第二章

2.1 判断下列序列是否是周期序列。若是，请确定它的最小周期。

（1）x(n)=Acos($\frac{5\pi}{8}n+\frac{\pi}{6}$)

（2）x(n)=$e^{j(\frac{n}{8}-\pi)}$

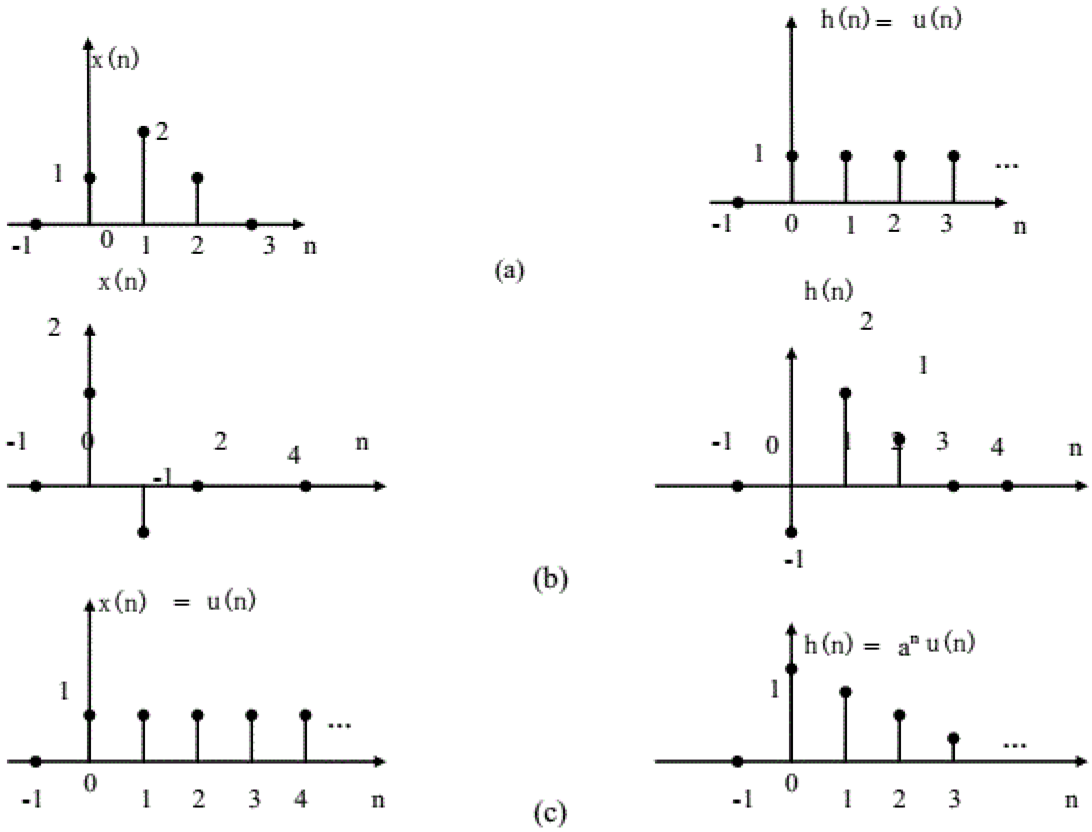
（3）x(n)=Asin($\frac{3\pi}{4}n+\frac{\pi}{3}$)

解　(1)对照正弦型序列的一般公式 x(n)=Acos($\omega n+\varphi$)，得出$\omega=\frac{5\pi}{8}$。因此$\frac{2\pi}{\omega}=\frac{16}{5}$是有理数，所以是周期序列。最小周期等于 N=$\frac{16}{5}k=16(k取5)$。

（2）对照复指数序列的一般公式 x(n)=exp[$\sigma+j\omega$]n,得出$\omega=\frac{1}{8}$。因此$\frac{2\pi}{\omega}=16\pi$是无理数，所以不是周期序列。

（3）对照正弦型序列的一般公式 x(n)=Acos($\omega n+\varphi$)，又 x(n)=Asin($\frac{3\pi}{4}n+\frac{\pi}{3}$)＝Acos($\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{4}n-\frac{\pi}{3}$)＝Acos($\frac{3\pi}{4}n-\frac{1}{6}$)，得出$\omega=\frac{3\pi}{4}$。因此$\frac{2\pi}{\omega}=\frac{8}{3}$是有理数，所以是周期序列。最小周期等于 N=$\frac{8}{3}k=8(k取3)$

2.2 在图 2.2 中，x(n)和 h(n)分别是线性非移变系统的输入和单位取样响应。计算并列的 x(n)和 h(n)的线性卷积以得到系统的输出 y(n)，并画出 y(n)的图形。



解 利用线性卷积公式

$$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)h(n-k)$$

按照折叠、移位、相乘、相加、的作图方法，计算 y(n)的每一个取样值。

(a) y(0)=x(0)h(0)=1

y(1)=x(0)h(1)+x(1)h(0)=3

y(n)=x(0)h(n)+x(1)h(n-1)+x(2)h(n-2)=4, n≥2

(b) x(n)=2δ(n)-δ(n-1)

h(n)=-δ(n)+2δ(n-1)+ δ(n-2)

y(n)=-2δ(n)+5δ(n-1)= δ(n-3)

(c) $y(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}u(k)a^{n-k}u(n-k)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a^{n-k}=\frac{1-a^{n+1}}{1-a}u(n)$

图 1.2 是 y(n) 的图形。

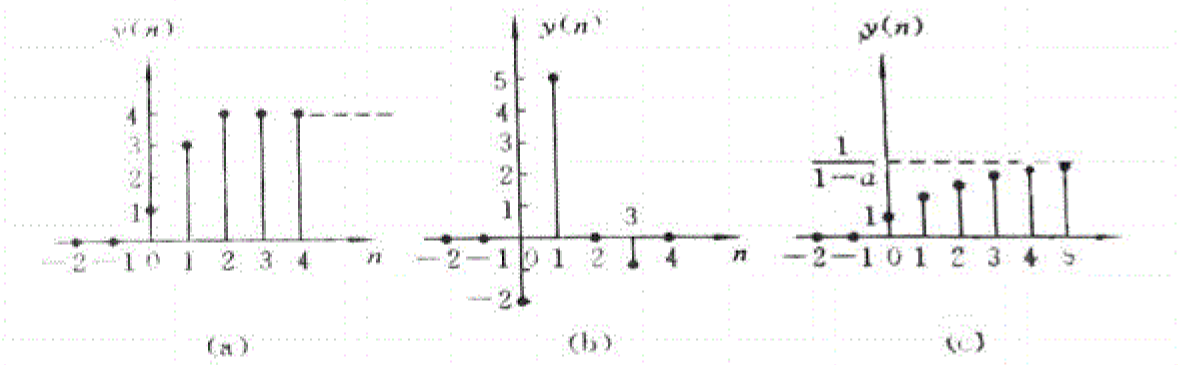


图 1.2

2.3 计算线性线性卷积

(1) y(n)=u(n)*u(n)

(2) $y(n)=\lambda^n u(n)*u(n)$

解：(1) $y(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}u(k)u(n-k)$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}u(k)u(n-k)=(n+1),\ n\geq 0$$

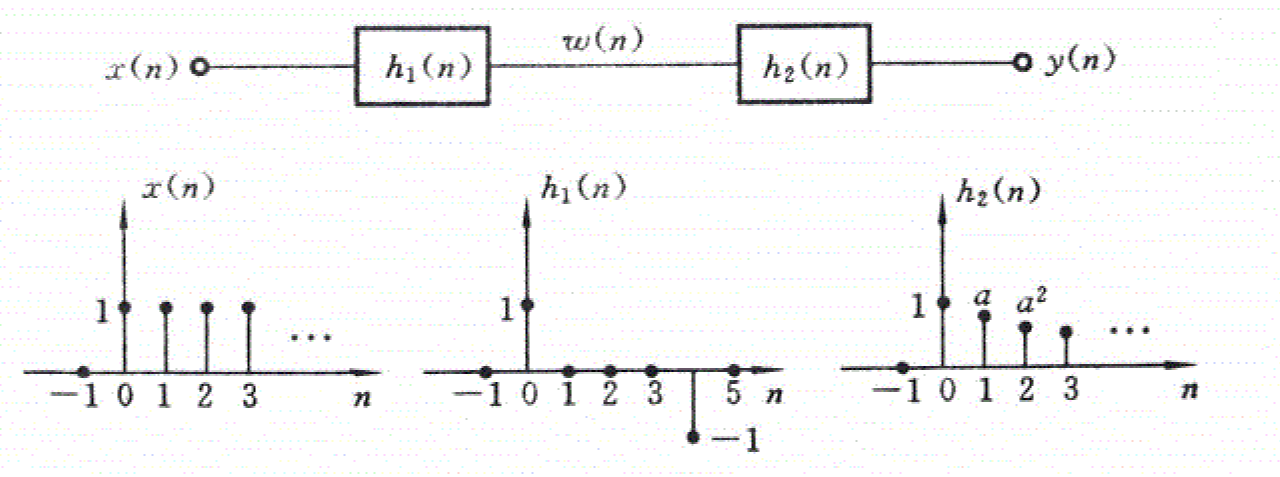
即 y(n)=(n+1)u(n)

(2) $y(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\lambda^k u(k)u(n-k)$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^{k}u(k)u(n-k)=\frac{1-\lambda^{n+1}}{1-\lambda},n\geqslant 0$$

即 $y(n)=\frac{1-\lambda^{n+1}}{1-\lambda}u(n)$

2.4 图P2.4所示的是单位取样响应分别为 $h_1(n)$ 和 $h_2(n)$ 的两个线性非移变系统的级联，已知 $x(n)=u(n)$，$h_1(n)=\delta(n)-\delta(n-4)$，$h_2(n)=a^n u(n)$，$|a|<1$，求系统的输出 $y(n)$.



解 $\omega(n)=x(n)*h_1(n)$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}u(k)[\delta(n-k)-\delta(n-k-4)]$$

$$=u(n)-u(n-4)$$

$y(n)=\omega(n)*h_2(n)$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a^{k}u(k)[u(n-k)-u(n-k-4)]$$

$$=\sum_{k=n-3}^{\infty}a^{k},n\geqslant 3$$

2.5 已知一个线性非移变系统的单位取样响应为 $h(n)=a^{-n}u(-n)$，$0<a<1$ 用直接计算线性卷积的方法，求系统的单位阶跃响应。

2.6 试证明线性卷积满足交换率、结合率和加法分配率。

证明　（1）交换律

$$X(n) * y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)y(n-k)$$

令 k=n-t,所以 t=n-k,又-∞<k<∞,所以-∞<t<∞,因此线性卷积公式变成

`

$$x(n) * y(n) = \sum_{t=-\infty}^{\infty} x(n-t)y[n-(n-t)]$$

$$= \sum_{t=-\infty}^{\infty} x(n-t)y(t) = y(n) * x(n)$$

交换律得证.

(2)结合律

$$[x(n) * y(n)] * z(n)$$

$$= [\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)y(n-k)] * z(n)$$

$$= \sum_{t=-\infty}^{\infty} [\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)y(t-k)] z(n-t)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \sum_{t=-\infty}^{\infty} y(t-k)z(n-t)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \sum_{m} y(m)z(n-k-m)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)[y(n-k) * z(n-k)]$$

$$= x(n) * [y(n) * z(n)]$$

结合律得证.

(3)加法分配律

$$x(n) * [y(n) + z(n)]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)[y(n-k) + z(n-k)]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)y(n-k) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)z(n-k)$$

$$= x(n) * y(n) + x(n) * z(n)$$

加法分配律得证.

2.7 判断下列系统是否为线性系统、非线性系统、稳定系统、因果系统。并加以证明

(1) $y(n)=2x(n)+3$　　　　(2) $y(n)=x(n)\sin[\frac{2\pi}{3}n+\frac{\pi}{6}]$

(3) $y(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)$　　　　(4) $y(n)=\sum_{k=n_0}^{n}x(k)$

(5) $y(n)=x(n)g(n)$

解　(1) 设 $y_1(n)=2x_1(n)+3$, $y_2(n)=2x_2(n)+3$, 由于

$$y(n)=2[x_1(n)+x_2(n)]+3$$

$$\neq y_1(n)+y_2(n)$$

$$=2[x_1(n)+x_2(n)]+6$$

故系统不是线性系统。

由于 $y(n-k)=2x(n-k)+3$, $T[x(n-k)]=2x(n-k)+3$, 因而

$$y(n-k)=T[x(n-k)]$$

故该系统是非移变系统。

设 $|x(n)|\leqslant M$，则有

$$|y(n)|=|2x(n)+3|\leqslant|2M+3|<\infty$$

故该系统是稳定系统。

因 $y(n)$ 只取决于现在和过去的输入 $x(n)$，不取决于未来的输入，故该系统是因果系统。

(2) 设　$y_1(n)=ax_1(n)\sin[\frac{2\pi}{3}n+\frac{\pi}{6}]$

$$y_2(n)=bx_2(n)\sin[\frac{2\pi}{3}n+\frac{\pi}{6}]$$

由于　$y(n)=T[ax_1(n)+bx_2(n)]$

$$=[ax_1(n)+bx_2(n)]\sin[\frac{2\pi}{3}n+\frac{\pi}{6}]$$

$$=ax_1(n)\sin[\frac{2\pi}{3}n+\frac{\pi}{6}]+bx_2(n)\sin[\frac{2\pi}{3}n+\frac{\pi}{6}]$$

$$=ay_1(n)+by_2(n)$$

故该系统是线性系统。

由于　$y(n-k)=x(n-k)\sin[\frac{2\pi}{3}(n-k)+\frac{\pi}{6}]$

$$T[x(n-k)]=x(n-k)\sin[\frac{2\pi}{3}n+\frac{\pi}{6}]$$

因而有　$T[x(n-k)]\neq y(n-k)$

帮该系统是移变系统。

设 $|x(n)|\leqslant M$，则有

$$|y(n)|=|x(n)\sin[\frac{2\pi}{3}(n-k)+\frac{\pi}{6}]|$$

$$=|x(n)||\sin[\frac{2\pi}{3}(n-k)+\frac{\pi}{6}]|$$

$$\leqslant M\left|\sin\left[\frac{2\pi}{3}(n-k)+\frac{\pi}{6}\right]\right|\leqslant M$$

故系统是稳定系统。

因 y(n)只取决于现在和过去的输入 x(n),不取决于未来的输入，故该系统是因果系统。

（3）设 $y_1(n)=\sum_{k=-\infty}^{n}x_1(k)$ ，$y_2(n)=\sum_{k=-\infty}^{n}x_2(k)$，由于

$$y(n)=T[ax_1(n)+bx_2(n)]=\sum_{k=-\infty}^{n}[ax_1(k)+bx_2(k)]$$

$$=a\sum_{k=-\infty}^{n}x_1(k)+b\sum_{k=-\infty}^{n}x_2(k)=ay_1(n)+by_2(n)$$

故该系统是线性系统。

因 $$y(n-k)=\sum_{k=-\infty}^{n-t}x(k)=\sum_{m=-\infty}^{n}x(m-t)$$

$$=T[x(n-t)]$$

所以该系统是非移变系统。

设 $x(n)=M<\infty$ $y(n)=\sum_{k=-\infty}^{n}M=\infty$，所以该系统是不稳定系统。

因y(n)只取决于现在和过去的输入x(n)，不取决于未来的输入，故该系统是因果系统。

（4）设 $y_1(n)=\sum_{k=n_0}^{n}x_1(k)$ ，$y_2(n)=\sum_{k=n_0}^{n}x_2(k)$，由于

$$y(n)=T[ax_1(n)+bx_2(n)]=\sum_{k=n_0}^{n}[ax_1(k)+bx_2(k)]$$

$$=a\sum_{k=n_0}^{n}x_1(k)+b\sum_{k=n_0}^{n}x_2(k)=ay_1(n)+by_2(n)$$

故该系统是线性系统。

因 $$y(n-k)=\sum_{k=n_0}^{n-t}x(k)=\sum_{m=n_0+t}^{n}x(m-t)$$

$$\neq T[x(n-t)]=\sum_{k=n_0}^{n}x(m-t)$$

所以该系统是移变系统。

设 $x(n)=M$,则 $\lim_{n\to\infty}y(n)=\lim_{n\to\infty}(n-n_0)M=\infty$,所以该系统不是稳定系统。

显而易见，若 $n\geqslant n_0$。则该系统是因果系统；若 $n<n_0$。则该因果系统是非因果系统。

(5)设 $y_1(n)=x_1(n)g(n)$, $y_2(n)=x_2(n)g(n)$,由于

$y(n)=T[ax_1(n)+bx_2(n)]=(ax_1(n)+bx_2(n))g(n)$

$=ax_1(n)g(n)+b_2(n)=ay_1(n)+by_2(n)$

故系统是线性系统。
因 $y(n-k)=x(n-k)$,而
$T[x(n-k)]=x(n-k)g(n)\neq y(n-k)$
所以系统是移变系统。
设 $|x(n)|\leqslant M<\infty$,则有
$|y(n)|=|x(n)g(n)|=M|g(n)|$
所以当 g(n) 有限时该系统是稳定系统。
因 y(n) 只取决于现在和过去的输入 x(n)，不取决于本来的输入，故该系统是因果系统。

2.8 讨论下列各线性非移变系统的因果性和稳定性

(1) $h(n)=2^n u(-n)$

(2) $h(n)=-a^n u(-n-1)$

(3) $h(n)=\delta(n+n_0)$，$n_0\geqslant 0$

(4) $h(n)=(\frac{1}{2})^n u(n)$

(5) $h(n)=\frac{1}{n}u(n)$

(6) $h(n)=2^n R_n u(n)$

解 (1) 因为在 n<0 时，$h(n)=2^n\neq 0$,故该系统不是因果系统。

因为 $S=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|=\sum_{n=0}^{\infty}|2^n|=1<\infty$，故该系统是稳定系统。

(2) 因为在 n<0 时，$h(n)\neq 0$，故该系统不是因果系统。

因为 $S=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|=\sum_{n=-\infty}^{-1}|a^n|=\sum_{n=\infty}a^{-n}$，故该系统只有在 $|a|>1$ 时才是稳定系统。

(3) 因为在 n<0 时，$h(n)\neq 0$，故该系统不是因果系统。

因为 $S=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|\delta(n+n_0)|=1<\infty$，故该系统是稳定系统。

(4) 因为在 n<0 时，h(n)=0，故该系统是因果系统 。

因为 $S=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|=\sum_{n=0}^{\infty}|(\frac{1}{2})^n|<\infty$，故该系统是稳定系统。

(5) 因为在 n<0 时，$h(n)=\frac{1}{n}u(n)=0$，故该系统是因果系统 。

因为 $S=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|\frac{1}{n}u(n)|=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n}=\infty$，故该系统不是稳定系统。

(6) 因为在 n<0 时，h(n)=0，故该系统是因果系统 。

因为 $S=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|=\sum_{n=0}^{N-1}|2^n|=2^N-1<\infty$，故该系统是稳定系统。

2.9 已知 $y(n)-2\cos\beta\, y(n-1)+y(n-2)=0$, 且 $y(0)=0, y(1)=1$, 求证 $y(n)=\dfrac{\sin(n\beta)}{\sin\beta}$

证明 题给齐次差分方程的特征方程为

$$\alpha^2-2\cos\beta\cdot\alpha+1=0$$

由特征方程求得特征根

$$\alpha_1=\cos\beta+j\sin\beta=e^{j\beta},\ \alpha_2=\cos\beta-j\sin\beta=e^{-j\beta}$$

齐次差分方程的通解为

$$y(n)=c_1\alpha_1^{\ n}+c_2\alpha_2^{\ n}=c_1e^{j\beta n}+c_2e^{-j\beta n}$$

代入初始条件得

$$y(0)=c_1+c_2=0$$

$$y(1)=c_1e^{j\beta n}+c_2e^{-j\beta n}=1$$

由上两式得到

$$c_1=\frac{1}{e^{j\beta n}-e^{-j\beta n}}=\frac{1}{2\sin\beta},\quad c_2=-c_1=-\frac{1}{2\sin\beta}$$

将 c_1 和 c_2 代入通解公式，最后得到

$$y(n)=c_1e^{j\beta n}+c_2e^{-j\beta n}=\frac{1}{2\sin\beta}(e^{j\beta n}+e^{-j\beta n})=\frac{\sin(\beta n)}{\sin\beta}$$

2.10 已知 $y(n)+2\alpha y(n-1)+\beta(n-2)=0$, 且 $y(0)=0, y(1)=3, y(2)=6, y(3)=36$, 求 $y(n)$

解 首先由初始条件求出方程中得系数 a 和 b

由 $$\begin{cases} y(2)+2ay(1)+by(0)=6+6a=0 \\ y(3)+2ay(2)+by(1)=36+12a+3b=0 \end{cases}$$

可求出 $a=-1, b=-8$

于是原方程为

$$y(n)-2y(n-1)-iy(n-2)=0$$

由特征方程 $\alpha^2-2\alpha-8=0$ 求得特征根

$$\alpha_1=4,\ \alpha_2=-2$$

齐次差分方程得通解为

$$y(n)=c_1\alpha_1^{\ n}+c_2\alpha_2^{\ n}=c_14^n+c_2(-2^n)$$

代入初始条件得

$$y(n)=c_1\alpha_1+c_2\alpha_2=4\alpha_1+2\alpha_2=3$$

由上二式得到

$$c_1=\frac{1}{2}，c_2=-\frac{1}{2}$$

将 c_1 和 c_2 代入通解公式，最后得到

$$y(n)=c_1\alpha_1{}^n+c_2\alpha_2{}^n=\frac{1}{2}[4^n-(-2)^n]$$

2.11 用特征根法和递推法求解下列差分方程：

y(n)-y(n-1)-y(n-2)=0,且 y(0)=1,y(1)=1

解 由特征方程 $\alpha^2-\alpha-1=0$ 求得特征根

$$\alpha_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}，\alpha_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

通解为 $y(n)=c_1\alpha_1{}^n+c_2\alpha_2{}^n=c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

代入初始条件得

$$\begin{cases} c_1+c_2=1 \\ c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)+c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)=1 \end{cases}$$

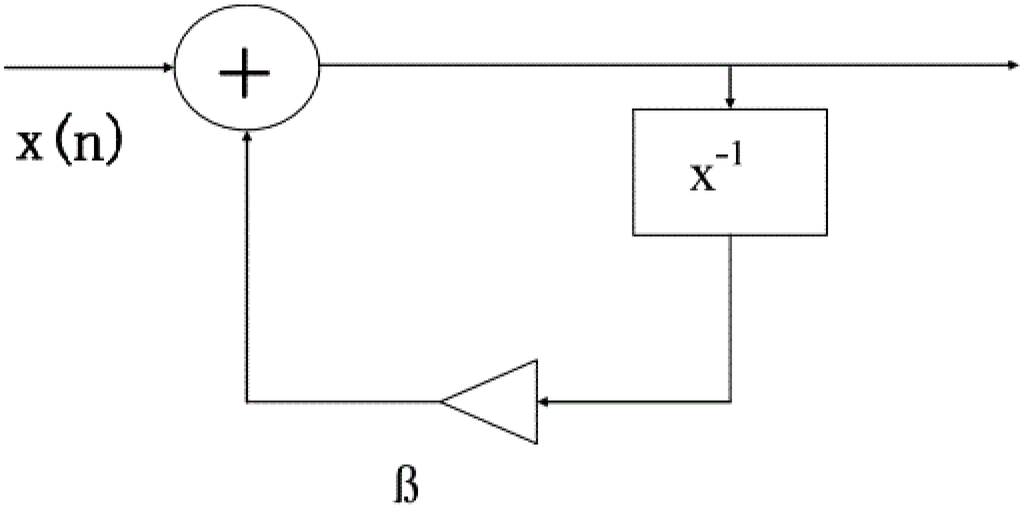
求出 $c_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}，c_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$

最后得到通解

$$y(n)=c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\right)^n+c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\right)^n$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\right)^{n+1}\right]$$

2.12 一系统的框图如图 P2.12 所示，试求该系统的单位取样响应 h(n)和单位阶跃响应



解 由图可知

$y(n)=x(n)+\beta y(n-1)$

为求单位取样响应，令 $x(n)=\delta(n)$，于是有

$h(n)=\delta(n)+\beta h(n-1)$

由此得到

$$h(n)=\frac{\delta(n)}{1-\beta D}=\beta^{n}u(n)$$

阶跃响应为

$$y(n)=h(n)*u(n)=\sum_{k=0}^{n}\beta^{k}y(k)u(n-k)$$

$$=\frac{1-\beta^{n+1}}{1-\beta}u(n)$$

2.13 设序列 x(n)的傅立叶变换为 $X(e^{jw})$，求下列各序列的傅立叶变换

解 (1) $F[ax_1(n)+bx_2(n)]=aX_1(e^{jw})+bX_2(e^{jw})$

(2) $F[x(n-k)]=e^{-jwk}X(e^{jw})$

(3) $F[e^{jw_0n}x(n)]=X[e^{j(w-w_0)}]$

(4) $F[x(-n)]=X(e^{-jw})$

(5) $F[x^*(n)]=X^*(e^{-jw})$

(6) $F[x^*(-n)]=X^*(e^{jw})$

(7)

(8) $j\mathrm{Im}[x(n)]=\frac{1}{2}[X(e^{jw})-X^{*}(e^{-jw})]$

(9) $\frac{1}{2\pi}X(e^{j\theta})*X(e^{jw})$

(10) $j\frac{dx(e^{jw})}{dw}$

2.14 设一个因果的线性非移变系统由下列差分方程描述

$$y(n)-\frac{1}{2}y(n-1)=x(n)+\frac{1}{2}x(n-1)$$

(1) 求该系统的单位取样响应 h(n)

(2) 用（1）得到的结果求输入为 $x(n)=e^{jwn}$ 时系统的响应

(3) 求系统的频率响应

(4) 求系统对输入 $x(n)=\cos(\frac{\pi}{2}n+\frac{\pi}{4})$ 的响应

解　（1）令 X（n）= δ (n),得到

$$h(n)-h(n-1)/2=\delta(n)+\delta(n-1)/2$$

由于是因果的线性非移变系统，故由上式得出

$$h(n)=h(n-1)/2+\delta(n)+\delta(n-1)/2 \quad ,n\geqslant 0$$

递推计算出

$h(-1)=0$

$h(0)=h(-1)/2+\delta(0)=1$

$h(1)=h(0)/2+1/2=1$

$h(2)=h(1)/2=1/2$

$h(3)=\frac{1}{2}h(2)=(\frac{1}{2})^2$

$h(4)=\frac{1}{2}h(2)=(\frac{1}{2})^3$

.

.

.

$$h(n)=\delta(n)+(\frac{1}{2})^{n-1}u(n-1)$$

或 $h(n)=(\frac{1}{2})^{n}[u(n)-u(n-1)]$

也可将差分方程用单位延迟算子表示成

$$(1-D)h(n)=(1+D)\delta(n)$$

由此得到

$$h(n)=[(1+\frac{1}{2}D)/(1-\frac{1}{2}D)]\delta(n)=[1+D+\frac{1}{2}D^2+(\frac{1}{2})^2D^3+\ldots+(\frac{1}{2})^{k-1}D^3+\ldots]\delta(n)$$

$$=\delta(n)+\delta(n-1)+\frac{1}{2}\delta(n-2)+\frac{1}{2}\delta(n-3)+\ldots+(\frac{1}{2})^{k-1}\delta(n-1)+\cdots$$

$$=\delta(n)+(\frac{1}{2})^{n}u(n-1)$$

2）将 $X(n)=e^{jwn}$ 代入 $y(n)=x(n)*h(n)$ 得到

$$y(n)=e^{jwn}*[\frac{1+\frac{1}{2}D}{1-\frac{1}{2}D}\delta(n)]$$

$$=\frac{1+\frac{1}{2}D}{1-\frac{1}{2}D}e^{jwn}$$

$$=\left[1+D+\frac{1}{2}D^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2D^3+\bullet\bullet\bullet\bullet+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}D^n+\bullet\bullet\bullet\bullet\right]$$

$$=e^{jwn}+\frac{e^{jw(n-1)}}{1-\frac{1}{2}e^{-jw}}$$

$$=e^{jwn}\frac{1+\frac{1}{2}e^{-jw}}{1-\frac{1}{2}e^{-jw}}$$

（3）由（2）得出

$$H(e^{jw})=\frac{1+\frac{1}{2}e^{-jw}}{1-\frac{1}{2}e^{-jw}}$$

（4）由（3）可知

$$\left|H\left(e^{j\frac{w}{2}}\right)\right| = \left|\frac{1+\frac{1}{2}e^{-j\frac{1}{2}w}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\frac{1}{2}w}}\right| = 1$$

$$\arg\left[H\left(e^{j\frac{w}{2}}\right)\right] = \arctan\left[1+\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}}\right] - \arctan\left[1-\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}}\right]$$

$$= -2\arctan\left(\frac{1}{2}\right)$$

故：

$$y(n) = \left|H\left(e^{jw}\right)\right|\cos\left[\frac{\pi}{2}n+\frac{\pi}{4}+\arg\left[H\left(e^{jw}\right)\right]\right]$$

$$= \cos\left[\frac{\pi}{2}n+\frac{\pi}{4}-2\arctan\left(\frac{1}{2}\right)\right]$$

2.15 某一因果线性非移变系统由下列差分方程描述

y(n)-ay(n-1)=x(n)-bx(n-1)

试确定能使系统成为全通系统的 b 值（b≠a），所谓全通系统是指其频率响应的模为与频率 ω 无关的常数的系统。

解：令x(n)= δ(n),则

h(n)=ah(n-1)=δ(n)-b8(n-1)

或

h(n)=ah(n-1)+ δ(n)- δ(n-1),n≥0

由于是线性的非移变系统，故对上式递推计算得出：

h(-1)=0

h(0)=1

h(1)=ah(0)-bδ(0)=a-b

h(2)=ah(1)=a^2-ab

h(3)=ah(2)=a^3-a^2b

⋮

h(n)=ah(n-1)=a^n-a^{n-1}b,n≥0

h(n)=a^nu(n)-a^{n-1}bu(n-1)

或系统的频率特性为

$$H(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}[a^n u(n)-a^{n-1}bu(n-1)]e^{-j\omega}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}a^n e^{-j\omega}-b\sum_{n-1}^{\infty}a^{n-1}e^{-j\omega}$$

$$=\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}-b\frac{e^{-j\omega}}{1-ae^{-j\omega}}$$

$$=\frac{1-be^{-j\omega}}{1-ae^{-j\omega}}$$

振幅的特性平方

$$\left|H(e^{j\omega})\right|^2=\left|\frac{1-be^{-j\omega}}{1-ae^{-j\omega}}\right|^2$$

$$=\frac{(1-be^{-j\omega})(1-be^{j\omega})}{(1-ae^{-j\omega})(1-ae^{j\omega})}$$

$$=\frac{1-be^{-j\omega}-be^{j\omega}+|b^2|}{1-ae^{-j\omega}-ae^{j\omega}+|a|^2}$$

$$=|b|^2\frac{\frac{1}{|b|^2}-\frac{1}{b}e^{-j\omega}-\frac{1}{b}e^{j\omega}+1}{1-ae^{-j\omega}-ae^{-j\omega}+|a|^2}$$

若选取$a=\frac{1}{b^*}$或$b=\frac{1}{a^*}$，则有$|H(e^{jw})|^2=|b|^2$，即幅度响应等于与频率响应无关的常数，故该系统为全通系统。

2.16 (1)一个线性非移变系统的单位冲激响应为 $h(n)=a^n u(n)$，其中 a 为实数，且 $0<a<1$。设输入为 $x(n)=\beta^n u(n)$，β 为实数，且 $0<\beta<1$. 试利用线性卷积计算系统的输出 y(n)，并将结果写成下列形式

$$y(n)=(k_1 a^n+k_2\beta^n)u(n)$$

(2)分别计算 x(n)、h(n)和（1）中求得的 y(n)的傅立叶变换 $X(e^{jw})$、$H(e^{jw})$、$Y(e^{jw})$，并证明

$$Y(e^{jw})=H(e^{jw})X(e^{jw})$$

解　(1)$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h(k)x(n-k)$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a^k u(k)\beta^{-1}u(n-k)$$

$$=\beta^{-1}\sum_{k=-\infty}^{\infty}(a\beta^{-1})^{k}=\frac{\beta^{-1}[1-(\alpha\beta^{-1})^{n+1}]}{1-\alpha\beta^{-1}}$$

$$=-\frac{\beta^{-1}}{1-\alpha\beta^{-1}}\alpha^{n+1}+\frac{\beta^{-1}}{1-\alpha\beta^{-1}}\beta^{-1}，\ n\geqslant 0$$

$$y(n)=(\ \frac{\alpha}{1-\beta}\alpha^{n}-\frac{\beta}{1-\beta}\beta^{n})u(n)$$

$$(2)X(e^{jw})=\sum_{n=0}^{\infty}\beta^{\gamma}e^{-i\omega}=-\frac{1}{1-\beta e^{-j\omega}}$$

$$H(e^{j\omega})=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^{\gamma}e^{-i\omega}=\frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}}$$

$$Y(e^{j\omega})=\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{\alpha}{\alpha-\beta}\alpha^{n}-\frac{\beta}{\alpha-\beta}\beta^{n})e^{-j\omega}$$

$$=\frac{1}{\alpha-\beta}(\frac{\alpha}{1-\alpha e^{-j\omega}}-\frac{\beta}{\alpha-\beta e^{-j\omega}}\beta^{n})$$

由于 $\frac{1}{\alpha-\beta}(\frac{\alpha}{1-\alpha e^{-j\omega}}-\frac{\beta}{1-\beta e^{-j\omega}})$

$$=\frac{1}{(1-\alpha e^{-j\omega})(1-\beta e^{-j\omega})}=X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$$

故得出 $Y(e^{jw})=H(e^{jw})X(e^{jw})$

2.17 令 x(n)和 $X(e^{jw})$ 分别表示一个序号及其傅立叶变换，证明：

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(n)x^{*}(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-n}^{n}X(e^{jw})X^{*}(e^{jw})dx$$

此式是帕塞瓦尔（Parseval）定理的一种形式。

证明：证法一

$$X(e^{jwn}) = \sum_{n=-\infty} x(n)e^{-jwn}$$

$$X^*(e^{jw}) = (\sum_{n=-\infty} x^*(N)e^{jwn})^* = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*(n)e^{jwn}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{jw})X^*(e^{jw})dw$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)e^{-jwn}][\sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*(n)e^{jw}]dw$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*(n)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{jw(n-m)}dw$$

其中

$$\int_{-\pi}^{\pi} ejw\ (n-m)dw = \begin{cases} \pi - -\pi = 2\pi ,.... n = m \\ \dfrac{e^{jw(n-m)} - e^{-jw(n-m)}}{n-m} = 0,.... n \neq m \end{cases}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{jw})X^*(e^{jw})dw = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)x^*(n)$$

证法二：

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)x^*(n)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{jw})e^{-jwn}\,dw]$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X^*(e^{jw})e^{jwn}\,dw]$$

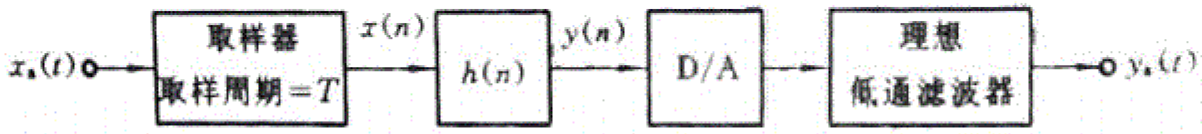
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X^*(e^{jw})\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-jwn}\,dw$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{jw})X^*(e^{jw})dw$$

2.18 当需要对带限模拟信号滤波时，经常采用数字滤波器，如图 P2.18 所示，图中 T 表示取样周期，假设 T 很小，足以防止混叠失真，把从 $x_\alpha(t)$ 到 $y_\alpha(t)$ 的整个系统等效成一个模拟滤波器。

（1）如果数字滤波器 h（n）的截止频率 ω 等于 $\frac{\pi}{8}$rad，$\frac{1}{T}$＝10kHz，求整个系统的截止频率 f_{ac}，并求出理想低通滤波器的截止频率 f_c

（2）对 $\frac{1}{T}$＝20kHz，重复（1）的计算



解 理想低通滤波器的截止频率 $\frac{\pi}{T}$（弧度/秒）折合成数字域频率为 π（弧度），它比数字滤波器 h（n）的截止频率 $\frac{\pi}{8}$（弧度）要大，故整个系统的截止频率由数字滤波器 h(n) 的截止频率 $\frac{\pi}{8}$（弧度）来决定。将其换算成实际频率，即将 $f_s=\frac{1}{T}$＝10000Hz 带入 $\frac{2\pi f_{ac}}{f_s}=\frac{\pi}{8}$，便得到

$$f_{ac}=625\ \text{Hz}$$

理想低通滤波器的截止频率 $\frac{\pi}{T}$（弧度/秒）换算成实际频率使得到 f_c，即由 $\frac{\pi}{T}=2\pi f_c$，得到

$$f_{ac}=\frac{1}{2T}=\frac{10000}{2}=500\ \text{Hz}$$

2.19 求下列序列的 Z 变换和收敛域

（1）δ（n－m）

（2）$(\frac{1}{2})^n u(n)$

（3）$a^n u(-n-1)$

（4）$(\frac{1}{2})^n[u(n)-u(n-10)]$

（5）$\cos(\omega_0 n)u(n)$

解：（1）$X(z)=\sum^{\infty}\delta(n-m)z^{n}=z^{-nm}$

当 m>0 时，x(n)是因果序列，收敛域为 0<｜z｜≤∞，无零点，极点为 0(m 阶)；当 m<0 时，x(n)是逆因果序列，收敛域为 0≤｜z｜≤∞，零点为 0(m 阶)，无极点；当 m=0, X(z)＝1，收敛域为 0≤｜z｜≤∞，既无零点，也无极点

（2）$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}z^{-1}\right)^n=\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$

X(n)是右边序列，它的 Z 变换的收敛域是半径为 R_{x-} 的圆的外部区域，这里

$$R_{x-}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x(n+1)}{x(n)}\right|=\frac{1}{2}$$

τ（n）还是因果序列，可以有｜z｜＝∞，故收敛域为 $\frac{1}{2}$<｜z｜≤∞。零点为 0，极点

为$\frac{1}{2}$。

X(n)还是因果序列，可以有｜z｜=∞，故收敛域为$\frac{1}{2}$<｜z｜≤∞。零点为0，极点为$\frac{1}{2}$。(3)

x(z)=$\sum_{n=\infty}^{\infty} a^n u(-u-1) z^{-n} = \sum_{n=-1}^{-\infty} (az^{-1})^n$

$$=\sum_{n=-1}^{-\infty}(a^{-1}z\ \ )^n=\sum_{n=1}^{\infty}(az^{-1})^n=\frac{a^{-1}z}{1-a^{-1}z}=\frac{-1}{1-az^{-1}}$$

X(n)是左边序列，它的Z变换的收敛域是半径围R_x+的圆的内部区域，这里

$$R_x+=\lim_{n\to\infty}|\frac{x(-n)}{x(-(n+1))}|=\lim_{n\to\infty}\ |\frac{a^{-n}}{a^{-(n+1)}}|=|a|$$

$x(n)$还是逆因果序列，可以有$|z|=0$，故收敛域为$0\leq|z|\leq|a|$零点为0，极点为a。

(4)X(z)=$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n[u(n)-u(n-10)]z^{-n}$

$=\sum_{n=0}^{9}\left(\frac{1}{2}\right)^n z^{-n}=\frac{1-(2z)^{-10}}{1-(2z)^{-1}}$

X(n)是有限长序列，且它的Z变换只有负幂项，故收敛域为0<｜z｜≤∞.零点为0和$\frac{1}{2}$(10阶)，极点为$\frac{1}{2}$。

(5) $X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\cos(w_0n)u(n)z^{-n}=\sum_{n=\infty}^{\infty}\frac{e^{jw_0n}+e^{-jw_0n}}{z}z$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}(e^{jw_0}z^{-1})^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}(e^{-jw_0}z^{-1})$$

$$=\frac{1}{2}(\frac{1}{1-e^{jw_0}z^{-1}}+\frac{1}{1-e^{-jw_0}z^{-1}})$$

$$=\frac{1-z^{-1}\cos w_0}{1-2z^{-1}\cos w_0+z^{-2}}$$

$x(n)$是右边序列，它的Z变换的收敛域是半径为R_x-的圆的外部区域，这里

$$R_{x-}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x(n+1)}{x(n)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\cos[w_0(n+1)]}{\cos(w_0 n)}\right|=1$$

$x(n)$还是因果序列,可以有$|z|=\infty$,故收敛域为$1\le|z|\le\infty$,零点为0和$\cos w_0$,极点为e^{jw_0} 和e^{-jw_0} 。

2.20 **求下列序列的 Z 变换和收敛域和零极点分布图**

(1) x(n)=$a^{|n|}$, 0<a<1

(2) x(n)=$e^{(a+jw_0)n}$u(n)

(3) x(n)=A$r^n\cos(\omega_0+\varphi)$u(n), 0<r<1

(4) x(n)=$\frac{1}{n!}$u(n)

(5) x(n)=sin($\omega_0+\varphi$)u(n)

(1) X(z)=$\sum_{n=-\infty}^{\infty}a^{|n|}z^{-n}$ = $\sum_{n=-\infty}^{-1}a^{-n}z^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty}a^{n}z^{-n}$

$$=\sum_{n=-1}^{\infty}a^{n}z^{n}+\sum_{n=0}^{\infty}a^{n}z^{-n}=\frac{ax}{1-ax}+\frac{1}{1-ax^{-1}}$$

$$=\frac{z(1-a^2)}{(1-az)(z-a)}$$

X(n)是双边序列，可看成是由一个因果序列（收敛域$|a|<|z|\le\infty$）和一个因果序列（收敛域$0\le|z|<\frac{1}{|a|}$）相加组成，故X(z)的收敛域是这两个收敛域的重叠部分，即圆环区域$|a|<|z|<\frac{1}{|a|}$。零点为0和∞，极点为a和$\frac{1}{a}$。

(2) $X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{(\theta+j\omega_{\varphi})}\ \ u(n)z^{n}=\sum_{n=\varphi}^{\infty}e^{(\varphi+j\omega_0)n}z$

$$=\frac{1}{1-e^{\theta+j\omega_\varphi}z^{-1}}$$

X(n)是右边序列，它的 Z 变换的收敛域是半径为R_{x^-}的圆的外部区域，这里

$$R_{x^-}=\lim_{x\to\infty}\left|\frac{x(n+1)}{x(n)}\right|=e^{\theta}$$

X(n)还是右边序列，可以有$|z|=\infty$，故收敛域为$e^{\theta}<|z|\le\infty$。零点为 0，极点为$e^{\theta+j\omega_0}$。

(3)

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}Ar^n\cos(\omega_o n+\varphi)u(n)z^{-n}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}Ar^n\frac{e^{j(\omega_o n+\varphi)}+e^{-j(\omega_o n+\varphi)}}{n}z^{-n}$$

$$=\frac{Ae^{j\varphi}}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(re^{j\omega_o}z^{-1})^n+\frac{Ae^{-j\varphi}}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(re^{-j\omega_o}z^{-1})^n$$

$$=\frac{Ae^{j\varphi}}{2}\frac{1}{1-re^{j\omega_o}z^{-1}}+\frac{Ae^{-j\varphi}}{2}\frac{1}{1-re^{-j\omega_o}z^{-1}}$$

$$=\frac{A}{2}\left[\frac{e^{j\varphi}-(re^{-j(\omega_o-\varphi)}+re^{j(\omega_o-\varphi)})z^{-1}+e^{-j\varphi}}{1-rz^{-1}(e^{j\omega_o}+e^{-j\omega_o})+r^2z^{-2}}-\right]$$

$$=A\left[\frac{\cos\varphi-rz^{-1}\cos(\omega_o-\varphi)}{1-2rz^{-1}\cos\omega_o+r^2z^{-2}}-\right]$$

X(n)是右边序列，它的 Z 变换的收敛域是半径为R_3—的圆的

外部区域，这里

$$R_X-=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x(n+1)}{x(n)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{A_{r^{n+1}}\cos[\omega_0(n+1)+\varphi]}{A_{r^n}\cos(\omega_0+\varphi)}\right|=|z|$$

$x(n)$还是因果序列，可以有$|z|=\infty$，故收敛域为$|r|<|z|\le\infty$。

零点为 0 和$\frac{r\cos(\omega_0-\varphi)}{\cos\varphi}$，极点为$re^{j\omega_0}$和$re^{-j\omega_0}$

（4） $$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{n!}u(n)Z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{Z^{-n}}{n!}$$

$$=1+Z^{-1}+\frac{1}{2!}Z^{-2}+\frac{1}{3!}Z^{-3}+\ldots+\frac{1}{n!}Z^{-n}+\ldots$$

$$=e^{\frac{1}{x}}$$

X(n)是右边序列，它的 Z 变换的收敛域是半径为 $R_{x}-$ 的圆的外部区域，这里

$$R_{X}-=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x(n+1)}{x(n)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n+1}\right|=0$$

X(n)还是因果序列，可以有 $|Z|=\infty$ ，故收敛域为 $0<|Z|\le\infty$ ，无零点，极点为 0。

（5）

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sin(w_0n+\varphi)u(n)z^{-n}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sin(w_0n+\varphi)z^{-1}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{j(w_0n+\varphi)}-e^{-j(w_0n+\varphi)}}{2j}\cdot z^{-n}$$

$$=\frac{e^{j\varphi}}{2j}\sum_{n=0}^{\infty}(e^{j\varphi}\cdot z^{-1})^{n}-\frac{e^{j\varphi}}{2j}(e^{-j\varphi}\cdot z^{-1})^{n}$$

$$=\frac{1}{2j}\frac{(e^{j\varphi}-e^{-j\varphi})+(e^{j(w_0-\varphi)}-e^{-j(w_0-\varphi)})z^{-1}}{1-(e^{jw_0}+e^{-jw_0})z^{-1}+z^{-2}}$$

$$=\frac{\sin\phi+\sin\left(w_0-\phi\right)z^{-1}}{1-2\cos w_0 z^{-1}+z^{-i}}$$

$x\left(n\right)$**是右边序列,它的 Z 变换收敛域是半径为** R_0 **的圆的外部象区域,这里**

$$R_0=\lim_{x\to\infty}\left|\frac{x\left(n+1\right)}{x\left(n\right)}\right|=\lim_{x\to\infty}\left|\frac{\sin\left[w_0\left(n+1\right)+\phi\right]}{\sin\left(w_{0n+\phi}\right)}\right|=1$$

$x\left(n\right)$**还是因果序列,大故收敛域为**$1<\left|z\right|<\infty$**.零点为 0 和** $\frac{\sin\left(w_0-\phi\right)}{\sin\phi}$**.极点为**

$\cos w_0+\mathrm{j}\sin w_0$ **和** $\cos w_0-\mathrm{j}\sin w_0$**.**

2.21 用三种方法求下列 Z 变化的逆变换

(1)X(Z)=$\frac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}$**,|Z|<**$\frac{1}{2}$

(2)X(Z)=$\frac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{1+\frac{3}{4}z^{-1}+\frac{1}{8}z^{-2}}$**, |Z|>**$\frac{1}{2}$

(3)X(Z)=$\frac{1-az^{-1}}{z^{-1}-a}$**,|Z|>|a**$^{-1}$**|**

解(1)采用幂级数法。由收敛域课确定 x_1(n)是左边序列。又因为$\lim_{x\to\infty}X_1(z)=1$ 为有限值,所以 x_1(n)是逆因果序列。用长除法将 X_1(z)展开成正幂级数,即

$$\begin{aligned}X_1(z)&=\frac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}\\&=2z-4z^2+8z^3-16z^4+21z^5+\ldots\\&+(-1)^{n-1}2^n z^n+\ldots\\&=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}2^n z^n=\sum_{n=1}^{\infty}-(-2)^n z^{-n}\end{aligned}$$

最后得到

$$x_1(n)=-2(-2)^{-n},\ n=-1,-2,-3\cdots\cdots$$

或 $x_1(n)=-(-\frac{1}{2})^n u(-n-1)$

（2）采用部分分式展开法。将 $X_2(z)$ 展开陈部分分式

$$X_2(Z)=\frac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{1+\frac{3}{4}z^{-1}+\frac{1}{8}z^{-2}}=\frac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{(1+\frac{1}{2}z^{-1})+(1+\frac{1}{4}z^{-1})}$$

$$=\frac{A_1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{A_2}{1+\frac{1}{4}z^{-1}}$$

其中

$$A_1=\left.\frac{1-\frac{1}{2}Z^{-1}}{1+\frac{1}{4}Z-1}\right|_{Z=-\frac{1}{2}}=4$$

$$A_2=\left.\frac{1-\frac{1}{2}Z^{-1}}{1+\frac{1}{2}Z-1}\right|_{Z=-\frac{1}{4}}=-3$$

由收敛域可确定 $X_2(n)$ 式右边序列。又因 $\lim\limits_{x\to\infty}X_2(z)=1$，所以 $X_2(n)$ 还是因果序列。用长除法分别将 $\frac{4}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{-3}{1+\frac{1}{4}z^{-1}}$ 展开成负幂级数，即

$$\frac{4}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}=4[1-\frac{1}{2}z^{-1}+\frac{1}{4}z^{-2}-\frac{1}{8}z^{-3}+\ldots+(\frac{1}{2})^n z^{-n}+\ldots]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}a(-\frac{1}{2})^n z^{-n}$$

$$\frac{-3}{1+\frac{1}{4}z^{-1}}=-3[1-\frac{1}{4}z^{-1}+\frac{1}{8}z^{-2}-\frac{1}{16}z^{-3}+\ldots+(\frac{1}{4})^n z^{-n}+\ldots]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}-3(-\frac{1}{4}^{n})z^{-n}$$

由上两式得到

$$x_2(n)=[4(-\frac{1}{2})^n-3(-\frac{1}{4})^n]u(n)$$

（3）采用留数定理法。围线积分的被积函数为

$$x_3(n)z^{n-1}=\frac{(1-az^{-1})z^{n-1}}{z^{-1}-a}=\frac{(1-a^{-1}z)z^{n-1}}{z-a^{-1}}$$

当 n>0 时，由给定的收敛域可知，被积函数在围线之内仅有一个极点 $z=\frac{1}{a}$，因此

$$x_3(n)=\mathrm{Res}[x_3(z)z^{n-1},\frac{1}{a}]=(1-a^{-1}z)z^{n-1}\Big|_{z=\frac{1}{a}}$$
$$=(a^2-1)a^{-n-1},n>0$$

当 n=0 时，被积函数在围线之内有两个极点 $z=\dfrac{1}{a}$ 和 z＝0，因此

$$x_3=\mathrm{Res}[X_3(z)z^{n-1},\frac{1}{a}]+\mathrm{Res}[X_3(z)z^{n-1},0]$$
$$=(1-a^{-1}z)z^{-1}\Big|_{z=\frac{1}{a}}+\frac{1-a^{-1}z}{z-a^{-1}}\Big|_{z=0}$$
$$=(1-a^{-2})a-a=-a^{-1},n=0$$

当 n<0 时，因为 $x_3(z)z^{n-1}$ 在围线之外无极点，且 $x_3(z)z^{n-1}$ 在 z＝∞ 处有 1－n≥2 阶极点，所以有 $x_3(n)$＝0，n<0

最后解得

$$x_3(\mathrm{n})=\begin{cases}(a^2-1)a^{-n-1},n>0\\ -a^{-1},n=0\\ 0,n<0\end{cases}$$

故x_3(n）$=(a^2-1)a^{-n-1}\mathrm{u}(n-1)-a^{-1}\delta(n)$

2.22 求下列 Z 变换的逆变换

(1)X（z）=$\dfrac{1}{(1-z^{-1})(1-2z^{-1})}$，1<|z|<2

(2)X(z)=$\dfrac{z-5}{(1-0.5z^{-1})(1-0.5z)}$, 0.5<|z|<2

(3)X(z)=$\dfrac{e^{-T}z^{-1}}{(1-e^{-T}z^{-1})^2}$, |z|>$e^{-T}$

(4)X(z)=$\dfrac{z(2z-a-b)}{(z-a)(z-b)}$, |a|<|z|<|b|

解

（4）

采用部分分式法

$$X_4(z)=\frac{A_1}{1-z^{-1}}+\frac{A_2}{1-2z^{-1}}$$
$$A_1=\frac{1}{1-2z^{-1}}\Big|_{t=1}=-1,A_2=\frac{1}{1-z^{-1}}\Big|_{t=2}=2$$

根据收敛域$1<|z|<2$, $\frac{1}{1-z^{-1}}$和$\frac{-2}{1-2z^{-1}}$分别对应一个因果序列和逆因果序列。将它们分别展开成z的负幂级数和正幂级数，即

$$\frac{-1}{1-z^{-1}}=-\sum_{n=6}^{\infty}z^{-n}$$

$$\frac{-2}{1-2z^{-1}}=\sum_{n=1}^{\infty}2^{-(n-1)}z^{n}=\sum_{n=-1}^{-\infty}2^{n+1}z^{-n}$$

最后得到

$$X_4(4)=-u(n)-2^{n+1}u(-n-1)$$

用留数定理法,被积函数

$$X_{5(z)}z^{n-1}=\frac{(z-5)z^{n-1}}{(1-0.5z^{-1})(1-0.5z)}=\frac{(z-5)z}{(-0.5)(1-0.5z)}$$

根据收敛域$0.5<|z|<2$可知,对应的是一个双边序列.其中

$0.5<|z|$**对应于一个因果序列 ， 即n<0时,** $x(n)=0;n\geq 0$ **时,被积函数有1个极点0.5在围线内,故得**

$$x_5(n)=\mathrm{Res}\left[\mathrm{X}(\mathrm{z})z^{n-1}\ ,\ 0.5\right]$$

$$=\left.\frac{(z-5)z^{n}}{(1-0.5z)}\right|_{z=0.5}=-6(\frac{1}{2})^{n},n\geq 0$$

|z|<2对应于一个逆因果序列，即n≥0时，x(n)=0;n<0时，被积函数在围线外有1个极点2，且分母多项式的阶比分子多项式的阶高2－（n＋1）＝1-n≥2，故得

$$x_5(n)=-\mathrm{Res}\left[\mathrm{X}_5(z)z^{n-1},2\right]$$

$$=\left.\frac{(z-5)z^{n}}{z-0.5}\right|_{n-2}=-2^{n+1}\quad,\quad n<0$$

最后得到

$$x_5(n)=\begin{cases}-6\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\ , & n\geq 0\\ -2^{n=+1}\ , & n<0\end{cases}$$

或 $$x_n(n)=-6\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u(n)-2^{n-1}u(-n-1)$$

采用留数定理法，被积函数

$$X_{\ell}(z)z^{n-1}=\frac{c^{-T}z^{n-z}}{\left(1-c^{-T}z^{l}\right)^{z}}=\frac{c^{-l}z^{n}}{\left(z-c^{-T}\right)^{z}}$$

根据收敛域$|z|>c^{-T}$可以知道，对应的序列是一个因果序列。即n<0时， 在$x(n)=0$时，在$n\geq 0$时，被

积函数在积分围线内有 1 个 2 阶极点 $z=c^{-T}$ ，因此

$$x_l(n)=Rcs\left[X_l(z)z^{n-1},c^{-T}\right]=\frac{d}{dz}c^{-T}z^{n}\Big|_{z=e^{-T}}$$
$$=c^{-T}nz^{n-1}\Big|_{l=e^{-T}}=nc^{-Tn},n\geq 0$$

最后得到

$$x_l=\begin{cases}nc^{-Tn},n\geq 0\\0,n<0\end{cases}$$

或 $x_{l(n)}=nc^{-Tn}u(n)$

（7）

由收敛域可知，对应的是一个双边序列。将 $X(n)$ 进行部分分式分解，即

$$X_1(z)=\frac{z(2z-a-b)}{(z-a)(z-b)}=\frac{2-(a+b)z^{-1}}{(1-az^{-1})(1-bz^{-1})}$$
$$=\frac{A_1}{1-az^{-1}}+\frac{A_2}{1-bz^{-1}}$$

其中 $$A_1=(1-az^{-1})X_7(z)\Big|_{t=a}=\frac{2-(a+b)z^{-1}}{1-bz^{-1}}\Big|_{t=a}=1$$

$$A_2=(1-bz^{-1})X_7(z)\Big|_{t=b}=\frac{2-(a+b)z^{-1}}{1-az^{-1}}\Big|_{t=b}=1$$

对于 $\frac{1}{1-az^{-1}}$，收敛条件 $|Z|>a$ 表明它对应于一个右边序列；又因 $\lim_{t\to 0}\frac{1}{1-az^{-1}}=1$ 有限值，所以 $\frac{1}{1-az^{-1}}$ 应于一个逆因果序列 $x_1(n)$ 。 用长除法将 $\frac{1}{1-az^{-1}}$ 展开成 z 的正幂级数，即

$$\frac{1}{1-az^{-1}}=1+az^{-1}+az^{-1}+\cdots az^{-1}+\cdots=-\sum_{n=0}^{\infty}a^{n}z^{-n}$$

由此得到

$$x_1(n)=a^{n}u(n)$$

对于 $\frac{1}{1-bz^{-1}}$，收敛条件 $|Z|<b$ 表明它对应于一个左边序列又因 $\lim_{t\to 0}\frac{1}{1-bz^{-1}}=0$ 为有限值，所以 $\frac{1}{1-bz^{-1}}$ 对应于一个逆因果序列 $x_2(n)$ 。 用长除法将 $\frac{1}{1-bz^{-1}}$ 展开成 z 的正幂级数，即

$$\frac{1}{1-bz^{-1}}=-b^{-1}z-b^{-2}z^{2}-\cdots-b^{-n}z^{n}-\cdots=-\sum_{n=1}^{\infty}b^{-n}z^{n}=-\sum_{n=1}^{\infty}b^{n}z^{-n}$$

由此得到

$$x_2(n)=-b^{n}u(-u-1)$$

最后得到

$$x_7(n)=a^{n}u(n)-b^{n}u(-u-1)$$

2.23 求 X（Z）＝$e^{z}+e^{\frac{1}{z}}$，0<|z|<∞,的逆变换

解 将e^{z}和$e^{\frac{1}{z}}$展开成幂级数

$$e^{z}=1+z+\frac{z^{2}}{2!}+\ldots+\frac{z^{n}}{n!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^{n}$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{0}\frac{1}{(-n)!}z^{-n}=1+\sum_{n=-\infty}^{0}\frac{1}{|n|!}z^{-n}$$

$$e^{\frac{1}{z}}=1+z^{-1}+\frac{z^{-2}}{2!}+\ldots+\frac{z^{-n}}{n!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^{-n}$$

由以上两式得出

$$X(z)=1+\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{1}{n!}z^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^{-n}=1+\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{|n|!}z^{-n}$$

最后得

$$x(n)=\delta(n)+\frac{1}{|n|!},-\infty<n<\infty$$

2.24 试确定 X(z)=z*是否代表某个序列得 Z 变换，请说明理由

解 不能，因为，如果 X（z）能代表某个序列得 Z 变换，则 X（z）必须在收敛域内试解析函数。但是，现在 x（z）＝u（x，y）＋jv（x，y）＝z*＝x－jy，显然有$\frac{\partial u}{\partial x}=1\neq\frac{\partial v}{\partial y}=-1$，即 X（z）不满足柯西－黎曼！方程，因此 X（z）不是解析函数，故 X（z）不能代表某个序列得 Z 变换。

2.25 如果 X（z）是 x(n)得 Z 变换，证明：

（1）z^{-m}X(z)是 x(n-m)的 Z 变换

（2）X(a^{-1}z)是 a^{n}x(n)的 Z 变换

（3）$-z\dfrac{dX(x)}{dz}$是 nx(n)的 Z 变换

解 $(1)\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n-m)z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-(n+m)}$

$=z^{-m}\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}=z^{-m}X(z)$

$(2)\sum_{n=-\infty}^{\infty}a^{n}x(n)z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)(a^{-1}z)^{-n}=X(a^{-1}z)$

$(3)\sum_{n=-\infty}^{\infty}nx(n)z^{-n}=-z\dfrac{d}{dz}\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}=-z\dfrac{d}{dz}X(z)$

2.26 证明

$(1)\sum_{n=-\infty}^{\infty}x^{*}(n)z^{-n}=[\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)(z^{*})^{-n}]^{*}=X^{*}(z^{*})$

$(2)\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(-n)z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)(z^{-1})^{-n}=X(z^{-1})$

(3)

$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{Re}[x(n)]z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}[x(n)+x^{*}(n)]z^{-n}=\frac{1}{2}[\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}+\sum_{n=-\infty}^{\infty}x^{*}(n)z^{-n}]=\frac{1}{2}[X(z)+X^{*}(z^{*})]$ (4
)

$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{Im}[x(n)]z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2j}[x(n)-x^{*}(n)]z^{-n}=\frac{1}{2j}[\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}-\sum_{n=-\infty}^{\infty}x^{*}(n)z^{-n}]=\frac{1}{2j}[X(z)-X^{*}(z^{*})]$

2.27 解 $X(z)=\dfrac{1}{1-z^{-1}},|z|>1$

$Y(z)=\dfrac{1}{1-az^{-1}},|z|>a$

$W(z)=X(z)Y(z)=\dfrac{1}{(1-z^{-1})(1-az^{-1})}=\dfrac{A_1}{1-z^{-1}}+\dfrac{A_2}{1-az^{-1}}=W_1(z)+W_2(z)$

其中 $A_1=\dfrac{1}{1-az^{-1}}|_{z=1}=\dfrac{1}{1-a}$

$$A_2=\frac{1}{1-z^{-1}}|_{z=a}=\frac{1}{1-a^{-1}}=\frac{-a}{1-a}$$

由于 x(n)和 y(n)都是因果序列，故 w(n)亦是因果序列，因果序列，因而 W(z)的收敛域为|z|>1。这样，$W_1(z)$ 的收敛域应为|z|>1，而 $W_2(z)$ 的收敛域为|z|>a。这意味着 $W_1(z)$ 和 $W_2(z)$ 都对应于因果序列，因此可用长除法分别将 $W_1(z)$ 和 $W_2(z)$ 展开成 z 的负幂级数，即

$$W_1(z)=\frac{1}{1-a}(1+z^{-1}+z^{-2}+\cdots+\cdots)=\frac{1}{1-a}\sum_{n=-\infty}^{\infty}z^{-n}$$

$$W_2(z)=\frac{-a}{1-a}(1+az^{-1}+a^2z^{-2}+\cdots+a^nz^{-n}+\cdots)=\frac{-a}{1-a}\sum_{n=0}^{\infty}a^nz^{-n}$$

由上二式得到

$\omega_1(n)=\frac{1}{1-a}u(n)$，$\omega_2(n)=\frac{-a}{1-a}a^nu(n)$

最后得到

$$\omega(n)=\omega_1(n)+\omega_2(n)=\frac{1-a^{n+1}}{1-a}u(n)$$

2.29(1)因为系统是因果的，所以收敛域为$|a|<|z|\le\infty$；为使系统稳定，必须要求收敛域包含单位圆，即要求$|a|<1$。极点为$z=a$，零点为$z=a^{-1}$，收敛域$|a|<|z|\le\infty$。极一零点图和收敛域示于图 1.7。

(2) $H(e^{j\omega})=\frac{1-a^{-1}e^{-j\omega}}{1-ae^{-j\omega}}$

$$|H(e^{j\omega})|^2=(\frac{1-a^{-1}e^{-j\omega}}{1-ae^{-j\omega}})(\frac{1-a^{-1}e^{-j\omega}}{1-ae^{-j\omega}})^*=(\frac{1-a^{-1}e^{-j\omega}}{1-ae^{-j\omega}})(\frac{1-a^{-1}e^{j\omega}}{1-ae^{j\omega}})=\frac{1+a^{-2}-a^{-1}(e^{j\omega}+e^{-j\omega})}{1+a^2-a(e^{j\omega}+e^{-j\omega})}$$ 因此

$$=\frac{1+a^{-2}-2a^{-1}\cos\omega}{1+a^2-a\cos\omega}=\frac{a^{-2}(a^2+1-2a\cos\omega)}{1+a^2-a\cos\omega}=a^{-2}$$

得到$|H(e^{j\omega})|=a^{-1}$，即系统的幅度特性为一常数，所以该系统是一个全通系统。

2.30(1)根据极一零点图得到 x(n)的 Z 变换

$$X(z)=\frac{z+1}{(z-\frac{1}{3})(z-2)(z-3)}$$

因傅里叶变换收敛，所以单位圆在收敛域内，因而收敛域为$\frac{1}{3}<|z|<2$。故 x(n)是双边序列。

(2)因为 x(n)是双边序列，所以它的 Z 变换的收敛域是一个圆环。根据极点分布情况，收敛域有两种可能：$\frac{1}{3}<|z|<2$或$2<|z|<3$。

采用留数定理法求对应的序列。被积函数为

$$X(z)z^{n-1}=\frac{z+1}{(z-\frac{1}{3})(z-2)(z-3)}z^{n-1}$$

对于收敛域$\frac{1}{3}<|z|<2$，被积函数有 1 个极点$z=\frac{1}{3}$在积分围线内，故得

$$x(n)=\mathrm{Res}[X(z)z^{-1},\frac{1}{3}]=\frac{(z+1)z^{n-1}}{(z-2)(z-3)}|_{z=\frac{1}{3}}=0.9(\frac{1}{3})^n,n\geq 0$$

被积函数有 2 个极点$z_1=2$和$z_2=3$在积分围线外，又因分母多项式的阶比分子多项式的阶高$3-n>2$(因 n<0)，故

$$x(n)=-\mathrm{Res}[X(z)z^{n-1},z_1]-\mathrm{Res}[X(z)z^{n-1},z_2]=\frac{-(z+1)z^{n-1}}{(z-\frac{1}{3})(z-3)}|_{z=2}-\frac{(z+1)z^{n-1}}{(z-\frac{1}{3})(z-2)}|_{z=3}$$ 最后得到

$$=0.9\times 2^n-0.5\times 3^n,n<0$$

$$x(n)=\begin{cases}0.9(\frac{1}{3})^n,n\geq 0\\ 0.9\times 2^n-0.5\times 3^n,n<0\end{cases}$$

或$x(n)=0.9(\frac{1}{3})^n u(n)+(0.9\times 2^n-0.5\times 3^n)u(-n-1)$

对于收敛域$2<|z|<3$，被积函数有 2 个极点$z_1=\frac{1}{3}$和$z_2=2$在积分围线内，故

$$x(n)=\mathrm{Res}[X(z)z^{n-1},z_1]+\mathrm{Res}[X(z)z^{n-1},z_2]=\frac{(z+1)z^{n-1}}{(z-2)(z-3)}|_{z=\frac{1}{3}}+\frac{(z+1)z^{n-1}}{(z-\frac{1}{3})(z-3)}|_{z=2}$$ 被积函数有

$$=0.9\times(\frac{1}{3})^n-0.9\times 2^n,n\geq 0$$

1 个极点$z=3$在积分围线外，又因分母多项式的阶比分子多项式的阶高$3-n>2$(因 n<0)，故

$$x(n)=-\mathrm{Res}[X(z)z^{-1},3]=\frac{-(z+1)z^{n-1}}{(z-\frac{1}{3})(z-2)}|_{z=3}=-0.5\times 3^n,n<0$$

最后得$x(n)=\begin{cases}0.9(\frac{1}{3})^n-0.9\times 2^n,n\geq 0\\ -0.5\times 3^n,n<0\end{cases}$

$$x(n)=0.9[(\frac{1}{3})^n-2^n]u(n)-0.5\times 3^n u(-n-1)$$

2.31 因系统稳定，所以单位圆必须在收敛域内。由于系统的极点为$z=\frac{1}{2}$，所以收敛域为$|z|=\frac{1}{2}$。因$\lim_{z\to\infty}H(z)=\infty$，故该系统不是因果系统。

2.32(1) $\omega(n)=\beta\omega(n-1)+x(n)$， $y(n)=\omega(n)+\omega(n-1)$

$$W(z)=\beta z^{-1}W(z)+X(z), W(z)=\frac{X(z)}{1-\beta z^{-1}}$$

$$Y(z)=W(z)+z^{-1}W(z)=\frac{1+z^{-1}}{1-\beta z^{-1}}X(z)$$

所以系统函数为

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1+z^{-1}}{1-\beta z^{-1}}$$

频率响应为

$$H(z)=\frac{1+e^{-j\omega}}{1-\beta e^{-j\omega}}=\frac{e^{-j\frac{\omega}{2}}(e^{j\frac{\omega}{2}}+e^{-j\frac{\omega}{2}})}{e^{-j\frac{\omega}{2}}(e^{j\frac{\omega}{2}}-e^{-j\frac{\omega}{2}})}=\frac{2\cos\frac{\omega}{2}}{2\sin\frac{\omega}{2}}=-j\cot\frac{\omega}{2}$$

(2)由 $Y(z)=\frac{1+z^{-1}}{1-\beta z^{-1}}X(z)$ 可写出系统的差分方程

$$y(n)-\beta y(n-1)=x(n)+x(n-1)$$

(3)当 x(n)为单位阶跃序列时，将 $X(z)=\frac{1}{1-z^{-1}}$ 代入 $Y(z)=\frac{1+z^{-1}}{1-\beta z^{-1}}X(z)$，得到

$$Y(z)=\frac{1+z^{-1}}{1-\beta z^{-1}}\frac{1}{1-z^{-1}}$$

采用部分分式法:

$$Y(z)=\frac{1+z^{-1}}{(1-\beta z^{-1})(1-z^{-1})}=\frac{A_1}{1-\beta z^{-1}}+\frac{A_2}{1-z^{-1}}=Y_1(z)+Y_2(z)$$

其中 $A_1=\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}|_{z=\beta}=-\frac{1+\beta}{1-\beta}$

$$A_2=\frac{1+z^{-1}}{1-\beta z^{-1}}|_{z=1}=\frac{2}{1-\beta}$$

由 $Y_1(z)=\frac{-1-\beta}{1-\beta}\frac{1}{1-\beta z^{-1}}$，$|z|>\beta$ 得到

$$y_1(n)=\frac{-1-\beta}{1-\beta}\beta^n u(n)$$

由 $Y_2(z)=\frac{2}{1-\beta}\frac{1}{1-z^{-1}}$，$|z|>1$ 得到

$$y_2(n)=\frac{2}{1-\beta}\beta^n u(n)$$

因此系统的单位阶跃响应为

$$y(n)=y_1(n)+y_2(n)=\frac{-1-\beta}{1-\beta}\beta^n u(n)+\frac{2}{1-\beta}u(n)=\frac{1-\beta^n}{1-\beta}u(n)+\frac{2}{1-\beta}u(n)=\frac{1-\beta^n}{1-\beta}u(n)+\frac{1-\beta^{n+1}}{1-\beta}u(n)$$

2.33(1)求差分方程两边的 z 变换

$$Y(z)=z^{-1}Y(z)+z^{-2}Y(z)+z^{-1}X(z)$$

由上式得到系统函数

$$H(z)=\frac{z^{-1}}{1-z^{-1}-z^{-2}}$$

求系统函数的零点和极点

$$H(z)=\frac{z^{-1}}{1-z^{-1}-z^{-2}}=\frac{z}{z^2-z-1}=\frac{z}{(z-\beta_1)(z-\beta_2)}$$

其中，零点为 0；极点为$\beta_1=\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$和$\beta_2=\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$。由此可画出极一零点图，如图 1.9 所示。已知系统为因果系统，因此收敛域为$|\beta_1|<|z|\le\infty$。

(2)采用留数定理法。由$H(z)=\frac{z}{(z-\beta_1)(z-\beta_2)}$(收敛域为$|\beta_1|<|z|\le\infty$)计算单位取样响应

$$h(n)=\mathrm{Re}s[H(z)z^{n-1},\beta_1]+\mathrm{Re}s[H(z)z^{n-1},\beta_2]=\frac{z^n}{z-\beta_2}|_{z=\beta_1}+\frac{z^n}{z-\beta_1}|_{z=\beta_2}=\frac{\beta_1^n-\beta_2^n}{\beta_1-\beta_2}u(n)$$

(3)要使系统稳定，单位圆必须在收敛域内，即收敛域应为$\beta_2<|z|\le\beta_1$，这是一个双边序列。

采用部分分式法将系统函数分解为

$$H(z)=\frac{z}{(z-\beta_1)(z-\beta_2)}=\frac{A_1}{z-\beta_1}+\frac{A_2}{z-\beta_2}=H_1(z)+H_2(z)$$

其中 $A_1=\frac{z}{z-\beta_2}|_{z=\beta_1}=\frac{\beta_1}{\beta_1-\beta_2}$

$$A_2=\frac{z}{z-\beta_1}|_{z=\beta_2}=\frac{\beta_2}{\beta_2-\beta_1}$$

由$H_1(z)=\frac{\beta_1}{\beta_1-\beta_2}\frac{1}{z-\beta_1}$计算单位取样响应$h_1(n)$。因收敛域为$|z|<\beta_1$，故$h_1(n)$为左边序列，又因$\lim_{z\to 0}H_1(z)=0$为有限值，故$h_2(n)$还是逆因果序列。采用留数定理法，被积函数

$H_1(z)z^{n-1}=\frac{\beta_1}{\beta_1-\beta_2}\frac{z^{n-1}}{z-\beta_1}$，当 n<0 时，极点 $\beta_1=\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ 在积分围线外，且被积函数的分母与分子多项式阶数之差为 $1-n+1\geq 2$ (因 n<0)，因此有

$$h_1(n)=-\mathrm{Res}[H_1(z)z^{n-1},\beta_1]=\frac{-\beta_1}{\beta_1-\beta_2}z^{n-1}|_{z=\beta_1}=\frac{1}{\beta_2-\beta_1}\beta_1^n, n<0$$

由 $H_2(z)=\frac{\beta_2}{\beta_2-\beta_1}\frac{1}{z-\beta_2}$ 计算单位取样响应 $h_2(n)$。因此收敛域为 $|z|<\beta_2$，故 $h_2(n)$ 为右边序列，又因 $\lim_{z\to 0}H_2(z)=\frac{\beta_2}{\beta_2-\beta_1}$ 为有限值，故 $h_2(n)$ 还是因果序列。采用留数定理法，被积函数 $H_2(z)z^{n-1}=\frac{\beta_2}{\beta_2-\beta_1}\frac{z^{n-1}}{z-\beta_2}$，当 $n\geq 0$ 时积分围线内有唯一的极点，$\beta_2=\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$，因此有

$$h_2(n)=\mathrm{Res}[H_2(z)z^{n-1},\beta_2]=\frac{\beta_2}{\beta_2-\beta_1}z^{n-1}|_{z=\beta_2}=\frac{1}{\beta_2-\beta_1}\beta_2^n, n\geq 0$$

最后得到满足题给差分方程的一个稳定但非因果的系统，它的单位取样响应为

$$h(n)=h_1(n)+h_2(n)=\frac{1}{\beta_2-\beta_1}(\beta_1^n u(-n-1)+\beta_2^n u(n))$$

2.34(1)求差分方程两边的 Z 变换

$$z^{-1}Y(z)-\frac{5}{2}Y(z)+zY(z)=X(z)$$

由上式得到系统函数

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1}{z^{-1}-\frac{5}{2}+z}=\frac{z}{(z-2)(z-\frac{1}{2})}$$

系统函数的零点：$z=0$；极点：$\beta_1=2$，$\beta_2=\frac{1}{2}$。系统单位取样响应的 3 种可能选择方案如下(参考图 1.10 所示的极－零点图)。

（1） 收敛域取为 $2<|z|\leq\infty$，系统是因果的，但不是稳定的。得到系统的单位取样响应为

$$h(n)=\frac{\beta_1^n-\beta_2^n}{\beta_1-\beta_2}u(n)=\frac{1}{2-\frac{1}{2}}[2^n-(\frac{1}{2})^n]u(n)=\frac{2}{3}(2^n-2^{-n})u(n)$$

（2） 收敛域为 $\frac{1}{2}<|z|<2$，系统是稳定的，但不是因果的。得到系统的单位取样响应为

$$h(n)=\frac{1}{\beta_1-\beta_2}[\beta_1^n u(-n-1)+\beta_2^n u(n)]=-\frac{2}{3}[2^n u(-n-1)+(\frac{1}{2})^n u(n)]$$

（3） 收敛域取为 $|z|<\frac{1}{2}$，系统既不是稳定的，又不是因果的。因收敛域为 $|z|<\beta_1$，故 $h(n)$ 为

左边序列，又因$\lim_{z\to\infty} H(z)=0$为有限值，故$h_2(n)$还是逆因果序列。采用留数定理法，被积函数$H(z)z^{n-1}=\frac{z^n}{(z-\beta_1)(z-\beta_2)}$，当 n<0 时极点$\beta_1=\frac{1}{2}$和$\beta_2=2$都在积分围线外，且被积函数的分母与分子多项式阶数之差为 2-n>2(因 n<0)，因此有

$$h(n)=\frac{1}{\beta_1-\beta_2}(-\beta_1^n+\beta_2^n)u(-n-1)=-\frac{2}{3}(-2^n+2^n)u(-n-1)$$

(4)验证每一种方案都满足差分方程：前面已经由差分方程求得系统函数$H(z)=\frac{1}{z^{-1}-\frac{5}{2}+z}$，故只要验证每一种方案的系统函数即可。

（1）

$$H(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{2}{3}(2^n-2^{-n})u(n)z^{-n}=\frac{2}{3}\sum_{n=-\infty}^{\infty}[(2z^{-1})^n-(2^{-1}z^{-1})^n]=\frac{2}{3}(\frac{1}{1-2z^{-1}}-\frac{1}{1-2^{-1}z^{-1}})$$
$$=\frac{2}{3}(\frac{1}{1-2z^{-1}}-\frac{z}{z-2^{-1}})=\frac{1}{z^{-1}-\frac{5}{2}+z}$$

（2）

$$H(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}-\frac{2}{3}[(2^n u(-n-1)-2^{-n}u(n))]z^{-n}=-\frac{2}{3}[\sum_{n=-\infty}^{-1}(2z^{-1})^n-\sum_{n=0}^{\infty}(2^{-1}z^{-1})^n]$$
$$=-\frac{2}{3}[\sum_{n=1}^{\infty}(2^{-1}z)^n+\frac{1}{1-2^{-1}z^{-1}}]=-\frac{2}{3}(\frac{2^{-1}z}{1-2z^{-1}}+\frac{1}{1-2z^{-1}})=\frac{1}{z^{-1}-\frac{5}{2}+z}$$

（3）

$$H(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}-\frac{2}{3}(2^n-2^{-n})u(-n-1)z^{-n}=\frac{2}{3}[\sum_{n=-\infty}^{-1}(2z^{-1})^n-\sum_{n=-\infty}^{-1}(2^{-1}z^{-1})^n]$$
$$=\frac{2}{3}[\sum_{n=1}^{\infty}(2z^{-1})^n-\sum_{n=1}^{\infty}(2z)^n]=\frac{2}{3}(\frac{2^{-1}z}{1-2z^{-1}}-\frac{2z}{1-2z})=\frac{1}{z^{-1}-\frac{5}{2}+z}$$

2.35 $z^{-1}Y(z)-\frac{10}{3}Y(z)+zY(z)=X(z)$

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1}{z^{-1}-\frac{10}{3}+z}=\frac{z}{(z-3)(z-\frac{1}{3})}$$

极点为 3，$\frac{1}{3}$。系统稳定，单位圆在收敛域内，即$\frac{1}{3}<|z|<3$，对应于双边序列。

$$H(z)=\frac{z}{(z-3)(z-\frac{1}{3})}=\frac{A_1}{z-3}+\frac{A_2}{z-\frac{1}{3}}=H_1(z)+H_2(z)$$

其中$A_1=\frac{z}{z-\frac{1}{3}}|_{z=3}=\frac{9}{8}$，$A_2=\frac{z}{z-3}|_{z=\frac{1}{3}}=-\frac{1}{8}$

由收敛域$|z|<3$知$h_1(n)$为左边序列，由$\lim_{z\to 0}H_1(z)=0$为有限值知$h_2(n)$是逆因果序列。采用留数定理法，被积函数$H_1(z)z^{n-1}=\frac{9}{8}\frac{z^{n-1}}{z-3}$，当n<0时极点3在积分围线外，且被积函数的分母与分子多项式阶数之差为$1-n+1\ge 2$(因n<0)，因此有

$$h_1(n)=-\mathrm{Re}\,s[H_1(z)z^{n-1},3]=\frac{-9}{8}z^{n-1}|_{z=3}=\frac{-3}{8}3^n,n<0$$

由收敛域$|z|>\frac{1}{3}$知$h_2(n)$为右边序列，因$\lim_{z\to\infty}H_2(z)=\frac{-1}{8}$为有限值，故$h_2(n)$是因果序列。采用留数定理法，被积函数$H_2(z)z^{n-1}=\frac{-1}{8}\frac{z^{n-1}}{z-\frac{1}{3}}$，当$n\ge 0$时积分围线内有唯一的极点$\frac{1}{3}$，因此

$$h_2(n)=\mathrm{Re}\,s[H_2(z)z^{n-1},\frac{1}{3}]=\frac{-1}{8}z^{n-1}|_{z=\frac{1}{3}}=\frac{-3}{8}(\frac{1}{3})^n,n\ge 0$$

最后得到

$$h(n)=h_1(n)+h_2(n)=-\frac{3}{8}[3^n u(-n-1)-1+3^{-n}u(n)]$$

2.36(1)根据差分方程可画出系统的框图，如图1.11所示。

(2)求差分方程两边的Z变换

$$Y(z)-2r\cos\theta z^{-1}Y(z)+r^2z^{-2}Y(z)=X(z)$$

由上式得到系统函数

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1}{1-2rcos\theta z^{-1}+r^2z^{-2}}=\frac{z^2}{(z-\beta_1)(z-\beta_2)}$$

其中，极点：

$\beta_1=re^{j\theta}=r(\cos\theta+j\sin\theta)$，$\beta_2=re^{-j\theta}=r(\cos\theta-j\sin\theta)$

$x(n)=a^nu(n)$的Z变换为$X(z)=\frac{1}{1-az^{-1}}$，因此可以得到

$$Y(z)=\frac{z^2}{(z-\beta_1)(z-\beta_2)(1-az^{-1})}=\frac{z^3}{(z-\beta_1)(z-\beta_2)(z-a)}$$

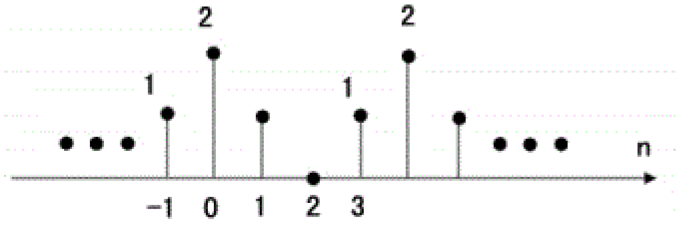
因为是因果系统，故收敛域为$|z|>\max[\beta_1,\beta_2,a]$，且有$y(n)=0$，$n<0$。对于$n\ge 0$，采用留数定理法求$Y(z)$逆Z变换，被积函数

$Y(z)z^{n-1}=\frac{z^{n+2}}{(z-\beta_1)(z-\beta_2)(z-a)}$在积分转线内有3个极点：$z_1=\beta_1$，$z_2=\beta_2$，$z_3=a$。因此有

$$
\begin{aligned}
y(n) &= \sum_{i=1}^{3} \operatorname{Re} s[Y(z)z^{n-1}, z_i] \\
&= \frac{z^{n+2}}{(z-\beta_2)(z-a)}\Big|_{z=\beta_1} + \frac{z^{n+2}}{(z-\beta_1)(z-a)}\Big|_{z=\beta_2} + \frac{z^{n+2}}{(z-\beta_1)(z-\beta_2)}\Big|_{z=a} \\
&= \frac{\beta_1^{n+2}}{(\beta_2-\beta_1)(\beta_1-a)} + \frac{\beta_2^{n+2}}{(\beta_2-\beta_1)(\beta_2-a)} + \frac{a^{n+2}}{(a-\beta_1)(a-\beta_2)} \\
&= \frac{(\beta_2-a)\beta_1^{n+2} - (\beta_1-a)\beta_2^{n+2} + (\beta_1-\beta_2)a^{n+2}}{(\beta_1-\beta_2)(\beta_1-a)(\beta_2-a)} \\
&= \frac{(re^{-j\theta}-a)(re^{j\theta})^{n+2} - (re^{j\theta}-a)(re^{-j\theta})^{n+2} + j2r\sin\theta a^{n+2}}{j2r\sin\theta(re^{j\theta}-a)(re^{-j\theta}-a)}, n \ge 0
\end{aligned}
$$

第三章 离散傅里叶变换及其快速算法习题答案参考

3.1 图 P3.1 所示的序列 $\tilde{x}(n)$ 是周期为 4 的周期性序列。请确定其傅里叶级数的系数 $\tilde{X}(k)$。



图P3.1

解：$$\tilde{X}(k)=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)W_N^{nk}=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(-n)W_N^{nk}=\sum_{n=0}^{-(N-1)}\tilde{x}(n)W_N^{-nk}=\tilde{X}(-k)=\tilde{X}^*(k)$$

3.2 （1）设 $\tilde{x}(n)$ 为实周期序列，证明 $\tilde{x}(n)$ 的傅里叶级数 $\tilde{X}(k)$ 是共轭对称的，即 $\tilde{X}(k)=X^*(-k)$。

（2）证明当 $\tilde{x}(n)$ 为实偶函数时，$\tilde{X}(k)$ 也是实偶函数。

证明：（1）

$$\tilde{X}(-k)=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)W_N^{-nk}$$

$$\tilde{X}^*(-k)=[\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)W_N^{-nk}]^*=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)W_N^{nk}=\tilde{X}(k)$$

（2）因 $\tilde{x}(n)$ 为实函数，故由（1）知有

$\tilde{X}(k)=X^*(-k)$ 或 $\tilde{X}(-k)=X^*(k)$

又因 $\tilde{x}(n)$ 为偶函数，即 $\tilde{x}(n)=\tilde{x}(-n)$，所以有

$$\tilde{X}(k)=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)W_N^{nk}=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(-n)W_N^{nk}=\sum_{n=0}^{-(N-1)}\tilde{x}(n)W_N^{-nk}=\tilde{X}(-k)=\tilde{X}^*(k)$$

3.3 图 P3.3 所示的是一个实数周期信号 $\tilde{x}(n)$。利用 DFS 的特性及 3.2 题的结果，不直接计算其傅里叶级数的系数 $\tilde{X}(k)$，确定以下式子是否正确。

（1）$\tilde{X}(k)=\tilde{X}(k+10)$，对于所有的 k；

（2）$\tilde{X}(k)=\tilde{X}(-k)$，对于所有的 k；

（3）$\tilde{X}(0)=0$；

(4) $\tilde{X}(k)e^{jk\frac{2\pi}{5}}$**，对所有的 k 是实函数。**

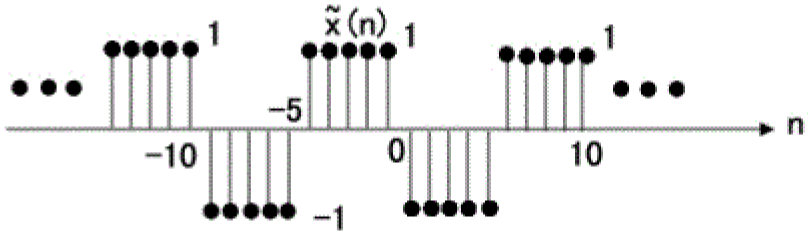


图 P3.3

解：(1) 正确。因为 $\tilde{x}(n)$ 一个周期为 N＝10 的周期序列，故 $\tilde{X}(k)$ 也是一个周期为 N＝10 的周期序列。

(2) 不正确。因为 $\tilde{x}(n)$ 一个实数周期序列，由例 3.2 中的 (1) 知，$\tilde{X}(k)$ 是共轭对称的，即应有 $\tilde{X}(k)=X^*(-k)$，这里 $\tilde{X}(k)$ 不一定是实数序列。

(3) 正确。因为 $\tilde{x}(n)$ 在一个周期内正取样值的个数与负取样值的个数相等，所以有

$$\tilde{X}(0)=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)=0$$

(4) 不正确。根据周期序列的移位性质，$\tilde{X}(k)e^{jk\frac{2\pi}{5}}=\tilde{X}(k)W_{10}^{-2k}$ 对应与周期序列 $\tilde{x}(n+2)$，如图 P3.3_1 所示，它不是实偶序列。由题 3.2 中的 (2) 知道，$\tilde{X}(k)e^{jk\frac{2\pi}{5}}$ 不是实偶序列。

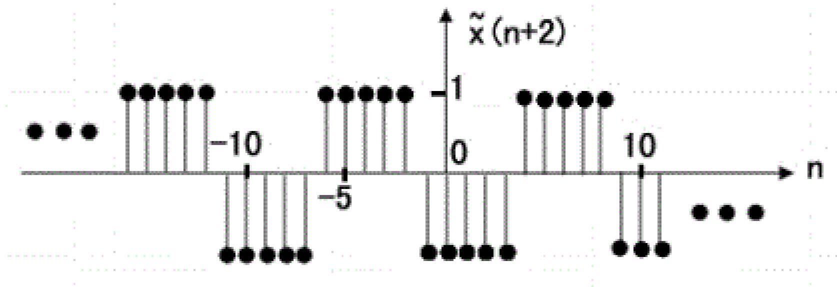


图 P3.3_1

3.4 设 $x(n)=R_3(n)$**，**$\tilde{x}(n)=\sum_{r=-\infty}^{\infty}x(n+6r)$**，求** $\tilde{X}(k)$**，并作图表示** $\tilde{x}(n)$ **和** $\tilde{X}(k)$**。**

解：$$\tilde{X}(k)=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)W_N^{nk}=\sum_{n=0}^{5}\tilde{x}(n)W_6^{nk}=\sum_{n=0}^{2}W_6^{nk}=\frac{1-W_6^{3k}}{1-W_6^{k}}=\frac{1-e^{-j\pi k}}{1-e^{-j\frac{\pi}{3}k}}=\frac{1-(-1)^k}{1-e^{-j\frac{\pi}{3}k}}$$

$$\tilde{X}(0)=1$$
$$\tilde{X}(2)=\tilde{X}(4)=0$$
$$\tilde{X}(1)=\frac{2}{1-(1-j\sqrt{3})/2}=1-j\sqrt{3}$$
$$\tilde{X}(3)=\frac{2}{1-e^{-j\pi}}=1$$
$$\tilde{X}(5)=\frac{2}{1-(1+j\sqrt{3})}=1+j\sqrt{3}$$

$\tilde{x}(n)$ 和 $\tilde{X}(k)$ 的图形如图 3.4_1 所示：

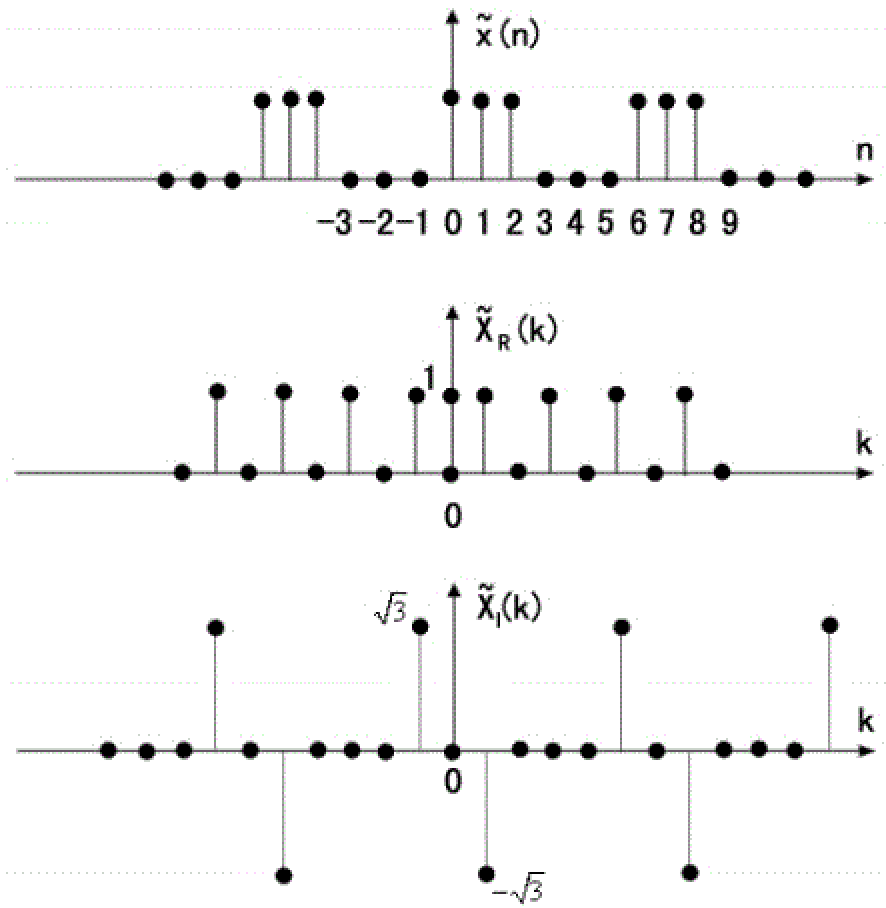


图 P3.4_1

3.5 在图 P3.5 中表示了两个周期序列 $\tilde{x}_1(n)$ 和 $\tilde{x}_2(n)$，两者的周期都为 6，计算这两个序列的周期卷积 $\tilde{x}_3(n)$，并图表示。

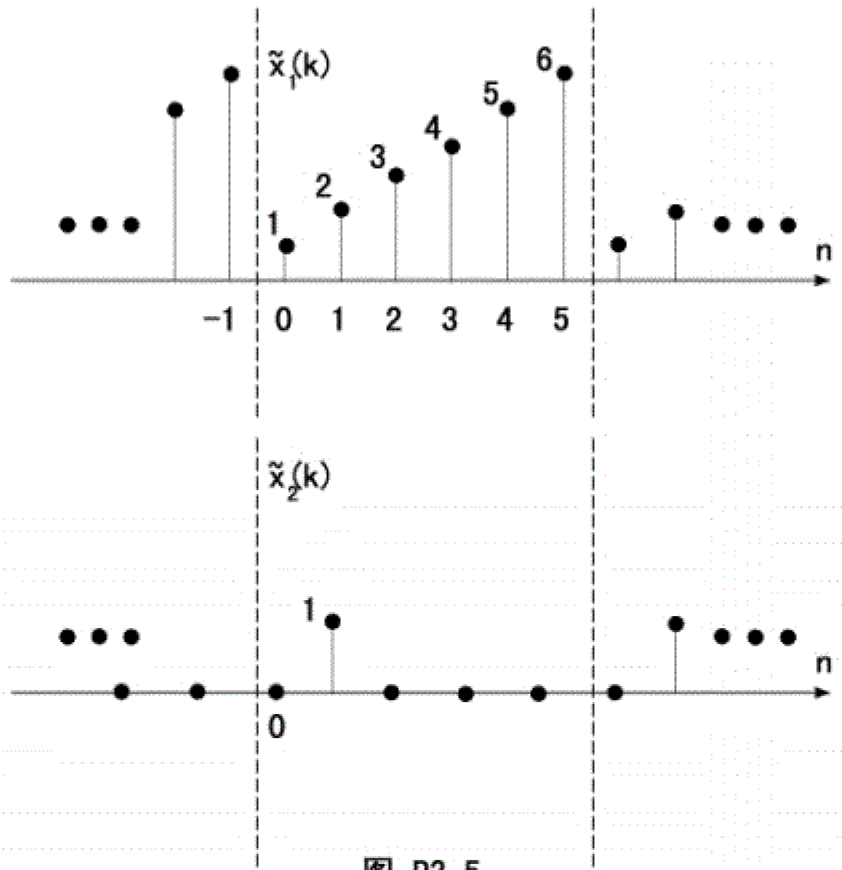
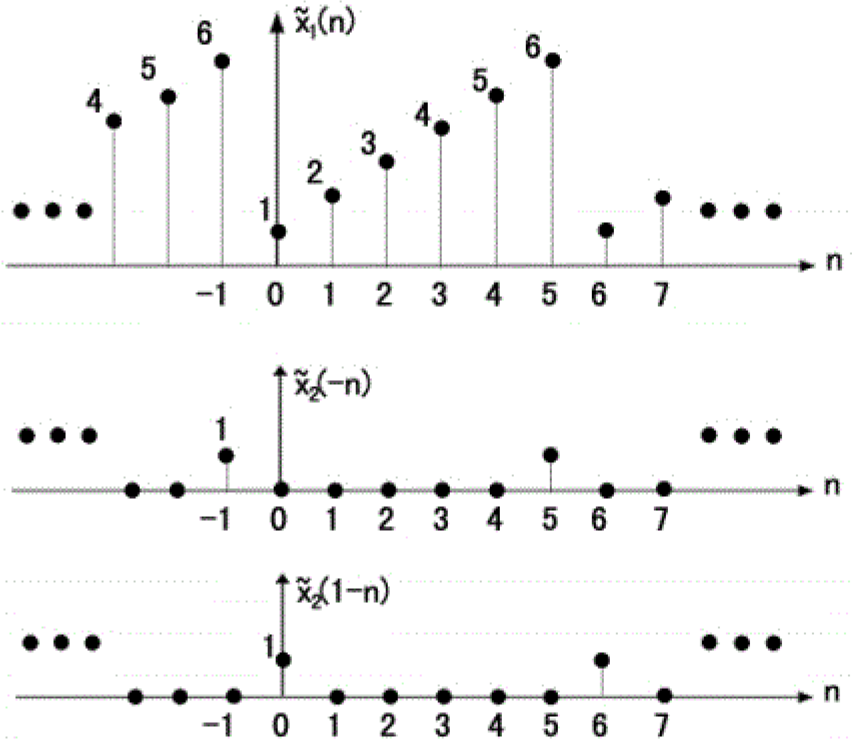
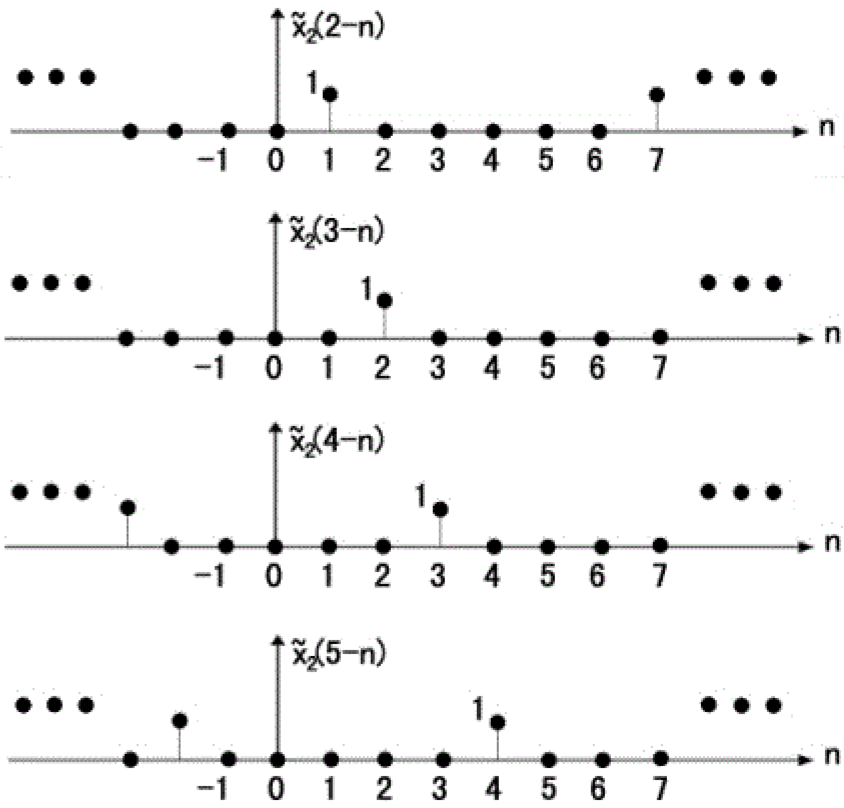


图 P3.5

解：图 P3.5_1 所示的是计算这两个序列的周期卷积 $\tilde{x}_3(n)$ 的过程，可以看出，$\tilde{x}_3(n)$ 是 $\tilde{x}_1(n)$ 延时 1 的结果，即 $\tilde{x}_3(n)=\tilde{x}_1(n-1)$。





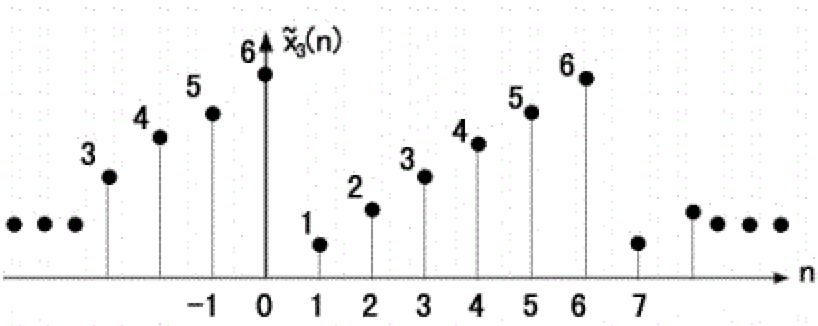


图 P3.5_1

3.5 计算下列序列的 N 点 DFT：

(1) $x(n)=\delta(n)$

(2) $x(n)=\delta[(n-n_0)]_N * R_N(n), 0<n_0<N$

(3) $x(n)=a^n, 0\le n\le N-1$

(4) $x(n)=\cos(\frac{2\pi}{N}nm), 0\le n\le N-1, o<m<N$

解：（1） $X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}\delta(n)W_N^{nk}=\delta(0)=1, 0\le k\le N-1$

（2） $X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}\delta[(n-n_0)]_N R_N(n)W_N^{nk}=W_N^{n_0k}, 0\le k\le N-1$

（3） $X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}a^{n}W_N^{nk}=\frac{1-a^{N}W_N^{Nk}}{1-aW_N^{k}}=\frac{1-a^{N}}{1-aW_N^{k}},0\le k\le N-1$

（4）

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}\cos(\frac{2\pi}{N}nm)W_N^{nk}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N-1}\left(e^{j\frac{2\pi}{N}nm}+e^{-j\frac{2\pi}{N}nm}\right)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1-e^{-j2\pi(k-m)}}{1-e^{-j\frac{2\pi}{N}(k-m)}}+\frac{1-e^{-j2\pi(k+m)}}{1-e^{-j\frac{2\pi}{N}(k+m)}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{e^{j\pi(k-m)}-e^{-j\pi(k-m)}}{e^{j\frac{\pi}{N}(k-m)}-e^{-j\frac{\pi}{N}(k-m)}}e^{-j\frac{N+1}{N}(k-m)\pi}+\frac{e^{j\pi(k+m)}-e^{-j\pi(k+m)}}{e^{j\frac{\pi}{N}(k+m)}-e^{-j\frac{\pi}{N}(k+m)}}e^{-j\frac{N+1}{N}(k+m)\pi}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{\sin\left[\left(k-m\right)\pi\right]}{\sin\left[\left(k-m\right)\pi/N\right]}e^{-j\frac{N+1}{N}(k-m)\pi}+\frac{\sin\left[\left(k+m\right)\pi\right]}{\sin\left[\left(k+m\right)\pi/N\right]}e^{-j\frac{N+1}{N}(k+m)\pi}\right\}$$

$$=\begin{cases}\frac{N}{2},k=m\text{或}k=-m\\0,\text{其他}\end{cases}$$

3.7　图 P3.7 表示的是一个有限长序列 $x(n)$，画出 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 的图形。

（1） $x_1(n)=x\left[\left(n-2\right)\right]_4R_4(n)$

（2） $x_2(n)=x\left[\left(2-n\right)\right]_4R_4(n)$

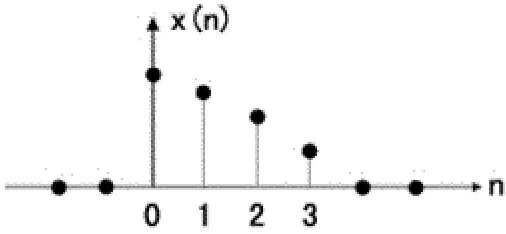
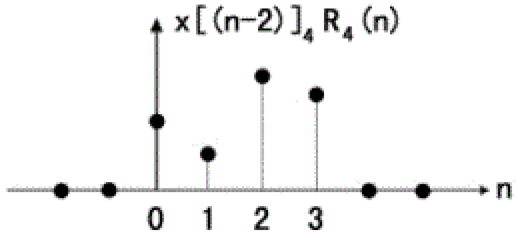


图 P3.7

解：$x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 的图形如图 P3.7_1 所示：



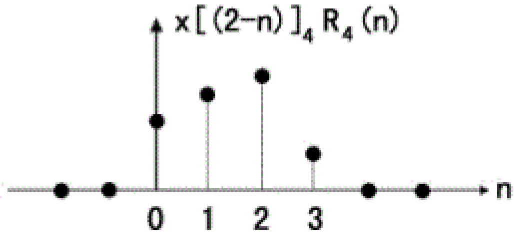


图 P3.7_1

3.8 图 P3.8 表示一个 4 点序列 $x(n)$ 。

(1) 绘出 $x(n)$ 与 $x(n)$ 的线性卷积结果的图形。

(2) 绘出 $x(n)$ 与 $x(n)$ 的 4 点循环卷积结果的图形。

(3) 绘出 $x(n)$ 与 $x(n)$ 的 8 点循环卷积结果的图形，并将结果与（1）比较，说明线性卷积与循环卷积之间的关系。

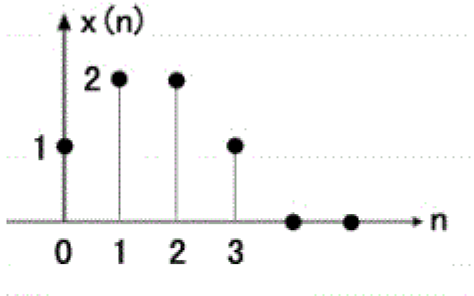


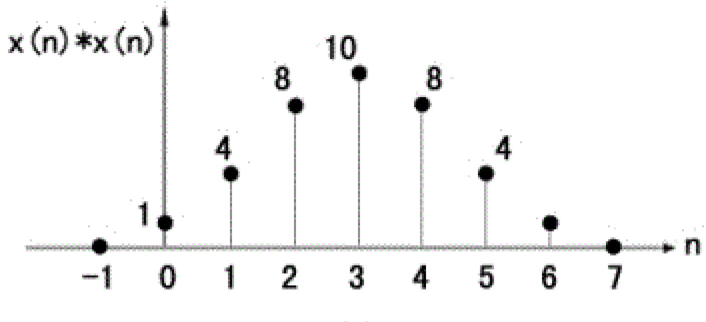
图 P3.8

解：(1) 图 P3.8_1 (1) 所示的是 $x(n)$ 与 $x(n)$ 的线性卷积结果的图形。

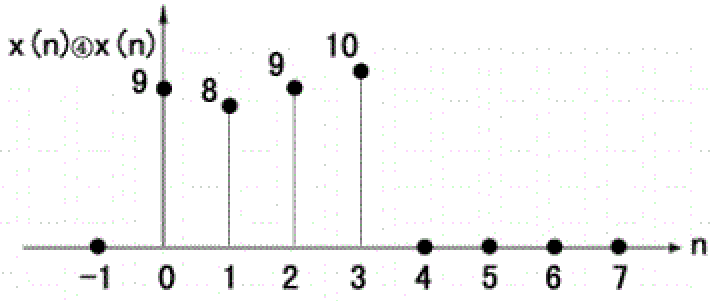
(2) 图 P3.8_1 (2) 所示的 $x(n)$ 与 $x(n)$ 的 4 点循环卷积结果的图形。

(3) 图 P3.8_1 (3) 所示的 $x(n)$ 与 $x(n)$ 的 8 点循环卷积结果的图形。

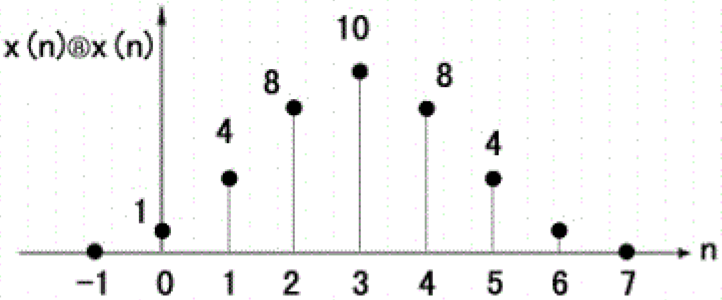
可以看出，$x(n)$ 与 $x(n)$ 的 8 点循环卷积结果的图形与（1）中 $x(n)$ 与 $x(n)$ 的线性卷积结果的图形相同。



(1)



(2)



(3)

图 P3.8_1

3.9 $x(n)$ 是一个长度为N的序列，试证明 $x[(-n)]_N = x[(N-n)]_N$。

证明：因为 $x[(-n)]_N$ 是由 $x(n)$ 周期性重复得到的周期序列，故可表示为 $x[(-n)]_N = x[(-n+rN)]_N$

取 r＝1，上式即为 $x[(-n)]_N = x[(N-n)]_N$。

3.10 已知序列 $x(n)=a^n u(n), 0<a<1$。现在对其 Z 变换在单位圆上进行 N 等分取样，取值为 $X(k)=X(z)|_{z=W_N^{-k}}$，求有限长序列的 IDFT。

解：在 z 平面的单位圆上的 N 个等角点上，对 z 变换进行取样，将导致相应时间序列的周期延拓，延拓周期为N，即所求有限长序列的 IDFT 为

$$x_p(n)=\sum_{r=-\infty}^{\infty} x(n+rN)=\sum_{r=-\infty}^{\infty} a^{n+rN}u(n+rN)=\frac{a^n}{1-a^N}, n=0,1,...,N-1$$

3.11 若长为N的有限长序列 $x(n)$ 是矩阵序列 $x(n)=R_N(n)$。

（1）求 $Z[x(n)]$，并画出及其-零点分布图。

（2）求频谱 $X(e^{j\omega})$，并画出幅度 $|X(e^{j\omega})|$ 的函数曲线。

（3）求 $x(n)$ 的 DFT 的闭式表示，并与 $X(e^{j\omega})$ 对照。

解：（1）

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}R_N(n)z^{-n}=\sum_{n=0}^{N-1}z^{-n}=\frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}}$$

$$=\frac{z^N-1}{z^{N-1}(z-1)}=\frac{\prod_{k=0}^{N-1}(z-W_N^{-k})}{z^{N-1}(z-1)}=\frac{\prod_{k=1}^{N-1}(z-W_N^{-k})}{z^{N-1}}=\frac{\prod_{k=1}^{N-1}(z-e^{j\frac{2\pi}{N}k})}{z^{N-1}}$$

极点：$z_0=0(N-1\text{阶})$；零点：$z_{pk}=e^{j\frac{2\pi}{N}k},k=1,2,...,N-1$

图 P3.11_1(1)是极-零点分布图。

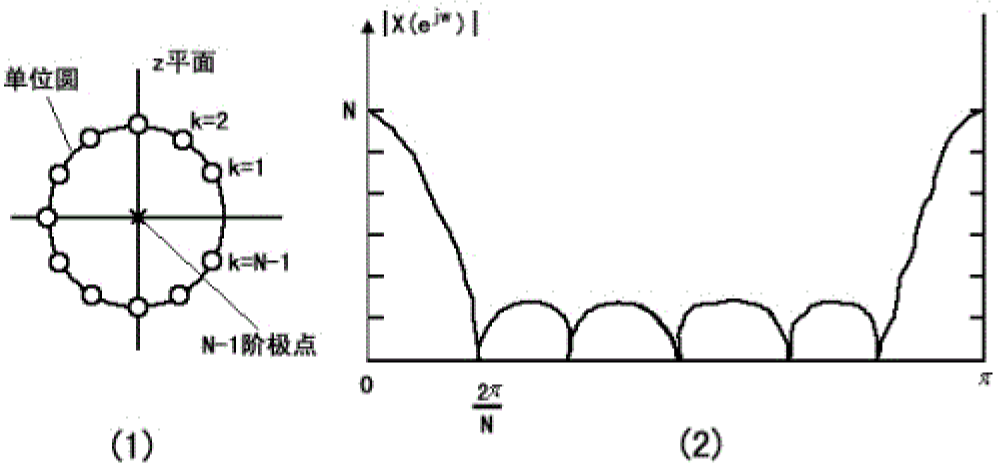
（2）$X(e^{j\omega})=X(z)|_{z=e^{j\omega}}=\dfrac{1-e^{-j\omega N}}{1-e^{-j\omega}}=\dfrac{e^{-j\frac{N}{2}\omega}(e^{j\frac{N}{2}\omega}-e^{-j\frac{N}{2}\omega})}{e^{-j\frac{1}{2}\omega}(e^{j\frac{1}{2}\omega}-e^{-j\frac{1}{2}\omega})}=\dfrac{\sin\left(\frac{N}{2}\omega\right)}{\sin\frac{\omega}{2}}e^{-j\frac{N-1}{2}\omega}$

$$|X(e^{j\omega})|=\left|\frac{\sin\left(\frac{N}{2}\omega\right)}{\sin\frac{\omega}{2}}\right|,\varphi(\omega)=-\frac{N-1}{2}\omega$$

图 P3.11_1(2)所示的是频谱幅度$|X(e^{j\omega})|$的函数曲线。

（3）$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}R_N(n)W_N^{nk}=\dfrac{1-W_N^{Nk}}{1-W_N^k}=\dfrac{1-e^{-j2\pi k}}{1-e^{-j\frac{2\pi}{N}k}}=X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}=\begin{cases}N,k=0\\0,k=1,2,...,N-1\end{cases}$

可见，$X(k)$等于$X(e^{j\omega})$在 N 个等隔频率点$\omega=\dfrac{2\pi}{N}(k=0,1,2,...,N-1)$上的取样值。



图P3.11_1

3.12 在图 P3.12 中画出了有限长序列$x(n)$，试画出序列$x[(-n)]_4$的略图。

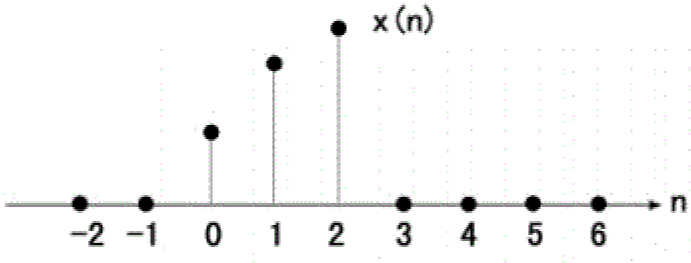
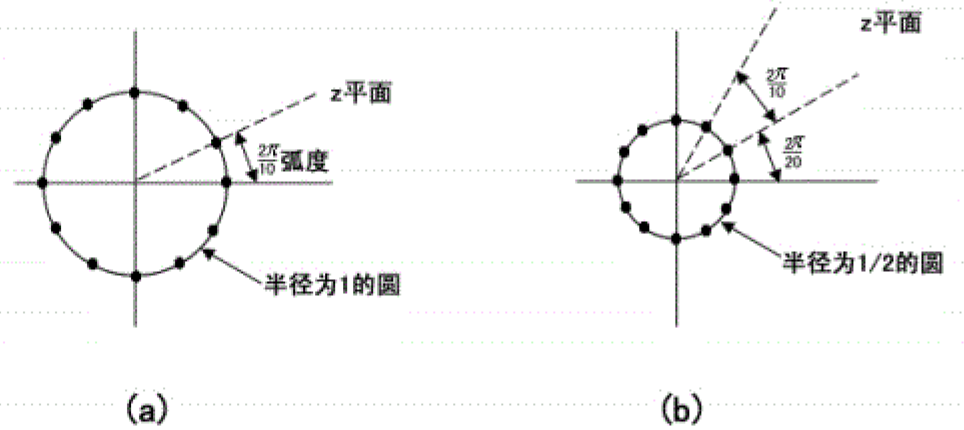


图 P3.12

解：

3.13 有限长序列的离散傅里叶变换相当与其 Z 变换在单位圆上的取样。例如 10 点序列 $x(n)$ 的离散傅里叶变换相当与 $X(z)$ 在单位圆 10 个等分点上的取样，如图 P3.13（a）所示。为求出图 P3.13（b）所示圆周上 $X(z)$ 的等间隔取样，即 $X(z)$ 在 $z=0.5e^{j[(2\pi k/10)+(\pi/10)]}$ 各点上的取样，试指出如何修改 $x(n)$，才能得到序列 $x_1(n)$，使其傅里叶变换相当于上述 Z 变换的取样。



图P3.13

解：$$X_1(k)=\sum_{n=0}^{9}x_1(n)e^{-j\frac{2\pi}{10}nk}=X(z)\Big|_{z=0.5\exp\left[j\left(\frac{2\pi}{10}k+\frac{\pi}{10}\right)\right]}=\sum_{n=0}^{9}x(n)(0.5)^{-n}e^{-j\frac{\pi}{10}n}e^{-j\frac{2\pi}{10}nk}$$

由上式得到 $x_1(n)=(0.5)^{-n}e^{-j\frac{\pi}{10}n}x(n)$

3.14 如果一台通用计算机计算一次复数乘法需要 100 μs，计算一次复数加法需要 20 μs，现在用它来计算 N＝1024 点的 DFT，问直接计算 DFT 和用 FFT 计算 DFT 各需要多少时间？

解：直接计算 DFT：

复数乘法：$N^2=1024^2=1048576$次$,1048576\times100\mu s\approx105s$

复数加法：$N(N-1)=1024\times1023=1047552$次$,1047552\times20\mu s\approx21s$

总计需要时间：$(105+21)s=126s$

用 FFT 计算 DFT：

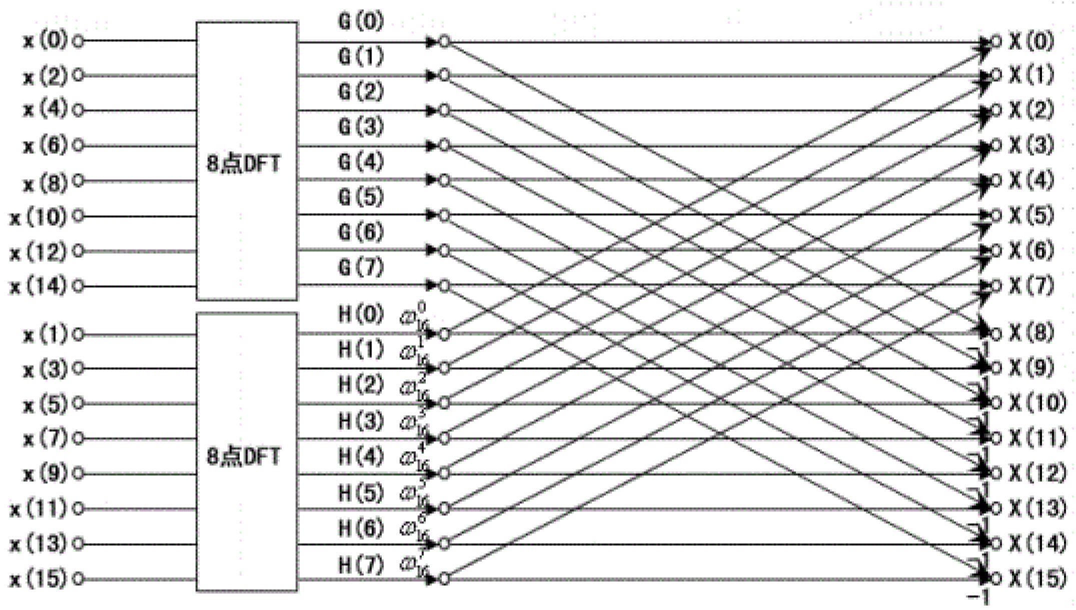
复数乘法：$\frac{N}{2}\log_2 N = 5120次, 5120\times 100\mu s \approx 0.512s$

复数加法：$N\log_2 N = 10240次, 10240\times 20\mu s \approx 0.2048s$

总计需要时间：$(0.512+0.2048)s = 0.7168s$

3.15 仿照本教材中的图 3.15，画出通过计算两个 8 点 DFT 的办法来完成一个 16 点 DFT 计算的流程图。

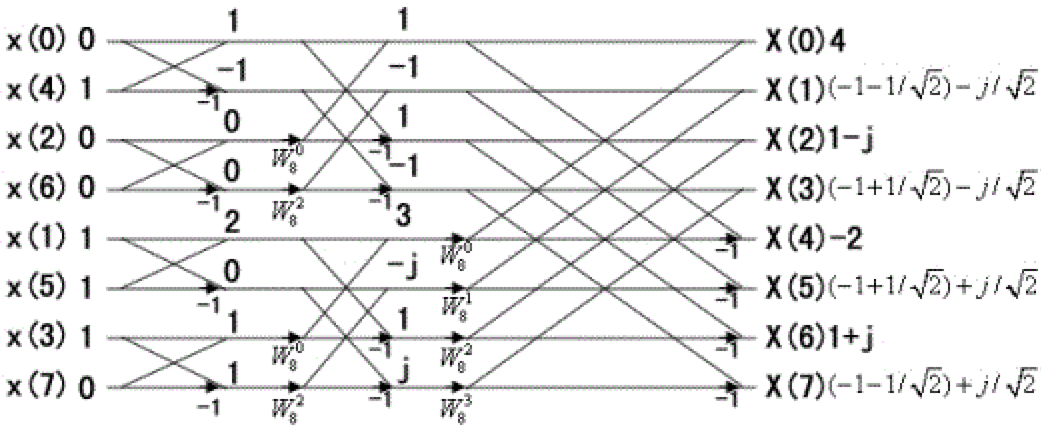
解：图 P3.15_1 所示的是用两个 8 点 DFT 来计算一个 16 点 DFT 的流程图。



图P3. 15_1

3.16 设 $x(n)=\{0,1,0,1,1,1\}$，现对 $x(n)$ 进行频谱分析。画出 FFT 的流程图，FFT 算法任选。并计算出每级蝶形运算的结果。

解：图 P3.16_1 所示的为时间轴选 8 点 FFT 的流程图和每级蝶形运算的结果。



图P3. 16_1

3.17 根据本教材中图 3.27 所示的流程图，研究基 2 频率抽选 FFT 算法。设 N 为 2 的任意整数幂，但不等于 8。为了给数据全部加上标号，假设数组中的数据被存在依次排列的复数寄存器中，这些寄存器的编号从 0 到 N－1，而数组的编号为 0 到 $\log_2 N$。具有最初数据的数组是第 0 列，蝶形的第一级输

出是第 1 列，依次类推。下列问题均与第 m 列的计算有关，这里 1≤m≤ $\log_2 N$，答案应通过 m 和 N 表示。

（1）要计算多少个蝶形?每个蝶形有多少次复数乘法和复数加法运算？整个流程图需要多少次复数加法和复数乘法运算？

（2）由第（m—1）列到 m 列，包含的 W_N 的幂是什么？

（3）蝶形的两个复数输入点的地址之间的间隔是多少？

（4）利用同样系数的各蝶形的数据地址间隔是什么？注意这种算法的蝶形计算的系数相乘是置于蝶形的输出端的。

解：（1）$\log_2 N$ 级，每级 $\dfrac{N}{2}$ 个蝶形，共 $\dfrac{N}{2}\log_2 N$ 个蝶形。每个蝶形有 1 次复数乘法和 2 次复数加法运算，故整个流程图需要 $N\log_2 N$ 次复数加法和 $\dfrac{N}{2}\log_2 N$ 次复数乘法运算；

（2）由第 m-1 列到 m 列，包含的 W_N 的幂是 $2^{m-1}k, k=0,1,...,2^{-m}N-1$；

（3）蝶形的两个复数输入点的地址之间的间隔是 $2^{-m}N$；

（4）利用同样系数的各蝶形的数据地址间隔是 $2^{-m+1}N, 2\le m\le \log_2 N$。

3.18 使用 FFT 对一模拟信号作谱分析，已知：①频率分辨率 F≤5Hz；②信号最高频率 $f_0=1.25kHz$。试确定下列参数：

（1）最小记录长度 t_p；

（2）取样点的最大时间间隔 T；

（3）一个记录长度中的最少点数。

解：（1）$\Delta f=\dfrac{1}{t_p}\le 5Hz, t_p\ge \dfrac{1}{5}s=0.2s$，最小记录长度 $t_p=0.2s$；

（2）$f_s=\dfrac{1}{T}\ge 2f_0=2\times 1.25kHz=2.5kHz$，取样点的最大时间间隔为 $T\le \dfrac{1}{2.5\times 10^3}s=0.4ms$；

（3）一个记录长度中的最少点数为 $N=\dfrac{t_p}{T}=\dfrac{0.2}{2.5\times 10^{-3}}=500$。

3.19 已知信号 $x(n)$ 和 FIR 数字滤波器的单位取样响应分别为

$$x(n)=\begin{cases}1,0\le n\le 15\\0,其他\end{cases}$$

$$h(n)=\begin{cases}a^n,0\le n\le 10\\0,其他\end{cases}$$

（1）使用基 2 FFT 算法计算 $x(n)$ 与 $h(n)$ 的线性卷积，写出计算步骤。

（2）用 C 语言编写程序，并上机计算。

解：（1）计算步骤：

①在序列尾部补零将 $h(n)$ 延长成为 16 点的序列；

②用基—2 FFT 算法分别计算 $x(n)$ 和 $h(n)$ 的 16 点 DFT，得到 $X(k)$ 和 $H(k)$；

③计算序列的乘积 $Y(k)=X(k)H(k)$；

④用基—2 FFT 算法计算 $Y(k)$ 的 16 点 IDFT，便得到 $x(n)$ 和 $h(n)$ 的线性卷积 $y(n)$。

（2）

3.20 **已知两个实序列 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 的离散傅里叶变换分别为 $X_1(k)$ 和 $X_2(k)$。设复序列 $g(n)$ 为 $g(n)=x_1(n)+jx_2(n)$ 其离散傅里叶变换为 $G(k)$。令 $G_{OR}(k),G_{ER}(k),G_{OI}(k),G_{EI}(k)$ 分别表示 $G(k)$ 的实部的奇数部分，实数的偶数部分，虚数的奇数部分和虚数的偶数部分。试用 $G_{OR}(k),G_{ER}(k),G_{OI}(k),G_{EI}(k)$ 来表示 $X_1(k)$ 和 $X_2(k)$。**

解：因 $G_{OR}(k)=\dfrac{1}{2}\left[G_R(k)-G_R(-k)\right]$，$G_{ER}(k)=\dfrac{1}{2}\left[G_R(k)+G_R(-k)\right]$

故 $G_R(k)=G_{OR}(k)+G_{ER}(k)$

类似有 $G_I(k)=G_{OI}(k)+G_{EI}(k)$

因此可以用 $G_{OR}(k),G_{ER}(k),G_{OI}(k),G_{EI}(k)$ 表示 $G(k)$

$$G(k)=G_R(k)+jG_I(k)=\left[G_{OR}(k)+G_{ER}(k)\right]+j\left[G_{OI}(k)+G_{EI}(k)\right] \quad ①$$

另一方面，由于 $g(n)=x_1(n)+jx_2(n)$，故有 $G(k)=X_1(k)+jX_2(k)$ ②

但因 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 都是实序列，故 $X_1(k)$ 和 $X_2(k)$ 的实部都是偶对称序列，虚部都是奇对称序列，因此应将①式整理成下列形式

$$G(k)=\left[G_{ER}(k)+jG_{OI}(k)\right]+j\left[G_{EI}(k)-jG_{OR}(k)\right] \quad ③$$

对照式②和式③，便可得到 $X_1(k)=G_{ER}(k)+jG_{OI}(k)$

和
$$X_2(k)=G_{EI}(k)-jG_{OR}(k)$$

3.21 **线性调频 Z 变换算法的一个用途是使频谱的谐振峰变尖。一般说来，如果在 z 平面内靠近极点的一条圆周线上计算序列的 Z 变换，则可以观察到谐振。在应用线性调频 Z 变换算法或计算离散傅里叶变换时，被分析的序列必须是有限长的，否则必须先将序列截断。截断序列的变换只能有零点（除 z=0 或 z=∞ 外），而原始序列的变换却有极点。本题的目的是要证明，在有限长序列的变换中仍可以看到谐振的响应。**

（1）令 $x(n)=u(n)$，画出它的 Z 变换 $X(z)$ 的极-零点图。

（2）令 $\hat{x}(n)=\begin{cases}1, 0\le n\le N-1\\ 0, \text{其他}\end{cases}$ 即 $\hat{x}(n)$ 等于从 N 点以后截断的 $x(n)$。画出 $\hat{x}(n)$ 的 Z 变换 $\hat{X}(z)$ 的极一零点略图。

（3）画出 $\left|\hat{X}(e^{j\omega})\right|$ 随 ω 变化的略图。并在你的图中画出 N 增加时对 $\left|\hat{X}(e^{j\omega})\right|$ 的影响。

解：（1） $X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}z^{-n}=\frac{1}{1-z^{-1}}=\frac{z}{z-1}$

极一零点略图如图 3.21_1（1）所示；

（2） $$\hat{X}(z)=\sum_{n=0}^{N-1}z^{-n}=\frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}}=\frac{z^N-1}{z^{N-1}(z-1)}=\frac{\prod_{k=0}^{N-1}(z-e^{j\frac{2\pi}{N}k})}{z^{N-1}(z-1)}=\frac{\prod_{k=1}^{N-1}(z-e^{j\frac{2\pi}{N}k})}{z^{N-1}}$$

零点：$z_k-e^{j\frac{2\pi}{N}k},k=1,2,...,N-1$；极点：z=0（N-1 阶）。极一零点略图如图 3.21_1（2）所示；

（3） $$\left|\hat{X}(e^{j\omega})\right|=\left|\frac{e^{j\omega}-1}{e^{-j\omega(N-1)}(e^{j\omega}-1)}\right|=\left|\frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)}\right|$$

如图 3.21_1（3）所示为 $\left|\hat{X}(e^{j\omega})\right|$ 随 ω 变化的略图，当 N 增加时，$\left|\hat{X}(e^{j\omega})\right|$ 的谐振峰变尖，同时增高。

第四章 数字滤波器的原理和设计方法课后习题答案

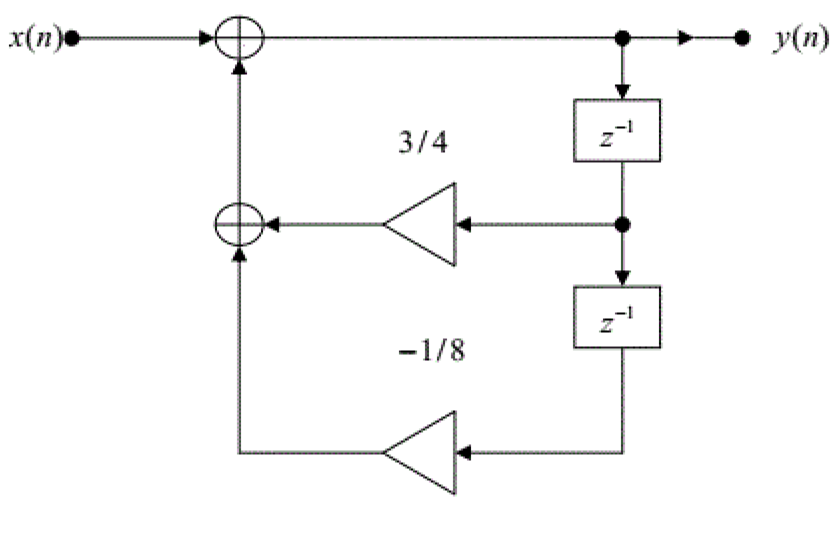
4.1 一个离散时间系统由下列差分方程表示：

$$y(n)-\frac{3}{4}y(n-1)+\frac{1}{8}y(n-2)=x(n)+\frac{1}{3}x(n-1)$$

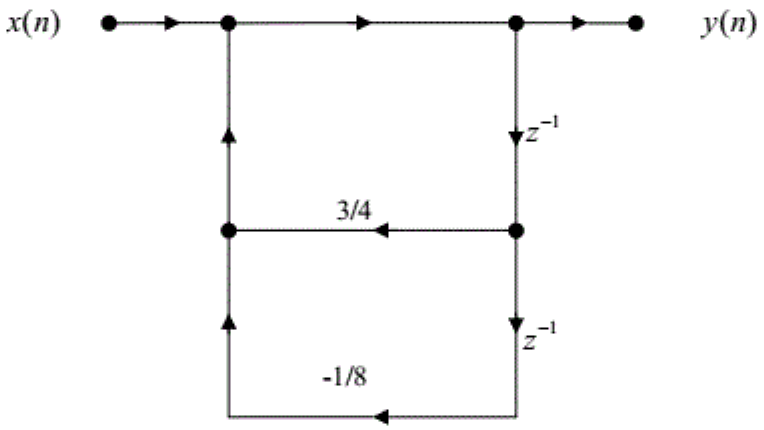
画出实现该系统的方框图。

(1) 画出该系统的信号流程图。

解 图 4.1（a）和（b）所示的分别是该系统的方框图和流程图。

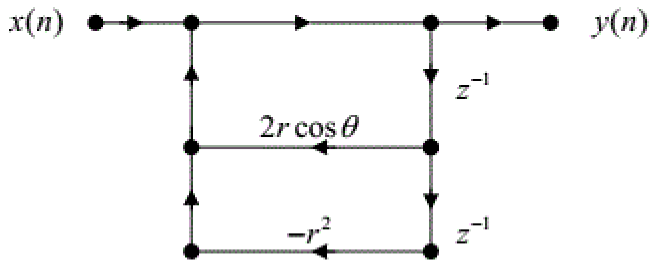


（a）

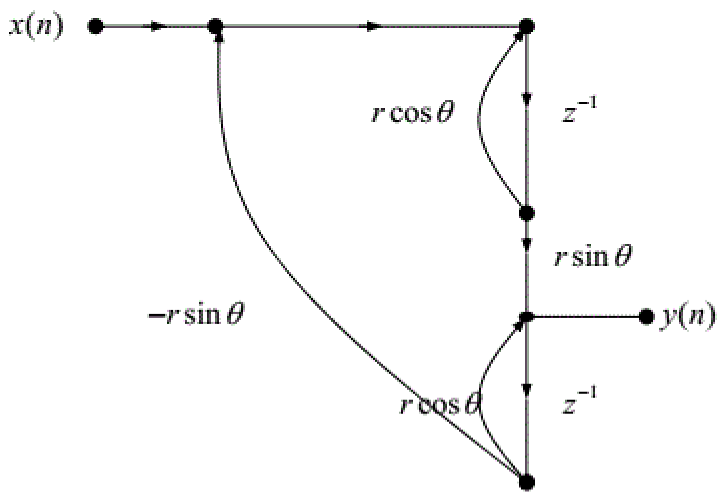


(b)

4.2 试求出图 P4.2 所示的两个网络的系统函数，并证明它们具有相同的极点。



网络Ⅰ



网络Ⅱ

解　网络Ⅰ：根据信号流程图写出差分方程

$$y(n) = 2r\cos\theta y(n-1) - r^2 y(n-2) + x(n)$$

由差分方程得系统函数

$$H_1(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - 2r\cos\theta z^{-1} + r^2 z^{-1}}$$

$$=\frac{1}{(rz^{-1}-e^{-j\theta})(rz^{-1}-e^{j\theta})}$$

由上式求出极点：

$$z_1=re^{j\theta} \quad 和 \quad z_2=re^{-j\theta}$$

网络Ⅱ： 由图所示的原网络写出以下方程

$$W(z)=X(z)=(r\sin\theta)z^{-1}Y(z)+(r\cos\theta)z^{-1}W(z) \qquad ①$$

$$Y(z)=(r\sin\theta)z^{-1}W(z)+(r\cos\theta)z^{-1}Y(z) \qquad ②$$

由式①得

$$W(z)=\frac{X(z)-(r\sin\theta)z^{-1}Y(z)}{1-(r\cos\theta)z^{-1}} \qquad ③$$

将③代入式②，得

$$Y(z)=\frac{(r\sin\theta)z^{-1}X(z)-(r^2\sin^2\theta)z^{-2}Y(z)}{1-(r\cos\theta)z^{-1}}+(r\cos\theta)z^{-1}Y(z)$$

由上式得系统函数

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{(r\sin\theta)z^{-1}}{1-2(r\cos\theta)z^{-1}+r^2z^{-2}}$$

$$=\frac{(r\sin\theta)z^{-1}}{(rz^{-1}-e^{-j\theta})(rz^{-1}-e^{j\theta})}$$

极点 $z_1=re^{j\theta}$ 和 $z_2=re^{-j\theta}$

可见网络Ⅰ和网络Ⅱ具有相同极点。

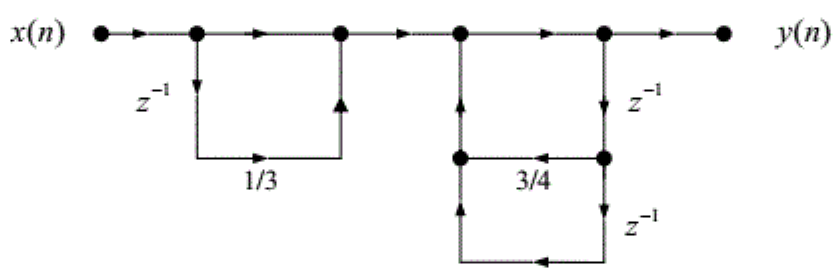
4.3 一个因果线性离散系统由下列差分方程描述：

$$y(n)-\frac{3}{4}y(n-1)+\frac{1}{8}y(n-2)=x(n)+\frac{1}{3}x(n-1)$$

试画出下列形式的信号流程图，对于级联和并联形式只用一阶节。

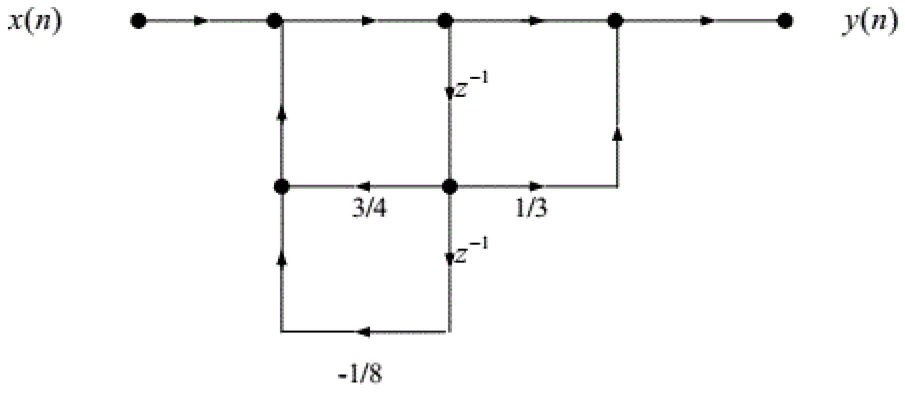
(1) 直接Ⅰ型；
(2) 直接Ⅱ型；
(3) 级联型；
(4) 并联型。

解 （1）直接Ⅰ型

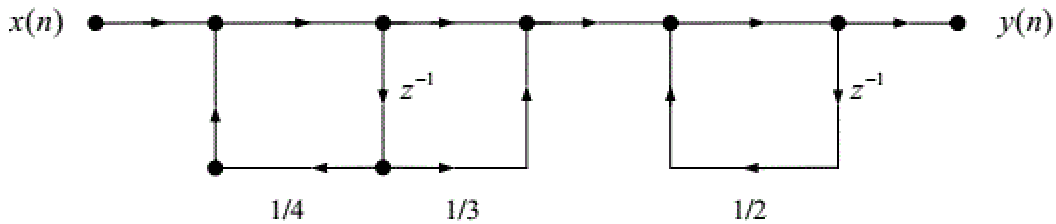


-1/8

（2）直接Ⅱ型



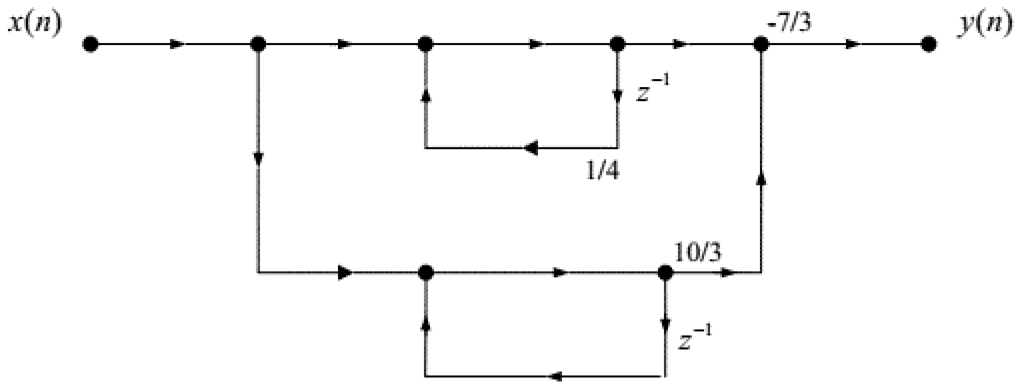
（3）级联型



将系统函数写成

$$H(z)=\frac{1+\frac{1}{3}z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}\times\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

（4）并联型



将系统函数写成部分分式形式

$$H(z)=\frac{-7/3}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}+\frac{10/3}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

4.4 用直接Ⅰ型和直接Ⅱ型结构实现以下系统函数：

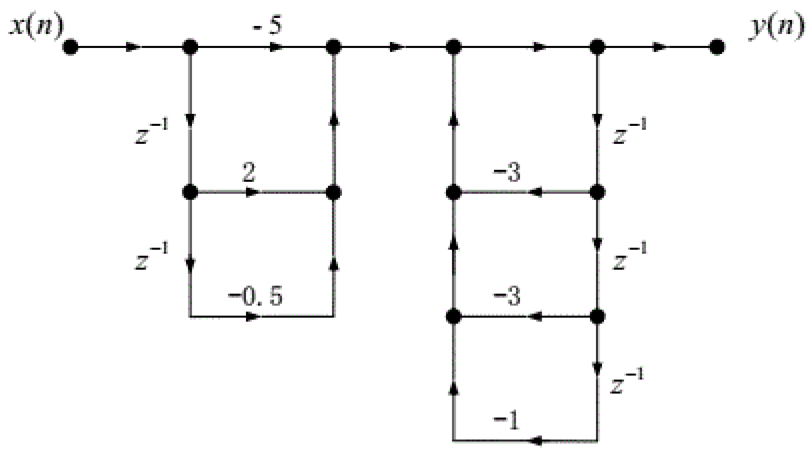
(1) $H(z)=\dfrac{-5+2z^{-1}-0.5z^{-2}}{1+3z^{-1}+3z^{-2}+z^{-3}}$

(2) $H(x)=0.8\dfrac{3z^{3}+2z^{2}+2z+5}{z^{3}+4z^{2}+3z+2}$

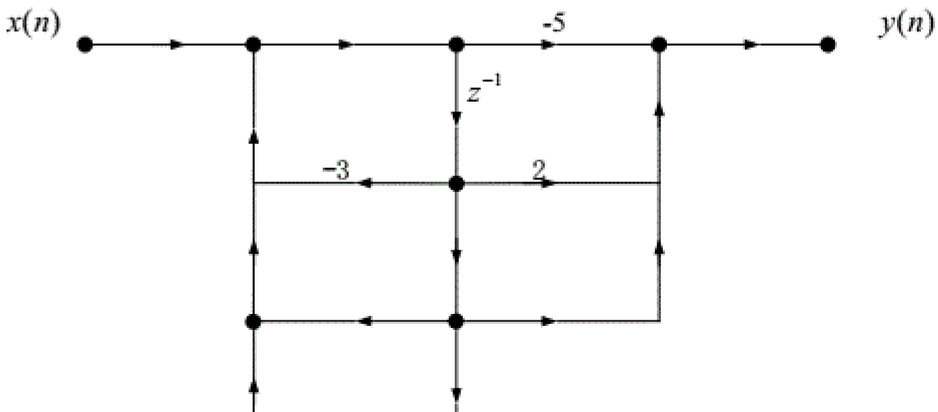
解 (1)根据系统函数写出差分方程

$$\begin{aligned}&y(n)+3y(n-1)+3y(n-2)+y(n-3)\\&=-5x(n)+2x(n-1)-0.5x(n-2)\end{aligned}$$

直接Ⅰ型结构可根据系统函数或差分方程得到，如图所示



将直接Ⅰ型结构中两个级联系统的位置互换，并省去前向网络的两个单位延迟器，便得到下图所示的直接Ⅱ型结构。



z^{-1}
−3　−0. 5
z^{-1}
−1

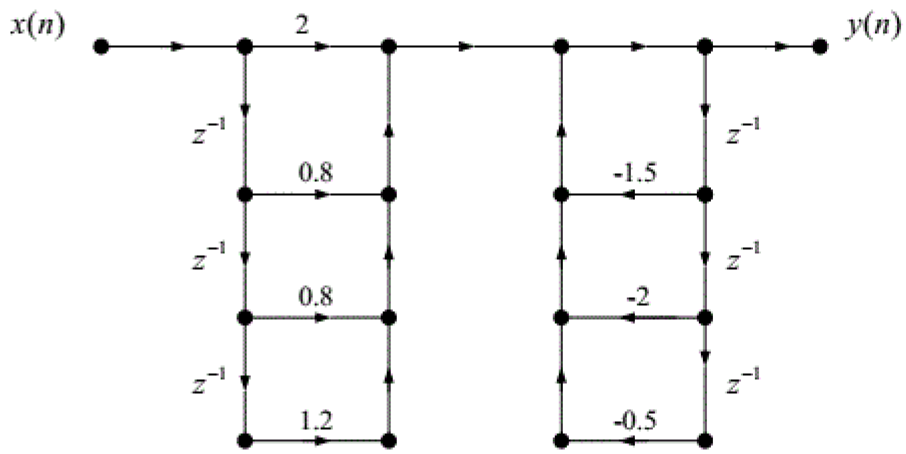
（2）由系统函数写出差分方程

$$\begin{aligned}&2y(n)+3y(n-1)+4y(n-2)+y(n-3)\\&=4x(n)+1.6x(n-1)+1.6x(n-2)+2.4x(n-3)\end{aligned}$$

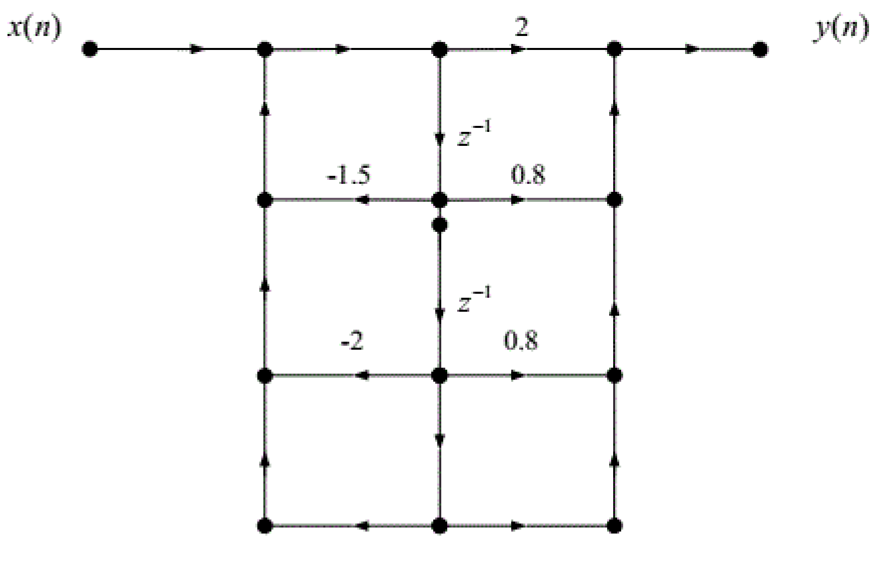
或

$$\begin{aligned}&y(n)+1.5y(n-1)+2y(n-2)+0.5y(n-3)\\&=2x(n)+0.8x(n-1)+0.8x(n-2)+1.2x(n-3)\end{aligned}$$

根据系统函数或差分方程得到下图所示的直接 I 型结构的信号流程图。



交换直接 I 型结构中两个级联系统的次序，并让 3 个延时器共用，便得到下图所示的直接 II 型结构的信号流程图。



z^{-1}

-0.5 1.2

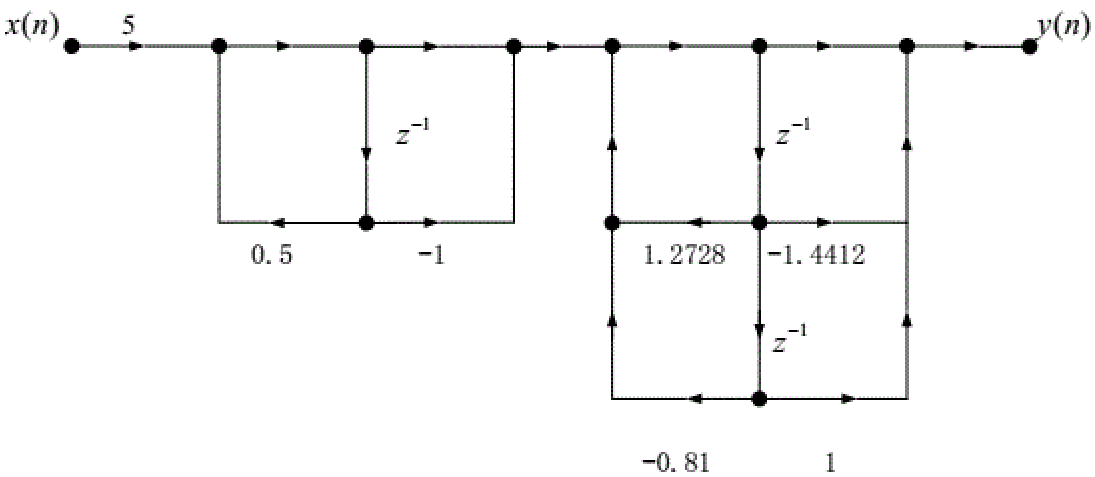
4.5 用级联型和并联型结构实现以下系统函数，每个二阶节都采用直接Ⅱ型结构。

$$H(z)=\frac{5(1-z^{-1})(1-1.4412z^{-1}+z^{-2})}{(1-0.5z^{-1})(1-1.2728z^{-1}+0.81z^{-2})}$$

/

解 （1）级联结构

根据$H(z)$的表示式可直接画出级联型结构的信号流程图，如下图所示。

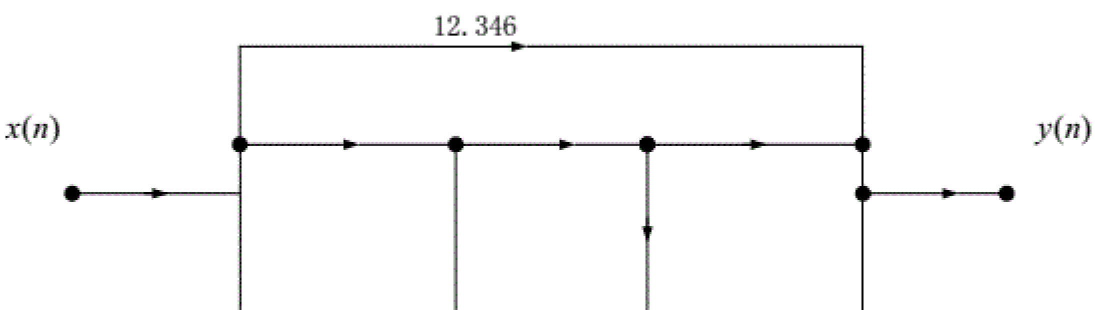


（2）并联型结构

将$H(z)$用部分分式表示为

$$H(z)=12.346+\frac{-3.978}{1-0.5z^{-1}}+\frac{-3.566-4.858z^{-1}}{1-1.2728z^{-1}+0.81z^{-2}}$$

按上式可画出并联型结构的信号流程图，如下图所示。



-3.978

z^{-1}

0.5

-1

-3.566

z^{-1}

1.2728 -4.858

z^{-1}

-0.81

4.6 试证明当 FIR 滤波器的冲激响应具有奇对称性质，即 h(n)=-h(N-1-n)时，其相位具有分段线性的性质，即

$$\varphi(\omega)=-\omega(\frac{N-1}{2})+\frac{\pi}{2}$$

具有

(1) 当 N 为奇数时，滤波器的幅度响应为

$$H(\omega)=\sum_{n=1}^{(N-1)/2}c(n)\sin(\omega n)$$

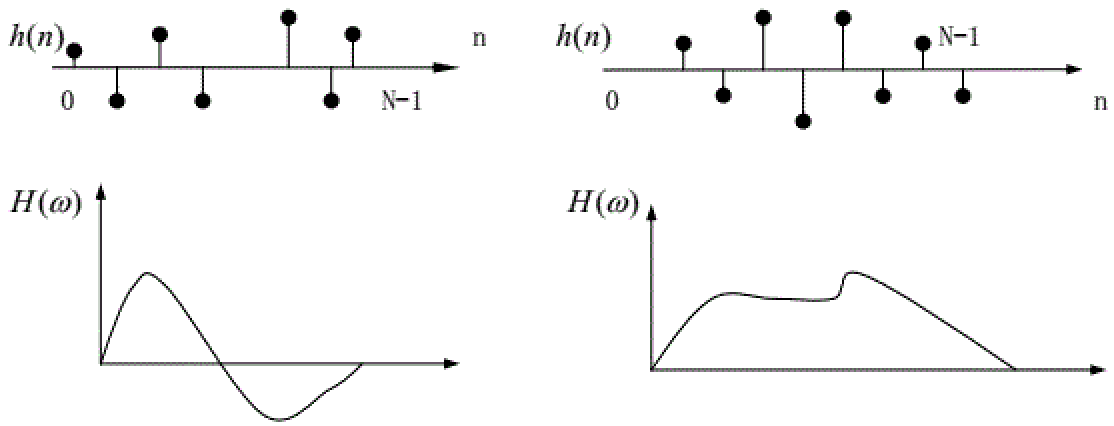
其中，$c(n)=2h(\frac{N-1}{2}-n)$，n=1, 2, …, $\frac{(N-1)}{2}$。

(2) 当 N 为偶数时，滤波器的幅度响应为

$$H(\omega)=\sum_{n=1}^{N/2}d(n)\sin[\omega(n-\frac{1}{2})]$$

其中，$d(n)=2h(\frac{N}{2}-n)$，n=1,2,…, $\frac{N}{2}$。

对于以上两种情况，幅度响应和相位响应曲线如图 P4.6 所示。



ω ω

0 π 2π 0 π 2π

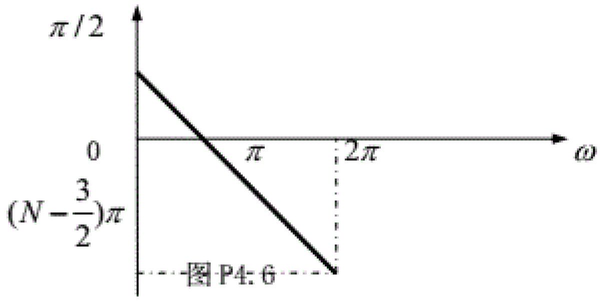


图 P4.6

解 （1）因滤波器的冲激响应具有反对称性质，即

$$h(n)=-h(N-1-n)$$

故当 N 为奇数时，有

$$h(\frac{N-1}{2})=-h(\frac{N-1}{2})=0$$

$$H(e^{j\omega})=e^{-j\frac{N-1}{2}\omega}\sum_{n=0}^{\frac{N-3}{2}} j2h(n)\sin((\frac{N-1}{2}-n)\omega)$$

因此

$$=e^{-j\frac{N-1}{2}\omega+j\frac{\pi}{2}}\sum_{n=0}^{\frac{N-3}{2}} 2h(n)\sin((\frac{N-1}{2}-n)\omega)$$

上式中 n 用 $\frac{N-1}{2}-n$ 置换，得

$$H(e^{j\omega})=e^{j(-\frac{N-1}{2}\omega+\frac{\pi}{2})}\sum_{n=1}^{\frac{N-1}{2}} 2h(\frac{N-1}{2}-n)\sin(\omega n)$$

由于滤波器的频率响应为

$$H(e^{j\omega})=H(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

所以 $H(e^{j\omega})=H(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$

令 $c(n)=2h(\frac{N-1}{2}-N)$，n=1, 2, …, $\frac{N-1}{2}$ 得滤波器的幅度响应

$$H(\omega)=\sum_{n=1}^{(N-1)/2} c(n)\sin(\omega n)$$

（2）$H(e^{j\omega})=\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(n)e^{-j\omega n}+\sum_{n=\frac{N}{2}}^{N-1} h(n)e^{-j\omega n}$

$$=\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(n)e^{-j\omega n}-\sum_{n=\frac{N}{2}}^{N-1} h(N-1-n)e^{-j\omega n}$$

$$=\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}h(n)e^{-j\omega n}-\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}h(n)e^{-j\omega(N-1-n)}$$

$$=\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}h(n)(e^{-j\omega n}-e^{-j\omega(N-1-n)})$$

$$=e^{-j\frac{\omega}{2}(N-1)}\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}h(n)(e^{j\omega}(\frac{N-1}{2}-n)-e^{-j\omega(\frac{N-1}{2}-n)})$$

$$=e^{-j\frac{\omega}{2}(N-1)}\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}j2h(n)\sin[\omega(\frac{N-1}{2}-n)]$$

$$=e^{-j(\frac{\omega}{2}(N-1)-\frac{\pi}{2})}\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}2h(n)\sin[\omega(\frac{N-1}{2}-n)]$$

用$\frac{N}{2}-n$置换 n，得

$$H(e^{j\omega})=e^{-j(\frac{\omega}{2}(N-1)-\frac{\pi}{2})}\sum_{n=1}^{\frac{N}{2}}2h(\frac{N}{2}-n)\sin[\omega(n-\frac{1}{2})]$$

滤波器的频率响应表示为

$$H(e^{j\omega})=H(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

所以

$$\varphi(\omega)=-\frac{N-1}{2}\omega+\frac{\pi}{2}$$

$$H(\omega)=\sum_{n=1}^{\frac{N}{2}}d(n)\sin[\omega(n-\frac{1}{2})]$$

其中

$$d(n)=2h(\frac{N}{2}-n),\quad \text{n=1, 2, ⋯, }\frac{N}{2}$$

4.7 已知一模拟滤波器的传递函数为

$$H_a(s)=\frac{3s+2}{2s^2+3s+1}$$

试分别用冲激响应不变法和双线性变换法将它转换成数字滤波器的系统函数$H(z)$，设$T=0.5$。

解 （1）冲激响应不变法

将$H_a(s)$展开成部分分式

$$H_a(s)=\frac{3s+2}{2s^2+3s+1}=\frac{3s+2}{(2s+1)(s+1)}$$

$$=\frac{A_1}{2s+1}+\frac{A_2}{s+1}$$

其中 $$A_1=\frac{3s+2}{s+1}\Bigg|_{s=-\frac{1}{2}}=1$$

$$A_2=\frac{3s+2}{2s+1}\Bigg|_{s=-1}=1$$

因此 $$H_s(s)=\frac{1}{2s+1}+\frac{1}{s+1}$$

对式①求逆拉氏变换，得

$$h_a(t)=(0.5e^{-0.5t}+e^{-t})u(t)$$

上式中令 t=nT，得

$$h(n)=h_a(nT)=(0.5e^{-0.5nT}+e^{-nT})u(n)$$

对上式求 h(n)的 Z 变换，得

$$H(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h(n)z^{-n}=\sum_{N=0}^{\infty}(0.5e^{-0.5nT}+e^{-nT})z^{-1}$$

$$=\frac{0.5}{1-e^{-0.5T}z^{-1}}+\frac{1}{1-e^{-T}z^{-z}}$$

将 T=0.5 代入上式得

$$H(z)=\frac{0.5}{1-e^{-0.5T}z^{-1}}+\frac{1}{1-e^{-0.5}z^{-1}}$$

（2）双线性变换法

将 $s=\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}=4\times\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$ 代入题给的 $H_a(s)$ 公式，得

$$H(z)=\frac{12\times\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}+2}{32(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}})^2+12\times\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}+1}$$

$$=\frac{(14-10z^{-1})(1+z^{-1})}{32(1-z^{-1})^2+12(1-z^{-1})(1+z^{-1})+(1+z^{-1})^2}$$

$$=\frac{14+4z^{-1}-10z^{-2}}{45-62z^{-1}+21z^{-2}}$$

4.8 设 $h_a(t)$ 表示一模拟滤波器的冲激响应

$$h_a(t)=\begin{cases} e^{-0.9t}, & t\geq 0 \\ 0, & t<0 \end{cases}$$

用冲激响应不变法将此模拟滤波器转换成数字滤波器。把 T 当作参数，证明 T 为任何正值时，数字滤波器是稳定的，并说明此滤波器近似为低通滤波器还是高通滤波器。

解 在题给的冲激响应表示中，令 t=nT,得

$$h(n)=h_a(nT)\ \begin{cases} e^{-0.9nT}, & n\geq 0 \\ 0, & n<0 \end{cases}$$

求 h(n)的 Z 变换，得数字滤波器的系统函数

$$H(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h(n)z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}e^{-0.9nT}z^{-n}=\frac{1}{1-e^{-0.9T}z^{-1}}$$

由于系统函数的极点为 $z=e^{-0.9T}$，无论 T 为任何正值恒有 $|z|=\left|e^{-0.9T}\right|>1$，即极点不可能在单位圆内。这就是说，不满足线性移不变系统稳定的充分和必要条件。所以该数字滤波器不是稳定的。

令 $z=e^{j\omega}$。由系统函数得滤波器的频率特性

$$H(e^{j\omega})=\frac{1}{1-e^{-0.9T}e^{-j\omega}}$$

因此，滤波器的幅度响应为

$$\left|H(e^{j\omega})\right|=\frac{1}{\left|1-e^{-0.9T}e^{-j\omega}\right|}$$

因在（0-π）区间，随着 ω 的增加，$\left|H(e^{j\omega})\right|$ 将下降，故该滤波器为低通滤波器。

4.9 已知一模拟系统的转移函数为

$$H_a(s)=\frac{s+a}{(s+a)^2+b^2}$$

试根据这个系统求满足下列两条件的离散系统的系统函数 H（z）。

（1） 冲激不变条件，也就是

$$h(n)=h_a(nT)$$

（2） 阶跃不变条件，也就是

$$s(n)=s_a(nT)$$

其中 $s(n)=s_a(nT)$ $s_a(t)=\int_{-\infty}^{t}h_a(\tau)d\tau$

解 （1） 将$H_a(s)$展开成部分分式

$$H_a(s)=\frac{s+a}{(s+a)^2+b^2}=\frac{A_1}{s+(a+jb)}+\frac{A_2}{s+(a-jb)}$$

其中

$$A_1=\frac{s+a}{s+(a+jb)}\bigg|s=-(a+jb)=0.5$$

$$A_2=\frac{s+a}{s+(a+jb)}\bigg|s=-(a-jb)=0.5$$

所以 $H_a(s)=\dfrac{0.5}{s+(a+jb)}+\dfrac{0.5}{s+(a-jb)}$

求逆拉氏变换，得

$$h_{a(t)}=0.5[e^{-(a+jb)t}+e^{-(a-jb)t}]u(t)$$

上式中令 t=nT，得

$$h_{a(t)}=0.5[e^{-(a+jb)t}+e^{-(a-jb)t}]u(t)$$

对上式求 Z 变换，得系统函数

$$H(z)=\sum_{n=0}^{\infty}h(n)z^{-n}$$

$$=0.5[\frac{1}{1-e^{-aT}e^{-jbT}z^{-1}}+\frac{1}{1+e^{-aT}e^{jbT}z^{-1}}]$$
$$=\frac{1-e^{-aT}(\cos bT)z^{-1}}{1-2e^{-aT}(\cos bT)z^{-1}+e^{-2aT}z^{-2}}$$

(2) 模拟滤波器的阶跃响应$s_a(t)$与冲激响应$h_a(t)$有以下关系

$$s_a(t)=\int_{-\infty}^{t}h_a(\tau)d\tau$$

阶跃响应$s_a(t)$的拉氏变换$S_a(t)$与冲激响应$h_a(t)$的拉氏变换即传输函数$H_a(s)$之间有以下关系

$$S_a(s)=\frac{1}{s}H_a(s)$$

因此 $S_a(s)=\dfrac{1}{s}\dfrac{s+a}{s(s+a)^2+b^2}$

将$S_a(s)$展开成部分分式

$$S_a(s)=\frac{1}{s}\frac{s+a}{s(s+a)^2+b^2}$$

$$=\frac{A_0}{s}+\frac{A_1}{s+(a+jb)}+\frac{A_2}{s+(a-jb)}$$

其中

$$A_0=\frac{s+a}{(s+a)^2+b^2}\Bigg|_{s=0}=\frac{a}{a^2+b^2}$$

$$A_1=\frac{s+a}{s[s+(a-jb)]}\Bigg|_{s=-(a+jb)}=\frac{-1}{2(a+jb)}=\frac{-a+jb}{2(a^2+b^2)}$$

$$A_2=\frac{s+a}{s[s+(a+jb)]}\Bigg|_{s=-(a-jb)}=\frac{-1}{2(a-jb)}=\frac{-a-jb}{2(a^2+b^2)}$$

所以

$$S_a(s)=(\frac{a}{a^2+b^2})\frac{1}{s}+(\frac{-a+jb}{2(a^2+b^2)})\frac{1}{s+(a+jb)}+(\frac{-a-jb}{2(a^2+b^2)})\frac{1}{s+(a-jb)}$$

求拉氏变换，得

$$s_a(t)=(\frac{a}{a^2+b^2})+(\frac{-a+jb}{2(a^2+b^2)})e^{-(a+jb)t}+(\frac{-a-jb}{2(a^2+b^2)})e^{-(a-jb)t}$$

上式中令 t=nT，得阶跃响应 $s_a(t)$ 的取样值序列

$$s(n)=s_a(nT)$$

$$s(n)=s_a(nT)$$
$$=\{(\frac{a}{a^2+b^2})+(\frac{-a+jb}{2(a^2+b^2)})e^{-(a+jb)nT}$$
$$+(\frac{-a-jb}{2(a^2+b^2)})e^{-(a-jb)nT}\}u(n)$$

对上式求 Z 变换，得阶跃响应 $s_a(t)$ 的取样值序列 $s(n)$ 的 Z 变换 S（z），

$$S(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}s(n)z^{-n}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\{(\frac{a}{a^2+b^2})+(\frac{-a+jv}{2(a^2+b^2)})e^{-(a+jb)nT}$$

$$+(\frac{-a-jb}{2(a^2+b^2)})e^{-(a-jb)nT}\}z^{-n}$$

$$=\frac{a}{a^2+b^2}\frac{1}{1-z^{-1}}+\frac{1}{a^2+b^2}[\frac{\frac{1}{2}(-a+jb)}{1-e^{-aT}e^{-jbT}z^{-1}}+\frac{\frac{1}{2}(-a-jb)}{1-e^{-aT}e^{jbT}z^{-1}}]$$

$$=\frac{a}{a^2+b^2}\frac{1}{1-z^{-1}}+\frac{1}{a^2+b^2}$$

$$\square[\frac{\frac{1}{2}[(-a+jb)(1-e^{-aT}e^{jbT}z^{-1})+(-a-jb)(1-e^{-aT}e^{-jbT}z^{-1})]}{1-e^{-aT}(e^{-jbT}+e^{jbT})z^{-1}+e^{-2aT}z^{-2}}]$$

$$=\frac{a}{a^2+b^2}\frac{1}{1-z^{-1}}+\frac{1}{a^2+b^2}$$

$$\square[\frac{\frac{1}{2}[-2a+ae^{-aT}(e^{jbT}+e^{-jbT})z^{-1}-jbe^{-aT}(e^{jbT}-e^{-jbT})z^{-1}]}{1-e^{-aT}(e^{-jbT}+e^{jbT})z^{-1}+e^{-2aT}z^{-2}}$$

$$=\frac{a}{a^2+b^2}\frac{1}{1-z^{-1}}+\frac{1}{a^2+b^2}\{\frac{-a+[a\cos(bT)+b\sin(bT)]e^{-aT}z^{-1}}{1-2\cos(bT)e^{-aT}z^{-1}+e^{-2aT}z^{-2}}\}$$

由于阶跃响应 $s_a(t)$ 的取样值序列 $s(n)$ 的 Z 变换 $S(z)$ 与冲激响应 h(n)的 Z 变换即系统函数 H（z）之间有以下关系

$$S(z)=\frac{1}{1-z^{-1}}H(z)\quad 或\quad H(z)=(1-z^{-1})S(z)$$

所以最后得系统函数

$$H(z)=\frac{a}{a^2+b^2}+\frac{1-z^{-1}}{a^2+b^2}$$

$$\square\{\frac{-a+[a\cos(bT)+b\sin(bT)]e^{-aT}z^{-1}}{1-2\cos(bT)e^{-aT}z^{-1}+e^{-2aT}z^{-2}}\}$$

4.10 一延迟为 τ 的理想限带微分器的频率响应为

$$H_a(j\Omega)=\begin{cases}j\Omega e^{-j\Omega\tau}, & |\Omega|\le\Omega_c\\ 0, & 其他\end{cases}$$

（1） 用冲激不变法，由此模拟滤波器求数字滤波器的频率响应 $H_d(e^{j\omega})$，假定 $\frac{\pi}{T} > \Omega$。

（2） 若 $\hat{h}_d(n)$ 是 $\tau=0$ 时由（1）确定的滤波器冲激响应，对某些 τ 值，$h_d(n)$ 可用 $\hat{h}_d(n)$ 的延迟表示，即

$$h_d(n) = \hat{h}_d(n - n_\tau)$$

其中 n_τ 为整数。确定这些 τ 值应满足的条件及延迟 n_τ 的值。

解 (1)设理想限带模拟微分器的冲激响应是 $h_a(t)$，用冲激响应不变法由它得到 $h'_d(n)$。设 $h'_d(n)$ 的傅里叶变换用 $H(e^{j\omega})$ 表示，则有

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h'_d(n) e^{-j\omega n} = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a(j\frac{\omega}{T} + j\frac{2\pi}{T}k)$$

因为已知

$$H_a(j\Omega) = 0, \quad |\Omega| > \Omega_c = \pi/T$$

所以

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a(j\frac{\omega}{T}) = \frac{1}{T}(j\frac{\omega}{T})e^{-j\frac{\omega}{T}\tau}, \left|\frac{\omega}{T}\right| \le \Omega_c$$

设数字微分器的单位取样响应是 $h_d(n)$，则有

$$h_d(n) = Th_a(nT) = Th'_d(n)$$

因此，数字微分器的频率响应为

$$H_d(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_d(n) e^{-j\omega} = T\sum_{n=-\infty}^{\infty} h'_d(n) e^{-j\omega}$$

$$= \begin{cases} j\frac{\omega}{T}e^{-j\frac{\omega}{T}\tau}, & \left|\frac{\omega}{T}\right| \le \Omega_c \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

(2) 因为 $\tau = 0$ 时数字微分器的频率响应为

$$\hat{H}_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} j\frac{\omega}{T}, & \left|\frac{\omega}{T}\right| \le \Omega_c \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

所以由 $h_d(n) = \hat{h}_d(n - n_\tau)$ 知道

$$H_d(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_d(n) e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{h}_d(n - n_\tau) e^{-j\omega n}$$

$$= e^{-j\omega n_\tau}\ \hat{H}_d(e^{-j\omega}) = \begin{cases} j\dfrac{\omega}{T}e^{-j\omega n_\tau}, & |\omega| \le T\Omega_c \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

将式②与式①对照，得

$$n_\tau = \frac{\tau}{T}$$

因为 n_τ 为整数，所以 τ 应取 T 的整数陪是值。

4.11 图 P4.11 表示一数字滤波器的频率响应。

（1） 假设它是用冲激响应不变法由一个模拟滤波器的频率响应映射得到的。试用作图的方法求该模拟滤波器的频率响应特性。

（2） 假设它是用双线性变换得到的，重做（1）。

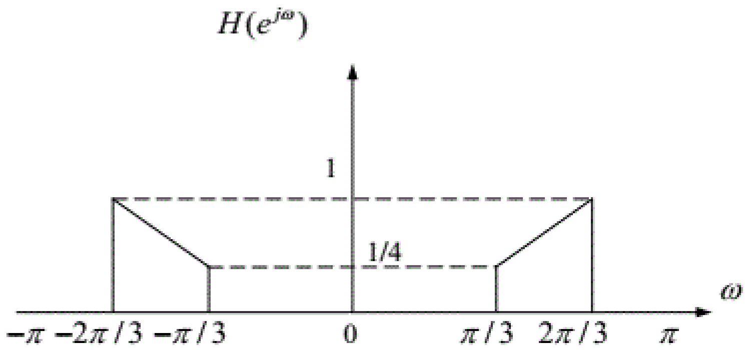


图 P4.11

解

4.12 用冲激不变法设计一个数字巴特沃斯低通滤波器。这个滤波器的幅度响应在通带截止频率 $\omega_p = 0.2613\pi$ 处的衰减不大于 0.75dB，在阻带截止频率 $\omega_T = 0.4018\pi$ 处的衰减不小于 20dB。

解 (1)求滤波器的阶数 N

$$N \ge \frac{\lg[\dfrac{10^{0.1\alpha_p}-1}{10^{0.1\alpha_T}-1}]^{\frac{1}{2}}}{\lg(\dfrac{\Omega_p}{\Omega_T})} = \frac{\lg[\dfrac{10^{0.1\times0.75}-1}{10^{0.1\times20}-1}]^{\frac{1}{2}}}{\lg(\dfrac{0.2613\pi}{0.4018\pi})}$$

$$=\frac{\lg[\frac{0.1885}{99}]^{\frac{1}{2}}}{\lg 0.6503}=\frac{-1.3602}{-0.1863}=7.2777$$

取 N=8

（3） 求滤波器的 3dB 截止频率Ω_c

$$\Omega_p[10^{0.1\alpha}{}_p-1]^{-\frac{1}{2N}}\le\Omega_c\le\Omega_T[10^{0.1\alpha}{}_T-1]^{-\frac{1}{2N}}$$

其中

$$\Omega_p[10^{0.1\alpha}{}_p-1]^{-\frac{1}{2N}}=0.2613\pi[10^{0.1\times0.75}-1]^{-\frac{1}{2\times8}}=0.9111$$

$$\Omega_T[10^{0.1\alpha}{}_T-1]^{-\frac{1}{2N}}=0.4018\pi[10^{0.1\times20}-1]^{-\frac{1}{2\times8}}=0.9472$$

因此 $$0.9111\le\Omega_c\le0.9472$$

选取$\Omega_c=0.9111$，准确满足通带指标要求，超过阻带指标要求。

（3）求$H_a(s)$的极点

$s_k=\Omega_c e^{j(\frac{\pi}{2N}+\frac{k\pi}{N}+\frac{\pi}{2})}=0.9111e^{j(\frac{9\pi}{16}+\frac{\pi}{8}k)}$， k= 0，1，…，15

其中，左半 s 平面的极点为

$$s_0=0.9111e^{j\frac{9}{16}\pi}=-0.1778+j0.8936$$

$$s_1=0.9111e^{j(\frac{9}{16}\pi+\frac{\pi}{8})}=-0.5062+j0.7575$$

$$s_2=0.9111e^{j(\frac{9}{16}\pi+\frac{\pi}{4})}=-0.7575+j0.5062$$

$$s_3=0.9111e^{j(\frac{9}{16}\pi+\frac{3\pi}{8})}=-0.8963+j0.1778$$

$$s_4=s_3{}^{*}0.9111e^{-j(\frac{9}{16}\pi+\frac{3\pi}{8})}=-0.8936-j0.1778$$

$$s_5=s_2{}^{*}=0.9111e^{-j(\frac{9}{16}\pi+\frac{\pi}{4})}=-0.7575-j0.5062$$

$$s_6=s_1{}^{*}=0.9111e^{-j(\frac{9}{16}\pi+\frac{\pi}{8})}=-0.5062-j0.7575$$

$$s_7=s_0{}^{*}=0.9111e^{-j\frac{9}{16}\pi}=-0.1778-j0.8963$$

（4）求传输函数$H_a(s)$

$$H_a(s)=\frac{\Omega_C{}^{N}}{\prod_{k=0}^{\frac{N}{2}-1}(s-s_k)(s-s_k{}^{*})}=\frac{0.9111^8}{\prod_{k=0}^{3}(s-s_k)(s-s_k{}^{*})}$$

$$=\frac{0.4748}{\prod_{k=0}^{3}[s^2-(s_k+s_k^*)s+s_ks_k^*]}$$

$$=\frac{0.4748}{(s^2-0.3556s+0.83)(s^2-1.0124s+0.83)(s^2-1.515s+0.83)(s^2-1.7872s+0.83)}$$

$$=\frac{0.4748}{s^8+4.67s^7+10.905s^6+16.536s^5+17.7s^4+13.715s^3+7.515s^2+2.671s+0.475}$$

（5）用查表法求传输函数 $H_a(s)$

根据表得到 8 阶归一化巴特沃斯滤波器的传输函数 $H_a^{'}(s)$

$$H_a^{'}(s)=\frac{1}{s^8+5.1258s^7 13.1371s^6+21.8462s^5+25.6884s^4+21.8462s^3+5.1258s+1}$$

将 $H_a^{'}(s)$ 中 s 用 $\frac{s}{\Omega_c}=\frac{s}{0.9111}$ 取代，得 $H_a(s)$

$$H_a(s)=\frac{0.4748}{s^8+4.67s^7 10.905s^6+16.536s^5+17.7s^4+13.715s^3+7.515s^2+2.671s+0.475}$$

与（4）结果相同。

4.13 使用双线性变换法设计一个巴特沃斯低通滤波器。假定取样频率 $f_s=1.5kHz$ 处衰减不小于 12dB。

解 将 f_p.和 f_T 转换成数字频率 ω_p 和 ω_T

$$\Omega_p=2\pi f_p=2\pi\times1000=2000\pi$$

$$\Omega_T=2\pi f_T=2\pi\times1500=3000\pi$$

$$T=\frac{1}{f_a}=\frac{1}{10\times10^3}=10^{-4}$$

$$\omega_p=T\Omega_p=10^{-4}\times2000\pi=0.2\pi$$

$$\omega_T=T\Omega_T=10^{-4}\times3000\pi=0.3\pi$$

（2）求滤波器的阶数 N 和巴特沃斯模拟低通滤波器的 3dB 截止频率 Ω_c

取 T=1，将数字频率 ω_p 和 ω_T 预畸变，得预畸变后的 Ω_p 和 Ω_T

$$\begin{cases}\Omega_p=\frac{2}{T}\tan\frac{\omega_p}{2}=2\tan\frac{0.2\pi}{2}=2\tan(0.1\pi)=0.649841\\ \Omega_T=\frac{2}{T}\tan\frac{\omega_T}{2}=2\tan\frac{0.3\pi}{2}=2\tan(0.15\pi)=1.0190537\end{cases}$$

因此，模拟低通滤波器的指标为

$$\begin{cases} 20\lg\left|H_a(j\Omega_p)\right| = 20\lg\left|H_a(j0.649841)\right| \geq -1.8 \\ 20\lg\left|H_a(j\Omega_{T)}\right| = 20\lg\left|H_a(j1.0190537)\right| \leq -12 \end{cases} \quad ①$$

由巴特沃斯滤波器的幅度平方函数得

$$20\lg\left|H_a(j\Omega)\right| = -10\lg\left|1+(\frac{\Omega}{\Omega_c})^{2N}\right| \quad ②$$

将式②代入式①，得

$$20\lg\left|H_a(j\Omega_p)\right| = -10\lg\left|1+(\frac{0.649841}{\Omega_c})^{2N}\right| \geq -1.8 \quad ③$$

$$20\lg\left|H_a(j\Omega_T)\right| = -10\lg\left|1+(\frac{1.0190537}{\Omega_c})^{2N}\right| \geq -12 \quad ④$$

联立求解式③和式④，得

$$N \geq \frac{\lg[\frac{10^{0.1\times1.8}-1}{10^{0.1\times12}-1}]^{\frac{1}{2}}}{\lg(\frac{0.649841}{1.0190537})} = \frac{-0.7305515}{-0.1953899} = 3.738942$$

取 N=4。将 N=4 分别代入式③和式④，得

$$\Omega_c \geq 0.649841(10^{0.1\times1.8}-1)^{-\frac{1}{2\times4}} = \Omega_{c1} = 0.7063$$

$$\Omega_c \leq 1.0190537(10^{0.1\times12}-1)^{-\frac{1}{2\times4}} = \Omega_{c2} = 0.7274$$

取 $\Omega_c = \frac{1}{2}(\Omega_{c1}+\Omega_{c2}) = 0.7168$。

也可以直接引用公式来求 N 和 Ω_c，但应注意，对双线性变换法来说，公式中的 Ω_p 和 Ω_T 都是预畸变后的值。

（3）求 $H_a(s)$ 的极点

$$s_k = \Omega_c e^{j(\frac{\pi}{2N}+\frac{k\pi}{N}+\frac{\pi}{2})} = 0.7168e^{j(\frac{5\pi}{8}+\frac{\pi}{4}k)}, \quad k=0,1,\ldots,7$$

其中，左半 s 平面的极点为

$$s_0 = 0.7168e^{j\frac{5}{8}\pi} = -0.2743 + j0.6623$$

$$s_1 = 0.7168e^{(\frac{5}{8}\pi+\frac{\pi}{4})} = -0.6623 + j0.2743$$

$$s_2 = s_1^* = -0.6623 - j0.2743$$

$$s_3 = s_0^* = -0.2743 - j0.6623$$

（4）求传输函数 $H_a(s)$

$$H_a(s)=\frac{\Omega_c{}^N}{\prod_{k=0}^{\frac{N}{2}}(s-s_k)(s-s_k{}^*)}=\frac{0.7168^4}{\prod_{k=0}^{1}(s-s_k)(s-s_k)}$$

$$=\frac{0.264}{\prod_{k=0}^{1}[s^2-(s_k+s_k{}^*)s+s_ks_k{}^*]}$$

$$=\frac{0.264}{(s^2+0.5486s+0.5139)(s^2+1.3246s+0.5139)}$$

$$=\frac{0.264}{s^4+1.8732s^3+1.7545s^2+0.9626s+0.264}$$

（5）用查表法求传输函数 $H_a(s)$

根据表得到 4 阶归一巴特沃斯滤波器的传输函数 $H_a^{'}(s)$

$$H_a^{'}(s)=\frac{1}{s^4+2.6131s^3+3.4142s^2+2.6131s+1}$$

将 $H_a^{'}(s)$ 中的 s 用 $\frac{s}{\Omega_c}=\frac{s}{0.7168}$ 取代，得

$$H_a(s)=\frac{\Omega_c{}^4}{s^4+2.6131\Omega_cs^3+3.4142\Omega_c{}^2s^2+2.6131\Omega_c{}^3s+\Omega_c{}^4}$$

$$=\frac{0.264}{s^4+2.6131\times0.7168s^3+3.4142\times0.7168^2s^3+2.6231\times0.7168^3s+0.7168^4}$$

$$=\frac{0.264}{s^4+1.8731s^3+1.7542s^2+0.9624s+0.264}$$

与（4）的结果近似相等。

4.14 用双线性变换法设计一个数字切比雪夫低通滤波器，各指示与题 4.13 相同。

解

4.15 通过频率变换法设计一个数字切比雪夫高通滤波器，从模拟到数字的转换采用双线性变换法，假设取样频率为 $2.4kHz$，在频率 $160Hz$ 处衰减不大于 3dB，在 $40Hz$ 处衰减不小于 48dB。

解 （1）将高通数字滤波器的频率指标 f_p 和 f_T 折合成数字频率

$$\omega_p=T\Omega_p=\frac{2\pi f_p}{f_s}=\frac{2\pi\times160}{2400}=\frac{2\pi}{15}$$

$$\omega_T=T\Omega_T=\frac{2\pi f_T}{f_s}=\frac{2\pi\times40}{2400}=\frac{\pi}{30}$$

设 T=2，按照双线性变换法，将高通数字滤波器的数字域频率转换为高通模拟滤波器的频率

$$\Omega_p{}' = \frac{2}{T}\tan\frac{\omega_p}{2} = \tan(\frac{1}{2}\times\frac{2\pi}{15}) = 0.2126$$

$$\Omega_T{}' = \frac{2}{T}\tan\frac{\omega_T}{2} = \tan(\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{30}) = 0.0524$$

将高模拟滤波器的频率指标映射成模拟低同滤波器的频率指标

$$\Omega_p = \frac{1}{\Omega_p{}'} = \frac{1}{0.2126} = 4.7040$$

$$\Omega_T = \frac{1}{\Omega_T{}'} = \frac{1}{0.0524} = 19.0840$$

（2）根据模拟低同滤波器的指标求 ε, Ω_c, 和 N

$$\varepsilon^2 = 10^{0.1\alpha}{}_p - 1 = 10^{0.1\times 3} - 1 = 0.9953$$

或 $\varepsilon = 0.9977$

$$\Omega_c = \Omega_p = 4.7040$$

$$k = \frac{\Omega_p}{\Omega_T} = \frac{4.7040}{19.0840} = 0.2465$$

$$d = [\frac{10^{0.1\alpha}{}_p - 1}{10^{0.1\alpha}{}_T - 1}]^{\frac{1}{2}} = [\frac{10^{0.1\times 3} - 1}{10^{0.1\times 48} - 1}]^{\frac{1}{2}} = 3.9717\times 10^{-3}$$

$$N \geq \frac{arch\frac{1}{d}}{arch\frac{1}{k}} = \frac{arch\frac{1}{3.9717\times 10^{-3}}}{arch\frac{1}{0.2465}}$$

$$= \frac{arch 251.7814}{arch 4.0568} = 2.9941$$

取 N=3。

（3）求模拟低通滤波器的平方幅度函数

令 $x = \frac{\Omega}{\Omega_c} = \frac{\Omega}{4.7040 = 0.2126\Omega}$，将其代入 3 阶切比雪夫多项式的平方中

$$V_3^2(x) = [x(4x^2 - 3)]^2 = 16x^6 - 24x^4 + 9x^2$$

$$= 16(0.2126\Omega)^6 - 24(0.2126\Omega)^4 + 9(0.2126\Omega)^2$$

$$= 0.00148\Omega^6 - 0.049\Omega^4 + 0.4068\Omega^2$$

因此，3 阶切比雪夫模拟低通滤波器的平方幅度函数为

$$\left|H_a(j\Omega)\right|^2 = \frac{1}{1 + e^2 V_3^2(\Omega/\Omega_c)}$$

$$= \frac{1}{1 + 0.9953(0.00148\Omega^6 - 0.049\Omega^4 + 0.4068\Omega^2)}$$

$$=\frac{1}{0.00147\Omega^6-0.0488\Omega^4+0.4048\Omega^2+1}$$

（4）求模拟低通滤波器的传输函数

将 $\Omega=-js$ 代入 $\left|H_a(j\Omega)\right|^2$，得

$$H_a(s)H_a(-s)=\left|H_a(j\Omega)\right|^2\Big|_{\Omega=-js}$$

$$=\frac{1}{-0.00147s^6-0.0488s^4-0.4048s^2+1}$$

由上式求出 $H_a(s)H_a(-s)$ 的极点：

$$s_0=-0.701+j4.2517$$
$$s_1=-1.4047$$
$$s_2=s_0^*=-0.701-j4.2517$$
$$s_3=0.701-j4.2514$$
$$s_4=1.4047$$
$$s_5=s_3^*=0.701+j4.2517$$

其中 s_0，s_1 和 s_2 是左半 s 平面的 3 个极点，由他们构成一个稳定的 3 阶切比雪夫模拟低通滤波器，其传输函数为

$$H_a(s)=\frac{B}{(s-s_1)(s-s_0)(s-s_2)}$$

$$=\frac{B}{(s-s_1)(s-s_0)(s-s_0^*)}$$
$$=\frac{B}{(s-s_1)[s^2-(s_0+s_0^*)s+s_0s_0^*]}$$
$$=\frac{B}{(s+1.4047)[s^2+1.402s+18.5684]}$$

因 N=3 为奇数，所以 $H_a(0)=1$，因此

$$B=H_a(0)\times1.4047\times18.5684=26.083$$

最后得

$$H_a(s)=\frac{26.083}{(s+1.4047)[s^2+1.402s+18.5684]}$$

$$=\frac{26.083}{s^3+2.8067s^2+20.5385s+26.083}$$

注意，模拟低通滤波器的传输函数在左半 s 平面的 3 个极点也可以用下式求出：

$s_k=-a\Omega_c\sin(\frac{\pi}{2N}+\frac{\pi}{N}k)+b\Omega_c\cos(\frac{\pi}{2N}+\frac{\pi}{N}k)$，k=0,1,…,2N-1

其中常量 a 和 b 用下列公式计算

$$a=\varepsilon^{-1}+\sqrt{\varepsilon^{-2}+1}$$

$$=0.9977^{-1}+\sqrt{0.9977^{-2}+1}=2.4182$$

$$a=\frac{1}{2}(a^{\frac{1}{N}}-a^{-\frac{1}{N}})=0.5(2.4182^{\frac{1}{3}}-2.4182^{-\frac{1}{3}})$$

$$=0.5(1.3422-0.7451)=0.2986$$

$$b=\frac{1}{2}(a^{\frac{1}{N}}+a^{-\frac{1}{N}})=0.5(1.3422+0.7451)=1.0437$$

$$a\Omega_c=0.2986\times 4.7040=1.4046$$
$$a\Omega_c=1.0437\times 4.7040=4.9096$$

将 $a\Omega_c$ 和 $b\Omega_c$ 的值代入计算极点的公式，得左半 s 平面的极点如下：

$$s_0=-1.4046\sin(\frac{\pi}{2\times 3})+j4.9096\cos(\frac{\pi}{2\times 3})$$
$$=-0.7023+j4.2518$$

$$s_1=-1.4046\sin(\frac{\pi}{2\times 3}+\frac{\pi}{3})+j4.9096\cos(\frac{\pi}{2\times 3}+\frac{\pi}{3})=-1.4046$$

$$s_2=s_0^*=-0.7023-j4.2518$$

这里的结果与前面的数值基本相同。

（5）将模拟低通滤波器转换成模拟高通滤波器

用 1/s 代换模拟低通滤波器的传输函数中的 s，得到模拟高通滤波器的传输函数

$$H_a(s)=\frac{23.083s^2}{1+2.8067s+20.5385s^2+26.083s^3}$$

（6）用双线性变换法将模拟高通滤波器映射成数字高通滤波器

设 T=2。将 $s=\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$ 代入模拟高通滤波器的传输函数，得

$$H(z)=\frac{26.083(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}})^3}{1+2.8067\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}+20.5385(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}})^2+26.083(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}})^3}$$

$$=\frac{0.5172(1-3z^{-1}+3z^{-2}-z^{-3})}{1-1.0293z^{-1}+1.1482z^{-2}-0.1458z^{-3}}$$

4.16 设 $h_1(n)$ 是一个偶对称序列，N=8，见图 P4.16（a）。$h_2(n)$ 是 $h_1(n)$ 的四点循环移位，即

$$h_2(n)=h_1((n-4))_s\square R_6(n)$$

（1） 求出 $h_1(n)$ 的 DFT 与 $h_2(n)$ 的 DFT 之间的关系，即确定模 $|H_1(k)|$ 与 $H_2(k)$ 及相位 $\theta_1(k)$ 与 $\theta_2(k)$ 之间的关系。

（2） 由 $h_1(n)$ 和 $h_2(n)$ 可以构成两个 FIR 数字滤波器，试问它们都属于线性相位数字滤波器吗？为什么？时延为多少？

（3） 如果 $h_1(n)$ 对应一个截止频率为 $\dfrac{\pi}{2}$ 的低通滤波器，如图 P4.16（b）所示，那么认为 $h_2(n)$ 也对应一个截止频率为 $\dfrac{\pi}{2}$ 的低通滤波器合理吗？为什么？

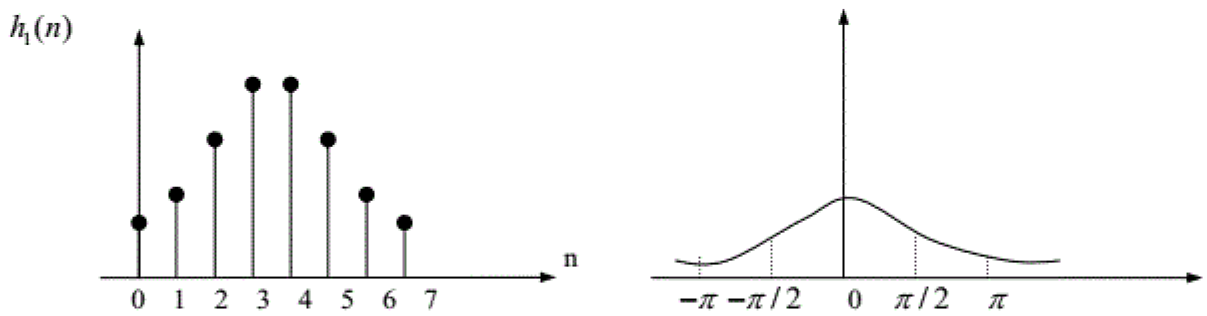


图 P4.16

解 (1)因为 $h_1(n)=h_1(N-1-n)$ 和 $h_2(n)=h_2(N-1-n)$，所以当 N=8 时，有

$$H_1(k)=\sum_{n=0}^{N-1}h_1(n)\omega_N^{nk}=\sum_{n=0}^{3}h_1(n)e^{-j\frac{2\pi}{8}nk}+\sum_{n=4}^{7}h_1(n)e^{-j\frac{2\pi}{8}nk}$$

$$=\sum_{n=0}^{3}h_1(n)e^{-j\frac{2\pi}{8}nk}+\sum_{n=4}^{7}h_1(7-n)e^{-j\frac{2\pi}{8}nk}$$

$$=\sum_{n=0}^{3}h_1(n)[e^{-j\frac{2\pi}{8}nk}+e^{-j\frac{2\pi}{8}(7-n)k}]$$

$$=\sum_{n=0}^{3}h_1(n)[e^{-j\frac{2\pi}{8}nk}+e^{j\frac{2\pi}{8}(n+1)k}]$$

$$H_2(k)=\sum_{n=0}^{3}h_2(n)[e^{-j\frac{2\pi}{8}nk}+e^{j\frac{2\pi}{8}(n+1)k}]$$

由于 $h_1(n)=h_2(3-n)$， n=0，1，2，3

所以

$$H_1(k)=\sum_{n=0}^{3}h_2(3-n)[e^{-j\frac{2\pi}{8}nk}+e^{j\frac{2\pi}{8}(n+1)k}]$$

$$=\sum_{n=0}^{3}h_2(n)[e^{-j\frac{2\pi}{8}(3-n)k}+e^{j\frac{2\pi}{8}(4-n)k}]$$

$$=e^{-j\frac{2\pi}{8}4k}\sum_{n=0}^{3}h_2(n)[e^{j\frac{2\pi}{8}(n+1)k}+e^{-j\frac{2\pi}{8}nk}]$$

$$=e^{-j\pi k}H_2(k)$$

（2）因为$h_1(n)$和$h_2(n)$都是具有对称性质，所以它们都是线性相位数字滤波器。时延为

$$n=(N-1)/2=3.5$$

（3）由（1）的结果知道，$h_1(n)$和$h_2(n)$的幅度响应相等，所以可认为$h_2(n)$也对应于一个截止频率为$\pi/2$的低通滤波器。

4.17 用矩形窗设计一个线性相位高通滤波器，其中

$$H_d(e^{j\omega})=\begin{cases}e^{-j(\omega-\pi)\alpha}, & \pi-\omega_c\le\omega\le\pi\\ 0, & 0\le\omega_c<\pi-\omega_c\end{cases}$$

（1） 求出$h(n)$的表达式，确定α与 N 个关系。

（2） 改用汉宁窗设计，求出$h(n)$的表达式。

解

4.18 用哈明窗设计一个线性相位 FIR 滤波器，其中

$$H_d(e^{j\omega})=\begin{cases}e^{-j\omega\alpha}, & |\omega|\le0.25\pi\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

设 N=21，求 h(n)的表达式及其数值。

解 将理想低通模拟滤波器的截止频率换算成数字域频率

$$\omega_c=T\Omega_c=2\pi f_cT=\frac{2\pi f_c}{f_s}=\frac{2\pi\times125}{1000}=0.25\pi$$

因此，理想低通线性相位数字滤波器的频率特性为

$$H_d(e^{j\omega})=\begin{cases}e^{-j\omega\alpha}, & |\omega|\le0.25\pi\\ 0, & 0.25\pi<|\omega|\le\pi\end{cases}$$

响应的单位取样响应为

$$h_d(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}H_d(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-0.25\pi}^{0.25\pi}e^{-j\omega n}e^{j\omega n}d\omega$$

$$=\frac{\sin[0.25\pi(n-\alpha)]}{\pi(n-\alpha)}=\frac{\sin[0.25\pi(n-10)]}{\pi(n-10)}$$

根据时延要求，哈明窗的宽度应为 N=2α+1=21,所以要设计的 FIR 线性相位低通数字滤波器的单位取样响应为

$$h(n)=\frac{\sin[0.25\pi(n-10)]}{\pi(n-10)}\omega(n)$$

其中，$\omega(n)$ 是哈明窗函数，定义为

$$\omega(n)=0.54-0.46\cos(\frac{\pi}{10}n),\quad 0\le n\le 20$$

由于设计的 FIR 低通数字滤波器具有线性相位，所以 h(n)关于 $\alpha=\frac{N-1}{2}=10$ 是偶对称的。因

$$H(z)=\sum_{n=0}^{20}h(n)z^{-n}=\sum_{n=0}^{20}\frac{\sin[0.25\pi(n-10)]}{\pi(n-10)}\omega(n)z^{-n}$$

$$=\sum_{n=0}^{20}a_n z^{-n}$$

故 $a_n=\frac{\sin[0.25\pi(n-10)]}{\pi(n-10)}[0.54-0.46\cos(\frac{\pi}{10}n)],\quad 0\le n\le 20$

利用上式可计算出设计的 FIR 滤波器的系数如下：

$$a_0=a_{20}=0.00254648$$
$$a_1=a_{19}=0.00256375$$
$$a_2=a_{18}=0$$
$$a_3=a_{17}=0.00866936$$
$$a_4=a_{16}=0.02110671$$
$$a_5=a_{15}=0.02430854$$
$$a_6=a_{14}=0$$
$$a_7=a_{13}=0.06079995$$
$$a_8=a_{12}=0.14517283$$
$$a_9=a_{11}=0.22001165$$
$$a_{10}=0.25$$

第五章

5.1 证明随机变量的均值的线性性质即式(5.16)和式(5.17)。

证明

$$E(x_n+y_m)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x+y)p_{x_n,y_m}(x,n,y,m)dxdy=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xp_{x_n,y_m}(x,n,y,m)dxdy+\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}yp_{x_n,y_m}(x,n,y,m)dxdy$$

其中

$$\int_{-\infty}^{\infty}xp_{x_n,y_m}(x,n,y,m)dy=x\frac{\partial}{\partial x}p_{x_n,y_m}(x,n,y,m)|_{y=-\infty}^{\infty}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} y p_{x_n,y_m}(x,n,y,m)dx = y\frac{\partial}{\partial x}p_{x_n,y_m}(x,n,y,m)|_{x=-\infty}^{\infty}$$

由于

$p_{x_n,y_m}(x,n,\infty,m)=[x_n \le x, y_m \le \infty]$的概率＝$[x_n \le x]$的概率＝$P_{x_n}(x,n)$

$p_{x_n,y_m}(\infty,n,y,m)=[x_n \le \infty, y_m \le y]$的概率＝$[y_m \le y]$的概率＝$P_{y_m}(y,m)$

$p_{x_n,y_m}(x,n,-\infty,m)=[x_n \le x, y_m \le -\infty]$的概率＝0

$p_{x_n,y_m}(-\infty,n,y,m)=[x_n \le -\infty, y_m \le y]$的概率＝0

所以

$$\int_{-\infty}^{\infty} x p_{x_n,y_m}(x,n,y,m)dy = x\frac{\partial p_{x_n}(x,n)}{\partial x} = x p_{x_n}(x,n)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} y p_{x_n,y_m}(x,n,y,m)dx = y\frac{\partial p_{y_m}(y,m)}{\partial y} = y p_{y_m}(y,m)$$

最后得

E[$x_n + y_m$]=$\int_{-\infty}^{\infty} x p_{x_n}(x,n)dx + \int_{-\infty}^{\infty} y p_{y_m}(y,m)dy$=E[$x_n$]+E[$y_m$]

另一方面，有

E[ax_n]=$\int_{-\infty}^{\infty} ax p_{x_n}(x,n)dx$=a$\int_{-\infty}^{\infty} x p_{x_n}(x,n)dx$=aE[$x_n$]

故随机变量的均值具有线性性质。

5.2 已知 x(n)和 y(n)是不相关的两个随机信号，它们的方差分别是σ_x^2和σ_y^2，求 w(n)=x(n)+y(n)的方差σ_ω^2。

根据随机信号的均值的线性性质，得到

$$m_x = E[\omega(n)] = E[x(n)+y(n)] = E[x(n)] + E[y(n)] = m_x + m_y$$

$$\begin{aligned}\sigma_\omega^2 &= E[(\omega(n)-m_\omega)^2] = E\{[x(n)+y(n)-m_x-m_y]^2\} \\ &= E\{[x(n)+y(n)]^2 - 2[x(n)+y(n)](m_x+m_y)+(m_x+m_y)^2\} \\ &= E\{[x(n)+y(n)]^2\} - 2(m_x+m_y)E[x(n)+y(n)] + (m_x+m_y)^2 \\ &= E[x^2(n)] + E[y^2(n)] + 2E[x(n)y(n)] - 2(m_x+m_y)\{E[x(n)]+E[y(n)]\} + (m_x+m_y)^2\end{aligned}$$

由于 x(n)和 y(n)是不相关的两个随机信号，所以在上列最后一个式子中

$$E[x(n)y(n)] = E[x(n)]E[y(n)] = m_x m_y$$

因此

$$\sigma_{\omega}^2 = E[x^2(n)] + E[y^2(n)] + 2m_x m_y - 2(m_x + m_y)^2 + (m_x + m_y)^2$$
$$= E[x^2(n)] + E[y^2(n)] - m_x^2 - m_y^2$$
$$= E[x^2(n) - m_x^2] + E[y^2(n) - m_y^2]$$
$$= E[(x(n) = m_x)^2] + E[(y(n) - m_y)^2]$$
$$= \sigma_x^2 + \sigma_y^2$$

5.3 设有 3 个白噪声序列 $x_1(n)$、$x_2(n)$和 $x_3(n)$，它们分别在区间(-q,0)、(-q/2,q/2)和(0,2π)上呈均匀分布。

(1) 画出它们的概率密度函数图形。

(2) 计算它们各自的均值。

(3) 计算它们各自的方差。

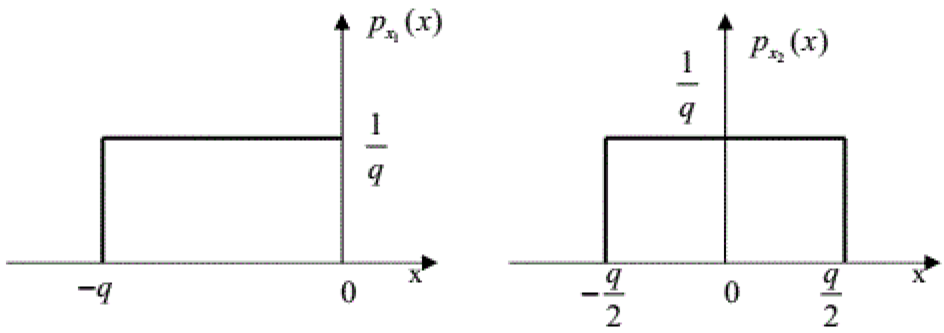
解(1) $x_1(n)$ 、 $x_2(n)$ 和 $x_3(n)$ 的概率密度函数分别为

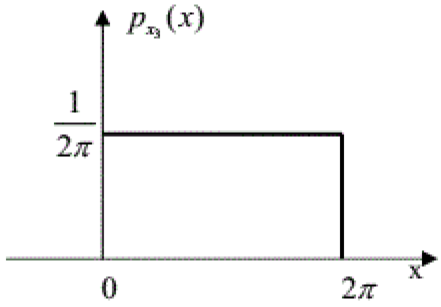
$$p_{x_1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, -q < x \le 0 \\ 0, 其它 \end{cases}$$

$$p_{x_2}(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, |x| < \frac{q}{2} \\ 0, 其它 \end{cases}$$

$$p_{x_3}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, 0 \le x \le 2\pi \\ 0, 其它 \end{cases}$$

其图形如图所示。





(2) $x_1(n)$、$x_2(n)$和$x_3(n)$的均值

$$m_{x_1}=E[x_1]=\int_{-\infty}^{\infty}xp_{x_1}(x)dx$$
$$=\frac{1}{q}\int_{-q}^{0}xdx=\frac{1}{2q}x^2\,|_{-q}^{0}=-\frac{q}{2}$$
$$m_{x_2}=E[x_2]=\int_{-\infty}^{\infty}xp_{x_2}(x)dx$$
$$=\frac{1}{q}\int_{-q/2}^{q/2}xdx=\frac{1}{2q}x^2\,|_{-q/2}^{q/2}=0$$
$$m_{x_3}=E[x_3]=\int_{-\infty}^{\infty}xp_{x_3}(x)dx$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}xdx=\frac{1}{4\pi}x^2\,|_{0}^{2\pi}=\pi$$

(3) $x_1(n)$、$x_2(n)$和$x_3(n)$的方差

$$\sigma_{x_1}^2=E[(x_1-m_{x_1})^2]=\int_{-\infty}^{\infty}(x-m_{x_1})^2p_{x_1}(x)dx$$
$$=\frac{1}{q}\int_{-q}^{0}(x+\frac{q}{2})^2dx=\frac{1}{3q}(x+\frac{q}{2})^3\,|_{-q}^{0}=\frac{q^2}{12}$$
$$\sigma_{x_2}^2=E[(x_2-m_{x_2})^2]=\int_{-\infty}^{\infty}(x-m_{x_2})^2p_{x_2}(x)dx$$
$$=\frac{1}{q}\int_{-q/2}^{q/2}x^2dx=\frac{1}{3q}x^3\,|_{-q/2}^{q/2}=\frac{q^2}{12}$$
$$\sigma_{x_3}^2=E[(x_3-m_{x_3})^2]=\int_{-\infty}^{\infty}(x-m_{x_3})^2p_{x_3}(x)dx$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}(x-\pi)^2dx=\frac{1}{6\pi}(x-\pi)^3\,|_{0}^{2\pi}=\frac{\pi^2}{3}$$

5.4 已知随机信号 x(n)=cos(ω_0n+ϕ)其中，角频率ω_0是常数，初相ϕ是在区间(0,2π)均匀分布的随机变量。

求 x(n)的均值和自相关序列，并判别 x(n)是否广义平稳随机过程。

x(n)的均值为

m_{x_n}=E[x(n)]

$$=\int_{-\infty}^{\infty}x(n)p_{\theta}(\theta)d\theta$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(\omega_0 m+\theta)\cos(\omega_0 m+\theta)d\theta=0$$

$R_{xx}(m,n)$=E[x(m)x(n)]

$$=\int_{-\infty}^{\infty}x(n)p_\theta(\theta)d\theta$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(\omega_0 m+\theta)\cos(\omega_0 m+\theta)d\theta$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\{\cos[\omega_0(n-m)]+\cos[\omega_0(n+m)+2\theta]\}d\theta$$
$$=\frac{1}{2}\cos[\omega_0(n-m)]$$
$$=\frac{1}{2}\cos[\omega_0\,|\,n-m\,|]$$

因为m_{x_n}和$R_{xx}(m,n)$都与时间起点 n 无关，$R_{xx}(m,n)$只与时间差|n-m|有关，所以 x(n)是广义平稳随机过程。

5.5 证明一个任意随机信号与一个与其不相关的白噪声序列相乘后，变成为一个白噪声序列。

设任意随机信号为 x(n)，白噪声序列为 e(n),它们的乘积 y(n)=x(n)e(n)。

白噪声序列 e(n)的自相关序列为

$$R_{ee}(n,n+m)=E[e(n)e^*(n+m)=\sigma_e^2\delta(m)]$$

其中，σ_e^2是白噪声序列 e(n)的方差，$\delta(m)$是单位取样序列。

y(n)的自相关序列为

$$R_{yy}(n,n+m)=E[y(n)y^*(n+m)]=E[x(n)e(n)x^*(n+m)e^*(n+m)]$$

因为 e(n)和 x(n)不相关，所以上式可写成

$R_{yy}(n,n+m)=E[x(n)x^*(n+m)]E[e(n)e^*(n+m)]=R_{xx}(m)R_{ee}(m)=\sigma_e^2R_{xx}(m)\sigma(m)$ 因此 y(n)是白噪声序列。

5.6 遍历性过程一定是平稳的，平稳随机过程一定是遍历性的，这两个论断正确吗？为什么？

5.7 有一随机变量 x，它的均值为 m_x、方差为σ_x^2。已知 x 的 N 个测量值 x_i(i=0,⋯,N-1)是互不相关的，

这些测量值的算术平均值$\hat{m}_x=\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}x_i$称为取样均值。

(1) 求$\hat{m}_x$的期望值。

(2) 求$\hat{m}_x$的方差。

5.8 同上题。把$\hat{\sigma}_x^2=\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}(x_i-\hat{m}_x)^2$叫做取样方差。

(1) 计算取样方差的期望值 E[$\hat{\sigma}_x^2$]。

期望值

$$E[\hat{\sigma}_x^2]=E[\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}(x(n)-\hat{m}_x)^2]$$
$$=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\{E[x^2(n)]+E[\hat{m}_x^2]-2E[x(n)\hat{m}_x]\}$$
$$=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}E[x^2(n)]+\frac{1}{N^2}\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{N-1}E[x(i)x(j)]-\frac{2}{N^2}\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{N-1}E[x(i)x(j)]$$
$$=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}E[x^2(n)]-\frac{1}{N^2}\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{N-1}E[x(i)x(j)]$$
$$=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}E[x^2(n)]-\frac{1}{N^2}\{\sum_{i=0}^{N-1}E[x^2(i)]+\sum_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{N-1}\sum_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{N-1}E[x(i)x(j)]\}$$
$$=E[x^2(n)]-\frac{1}{N}E[x^2(i)]-\frac{N^2-N}{N^2}E[x(i)x(j)]$$
$$=\frac{N-1}{N}E[x^2(i)]-\frac{N-1}{N}(E[x()i])^2$$
$$=\frac{N-1}{N}\sigma_x^2$$

(2) 若 x 是高斯随机变量，即 x 的概率密度函数为 $p_x(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}}e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}$ 求取样方差 $\hat{\sigma}_x^2$ 的方差

Var[$\hat{\sigma}_x^2$]=E[($\hat{\sigma}_x^2$-E[$\hat{\sigma}_x^2$])]。

5.9 x(n)是零均值随机过程的取样序列，d(n)=x(n+1)-x(n)称为差分序列。设该随机过程的功率谱是低通的即 $S_{xx}(e^{j\omega})=\begin{cases}\text{非零},|\omega|\le\omega_c\\ 0,\omega_c<|\omega|<\pi\end{cases}$ 此外还假设已知随机过程自相关序列的前两个值 $R_{xx}(0)$和 $R_{xx}(1)$。

(1) 求差分序列的均方值 E[$d^2(n)$].

差分序列的均方值

$$E[d^2(n)]=E[(x(n+1)-x(n))^2]$$
$$=E[x^2(n+1)]-2E[x(n+1)x(n)]+E[x^2(n)]$$
$$=R_{xx}(0)-2R_{xx}(1)+R_{xx}(0)$$
$$=2[R_{xx}(0)-R_{xx}(1)]$$

(2) 证明 E[$d^2(n)$]≤ ω_c^2 E[$x^2(n)$].

因为差分序列的均值为

$$m_d=E[d(n)]=E[x(n+1)-x(n)]=E[x(n+1)]-E[x(n)]=m_x-m_x=0$$

所以差分序列的方差为

$$\sigma_d^2 = E[d^2(n)] - m_d^2 = E[d^2(n)] = 2[R_{xx}(0) - R_{xx}(1)]$$

x(n)的功率谱为

$$S_{xx}(e^{j\omega}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_{xx}(m) e^{-j\omega n}$$

$$= R_{xx}(0) + \sum_{m=-1}^{-\infty} R_{xx}(m) e^{-j\omega n} + \sum_{m=1}^{\infty} R_{xx}(m) e^{-j\omega n}$$

$$= R_{xx}(0) + \sum_{m=1}^{\infty} R_{xx}(-m) e^{j\omega n} + \sum_{m=1}^{\infty} e^{-j\omega n}$$

$$= R_{xx}(0) + \sum_{m=1}^{\infty} R_{xx}(m) [e^{j\omega n} + e^{-j\omega n}]$$

$$= R_{xx}(0) + \sum_{m=1}^{\infty} 2R_{xx}(m) \cos(m\omega)$$

上式可视为偶函数$S_{xx}(e^{j\omega})$的傅里叶级数展开式，级数的前两个系数分别为

$R_{xx}(0) = \dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S_{xx}(e^{j\omega}) d\omega$和$R_{xx}(1) = \dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S_{xx}(e^{j\omega}) \cos\omega d\omega$

由于当$\omega_c <|\omega| \le \pi$时，$S_{xx}(e^{j\omega}) = 0$，所以

$$R_{xx}(1) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega}^{\omega_c} S_{xx}(e^{j\omega}) \cos\omega \ge \frac{1}{2\pi}\cos\omega_c \int_{-\omega_c}^{\omega_c} S_{xx}(e^{j\omega}) d\omega$$

上式中

$\dfrac{1}{2\pi}\cos\omega_c \int_{-\omega_c}^{\omega_c} S_{xx}(e^{j\omega}) d\omega = \cos\omega_c R_{cc}(0) = (1 - 2\sin^2\dfrac{\omega_c}{2}) R_{xx}(0) \ge (1 - 2(\dfrac{\omega_c}{2})^2) R_{xx}(0)$因此得

$$R_{xx}(1) \ge (1 - \frac{\omega_c^2}{2}) R_{xx}(0)$$

即

$$R_{xx}(0) - R_{xx}(1) \le \frac{\omega_c^2}{2} R_{xx}(0)$$

或

$$E[d^2(n)] \le \omega_c^2 E[x^2(n)]$$

5.10 设 x(n)是均值为零，方差为σ_x^2的平稳白噪声随机信号，它作用于冲激响应为 h(n)的线性非移变系统的输入端，得到输出随机信号 y(n)。

(1) 求 x(n)与 y(n)的互相关序列在滞后时间 m=0 时的取样值 $R_{xy}(0)$。

解：线性非移变系统的输出 y(n)输入 x(n)有如下关系

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) x(n-k)$$

因此

$$R_{xy}(0)=E[x(n)y(n)]=E[x(n)\sum_{k=-\infty}^{\infty}h(k)x(n-k)]$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h(k)E[x(n)x(n-k)]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h(k)R_{xx}(k)$$

其中，$R_{xx}(k)$ 是均值为零、方差为σ_x^2 的平稳白噪声随机信号 x(n)的自相关序列，有

$$R_{xx}(k)=E[x(n)x(n+k)]=\sigma_x^2\delta(k)$$

所以

$$R_{xy}(0)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h(k)\sigma_x^2\sigma(k)=\sigma_x^2 h(0)$$

(2) 求输出信号 y(n)的方差σ_y^2。

解：因为 x(n)的均值为零，所以 y(n)的均值也为零，因此

$$\sigma_y^2=E[y^2(n)]=E[(\sum_{k=-\infty}^{\infty}h(k)x(i-k))(\sum_{k=-\infty}^{\infty}h(k)x(j-k))]$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h^2(k)E[x^2(n-k)]+\sum_{\substack{i=-\infty\\ i\neq j}}^{\infty}\sum_{\substack{j=-\infty\\ j\neq i}}^{\infty}h^2(k)E[x(i-k)x(j-k)]$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h^2(k)R_{xx}(0)+\sum_{\substack{i=-\infty\\ i\neq j}}^{\infty}\sum_{\substack{j=-\infty\\ j\neq i}}^{\infty}h^2(k)R_{xx}(i-j)$$

由于 x(n)是一个均值为零、方差为σ_x^2 的平稳白噪声随机信号，所以

$$R_{xx}(0)=\sigma_x^2$$

$$R_{xx}(i-j)=0,i\neq j$$

因此 $\sigma_y^2=\sigma_x^2\sum_{k=-\infty}^{\infty}h^2(k)$

5.11 设有一平稳随机信号 x(n)由于下列差分方程表示：x(n)=-$\sum_{k=1}^{p}a_k x(n-k)+u(n)$ 式中，a_k (k=1,⋯,p)是 p 个常数，u(n)是均值为零、方差为σ^2 的白噪声。求 x(n)的自相关序列 R_{xx}(m)的表示式。

解：x(n)的自相关序列为

$$R_{xx}(m)=E[x(n)x(n+m)]$$

$$=E[x(n)(-\sum_{k=1}^{p}a_k x(n+m-k)+u(n+m))]$$

$$=-\sum_{k=1}^{p}a_k E[x(n)x(n+m-k)]+E[x(n)u(n+m)]$$

$$=-\sum_{k=1}^{p}a_k R_{xx}(m-k)+E[x(n)u(n+m)]$$

（1）

式（1）右端第二项

$$E[x(n)u(n+m)]=E\{[\sum_{l=0}^{\infty}h(l)u(n-l)]u(n+m)\}$$

$$=\sum_{l=0}^{\infty}h(l)E[u(n-1)u(n+m)]=\sum_{l=0}^{\infty}h(l)\sigma^2\delta(m+l)=\sigma^2 h(-m)$$

（2）

由于 h(n)是因果系统即满足条件 h(-m)=0(m>0),所以式（2）成为

$$\text{E[x(n)u(n+m)]}=\begin{cases}\sigma^2 h(0), m=0\\ 0, m>0\end{cases}\qquad(3)$$

由题给差分方程可求出系统函数

$$H(z)=\frac{1}{1+\sum_{k=1}^{p}a_k z^{-k}}$$

根据初值定理，有

$$h(0)=\lim_{z\to\infty}H(z)=\lim_{z\to\infty}\frac{1}{1+\sum_{k=1}^{p}a_k z^{-k}}=1\qquad（4）$$

将式（4）代入式（3），得

$$\text{E[x(n)u(n+m)]}=\begin{cases}\sigma^2, m=0\\ 0, m>0\end{cases}\qquad(5)$$

将式（5）代入式（1），最后得

$$R_{xx}(m)+\sum_{k=1}^{p}a_k R_{xx}(m-k)=\begin{cases}\sigma^2, m=0\\ 0, m>0\end{cases}$$

这就是 x(n)的自相关序列 $R_{xx}(m)$ 应满足的方程式。

5.12 有一线性非移变系统，其单位冲激响应为 h(n)=$\begin{cases}\frac{2}{\pi}\frac{\sin^2(\frac{\pi}{2}n)}{n}, n\neq 0\\ 0, n=0\end{cases}$,若在该系统输入端作用一个离散

随机信号 x(n)，则在系统输出端得到 y(n)。

(1) 求输出信号 y(n)的自相关序列。

(2) 求输入信号 x(n)与输出信号 y(n)的互相关序列。

(3) 证明(2)所算得的互相关序列是奇序列。

(4) 若用 x(n)和 y(n)构成一个复序列ω(n)，ω(n)=x(n)+jy(n)请计算ω(n)的自相关序列。

(5) 求用ω(n)的功率谱。

解：(1)首先求 h(n)的傅里叶变换

$$H(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h(n)e^{-j\omega n}$$

$$=\frac{2}{\pi}[\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{\sin^2(\pi n/2)}{n}e^{-j\omega n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2(\pi n/2)}{n}e^{-j\omega n}]$$

$$=\frac{2}{\pi}[\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{1-\cos(\pi n)}{2n}e^{-j\omega n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos(\pi n)}{2n}e^{-j\omega n}]$$

$$=\frac{1}{\pi}[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos(\pi n)}{-n}e^{j\omega n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos(\pi n)}{n}e^{-j\omega n}]$$

$$=\frac{1}{\pi}[\sum_{n=1}^{\infty}1-\cos(\pi n)]\frac{-e^{j\omega n}+e^{j\omega n}}{n}$$

$$=j\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}[(-1)^n-1]\frac{\sin(\omega n)}{n}$$

$$=j\frac{2}{\pi}[-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin(\omega n)}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(\omega n)}{n}]$$

其中 $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin(\omega n)}{n}=\frac{\omega}{2},|\omega|<\pi$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(\omega n)}{n}=\begin{cases}\frac{\pi-\omega}{2},0<\omega<2\pi\\ \frac{-\omega-\pi}{2},-2\pi<\omega<0\end{cases}$$

因此，当$0\le\omega<\pi$时

$$H(e^{j\omega})=j\frac{2}{\pi}(-\frac{\omega}{2}-\frac{-\omega-\pi}{2})=j$$

即

$$H(e^{j\omega})=\begin{cases}-j,0\le\omega<\pi\\ j,-\pi\le\omega<0\end{cases}$$

由此得到 $|H(e^{j\omega})|=1$

由于 y(n)的功率谱 $S_{yy}(e^{j\omega})$ 与功率谱 $S_{xx}(e^{j\omega})$ 有以下关系：

$$S_{yy}(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})\ H(e^{-j\omega})\ S_{xx}(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|^2\ S_{xx}(e^{j\omega})$$

$$= S_{xx}(e^{j\omega})$$

且功率谱与自相关序列之间有傅里叶变换关系，即

$$S_{yy}(e^{j\omega}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_{yy}(m) e^{-j\omega m}$$

$$S_{xx}(e^{j\omega}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_{xx}(m) e^{-j\omega m}$$

所以，最后得到

$$R_{yy}(m) = R_{xx}(m)$$

(2)x(n)与 y(n)的互相关序列

$$R_{xy}(m) = \mathrm{E}[x(n)y(n+m)] = \mathrm{E}[x(n) \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) x(n+m-k)]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) E[x(n) x(n+m-k)]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) R_{xx}(m-k)$$

(3)因 x(n)是实序列，有

$$R_{xx}(m) = R_{xx}(-m)$$

h(n)是奇序列，即

h(n)＝－h(－n)

所以

$$R_{xx}(-m) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) R_{xx}(-m-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) R_{xx}(m+k)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(-k) R_{xx}(m-k) = -\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) R_{xx}(m-k)$$

$$= -R_{yy}(m)$$

即(2)所算得的互相关序列是奇序列。

(4) $\omega(n)$ 的自相关序列为

$$R_{\omega\omega}(m) = \mathrm{E}[\omega(n)\ \omega^*(n+m)] = \mathrm{E}[(x(n)+jy(n))(x(n+m)-jy(n+m))]$$

$=E[x(n)x(n+m)]+E[y(n)y(n+m)]+jE[y(n)x(n+m)-jx(n)y(n+m)]$

$=R_{xx}(m)+R_{yy}(m)+j[R_{yx}(m)]-j[R_{xy}(m)]$

将(1)和(3)的结果，即 $R_{yy}(m)=R_{xx}(m)$ 和 $R_{xy}(-m)=-R_{xx}(m)=R_{yx}(-m)$ 代入上式，得

$$R_{\omega\omega}(m)=2R_{xx}(m)-j2R_{xy}(m)=2R_{xx}(m)-j\sum_{k=-\infty}^{\infty}h(k)R_{xx}(m-k)$$

(5)因 $m_x=0$，所以 $m_y=0$，于是 $\omega(n)$ 的功率谱为

$$S_{\omega\omega}(e^{j\omega})=\sum_{m=-\infty}^{\infty}R_{xx}(m)e^{-j\omega n}$$

利用(4)的结果，有

$$S_{\omega\omega}(e^{j\omega})=2\sum_{m=-\infty}^{\infty}R_{xx}(m)e^{-j\omega n}-j2\sum_{m=-\infty}^{\infty}R_{xy}(m)e^{-j\omega n}=2S_{xx}(e^{j\omega})-j2S_{xy}(e^{j\omega})$$

利用(2)的结果，有

$$S_{xy}(e^{j\omega})=H(e^{j\omega})\,S_{xx}(e^{j\omega})$$

故 $$S_{\omega\omega}(e^{j\omega})=2S_{\omega\omega}(e^{j\omega})[1-jH(e^{j\omega})]$$

$$=\begin{cases}0,0\le\omega<\pi\\4S_{xx}(e^{j\omega}),-\pi\le\omega<0\end{cases}$$

5.13 有一线性非移变系统，它有两个输入端 1、2 和一个输出端，从输入端 1 至输出端的单位取样响应为 $h_1(n)$，从输入端 2 至输出端的单位取样响应 $h_2(n)$。当两输入端分别作用有互不相关的两随机序列 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$时，试证明：它们产生的各自对应的输出 $y_1(n)$和 $y_2(n)$也是不相关的。

解：因为是线性非移变系统，所以有

$$y_1(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h_1(k)x_1(n-k)$$

$$y_2(n)=\sum_{l=-\infty}^{\infty}h_2(l)x_2(n-l)$$

因此，$y_1(n)$ 与 $y_2(n)$ 的互相关序列为

$$E[y_1(n)\ y_2(m)]=E\{(\sum_{k=-\infty}^{\infty}h_1(k)x_1(n-k))(\sum_{l=-\infty}^{\infty}h_2(l)x_2(m-l))\}$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty}h_1(k)h_2(l)E[x_1(n-k)x_2(m-l)]$$

由于 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 互不相关，因此上式中有

$$E[x_1(n-k)\ x_2(m-l)] = E[x_1(n-k)]E[x_2(m-l)]$$

所以

$$E[y_2(m)\ y_1(n)]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty} h_1(k)h_2(l)E[x_1(n-k)][x_2(m-l)]$$

$$= E[\sum_{k=-\infty}^{\infty} h_1(k)x_1(n-k)]E[\sum_{l=-\infty}^{\infty} h_2(l)x_2(m-l)]$$

$$= E[y_1(n)]E[y_2(m)]$$

所以 $y_1(n)$ 和 $y_2(n)$ 不相关。

5.14 有一线性移不变系统，其单位取样响应为 h(n)，它由单位取样响应分别为 $h_1(n)$和 $h_2(n)$ 的两个子系统级联而成。设系统输入端作用有一个白噪声序列 x(n)，第 1 个子系统的输出是 y(n)，第 2 个子系统的输出(也是整个级联系统的输出)是 w(n)。设 x(n)的均值为零，方差为 σ_x^2。

(1) 以下 3 个关系式是否都正确，为什么？

(a) $\sigma_y^2 = \sigma_x^2 \sum_{n=0}^{\infty} h_1^2(n)$

(b) $\sigma_\omega^2 = \sigma_y^2 \sum_{n=0}^{\infty} h_2^2(n)$

(c) $\sigma_\omega^2 = \sigma_x^2 \sum_{n=0}^{\infty} h^2(n)$

解：因为 x(n)的均值为零，所以 y(n)的均值也为零，因此

$$\sigma_y^2 = E[y^2(n)]$$

$$= E[(\sum_{i=0}^{\infty} h_1(i)x_1(n-i))(\sum_{j=0}^{\infty} h_1(j)x_1(n-j))]$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} h_1^2(i)E[x^2(n-i)] + \sum_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{\infty}\sum_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{\infty} h_1(i)h_1(j)E[x(n-i)][x(n-l)]$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} h_1^2(i)R_{xx} + \sum_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{\infty}\sum_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{\infty} h_1(i)h_1(j)R_{xx}(i-j) \qquad (1)$$

由于 x(n)是一个均值为零、方差为 σ_x^2 的白噪声随机信号，所以

$$R_{xx}(0)=\sigma_x^2$$

$$R_{xx}(i-j)=0,\ i\neq j$$

将上二式代入式（1），得

$$\sigma_y^2=\sigma_x^2\sum_{i=0}^{\infty}h_1^2(k)$$

所以式（a）是正确的。

根据式（1）的结果，可以得出第 2 个级联子系统 $h_2(n)$ 的输出 ω_n 的方差，即

$$\sigma_\omega^2=\sum_{k=0}^{\infty}h_2^2(k)R_{yy}(0)+\sum_{\substack{i=0\\i\neq j}}^{\infty}\sum_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{\infty}h_2^2(k)R_{yy}(i-j)\qquad(2)$$

虽然 x(n)是一个白噪声随机信号，但是，第 1 个级联子系统 $h_1(n)$ 的输出，即第 2 个级联子系统 $h_2(n)$ 的输入 y(n)= $\sum_{k=0}^{\infty}h_1(k)x(n-k)$，在一般情况下不是白噪声随机信号，因此，在式（2）中的 $R_{yy}(0)$ 和 $R_{yy}(i-j)$ 具有以下性质

$$R_{yy}(0)\neq\sigma_x^2$$

$$R_{yy}(i-j)\neq 0, i\neq j$$

所以题中给出的式（b）不正确。

题中给出的式（c），表示整个系统 h(n)的输入 x(n)和输出 $\omega(n)$ 的方差之间的关系。由于 x(n)是白噪声随机信号，h(n)是线性移不变因果系统，所以式（c）是正确的。

(2)设 $h_1(n)=a^n u(n)$，$h_2(n)=b^n u(n)$，这里，|a|<1，|b|<1。分别用上面列出的(b)式和(c)式计算 σ_ω^2，并比较两个计算结果是否相等？哪个结果是正确的？为什么？

解：题中给出的级联系统的单位取样响应为

$$h(n)=\sum_{k=0}^{n}h_1(n-k)h_2(k)=\sum_{k=0}^{n}a^{n-k}b^k=a^n\sum_{k=0}^{n}(\frac{b^k}{a^k})=\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}u(n)$$

用题中给出的式（c）计算 σ_ω^2，得

$$\sigma_\omega^2=\sigma_x^2\sum_{n=0}^{\infty}h^2(n)=\frac{\sigma_x^2}{(a-b)^2}\sum_{n=0}^{\infty}(a^{n+1}-b^{n+1})$$

$$=\frac{\sigma_x^2}{(a-b)^2}\sum_{n=0}^{\infty}(a^{2n+2}-2(ab)+b^{2n+2})$$

$$=\frac{\sigma_x^2}{(a-b)^2}[\frac{a^2}{1-a^2}-\frac{2ab}{1-ab}+\frac{b^2}{1-b^2}]$$

$$=\frac{\sigma_x^2(1+ab)}{(1-a^2)(1-b^2)(1-ab)} \qquad (3)$$

用题中给出的式（b）计算σ_ω^2，得

$$\sigma_\omega^2=\sigma_y^2\sum_{n=0}^{\infty}h_2^2(n)=\sigma_x^2\sum_{n=0}^{\infty}h_1^2(n)\sum_{n=0}^{\infty}h_2^2(n)=\sigma_x^2\sum_{n=0}^{\infty}a^{2n}\sum_{n=0}^{\infty}b^{2n}$$

$$=\frac{\sigma_x^2}{(1-a^2)(1-b^2)} \qquad (4)$$

将分别用题中给出的式（c）和式（b）计算σ_ω^2得到的结果式（3）和式（4）比较，可以看出它们是不同的。基于前面说明的理由，用式（c）计算得到的结果即式（3）是正确的。

5.15 设 $x_a(t)$是均值为零的连续时间随机信号，它的自相关函数和功率谱分别定义为 $R_{(xx)}^{(a)}(\tau)=E[x_a(t)x_a^*(t+\tau)]$和 $S_{xx}^{(a)}(j\Omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}R_{xx}^{(a)}(\tau)e^{-j\Omega\tau}d\tau$ 其中，上标(a)表示针对连续时间(或模拟)信号；滞后时间τ是连续变量；Ω是模拟信号角频率。

现以周期 T 对 $x_a(t)$等间隔取样，得到离散时间信号 $x(n)=x_a(nT)$,n 取整数。x(n)的自相关序列和功率谱分别定义为 $R_{xx}(m)=E[x(n)x^*(n+m)]$和 $Sxx(e^{j\omega})=\sum_{-\infty}^{+\infty}R_{xx}(m)e^{-j\omega m}$

(1) 求 $R_{xx}(m)$与 $R_{xx}^{(a)}(\tau)$之间的关系。

解：按照定义，自相关序列$R_{\omega\omega}(m)$为

$$R_{\omega\omega}(m)=E[x(n)x^*(n+m)]=E[x_a(nT)\ x_a^*(nT+mT)]=R_{xx}^a(mT)$$

因此$R_{\omega\omega}(m)$就是以周期 T 对$R_{xx}^a(\tau)$的等间隔取样。

(2) 求 $S_{xx}(e^{j\omega})$与 $S_{xx}^{(a)}(j\Omega)$之间的关系。

解：根据（1）的结果和$S_{xx}^a(j\Omega)$的定义，有

$$R_{\omega\omega}(m)=R_{xx}^{a}(mT)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_{xx}^{a}(j\Omega)e^{j\Omega mT}d\Omega \qquad (1)$$

另一方面，根据 $S_{xx}(e^{j\omega})$的定义，有

$$R_{\omega\omega}(m)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}S_{xx}^{a}(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega \qquad (2)$$

将式（1）表示成无限个积分之和，其中每个积分都在长为$2\pi/T$的区间上进行，即$R_{\omega\omega}(m)=$

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{(2k-1)\pi/T}^{(2k+1)\pi/T}S_{xx}^{a}(j\Omega)e^{j\Omega mT}d\Omega \qquad (3)$$

变量置换：$\Omega\Rightarrow\Omega+\frac{2\pi}{T}k$，式（3）化为

$$R_{\omega\omega}(m)=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{-\pi/T}^{\pi/T}S_{xx}^{a}(j\Omega+j\frac{2\pi}{T}k)e^{j\Omega mT}e^{j2\pi mk}d\Omega \qquad (4)$$

交换求和与积分的次序，考虑到对于所有整数 k 和 m 有$e^{j2\pi mk}=1$，因此式（4）化为$R_{\omega\omega}(m)$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/T}^{\pi/T}[\sum_{k=-\infty}^{\infty}S_{xx}^{a}(j\Omega+j\frac{2\pi}{T}k)]e^{j\Omega mT}d\Omega \qquad (5)$$

将$\Omega=\frac{\omega}{T}$代入式（5），得

$$R_{\omega\omega}(m)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}S_{xx}^{a}(j\frac{\omega}{T}+j\frac{2\pi}{T}k)]e^{j\omega n}d\omega \qquad (6)$$

将式（6）与式（2）对照，得

$$S_{xx}(e^{j\omega})=\frac{1}{T}\sum_{-\infty}^{\infty}S_{xx}^{a}(j\frac{\omega}{T}+j\frac{2\pi}{T}k) \qquad (7)$$

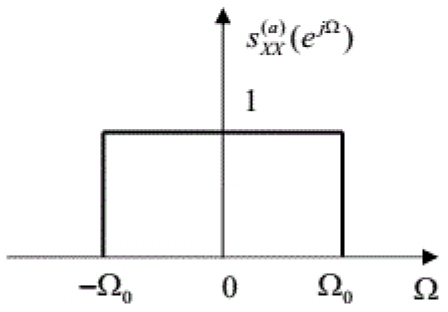
或 $$S_{xx}(j\Omega)=\frac{1}{T}\sum_{-\infty}^{\infty}S_{xx}^{a}(j\Omega+j\frac{2\pi}{T}k) \qquad (8)$$

(3) 为了不失真地由 $S_{xx}(e^{j\omega})$得到 $S_{xx}^{(a)}(j\Omega)$,$S_{xx}^{(a)}(j\Omega)$应满足什么条件？

解：从式（7）或式（8）可看出，$S_{xx}(e^{j\omega})$是$S_{xx}^{a}(j\Omega)$的周期延拓，周期为$\frac{2\pi}{T}$。因此，若满足条件$S_{xx}^{a}(j\Omega)=0$，$|\Omega|>\pi/T$ 则$S_{xx}^{a}(j\Omega)$经过周期延拓后不会发生混叠失真，因而能够不失真地由$S_{xx}(e^{j\omega})$得到$S_{xx}^{a}(j\Omega)$，即有

$$S_{xx}(e^{j\omega})=\frac{1}{T}S_{xx}^{a}(j\frac{\omega}{T})，|\omega|\le\pi$$

5.16 已知连续时间随机信号 $x_a(t)$的功率谱如图 P5.16 所示，以周期 T 对 $x_a(t)$等间隔取样得到离散时间随机信号 $x(n)=x_a(nT)$。



(1) 求 x(n)的自相关序列 $R_{xx}(m)$。

解：
$$R_{xx}(m)=R_{xx}^{a}(mT)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_{xx}^{a}(j\Omega)e^{j\Omega mT}d\Omega$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\Omega_0}^{\Omega_0}e^{j\Omega mT}d\Omega=\frac{1}{\pi mT}\sin(\Omega_0 mT)$$

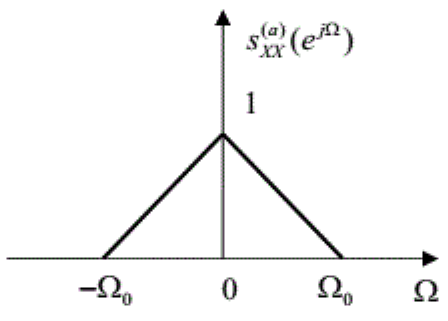
(2) 为了使 x(n)是白色随机序列，应如何选择 T?

解：若 $T=\frac{\pi}{\Omega_0}k$，k 是正整数，则上式化为

$$R_{xx}(n)=\frac{\Omega_0}{\pi}\frac{\sin(mk\pi)}{mk\pi}=\frac{\Omega_0}{\pi}\delta(m)$$

这是白色随机序列的自相关序列的形式。因此，只要取样周期 T 是 π/Ω_0 的整数倍，那么 x(n)就是白色随机序列。

5.17 假设连续时间随机信号 $x_a(t)$的功率谱如图 P5.17 所示，重做 5.16 题。



解：x(n)的自相关序列为

$$R_{xx}(m)=E[x(n)x(n+m)]=E[x(n)(-\sum_{k=1}^{p}a_kx(n+m-k)+u(n+m)]$$

$$=-\sum_{k=1}^{p}a_kE[x(n)x(n+m-k)]+E[x(n)u(n+m)] \qquad (1)$$

$$=-\sum_{k=1}^{p}a_kR_{xx}(m-k)+E[x(n+m)]$$

式（1）右端第二项

$$E[x(n)u(n+m)]=E\{[\sum_{l=0}^{\infty}h(l)u(n-l)]u(n+m)\}$$

$$=\sum_{l=0}^{\infty}h(l)E[u(n-1)u(n+m)]=\sum_{l=0}^{\infty}h(l)\sigma^2\delta(m+l) \qquad (2)$$

$$=\sigma^2h(-m)$$

由于 h(n)是因果系统，即满足条件 h(-m)=0(m>0),所以式（2）成为

$$E[x(n)u(n+m)]=\begin{cases}\sigma^2h(0), m=0\\0, m>0\end{cases} \qquad (3)$$

由题给差分方程可求出系统函数

$$H(z)=\frac{1}{1+\sum_{k=1}^{p}a_kz^{-k}}$$

根据初值定理，有

$$h(0)=\lim_{z\to\infty}H(z)=\lim_{z\to\infty}\frac{1}{1+\sum_{k=1}^{p}a_kz^{-k}}=1 \qquad (4)$$

将式（4）代入式（3），得

$$E[x(n)u(n+m)]=\begin{cases}\sigma^2, m=0\\0, m>0\end{cases} \qquad (5)$$

将式（5）代入式（1），最后得

$$R_{xx}(m)+\sum_{k=1}^{p}a_kR_{xx}(m-k)=\begin{cases}\sigma^2, m=0\\0, m>0\end{cases}$$

这就是 x(n)的自相关序列 $R_{xx}(m)$ 应满足的方程式。

5.18 将题 5.16 和题 5.17 推广到一般情况。设连续时间随机信号 $x_a(t)$的功率谱为 $S_{xx}^{(a)}(t)$，对 $x_a(t)$ 以等时间间隔 T_0 取样后得到离散时间随机序列 x(n)。为使 x(n)是白色随机序列，讨论 $S_{xx}^{(a)}(t)$和 T_0 应满足什么条件？

5.19 设均值为零、方差为 σ^2 的白噪声序列 u(n)作用于一个传输函数为 $H_{MA}(z)=\sum_{k=0}^{q}b_kz^{-k}$ 的线性移不变系

统，得到输出信号 x(n)。
(1) 写出系统的差分方程。
解：求系统的差分方程

根据系统函数 $H_{MA}(z)=\sum_{k=0}^{q} b_k z^{-k}$ 可看出单位取样响应 h(n)是有限长序列

$$b_n=\{b_0,b_1,\ldots,b_q\}$$

因此 $$x(n)=\sum_{-\infty}^{\infty} h(k)u(n-k)=\sum_{k=0}^{q} b_k u(n-k) \qquad (1)$$

(2) 用系统的冲激响应 h(n)表示 x(n)的自相关序列 $R_{xx}(m)$。

解：用 h(n)表示 x(n)的自相关序列

$$R_{xx}(m)=E[x(n)x(n+m)]$$

$$=E[\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)u(n-k)\sum_{r=-\infty}^{\infty} h(r)u(n+m-r)]$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)\sum_{r=-\infty}^{\infty} h(r)E[u(n-k)u(n+m-r)]$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)\sum_{r=-\infty}^{\infty} h(r)R_{uu}(m-r+k)$$

令 r－k=l，上式变成

$$R_{xx}(m)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)\sum_{l=-\infty}^{\infty} h(l+k)R_{uu}(m-l)=\sum_{l=-\infty}^{\infty} R_{uu}(m-l)\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)h(l+k)$$

其中 $R_{uu}(m-l)=E[u(n)u(n+m-l)]=\delta^2\delta(m-l)$

因此 $$R_{xx}(m)=\sum_{l=-\infty}^{\infty}\delta^2\delta(m-l)\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)h(l+k)=\delta^2\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)h(m+k) \qquad (2)$$

(3) 利用系统的频率响应 $H_{MA}(e^{j\omega})$表示 x(n)的功率谱 $S_{xx}(e^{j\omega})$。

解：用 $H_{MA}(e^{j\omega})$ 表示 x(n)的功率谱

由于 h(k)的自相关序列 $\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)h(m+k)$ 实际上是 h(k)与 h(-k)的线性卷积，因此 $\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)h(m+k)$ 的傅里叶变换等于乘积。这样，对式（2）求傅里叶变换 $H_{MA}(e^{j\omega})$ 与 h(-k)的傅里叶变换 $H_{MA}(e^{-j\omega})$ 的乘积。边样，对式（2）求傅里叶变换，便得到

$$S_{xx}(e^{j\omega})=\sigma^2 H_{MA}(e^{j\omega})H_{MA}(e^{j\omega})=\sigma^2|H_{MA}(e^{j\omega})|^2 \qquad (3)$$

(4) 证明自相关序列满足差分方程 $R_{xx}(m)=\begin{cases}\sigma^2\sum_{k=0}^{q-m}b_k b_{m+k}, m=0,1,\cdots,q\\ 0, m\ge q+1\end{cases}$

解：由 $H_{MA}(z)=\sum_{k=0}^{q}b_k z^{-k}$ 可以求得

$$h(k)=b_k[u(k)-u(k-q-1)]$$

这里 u(k)表示单位阶跃序列。因此

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}h(k)h(m+k)=\begin{cases}\sum_{k=0}^{q-m}b_k b_{k+m}, m=0,1,\cdots,q\\ 0, m\ge q+1\end{cases} \qquad (4)$$

将式（4）代入式（2），得

$$R_{xx}(m)=\begin{cases}\sigma^2\sum_{k=0}^{q-m}b_k b_{k+m}, m=0,1,\cdots,q\\ 0, m\ge q+1\end{cases}$$

5.20 设均值为零、方差为σ^2的白噪声序列 x(n)作用于一个传输函数为 $H_{AR}(z)=\frac{1}{1+\sum_{k=1}^{p}a_k z^{-k}}$ 的线性移不变系统，得到输出随机信号 x(n)。

(1) 写出系统的差分方程。

解：设系统的输入和输出信号的 Z 变换分别为 U(z)和 X(z),于是

$$X(z)=U(z)H_{AR}=\frac{U(z)}{1+\sum_{k=1}^{p}a_k z^{-k}}$$

由上式得

$$X(z)+\sum_{k=1}^{p}a_k z^{-k}X(z)=U(z)$$

取逆 Z 变换，得系统的差分方程

$$x(n)+\sum_{k=1}^{p}a_k x(n-k)=u(n) \qquad (1)$$

或

$$x(n)=-\sum_{k=1}^{p}a_k x(n-k)+u(n)$$

(2) 证明 x(n)的自相关序列满足差分方程 $R_{xx}(m)=\begin{cases}-\sum_{k=1}^{p}a_k R_{xx}(m-k)+\sigma^2, m=0\\ -\sum_{k=1}^{p}a_k R_{xx}(m-k), m\ge 1\end{cases}$

解：将式（2）代入 x(n)自相关序列定义式，得

$$\begin{aligned}
&R_{xx}(m)=E[x(n)x(n+m)]\\
&=E\{x(n)[-\sum_{k=1}^{p}a_k(n+m-k)+u(n+m)]\}\\
&=-\sum_{k=1}^{p}a_k E[x(n)x(n+m-k)]+E[x(n)u(n+m)]\\
&=-\sum_{k=1}^{p}a_k R_{xx}(m-k)+R_{xu}(m)
\end{aligned}\qquad (3)$$

设系统的单位取样响应为 h(n),则系统的输出为

$$x(n)=\sum_{l=0}^{\infty}h(l)u(n-l)$$

因此，式（3）中的 $R_{xu}(m)$ 为

$$\begin{aligned}
&R_{xu}(m)=E[x(n)u(n+m)]\\
&=E\{\sum_{l=0}^{\infty}h(l)u(n-l)u(n+m)\}\\
&=\sum_{l=0}^{\infty}h(l)E[u(n-l)u(n+m)]\\
&=\sum_{l=0}^{\infty}h(l)\sigma^2\delta(m+l)\\
&=\sigma^2 h(-m)
\end{aligned}\qquad (4)$$

由于系统是因果系统，有 h(m)=0(m<0)或 h(-m)=0(m>0)，所以式（4）可写成

$$R_{xu}(m)=\begin{cases}\sigma^2 h(0), m=0\\ 0, m>0\end{cases}\qquad (5)$$

其中 h(0)可用初值定理求得

$$h(0)=\lim_{z\to\infty}H_{AR}(z)=\lim_{z\to\infty}\frac{1}{1+\sum_{k=1}^{p}a_k z^{-k}}=1$$

因此，式（5）化为

$$R_{xu}(m)=\begin{cases}\sigma^2, m=0\\ 0, m>0\end{cases}\qquad (6)$$

将式（6）代入式（3），最后得