概率论与数理统计

Probability and
Mathematical Statistics

第四章 数字特征

4.1 随机变量的数学期望

4.2 随机变量的方差

4.3 随机变量的矩

4.4 协方差和相关系数

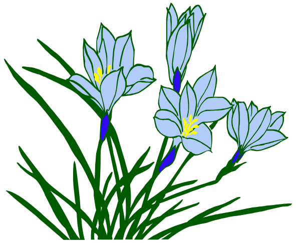
4.1 随机变量的数学期望(Expectation)

一 D.R.V.的数学期望

二 C.R.V.的数学期望

三 R.V.函数的数学期望

四 数学期望的性质



一 D.R.V.的数学期望

引例

X	170	165	168
P	2/6	3/6	1/6
人数	2	3	1

平均身高=(170×2+ 165×3+168×1)/6

=170×2/6+ 165×3/6+168×1/6

1 定义 设D.R.V.X的分布列为$P(X=x_i)=p_i, i=1,2\ldots$

若$\sum_i |x_i| p_i < +\infty$, 称$EX=\sum_i x_i p_i$为$X$的**数学期望(均值)**.

2 常见D.R.V.的期望

例 $X \sim B(1,p)$，$EX=p$.

例 $X \sim B(n,p)$，$EX=np$.

例 $X \sim P(\lambda)$，$EX=\lambda$.

例 $X\sim$超几何分布，$EX=nM/N$.

例 $X\sim$几何分布，$EX=1/p$.

例 设X~$B(1,p)$，求$E(X)$。

解 $$E(X)=1\times p+0\times(1-p)=p$$

例 设X~$P(\lambda)$，求$E(X)$。

解 $$E(X)=\sum_{k=0}^{\infty}k\cdot\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=\lambda\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\lambda}=\lambda$$

二 C.R.V.的数学期望

1.定义 设C.R.V. X 的密度函数为$f(x)$，若$\int_{-\infty}^{+\infty}|x|f(x)dx$收敛，则称$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx$ 为X 的**数学期望(均值)**。

2. 常见C.R.V.的期望

例 $X\sim U[a,b]$，$E(X)=(a+b)/2$.

例 $X\sim E(\lambda)$，$E(X)=1/\lambda$.

例 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$E(X)=\mu$.

例 X服从柯西分布,密度函数为$f(x)=\dfrac{1}{\pi(1+x^2)}, x\in\mathbb{R}$.

则$E(X)$不存在 .

例: 设随机变量X的概率密度为$f(x)=\dfrac{1}{\pi(1+x^2)},-\infty<x<\infty$，

证明X不存在数学期望。

证明：$\because \int_{-\infty}^{\infty}|x|f(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}|x|\dfrac{1}{\pi(1+x^2)}dx$

$$=\int_{0}^{\infty}\frac{2x}{\pi(1+x^2)}dx=\frac{1}{\pi}\ln(1+x^2)\Big|_0^{\infty}=\infty$$

$\therefore$由定义，X不存在数学期望。

例 设X~$E(\lambda)$，求$E(X)$（平均寿命）。

解 $$E(X)=\int_0^{\infty} x\lambda e^{-\lambda x}dx=-xe^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty}+\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}dx=\frac{1}{\lambda}$$

例 设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，求$E(X)$。

解 $$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx \overset{u=\frac{x-\mu}{\sigma}}{=\!=\!=} \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sigma u+\mu}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}du$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sigma u}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}du+\mu\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}du=\mu$$

三 随机变量函数的期望 --定理法

设$y=g(x)$为一通常函数，令$Y=g(X)$，其中X为R.V.，Y也为R.V..

问题：已知X的分布，如何求Y的期望？

设$z=g(x,y)$为一通常函数，令$Z=g(X,Y)$，其中(X,Y)为R.V.，Z也为R.V..

问题：已知(X,Y)的分布，如何求Z的期望？

1.设$g(x)$为函数，$Y=g(X)$是R.V.,

(1) 若D.R.V. X的分布列为$P(X=x_i)=p_i, i=1,2,\cdots$

$$\Rightarrow E[g(X)]=\sum_i g(x_i)p_i$$. 若$\sum_i |g(x_i)|p_i$收敛.

(2) 若C.R.V. X的分布密度为$f_X(x)$,

$$\Rightarrow E[g(X)]=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx.$$ 若此式绝对收敛。

2. 设$g(x,y)$为函数，$Z=g(X,Y)$是R.V.,

(1) 若D.R.V. (X,Y)的分布列为$P(X=x_i, Y=y_j)=p_{ij}$,

$$\Rightarrow E[g(X,Y)]=\sum_i\sum_j g(x_i,y_j)p_{ij},$$ 若左式绝对收敛。

(2) 若C.R.V. (X,Y)的分布密度为$f(x,y)$,

$$\Rightarrow E[g(X,Y)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y)f(x,y)dxdy.$$ 若左式绝对收敛。

$$E[g(X)] = \sum_i g(x_i) p_i$$

例 R.V.X的分布列为

X	-1	0	1
P	1/3	1/6	1/2

求E(X+1), E(X^2).

解 $$E(X+1) = (-1+1)\times\frac{1}{3} + (0+1)\times\frac{1}{6} + (1+1)\times\frac{1}{2} = \frac{7}{6}.$$

$$E(X^2) = (-1)^2\times\frac{1}{3} + 0^2\times\frac{1}{6} + 1^2\times\frac{1}{2} = \frac{5}{6}.$$

例 设某种商品每周的需求量$X\sim U[10,30]$，而经销商进货数量为区间[10,30]中的某一整数，经销商每销售一单位商品可获利500元，若供大于求则削价处理，每处理1单位商品亏损100元；若供不应求，则可从外部调剂供应，此时每销售1单位商品仅获利300元，为使商店所获利润的期望值不少于9280元，试确定最少进货量。

解：设进货量为a，则利润额为

$$g(X)=\begin{cases}500X-100\cdot(a-X)=600X-100a & 10\le X<a\\ 500a+300\cdot(X-a)=300X+200a & a<X\le 30\end{cases}$$

$$E[g(X)]=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f(x)dx=\int_{10}^{30}g(x)\frac{1}{30-10}dx$$

$$=\int_{10}^{a}\frac{1}{20}(600x-100a)dx+\int_{a}^{30}\frac{1}{20}(300x+200a)dx$$

$$=-7.5a^2+350a+5250\ \ge 9280\ \Rightarrow 20\frac{2}{3}\le a\le 26\Rightarrow a=21$$

例 设二维随机变量(X,Y)的联合分布律为

$X\backslash Y$	0	1	2
0	0.1	0.25	0.15
1	0.15	0.2	0.15

求随机变量 $Z=\sin\dfrac{\pi(X+Y)}{2}$ 的数学期望。

$$\boxed{E[g(X,Y)]=\sum_i\sum_j g(x_i,y_j)p_{ij}}$$

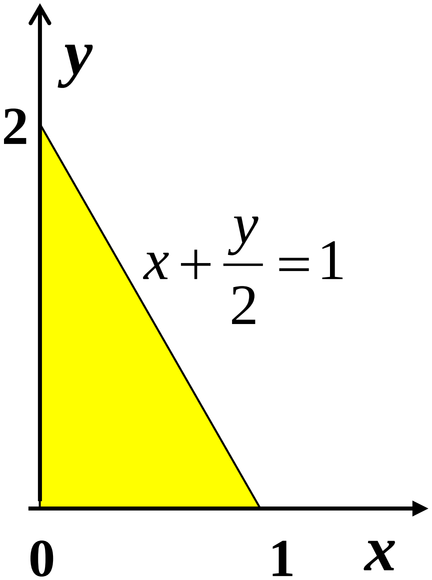
解：$E(Z)=E[\sin\dfrac{\pi(X+Y)}{2}]$

$$=\sin\frac{\pi(0+0)}{2}\times0.1++\sin\frac{\pi(0+1)}{2}\times0.25+\sin\frac{\pi(0+2)}{2}\times0.15$$

$$+\sin\frac{\pi(1+0)}{2}\times0.15+\sin\frac{\pi(1+1)}{2}\times0.2+\sin\frac{\pi(1+2)}{2}\times0.15=0.25.$$

例 (X,Y)在区域A上服从均匀分布, A是由 $x+\dfrac{y}{2}=1$, $x=0$, $y=0$围成, 求$E(X)$, $E(Y)$, $E(X+Y)$, $E(XY)$.

解 $$f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<x<1, 0<y<2(1-x)\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$



$$E(X)=\int_0^1\int_0^{2(1-x)} x\,dy\,dx=\frac{1}{3}$$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} yf(x,y)\,dx\,dy=\int_0^2\int_0^{1-\frac{y}{2}} y\,dx\,dy=\frac{2}{3}$$

$$E(X+Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x+y)f(x,y)\,dx\,dy$$

$$=\int_0^2 dy\int_0^{1-\frac{y}{2}}(x+y)\,dx=\int_0^2 dy\int_0^{1-\frac{y}{2}} x\,dx+\int_0^2 dy\int_0^{1-\frac{y}{2}} y\,dx=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1$$

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x,y)\,dx\,dy=\int_0^2 dy\int_0^{1-\frac{y}{2}} xy\,dx=\int_0^2\frac{y}{2}\left(1-\frac{y}{2}\right)^2 dx=\frac{1}{6}\neq\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}$$

四 数学期望的性质

1 $E(c)=c$，c为常数。

2 线性性：对$a, b\in \mathrm{R}$，$E(aX+bY)=aE(X)+bE(Y)$

一般，$E(\sum_i k_i X_i)=\sum_i k_i E(X_i)$.

3 X与Y独立$\Rightarrow E(XY)=E(X)E(Y)$.

一般, 若$X_1,\cdots,X_n$独立，$E(X_1\cdots X_n)=E(X_1)\cdots E(X_n)$,

4 单调性： $X\geq 0$, 则$EX\geq 0$.

故 若$X_1\geq X_2$，$E(X_1)\geq E(X_2)$； $E|X|\geq|EX|$.

5 Cauchy-Schwarz不等式：$E^2(XY)\leq E(X^2)E(Y^2)$.

例 $X \sim B(n, p)$，求$E(X)$.

解：$X_i = \begin{cases} 1, & \text{第}i\text{次试验事件}A\text{发生}, \\ 0, & \text{第}i\text{次试验}A\text{不发生}, \end{cases} \quad i = 1, 2, \cdots, n.$

则$X_i \sim (0,1)$分布，$E(X_i)=p$,

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i \Rightarrow E(X) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} p = np.$$

例 X~超几何分布，求$E(X)$.

解: $X_i = \begin{cases} 1, & 第i次抽到次品, \\ 0, & 第i次抽到正品, \end{cases} \quad i = 1, 2, \cdots, n.$

则$P(X_i=1)=M/N$, $E(X_i)=M/N$,

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i \Rightarrow E(X) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{M}{N} = n\frac{M}{N}.$$

例 流水作业线上生产的每一个产品不合格的概率为 p，当生产出k个不合格产品时即停工检修一次，求两次检修之间产品总数X的期望。

解： 记X_i为第$i-1$个次品出现后开始，到第i个次品生产为止，生产产品的数目，$i=1,2,\cdots,k$.

则X_i~几何分布，$E(X_i)=1/p$,

$$X=\sum_{i=1}^{k} X_i \Rightarrow E(X)=\sum_{i=1}^{k} E(X_i)=\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{p}=\frac{k}{p}.$$

小结

- 根据期望的定义，性质和定理，熟练掌握随机变量及其函数的期望的计算

- 熟记常见随机变量的期望

4.2 随机变量的方差(Variance)

一 方差的概念和计算

二 方差的性质

三 常见分布的方差

一 方差的概念和计算

定义　若$E(X-EX)^2$存在，则称其为R.V.X的方差。

记为$DX=E(X-EX)^2$.

$\sqrt{DX}$ 称为X的标准差。

注　$D(X)=E[X^2-2(EX)X+(EX)^2]$

$$=EX^2-2(EX)EX+(EX)^2$$

$D(X)=E(X^2)-(EX)^2$

二 方差的性质

1. 切比雪夫不等式

设R.V.X 的期望和方差均存在，则对任意$\varepsilon>0$, 有

$$P(|X-EX|\geq\varepsilon)\leq\frac{DX}{\varepsilon^2}$$

$$\Leftrightarrow P(|X-EX|<\varepsilon)\geq 1-\frac{DX}{\varepsilon^2}.$$

2. 任意实数c, $\quad E(X-c)^2\geq E(X-EX)^2=DX.$

3. 方差的基本性质

(1) $D(X) \geq 0$; $D(X) = 0 \Leftrightarrow P(X = c) = 1$. ($c$为常数, $c=EX$)

(2) $D(cX) = c^2 D(X)$.

(3) $D(X+Y) = D(X) + D(Y) + 2E[(X-EX)(Y-EY)]$

特别， $D(X \pm Y) \xlongequal{X与Y独立} D(X) + D(Y)$

$D(X+c)=DX$

思考：任意R.V.X与常数c独立。

(4)X,Y独立, $D(XY) = D(X)D(Y) + (EY)^2 D(X) + (EX)^2 D(Y)$.

三 常用分布的方差

(1)常见R.V.的方差

例 $X\sim B(n, p)$，$D(X)=npq$.

例 $X\sim P(\lambda)$，$D(X)=\lambda$.

例 $X\sim$几何分布，$D(X)=q/p^2$.

例 $X\sim U[a,b]$，$D(X)=(b-a)^2/12$.

例 $X\sim E(\lambda)$，$D(X)=1/\lambda^2$.

例 $X\sim N(\mu, \sigma^2)$，$D(X)=\sigma^2$.

(2)常用R.V.函数的期望和方差

例 R.V.X, $E(X)=\mu$, $D(X)=\sigma^2$. X的标准化$Y=\dfrac{X-\mu}{\sigma}$

则 $EY=$__0__，$DY=$__1__.

例 设X_i $(i=1,2,\ldots,n)$独立同分布$(i.i.d.)$，且$EX_i=\mu$, $D(X_i)=\sigma^2$. 令$\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，则

$E\overline{X}=$__μ__，$D\overline{X}=$__$\dfrac{\sigma^2}{n}$__.

4.3 随机变量的矩

一 矩的定义　R.V. X, 若$E|X|^k<\infty$. 则称

EX^k —— k阶原点矩

$E|X|^k$ —— k阶原点绝对矩

若$E|X-EX|^k<\infty$. 则称

$E(X-EX)^k$ —— k阶中心矩

$E|X-EX|^k$ —— k阶中心绝对矩

例　$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则$E(X-EX)^k=\begin{cases}0, & k\text{为奇数}, \\ \sigma^k(k-1)!!, & k\text{为偶数}.\end{cases}$

4.4 协方差和相关系数

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2E[(X-EX)(Y-EY)].$$

若X,Y独立，则$E(X-EX)(Y-EY)=0$.

问题： 若上式成立， X,Y是否独立？

一 协方差(covariance)

1.定义 R.V.(X,Y), 若$E|(X-EX)(Y-EY)|$存在，则称

$$E(X-EX)(Y-EY)$$

为(X,Y)的**协方差**，记为$Cov(X,Y)$.

注 1. $Cov(X,Y) = E(XY) - (EX)(EY).$

2. $Cov(X,Y) = 0 \overset{\text{定义}}{\Leftrightarrow} X,Y$不相关。

独立 $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ 不相关

反例：$X \sim N(0,1), Y = X^2$. X,Y不相关, 且不独立。

2. 协方差的性质 (设以下式子均存在)

(1) $Cov(X,Y)=Cov(Y, X)$

(2) $Cov(X+Y,Z)=Cov(X, Z)+ Cov(Y,Z)$

(3) $Cov(aX,bY)=abCov(X, Y)$

(4) X,Y独立 $\Longrightarrow Cov(X,Y)=0$

(5) $D(X+Y)=DX+DY+2Cov(X,Y)$

$$D(k_0+k_1X_1+\cdots+k_nX_n)=\sum_{i=1}^{n}D(k_iX_i)+\sum_{1\le i<j\le n}2Cov(k_iX_i,k_jX_j).$$

(6) $Cov(X,Y)=0 \Leftrightarrow E(XY)=EX\cdot EY$

$$\Leftrightarrow D(X+Y)=DX+DY$$

二 相关系数

1. 定义　R.V.(X,Y), 称下式 为X,Y的相关系数,

$$\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}$$

简记ρ.　无量纲

注　$\rho=0$，称X,Y不相关。

2. 性质

(1)　$|\rho|\le 1$;

(2)　$|\rho|=1 \Leftrightarrow P(Y=aX+b)=1$, 其中$a,b$为常数。

注 $\rho=0$指X,Y不存在线性关系，但可能有非线性关系。

例 设 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$, 求 ρ_{XY}.

解 $$Cov(X,Y) \underset{v=\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}}{\overset{u=\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}}{=}} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sigma_1 u \sigma_2 v}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{u^2-2\rho uv+v^2}{2(1-\rho^2)}} dudv$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sigma_1\sigma_2 v}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{v^2}{2}} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{(u-\rho v)^2}{2(\sqrt{1-\rho^2})^2}} du\right] dv$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sigma_1\sigma_2}{\sqrt{2\pi}} (\rho v) v e^{-\frac{v^2}{2}} dv = \sigma_1\sigma_2\rho$$

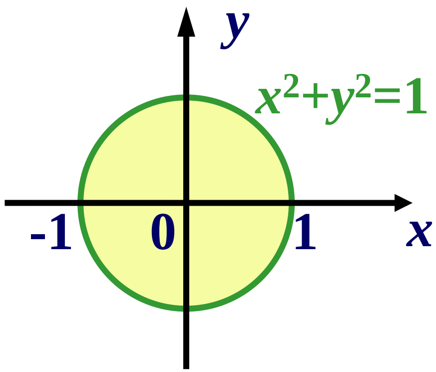
$$\therefore \rho_{XY} = \frac{\sigma_1\sigma_2\rho}{\sigma_1\sigma_2} = \rho.$$

注 对二维正态分布, X 与 Y 独立 $\Longleftrightarrow$ X 与 Y 不相关

例 设(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}1/\pi, & x^2+y^2\le 1,\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$$

X,Y是否相关？



解 $Cov(X,Y)=EXY-EXEY$

$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)dxdy$$

$$=\int_{-1}^{1}dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}x\cdot\frac{1}{\pi}dx=0.$$

同理，$EY=0$.

$$EXY=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)dxdy=\int_{-1}^{1}dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}xy\cdot\frac{1}{\pi}dx=0.$$

$\therefore Cov(X,Y)=0(\rho=0)$, 故 X 与Y 不相关.

相关系数的性质的证明：

1. $|\rho_{XY}| \le 1$

2. $|\rho_{XY}| = 1 \Leftrightarrow$ 存在常数a,b，使$P(Y = a + bX) = 1$

证明：考虑以X的线性函数$a + bX$来近似表示Y.

以均方误差$e(a,b) = E\{[Y - (a + bX)]^2\}$来衡量。

$e(a,b)$越小，$a + bX$与Y的近似程度越好。

下面来求最佳近似式：$e(a_0, b_0) = \min\limits_{a,b} e(a,b)$

计算得：$e(a,b) = E(Y^2) + b^2E(X^2) + a^2 - 2bE(XY) + 2abE(X) - 2aE(Y)$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial e(a,b)}{\partial a} = 2a + 2bE(X) - 2E(Y) = 0 \\ \dfrac{\partial e(a,b)}{\partial b} = 2bE(X^2) - 2E(XY) + 2aE(X) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = E(Y) - b_0E(X) \\ b_0 = \dfrac{Cov(X,Y)}{D(X)} \end{cases}$$

此时$e(a_0,b_0)=E\left\{[Y-(a_0+b_0X)]^2\right\}$

$$=D[Y-(a_0+b_0X)]+\left\{E\left[Y-(a_0+b_0X)\right]\right\}^2$$

$$=D(Y-b_0X)=D(Y)+b_0^2D(X)-2b_0Cov(X,Y)$$

$$=D(Y)-\frac{[Cov(X,Y)]^2}{D(X)}=(1-\rho_{XY}^2)D(Y)$$

$$a_0=E(Y)-b_0E(X)$$

$$b_0=\frac{Cov(X,Y)}{D(X)}$$

1. 由$e(a_0,b_0)\geq 0\Rightarrow 1-\rho_{XY}^2\geq 0\Rightarrow|\rho_{XY}|\leq 1$

2. $|\rho_{XY}|=1\Leftrightarrow E\left\{\left[Y-(a_0+b_0X)\right]^2\right\}=0$

$$\Leftrightarrow D\left[Y-(a_0+b_0X)\right]=0\text{且}E[Y-(a_0+b_0X)]=0$$

$$\Leftrightarrow P\left\{Y-(a_0+b_0X)=0\right\}=1$$

小结

- 根据方差的定义，性质和定理，熟练掌握随机变量的方差的计算
- 熟记常见随机变量的方差
- 根据协方差及相关系数的定义，性质，熟练掌握协方差(相关系数)的计算，会判断随机变量的相关性
- 记住随机变量矩的定义

一. 填空题

练

习

1. 一整数等可能地在1到10中取值，以X记除得尽这一整数的正整数的个数，则EX=______，DX=______。

2.设总体$X\sim E(\lambda), X_1, X_2, \cdots, X_n$为总体$X$的样本，$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$,则$E(\overline{X}^2)=$________

二. 选择题

练习

1. 设$X\sim N(3,4)$, $Y\sim E(0.2)$,则下列结论错误的是(B)

A. $E(X+Y)=8$　　B. $D(X+Y)=29$

C. $E(X^2+Y^2)=63$　　D. $E(X/2+Y/5-5/2)=0$

2. 设R.V.X与Y独立同分布, 记$U=X-Y, V=X+Y$, 则U和V(C)

A.不独立　　B.独立

C.相关系数为0　　D.相关系数不为0

练

习

三 解答题

1.(10’) 设随机变量(X,Y)在矩形$G=\{(x,y):0<x<2,\ 0<y<1\}$上服从均匀分布，记

$$U=\begin{cases}0, & 若X\le Y,\\ 1, & 若X>Y,\end{cases}\qquad V=\begin{cases}0, & 若X\le 2Y,\\ 1, & 若X>2Y,\end{cases}$$

(1)求(U,V)的联合分布；(2)求U与V的相关系数。

(提示：D.R.V.的分布的计算，相关系数的计算)

解答题

练

习

2.(8’)设随机变量(*X*,*Y*)的联合概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}1/\pi, & x^2+y^2\le 1,\\ 0, & \text{其它。}\end{cases}$$

问*X*与*Y*是否相互独立，是否不相关？并说明理由。

(提示：二维C.R.V.的边缘密度的计算，独立性的证明)

解答题

练

习

3.(10')设 $X_1, X_2, \cdots, X_n (n>2)$为来自总体$N(0,1)$的样本，$\bar{X}$为样本均值，记$Y_i = X_i - \bar{X}, i=1,\cdots,n.$ 求DY_i和$Cov(Y_1, Y_n)$.

$$Cov(X_i, \bar{X}) = \frac{DX_i}{n}.$$

(提示：方差和协方差的计算)