

课程名称：运筹学（一） 课程类别 ☐公共课 ☐开卷
 ☒专业课 ☒闭卷

所在院系：人工智能与自动化学院 专业及班级：_____ 考试日期：2020.12.5

学 号：_____ 姓 名：_____ 任课教师：张钧

题号	一	二	三	四	五	六	总分
分数							

得分	评卷人

$$\max z = x_1 - x_2 + 3x_3$$

$$s.t. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 1 \\ x_1 + 2x_3 \leq 1 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

(1) 标准化

$$\max z = x_1 - x_2 + 3x_3$$

$$s.t. \begin{cases} \frac{1}{2}x_1 + x_2 + \frac{1}{2}x_3 - x_4 = \frac{1}{2} \\ x_1 + 2x_3 + x_5 = 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

。 。 。 (4分)

(2) 构建初始单纯形表并用单纯形法求解

$c_j \rightarrow$			1	-1	3	0	0	θ
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
-1	x_2	1/2	1/2	1	1/2	-1	0	1
0	x_5	1	1	0	(2)	0	1	1/2
$c_j - z_j$			3/2	0	(7/2)	-1	0	
-1	x_2	1/4	1/4	1	0	-1	-1/4	
3	x_3	1/2	1/2	0	1	0	1/2	
$c_j - z_j$			-1/4	0	0	-1	-7/4	

初始单纯形表。。。 (10分)

调整。。。 (8分)

(3) 得最优解

由于最后一个单纯形表中所有的检验数均已非正，得到原问题最优解， $x_1=0$, $x_2=1/4$, $x_3=1/2$ 。最优值为 $\max Z = 5/4$ 。

。。。 (3分)

得分	评卷人

二、(20分)若题一中再添加 x_1, x_2, x_3 均为整数的约束，请用割平面法进行求解。

解答：

(1) 构建割平面

由题一中的最后一个单纯形表的第2行构建割平面。

$$1/2 = x_1/2 + x_3 + x_5/2$$

$$1/2 - x_1/2 - x_5/2 \leq 0$$

$$-x_1 - x_5 \leq -1$$

。。。 (10分)

(2) 用对偶单纯形法求解

将 $-x_1 - x_5 \leq -1$ 化为等式并添加到最后一个单纯表中。

$c_j \rightarrow$			1	-1	3	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
-1	x_2	1/4	1/4	1	0	-1	-1/4	0
3	x_3	1/2	1/2	0	1	0	1/2	0
0	x_6	(-1)	(-1)	0	0	0	-1	1
$c_j - z_j$			-1/4	0	0	-1	-7/4	0
θ			1/4			-	7/4	
-1	x_2	0	0	1	0	-1	-1/2	1/4
3	x_3	0	0	0	1	0	0	1/2
1	x_1	1	1	0	0	0	1	-1
$c_j - z_j$			0	0	0	-1	-3/2	-1/4

... (8分)

所有变量取值均为整数，所有检验数均非正。得原整数规划最优解， $x_1=1$, $x_2=0, x_3=0$ 。最优值为 $\max Z = 1$ 。

... (2分)

得分	评卷人

三、(20分) 若问题：

$$\begin{aligned} \min z &= -x_1 + x_2 \\ s.t. \quad &\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \geq 3 \\ 3x_1 \leq 1 \\ -x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

的最优解为 $x_1=1/3$, $x_2=5/3$ 。试进行如下分析：

- (1) 请利用互补松弛性求其对偶问题的最优解。
- (2) 假设问题描述了一个生产计划，问题的第2个约束为某设备的加工台

时约束。若可以在市场上以每单位台时 2 个利润单位的价格出租该设备，则是否应该出租，为什么？

解答：

(1) 原问题标准化

$$\begin{aligned} \min z &= -x_1 + x_2 \\ s.t. \quad &\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \geq 3 \\ -3x_1 \geq -1 \\ -x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

原问题的对偶问题为

$$\begin{aligned} \max \omega &= 3y_1 - y_2 + y_3 \\ s.t. \quad &\begin{cases} -y_1 - 3y_2 - y_3 \leq -1 \\ 2y_1 + y_3 \leq 1 \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

。。。 (5 分)

(2) 互补松弛性

由原问题的最优解 $x_1=1/3$, $x_2=5/3$ 以及对偶问题的互补松弛性知，对偶问题在最优解处，2 个约束均为等式约束。

将 $x_1=1/3$, $x_2=5/3$ 带入标准化后的原问题知，原问题在最优解处使得第 1 和第 2 个约束均为等式约束，第 3 个约束为不等式约束。因此，原问题在最优解处只有第 3 个松弛变量非零。由对偶问题的互补松弛性知，对偶问题的最优解的第 3 个变量为 0，也即 $y_3=0$ 。

于是，有，

$$\begin{cases} -y_1 - 3y_2 = -1 \\ 2y_1 = 1 \\ y_3 = 0 \end{cases}$$

解得，对偶问题的最优解为 $y_1 = \frac{1}{2}, y_2 = \frac{1}{6}, y_3 = 0$ 。对偶问题的最优值为 $\max \omega = 4/3$ 。

。。。 (10 分)

(3) 影子价格

对偶问题的最优解中， $y_2 = \frac{1}{6}$ 为原问题第 2 个约束所对应的影子价格。 $y_2 = \frac{1}{6} < 2$ ，因此，应该以 2 个利润单位的价格出租设备台时。

。。。 (5 分)

得分	评卷人

四、(25 分) 某公司的甲、乙两个产地，分别向 A、B、C 三个销地提供产品，请给出总运费最小的运输方案。其中，产量、销量及产地到销地的单位运价如下表所示：

销地 产地	A	B	C	产量
甲	6	4	9	7
乙	1	10	2	4
销量	2	5	4	

解答：是产销平衡的运输问题。

。。。 (3 分)

(1) 伏格尔法求出初始解

	A	B	C ⁽¹⁾	行差
	(6) ⁽³⁾	(2) ⁽⁴⁾	9	2
	⁽¹⁾	10	(2) ⁽¹⁾	1
列差	5	6	⁽⁷⁾	

	6		4		9	
2		5				7
	1		10		2	
0				4		4
2		5		4		

得初始解: $x_{11} = 2, x_{12} = 5, x_{21} = 0, x_{23} = 4, x_{13} = 0, x_{22} = 0$ 。

。。。 (9 分)

(2) 用位势法求检验数

		6		4		9	ui
	2		5		(+2)		0
		1		10		2	-5
	0		(+11)		4		
vi		6		4		7	

。。。 (10 分)

因所有检验数均已非负，因此由伏格尔法得到的初始解即为最优解。

最优解为: $x_{11} = 2, x_{12} = 5, x_{21} = 0, x_{23} = 4, x_{13} = 0, x_{22} = 0$ 。最小运费为: $2 \times 6 + 5 \times 4 + 4 \times 2 = 40$ (运价单位)。

最优运输方案为，分别由甲地给 A, B 两个销地运送 2, 5 个单位的产品；由乙地给销地 C 运送 4 个单位的产品。

[由于基变量 $x_{21} = 0$ ，因此该运输问题有无穷多组最优解。]

。。。 (3 分)

得分	评卷人

五 (10 分). 某厂生产 A,B 两种产品。产品 A, B 的每件工时消耗分别为 4 小时和 6 小时。每天的总工时为 24 小时。每件产品 A, B 的利润分别为 50 元和 70 元。该厂经营目标如下:

P_1 : 利润指标定为每天不低于 2800 元;

P_2 : 产品 A 的产量多于产品 B 的产量。

试建立该厂经营的目标规划模型 (只建模不求解)。

解答:

设 x_1, x_2 分别为产品 A, B 的每天产量, $d_1^+, d_1^-, d_2^+, d_2^-$ 分别为目标 P_1 和 P_2 的正负偏差量。该问题的目标规划模型为,

$$\begin{aligned} & \min P_1(d_1^-) + P_2(d_2^-) \\ & \begin{cases} 50x_1 + 70x_2 + d_1^- - d_1^+ = 2800 \\ 4x_1 + 6x_2 \leq 24 \\ x_1 - x_2 + d_2^- - d_2^+ = 0 \\ x_1, x_2, d_1^-, d_1^+, d_2^-, d_2^+ \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

。。。 (10 分)