# 华中科技大学 2019～2020 学年第一学期
# “ 复变函数与积分变换 ”考试试卷(A 卷)

考试方式：<u>　闭 卷　</u>　考试日期：<u>　2019-12-8　</u>　考试时长：<u>150</u> 分钟

院（系）：________________　　专业班级：________________

学　　号：________________　　姓　　名：________________

一、单项选择题（每题 2 分，共 24 分）.

1. $(1+i)^{i}$=(　　)　（下列 $k$ 均为任意整数）

A． $e^{-\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)}e^{i\ln 2}$，　B． $e^{\frac{\pi}{4}+2k\pi}e^{i\ln 2}$，　C． $e^{-\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)}e^{i\frac{1}{2}\ln 2}$，　D． $e^{\frac{\pi}{4}+2k\pi}e^{i\frac{1}{2}\ln 2}$。

2. $z=2\left(\sin\frac{2}{3}\pi-i\cos\frac{2}{3}\pi\right)$的指数表示为(　　)

A . $2e^{-\frac{2}{3}\pi i}$，　B . $2e^{-\frac{1}{6}\pi i}$，　C . $2e^{\frac{2}{3}\pi i}$，　D． $2e^{\frac{1}{6}\pi i}$。

3. 下列命题中正确的是（　　）

A．如果 $f'(z_0)$ 存在，那么 $f(z)$ 在 $z_0$ 解析。

B. 如果 $z_0$ 为 $f(z)$ 的奇点，那么 $f(z)$ 在 $z_0$ 不可导。

C .如果 $z_0$ 为 $f(z)$ 和 $g(z)$ 的解析点，那么 $z_0$ 也是 $f(z)+g(z)$ 和 $\frac{f(z)}{g(z)}$ 的解析点。

D .如果 $f(z)$ 在点 $z_0$ 解析，那么 $f'(z)$ 在点 $z_0$ 也解析。

4. 设函数 $f(z)=u+iv$ 在区域 D 内解析，下列等式中错误的是(　　)

A. $f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}$，　B. $f'(z)=\frac{\partial v}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial x}$，

C. $f'(z)=\frac{\partial u}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial y}$，　D. $f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}$。

5. 设 $f(z)$ 在闭路 $C$ 上及其内部解析，$z_0$ 在 $C$ 的内部，则 $\oint_c \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz=$（　　）

A．$f'(z_0)\oint_c \frac{1}{(z-z_0)^2}dz$，　　B．$\oint_c \frac{f'(z)}{z-z_0}dz$，

C．$\frac{f'(z_0)}{2!}\oint_c \frac{1}{z-z_0}dz$，　　D．$\oint_c \frac{f(z)}{z-z_0}dz$。

6. 设 $C$ 为正向圆周：$|z|=r>1$，则 $\oint_c \frac{\sin \pi z}{(z-1)^4}dz=$(　　)

A．$\frac{\pi^4 i}{6}$，　　B．$\frac{\pi^4 i}{3}$，　　C．$-3\pi^2 i$，　　D．0　。

7. 幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n!}{n^n}z^n$ 的收敛半径是（　　）

A．1，　　B．$+\infty$，　　C．$\frac{1}{e}$，　　D．$e$。

8. 函数 $f(z)=e^{\frac{1}{z+2}}\cdot\ln(1+i+z^2)$ 在点 $z=0$ 展开成 Taylor 级数的收敛半径为(　　)

A．2，　　B．$\sqrt{2}$，　　C．$\sqrt[4]{2}$，　　D．以上都不对。

9. 如果 $z=a$ 分别为 $f(z)$ 和 $g(z)$ 的本性奇点和 n 阶极点，那么 $z=a$ 为 $f(z)g(z)$ 的(　　)

A．可去奇点，　　B．本性奇点，　　C．n 阶极点，　　D．非孤立奇点。

10. 映射 $w=e^{iz^2}$ 在点 $z=i$ 处的伸缩率为（　　）

A．1，　　B．2，　　C．$\frac{1}{e}$，　　D．$e$。

11. 设 $f(t)=\sin t\cos t$，则 $f(t)$ 的 Fourier 变换 $F(f(t))$ 为(　　)

A．$\frac{j}{4}[\delta(2+\omega)+\delta(2-\omega)]$，　　B．$\frac{j}{4}[\delta(2+\omega)-\delta(2-\omega)]$，

C．$\frac{j\pi}{2}[\delta(2+\omega)+\delta(2-\omega)]$，　　D．$\frac{j\pi}{2}[\delta(2+\omega)-\delta(2-\omega)]$。

12. 函数 $F(\omega)=1+\delta(\omega+a)\quad(a\in\mathbf{R})$ 的 Fourier 逆变换 $f(t)=F^{-1}(F(\omega))$ 为(　　)

A． $\delta(t)+e^{-jta}$，　　　　B． $\delta(t)+e^{jta}$，

C． $\delta(t)+\dfrac{1}{2\pi}e^{-jta}$，　　　　D． $\delta(t)+\dfrac{1}{2\pi}e^{jta}$　。

二、(*12 分*) 已知 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 为复平面上的解析函数，且满足

$$u(x,y)-v(x,y)=e^{-y}(\sin x+\cos x)$$，求函数 $f(z)$。

三、(*12 分*) 把函数 $f(z)=\dfrac{1}{(z+1)(z-1)^2}$ 在下列圆环域内展开为 Laurent 级数：

（1） $0<|z+1|<2$；（2） $2<|z-1|<+\infty$。

四、计算下列积分(*每题 5 分，共 10 分*).

**1．** $\oint_{|z|=2}\dfrac{e^z}{z(1-z)^2}dz$，　　　2． $\oint_{|z|=2}\dfrac{z^3}{1+z}e^{\frac{1}{z}}dz$。

五、计算下列积分(*每题 5 分，共 10 分*).

1． $\oint_{|z|=2}\dfrac{dz}{z^3(z^{10}-2)}$，　　　2． $\int_0^{+\infty}\dfrac{x\sin x}{x^2+1}dx$。

六、(6 分) 求区域 $D=\left\{z:|z|>1,0<\arg z<\frac{5}{4}\pi\right\}$ 在映射 $w=\dfrac{\left(\frac{1}{\left(\sqrt[5]{z}\right)^2}\right)^2+1}{\left(\frac{1}{\left(\sqrt[5]{z}\right)^2}\right)^2-1}$ 下的像。(**答题过程需用图形表示**)

七、(10 分) 求一共形映射 $w=f(z)$, 将 $z$ 平面上的区域 $D=\{z:|z-i|>1,\operatorname{Re}z>0,\operatorname{Im}z>0\}$ 映射到 $w$ 平面的上半平面。(**答题过程需用图形表示**)

八、(10 分) 利用 Laplace 变换求解下面常微分方程：

$x''(t)-2x'(t)+2x(t)=2-2t$，且 $x(0)=1$， $x'(0)=0$。

九、(6 分) 证明：若函数 $f(z)$ 在 $|z|>1$ 内解析，且满足 $\lim\limits_{z\to\infty}zf(z)=a$，则对于任何正数 $r>1$，积分 $\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_r}f(z)dz=a$，其中 $C_r$ 为正向圆周：$|z|=r$。

2019《复变函数与积分变换》试题 A

答案

一、选择题答案

CDDCB BDCBB DC

二、解答

$\because\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{z})=\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+\boldsymbol{iv}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 解析 $\therefore\ \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$

$\because \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})-\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{y}}(\sin\boldsymbol{x}+\cos\boldsymbol{x})$

两边对 $x$ 取偏导数 $\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial x}=\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{y}}(\cos\boldsymbol{x}-\sin\boldsymbol{x})$

两边对 $y$ 取偏导数 $\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial y}=-\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{y}}(\cos\boldsymbol{x}+\sin\boldsymbol{x})$

由(1)、(2)及 C-R 方程得: $\frac{\partial v}{\partial x}=\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{y}}\sin\boldsymbol{x}\quad \frac{\partial u}{\partial x}=\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{y}}\cos\boldsymbol{x}$

$\therefore \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\int \boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{y}}\sin\boldsymbol{x}\boldsymbol{dx}+\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{y})=-\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{y}}\cos\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{y})$

$\frac{\partial v}{\partial y}=\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{y}}\cos\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\varphi}'(\boldsymbol{y})\therefore \boldsymbol{\varphi}'(\boldsymbol{y})=0\ \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{y})=\boldsymbol{C}$

$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=-\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{y}}\cos\boldsymbol{x}+\boldsymbol{C}$

$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{y}}(\sin\boldsymbol{x}+\cos\boldsymbol{x})+\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{y}}\sin\boldsymbol{x}+\boldsymbol{C}$

$\therefore \boldsymbol{f}(\boldsymbol{z})=\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{y}}\sin\boldsymbol{x}+\boldsymbol{C}+\boldsymbol{i}(-\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{y}}\cos\boldsymbol{x}+\boldsymbol{C})$

三、解答: $0<|\boldsymbol{z}+1|<2$

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z})=\frac{1}{(\boldsymbol{z}+1)(\boldsymbol{z}-1)^2}=\frac{-1}{\boldsymbol{z}+1}\cdot\left(\frac{1}{\boldsymbol{z}-1}\right)'$$

$$=\frac{-1}{\boldsymbol{z}+1}\cdot-\left(\frac{1}{2-(\boldsymbol{z}+1)}\right)'$$

$$=\frac{-1}{\boldsymbol{z}+1}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{1-\frac{\boldsymbol{z}+1}{2}}\right)'$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\boldsymbol{z}+1}\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\boldsymbol{z}+1}{2}\right)^n\right)'$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z+1}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cdot n(z+1)^{n-1}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}\cdot n(z+1)^{n-2}$$

(1) $2<|z-1|<\infty$

$$f(z)=\frac{1}{(z+1)(z-1)^2}=\frac{1}{(z-1)^2}\cdot\frac{1}{2+z-1}$$

$$=\frac{1}{(z-1)^2}\cdot\frac{1}{z-1}\left(\frac{1}{1+\frac{2}{z-1}}\right)$$

$$=\frac{1}{(z-1)^3}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{2}{z-1}\right)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2^n\left(\frac{1}{z-1}\right)^{n+3}$$

四、解答:

(1) $\oint_{|z|=2}\frac{e^z}{z(1-z)^2}dz=2\pi i\left[\mathrm{Res}\left(\frac{e^z}{z(1-z)^2},0\right)+\mathrm{Res}(\frac{e^z}{z(1-z)^2},1)\right]$

$z=0$ 为$\frac{e^z}{z(1-z)^2}$的简单极点 $\therefore \mathrm{Res}\left(\frac{e^z}{z(1-z)^2},0\right)=\frac{e^z}{(1-z)^2}|_{z=0}=1$

$z=1$ 为$\frac{e^z}{z(1-z)^2}$的二阶极点 $\therefore \mathrm{Res}\left(\frac{e^z}{z(1-z)^2},1\right)=\lim_{z\to1}(\frac{e^z}{z})'=0$

$\oint_{|z|=2}\frac{e^z}{z(1-z)^2}dz=2\pi i[1+0]=2\pi i$

(2) $\oint_{|z|=2}\frac{z^3}{z+1}e^{\frac{1}{z}}dz=2\pi i\left[\mathrm{Res}\left(\frac{z^3}{z+1}e^{\frac{1}{z}},-1\right)+\mathrm{Res}(\frac{z^3}{z+1}e^{\frac{1}{z}},0)\right]$

$z=-1$ 为函数的一阶极点 $z=0$ 为函数的本性奇点

$\mathrm{Res}\left(\frac{z^3}{z+1}e^{\frac{1}{z}},-1\right)=z^3e^{\frac{1}{z}}|_{z=-1}=-e^{-1}$

考虑$\frac{z^3}{z+1}e^{\frac{1}{z}}$在 $0<|z|<1$ 内的 Laurent 展开

$$\frac{z^3}{z+1}e^{\frac{1}{z}}=z^3(1-z+z^2-z^3+z^4\cdots)(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{3!z^3}\cdots)$$

$$\therefore Res\left(\frac{z^3}{z+1}e^{\frac{1}{z}},0\right)=e^{-1}-\frac{1}{3}$$

从而$\oint_{|z|=2}\frac{z^3}{z+1}e^{\frac{1}{z}}dz=2\pi i(-e^{-1}+e^{-1}-\frac{1}{3})=-\frac{2\pi i}{3}$

另外也可以考虑在∞的留数

$\oint_{|z|=2} \frac{z^3}{z+1} e^{\frac{1}{z}} dz = -2\pi i \left[ \mathrm{Res}(\frac{z^3}{z+1} e^{\frac{1}{z}}, \infty) \right]$

分

$\frac{z^3}{z+1} e^{\frac{1}{z}}$在 $1 < |z| < \infty$内的 Laurent 展开为

$$z^3 \cdot \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{z}} \cdot e^{\frac{1}{z}} = z^2 \left(1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} + \cdots\right)\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} \cdots\right)$$

$$= (z^2 - z + 1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \cdots)(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} \cdots)$$

$\mathrm{Res}\left(\frac{z^3}{z+1} e^{\frac{1}{z}}, \infty\right) = \frac{1}{3}$

$\therefore \oint_{|z|=2} \frac{z^3}{z+1} e^{\frac{1}{z}} dz = -2\pi i \cdot \frac{1}{3} = -\frac{2\pi i}{3}$

五、

(1) 解答 1:

$\oint_{|z|=2} \frac{1}{z^3(z^{10}-2)} dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{11} \mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^3(z^{10}-2)}, z_k\right) = -2\pi i \mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^3(z^{10}-2)}, \infty\right)$

$z_k$为函数在$|z| = 2$ 内的奇点

在 $z = \infty$的去心邻域 $R < |z| < \infty$内($R > 2$)

$\frac{1}{z^3(z^{10}-2)} = \frac{1}{z^3} \cdot \frac{1}{z^{10}} \left(\frac{1}{1-\frac{2}{z^{10}}}\right) = \frac{1}{z^{13}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{2}{z^{10}})^n$

$\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^3(z^{10}-2)}, \infty\right) = 0$

所以原积分等于 0

解答 2:

$\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^3(z^{10}-2)}, \infty\right) = \mathrm{Res}\left(\frac{1}{\frac{1}{\zeta^3}\left(\frac{1}{\zeta^{10}-2}\right)} \cdot \left(-\frac{1}{\zeta^2}\right), 0\right) = \mathrm{Res}(-\frac{\zeta^{11}}{1-2\zeta^{10}}, 0)$

由于$\zeta=0$ 为函数$-\frac{\zeta^{11}}{1-2\zeta^{10}}$的可去奇点 $\therefore \operatorname{Res}\left(-\frac{\zeta^{11}}{1-2\zeta^{10}},0\right)=0$

所以原积分等于 0

(2)解答:

$\int_0^{+\infty}\frac{\boldsymbol{x}\sin\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^2+1}\boldsymbol{dx}=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\boldsymbol{x}\sin\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^2+1}dx=\frac{1}{2}\operatorname{Im}(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\boldsymbol{xe^{ix}}}{\boldsymbol{x}^2+1})\boldsymbol{dx}$

令 $I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\boldsymbol{xe^{ix}}}{\boldsymbol{x}^2+1}dx$ $\boldsymbol{R(z)}=\frac{\boldsymbol{z}}{\boldsymbol{z}^2+1}$ 则 $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{i}$ 为 $\boldsymbol{R(z)}$在上半平面内的奇点，且为一阶极点

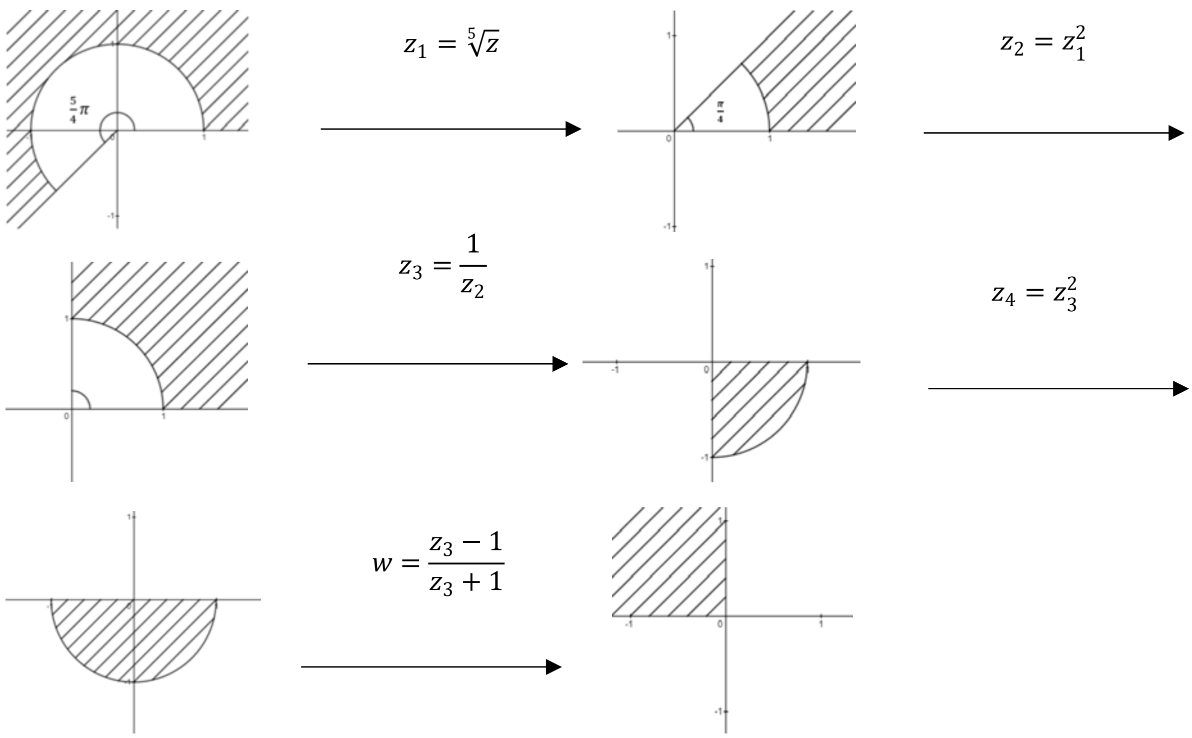
$$\therefore \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\boldsymbol{xe^{ix}}}{\boldsymbol{x}^2+1}\boldsymbol{dx}=2\boldsymbol{\pi i}\cdot\operatorname{Res}(\boldsymbol{R(z)e^{iz}},\boldsymbol{i})$$

$$=2\boldsymbol{\pi i}\cdot\lim_{\boldsymbol{z}\to\boldsymbol{i}}(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{i})\frac{\boldsymbol{ze^{iz}}}{(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{i})(\boldsymbol{z}+\boldsymbol{i})}$$

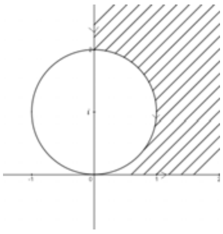
$$=2\boldsymbol{\pi i}\cdot\frac{\boldsymbol{e}^{-1}}{2}=\boldsymbol{\pi e}^{-1}\boldsymbol{i}$$

所以原积分$=\frac{1}{2}\boldsymbol{\pi e}^{-1}$

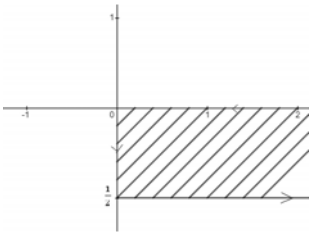
六、解答



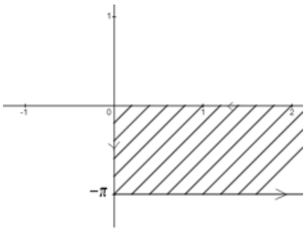
七、解答 1:



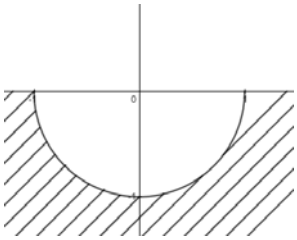
$$z_1=\frac{1}{z}$$



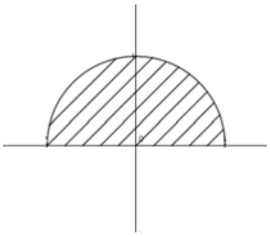
$$z_2=2\pi z_1$$



$$z_3=e^{z_2}$$

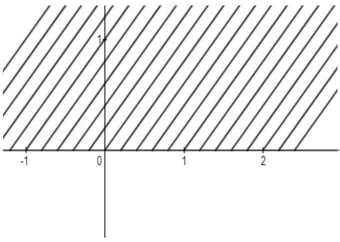


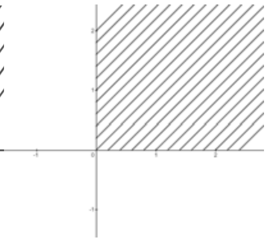
$$z_4=\frac{1}{z_3}$$



$$z_5=-\frac{z_4-1}{z_4+1}$$

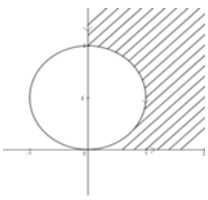
$$w=z_5^2$$



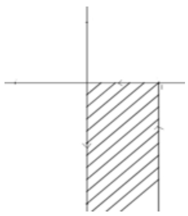


$$\therefore w=-\left(\frac{e^{-\frac{2\pi}{z}}+1}{e^{-\frac{2\pi}{z}}-1}\right)^2$$

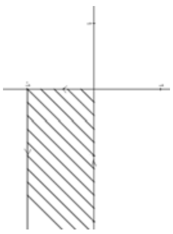
解答 2:



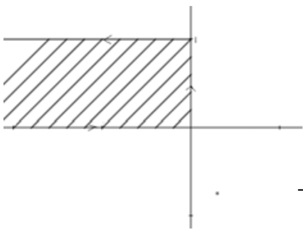
$$z_1=\frac{z-2i}{z}$$



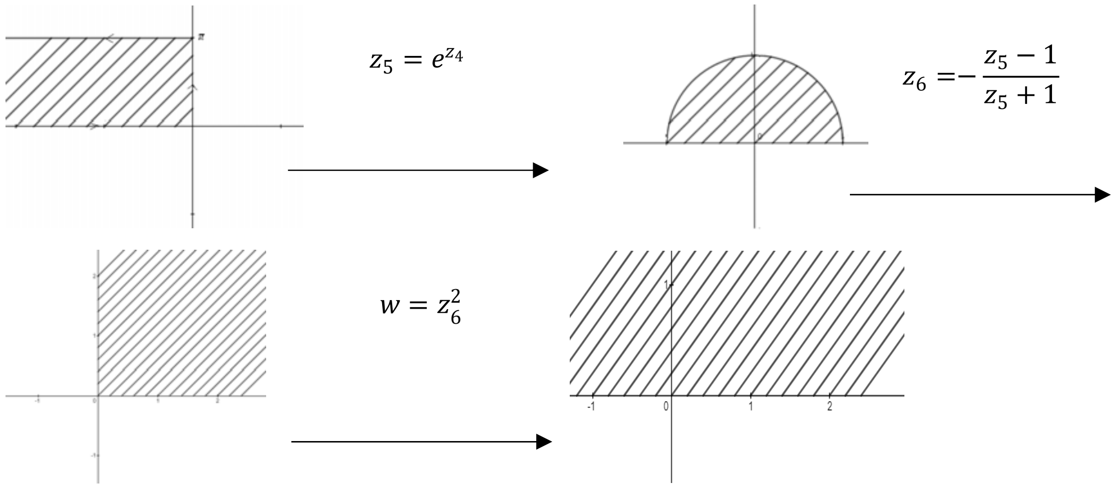
$$z_2=z_1-1$$



$$z_3=-iz_2$$



$$z_4=\pi z_3$$




$\therefore w=-\left(\frac{e^{-i\pi\left(\frac{z-2i}{z}-1\right)}+1}{e^{-i\pi\left(\frac{z-2i}{z}-1\right)}-1}\right)^2$

八、解答:

$x''(t)-2x'(t)+2x(t)=2-2t \quad x(0)=1 \;\; x'(0)=0$

两边取 Laplace 变换得

$s^2x(s)-sx(0)-x'(0)-2(sx(s)-x(0))+2x(s)=\frac{2}{s}-\frac{2}{s^2}$

代入初值得

$(s^2-2s+2)x(s)=\frac{2(s-1)}{s^2}+s-2$

$$x(s)=\frac{2(s-1)}{s^2(s^2-2s+2)}+\frac{s-2}{s^2-2s+2}$$
$$=\frac{1}{(s-1)^2+1}-\frac{1}{s^2}+\frac{s-1}{(s-1)^2+1}-\frac{1}{(s-1)^2+1}$$
$$=\frac{s-1}{(s-1)^2+1}-\frac{1}{s^2}$$

两边取 Laplace 逆变换得

$$x(t)=\mathcal{L}^{-1}(x(s))$$
$$=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s-1}{(s-1)^2+1}\right)-\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right)$$
$$=e^t\cos t-t$$

九、解答:

$\because \lim\limits_{z\to\infty} zf(z) = a$

$\therefore \forall \varepsilon > 0, \exists R > 0$ 当$|z| > R$ 时，$|zf(z) - a| < \varepsilon$

对任何$R^{'} > R$，由 Cauchy 基本定理

$r > 1$，$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_r} f(z)dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_{R^{'}}} f(z)dz$

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_{R^{'}}} f(z)dz - a\right| = \left|\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_{R^{'}}} \frac{zf(z) - a}{z} dz\right|$$

$$\le \frac{1}{2\pi}\oint_{C_{R^{'}}} \frac{|zf(z) - a|}{|z|} |dz|$$

$$< \frac{1}{2\pi} \cdot \varepsilon \cdot \frac{1}{R^{'}} \cdot 2\pi R^{'} = \varepsilon$$

由$\varepsilon$得任意性，$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_r} f(z)dz = a$