概率论与数理统计

Probability and Mathematical Statistics

第七章 参数估计

7.1 参数估计的概念

——根据样本给出参数的估计值

θ是总体$F(x,\theta)$中的未知参数

样本 $(X_1, X_2, \cdots X_n)$

统计量$\hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ $\longleftrightarrow$ 估计量

估计值$\hat{\theta}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$

θ

参数估计
- 区间估计
- 点估计
  - 矩估计法
  - 极大似然估计法

第七章 参数估计

7.2 矩估计法和极大似然估计法

7.3 估计量的评选原则

一 无偏性、二 有效性、三 一致性

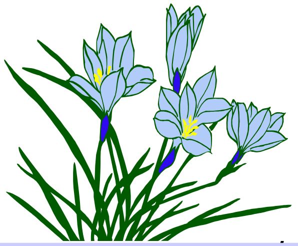
7.4 区间估计

一 区间估计的概念

二 单个正态总体均值的区间估计

三 单个正态总体方差的区间估计

四 单个正态总体的单侧区间估计



7.2 矩估计法和极大似然估计法

一 矩估计法

1 原理：大数定理；样本矩在一定程度上逼近总体矩。

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k - E(X^k)\right| < \varepsilon\right) = 1$$

总体X的分布函数$F(x;\theta_1,\ldots,\theta_k)$,其中$\theta_1,\ldots,\theta_k$为待估参数. $(X_1,\ldots,X_n)$为X的样本(设X的k阶矩存在), 则

总体的j阶原点矩 $E(X^j)=a_j(\theta_1,\ldots,\theta_k)$

样本的j阶原点矩 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^j = A_j$

2 方法

令 $a_j(\theta_1,\ldots,\theta_k)=A_j \qquad j=1,\ldots,k$

求解方程组,得到解$\hat{\theta}_1,\cdots,\hat{\theta}_k$作为参数$\theta_1,\cdots,\theta_k$的矩估计量.

例 试求总体期望θ_1=*EX*和方差θ_2=*DX*的矩估计。

解

令 $\begin{cases} EX = \bar{X} \\ EX^2 = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \theta_1 = \bar{X} \\ \theta_2 + \theta_1^2 = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \theta_2 = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2 - (\bar{X})^2 = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 = \tilde{S}^2 \\ \theta_1 = \bar{X} \end{cases} \quad \therefore \hat{\theta}_1 = \bar{X}, \quad \hat{\theta}_2 = \tilde{S}^2.$$

注1 此结论对期望和方差存在的总体都适用，即

$$\hat{E}(X) = \bar{X}, \quad \hat{D}(X) = \tilde{S}^2.$$

注2 估计不唯一，如对总体$P(\lambda)$有 $\hat{\lambda} = \bar{X}$，$\hat{\lambda} = \tilde{S}^2$.

注3 可用 $B_k = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^k$ 估计 $\beta_k = E(X - EX)^k$.

例 设总体$X \sim U[a,b]$, 试由样本$(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, 求未知参数a,b 的矩估计量。

解 令
$$\begin{cases} \bar{X} = EX = (a+b)/2 \\ \tilde{S}^2 = DX = (b-a)^2/12 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \hat{a} = \bar{X} - \sqrt{3\tilde{S}^2} \\ \hat{b} = \bar{X} + \sqrt{3\tilde{S}^2} \end{cases}$$

VS

0 : 1

问：　获胜者为柯洁或业余围棋爱好者？

已发生的事件，其概率应该最大。

-----极大似然原理

二 极大似然估计法

Maximum Likelihood Estimate

1原理　设随机试验有n种可能结果 $A_1, A_2, \cdots, A_n$. 现做一次试验，结果事件A_i 发生了，则认为事件A_i 在这n种可能结果中出现的概率最大。

极大似然估计法 *Maximum Likelihood Estimate*

Gauss　1821年

Fisher　1922年

Fisher重新发现了这一方法，并首先研究了这种方法的一些性质。

Gauss

Fisher

例：矩估计与极大似然估计

例　设一袋中放有黑球和白球共计4个，但不知白球的具体个数m。今有放回抽取三次，结果是(白, 黑, 白)，试估计白球的个数m?

解：矩估计：样本均值=总体均值

极大似然估计：已发生的事件，其概率应该最大

$$\frac{2}{3}=\frac{m}{4}\Rightarrow m=\frac{8}{3}$$

记$\{X_i=1\}$为第i次取到白球，$\{X_i=0\}$为第i次取到黑球。

$$i=1,2,3.\text{则}X_i\text{为i.i.d.且}X_i\cong X\cong B(1,\frac{m}{4}).$$

$$P(X_1=1,X_2=0,X_3=1)$$
$$=P(X_1=1)P(X_2=0)P(X_3=1)$$
$$=P(X=1)P(X=0)P(X=1)$$
$$=(\frac{m}{4})^2(\frac{4-m}{4})$$

$$m=1,\quad P=\frac{3}{64}$$
$$m=2,\quad P=\frac{8}{64}\Rightarrow\hat{m}=3.$$
$$m=\boxed{3},\quad P=\boxed{\frac{9}{64}}$$

极大似然估计法

极大似然原理:**已发生的事件，其概率应该最大。**

极大似然估计:

总体X的分布形式已知，未知的仅仅是参数θ 。

$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ **发生了。**

即 $(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n)$ **发生了。**

参数θ的选择应有利于样本观测值的发生，即让*<u>这组数据发生的概率</u>*达到最大。

离散情形

已发生事件概率

似然函数:

$$L(x_1,x_2,\ldots,x_n;\theta)=\prod_{i=1}^{n}P(X_i=x_i;\theta)=P(X_1=x_1,X_2=x_2,\ldots,X_n=x_n;\theta)$$

θ 的估计值 $\hat{\theta}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$:

$$L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\hat{\theta})=\max_{\theta\in\Theta}L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta)$$

称 $\hat{\theta}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为 θ 的极大似然估计值,

$\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为 θ 的极大似然估计量。

连续情形

事件发生时概率密度

似然函数：

$$L(x_1,x_2,\ldots,x_n;\theta)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)$$

$$\mathrm{P}(X_1=x_1,X_2=x_2,\ldots,X_n=x_n;\theta)$$

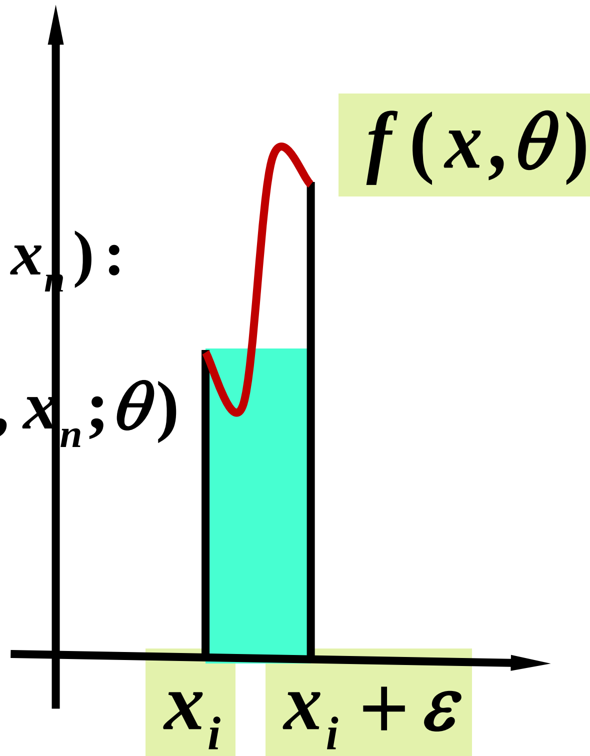
$$\mathrm{P}(x_1\le X_1<x_1+\varepsilon,x_2\le X_2<x_2+\varepsilon,\ldots,x_n\le X_n<x_n+\varepsilon;\theta)$$

$$=\prod_{i=1}^{n}\mathrm{P}(x_i\le X<x_i+\varepsilon;\theta)$$

$$\approx\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)\times\varepsilon$$

θ的极大似然估计 $\hat{\theta}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$：

$$L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\hat{\theta})=\max_{\theta\in\Theta}L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta)$$



例设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，μ 已知，求 σ^2 的极大似然估计。

解 $$L(\mu,\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}=(2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}$$

$$\ln L=-\frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma^2)-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma^2}\ln L=-\frac{n}{2}\cdot\frac{1}{\sigma^2}+\frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2=0$$

$$\Rightarrow \quad \hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

例 设总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，求μ和σ^2的极大似然估计。

解 $$L(\mu,\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}=(2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}$$

$$\ln L=-\frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma^2)-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial\mu}\ln L=\dfrac{1}{\sigma^2}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)=\dfrac{1}{\sigma^2}(n\bar{x}-n\mu)=0\\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial\sigma^2}\ln L=-\dfrac{n}{2}\cdot\dfrac{1}{\sigma^2}+\dfrac{1}{2\sigma^4}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\quad \hat{\mu}=\bar{x}\,,\qquad \hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2=\tilde{s}^2$$

小结：极大似然估计的一般步骤

选$\hat{\theta}$使$L(\theta)$最大

(1) 写出似然函数$L(\theta)$

$$L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta)=\begin{cases}\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta), & f(x;\theta)\text{为}X\text{的概率密度}\\ \prod_{i=1}^{n} P(X=x_i;\theta), & P(X=x;\theta)\text{为}X\text{的分布律}\end{cases}$$

(2) 建立似然方程(组) $\dfrac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_i}=0$或$\dfrac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta_i}=0.$

(3) 解方程(组)得极大似然估计 $\hat{\theta}$.

思考设总体 $X \sim U[a,b]$，试求a 和b 的极大似然估计。

解

$$L(a,b)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i;a,b)=\begin{cases}\dfrac{1}{(b-a)^n}, & a \le x_1, x_2, \cdots, x_n \le b \\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$\because$ 在$a \le x_1, x_2, \cdots x_n \le b$下，

$$a\uparrow, b\downarrow \Rightarrow (b-a)\downarrow \Rightarrow L(a,b)\uparrow$$

$$\therefore \quad a=\min_{1\le i\le n}\{x_i\}, b=\max_{1\le i\le n}\{x_i\}, \quad L(a,b)=\max.$$

即a,b的极大似然估计为 $\hat{a}=X_1^*$，$\hat{b}=X_n^*$.

5 性质

若$\hat{\theta}$为θ的极大似然估计，$u=u(\theta)$有反函数 $\theta=\theta(u)$，则 $\hat{u}=u(\hat{\theta})$为$u=u(\theta)$的极大似然估计。

例 设总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，求σ的极大似然估计。

解 $\sigma>0,\sigma=\sqrt{\sigma^2}$有反函数。由上例,$\hat{\sigma}^2=\tilde{S}^2$

故 $$\hat{\sigma}=\tilde{S}=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}$$

注 $u=u(\theta)$为一般函数此性质也成立。

例 设$(X_1,\ldots,X_n)$是正态总体$N(1,\sigma^2)$的样本，求$P(\bar{X}<t)$的极大似然估计。

解 $P(\bar{X}<t)=\Phi(\frac{t-1}{\sigma}\sqrt{n})$ 有反函数。

又$\hat{\sigma}^2=\tilde{S}^2$,

故所求概率值的极大似然估计为

$$\Phi(\frac{t-1}{\tilde{S}}\sqrt{n})$$

小结

- 掌握矩估计和极大似然估计的原理
- 熟练求解未知参数的矩估计和极大似然估计

7.3 估计量的评选原则

一 无偏性

1定义 设$\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1,\cdots,X_n)$为参数$\theta$的估计量，若

$$\boxed{E(\hat{\theta})=\theta}$$

则称$\hat{\theta}$是θ的无偏估计量.

记$b_n=E\hat{\theta}-\theta$ ——估计量$\hat{\theta}$的偏差

若$b_n\neq 0$ ——$\hat{\theta}$是θ的有偏估计

若$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$ ——$\hat{\theta}$是θ的渐进无偏估计

2 例 设$(X_1,\ldots,X_n)$是总体X的样本，

(1) $E(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k) = EX^k$; (2) $ES^2 = DX$;

(3)$\tilde{S}^2$是DX的有偏估计，且是DX的渐进无偏估计；

$$E(\tilde{S}^2) = E(\frac{n-1}{n}S^2) = \frac{n-1}{n}DX \xrightarrow[n\to\infty]{} DX$$

(4)若$\sum_{i=1}^{n} c_i = 1$,则$\sum_{i=1}^{n} c_i X_i$是EX的无偏估计。无偏估计不唯一

注：$\hat{\theta}$ 为θ的无偏估计，但$g(\hat{\theta})$不一定是$g(\theta)$的无偏估计。

例如：若$D(X)>0$，$\hat{\mu} = \bar{X}$是$\mu = EX$的无偏估计，

$$E[(\hat{\mu})^2] = E(\bar{X}^2) = D(\bar{X}) + [E(\bar{X})]^2 > [E(\bar{X})]^2 = \mu^2.$$

二 有效性

1定义　设$\hat{\theta}_1$，$\hat{\theta}_2$都是参数θ的无偏估计量，若

$$\boxed{D(\hat{\theta}_1) < D(\hat{\theta}_2)}$$

则称$\hat{\theta}_1$比$\hat{\theta}_2$**有效**.

设$\hat{\theta}_0$是参数θ的无偏估计量，若对θ的任一无偏估计$\hat{\theta}$，有

$$D(\hat{\theta}_0) \le D(\hat{\theta})$$

则称$\hat{\theta}_0$是θ的**最小方差无偏估计**。

例　在总体期望$\mu=E(X)$的线性无偏估计类

$$\bar{U}=\left\{\hat{\mu}=\sum_{i=1}^{n}c_iX_i \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n}c_i=1\right\}$$ 中求μ最小方差无偏估计。

解　由Cauchy-Schwarz不等式

$$(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i)^2\le(\sum_{i=1}^{n}a_i^2)(\sum_{i=1}^{n}b_i^2)$$

$$D(\hat{\mu})=D(X)\sum_{i=1}^{n}c_i^2=\frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n}1^2)(\sum_{i=1}^{n}c_i^2)D(X)$$

$$\ge\frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n}1\times c_i)^2D(X)=\frac{1}{n}D(X)$$

而 $D(\bar{X})=\dfrac{1}{n}D(X)$，　故 $\hat{\mu}_0=\bar{X}$ 是μ的最小方差无偏估计。

三 一致性

定义　设$\hat{\theta}$是参数θ的估计量，若对任意$\varepsilon > 0$,有

$$\lim_{n\to\infty} P(|\hat{\theta}-\theta|<\varepsilon)=1 \quad 即\ \hat{\theta}\xrightarrow{P}\theta.$$

则称$\hat{\theta}$为θ一致估计量.

例　由大数定律 $\lim_{n\to\infty} P(|\bar{X}-\mu|<\varepsilon)=1$

知样本均值$\bar{X}$是总体均值μ的一致估计。

例 证明正态总体的样本方差S^2是σ^2的一致估计。

证 $\because \dfrac{n-1}{\sigma^2}S^2 \sim \chi^2(n-1),\quad E(S^2)=\sigma^2,$

$$DS^2 = D\left(\frac{\sigma^2}{n-1}\cdot\frac{(n-1)}{\sigma^2}S^2\right) = \frac{\sigma^4}{(n-1)^2}D\left(\frac{(n-1)}{\sigma^2}S^2\right) = \frac{2\sigma^4}{(n-1)}.$$

由切比雪夫不等式

$$P\left(\left|S^2-\sigma^2\right|<\varepsilon\right)\geq 1-\frac{2\sigma^4}{(n-1)\varepsilon^2}.\xrightarrow[n\to\infty]{} 1.$$

小结

- 熟记统计量的无偏性，有效性，一致性的定义
- 根据定义，能判断估计量的无偏性和有效性

7.4 区间估计

一 区间估计的概念

设总体X的分布函数为$F(x;\theta)$,θ为未知参数，$(X_1,X_2,\ldots,X_n)$为X的样本。给定$\alpha(0<\alpha<1)$,若统计量$\underline{\theta}=\underline{\theta}(X_1,\cdots,X_n)$和$\overline{\theta}=\overline{\theta}(X_1,\cdots,X_n)$，满足

$$P(\underline{\theta}<\theta<\overline{\theta})=1-\alpha$$

置信上限

称$(\underline{\theta},\overline{\theta})$为 θ 的置信度(水平)为$1-\alpha$的置信区间。

含义: 若$1-\alpha=0.95$，抽样100次产生100个区间，其中约有95个区间包含θ.

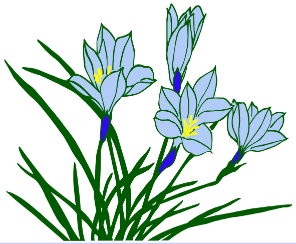
二 单个正态总体$N(\mu,\sigma^2)$均值μ的区间估计

1 方差σ^2已知

2 方差未知

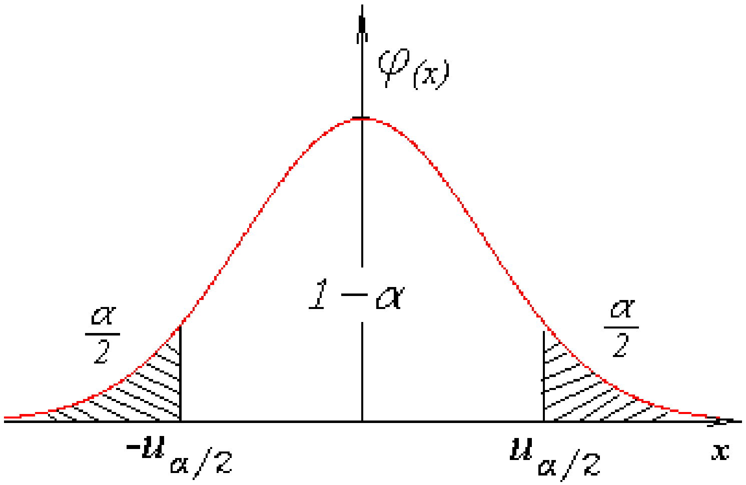
三 单个正态总体$N(\mu,\sigma^2)$方差σ^2的区间估计

四 单侧区间估计



二 单个正态总体$N(\mu,\sigma^2)$均值的区间估计

1 σ^2已知 $\quad \dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0,1)$



$$P\left(\frac{|\bar{X}-\mu|}{\sigma}\sqrt{n} < u_{\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$

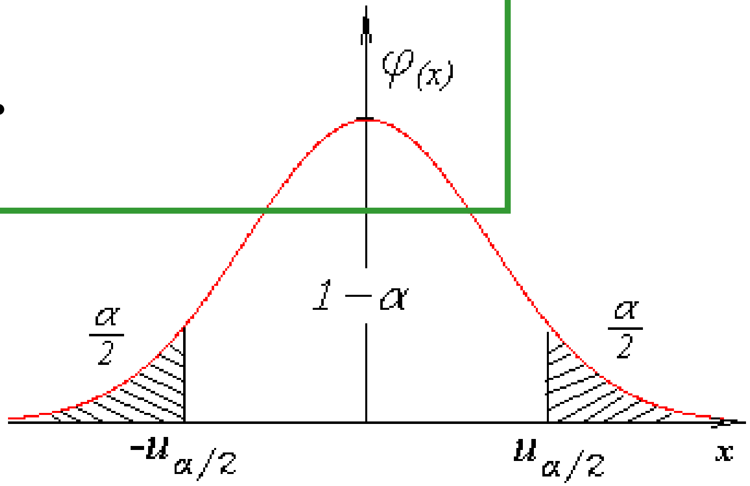
$$\Leftrightarrow P\left(\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2} < \mu < \bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$

σ^2已知时，μ的置信度为$1-\alpha$的置信区间为

$$\left(\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2},\ \bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2}\right).$$

σ^2已知时，μ的置信度为$1-\alpha$的置信区间为

$$\left(\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2},\ \bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2}\right).$$



注 1.置信区间长度 $l=\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2}$

(1)给定α，n越大，l越小

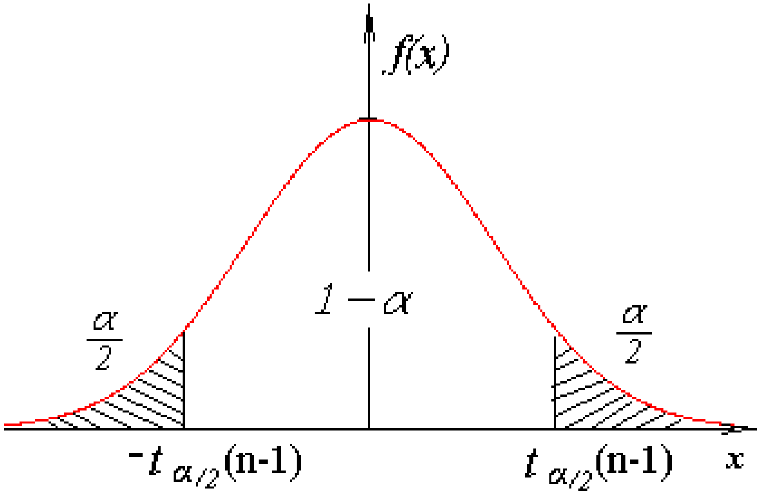
(2)给定n，α越小，l越大

2.相同置信水平下，置信区间选取不唯一。

同一置信水平下，l越小，表示估计精度越高。

若R.V.的密度函数是单峰对称的，则n固定时，上述公式的置信区间是所有置信区间中长度最短的。

2 σ^2未知 $\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0,1)$



$$t=\frac{\bar{X}-\mu}{S}\sqrt{n} \sim t(n-1)$$

$$P(|t|<t_{\alpha/2}(n-1))=1-\alpha$$

$$\Leftrightarrow P\left(\bar{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)<\mu<\bar{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)\right)=1-\alpha$$

σ^2未知时，μ的置信度为$1-\alpha$的置信区间为

$$\left(\bar{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1),\ \bar{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)\right).$$

例 滚珠直径$X\sim N(\mu, \sigma^2)$，从某天生产的滚珠中随机抽取6个，测得直径为(单位：mm)

1.46 1.51 1.49 1.48 1.52 1.51

求下面两种情况下μ的置信度为95%的置信区间。

(1)$\sigma^2=0.0006$时； (2) σ^2未知时。

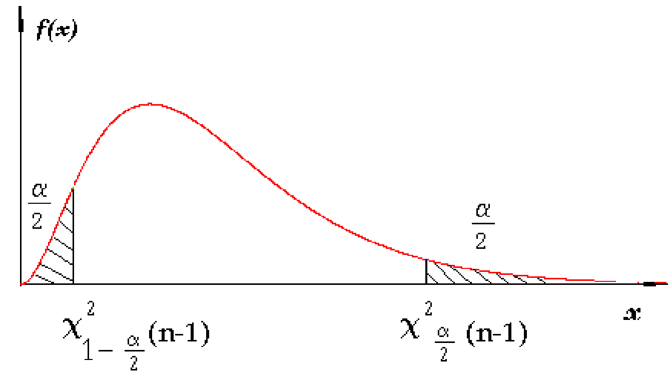
$$(\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2},\ \bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2}).$$

$$(\bar{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1),\ \bar{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)).$$

思考：这两种情况下哪个置信区间的长度短？

三 单个正态总体$N(\mu,\sigma^2)$方差的区间估计

μ未知 $$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$$



$$P\left(\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)<\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}<\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right)=1-\alpha$$

$$\Leftrightarrow P\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}<\sigma^2<\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right)=1-\alpha$$

μ未知时，σ^2的置信度为$1-\alpha$的置信区间为

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)},\ \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right).$$

μ未知时，σ的置信度为$1-\alpha$的置信区间呢？

例 从自动车床加工的一批零件中随机的抽取16件，测得各零件长度为(单位：cm)

2.15	2.10	2.12	2.10	2.14	2.11	2.15	2.13
2.13	2.11	2.14	2.13	2.12	2.13	2.10	2.14

设零件长度服从正态分布，求零件长度标准差σ的置信度为95%的置信区间。

$$\left(\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}},\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}}\right).$$

四 单侧区间估计

设总体X的分布函数为$F(x;\theta)$,θ为未知参数，$(X_1,X_2,\ldots,X_n)$为X的样本。给定$\alpha(0<\alpha<1)$,若统计量$\underline{\theta}=\underline{\theta}(X_1,\cdots,X_n)$和$\overline{\theta}=\overline{\theta}(X_1,\cdots,X_n)$，分别满足

$$P(\underline{\theta}<\theta)=1-\alpha$$

单侧置信下限

或

$$P(\theta<\overline{\theta})=1-\alpha$$

单侧置信上限

称 $\underline{\theta}(\overline{\theta})$ 为 θ 的置信度(水平)为$1-\alpha$的置信下(上)限。

例 从一批灯泡中随机地抽取5只做寿命试验，测得寿命(单位：小时)

1050，1100，1120，1250，1280.

设灯寿命服从正态分布，求灯泡寿命平均值的置信水平为0.95的单侧置信下限。

$$\left(\bar{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1),\ \bar{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)\right).$$

$$\bar{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha}(n-1)$$

小结

- 理解区间估计和单侧区间估计的概念
- 熟记关于单个正态总体的期望和方差的区间估计

解答题

练

习

1. (12')设总体X的密度函数为$f(x;\theta)=\begin{cases} e^{-(x-\theta)}, & x>\theta, \\ 0, & x\le\theta. \end{cases}$

$(X_1,\cdots,X_n)$是取自X的容量为n的样本。

(1)求θ的矩估计量$\hat{\theta}_{\mathrm{M}}$;

(2)求θ的极大似然估计量$\hat{\theta}_{\mathrm{MLE}}$;

(3)$\hat{\theta}_{\mathrm{M}}$是否为$\theta$的无偏估计？为什么？

解答题

练习

2. (12')(1)叙述极大似然估计的定义。

(2)某地质学家为了研究某湖的岩石成分，随机从该地区取100个样品，每个样品有10块石子。记录了每个样品中属于石灰石的石子数。设这100次观测相互独立,并认为每个样品的石灰石的石子数$X \sim B(10, p)$，p为该地区一块石子是石灰石的概率，数据如下：

一个样品中石灰石的石子数k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
恰有k个石灰石的样品个数	1	1	6	7	23	26	21	12	3	0	0

求p的极大似然估计值.

解答题

练习

3. (11')2010考研数一

总体X的分布列为

X	1	2	3
P	$1-\theta$	$\theta-\theta^2$	θ^2

其中$\theta\in(0,1)$为未知参数。以N_i表示来自总体X的简单随机样本(样本容量为n)中等于i的个数。

求常数a_1,a_2,a_3,使$T=\sum_{i=1}^{3}a_iN_i$为θ的无偏估计。

并求T的方差。

解答题

练习

4. (8')已知0.95,1.20,0.80,1.05是来自总体X的一组观测值，$X\sim N(\mu,1)$,设$Y=e^X$.

(1)求μ的置信度为0.95的置信区间；

(2)利用上述结果求$b=EY$的置信度为0.95的置信区间.

$(u_{0.05}=1.65, u_{0.025}=1.96)$

练习

5. (6')某工厂生产一种零件, 其口径X(单位:mm)服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$, 现从某日生产的零件中随机抽出36个测得其口径为$x_1,x_2,\ldots,x_{36}$, 并计算得 $\sum x_i = 558, \sum x_i^2 = 8652.15$, 分别对(1)σ=0.2, (2)$\sigma$未知，求$\mu$的置信度为0.95的置信区间.

$$（u_{0.025} = 1.96, u_{0.05} = 1.645, t_{0.025}(36) = 2.028,$$

$$t_{0.05}(36) = 1.688, t_{0.025}(35) = 2.03）$$