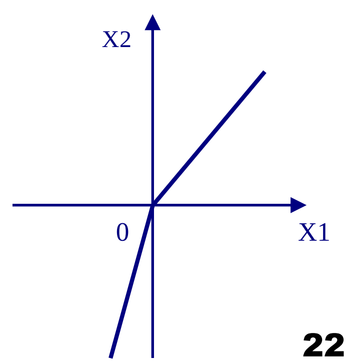
其中 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$ 和 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$ 为常数，如果 z 为输出，x、y 为输入，那么输入和输出的增量关系就是线性关系。

注意一个问题：该非线性函数可微或可导才能泰勒展开

➢有一些元件的非线性特性，如图所示的继电器特性，不满足展开成泰勒级数的条件。对于此类非线性特性不能应用小偏移线性化的概念进行线性化。这类非线性特性叫做本质非线性。



➢由于在坐标原点处的一阶导数不连续、所以研究在原点附近偏差信号的动态过程时不能应用小偏差线性化的概念。



例：将下列液位系统在（4，6）处线性化

$$C\frac{dh}{dt}+Q_2=Q_1$$

$$Q_2=3\sqrt{h}$$

解： $Q_2=3\sqrt{h}$

$$Q_{20}+\Delta Q_2=Q_{20}+(3\sqrt{h})'\Big|_{h_0}\Delta h$$

$$\Delta Q_2=(3\sqrt{h})'\Big|_{h_0}\Delta h=\frac{3}{2\sqrt{h}}\Bigg|_{h_0=4}\Delta h=0.75\Delta h$$

$$C\frac{d\Delta h}{dt}+0.75\Delta h=\Delta Q_1$$

小结

- 建立微分方程要掌握所涉及系统的关键公式

  牛顿第二定律、克希霍夫定律、刚体旋转定律等

- 建立的微分方程的标准形式为

$$a_n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}c(t)+a_{n-1}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}t^{n-1}}c(t)+\cdots+a_1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}c(t)+c(t)$$

$$=b_m \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}t^m}r(t)+b_{m-1}\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}t^{m-1}}r(t)+\cdots+b_1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}r(t)+b_0 r(t)$$

- 要建立非线性系统的线性化微分方程式，首先确定系统的平衡状态，即预定工作点；最后得到整个系统以增量表示的线性化方程。

- 相似系统

传递函数

2.3 复域模型——传递函数

- 传递函数的定义
- 典型环节的传递函数
- 传递函数的性质和物理意义
- 传递函数的表示方式和术语

传递函数

2.3.1 传递函数的定义

传递函数定义为：零值初始条件下，线性系统(或线性元件)输出拉氏变换和输入拉氏变换之比。

$$a_n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}c(t) + a_{n-1}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}t^{n-1}}c(t) + \cdots + a_1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}c(t) + a_0 c(t)$$

$$= b_m \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}t^m}r(t) + b_{m-1}\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}t^{m-1}}r(t) + \cdots + b_1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}r(t) + b_0 r(t)$$

令 ***C(s)=L[c(t)]，R(s)=L[r(t)]***。

对上式两边求拉氏变换且所有初始值为零，那么有

$$a_n s^n C(s) + a_{n-1}s^{n-1}C(s) + \cdots + a_1 sC(s) + a_0 C(s)$$

$$= b_m s^m R(s) + b_{m-1}s^{m-1}R(s) + \cdots + b_1 sR(s) + b_0 R(s)$$

传递函数

$$(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0) C(s)$$
$$= (b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0) R(s)$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} = \frac{N(s)}{D(s)}$$

令 $$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)}$$

用***G(s)***表示元件**(**或系统**)**的传递函数。

若已知输入***R(s)***和***G(s)***,那么就可以求出***C(s)***

$$C(s) = G(s) R(s)$$

传递函数主要研究的输入对输出的关系。

传递函数

例：求机械阻尼系统的传递函数

$$T_M^2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + T_B \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = \frac{1}{K} f(t)$$

$$T_M^2 s^2 Y(s) + T_B s Y(s) + Y(s) = \frac{1}{K} F(s)$$

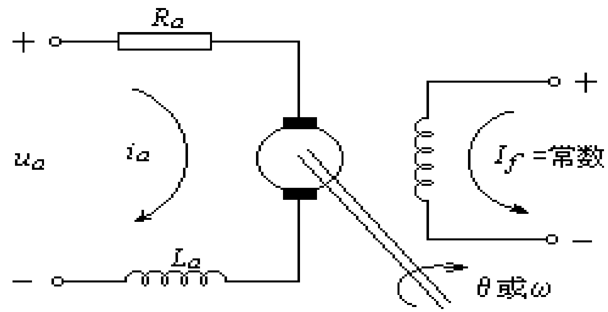
$$(T_M^2 s^2 + T_B s + 1) Y(s) = \frac{1}{K} F(s)$$

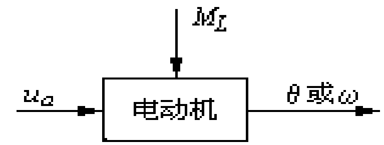
$$\frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{1}{K} \frac{1}{(T_M^2 s^2 + T_B s + 1)}$$

用s^n代替微分方程的微分算子d^n/dt^n即可。

是关于s的有理分式

传递函数





例：求电枢控制电动机系统的传递函数

$$T_aT_m\frac{d^2\omega}{dt^2}+T_m\frac{d\omega}{dt}+\omega=\frac{1}{K_e}u_a-\frac{T_m}{J}M_L-\frac{T_aT_m}{J}\frac{dM_L}{dt}$$

$$(T_aT_ms^2+T_ms+1)\Omega(s)=\frac{1}{K_e}U_a(s)-(\frac{T_m}{J}+\frac{T_aT_m}{J}s)M_L(s)$$

有两个输入，采用叠加性原理

$$M_L(s)=0 \qquad \frac{\Omega(s)}{U_a(s)}=\frac{1/K_e}{(T_aT_ms^2+T_ms+1)}$$

$$\frac{Y(s)}{F(s)}=\frac{1}{K}\frac{1}{(T_M^2s^2+T_Bs+1)}$$

$$U_a(s)=0 \qquad \frac{\Omega(s)}{M_L(s)}=\frac{-T_m(1+T_as)}{J(T_aT_ms^2+T_ms+1)}$$

是s的有理分式

2.3.2 传递函数的性质

关于传递函数性质：

- ✓ 只适合线性定常系统；
- ✓ 传递函数式是复变量s的有理分式；
- ✓ 分子多项式阶次m和分母多项式的阶次n及系数(a_i,b_j) 均由系统或元件的参数和结构决定，与外加输入和初始状态无关，且m≤n；
- ✓ 传递函数代表了输入和输出之间的关系，不能提供系统内部结构信息；
- ✓ 若传递函数已知，针对不同的输入，可以研究系统输出和响应；

  $C(s)=G(s)R(s)$，再通过反拉式变换求出$c(t)$.
- ✓ 只适合一个输入和一个输出，多输入多输出需要传递函数阵来表示。

传递函数

传递函数与系统单位脉冲响应的关系

即讨论当初始条件为零， $r(t)=\delta(t)$ 时系统的输出c(t)。

此时将c(t) 称为单位脉冲响应。

此时$R(s)=1$,那么

$$G(s)=C(s)$$

$$C(s)=L\,[c(t)]=G(s)$$

结论：一个系统的传递函数就是这个系统单位脉冲响应的拉氏变换。

传递函数可以表征系统的动态性能。

2.3.3 传递函数的表示方式和术语

传递函数有两种比较常见的表示方式

其一是有理分式形式：

$$G(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1 s+b_0}{a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}=\frac{N(s)}{D(s)}$$

其二是零极点形式

$$G(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=k^*\frac{(s+z_1)(s+z_2)\cdots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)} \qquad k^*=\frac{b_m}{a_n}$$

$-z_1,\ldots,-z_m$为传递函数分子多项式方程的m个根，称为传递函数的零点；

$-p_1,\ldots,-p_n$为分母多项式方程的n个根，称为传递函数的极点。

k^*为根轨迹增益；

传递函数

零极点形式还可变形为时间常数形式

$$G(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=K\frac{(\tau_1 s+1)\cdots(\tau_p s+1)(\tau_{11}^2 s^2+2\tau_{11}\zeta s+1)\cdots(\tau_{1q}^2 s^2+2\tau_{1q}\zeta s+1)}{(T_1 s+1)\cdots(T_x s+1)(T_{11}^2 s^2+2T_{11}\zeta s+1)\cdots(T_{1y}^2 s^2+2T_{1y}\zeta s+1)}$$

其中 $p+2q=m, x+2y=n$

K为静态放大系数

$$K=G(0)=\frac{b_0}{a_0}$$

s=0表示所有导数项为零

$$G(s)=K\frac{(\tau_1 s+1)\cdots(\tau_p s+1)(\tau_{11}^2 s^2+2\tau_{11}\zeta s+1)\cdots(\tau_{1q}^2 s^2+2\tau_{1q}\zeta s+1)}{(T_1 s+1)\cdots(T_x s+1)(T_{11}^2 s^2+2T_{11}\zeta s+1)\cdots(T_{1y}^2 s^2+2T_{1y}\zeta s+1)}$$

$$=k^*\frac{(s+z_1)(s+z_2)\cdots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)}$$

$$K=k^*\frac{z_1 z_2\cdots z_m}{p_1 p_2\cdots p_n}$$

2.3.4 典型环节的传递函数

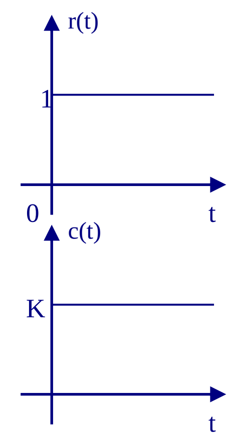
（1） 比例环节

$$c(t) = Kr(t)$$

根据定义，两边求拉氏变换得

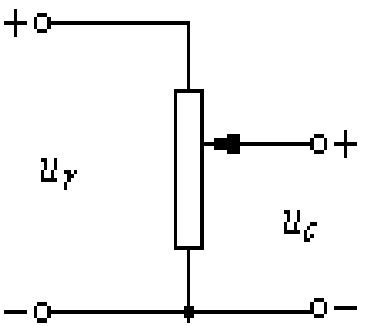
$$C(s)=KR(s)$$

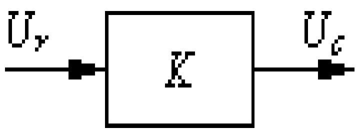
$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = K$$



比例环节又称为无惯性环节或放大环节。

典型元件为
电阻、弹簧

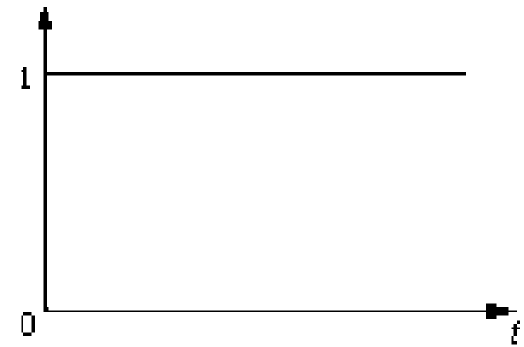




传递函数

（2）惯性环节

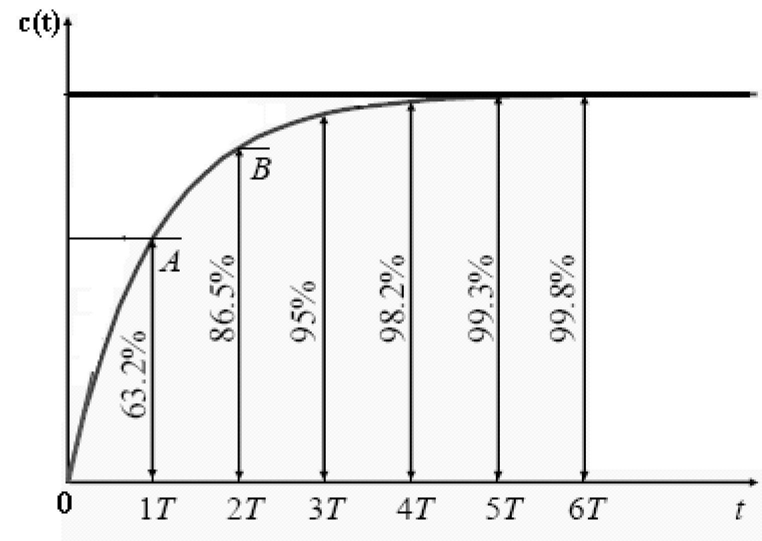
如果微分方程为一阶常微分方程如：



$$T\frac{dc(t)}{dt}+c(t)=Kr(t)$$

$$(Ts+1)C(s)=KR(s)$$

$$G(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{K}{Ts+1}$$



K——环节的比例系数；

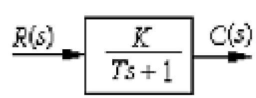
T——环节的时间常数。

典型惯性环节有

R-C电路

水箱水位

温度系统



传递函数

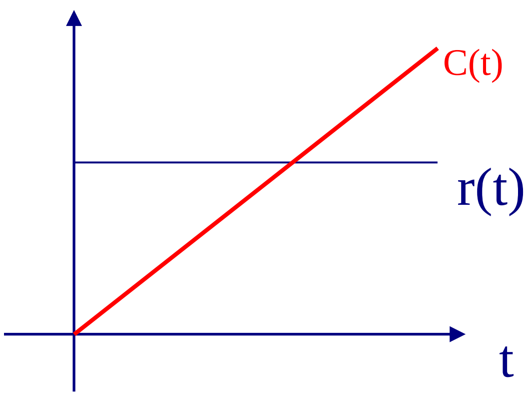
（3）积分环节

如果微分方程仍为一阶常微分方程，但

$$T\frac{dc(t)}{dt}=r(t)$$

$$TsC(s)=R(s)$$

$$G(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{1}{Ts}$$



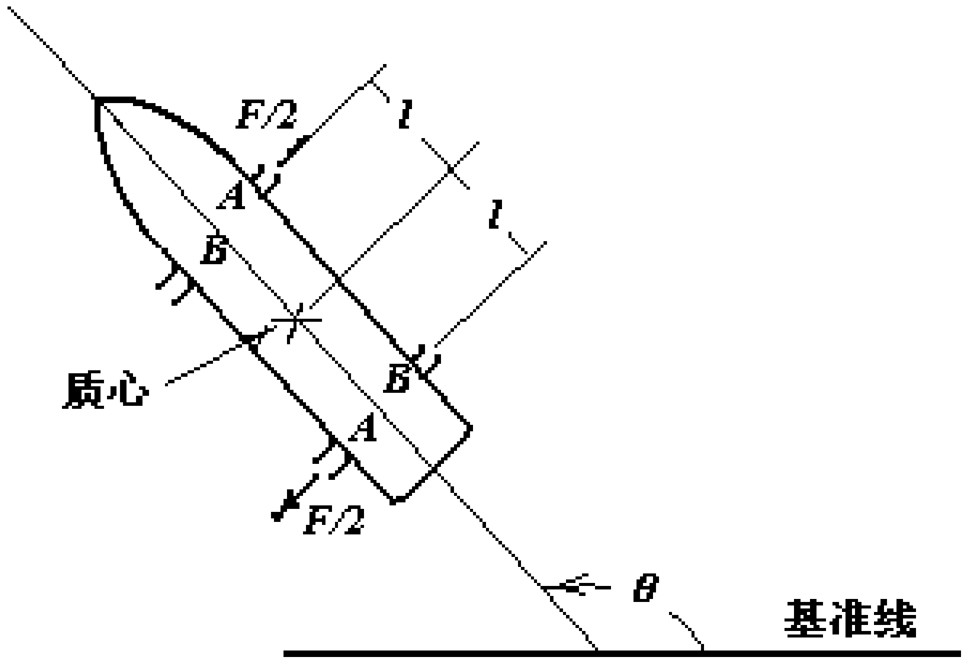
T——积分时间常数。

若**r(t)=1**，那么 $T\frac{dc(t)}{dt}=r(t)=1$

$$\frac{dc(t)}{dt}=\frac{1}{T} \qquad c(t)=\frac{t}{T}$$

传递函数

卫星姿态控制系统
（对偏航角θ的控制）



A、B为斜对称配置得喷气发动机，推力为F/2，成对工作。力矩为T=F*l*，转动惯量为*J*

对该系统应用牛顿第二定律，注意到在卫星周围的环境中不存在摩擦，所以有

$$J\frac{d^2\theta}{dt^2}=T$$

传递函数

$$Js^2\Theta(s)=F(s)\cdot l$$

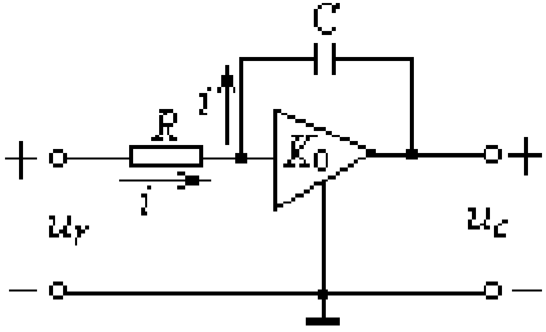
$$G(s)=\frac{\Theta(s)}{F(s)}=\frac{l}{Js^2}=\frac{1}{T's^2}$$

其中T'＝*J/l*

由两个积分环节组成。

另一个比较熟悉的元件就是积分放大器。

用阻抗方法求



$$\frac{U_c(j\omega)}{U_r(j\omega)}=-\frac{\frac{1}{j\omega C}}{R}=-\frac{1}{j\omega CR}$$

$$\frac{U_c(s)}{U_r(s)}=\frac{-1}{RCs}=\frac{-1}{Ts}$$

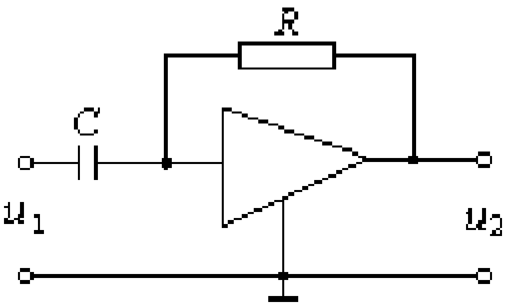
其中T＝*RC*

传递函数

（4）微分环节

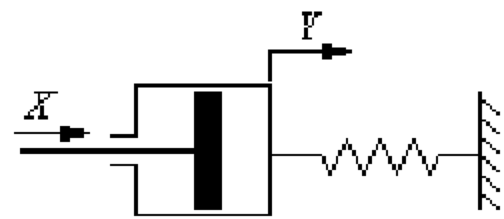
$$c(t) = T\frac{dr(t)}{dt}$$

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = Ts$$



若*r(t)*为阶跃输入

$$c(t) = T\delta(t)$$



所以称G(s)=Ts为理想微分环节
而通常实际的微分环节为

$$G(s) = \frac{Ts}{T_1 s + 1}$$ **当T_1很小时**

传递函数

（5）二阶环节

如果微分方程为二阶常微分方程如：

$$T^2\frac{d^2c(t)}{dt^2}+2T\zeta\frac{dc(t)}{dt}+c(t)=r(t)$$

二阶环节的传递函数为：

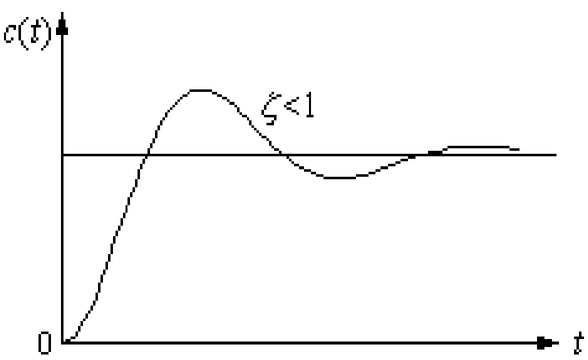
$$G(s)=\frac{1}{T^2s^2+2T\zeta s+1}=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\omega_n\zeta s+\omega_n^2}$$

ζ——阻尼比；

ω_n——无阻尼自然振荡频率

ω_n=1/T；

当0<ζ<1时，由于系统输出会出现振荡，称为振荡环节



常见的二阶环节有：

R-L-C电路、电动机

传递函数

（6）延滞环节（纯滞后环节）

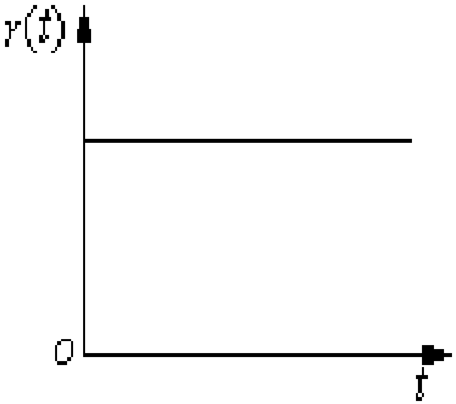
$$c(t) = r(t-\tau)$$

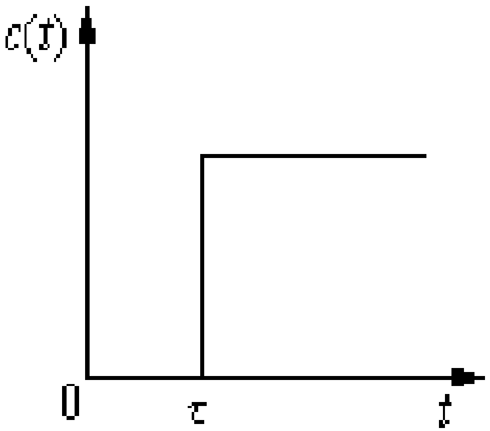
τ 称为延滞时间（又称死区时间）

延滞环节的传递函数为：

$$G(s) = e^{-\tau s}$$

延滞环节典型的出现在管道运输



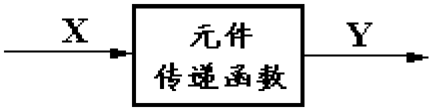


2.4 控制系统方块图和信号流图

- 方块图的绘制
- 方块图的化简
- 信号流图的绘制
- Mason公式

方块图

2.4.1 方块图组成与绘制



（1）什么是方块图：

图解模型（模型）；

是以传递函数为基础的；又称为结构图或方框图。

（2）方块图的组成：

由方块、带箭头的线段、综合点和引出点组成

方块（方框）：

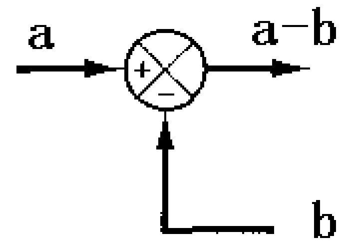
方块代表一种运算或功能，单向运算；

方块中通常填入元件的传递函数；

信号线：带箭头的线段代表信号的流向；如 X、Y；

箭头指向方块的为输入信号，箭头离开方块的为输出信号。

方块图

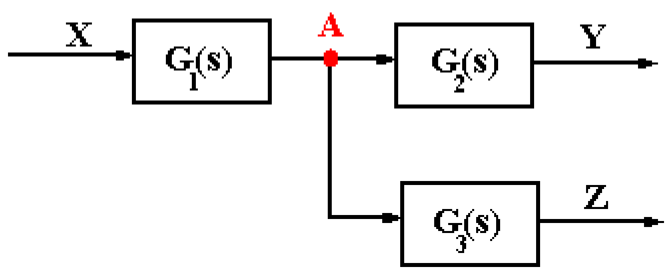


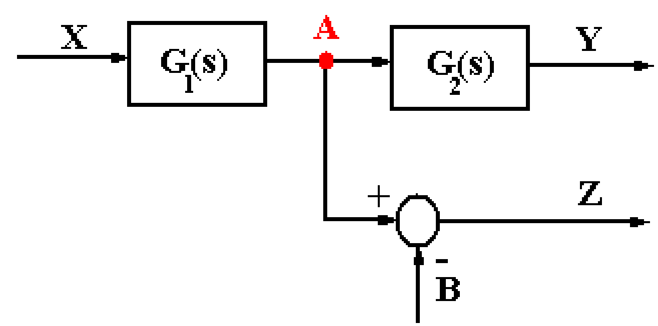
综合点（相加点）：

表示对两个以上信号进行加减运算

注意：进行相加或相减的量应具有相同的单位。

引出点（分支点）：表示信号测量位置或同一信号可同时传递到不同的位置；如A点





方块图

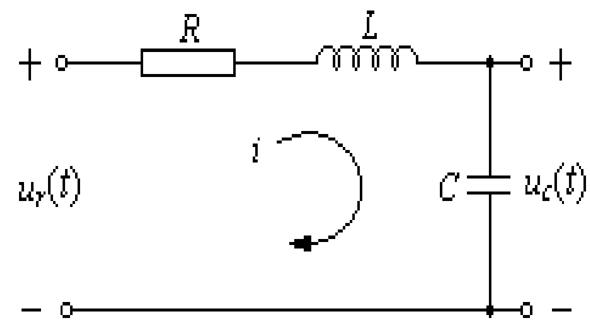
（3）方块图的绘制

建立系统的方块图的步骤如下：

- 确定系统的输入量和输出量
- 建立原始的微分方程和代数方程；
- 对每个原始方程进行拉氏变换，并作出相应的子方块图（注意尽量使得方块内的传函物理可实现）；
- 置系统的输入变量于左端，输出变量于右端，
- 按系统中各变量的传递顺序，依次将各子方块图连接起来；

方块图

例：R-L-C电路



$u_r(t)$ 为输入电压， $u_c(t)$为输出电压，输出端开路。

写出原始方程式：

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+Ri+u_c(t)=u_r(t)$$

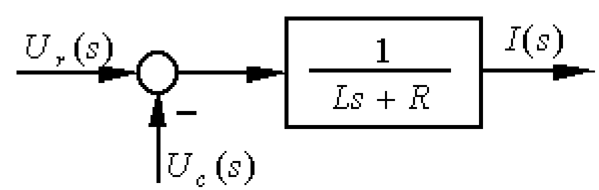
$$i=C\frac{du_c(t)}{dt}$$

拉氏变换得

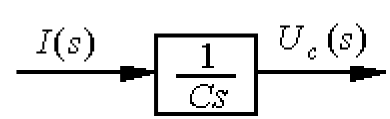
$$LsI(s)+RI(s)+U_c(s)=U_r(s)$$

$$I(s)=CsU_c(s)$$

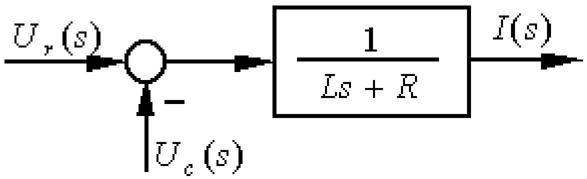
$$I(s)=\frac{U_r(s)-U_c(s)}{Ls+R}$$

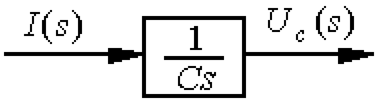


$$U_c(s)=\frac{1}{Cs}I(s)$$

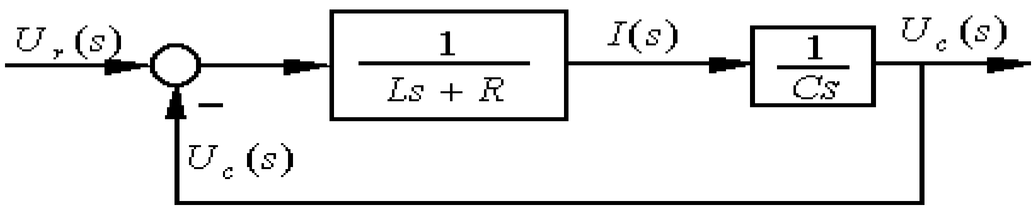


方块图





将相同信号I(s)、U_c(s)连接起来,就完成了方块图的绘制。

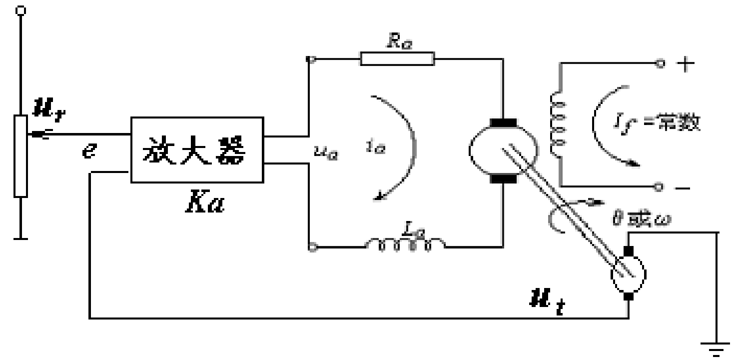


在建立了 原始方程后，不需要消除中间变量，而是将中间变量根据传递关系，一个一个的串起来，最后完成整个的方块图。

方块图给出组成系统各元件之间信号的传递关系，便于研究某元件的变化对系统的影响。

方块图

例：直流电机反馈系统

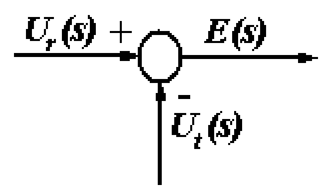


系统输出为ω，
系统输入为u_r
依据信号传递顺序看

- 比较器

$$e = u_r - u_t$$

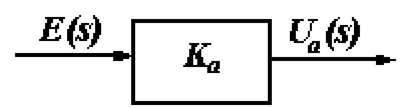
$$E(s) = U_r(s) - U_t(s)$$



- 放大器

$$u_a = K_a e$$

$$U_a(s) = K_a E(s)$$

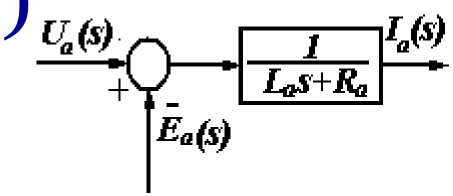


方块图

直流电机

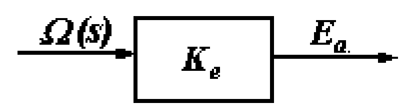
$$L_a \frac{\mathrm{d}i_a}{\mathrm{d}t} + R_a i_a + E_a = u_a$$

$$(L_a s + R_a) I_a(s) + E_a(s) = u_a(s)$$



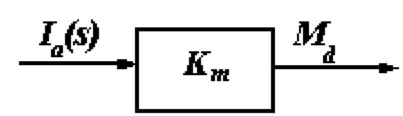
$$I_a(s) = \frac{u_a(s) - E_a(s)}{(L_a s + R_a)}$$

$$E_a = K_e \omega$$



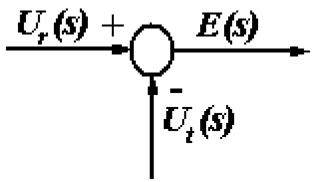
$$E_a(s) = K_e \Omega(s)$$

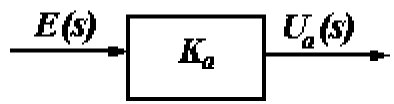
$$M_d = K_m i_a$$

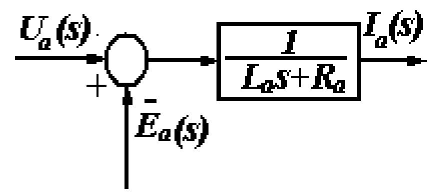


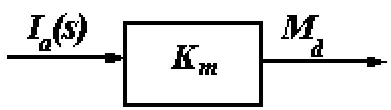
$$M_d(s) = K_m I_a(s)$$

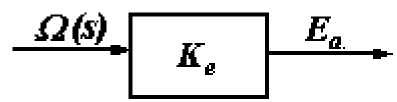
方块图







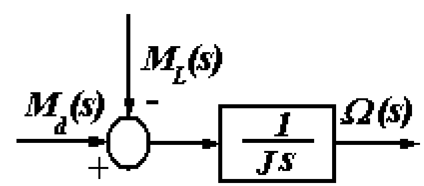




$$J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}+M_L=M_d$$

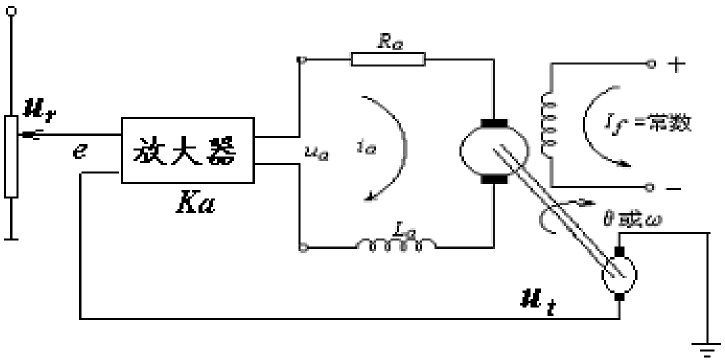
$$Js\Omega(s)+M_L(s)=M_d(s)$$

$$\Omega(s)=\frac{M_d(s)-M_L(s)}{Js}$$



$$e = u_r - u_t$$

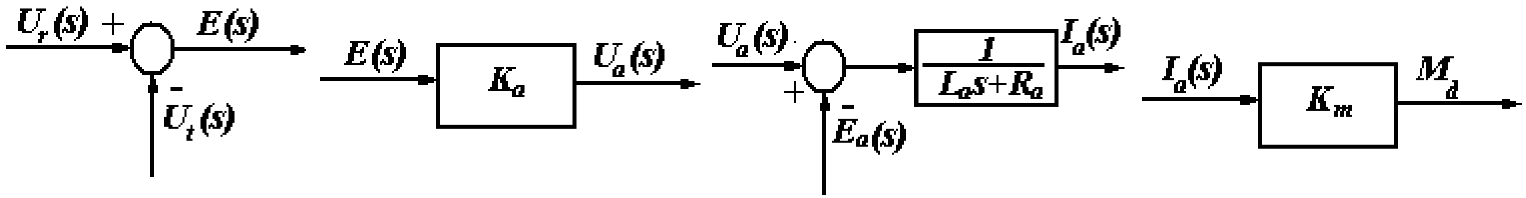
$$u_a = K_a e$$

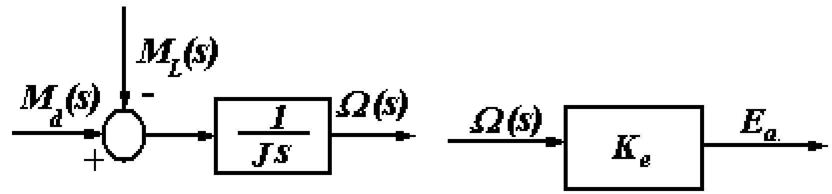


$$\begin{cases} L_a \dfrac{\mathrm{d}i_a}{\mathrm{d}t} + R_a i_a + E_a = u_a \\ E_a = K_e \omega \\ M_d = K_m i_a \\ J \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} + M_L = M_d \end{cases}$$

$$u_t = K_t \omega$$

方块图





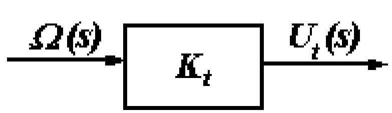
•测速发电机

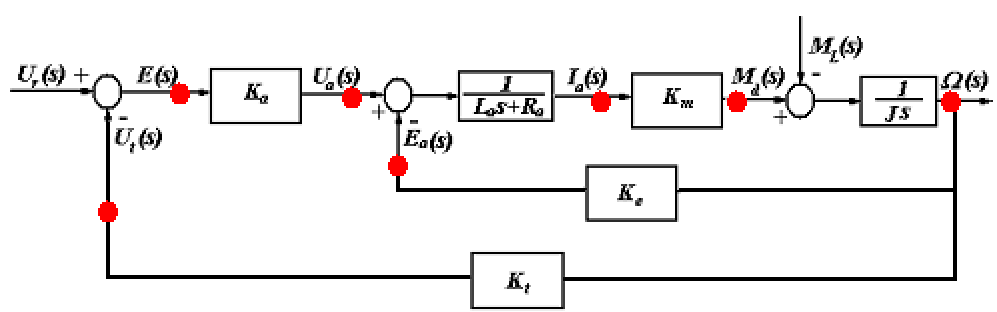
$$u_t = K_t \omega$$

$$U_t(s) = K_t \Omega(s)$$

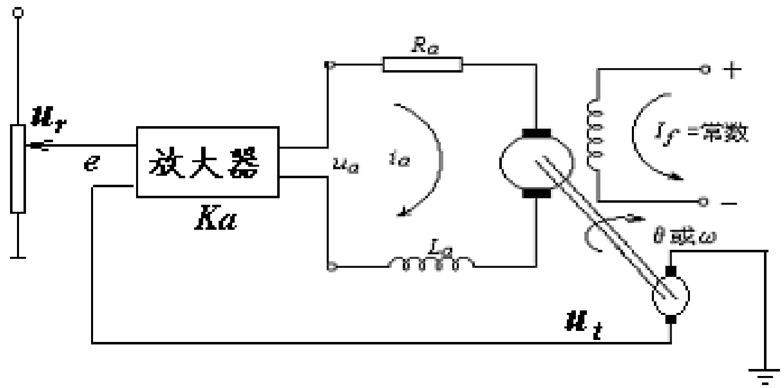
输入在左端，输出在右端

依照各变量的传递顺序，依次将各元件的方块图连接起来；





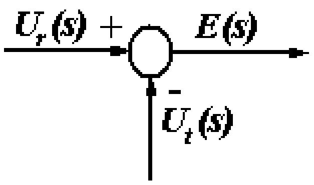
方块图



- 比较器

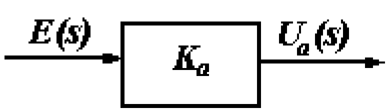
$$e = u_r - u_t$$

$$E(s) = U_r(s) - U_t(s)$$



- 放大器

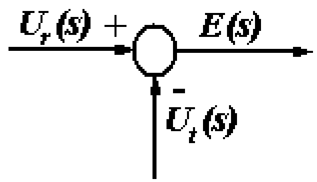
$$u_a = K_a e \qquad U_a(s) = K_a E(s)$$

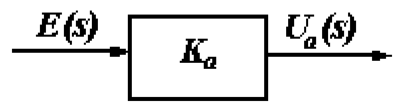


- 直流电机（令M_L＝0）

$$T_a T_m \frac{d^2\omega}{dt^2} + T_m \frac{d\omega}{dt} + \omega = \frac{1}{K_e} u_a - \frac{T_m}{J} M_L - \frac{T_a T_m}{J} \frac{dM_L}{dt} = \frac{1}{K_e} u_a$$

方块图

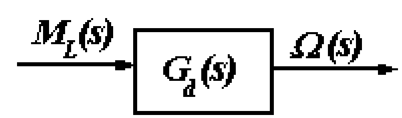




$$\Omega(s) \Big/ U_a(s) = \frac{1}{K_e(T_aT_ms^2+T_ms+1)} = G_0(s)$$

讨论负载输入（令$\mathbf{U_a}$＝0）

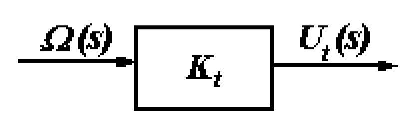
$$\frac{\Omega(s)}{M_L(s)} = \frac{-T_m(1+T_as)}{J(T_aT_ms^2+T_ms+1)} = G_d(s)$$



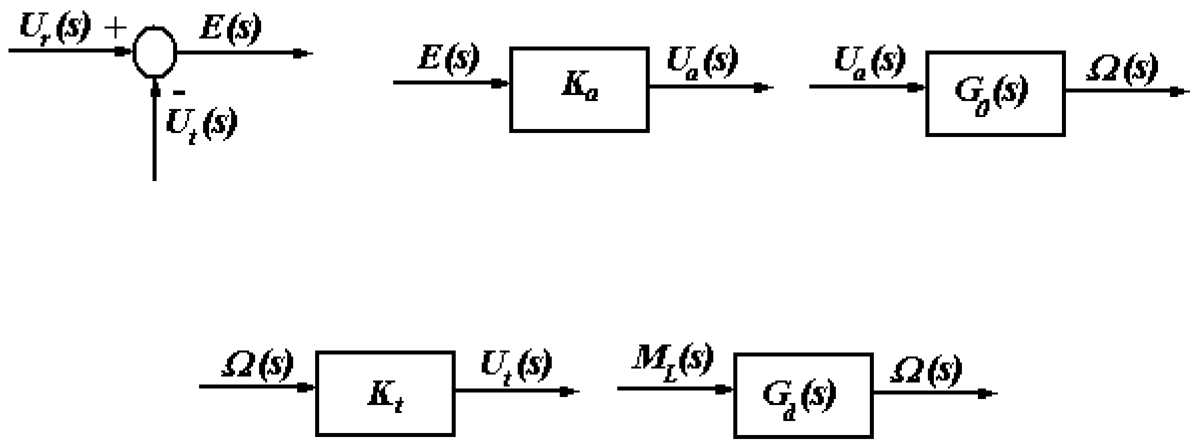
- 测速发电机

$$u_t = K_t\omega$$

$$U_t(s) = K_t\Omega(s)$$

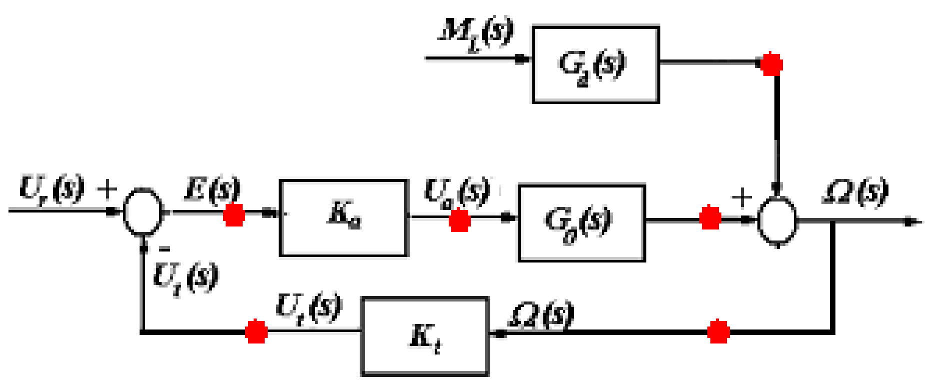


方块图



输入在左端，输出在右端

依照各变量的传递顺序，将各元件的方块图连接起来；



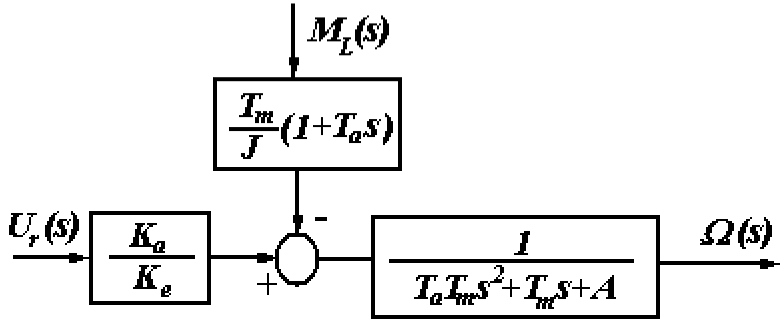
方块图

$$T_aT_m\frac{\mathrm{d}^2\omega}{\mathrm{d}t^2}+T_m\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}+(1+\frac{K_aK_t}{K_e})\omega=\frac{K_a}{K_e}u_r-\frac{T_m}{J}M_L-\frac{T_aT_m}{J}\frac{\mathrm{d}M_L}{\mathrm{d}t}$$

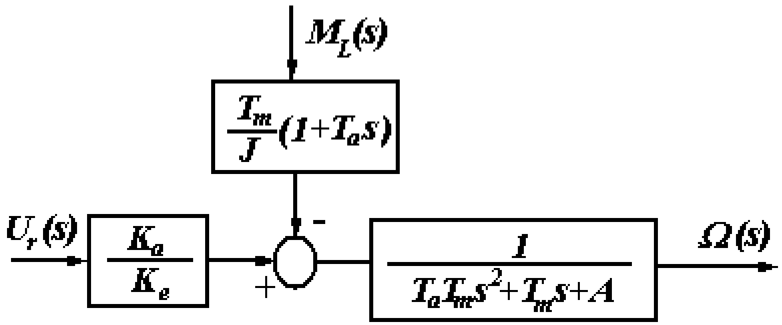
令 $A=(1+\frac{K_aK_t}{K_e})$

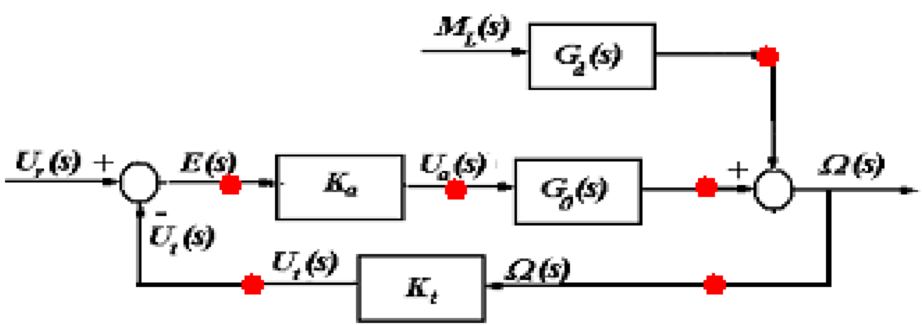
$$(T_aT_ms^2+T_ms+A)\Omega(s)=\frac{K_a}{K_e}U_r(s)-(\frac{T_m}{J}+\frac{T_aT_m}{J}s)M_L(s)$$

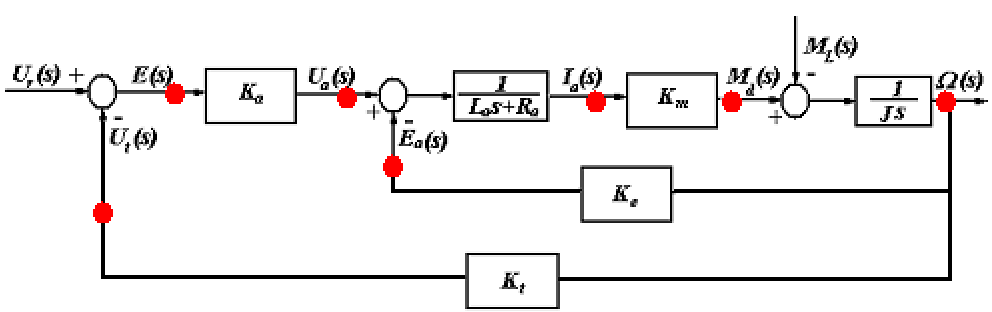
$$\Omega(s)=\frac{1}{[T_aT_ms^2+T_ms+A]}[{}^{K_a}/_{K_e}U_r(s)-{}^{T_m}/_{J}(1+T_as)M_L(s)]$$



方块图







这三个方块图都是直流电机反馈系统的结构图

说明两点：

同一个系统方块图不唯一；

同一系统的不同的方块图之间一定是总的输入输出关系等效的；

不同的是中间变量个数不同。

2.4.2 方块图的化简

方块图的运算和变换

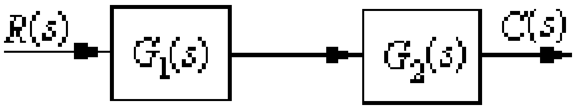
就是将有多个方块的方块图化为一个等效的方块，使方块中的数学表达式为总的传递函数。

（1）方块图的基本连接方式及等效原则

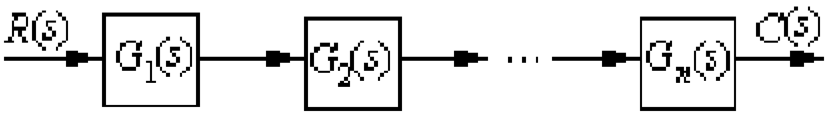
方块图的连接方式可分为三种：

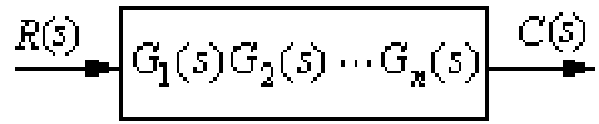
1）串联连接

方块与方块首尾相连。前一个方块的输出，作为后一个方块的输入。



方块图

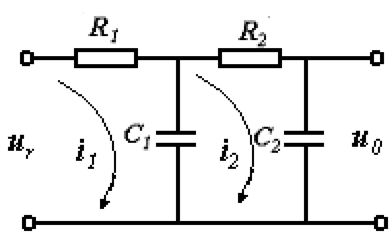


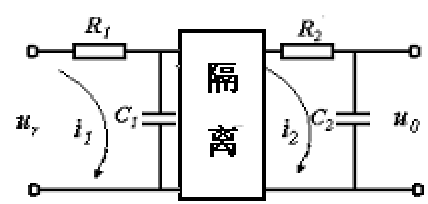


$$G(s)=G_1(s)\cdots G_n(s)$$

***n*个传递函数依次串联的等效传递函数，等于*n*个传递函数的乘积。**

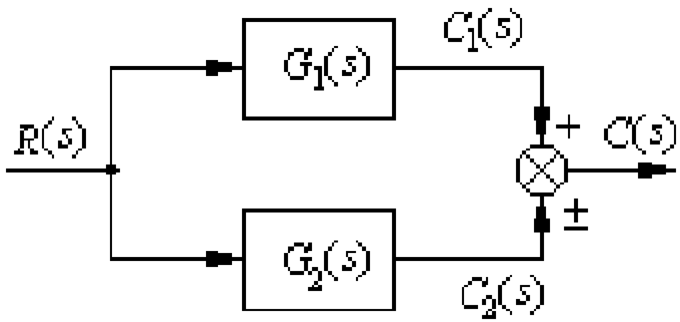
注意：两个串联的环节存在一个负载效应问题。

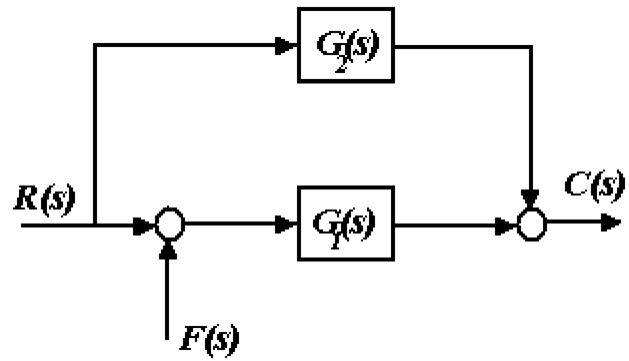




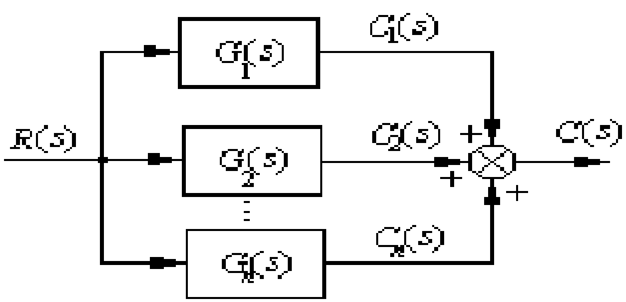
方块图

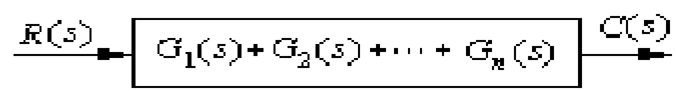
2）并联连接 两个或多个方块，具有同一个输入，而以各方块输出的代数和作为总输出。





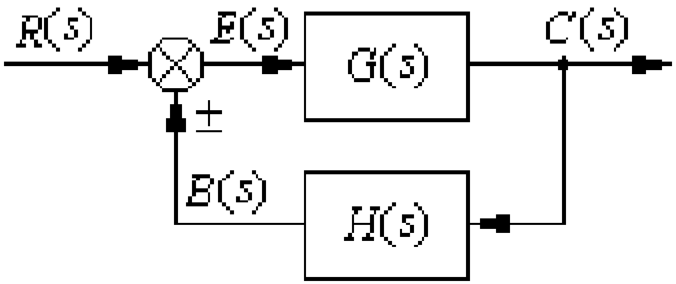
是不是并联？





n个传递函数并联其等效传递函数为该n个传递函数的代数和。

3）反馈连接　一个方块的输出，输入到另一个方块，得到的输出再返回作用于前一个方块的输入端。



对于每个反馈连接都有

前向通道：从输入到输出的信号通道；

其传递函数称为前向通道传递函数；如G(s)

反馈通道：从输出反送到输入信号通道；

其传递函数为反馈通道传递函数。如H(s)

单位反馈：反馈通道传递函数为1的负反馈系统

方块图

等效变换

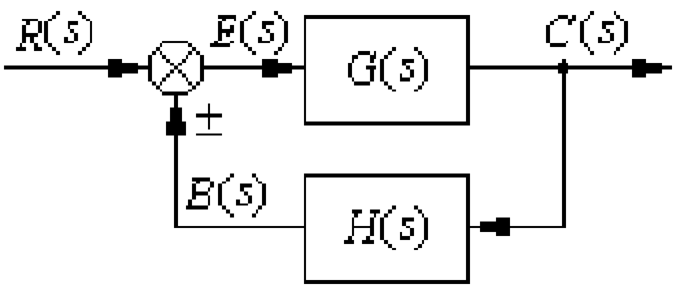
用代数法则

$$E(s) = R(s) \pm B(s)$$

$$B(s) = H(s)C(s)$$

$$C(s) = G(s)E(s)$$

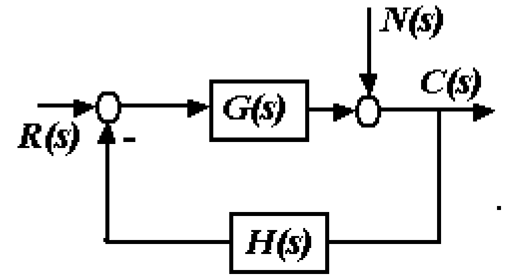
$$\frac{C(s)}{R(s)} = G_B(s) = \frac{G(s)}{1 \mp G(s)H(s)}$$



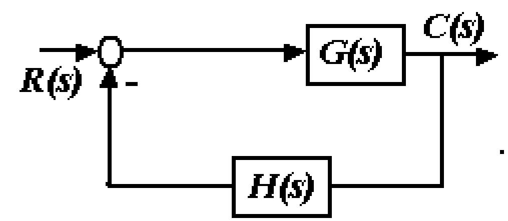
注意：减号对应于正反馈

方块图

例：求系统的传递函数 $\dfrac{C(s)}{R(s)}$ 和 $\dfrac{C(s)}{N(s)}$



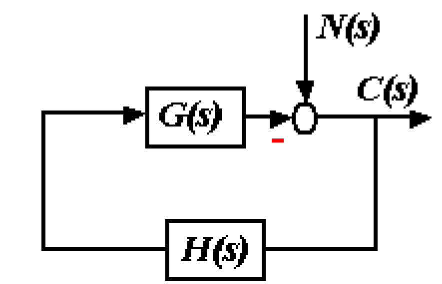
解：首先讨论N(s)=0



$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$$

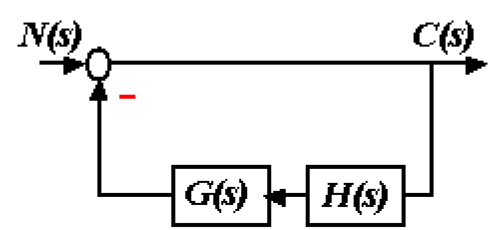
求 $\dfrac{C(s)}{N(s)}$

讨论R(s)=0,此时系统输入为N(s)



前向通道＝1

反馈通道＝G(s)H(s)



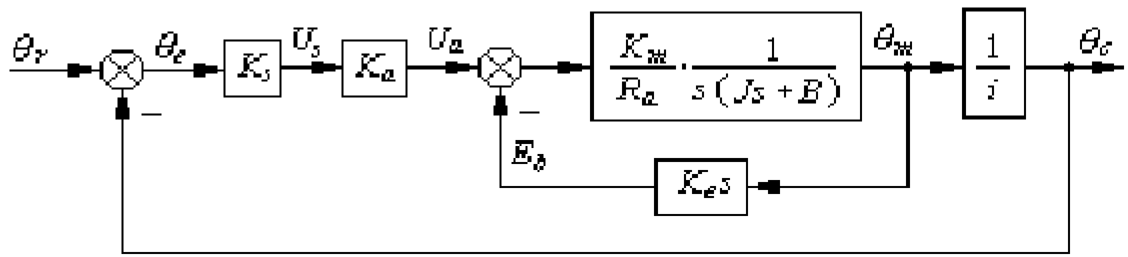
$$\frac{C(s)}{N(s)}=\frac{1}{1+G(s)H(s)}$$

同样可以用代数法则求。

方块图

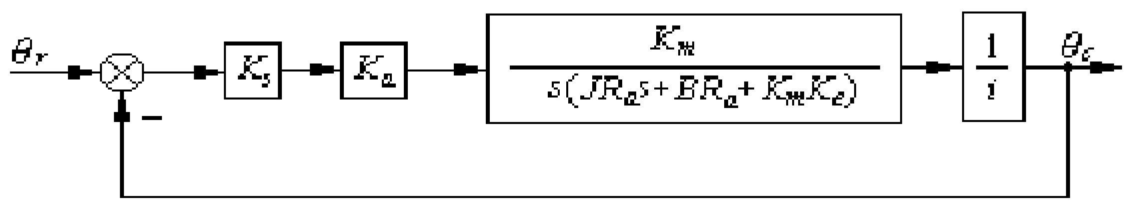
例：求系统的闭环传递函数$G_B(s)$

该系统方块图有两个反馈回路，里面的称为局部反馈回路，外面的称为主反馈回路。

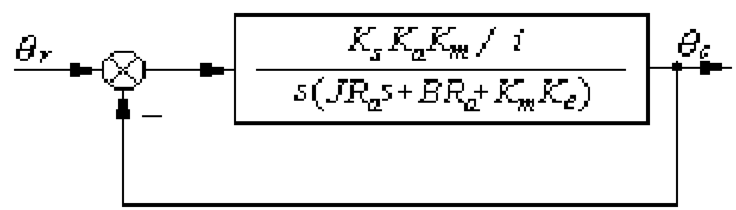


由内到外

首先对局部反馈进行等效

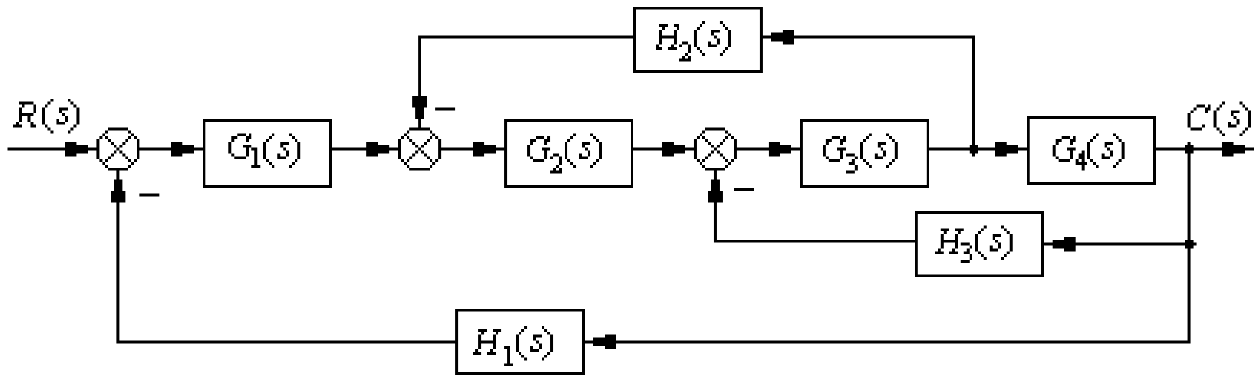


串联支路进行等效



最后对主反馈进行等效

方块图



出现交叉回路

首先要消除交叉回路

方法是移动引出点或综合点

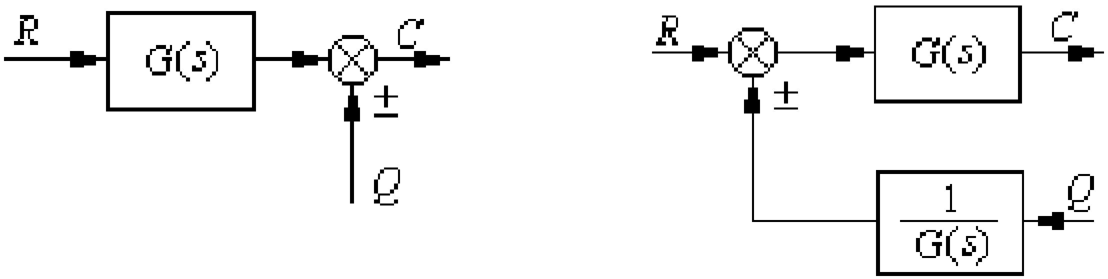
方块图

（2）综合点与引出点的移动（消除交叉回路）

原理——保证移动前后输入输出关系不变

1） 综合点前后移

下图表示了综合点前移的等效变换。



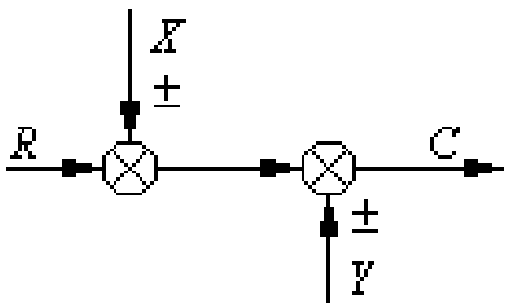
综合点前移在移动的支路上除以的综合点跨越模块的传递函数。

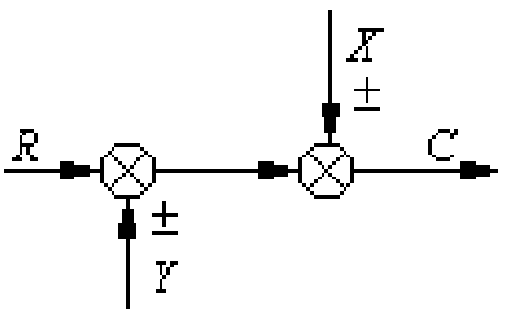
综合点 后移在移动的支路上乘以的综合点跨越模块的传递函数。

方块图

2） 综合点之间的移动

下图为相邻两个综合点前后移动的等效变换。





挪动前，总输出信号：　$C = R \pm X \pm Y$

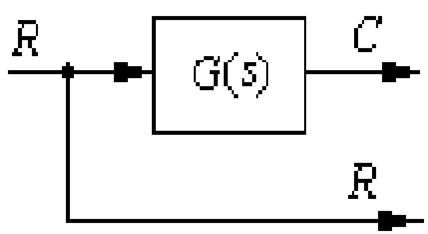
挪动后，总输出信号：　$C = R \pm Y \pm X$

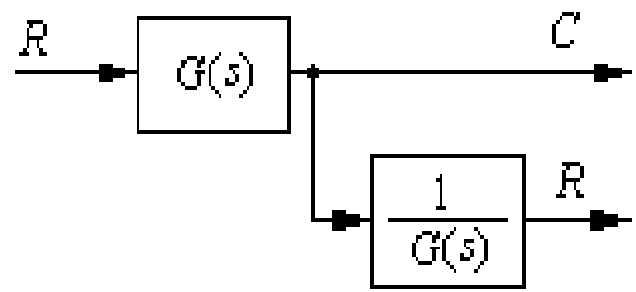
相邻综合点可以互换位置，不影响输入输出关系

方块图

3） 引出点前后移

在图中给出了引出点后移的等效变换。





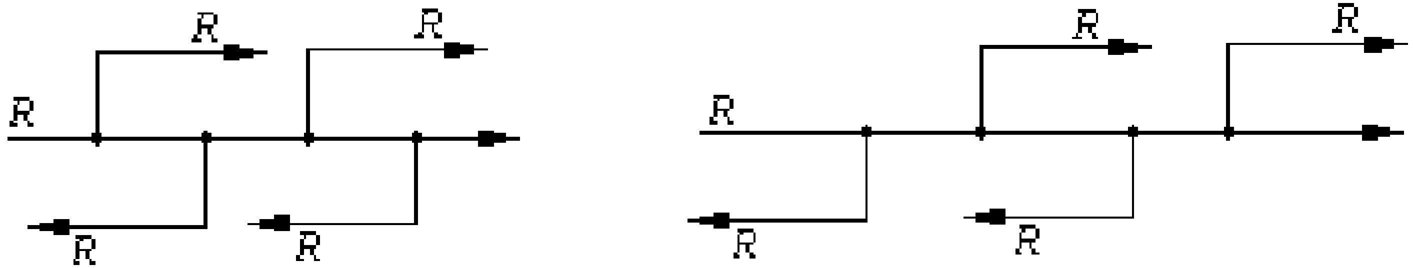
引出点后移，在移动的支路上除以的引出点跨越的模块传递函数。

引出点前移，在移动的支路上乘以的引出点跨越的模块传递函数。

方块图

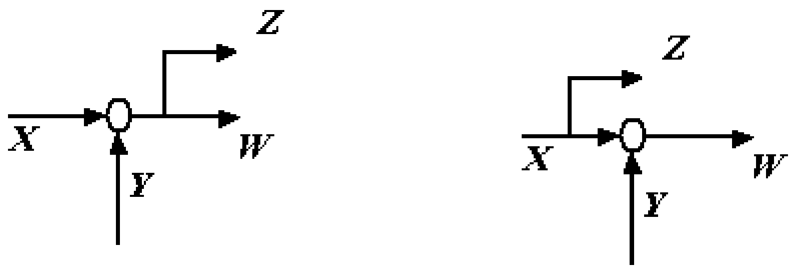
4）相邻引出点之间的移动

若干个引出点相邻，引出点之间相互交换位置，完全不会改变引出信号的性质。如图所示。



相邻的引出点可以互换位置，不影响输入输出关系

当综合点与引出点相邻时，互换位置会改变信号关系。



相邻的综合点和引出点不可以互换位置。

方块图

在复杂系统方块图简化过程中，还应记住以下原则：

输入输出关系不变

小结：

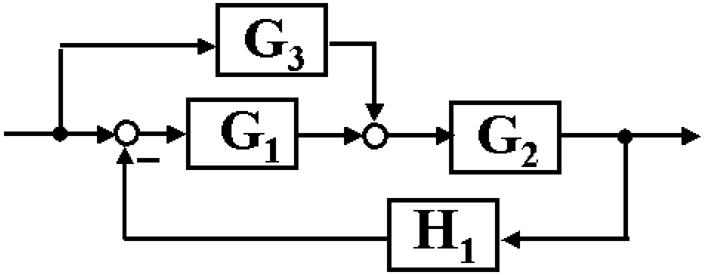
为了消除交叉回路，需要进行综合点或引出点的移动；

综合点前移、综合点后移

引出点前移、引出点后移

出现相邻的综合点，可以互换位置

出现相邻的引出点，可以互换位置

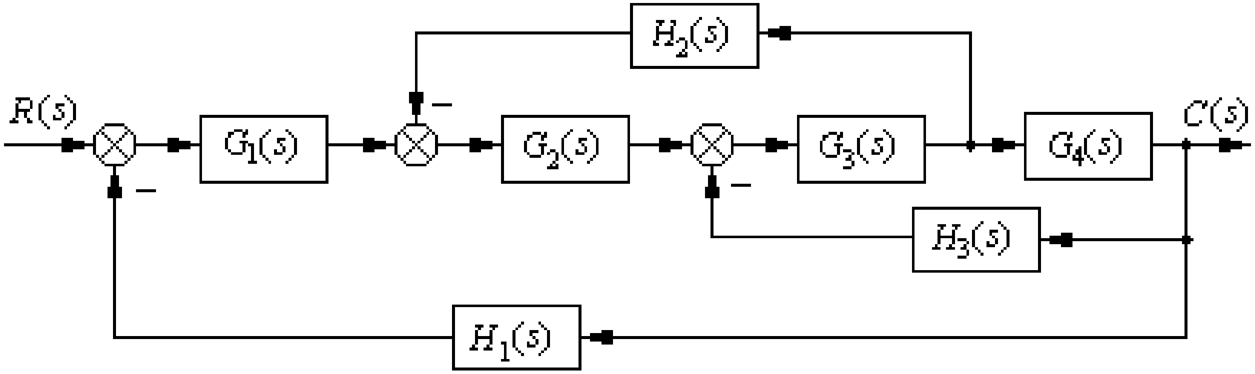


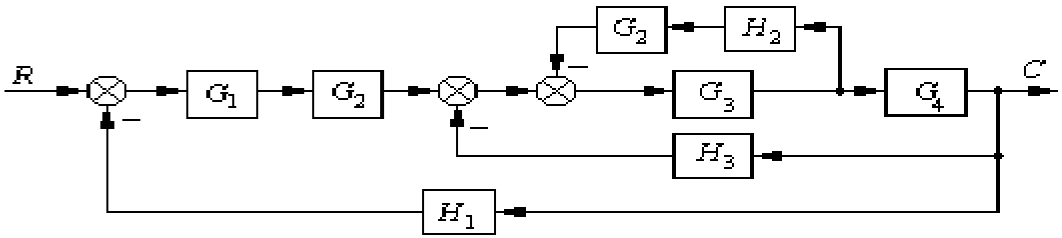
向同类移动

方块图

例： 简化如图所示系统的结构图，并求系统传递函数 $G_B(s)$〔即C(s)/R(s)〕。

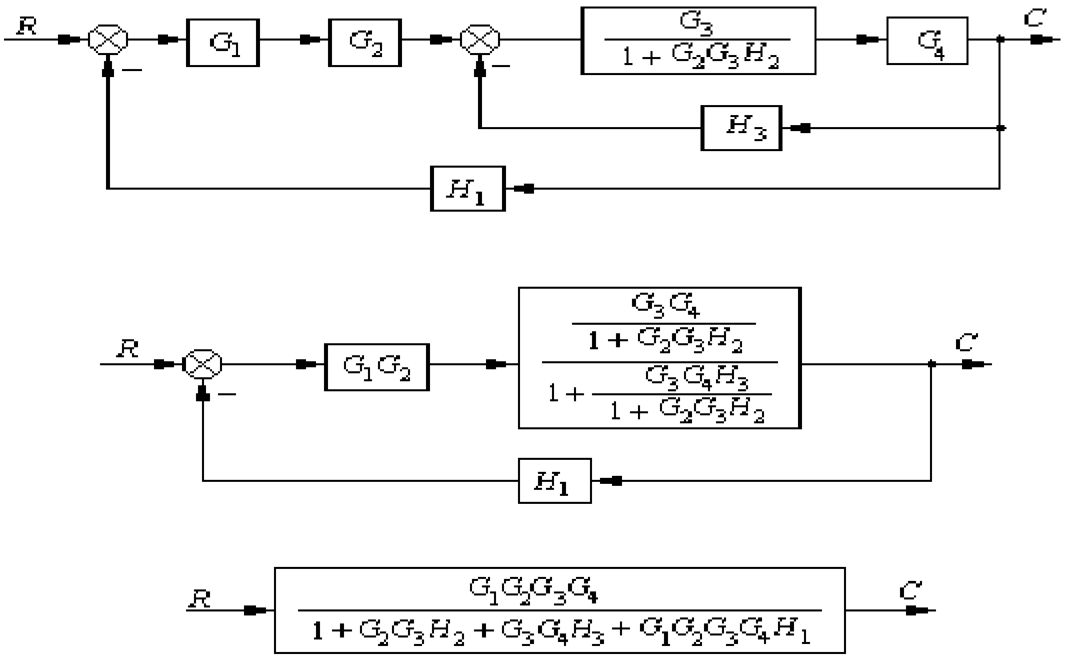
解 将综合点后移，然后交换综合点的位置，将上图化为下图





方块图

然后，对图中由G_2，G_3，H_2组成的小回路实行串联及反馈变换，进而简化为下图。

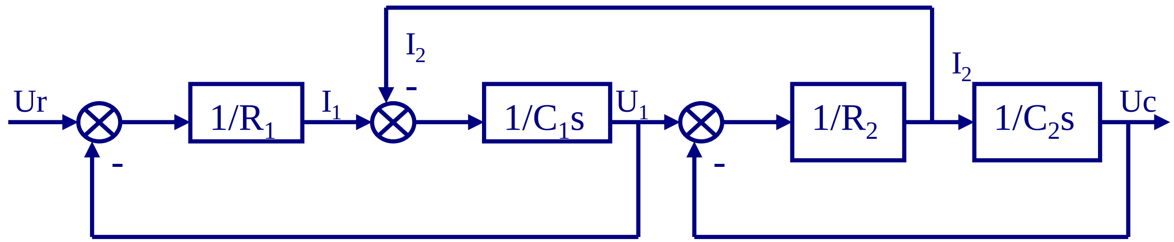


$$G_B(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{G_1G_2G_3G_4}{1+G_2G_3H_2+G_3G_4H_3+G_1G_2G_3G_4H_1}$$

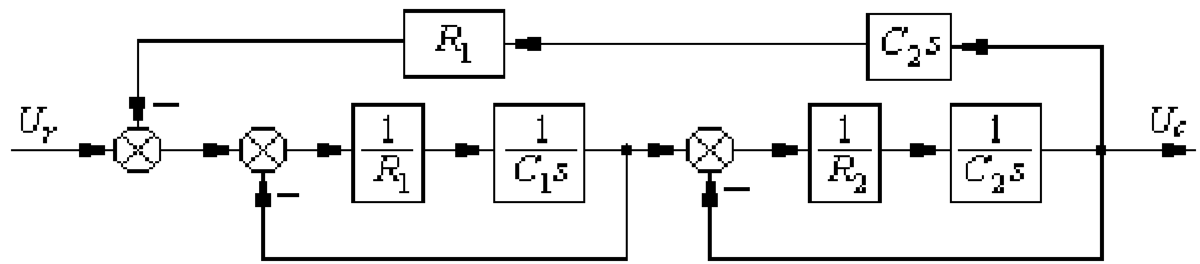
方块图

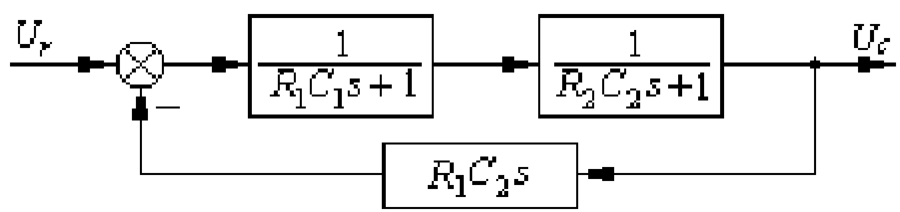
例： 求出此下面方块图的传递函数G(s)〔即$U_c(s)/U_r(s)$〕。

解 必须先移动综合点与引出点，消除了交叉关系。

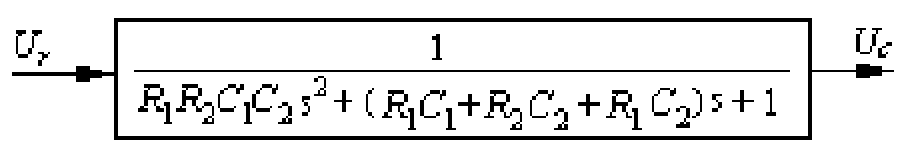


然后化简两个内回路；





最后实行反馈变换，即得网络传递函数。



方块图

简化方块图求总传递函数的一般步骤：

- 确定输入量与输出量；
  - 如果作用在系统上的输入量有多个（分别作用在系统的不同部位），则必须分别对每个输入量逐个进行结构变换，求得各自的传递函数。
  - 对于有多个输出量的情况，也应分别变换。
- 若结构图中有交叉关系，移动综合点或者引出点（原则是向同类移动）将交叉消除，化为无交叉的多回路结构。
- 对无交叉的多回路结构，可由内向外进行变换，直至变换为一个等效的方块，即得到所求的传递函数。

2.4.3 利用信号流图化简方块图

最初由Mason提出来，用于求解线性代数方程组的；

借助 Mason公式方便进行方块图的化简

- 信号流图介绍
- Mason公式
- 运用Mason公式化简方块图

信号流图

（1）信号流图的组成

信号流图是由节点和支路组成的信号传递网络。

节点：表示变量或信号，其值等于所有进入该节点的信号之和。节点用“ o ”表示。

如x1、 x2、 x3、 x4和x5。

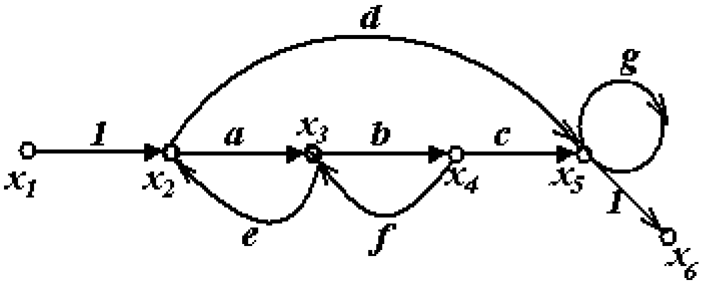
支路：连接两个节点的定向线段，用支路增益（传递函数）表示方程式中两个变量的因果关系。支路相当于乘法器。信号在支路上沿箭头单向传递。类似结构图中的方块。

$$x_2 = x_1 + e x_3$$

$$x_3 = a x_2 + f x_4$$

$$x_4 = b x_3$$

$$x_5 = d x_2 + c x_4 + g x_5$$



信号流图

（2）信号流图中的常用术语

➢输入节点（源节点） 只有输出支路的节点称为输入节点。它一般表示系统的输入变量;

如节点x_1。

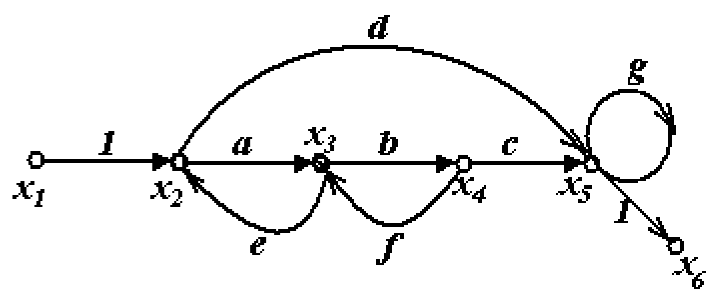
➢混合节点： 既有输入支路又有输出支路的节点称为混合节点；混合节点代替了方块图中的综合点。

节点x_2 、 x_3 、 x_4和 x_5

➢ 输出节点（阱节点） 只有输入支路的节点称为输出节点。它一般表示系统的输出变量;

如节点x_6 。

从混合节点引出一条具有单位增益的支路，可将混合节点变为输出节点。



信号流图

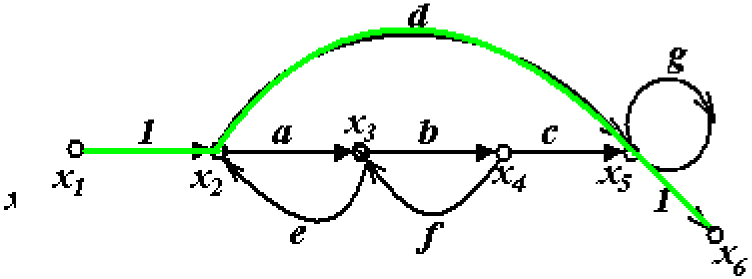
- **通路**：从某一节点开始沿支路箭头方向经过各相连支路到另一节点所构成的路径称为通路;如x_1-x_4通路
通路中各支路增益的乘积叫做通路增益;如x_1-x_4通路增益为ab

前向通路：是指从**输入节点**开始并终止于**输出节点**且与经过节点相交**不多于一次**的通路；该通路的各增益乘积称为前向通路增益。

前向通路增益为abc

前向通路可能不止一条

前向通路增益为d



信号流图

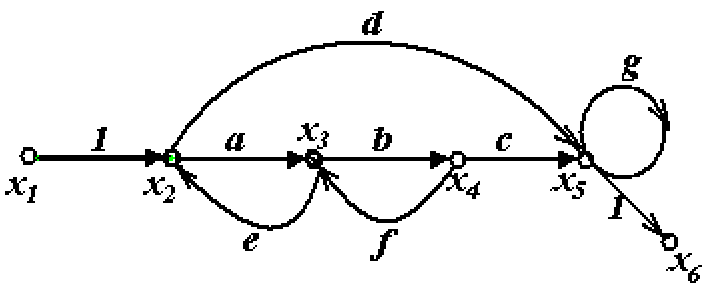
➢回路：通路的终点就是通路的起点，并且与任何经过节点相交不多于一次的通路称为回路。回路中各支路增益的乘积称为回路增益。

如x_2-x_3-x_2回路增益为ae。

➢ 不接触回路：一信号流图有多个回路，各回路之间没有任何公共节点，则称为不接触回路，反之称为接触回路。

回路x_2-x_3-x_2和回路x_5-x_5为不接触回路

回路x_2-x_3-x_2和回路x_3-x_4-x_3为接触



（3）用梅逊(S.J.Mason)公式求传递函数

借助于梅逊公式，不经任何结构变换，便可以得到系统的传递函数。

只适用于输入节点和输出节点之间.
梅逊公式的表达式为：

$$G(s)=\frac{\sum_{k=1}^{m}P_k\Delta_k}{\Delta}$$

G(s)为待求的总传递函数。

m——从输入节点到输出节点所有前向通路的条数；

式中Δ——称为特征式，

$$\Delta=1-\sum_{1}^{n}L_i+\sum_{1}^{n_2}L_iL_j-\sum_{1}^{n_3}L_iL_jL_k+\cdots$$

信号流图

$$G(s)=\frac{\sum_{k=1}^{m}P_k\Delta_k}{\Delta}$$

$$\Delta=1-\sum_{1}^{n}L_i+\sum_{1}^{n_2}L_iL_j-\sum_{1}^{n_3}L_iL_jL_k+\cdots$$

$\sum L_i$——所有回路(n)的回路增益之和；

$\sum L_iL_j$——所有两两互不接触回路(n_2)的回路增益乘积之和；

$\sum L_iL_jL_k$——所有三个互不接触回路(n_3)的回路增益乘积之和；

在回路增益中应包含代表反馈极性的正、负符号。

P_k——从输入节点到输出节点第k条前向通路的增益；

Δ_k——在Δ中，将与第k条前向通路相接触的回路除去后所余下的部分的Δ，称为余子式；

信号流图

例： 几个回路？ 有四个回路，**n=4;**

$$\sum_{i=1}^{4} L_i = L_1 + L_2 + L_3 + L_4$$

$$= -G_1G_2G_3G_4G_5G_6H_1 - G_2G_3H_2 - G_4G_5H_3 - G_3G_4H_4$$

几个两两互不接触回路？ 只有$\mathbf{x_2x_3x_4x_2}$回路与回路$\mathbf{x_5x_6x_7x_5}$互不接触，

$$\sum L_iL_j = L_2L_3 = (-G_2G_3H_2)(-G_4G_5H_3)$$

$$= G_2G_3G_4G_5H_2H_3$$

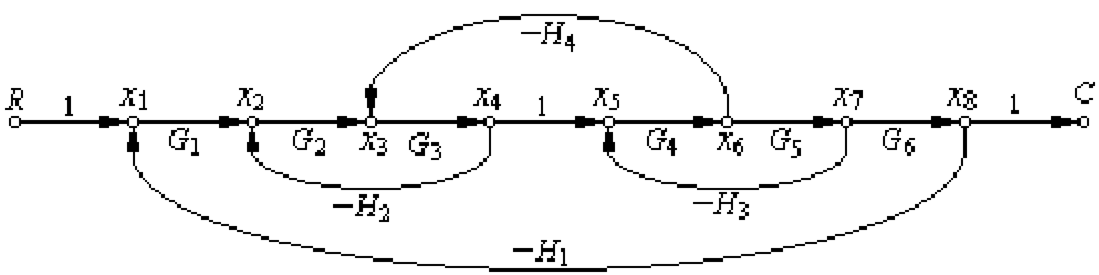
而

$$\sum L_iL_jL_k = 0$$

故可得特征式： $\Delta = 1 - \sum L_i + \sum L_iL_j$

$$= 1 + G_1G_2G_3G_4G_5G_6H_1 + G_2G_3H_2 + G_4G_5H_3$$

$$+ G_3G_4H_4 + G_2G_3G_4G_5H_2H_3$$



信号流图

$$\Delta = 1 - \sum L_i + \sum L_i L_j$$

$$= 1 + G_1G_2G_3G_4G_5G_6H_1 + G_2G_3H_2 + G_4G_5H_3$$

$$+ G_3G_4H_4 + G_2G_3G_4G_5H_2H_3$$

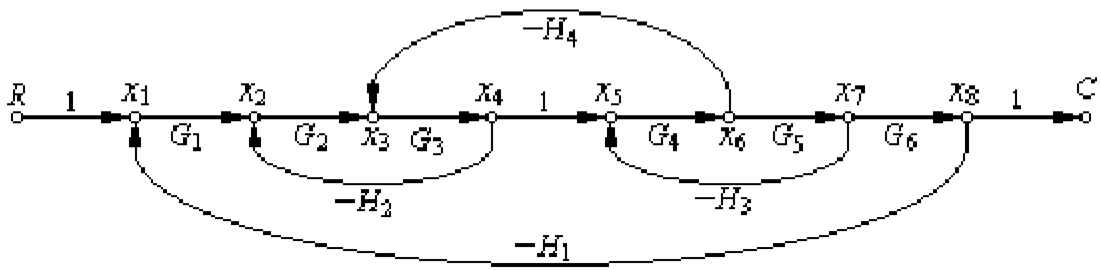
图中只有一条前向通路，且　**P_1=$G_1G_2G_3G_4G_5G_6$**

由于所有回路均与前向通路相接触，故余子式**Δ_1=1**。

所以系统的总传递函数为：

$$G(s) = \frac{p_1\Delta_1}{\Delta}$$

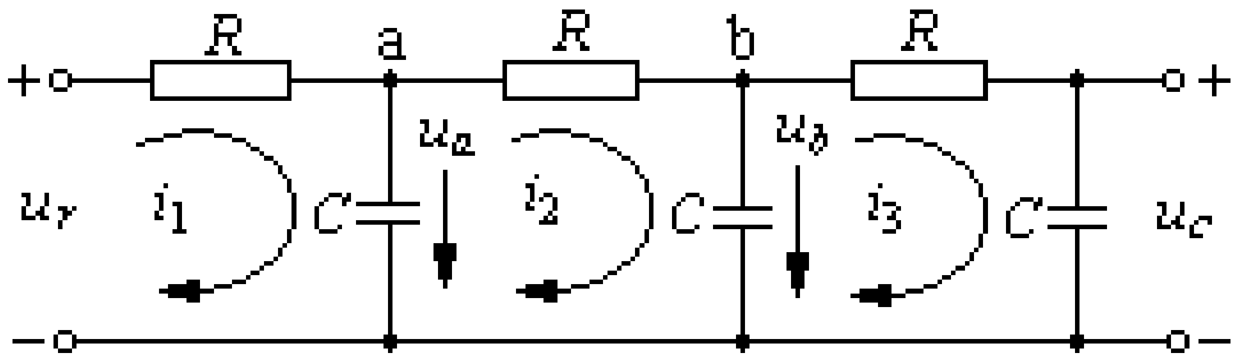
$$= \frac{G_1G_2G_3G_4G_5G_6}{1 + G_1G_2G_3G_4G_5G_6H_1 + G_2G_3H_2 + G_4G_5H_3 + G_3G_4H_4 + G_2G_3G_4G_5H_2H_3}$$



信号流图

实际上，可以直接在结构图上采用Mason公式。

例：下图为三级RC滤波网络，试绘制其结构图，并求其传递函数U_c/U_r。



解 将网络分为三个电流回路，回路电流分别为i_1，i_2，i_3。

1）绘制结构图，如图所示。

信号流图

2） 求传递函数。采用梅逊公式求传递函数。

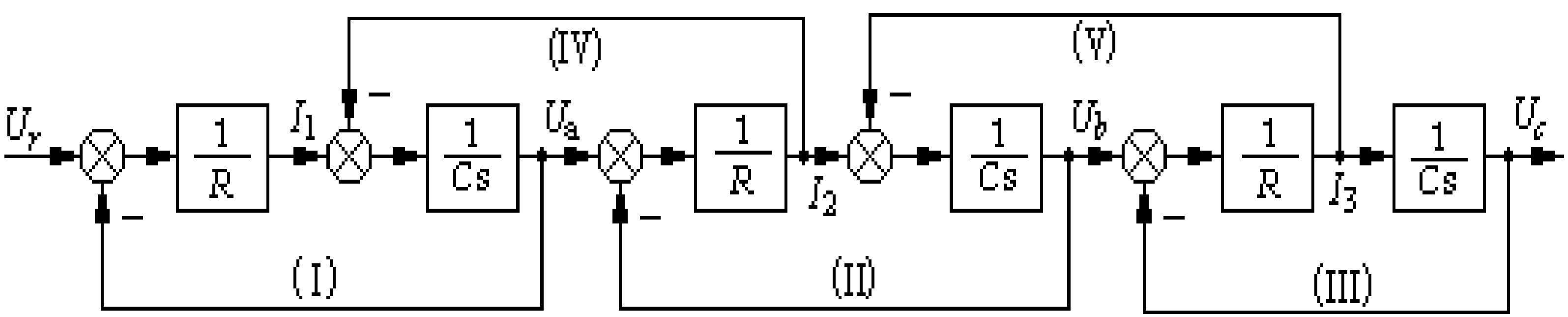
该结构图有五个反馈回路，回路传递函数均相同，即

$$L_1 = L_2 = \cdots = L_5 = -\frac{1}{RCs}$$

故 $$\sum L_i = -\frac{5}{RCs}$$

五个回路中，六组两两互不接触，它们是**I-II**、**I-III**、**I-V**、**II-III**、**III-IV**及**IV-V**。

因此 $$\sum L_i L_j = \frac{6}{R^2C^2s^2}$$



信号流图

五个回路中还有一组三个互不接触的回路，即**I-II-III**，故：

$$\sum L_i L_j L_k = -\frac{1}{R^3 C^3 s^3}$$

则特征式：

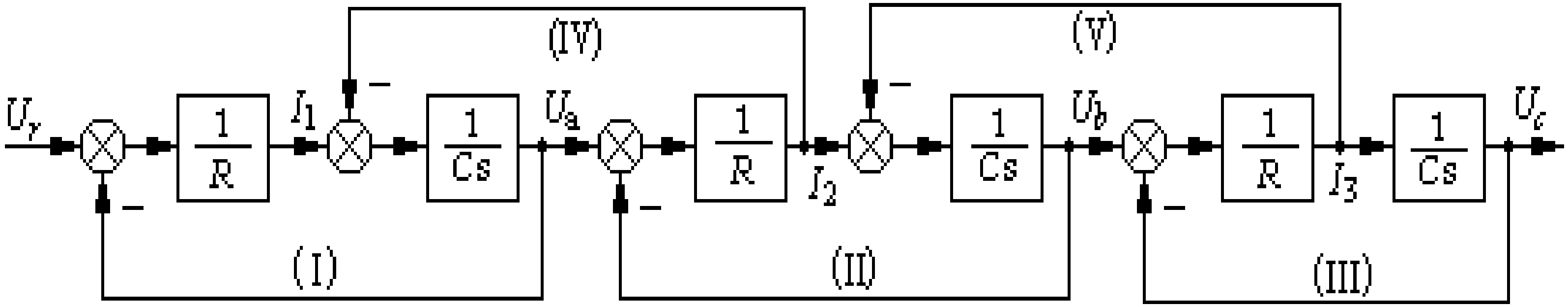
$$\Delta = 1 - \sum L_i + \sum L_i L_j - \sum L_i L_j L_k$$

$$= 1 + \frac{5}{RCs} + \frac{6}{R^2 C^2 s^2} + \frac{1}{R^3 C^3 s^3}$$

而前向通路只有一条，即：

$$P_1 = \frac{1}{R^3 C^3 s^3}$$

前向通路与各反馈回路均有接触，余子式**Δ1 = 1**



信号流图

$$\Delta = 1 + \frac{5}{RCs} + \frac{6}{R^2C^2s^2} + \frac{1}{R^3C^3s^3}$$

$$P_1\Delta_1 = \frac{1}{R^3C^3s^3}$$

由梅逊公式可求得总传函数:

$$\frac{U_c}{U_r} = \frac{P_1\Delta_1}{\Delta} = \frac{\frac{1}{R^3C^3s^3}}{1 + \frac{5}{RCs} + \frac{6}{R^2C^2s^2} + \frac{1}{R^3C^3s^3}}$$

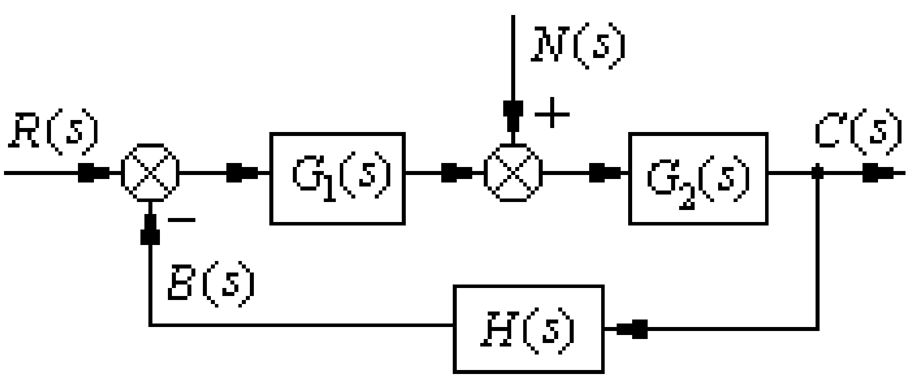
$$= \frac{1}{R^3C^3s^3 + 5R^2C^2s^2 + 6RCs + 1}$$

2.5 典型控制系统的传递函数

控制系统会受到两类输入信号的影响。

- 一类是有用信号，或称为输入信号、给定值、参考输入等，常用$r(t)$表示；
- 另一类则是扰动，或称为干扰，常用$n(t)$表示。

一个闭环控制系统的典型结构可用下图表示



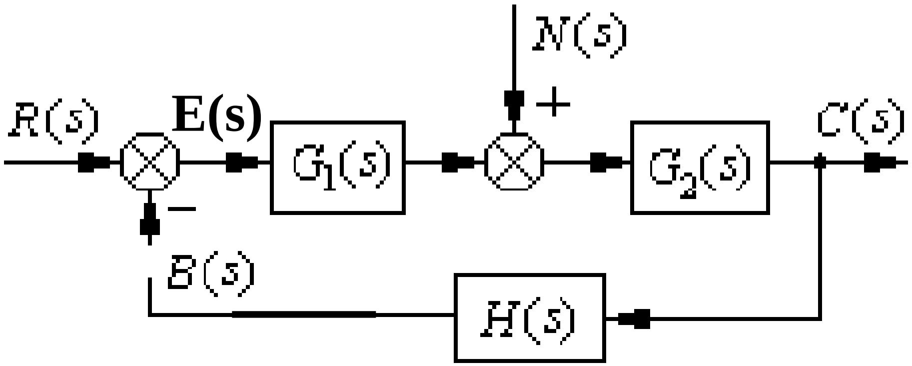
控制系统的传递函数

下面介绍几个系统传递函数的概念：

（1）系统的开环传递函数

前向通路传递函数与反馈通路传递函数的乘积，称为系统的开环传递函数。

开环传递函数是指闭环系统在开环时的传递函数。



$$G_K(s)=\frac{B(s)}{E(s)}=G_1(s)G_2(s)H(s)$$

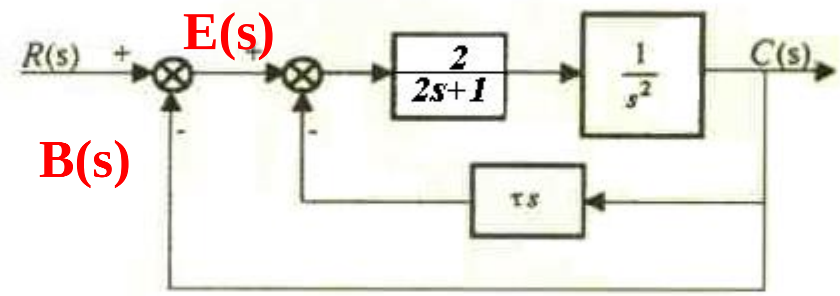
开环零点：另$G_K(s)$分子为零的根称为开环零点。

开环极点：另$G_K(s)$分母为零的根称为开环极点。

例:求下图所示系统的开环传递函数

解: $G(s)=\dfrac{2}{s^2(2s+1)}$ $\qquad H(s)=1+\tau s$

开环传递函数



$$G_K(s)=\frac{2(1+\tau s)}{s^2(2s+1)}$$

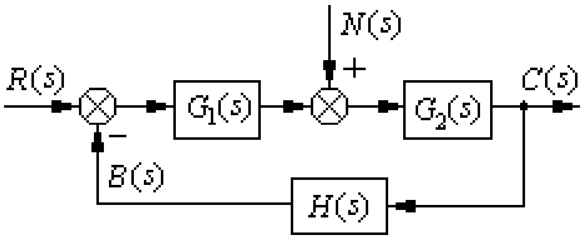
$$G(s)=\frac{\dfrac{2}{2s+1}\cdot\dfrac{1}{s^2}}{1+\dfrac{2}{2s+1}\cdot\dfrac{1}{s^2}\cdot\tau s}=\frac{2}{2s^3+s^2+2\tau s}$$

$$H(s)=1$$

$$G_K(s)=\frac{2}{2s^3+s^2+2\tau s}$$

（2）$r(t)$作用下系统的闭环传递函数$\dfrac{C(s)}{R(s)}$

令n(t)=0,结构图变为



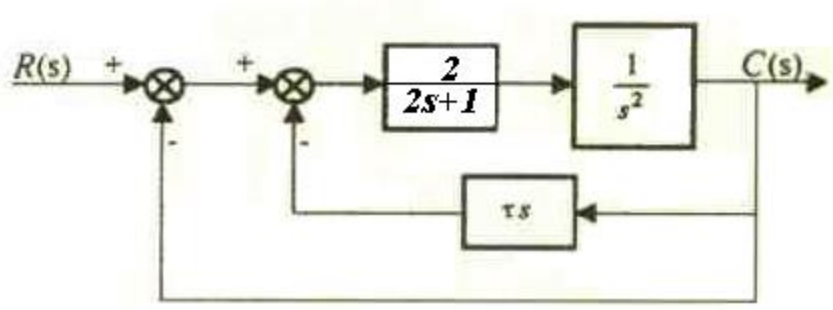
$$G_B(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{G_1(s)G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

例:求下图所示系统的闭环环传递函数$\dfrac{C(s)}{R(s)}$

解: $G(s)=\dfrac{2}{s^2(2s+1)}$ $\quad H(s)=1+\tau s$

闭环传递函数

$$G_B(s)=\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}=\frac{2}{2s^3+s^2+2\tau s+2}$$



$$G(s)=\frac{2}{2s^3+s^2+2\tau s} \qquad H(s)=1$$

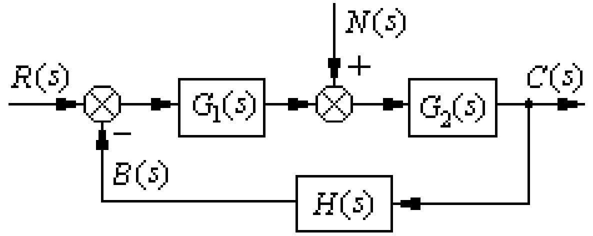
$$G_B(s)=\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}=\frac{2}{2s^3+s^2+2\tau s+2}$$

两种等效都可以。

（3）n(t)作用下系统的扰动闭环传递函数

先求出c(t)对n(t)之间的传递函数。令r(t)=0，

$$\frac{C(s)}{N(s)} = G_n(s) = \frac{G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}$$



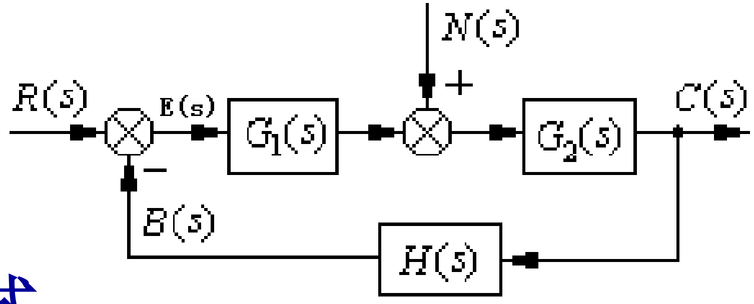
（4）参考输入的误差闭环传递函数E(s)/ R(s)

在典型结构图中，代表被控量c(t)的测量装置的输出b(t)和给定输入r(t)之差为系统的误差e(t)，即：

$$e(t) = r(t) - b(t)$$

或

$$E(s) = R(s) - B(s)$$

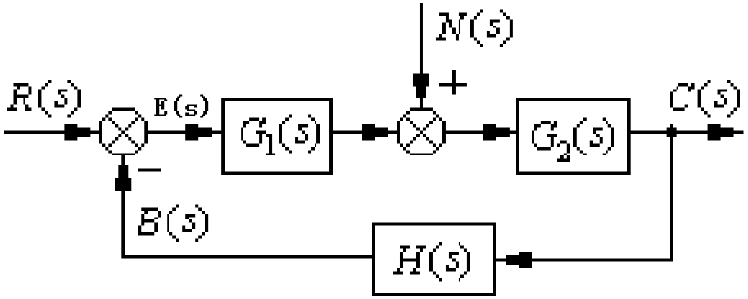


E(s)即图中综合点的输出量的拉氏变换式。

$$G_e(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

（5）n(t)作用下系统的误差扰动传递函数E(s)/ N(s)，令r(t)=0，则可得：

$$G_{en}(s)=\frac{E(s)}{N(s)}=\frac{-G_2(s)H(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}$$



（6）闭环系统的特征方程

上面导出的四个传递函数表达式分母是一样的，均为: *[1+G_1(s)G_2(s)H(s)]*，这是闭环控制系统各种传递函数的规律性。令闭环传递函数分母多项式为零

$$D(s)=1+G_1(s)G_2(s)H(s)=0$$

称为闭环系统的特征方程。

可将上式改写成如下形式：

$$D(s)=s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0=0$$

特征方程的根称为特征根，或称为闭环系统的极点。

例:已知单位反馈系统的开环传递函数为,

$$GH(s)=\frac{0.4s+1}{s(s+0.5)(s+1)}$$

求开环零点、开环极点、闭环零点和闭环极点。

解: 开环零点为 $0.4s+1=0$

$$s=-2.5$$

开环极点为 $s(s+0.5)(s+1)=0$

$$s_1=0 \qquad s_2=-0.5 \qquad s_3=-1$$

闭环传递函数为

$$G_B(s)=\frac{G(s)}{1+GH(s)}=\frac{\dfrac{0.4s+1}{s(s+0.5)(s+1)}}{1+\dfrac{0.4s+1}{s(s+0.5)(s+1)}}=\frac{0.4s+1}{s^3+1.5s^2+0.9s+1}$$

$$G_B(s)=\frac{0.4s+1}{s^3+1.5s^2+0.9s+1}$$

闭环零点 $0.4s+1=0$

$$s=-2.5$$

闭环极点 $s^3+1.5s^2+0.9s+1=0$

$$s_1=-1.375,\qquad s_{2,3}=-0.0625\pm 0.85j$$

小结

- 微分方程
  - 牛顿第二定律、克希霍夫定律、刚体旋转定律等
  - 非线性系统的线性化
- 传递函数
  - 拉氏变换
  - 性质
  - 术语（开环传递函数、闭环传递函数、零点、极点以及特征方程）
- 方块图
  - 绘制
  - 化简（基本连接化简以及移动综合点引出点）
- 信号流图
  - 绘制
  - Mason公式

Matlab介绍模型及连接方式

```
num=[1];den=[1 10];              定义分子多项式和分母多项式
sys1=tf(num,den);                定义传递函数
z=[1];p=[1 1];k=4;               定义零极点和根轨迹增益
sys2=zpk(z,p,k);                 定义传递函数
sys3=series(sys1,sys2);          串联
sys4=parallel(sys1,sys2);        并联
sys5=sys1+sys2;                  并联
sys6=feedback(sys1,sys2,-1);     负反馈
sys6=feedback(sys1,sys2);        负反馈
sys6=feedback(sys1,sys2, 1);     正反馈
```

Matlab介绍

```
n1=[1 1];d1=[1 2];
n2=[2];d2=[1];
n=conv(n1,n2);          多项式乘积
d=conv(d1,d2);
sys7=tf(n,d);
Z=zero (sys7);          求传递函数零点
P=pole (sys7);          求传递函数极点
P=roots(d);             求特征多项式根
```

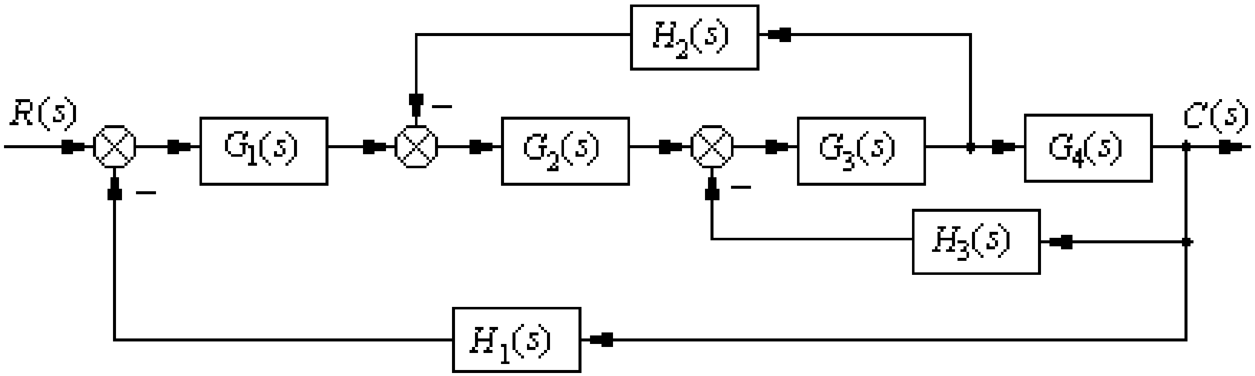
```
n1=[1 1];
d1=[1 1 1];
s1=tf(n1,d1);
n2=[1];
d2=[1 2];
s1=tf(n1,d1);
s2=tf(n2,d2);
z=[1];
p=[-1 -3];
k=2;
```

```
s3=zpk(z,p,k);           %求零极点形式传递函数
s=s1+s3                  %并联
ss=parallel(s1,s3)
p1=pole(s1);             %求传递函数极点
z=zero(s);               %求传递函数零点
d=[1 2 3 4];
p=roots(d);              %求解

s4=series(s1,s3)         %串联
n5=conv(n1,n2);
d5=conv(d1,d2);
s5=tf(n5,d5)
```

Matlab介绍

```
ng1=[1];dg1=[1 10];
sysg1=tf(ng1,dg1);
ng2=[1];dg2=[1 1];
sysg2=tf(ng2,dg2);
ng3=[1 0 1];dg3=[1 4 4];
sysg3=tf(ng3,dg3);
ng4=[1 1];dg4=[1 6];
sysg4=tf(ng4,dg4);
nh1=[1 1];dh1=[1 2];
sysh1=tf(nh1,dh1);
nh2=[2];dh2=[1];
sysh2=tf(nh2,dh2);
nh3=[1];dh3=[1];
sysh3=tf(nh3,dh3);
sys1=sysh2/sysg4;
sys2=series(sysg3,sysg4);
sys3=feedback(sys2,sysh3,-1);
sys4=series(sysg2,sys3);
sys5=feedback(sys4,sys1);
sys6=series(sysg1,sys5);
sys=feedback(sys6,sysh1)
```



```
z1=[];p1=[1 10];k=2
s1=zpk(z1,p1,k)
n1=[1];d1=[1 1];s2=tf(n1,d1)
n2=[3 1];d2=[4 1];s3=tf(n2,d2)
s4=series(s2,s3)
s5=tf(conv(n1,n2),conv(d1,d2))
z=zero(s4)
p=pole(s4)
root=roots(conv(d1,d2))
```

单位反馈系统 $GH(s) = \dfrac{0.4s+1}{s(s+0.5)(s+1)}$

$$s_1 = -1.375, \qquad s_{2,3} = -0.0625 \pm 0.85j$$

```
n=[0.4 1];
d1=[1 0];d2=[1 0.5];d3=[1 1];
d4=conv(d1,d2)
d=conv(d4,d3)
sg=tf(n,d)
s=feedback(sg,[1])
p=pole(s)
z=zero(s)
```

```
Transfer function:
        0.4 s + 1
-------------------------
s^3 + 1.5 s^2 + 0.9 s + 1
p =  -1.3745
      -0.0627 + 0.8506i
      -0.0627 - 0.8506i
z =   -2.5000
```