笔记 1 命题逻辑

人工智能

1. 命题

定义 1 一个非真即假的陈述句称为命题.

作为命题的陈述句表达的判断结果称为真值, 真值只取两个值: 真或假. 用 “1” 表示真, 用 “0” 表示假, 对应真命题与假命题.

注 1 感叹句、祈使句、疑问句都不是命题; 陈述句可能是悖论, 判断结果不惟一确定的不是命题.

例: 下列句子中哪些是命题:

1. $\sqrt{2}$ 是有理数; 假命题
2. $2+5=7$; 真命题
3. 我正在说谎; 悖论
4. $x+5>3$. 不是命题

2. 联结词

五个基本联结词: 否定式 $\neg$; 合取 $\wedge$; 析取 $\vee$; 蕴含 $\rightarrow$; 等价 $\leftrightarrow$

定义 2 设 p 为命题, 复合命题 “非 p” (或 “p 的否定”) 称为 p 的否定式, 记作 $\neg p$.

规定 $\neg p$ 为真当且仅当 p 为假.

定义 3 设 p 和 q 为两个命题, 复合命题 “p 并且 q” (或 “p 与 q”) 称为 p 与 q 的合取式, 记作 $p \wedge q$.

使用联结词 $\wedge$ 需要注意两点: 一是 $\wedge$ 活性, 自然语言中的既…又…, 不但…而且…, 虽然…但是…都表示两件事情同时成立, 因此可以符号化为 $\wedge$. 二是不要见到与、和就用联结词 $\wedge$.

定义 4 设 p 和 q 为两个命题, 复合命题 “p 或 q” 称为 p 与 q 的析取式, 记作 $p \vee q$.

以上定义的析取联结词 $\vee$ 和自然语言中的“或”不完全一样，自然语言中的“或”具有二义性，用它有时具有相容性(即它联结的两个命题可以同时为真)，有时具有排斥性(即只有当一个为真一个为假时才为真)，分别对应于相容或与排斥或.

定义 5 设 p, q 为两个命题，复合命题“如果 p, 则 q”称作 p 与 q 的蕴涵式，记作 $p \to q$，并称 p 是蕴涵式的前件，q 为蕴涵式的后件，$\to$ 称作蕴涵联结词.

(1) $p \to q$ 的逻辑关系：q 为 p 的必要条件；(2) “如果 p, 则 q”有很多不同的表述方法：若 p，就 q；只要 p，就 q；p 仅当 q；只有 q 才 p；除非 q, 才 p 或除非 q, 否则非 p，$\cdots$.；(3) 当 p 为假时，$p \to q$ 恒为真，称为空证明；(4) p 与 q 可以无任何内在关系！

定义 6 设 p, q 为两个命题，复合命题“p 当且仅当 q”称作 p 与 q 的等价式，记作 $p \leftrightarrow q$，$\leftrightarrow$ 称作等价联结词.

规定 $p \leftrightarrow q$ 为真当且仅当 p 与 q 同时为真或同时为假. $p \leftrightarrow q$ 的逻辑关系为 p 与 q 互为充分必要条件.

例: 将下列命题符号化:

1. 吴颖既用功又聪明;　　令 p: 吴颖用功, q: 吴颖聪明. 命题符号化为 $p \wedge q$
2. 吴颖不仅用功而且聪明;　　令 p: 吴颖用功, q: 吴颖聪明. 命题符号化为 $p \wedge q$
3. 吴颖不用功;　　令 p: 吴颖用功. 命题符号化为 $\neg p$
4. 小元元只能拿一个苹果或一个梨;

   令 p: 小元元拿一个苹果, q: 小元元拿一个梨. 命题符号化为 $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$
5. 王小红生于 1975 年或 1976 年;

   令 p: 王小红生于 1975 年, q: 王小红生于 1976 年. 命题符号化为 $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$ 或 $p \vee q$
6. 只要天冷，小王就穿羽绒服;　　设 p：天冷，q：小王穿羽绒服. 命题符号化为 $p \to q$
7. 只有天冷，小王才穿羽绒服;　　设 p：天冷，q：小王穿羽绒服. 命题符号化为 $q \to p$

3. 命题公式和赋值

简单命题是命题逻辑中最基本的研究单位，由于简单命题真值唯一确定，所以简单命题也称为命题常项 (命题常元). 取值 1(真) 或 0(假) 的变元称作命题变项 (命题变元).

定义 7 合式公式（也称作命题公式或命题形式，简称公式）的递归定义：

(1) 单个命题变项和命题常项是合式公式, 称作原子命题公式；

(2) 若 A 是合式公式，则 $(\neg A)$ 也是；

(3) 若 A, B 是合式公式，则 $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \to B)$, $(A \leftrightarrow B)$ 也是；

(4) 只有有限次地应用 (1)-(3) 形成的符号串才是合式公式.

命题公式不是命题！每一个命题变元都被赋以确定的真值时，公式的真值才被确定，从而成为一个命题.

定义 8 (赋值) 设 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 是出现在公式 A 中的全部命题变项, 给 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 各指定一个真值, 称为对 A 的一个赋值或解释. 若指定的一组值使 A 为 1, 则称这组值为 A 的成真赋值; 若使 A 为 0, 则称这组值为 A 的成假赋值.

如: 合式公式 $A = \neg(p \to q) \leftrightarrow r$ (注意赋值按照字母顺序排列 pqr 排列)

000, 010, 101, 110 是的成真赋值;

001, 011, 100, 111 是成假赋值.

定义 9 将命题公式 A 在所有赋值下取值的情况列成表, 称作 A 的真值表.

例: 请写出下列公式的真值表

1. $(p \vee q) \to \neg r$;　　　　真值表见图 3–1
2. $(q \to p) \wedge q \to p$;　　　　真值表见图 3–2

p	q	r	$p\vee q$	$\neg r$	$(p\vee q)\to\neg r$
0	0	0	0	1	1
0	0	1	0	0	1
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	0	0
1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	0	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	0	0

图 3–1　公式 $(p \vee q) \to \neg r$ 的真值表.

p	q	$q\to p$	$(q\to p)\wedge q$	$(q\to p)\wedge q\to p$
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
1	0	1	0	1
1	1	1	1	1

图 3–2　公式 $(q \to p) \wedge q \to p$ 的真值表.

定义 10 (公式类型) 设 A 为任一命题公式,

(1) 若 A 在它的任何赋值下取值均为真, 则称 A 为重言式或永真式;

(2) 若 A 在它的任何赋值下取值均为假, 则称 A 为矛盾式或永假式;

(3) 若 A 不是矛盾式, 则称 A 是可满足式.

注: 需要学会用真值表判断公式类型. 例如图 3–2可知该公式为重言式 (永真式).

笔记 2 等值演算

人工智能

1. 等值式

定义 1 设公式 A 与 B 是两个命题公式，若等价式 $A \leftrightarrow B$ 是重言式，则称 A 与 B 是等值的，记作 $A \Leftrightarrow B$，并称 $A \Leftrightarrow B$ 是等值式.

设公式 A 与 B 共同含有 n 个命题变项，A 或 B 可能有哑元。若 A 与 B 有相同的真值表，说明在所有 $2n$ 个赋值下，A 与 B 的真值都相同，因而等价式 $A \leftrightarrow B$ 为重言式。

注 1 例如 $(p \to q) \leftrightarrow ((\neg p \vee q) \vee (\neg r \wedge r))$, 其中 r 为左边公式的哑元.

用真值表可检查两个公式是否等值.

例: 判断下列各组公式是否等值:

(1) $p \to (q \to r)$ 与 $(p \wedge q) \to r$

可采用真值表法，列真值表如下：

p q r	q→r	p→(q→r)	p∧q	(p∧q)→r
0 0 0	1	1	0	1
0 0 1	1	1	0	1
0 1 0	0	1	0	1
0 1 1	1	1	0	1
1 0 0	1	1	0	1
1 0 1	1	1	0	1
1 1 0	0	0	1	0
1 1 1	1	1	1	1

图 1–1　公式 $(p \vee q) \wedge q \to p$ 的真值表.

结论: $p \to (q \to r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \to r$

证明公式等值的另一个方法是利用已知的等值式通过代换得到新的等值式。例如，用真值表很容易验证 $p = \neg\neg p$ 是重言式。如果用任意一个命题公式替换式子中的 p，比如用 $p \wedge q$ 替换 p 得到 $(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg\neg(p \wedge q)$，直觉上所得到的新式子也是重言式.

设 A 是一个命题公式，含有命题变项 $p_1, p_2, \ldots, p_n$, 又设 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 是任意的命题公式，对每一个 $i(i=1,2,\ldots,n)$，把 p_i 在 A 中的所有出现都替换成 A_i, 所得到的新命题公式记成 B，那么如果 A 是重言式，则 B 也是重言式。

16 组重要等值式

双重否定律	$A \Leftrightarrow \neg\neg A$
幂等律	$A \Leftrightarrow A \vee A$, $A \Leftrightarrow A \wedge A$
交换律	$A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$, $A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$
结合律	$(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$, $(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$
分配律	$A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$, $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
德摩根律	$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$ $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$
吸收律	$A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A$, $A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A$
零律	$A \vee 1 \Leftrightarrow 1$, $A \wedge 0 \Leftrightarrow 0$
同一律	$A \vee 0 \Leftrightarrow A$, $A \wedge 1 \Leftrightarrow A$
排中律	$A \vee \neg A \Leftrightarrow 1$
矛盾律	$A \wedge \neg A \Leftrightarrow 0$
蕴涵等值式	$A \to B \Leftrightarrow \neg A \vee B$
等价等值式	$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \to B) \wedge (B \to A)$
假言易位	$A \to B \Leftrightarrow \neg B \to \neg A$
等价否定等值式	$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow \neg A \leftrightarrow \neg B$
归谬论	$(A \to B) \wedge (A \to \neg B) \Leftrightarrow \neg A$

等值演算

设 $\Phi(A)$ 是含公式 A 的命题公式, $\Phi(B)$ 是用公式 B 置换 $\Phi(A)$ 中所有的 A 后得到的命题公式，若 $B \Leftrightarrow A$，则 $\Phi(B) \Leftrightarrow \Phi(A)$.

例: 证明两个公式等值：证明 $p \to (q \to r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \to r$

$$
\begin{aligned}
& p \to (q \to r) \\
\Leftrightarrow\ & \neg p \vee (\neg q \vee r) \quad (\text{蕴涵等值式}) \\
\Leftrightarrow\ & (\neg p \vee \neg q) \vee r \quad (\text{结合律}) \\
\Leftrightarrow\ & \neg(p \wedge q) \vee r \quad (\text{德摩根律}) \\
\Leftrightarrow\ & (p \wedge q) \to r \quad (\text{蕴涵等值式})
\end{aligned}
$$

例: 证明两个公式不等值：证明 $p \to (q \to r)$ 与 $(p \to q) \to r$ 不等值.

方法有：1 真值表法; 2 观察法；3 等值演化后再用观察法.

判断公式类型: A 为矛盾式当且仅当 $A \Leftrightarrow 0$; A 为重言式当且仅当 $A \Leftrightarrow 1$.

2. 析取范式与合取范式

命题公式有两种规范表示方法，这种规范的表达式能表达真值表所能提供的一切信息。

基本概念：

(1) 文字——命题变项及其否定的总称；

(2) 简单析取式——仅由有限个文字构成的析取式

例如：$p, \neg q, p \vee \neg q, p \vee q \vee r$

(3) 简单合取式——仅由有限个文字构成的合取式

例如：$p, \neg q, p \wedge \neg q, p \wedge q \wedge r$

(4) 析取范式——由有限个简单合取式的析取构成的命题公式；

例如：$p, \neg p \wedge q, p \vee \neg q, (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (q \wedge r)$

(5) 合取范式——由有限个简单析取式的合取构成的命题公式；

$p, p \vee \neg q, \neg p \wedge q, (p \vee q) \wedge \neg q \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r)$

(6) 范式——析取范式与合取范式的总称.

注 2 一个文字既是简单析取式，又是简单合取式; 形如 $p \wedge \neg q \wedge r, \neg p \vee q \vee \neg r$ 的公式既是析取范式，又是合取范式.

定理 1（范式存在定理）任一命题公式都存在与之等值的析取范式与合取范式.

如何求一个公式的范式?

求公式A的范式的步骤:

(1) 消去A中的$\rightarrow, \leftrightarrow$（若存在）

$A\rightarrow B \Leftrightarrow \neg A\vee B \quad A\leftrightarrow B \Leftrightarrow (\neg A\vee B)\wedge(A\vee\neg B)$

(2) 否定联结词$\neg$的内移或消去

$\neg\neg A \Leftrightarrow A \quad \neg(A\vee B)\Leftrightarrow \neg A\wedge\neg B \quad \neg(A\wedge B)\Leftrightarrow \neg A\vee\neg B$

(3) 使用分配律

$A\vee(B\wedge C)\Leftrightarrow (A\vee B)\wedge(A\vee C)$ 求合取范式

$A\wedge(B\vee C)\Leftrightarrow (A\wedge B)\vee(A\wedge C)$ 求析取范式 

定义 2 (极大项和极小项) 在含有 n 个命题变项的简单合取式 *(*简单析取式*)* 中，若每个命题变项和它的否定式恰好出现一个且仅出现一次，而且命题变项或它的否定式按照下标从小到大或按照字典顺序排列，称这样的简单合取式 *(*简单析取式*)* 为极小项 *(*极大项*)*.

注 3 n 个命题变项有 2^n 个极小项和 2^n 个极大项；每个极小项都有且仅有一个成真赋值；每个极大项只有一个成假赋值；用 m_i 表示第 i 个极小项，其中 i 是该极小项成真赋值的十进制表示. 用 M_i 表示第 i 个极大项，其中 i 是该极大项成假赋值的十进制表示. m_i (M_i) 称为极小项 (极大项) 的名称.

例如:

由三个命题变项 p, q, r 形成的极小项与极大项

极小项			极大项		
公式	成真赋值	名称	公式	成假赋值	名称
$\neg p\wedge\neg q\wedge\neg r$	0 0 0	m_0	$p\vee q\vee r$	0 0 0	M_0
$\neg p\wedge\neg q\wedge r$	0 0 1	m_1	$p\vee q\vee\neg r$	0 0 1	M_1
$\neg p\wedge q\wedge\neg r$	0 1 0	m_2	$p\vee\neg q\vee r$	0 1 0	M_2
$\neg p\wedge q\wedge r$	0 1 1	m_3	$p\vee\neg q\vee\neg r$	0 1 1	M_3
$p\wedge\neg q\wedge\neg r$	1 0 0	m_4	$\neg p\vee q\vee r$	1 0 0	M_4
$p\wedge\neg q\wedge r$	1 0 1	m_5	$\neg p\vee q\vee\neg r$	1 0 1	M_5
$p\wedge q\wedge\neg r$	1 1 0	m_6	$\neg p\vee\neg q\vee r$	1 1 0	M_6
$p\wedge q\wedge r$	1 1 1	m_7	$\neg p\vee\neg q\vee\neg r$	1 1 1	M_7

m_i与M_i的关系：$\neg m_i \Leftrightarrow M_i$，$\neg M_i \Leftrightarrow m_i$ 

主析取范式——所有简单合取式都是极小项的析取范式；

主合取范式——所有简单析取式都是极大项的合取范式；

例如： n=3, 命题变项为 p,q,r 时,

$(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)\Leftrightarrow m_1\vee m_3$ —主析取范式

$(p\vee q\vee\neg r)\wedge(\neg p\vee\neg q\vee\neg r)\Leftrightarrow M_1\wedge M_7$—主合取范式

注 4 任何命题公式都存在与之等值的主析取范式和主合取范式，并且是唯一的.

掌握如何求取主析取范式和主合取范式！

求公式主析取范式的步骤:

设公式A含命题变项$p_1, p_2,\ldots, p_n$

(1) 求A的析取范式$A'=B_1\vee B_2\vee\ldots\vee B_s$，其中$B_j$是简单合取式，$j=1, 2, \ldots s$

(2) 若某个B_j既不含p_i，又不含$\neg p_i$，则将B_j展开成

$$B_j\Leftrightarrow B_j\wedge(p_i\vee\neg p_i)\Leftrightarrow(B_j\wedge p_i)\vee(B_j\wedge\neg p_i)$$

重复这个过程，直到所有简单合取式都是长度为n的极小项为止

(3) 消去重复出现的极小项，即用m_i代替$m_i\vee m_i$

(4) 将极小项按下标从小到大排列

求公式的主合取范式的步骤:

设公式A含命题变项$p_1, p_2,\ldots, p_n$

(1) 求A的合取范式$A'=B_1\wedge B_2\wedge\ldots\wedge B_s$，其中$B_j$是简单析取式$j=1, 2, \ldots s$

(2) 若某个B_j既不含p_i，又不含$\neg p_i$，则将B_j展开成

$$B_j\Leftrightarrow B_j\vee(p_i\wedge\neg p_i)\Leftrightarrow(B_j\vee p_i)\wedge(B_j\vee\neg p_i)$$

重复这个过程，直到所有简单析取式都是长度为n的极大项为止

(3) 消去重复出现的极大项，即用M_i代替$M_i\wedge M_i$

(4) 将极大项按下标从小到大排列

主析取范式的用途

1. 求公式的成真成假赋值；

例如： $(p\to\neg q)\to r\Leftrightarrow m_1\vee m_3\vee m_5\vee m_6\vee m_7$

成真赋值为 001, 011, 101, 110, 111

成假赋值为 000, 010, 100.

2. 判断公式的类型设 A 含 n 个命题变项,

A 为重言式

$\Leftrightarrow A$ 的主析取范式含全部 2^n 个极小项

$\Leftrightarrow A$ 的主合取范式不含任何极大项, 记为 1.

A 为矛盾式

$\Leftrightarrow A$ 的主合析取范式含全部 2^n 个极大项

$\Leftrightarrow A$ 的主析取范式不含任何极小项, 记为 0.

A 为非重言式的可满足式

$\Leftrightarrow A$ 的主析取范式中至少含一个、但不是全部极小项

$\Leftrightarrow A$ 的主合取范式中至少含一个、但不是全部极大项.

3. 判断两个公式是否等值：若两个公式的主析取范式相同，则他们等值.

笔记 3 命题逻辑的推理理论

人工智能

1. 推理的形式结构

数理逻辑的主要任务是用数学的方法研究推理. 推理是指从前提出发推出结论的思维过程. 前提是已知的命题公式集合，结论是从前提出发应用推理规则推出的命题公式.

定义 1 设 $A_1, A_2, \ldots, A_k, B$ 为命题公式. 若对于每组赋值，或者 $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k$ 为假，或当 $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k$ 为真时，B 也为真，则称由前提 $A_1, A_2, \ldots, A_k$ 推出结论 B 的推理是有效的或正确的, 并称 B 是有效的结论.

注 1 设 $\Gamma = A_1, A_2, \ldots, A_k$ 为前提，则由 Γ 推出 B 的推理记为 $\Gamma \vdash B$, 推理是否正确与诸前提排列次序无关, 前提是一个有限的公式集合. 若推理正确，则记为 $\Gamma \vDash B$; 若推理错误，则记为 $\Gamma \nvDash B$. 这里称 $\Gamma \vdash B$ 或 $\{A_1, A_2, \cdots, A_k\} \vdash B$ 为推理的形式结构

判断推理是否正确的依据: $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k$ 为 1, B 为 0 是否出现. 不出现，推理正确；出现, 推理不正确.

推理正确并不能保证结论 B 一定成立. (因为前提可能为假)

定理 1 由命题公式 $A_1, A_2, \ldots, A_k, B$ 推出 B 的推理正确当且仅当 $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \to B$ 为重言式.

若推理正确, 记为 $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \Rightarrow B$

例: 判断下面推理是否正确. (1) 若今天是 1 号，则明天是 5 号. 今天是 1 号, 所以, 明天是 5 号.

解 设 p: 今天是 1 号，q: 明天是 5 号. (1) 推理的形式结构:$\{(p \to q), p\} \vdash q$

判断推理正确可采用：等值演算法，主析取范式法 (判断公式是否为重言式)

9条推理定律

1. $A \Rightarrow (A \vee B)$ 附加律
2. $(A \wedge B) \Rightarrow A$ 化简律
3. $(A \to B) \wedge A \Rightarrow B$ 假言推理
4. $(A \to B) \wedge \neg B \Rightarrow \neg A$ 拒取式
5. $(A \vee B) \wedge \neg B \Rightarrow A$ 析取三段论
6. $(A \to B) \wedge (B \to C) \Rightarrow (A \to C)$ 假言三段论
7. $(A \leftrightarrow B) \wedge (B \leftrightarrow C) \Rightarrow (A \leftrightarrow C)$ 等价三段论
8. $(A \to B) \wedge (C \to D) \wedge (A \vee C) \Rightarrow (B \vee D)$ 构造性二难
   $(A \to B) \wedge (\neg A \to B) \Rightarrow B$ 构造性二难(特殊形式)
9. $(A \to B) \wedge (C \to D) \wedge (\neg B \vee \neg D) \Rightarrow (\neg A \vee \neg C)$ 破坏性二难

2. 自然推理系统 P

本节将对由前提 $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k$ 推出结论 B 的正确推理的证明给出严格的形式描述. 证明是一个描述推理过程的命题公式序列，其中的每个公式或者是已知前提，或者是由前面的公式应用推理规则得到的结论.

定义 2 自然推理系统 P 定义如下:

1. 字母表

(1) 命题变项符号：$p, q, r, \ldots, p_i, q_i, r_i, \ldots$

(2) 联结词符号：*5* 种联结词 *(3)* 括号与逗号：*()* 和, *2.* 合式公式（见笔记 *1*）

3. 推理规则

(1) 前提引入规则*:* 在证明的任何步骤都可以引入前提；

(2) 结论引入规则：在证明的任何步骤所得到的结论都可以作为后续证明的前提；

(3) 置换规则：在证明的任何步骤，命题公式中的子公式都可以用等值的公式置换，得到公式序列中的又一个公式。

例: 构造下面推理的证明.

若明天是星期一或星期三，我明天就有课. 若我明天有课，今天必备课. 我今天

没备课, 所以，明天不是星期一、也不是星期三.

解 (1) 设命题并符号化

设 p：明天是星期一, q : 明天是星期三, r : 我明天有课, s : 我今天备课.

(2) 写出证明的形式结构

前提：$(p \vee q) \rightarrow r, r \rightarrow s, \neg s$

结论：$\neg p \wedge \neg q$

(3) 证明:

①	$r \rightarrow s$	前提引入
②	$\neg s$	前提引入
③	$\neg r$	① ② 拒取式
④	$(p \vee q) \rightarrow r$	前提引入
⑤	$\neg(p \vee q)$	③ ④ 拒取式
⑥	$\neg p \wedge \neg q$	⑤ 置换

附加前提证明法:

欲证

前提：$A_1, A_2, \ldots, A_k$

结论：$C \rightarrow B$

等价地证明

前提：$A_1, A_2, \ldots, A_k, C$

结论：B

例: 前提：$p \vee q, p \rightarrow r, r \rightarrow \neg s$

结论：$s \rightarrow q$

等价证明

前提：$p \vee q, p \rightarrow r, r \rightarrow \neg s, s$

结论：q

归谬法:

欲证

前提：$A_1, A_2, \ldots, A_k$

结论：B

等价证明

前提：$A_1, A_2, \ldots, A_k, \neg B$

结论：0

例: 前提：$\neg(p \wedge q) \vee r, r \rightarrow s, \neg s, p$

结论：$\neg q$

(3) 证明:

归谬法证明：

①	q	结论否定引入
②	$r \rightarrow s$	前提引入
③	$\neg s$	前提引入
④	$\neg r$	② ③ 拒取式
⑤	$\neg(p \wedge q) \vee r$	前提引入
⑥	$\neg(p \wedge q)$	④ ⑤ 析取三段论
⑦	$\neg p \vee \neg q$	⑥ 置换
⑧	$\neg p$	① ⑦ 析取三段论
⑨	p	前提引入
⑩	$\neg p \vee p$	⑧ ⑨ 合取

笔记 4 一阶逻辑

人工智能

1. 一阶逻辑符号化

个体词、谓词和量词是一阶逻辑命题符号化的 3 个基本要素。

个体词——所研究对象中可以独立存在的具体的或抽象的客体. 如小王、小李、中国、3 等.

个体常项：表示具体或特定的客体的个体词，一般用小写英文字母 a, b, c 表示；

个体变项：表示抽象或泛指的个体词，常用 x, y, z 表示；

个体域 (论域)——个体变项的取值范围

有限个体域，如 $a, b, c, 1, 2$ 无限个体域，如 $N, Z, R, \ldots$ 全总个体域——由宇宙间一切事物组成

谓词——刻画个体词性质及个体词之间相互关系的词，常用 F, G, H 等表示. 谓词常项: 表示具体性质或关系的谓词. 如, $F(a): a$ 是人

谓词变项: 表示抽象的或泛指的性质或关系的谓词.

如, $F(x): x$ 具有性质 F 含 $n(n \geq 1)$ 个个体变项 $x_1, x_2, \ldots x_n$ 的谓词 P 称作 n 元谓词，记作 $P(x_1, x_2, \ldots x_n)$.

一元谓词 ($n = 1$)——表示性质, $P(x_1)$

多元谓词 ($n \geq 2$)——表示事物之间的关系, $P(x_1, x_2, \ldots x_n)$

如, $L(x, y)$：x 与 y 有关系 $L, L(x, y): x \geq y, \cdots$

0 元谓词——不含个体变项的谓词, 即命题. 任何命题均可以表示为 0 元谓词.

量词——表示个体常项或变项之间数量关系的词

全称量词 $\forall$: 表示所有的, 一切的, 每一个, 任意的⋯⋯

$\forall x$: 表示个体域里的所有个体 x

如, $\forall x F(x)$ 表示个体域中所有的 x 具有性质 F

$\forall x \forall y G(x,y)$ 表示个体域中所有个体 x 和 y 有关系 G

存在量词 $\exists$: 表示存在, 有一个, 有的 $\cdots\cdots$

$\exists x:$ 表示个体域中有一个个体 x

例: 下列命题符号的自然语言表述形式为

- $\exists x F(x)$ 表示个体域中存在个体 x 具有性质 F.
- $\exists x \exists y G(x,y)$ 表示个体域中存在个体 x 和 y 有关系 G.
- $\forall x \exists y G(x,y)$ 表示对个体域中每一个 x 都存在一个 y 使得 x 和 y 有关系 G.
- $\exists x \forall y G(x,y)$ 表示个体域中存在一个 x 使得对每一个 y, x 和 y 有关系 G.

注 1 1. 注意 $\exists$ 和 $\forall$ 的顺序，顺序换了后表示的意思完全不同;

2. 注意 0 元谓词和 1 元谓词的区别;

3. 注意个体域. 当个体域未指定时，则默认为全总个体域.

例: 在一阶逻辑中将下面命题符号化

(1) 人都爱美

(2) 有人爱美

个体域分别为

(a) D 为人类集合 (b) D 为全总个体域

解: (a) (1) $\forall x G(x)$, 其中 $G(x): x$ 爱美; (2) $\exists x G(x)$, 其中 $G(x): x$ 爱美.

(b) 设 $F(x)$: x 为人, $G(x)$: x 爱美. 那么, (1) $\forall x(F(x) \to G(x))$; (2) $\exists x(F(x) \wedge G(x))$.

PS: 1. 使用全总个体域时，为了将人与其他事物区别出来，引入特性谓词 $F(x)$.

2. 注意蕴含与合取!

当 F 是谓词常项时，$\forall x F(x)$ 是一个命题. 如果把个体域中任何一个个体 a 代入，$F(a)$ 都为真，则 $\forall x F(x)$ 为真；否则 $\forall x F(x)$ 为假. $\exists x F(x)$ 也是一个命题，如果个体域中存在一个个体 a 使得 $F(a)$ 为真，则 $\exists x F(x)$ 为真，否则为假.

2. 一阶逻辑公式及其解释

为在一阶逻辑中进行演算和推理，必须给出一阶逻辑中公式的抽象定义以及它们的解释. 为此，首先给出一阶语言的概念. 所谓一阶语言，是用于一阶逻辑的形式语言，而一阶逻辑是建立在一阶语言上的逻辑体系. 一阶语言本身是由抽象符号构成的，可以根据需要被解释成各种具体的定义.

定义 1 设 L 是一个非逻辑符号集合, 由 L 生成的一阶语言 $\mathcal{L}$ 的字母表包括下述符号:

非逻辑符号

(1) 个体常项符号：$a, b, c, \ldots, a_i, b_i, c_i, \ldots, i \geq 1$

(2) 函数符号：$f, g, h, \ldots, f_i, g_i, h_i, \ldots, i \geq 1$

(3) 谓词符号：$F, G, H, \ldots, F_i, G_i, H_i, \ldots, i \geq 1$

逻辑符号

(4) 个体变项符号：$x, y, z, \ldots, x_i, y_i, z_i, \ldots, i \geq 1$

(5) 量词符号：$\forall, \exists$

(6) 联结词符号：$\wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow$

(7) 括号与逗号：$()$,

定义 2 $\mathcal{L}$ 的项的定义如下:

(1) 个体常项符号和个体变项符号是项.

(2) 若 $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 是任意的 n 元函数符号，$t_1, t_2, \ldots, t_n$ 是任意的 n 个项，则 $\phi(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ 是项.

(3) 所有的项都是有限次使用 (1), (2) 得到的. 如, $a, x+y, f(x), g(x, y)$ 等都是项.

定义 3 设 $R(x_1, x_2, ..., x_n)$ 是 L 的任意 n 元谓词符号，$t_1, t_2, ..., t_n$ 是 $\mathcal{L}$ 的 n 个项，则称 $R(t_1, t_2, ..., t_n)$ 是 $\mathcal{L}$ 的原子公式.

定义 4 $\mathcal{L}$ 的合式公式定义如下：(1) 原子公式是合式公式. (2) 若 A 是合式公式，则 $(\neg A)$ 也是合式公式. (3) 若 A, B 是合式公式，则 $(A \wedge B), (A \vee B), (A \to B), (A \leftrightarrow B)$ 也是合式公式. (4) 若 A 是合式公式，则 $\exists x A, \forall x A$ 也是合式公式. (5) 只有有限次地应用 (1)—(4) 形成的符号串才是合式公式. 合式公式简称公式.

定义 5 在公式 $\forall x A$ 和 $\exists x A$ 中，称 x 为指导变元，A 为相应量词的辖域. 在 $\forall x$ 和 $\exists x$ 的辖域中，x 的所有出现都称为约束出现，A 中不是约束出现的其他变项均称为是自由出现的.

例: $\forall x(F(x, y) \to G(x, z))$ 中，x 为指导变元，$(F(x, y) \to G(x, z))$ 为 $\forall x$ 的辖域，x 的两次出现均为约束出现，y 与 z 均为自由出现.

定义 6 若公式 A 中不含自由出现的个体变项，则称 A 为封闭的公式，简称闭式.

例: $\forall x \forall y(F(x) \wedge G(y) \to H(x, y))$ 为闭式，而 $\exists x(F(x) \wedge G(x, y))$ 不是闭式

定义 7 设 $\mathcal{L}$ 是 L 生成的一阶语言, L 的解释 I 由 4 部分组成:

(a) 非空个体域 D_I.
(b) 对每一个个体常项符号 $a \in L$, 有一个 $\bar{a} \in D_I$, 称 $\bar{a}$ 为 a 在 I 中的解释.
(c) 对每一个 n 元函数符号 $f : L$, 有一个 D_I 上的 n 元函数 $\bar{f} : D_I^n \to D_I$, 称 $\bar{f}$ 为 f 在 I 中的解释.
(d) 对每一个 n 元谓词符号 $F \in L$, 有一个 D_I 上的 n 元谓词常项 $\bar{F}$, 称 $\bar{F}$ 为 F 在 I 中的解释。

例: 给定解释 I 如下:

(a) 个体域 $D = N$;

(b) $\bar{a}=2$;

(c) $\bar{f}(x,y)=x+y$, $\bar{g}(x,y)=x\cdot y$;

(d) $\bar{F}(x,y): x=y$;

说明下列公式在 I 下的涵义, 并讨论真值

(1) $\forall xF(g(x,a),x)$； (2)$\forall x\forall y(F(f(x,a),y)\rightarrow F(f(y,a),x))$

解：(1) 中公式在 I 下的涵义为 $\forall x(2x=x)$, 真值为 0

(2) 中公式在 I 下的涵义为 $\forall x\forall y(x+2=y\rightarrow y+2=x)$, 真值为 0.

笔记 5 集合代数

人工智能

1. 集合的基本概念

定义 1 设 A, B 为集合, 若 B 中每个元素都是 A 中的元素, 则称 B 是 A 的子集, 也称 A 包含 B 记作 $B \subseteq A$.

"包含" 对应命题符号化的形式为: $B \subseteq A \Leftrightarrow \forall x(x \in B \to x \in A)$.

定义 2 设 A, B 为集合, 若 $B \subseteq A$ 且 $A \subseteq B$, 则称 A 与 B 相等, 记作 $A = B$.

"相等" 对应命题符号化的形式为: $A = B \Leftrightarrow B \subseteq A \wedge A \subseteq B$.

定义 3 设 A, B 为集合, 若 $B \subseteq A$ 且 $B \neq A$, 则称 B 是 A 的真子集, 记作 $B \subset A$.

"真子集" 对应命题符号化的形式为: $B \subset A \Leftrightarrow B \subseteq A \wedge A \neq B$.

例: $A = \{\{b, c\}\}$ 和 $B = \{a, \{b, c\}\}$, 则 $A \subset B$;

$A = \{b, c\}$ 和 $B = \{a, \{b, c\}\}$, 则 $A \in B$.

不含任何元素的集合称作空集, 记 $\emptyset$. 空集是一切集合的子集. 空集是唯一的.

定义 4 设 A 集合, 把 A 全体子集构成的集合称作 A 幂集, 记 $P(A)$.

例: $A = \{1, 2, 3\}$, 则 $P(A) = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}, \emptyset\}$

在具体问题中, 如果所涉及的集合是某个集合的子集, 则称这个集合为**全集**, 记作 E.

2. 集合的运算

设 A,B 为集合

运算	表述	内涵
并集	$A \cup B$	$\{x \mid x \in A \vee x \in B\}$
交集	$A \cap B$	$\{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$
相对补集	$A - B$	$\{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$
对称差集	$A \oplus B$	$(A - B) \cup (B - A)$
绝对补集	$\sim A$	$E - A$
广义并	$\cup A$	$\{x \mid \exists z (z \in A \wedge x \in z)\}$
广义交	$\cap A$	$\{x \mid \forall z (z \in A \rightarrow x \in z)\}$

定义 5 若 $A = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$, 则

(1) 广义并运算：$\cup A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$

(2) 广义交运算：$\cap A = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$

广义并：A 元素的元素构成的集合.

广义交：非空集合 A 的所有元素的公共元素构成的集合.

注 1 $\cup\emptyset = \emptyset$; $\cap\emptyset$ 无意义; 单点集 $\{x\}$ 的广义并和广义交都等于 x. 引入广义运算的意义在于可以表示无数个集合的并、交运算，例如 $\cup\{\{x\} \mid x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$, 其中 $\mathbb{R}$ 代表实数集合.

注 2 运算的优先权规定:

1 类运算：广义运算、幂集、绝对补运算，

运算由右向左进行

2 类运算：初级运算 $\cup, \cap, -, \oplus$

优先顺序由括号确定

混合运算：1 类运算优先于 2 类运算

a. 集合运算的十条定律

交换律	$A \cup B = B \cup A$，$A \cap B = B \cap A$
结合律	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
分配律	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
同一律	$A \cup \emptyset = A, A \cap E = A$
互补律	$A \cup \sim A = E, A \cap \sim A = \emptyset$

双重否定律	$\sim\sim A = A$
幂等律	$A \cup A = A, A \cap A = A$
吸收律	$A \cup (A \cap B) = A,\ A \cap (A \cup B) = A$
零律	$A \cap \emptyset = \emptyset, A \cup E = E$
德摩根律	$A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$ $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$ $\sim(B \cup C) = \sim B \cap \sim C$ $\sim(B \cap C) = \sim B \cup \sim C$

b. 证明集合的方法：命题演算法、等式置换法

命题演算证明法的书写规范: (以下的 X 和 Y 代表集合公式)

(1) 证 $X \subseteq Y$

任取 x，有 $x \in X \Rightarrow \cdots \Rightarrow x \in Y$

(2) 证 $X = Y$

方法一分别证明 $X \subseteq Y$ 和 $Y \subseteq X$

方法二任取 x，有 $x \in X \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow x \in Y$

注意：在使用方法二的格式时，必须保证每步推理都是充分必要的.

例: 证明 $A \cup (A \cap B) = A$

任取 $x \in A$, 有

$$x \in A \cup (A \cap B) \Leftrightarrow x \in A \vee x \in (A \cap B) \Leftrightarrow x \in A \vee (x \in A \wedge x \in B) \Leftrightarrow x \in A$$

则得证 $A \cup (A \cap B) = A$.

等式置换法的书写规范:

$$
\begin{aligned}
& A\cup(A\cap B) \\
&= (A\cap E)\cup(A\cap B) && \text{（同一律）} \\
&= A\cap(E\cup B) && \text{（分配律）} \\
&= A\cap(B\cup E) && \text{（交换律）} \\
&= A\cap E && \text{（零律）} \\
&= A && \text{（同一律）}
\end{aligned}
$$

笔记 6 二元关系

人工智能

1. 有序对与笛卡尔积

定义 1 由两个元素 x 和 y(允许 $x = y$) 按照一定顺序排列成的二元组称作一个有序对或序偶，记作 $< x, y >$. 其中 x 它的第一元素，y 它的第二元素.

注 1 当 $x \neq y$, 则 $< x, y > \neq < y, x >$.

$<x, y>=<u, v>$ 当且仅当 $x = u, y = v$.

定义 2 设 A,B 为集合, 用 A 中元素为第一元素，B 中元素为第二元素构成有序对. 所有这样的有序对组成的集合称作 A 和 B 的笛卡尔积，记作 $A \times B$.

例: $A = \{a, b\}, B = \{1, 2\}$. 则 $A \times B = \{< a, 1 >, < a, 2 >, < b, 1 >, < b, 2 >\}$

注 2 对任意集合 A, $A \times \emptyset = \emptyset$,$\emptyset \times A = \emptyset$.

不满足交换律 $A \times B \neq B \times A$ （当 $A \neq B \wedge A \neq \emptyset \wedge B \neq \emptyset$).

不满足结合律 $(A \times B) \times C \neq A \times (B \times C)$ （当 $A \neq \emptyset \wedge B \neq \emptyset \wedge C \neq \emptyset$).

满足分配律:

- $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
- $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
- $(B \cup C) \times A = (B \times A) \cup (C \times A)$
- $(B \cap C) \times A = (B \times A) \cap (C \times A)$

2. 二元关系

定义 3 如果一个集合满足以下条件之一：(1) 集合非空，且它的元素都是有序对；(2) 集合是空集，则称该集合为一个二元关系，记作 R.

定义 4 设 A,B 为集合, $A\times B$ 任何子集所定义的二元关系为作 A 到 B 二元关系.

当 $B=A$ 称 $A\times A$ 的子集为 A 上的二元关系。

- 有哪些二元关系呢?

1. $\emptyset$是任何集合上的二元关系，称为空关系.
2. $A\times A$是A上的全域关系，记作E_A

   $E_A=\{<x,y>|x\in A\wedge y\in A\}=A\times A$
3. $\{<x,x>|\ x\in A\}$为A上的恒等关系，记作I_A

例： $A=\{1,2\}$；

$E_A=\{<1,1>,<1,2>,<2,1>,<2,2>\}$；

$I_A=\{<1,1>,<2,2>\}$;

4. 小于等于关系： $A\subseteq\mathbb{R}$

   $L_A=\{<x,y>|\ x,y\in A,x\leq y\}$.
5. 整除关系： $A\subseteq\mathbb{Z}^+$

   $D_A=\{<x,y>|\ x,y\in A,x|y\}$.

例： $A=\{1,2,3\}$；

$L_A=\{<1,1>,<1,2>,<1,3>,<2,2>,<2,3>,<3,3>\}$；

$D_A=\{<1,1>,<1,2>, <1,3>, <2,2>,<3,3>\}$;

6. 包含关系： A为集合簇

   $R_{\subseteq}=\{<x,y>|\ x,y\in A,x\subseteq y\}$.

例： $B=\{a,b\}$;

$A\triangleq P(B)=\{\{a\},\{b\},\{a,b\},\emptyset\}$

$R_{\subseteq}\{<\emptyset,\emptyset>,<\emptyset,\{a\}>, <\emptyset,\{b\}>,<\emptyset,\{a,b\}>,$
$<\{a\},\{a\}>,<\{a\},\{a,b\}>,<\{b\},\{b\}>,$
$<\{b\},\{a,b\}>,<\{a,b\},\{a,b\}>\}$

设 $A=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$, R 是 A 上的关系。定义

$$r_{ij}=\begin{cases}1, & <x_i,x_j>\in R\\ 0, & <x_i,x_j>\notin R\end{cases}$$

为 R 的关系矩阵，记作 M_R.

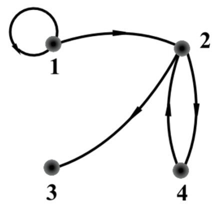
设 $A=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$, 以 A 元素为顶点, 若 $<x_i,x_j>\in R$, 则从 x_i 向 x_j 引有向边，所得的有向图为 R 的关系图, 记作 G_R.

例 设$A = \{1,2,3,4\}$,

R={<1,1>,<1,2>,<2,3>,<2,4>,<4,2>},

求R的关系矩阵M_R和关系图G_R.

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



3. 关系的运算

定义 5 设 R 是二元关系

(1) R 所有有序对的第一个元素构成的集合称为 R 的定义域, 记作 dom$R$;

(2) R 所有有序对的第二个元素构成的集合称为 R 的值域, 记作 ran$R$;

(3) dom$R \cup$ ran$R$ = fld$R$ 称为 R 的域.

例: $R = \{<1,2>,<1,3>,<2,4>,<4,3>\}$, 则 dom$R = \{1,2,4\}$, ran$R = \{2,3,4\}$, fld$R = \{1,2,3,4\}$

定义 6 设 R 为二元关系. 则 R 逆 (关系) 为

$$R^{-1} = \{<y,x>|<x,y>\in R\}$$

注 3 设 R 为二元关系, 则有 $(R^{-1})^{-1} = R$; domR^{-1} = ran$R$; ranR^{-1} = dom$R$.

定义 7 设 R 为二元关系. 则 R 逆 (关系) 为

$$R^{-1} = \{<y,x>|<x,y>\in R\}$$

定义 8 设 F, G 为二元关系. 则 G 对 F 的右复合为:

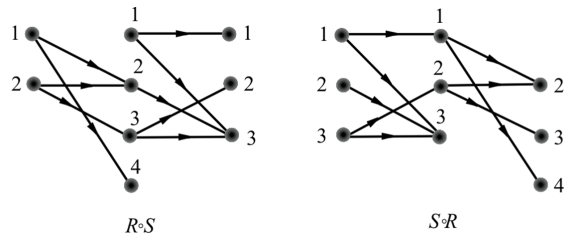
$$F \circ G = \{<x,y>|\ \exists t(<x,t>\in F \wedge <t,y>\in G)\}$$

例: $R = \{<1,2>,<2,3>,<1,4>,<2,2>\}$, $S = \{<1,1>,<1,3>,<2,3>,<3,2>,<3,3>\}$, 求 R^{-1}, $R\circ S$ 和 $S \circ R$.

$R^{-1} = \{<2,1>, <3,2>, <4,1>, <2,2>\}$

$R \circ S = \{<1,3>, <2,2>, <2,3>\}$

$S \circ R = \{<1,2>, <1,4>, <3,2>, <3,3>\}$



定理 1 设 F, G, H 为二元关系，则

(1) $(F \circ G) \circ H = F \circ (G \circ H)$

(2) $(F \circ G)^{-1} = (G^{-1} \circ F^{-1})$

(3) $F \circ (G \cup H) = F \circ G \cup F \circ H$

(4) $(G \cup H) \circ F = G \circ F \cup H \circ F$

(5) $F \circ (G \cap H) \subseteq F \circ G \cap F \circ H$

(6) $(G \cap H) \circ F \subseteq G \circ F \cap H \circ F$

定义 9 设 R 为二元关系，A 是集合:

(1) R 在 A 上的限制 $R \upharpoonright A = \{<x, y>| xRy \wedge x \in A\}$

(2) A 在 R 下的像 $R[A] = \text{ran}(R \upharpoonright A)$

注 4 R 在 A 上的限制 $R \upharpoonright A$ 是 R 的子关系，即 $R \upharpoonright A \subseteq R$. A 在 R 下的像 $R[A]$ 是 $\text{ran}R$ 的子集，即 $R[A] \subseteq \text{ran}R$.

例: $R=\{<1,2>,<1,3>,<2,2>,<2,4>,<3,2>\}$, 则

$R\restriction\{1\}=\{<1,2>,<1,3>\}$; $R\restriction\emptyset=\emptyset$; $R\restriction\{2,3\}=\{<2,2>,<2,4>,<3,2>\}$; $R[\{1\}]=\{2,3\}$;$R[\emptyset]=\emptyset$; $R[\{3\}]=\{2\}$;

定义 10 设 R 为 A 上的关系，n 为自然数，则 R 的 n 次幂定义为：

(1) $R^0=\{<x,x>|\ x\in A\}=I_A$

(2) $R^{n+1}=R^n\circ R$

定理 2 设 R 为 A 上的关系，m,n 为自然数，则

(1) $R^m\circ R^n=R^{m+n}$

(2) $(R^m)^n=R^{mn}$

4. 关系的性质

定义 11 设 R 为 A 上的关系，

(1) 若对于每个 $x\in A$, 都有 $<x,x>\in R$, 则称 R 在 A 上是自反的.

(2) 若对于每个 $x\in A$, 都有 $<x,x>\notin R$, 则称 R 在 A 上是反自反的.

(3) 若任意 $x,y\in A$, 当 $<x,y>\in R$ 就有 $<y,x>\in R$, 则称 R 在 A 上是对称的.

(4) 若任意 $x,y\in A$, 当 $<x,y>\in R$ 和 $<y,x>\in R$ 必有 $x=y$, 则称 R 在 A 上是反对称的.

(5) 若任意 $x,y,z\in A$, 当 $<x,y>\in R$ 和 $<y,z>\in R$ 时, 就有 $<x,z>\in R$, 则称 R 是 A 上的传递关系.

注 5 注意“当 $\cdots$, 就有 $\cdots$”, 对应的命题联结词为蕴含，即 $\rightarrow$. 对于上述定义 (3)、(4) 和 (5), 可用蕴含的形式写出。当蕴含命题为真的时候，则为真.

例: 设 $A=\{1,2,3\}$,R_1,R_2,R_3 是 A 上的关系, 其中

$R_1=\{<1,1>,<2,2>\}$,

$R_2=\{<1,3>\}$

$R_3=\{<1,1>,<2,2>,<3,3>,<1,2>\}$

R_1 既不是自反的也不是反自反的, R_2 是反自反的, R_3 是自反的.

例: 设 $A=\{1,2,3\}$,R_1,R_2,R_3,R_4 是 A 上的关系, 其中

$R_1=\{<1,1>,<2,2>\}$,

$R_2=\{<1,1>,<1,2>,<2,1>\}$

$R_3=\{<1,2>,<1,3>\}$

$R_4=\{<1,2>,<2,1>,<1,3>\}$

R_1: 对称和反对称；R_2: 只有对称；R_3： 只有反对称；R_4： 既不对称也不反对称.

例: 设 $A=\{1,2,3\}$,R_1,R_2,R_3 是 A 上的关系, 其中

$R_1=\{<1,1>,<2,2>\}$,

$R_2=\{<1,2>,<2,3>\}$

$R_3=\{<1,3>\}$

R_1 和 R_3 是 A 的传递关系, R_2 不是 A 的传递关系.

定理 3 设 R 为 A 上的关系，则

(1) R 在 A 上自反当且仅当 $I_A \subseteq R$;

(2) R 在 A 上反自反当且仅当 $R \cap I_A = \emptyset$;

(3) R 在 A 上对称当且仅当 $R = R^{-1}$;

(4) R 在 A 上反对称当且仅当 $R \cap R^{-1} \subseteq I_A$;

(5) R 在 A 上传递当且仅当 $R \circ R \subseteq R$.