



第三章 控制系统时域分析法

时域分析是通过**求出时间响应**，并根据时间响应进行分析

$$C(s) = G_B(s)R(s) \rightarrow c(t)$$

时域分析的目的：

在时间域，研究在一定的**输入信号**作用下，系统输出随时间变化的情况，以分析和研究系统的控制性能。

三个性能——稳定性、动态的快速性和稳态的准确性

优点：直观。

分析系统的动态响应，有以下方法：

1. 直接求解法
2. 间接评价法
3. 计算机仿真法

- ❖ 准备工作 — 3.1 典型输入及性能指标
- ❖ 动态性—— 3.2 典型系统的动态响应
- ❖ 稳定性—— 3.3 劳斯-霍尔维茨稳定性判据
- ❖ 稳态性—— 3.4 反馈控制系统的稳态误差

3.1 系统的典型输入及性能指标

本节讨论

❖ 典型输入信号

在时间域进行分析时，为了比较不同系统的控制性能，需要规定一些具有典型意义的输入信号建立分析比较的基础。这些信号称为控制系统的**典型输入信号**。

对典型输入信号的要求

- ✓ 形式简单，便于解析分析
- ✓ 具有工程意义。

❖ 性能指标

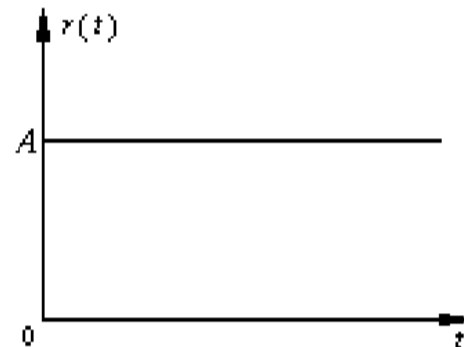
给出系统动态性能的衡量关系。

3.1.1 典型输入信号

1、阶跃信号

阶跃信号的表达式为：

$$r(t) = \begin{cases} A & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases} \quad R(s) = \frac{A}{s}$$

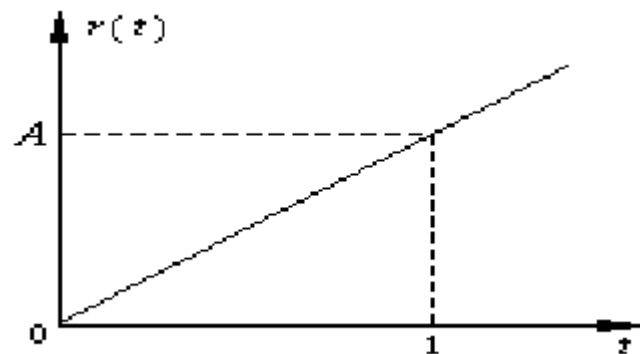


·当 $A=1$ 时，则称为单位阶跃信号，常用 $1(t)$ 表示。

·2、斜坡信号

斜坡信号在 $t=0$ 时为零，并随时间线性增加，所以也叫等速度信号。它等于阶跃信号对时间的积分，而它对时间的导数就是阶跃信号。斜坡信号的表达式为：

$$r(t) = \begin{cases} At & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases} \quad R(s) = \frac{A}{s^2}$$



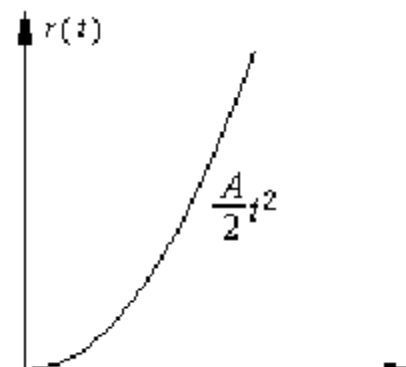
·当 $A=1$ 时，则称为单位斜坡信号。

3、抛物线信号

抛物线信号也叫等加速度信号，它可以通过对斜坡信号的积分而得。抛物线信号的表达式为：

$$r(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} A t^2 & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases} \quad R(s) = \frac{A}{s^3}$$

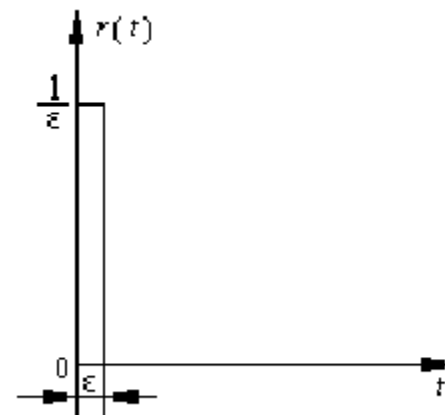
·当 $A=1$ 时，则称为单位抛物线信号。



4、脉冲信号

单位脉冲信号的表达式为：

$$r(t) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} & 0 < t < \varepsilon \\ 0 & t < 0 \text{ 及 } t > \varepsilon \end{cases} \quad R(s) = 1$$



是一宽度为 ε ，高度为 $1 / \varepsilon$ 的矩形脉冲，当 ε 趋于零时就得理想的单位脉冲信号(亦称 $\delta(t)$ 函数)。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

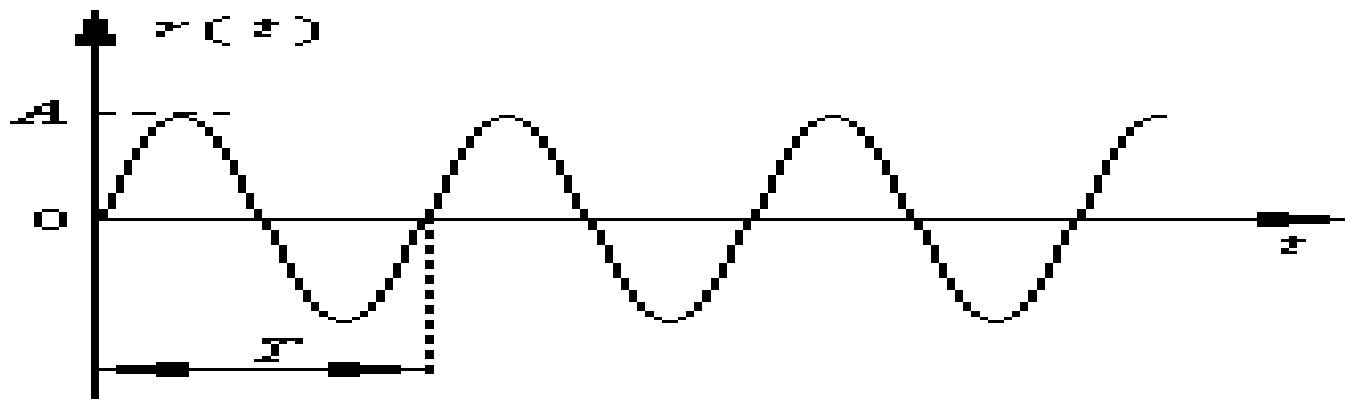
·5、正弦信号

· 正弦信号的表达式为：

$$r(t) = \begin{cases} A \sin \omega t & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}$$

· 其中A为幅值， $\omega = 2\pi/T$ 为角频率。

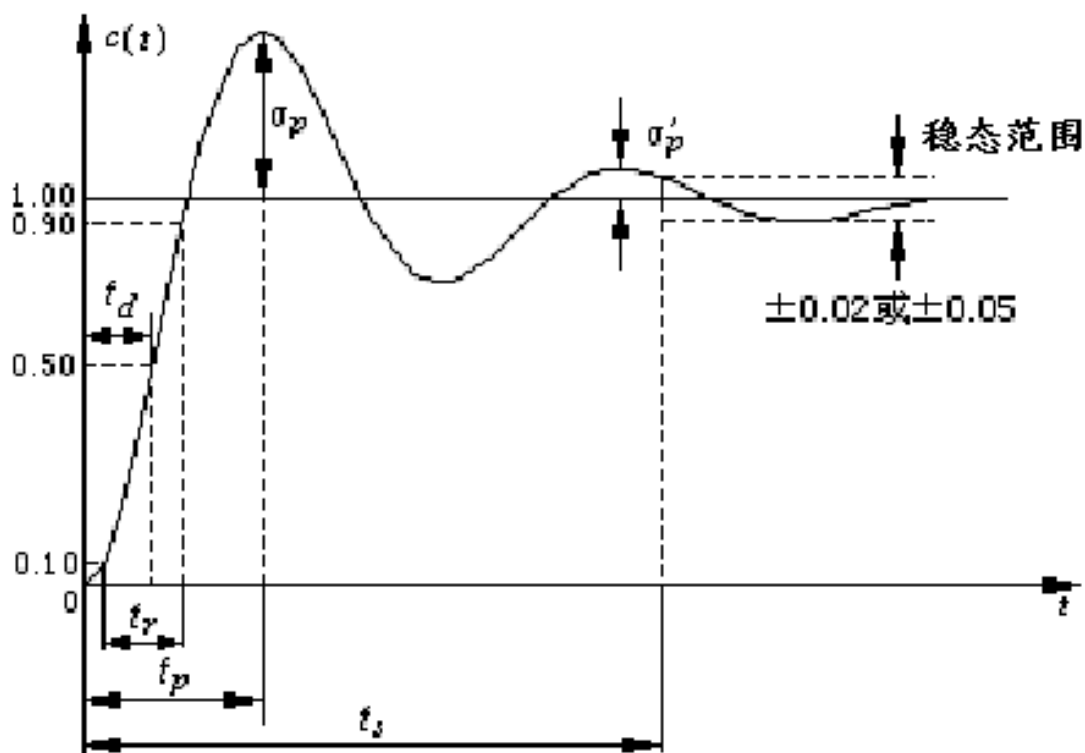
$$R(s) = \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2}$$



· 正弦信号主要在频率法中用到。

3.1.2 系统性能指标

系统的动态性能通常以系统在初始条件为零的情况下，对单位阶跃输入信号的响应特性来衡量，如图所示。

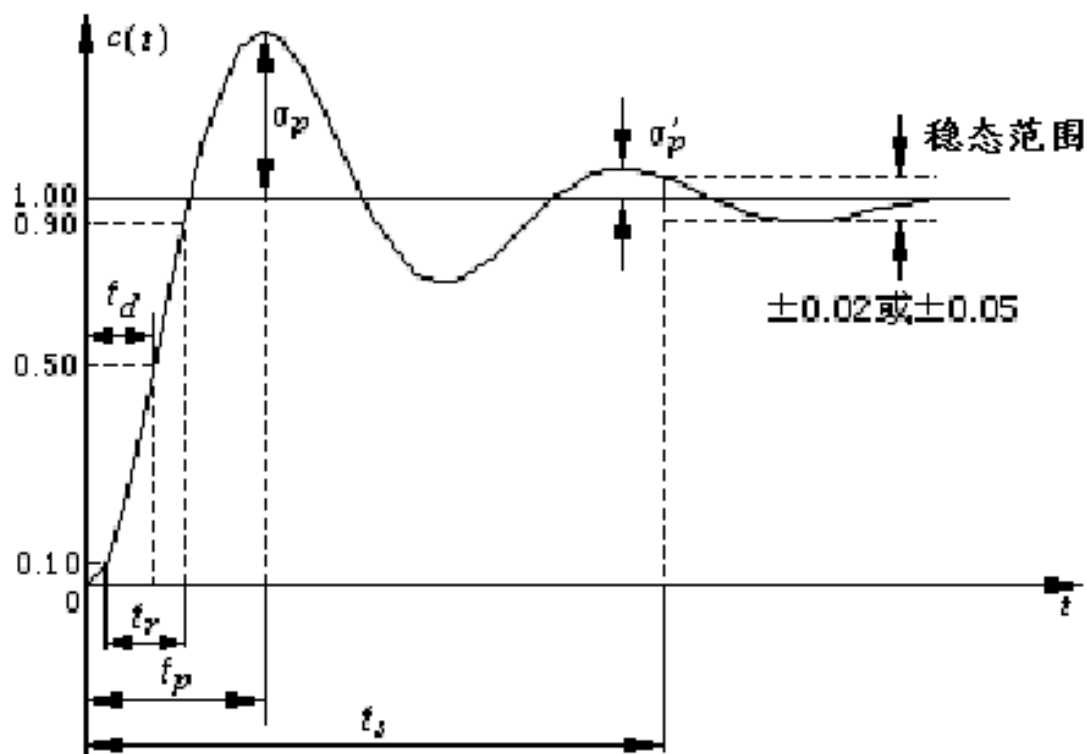


系统性能指标

1、最大超调量 σ_p ——响应曲线偏离稳态值的最大值，常以百分比表示，即

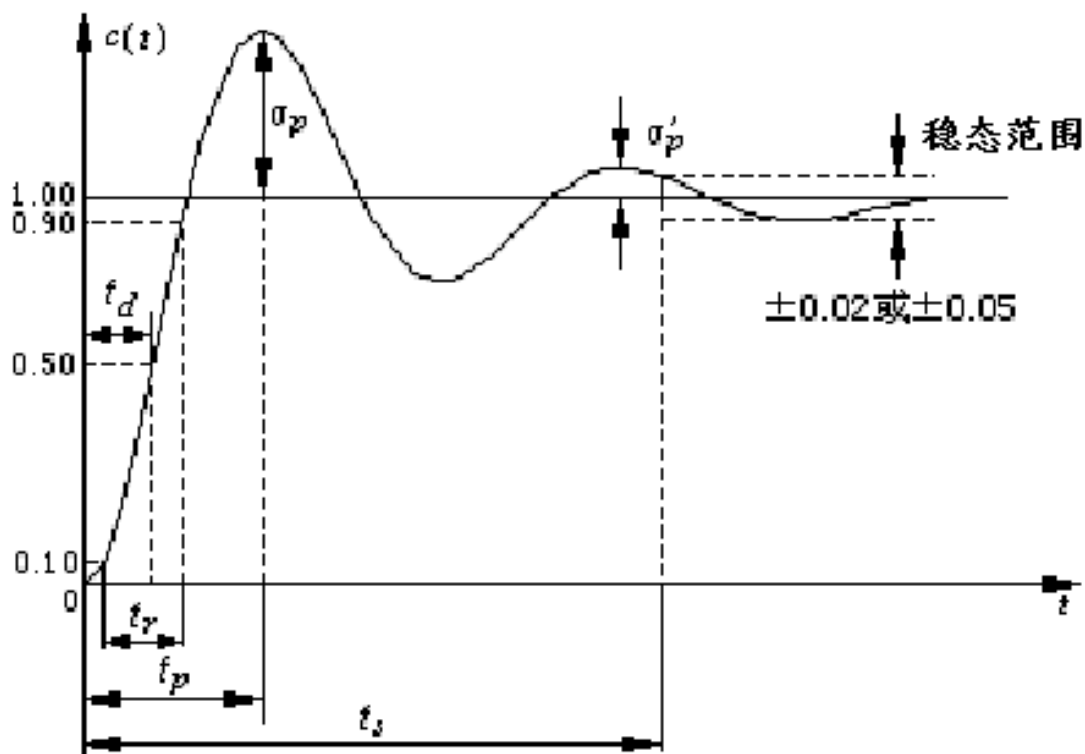
$$\sigma_p = \frac{c(t_p) - c(\infty)}{c(\infty)} \times 100\%$$

最大超调量说明系统的相对稳定性。



系统性能指标

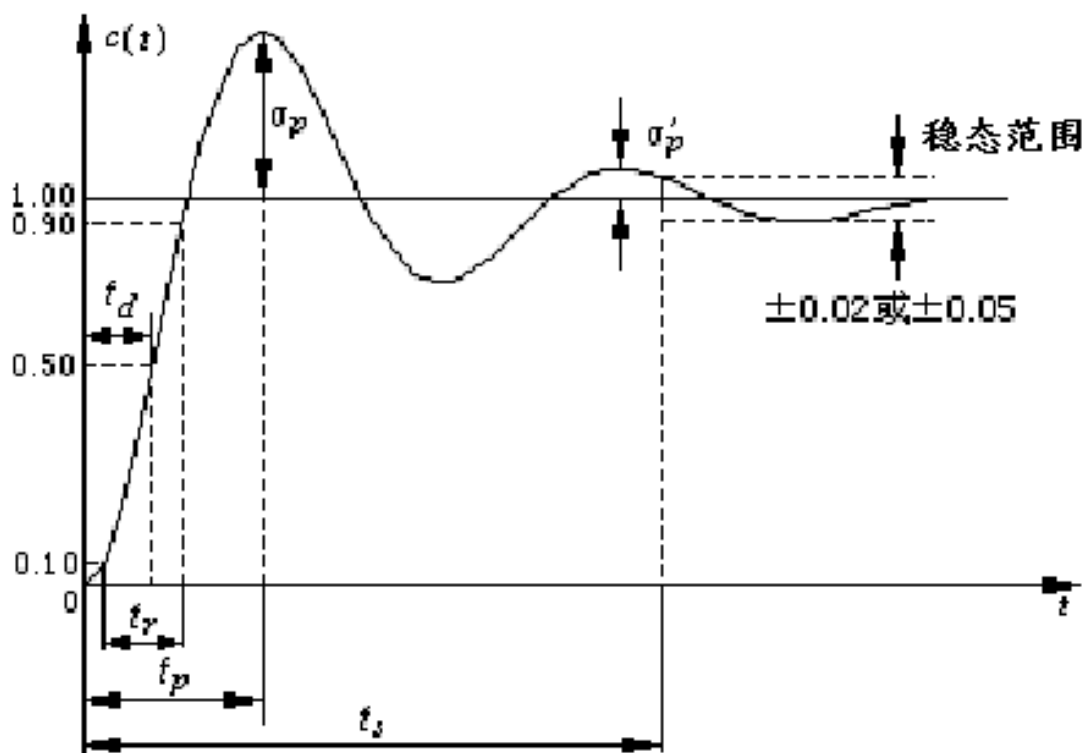
2、延滞时间 t_d ——响应曲线到达稳态值50%所需的时间，称为延滞时间。



系统性能指标

3. 上升时间 t_r ——反映动态初期的快慢，它有2种定义：

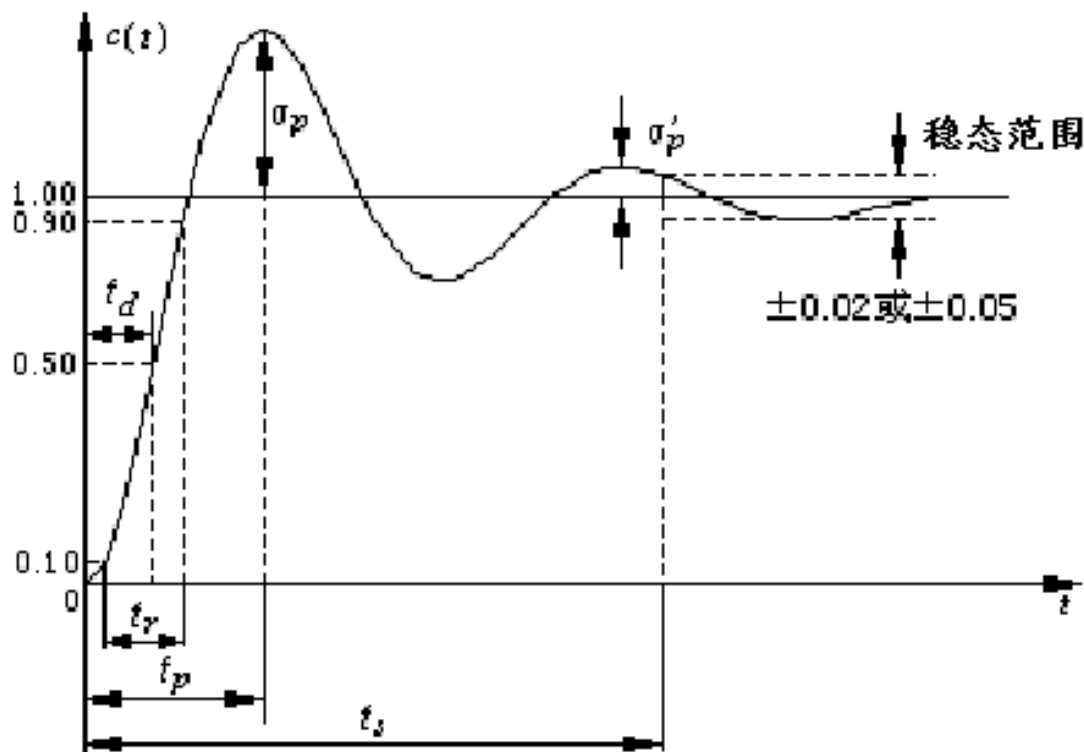
- (1) 响应曲线从稳态值的10%到90%所需时间；
 - (2) 响应曲线从零开始至第一次到达稳态值所需的时间。
- 一般对有振荡的系统常用“(2)”，对无振荡的系统常用“(1)”。



系统性能指标

4. 峰值时间 t_p ——响应曲线到达第一个峰值所需的时间，定义为峰值时间。

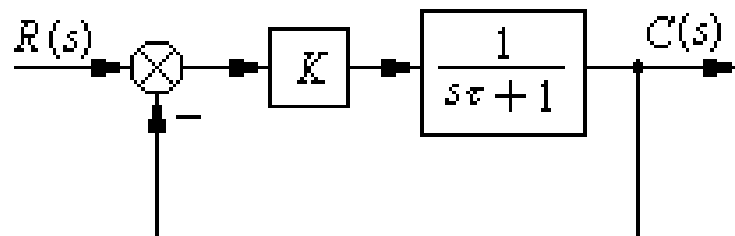
5. 调整时间 t_s ——响应曲线从零开始到进入稳态值的95%~105%（或98%~102%）误差带时所需要的时间，定义为调整时间。
反映系统动态的总体快慢程度。



一阶系统

3.2 典型系统动态响应分析

3.2.1 一阶系统的动态阶跃响应及性能指标



$$G_K(s) = \frac{K}{\tau s + 1} \quad \tau \text{ 是开环时间常数, } K \text{ 为开环放大系数。}$$

该一阶系统的闭环传递函数为

$$G_B(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{1 + s\tau + K} = \frac{\frac{K}{K+1}}{Ts + 1}$$

其中

$$T = \frac{\tau}{K+1} \quad \text{为闭环系统时间常数}$$

$$K_B = \frac{K}{K+1} \quad \text{为闭环系统放大系数}$$

$$G_B(s) = \frac{K_B}{Ts + 1}$$

一阶系统

$r(t)=1(t)$ 或 $R(s)=1/s$, 输出响应的拉氏变换为:

$$C(s) = \frac{K_B / T}{s + 1/T} \cdot \frac{1}{s} = \frac{K_B}{s} - \frac{K_B}{s + 1/T}$$

取 $C(s)$ 的拉氏反变换, 可得一阶系统的单位阶跃响应为

$$c(t) = K_B (1 - e^{-t/T})$$

1) 响应的稳态值

所谓稳态, 就是在 $t \rightarrow \infty$ 时, 输出响应的值

$$c(\infty) = K_B = \frac{K}{K+1}$$

K 越大, $c(\infty)$ 越 $\rightarrow 1$

但 K 不可能为无穷大, 表明系统存在稳态误差

$$e(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} [r(t) - c(t)] = 1 - c(\infty) = \frac{1}{K+1}$$

一阶系统

2) 响应的动态过程

$$c(t) = K_B (1 - e^{-t/T}) \quad t \geq 0$$

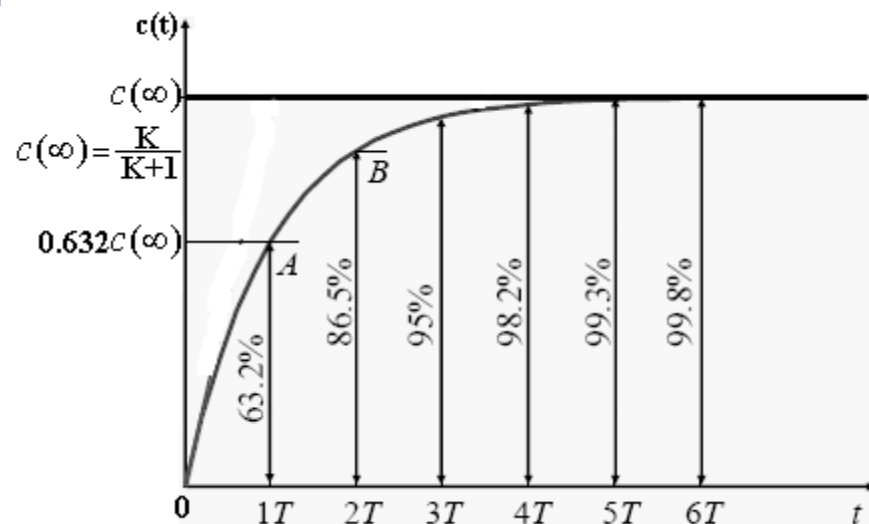
系统的时间常数为 $T = \frac{\tau}{K+1}$

$$c(t) = c(\infty)(1 - e^{-t/T}) \quad c(\infty) = K_B$$

当 $t = 3T$, $c(3T) = 0.950c(\infty)$

当 $t = 4T$, $c(4T) = 0.982c(\infty)$

从中可以看出，响应曲线在经过 $3T$ （5%误差）或 $4T$ （2%误差）的时间后进入稳态。所以 $t_s=3T$ 或 $4T$



延滞时间 t_d $c(t_d) = c(\infty)(1 - e^{-t_d/T}) = 0.5c(\infty)$

$$t_d = -T \ln 0.5 = 0.69T$$

上升时间 t_r (10%~90%所需时间)

$$c(t_1) = c(\infty)(1 - e^{-t_1/T}) = 0.1c(\infty)$$

$$c(t_2) = c(\infty)(1 - e^{-t_2/T}) = 0.9c(\infty)$$

$$t_r = t_2 - t_1 = -T (\ln 0.9 - \ln 0.1) = 2.2T$$

动态性能指标均与时间常数有关

一阶系统

结论:

稳态值为 K_B $K_B = \frac{K}{K+1}$

存在稳态误差, $e(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \frac{1}{K+1}$

没有超调, 即 $\sigma_p=0$;

$t_s=3T$ (95%) 或 $t_s=4T$ (98%)

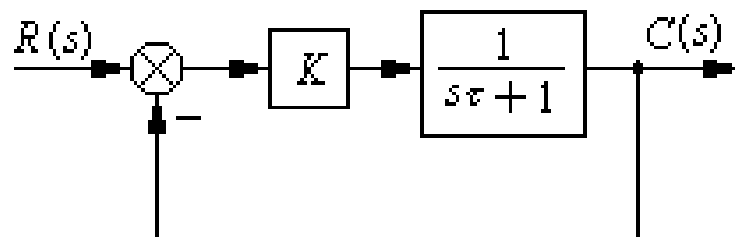
$t_r=2.2T$

$t_d=0.69T$

其中

$$T = \frac{\tau}{K+1}$$

当 $K>0$, $T<\tau$, 表明通过反馈, 闭环时间常数小于开环时间常数,
反馈加快了动态过程;



$$G_K(s) = \frac{K}{\tau s + 1}$$

$$G_B(s) = \frac{K_B}{Ts + 1}$$

$$c(t) = K_B (1 - e^{-t/T})$$



一阶系统

$$c(t) = c(\infty)(1 - e^{-t/T})$$

$$T = \frac{\tau}{K+1} \quad c(\infty) = K_B = \frac{K}{K+1}$$

对响应 $c(t)$ 求导数

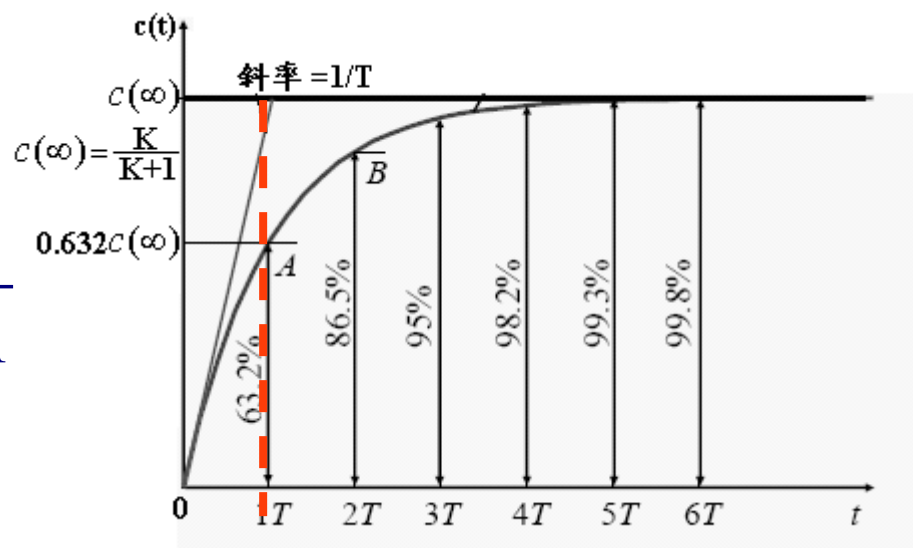
$$\frac{dc(t)}{dt} = \frac{K}{\tau} e^{-(K+1)t/\tau}$$

·单调下降，即表明在 $t=0$ 时 $c(t)$ 变化率最大

$$\left. \frac{dc(t)}{dt} \right|_{t=0} = \frac{K}{\tau} e^{-(K+1)t/\tau} \Big|_{t=0} = \frac{K}{\tau}$$

$$c_1(t) = \frac{K}{\tau} t$$

当 $t=T$ 时， $c_1(t)$ 曲线到达稳态值



一阶系统

一阶系统的单位速度响应

$$C(s) = \frac{K_B}{Ts + 1} R(s) \quad R(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$C(s) = \frac{K_B}{Ts + 1} \frac{1}{s^2} = K_B \left(\frac{1}{s^2} - \frac{T}{s} + \frac{T}{s + 1/T} \right)$$

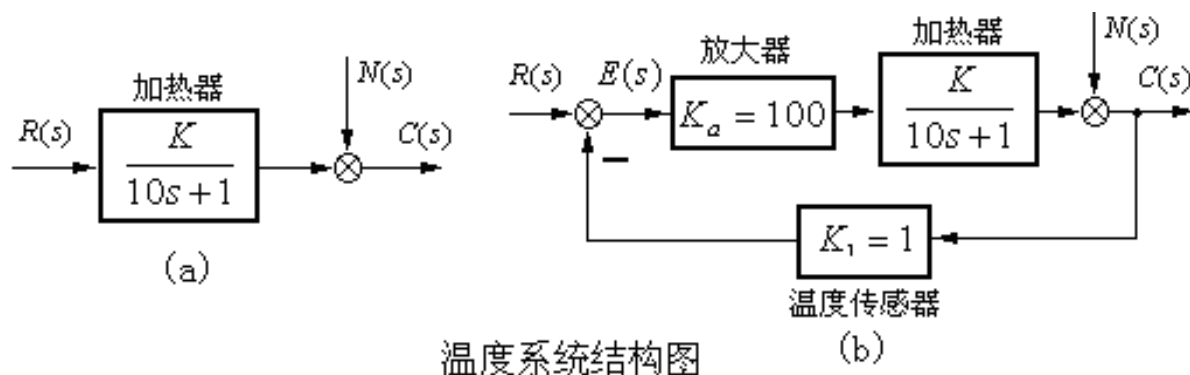
$$c(t) = K_B (t - T + T e^{-\frac{t}{T}}) \quad t \geq 0$$

	阶跃	斜坡
输入	$r(t) = 1$	$r(t) = t$
输出	$c(t) = K_B (1 - e^{-t/T})$	$c(t) = K_B (t - T + T e^{-\frac{t}{T}})$

阶跃响应也是斜坡响应的导数

一阶系统

例:在许多化学过程中,反应槽内的温度要保持恒定,如图(a)和(b)分别为开环和闭环温度控制系统结构图,两种系统正常的K值为1。



温度系统结构图

- 1) 若 $r(t)=1(t), n(t)=0$,两种系统从开始达到稳态温度值的63.2%各需多长时间?
 - 2) 当有 $n(t)=0.1(t)$ 阶跃扰动时,求扰动对两种系统的温度的影响。
- 解:1) 对(a)系统有

$$G_a(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{10s+1} = \frac{1}{10s+1}$$

时间常数 $T=10$ 时间单位

从开始达到稳态温度值的63.2%各需 $t=10$ 时间单位

一阶系统

对 (b) 系统有

$$G_b(s) = \frac{100}{10s + 101}$$

$$= \frac{100}{\frac{10}{101}s + 1}$$

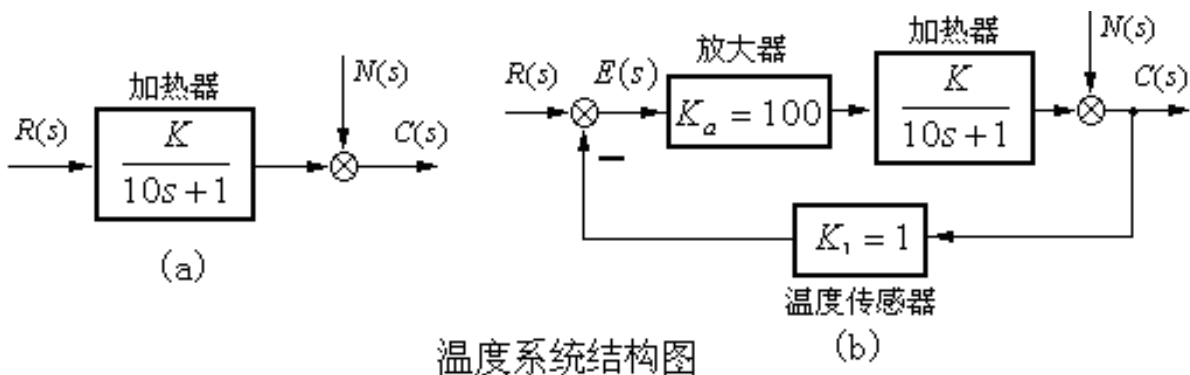
$$K_b = \frac{100}{101}, \quad T_b = \frac{10}{101} = 0.099$$

从开始达到稳态温度值的63.2%各需 $t=0.099$ 时间单位.

2) 对 (a) 系统有 $n(t)=0.1(t)$ 时

$$G_{na}(s) = \frac{C(s)}{N(s)} = 1$$

$$c(t) = 0.1$$



一阶系统

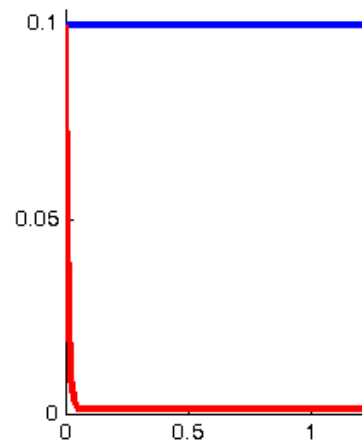
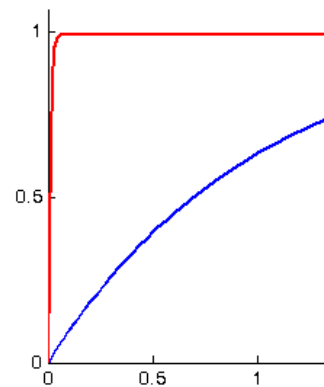
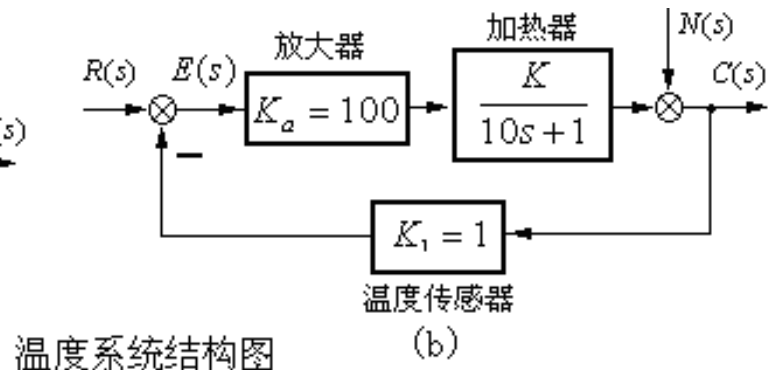
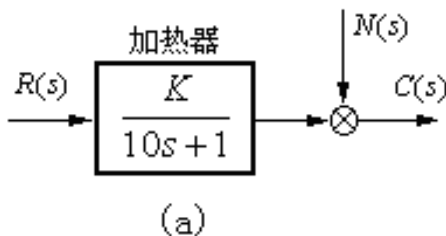
对 (b) 系统, $n(t)=0.1(t)$

$$G_{nb}(s) = \frac{C(s)}{N(s)} = \frac{10s+1}{10s+101}$$

$$C_{nb}(s) = \frac{10s+1}{10s+101} \times \frac{0.1}{s}$$

$$C_{nb}(s) = \frac{0.1}{101} \frac{10s+1}{0.099s+1} \times \frac{1}{s} = \frac{0.1}{101} \left(\frac{1}{s} + \frac{9.9}{0.099s+1} \right)$$

$$\begin{aligned} c_{nb}(t) &= \frac{0.1}{101} (1 + 100e^{-10.1t}) \\ &= 9.9 \times 10^{-4} (1 + 100e^{-10.1t}) \end{aligned}$$



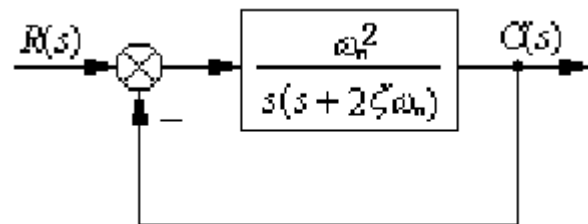
闭环系统比开环系统
动态过程加快, 抗扰动性能增加

二阶系统

3.2.2 二阶系统的动态响应及性能指标

典型二阶系统的结构图如图，单位反馈，它的开环传递函数为

$$G_K(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\zeta\omega_n)}$$



它的闭环传递函数为

$$G_B(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

由上式可看出， ζ 和 ω_n 是决定二阶系统动态特性的两个非常重要参数，其中 ζ 称为阻尼比， ω_n 称为无阻尼自然振荡频率。
 $r(t)=1(t)$ 或 $R(s)=1/s$ ，输出响应的拉氏变换为：

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \frac{1}{s}$$

二阶系统

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

这是一个二阶的代数方程，故有两个特征方程根（也是闭环极点），分别为

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}$$

·当 $\zeta > 1$ $s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}$ ·为两个不相等的实数根

·当 $\zeta = 1$ $s_{1,2} = -\zeta\omega_n$ ·为两个相等的实数根

·当 $0 < \zeta < 1$ $s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} j$ ·为一对共轭的复数根

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_d j$$

·其中 $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$ ·称为有阻尼振荡频率

·当 $\zeta = 0$ $s_{1,2} = \pm \omega_n j$ ·为一对共轭的虚数根

·当 $\zeta < 0$



二阶系统的阶跃响应

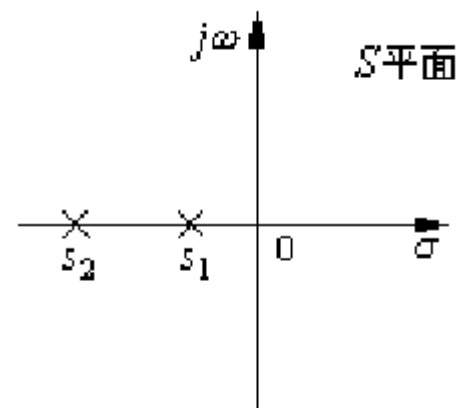
(1) 二阶系统的阶跃响应

下面将分别对二阶系统在 $\zeta > 1$ 、 $\zeta = 1$ 、 $0 < \zeta < 1$ 、 $\zeta = 0$ 和 $\zeta < 0$ 五种情况下的阶跃响应进行讨论。

1) $\zeta > 1$ ，称为过阻尼情况

此时，系统有两个不相等的实数根为

$$s_1 = -\zeta \omega_n + \sqrt{\zeta^2 - 1} \omega_n \quad s_2 = -\zeta \omega_n - \sqrt{\zeta^2 - 1} \omega_n$$



对于单位阶跃输入， $C(s)$ 为

$$C(s) = \frac{1}{s} - \frac{[2\sqrt{\zeta^2 - 1}(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})]^{-1}}{s - s_1} + \frac{[2\sqrt{\zeta^2 - 1}(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})]^{-1}}{s - s_2}$$

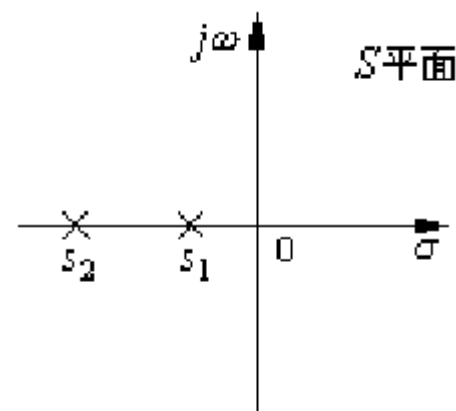
将此式进行拉氏反变换

$$c(t) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \left(\frac{e^{s_1 t}}{\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}} - \frac{e^{s_2 t}}{\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}} \right)$$

二阶系统的阶跃响应

$$s_1 = -\zeta\omega_n + \sqrt{\zeta^2 - 1}\omega_n \quad s_2 = -\zeta\omega_n - \sqrt{\zeta^2 - 1}\omega_n$$

$$c(t) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \left(\frac{e^{s_1 t}}{\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}} - \frac{e^{s_2 t}}{\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}} \right)$$

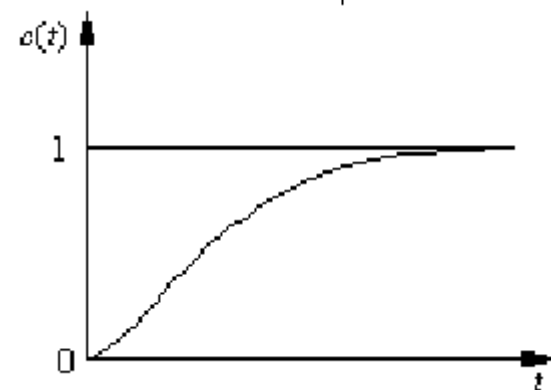


· 系统响应曲线与一阶系统类似。

· 特征：无超调，

$$\dot{c}(t) = -\frac{1}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \left(\frac{s_1 e^{s_1 t}}{\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}} - \frac{s_2 e^{s_2 t}}{\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}} \right)$$

$$\dot{c}(t) = \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} (e^{s_1 t} - e^{s_2 t}) \quad \dot{c}(0) = 0$$



· 稳态：∵ c(∞) = 1 ∴ e(∞) = 0

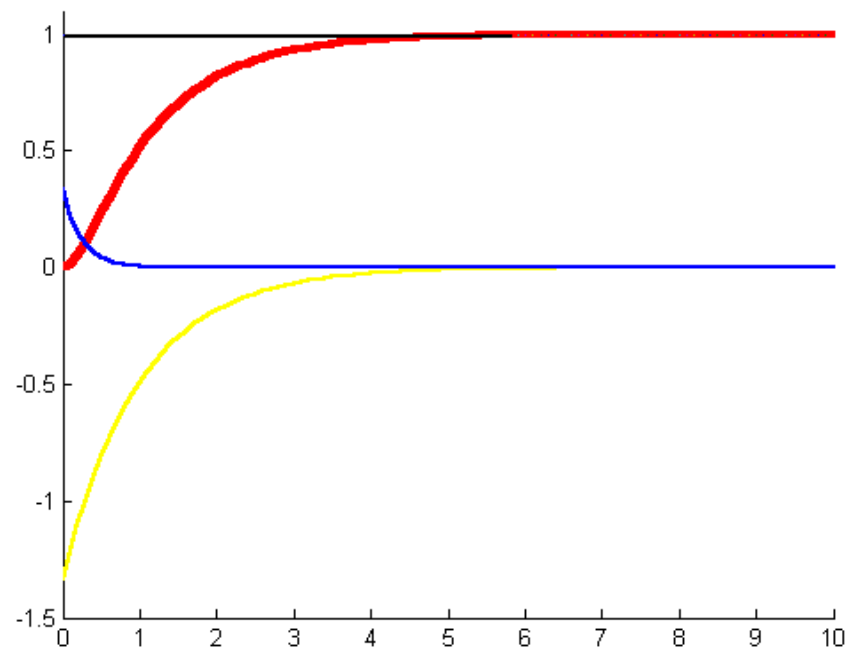
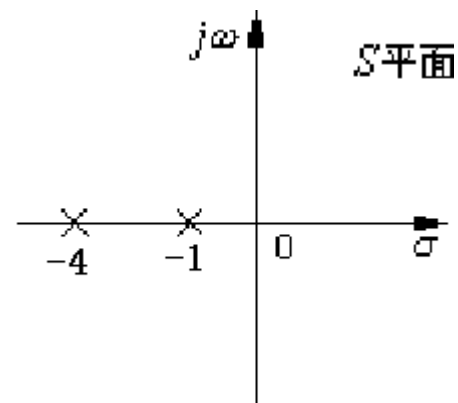
二阶系统的阶跃响应

$$\text{·例 } G_B(s) = \frac{4}{s^2 + 5s + 4} = \frac{4}{(s+1)(s+4)}$$

$$\omega_n = 2 \quad \zeta = \frac{5}{4} = 1.25$$

$$C(s) = \frac{1}{s} - \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{s+1} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{s+4}$$

$$c(t) = 1 - \frac{4}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{-4t}$$

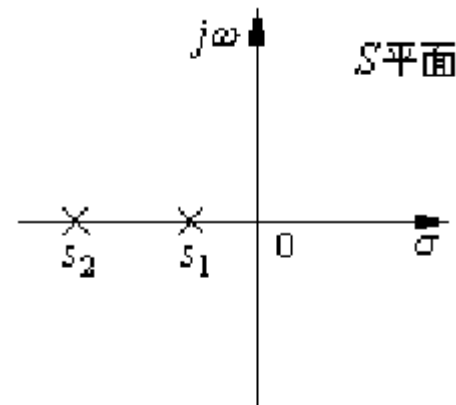


·靠近虚轴的极点-1对系统响应影响更大一些。

二阶系统的阶跃响应

$$s_1 = -\zeta\omega_n + \sqrt{\zeta^2 - 1}\omega_n \quad s_2 = -\zeta\omega_n - \sqrt{\zeta^2 - 1}\omega_n$$

$$c(t) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \left(\frac{e^{s_1 t}}{\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}} - \frac{e^{s_2 t}}{\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}} \right)$$



·如果 $\zeta \gg 1$

$$(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n \approx 0$$

$$s_1 = -(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n$$

$$|(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})| \ll |(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})|$$

$$\frac{e^{s_2 t}}{\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}} \quad \frac{e^{s_1 t}}{\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}}$$

·靠近虚轴，衰减慢

·靠近虚轴，系数大

·靠近虚轴，起主导作用

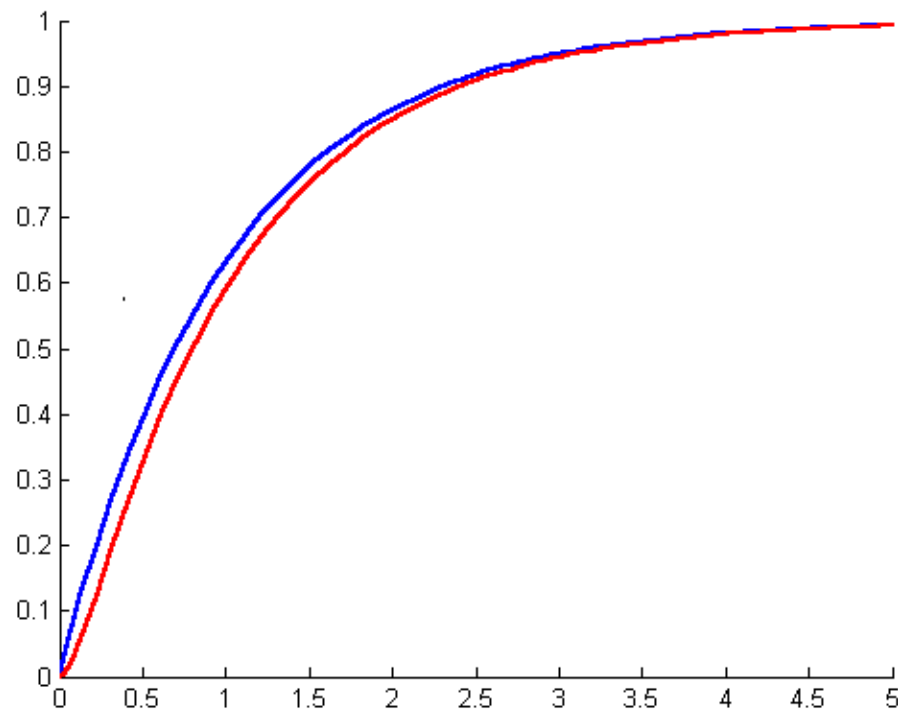
二阶系统的阶跃响应

$$\text{例 } G_B(s) = \frac{10}{(s+1)(s+10)}$$

$$\omega_n = 3.16 \quad \zeta = 1.74$$

$$G'(s) = \frac{1}{s+1}$$

$$G_B(s) = \frac{10}{s^2 + 11s + 10} \approx \frac{1}{s+1}$$



$s=-10$ 离虚轴太远，衰减太快，动态分量作用太小，可以忽略。
实际上一般误差精度情况下，两个极点之间的距离相差7~10倍，
或当 $\zeta \geq 1.5$ 时，系统可近似为一阶环节。

注意：近似是在保证稳态值不变的情况下进行。

二阶系统的阶跃响应

$\zeta > 1$ 过阻尼

特征:

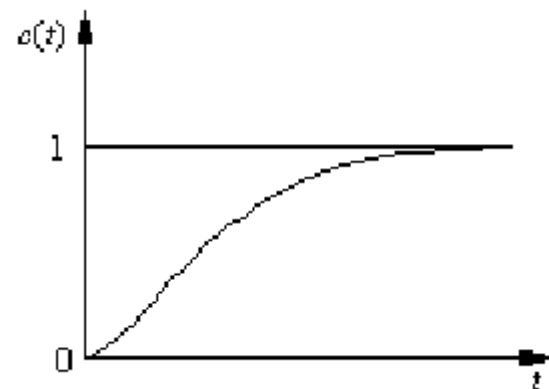
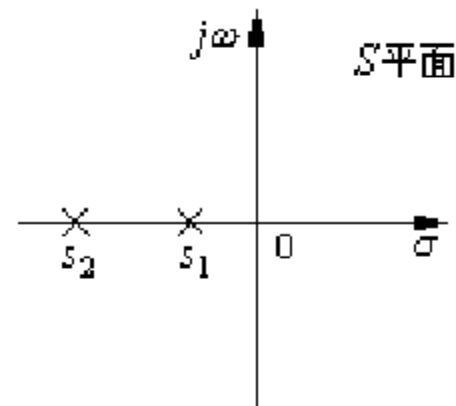
无超调;

靠近虚轴的根起得作用大;

$$|s_2| > (7 \sim 10)|s_1| \quad \text{或} \quad \zeta > 1.5$$

s_2 的作用可以忽略

近似是在保证稳态值不变的情况下进行。



二阶系统的阶跃响应

- 2) $\zeta = 1$, 称为**临界阻尼**情况
此时系统有两个相等的实数特征根:

$$s_{1,2} = -\omega_n$$

·系统输出的拉氏变换为

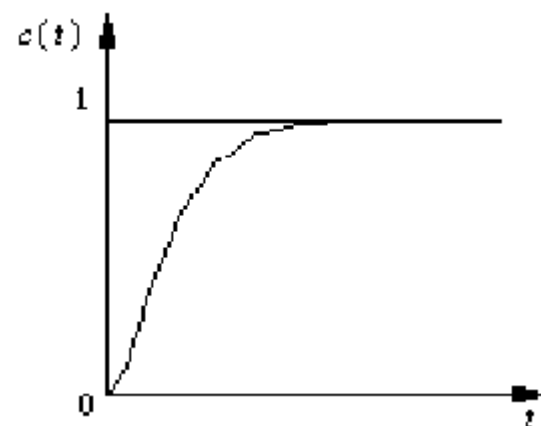
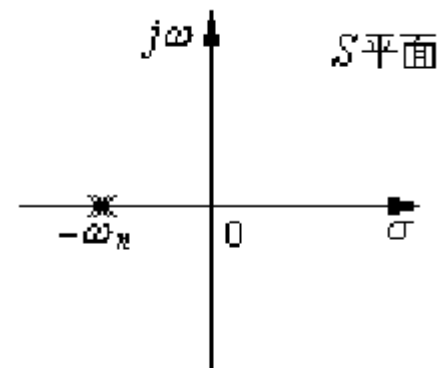
$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + \omega_n)^2} = \frac{1}{s} - \frac{\omega_n}{(s + \omega_n)^2} - \frac{1}{s + \omega_n}$$

·取 $C(s)$ 的拉氏反变换, 求得临界阻尼
二阶系统的单位阶跃响应为

$$c(t) = 1 - e^{-\omega_n t} (1 + \omega_n t)$$

·响应曲线如图所示

根의分布如图



二阶系统的阶跃响应

$$c(t) = 1 - e^{-\omega_n t} (1 + \omega_n t)$$

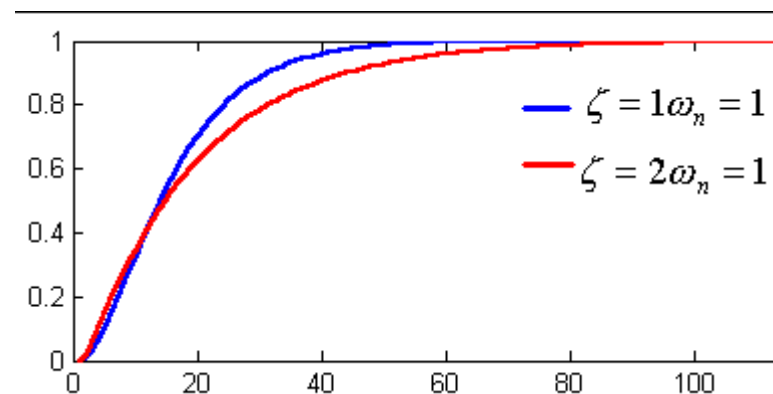
响应曲线特征：

稳态误差也为零；

既无超调，也无振荡；

在 ω_n 一定的情况下，其动态过程比过阻尼快。

仿真



二阶系统的阶跃响应

3) $0 < \zeta < 1$ 称为欠阻尼情况

有一对共轭复数根

$$s_{1,2} = -\zeta \omega_n \pm j \sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n$$

· 式中

$$x = -\zeta \omega_n \quad \text{为实部}$$

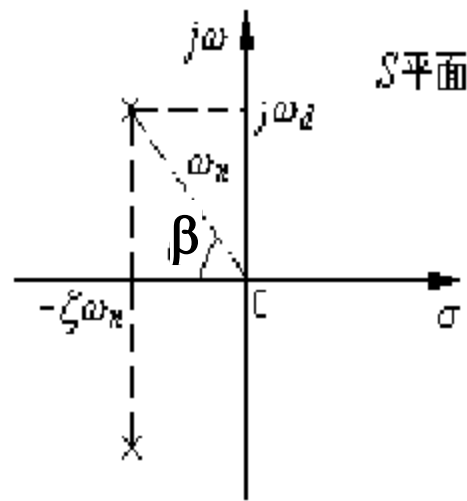
$$y = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \quad \text{为虚部}$$

$$= \omega_d$$

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$

· 称为有阻尼振荡频率。

· 根的分布为



$$\zeta = \cos \beta$$

二阶系统的阶跃响应

·单位阶跃信号 $r(t)=1(t)$ 时，系统输出的拉氏变换为

$$\begin{aligned} C(s) &= \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} \\ &= \frac{1}{s} - \frac{s + \zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} - \frac{\zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} \\ C(s) &= \frac{1}{s} - \frac{s + \zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} - \frac{\zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} \end{aligned}$$

·对上式求拉氏反变换，则得系统的单位阶跃响应 $c(t)$ ：

$$c(t) = 1 - e^{-\zeta\omega_n t} \cos \omega_d t - \frac{\zeta\omega_n}{\omega_d} e^{-\zeta\omega_n t} \sin \omega_d t$$

$$\begin{aligned}c(t) &= 1 - e^{-\zeta\omega_n t} \cos \omega_d t - \frac{\zeta\omega_n}{\omega_d} e^{-\zeta\omega_n t} \sin \omega_d t \\&= 1 - e^{-\zeta\omega_n t} \left[\cos \omega_d t + \frac{\zeta\omega_n}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} \sin \omega_d t \right] \\&= 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \left[\sqrt{1-\zeta^2} \cos \omega_d t + \zeta \sin \omega_d t \right]\end{aligned}$$

$$\zeta = \cos \beta \quad \cdot \text{那么} \quad \sqrt{1-\zeta^2} = \sin \beta$$

$$c(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t + \beta)$$

二阶系统的阶跃响应

$$c(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta \omega_n t} \sin(\omega_d t + \beta)$$

特征：

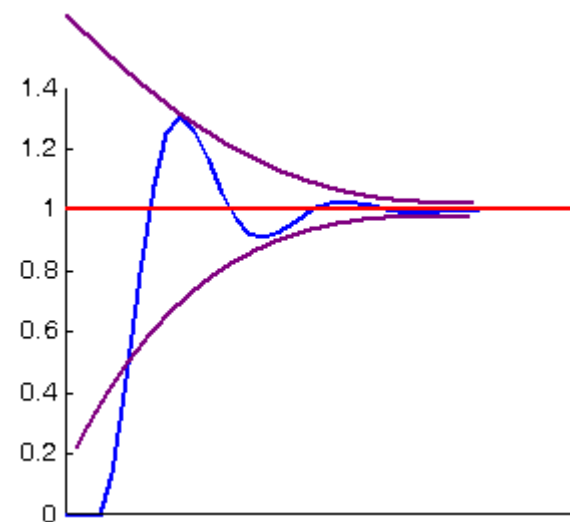
它是一衰减的振荡过程；

其振荡频率就是有阻尼振荡频率 ω_d ；

而其幅值则按指数曲线（响应曲线的包络线）衰减，两者均由参数 ζ 和 ω_n 决定。

· 当 $t \rightarrow \infty$ 时，稳态误差 $e(\infty) = 0$ 。

响应曲线如图所示



二阶系统的阶跃响应

· 4) $\zeta = 0$, 称为无阻尼情况

· 系统的特征根为一对共轭虚根, 即

$$s_{1,2} = \pm j\omega_n$$

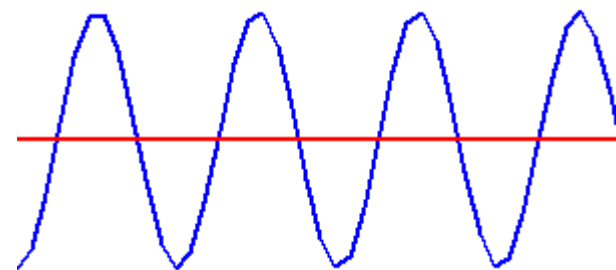
$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + \omega_n^2)} = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + \omega_n^2}$$

此时单位阶跃响应为 $c(t) = 1 - \cos \omega_n t$

特征:

它是一等幅振荡过程, 其振荡频率就是无阻尼自然振荡频率 ω_n 。

没有稳态, 称为临界稳定



二阶系统的阶跃响应

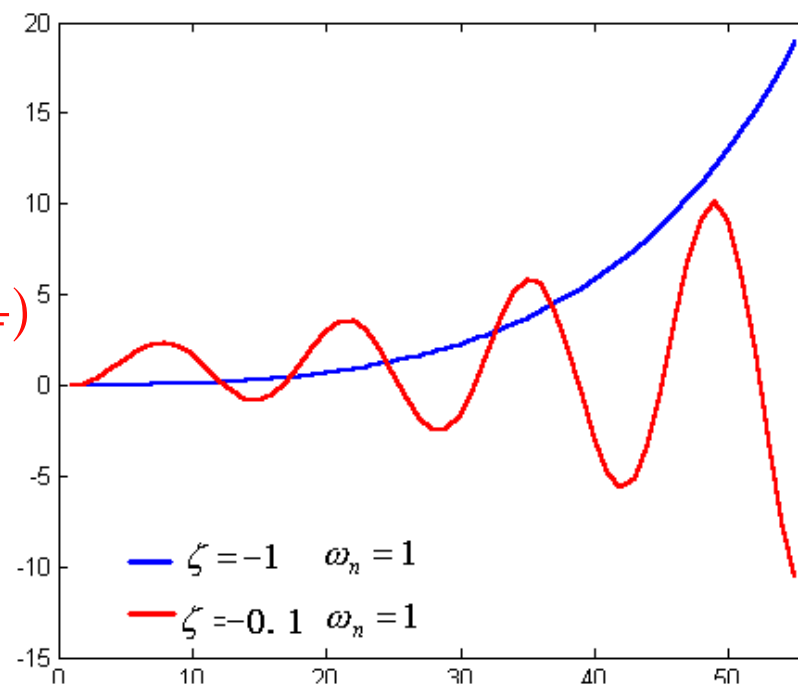
5) $\zeta < 0$, 系统不稳定

当 $\zeta > -1$ 时, 系统呈振荡发散;

$$c(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta \omega_n t} \sin(\omega_d t + \beta)$$

当 $\zeta \leq -1$ 时, 系统呈指数发散;

$$c(t) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \left(\frac{e^{s_1 t}}{\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}} - \frac{e^{s_2 t}}{\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}} \right)$$



1) $\zeta > 1$, 称为过阻尼情况

$$c(t) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \left(\frac{e^{s_1 t}}{\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}} - \frac{e^{s_2 t}}{\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}} \right)$$

2) $\zeta = 1$, 称为临界阻尼情况

$$c(t) = 1 - e^{-\omega_n t} (1 + \omega_n t)$$

3) $0 < \zeta < 1$, 称为欠阻尼情况

$$c(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta \omega_n t} \sin(\omega_d t + \beta)$$

4) $\zeta = 0$, 称为无阻尼情况

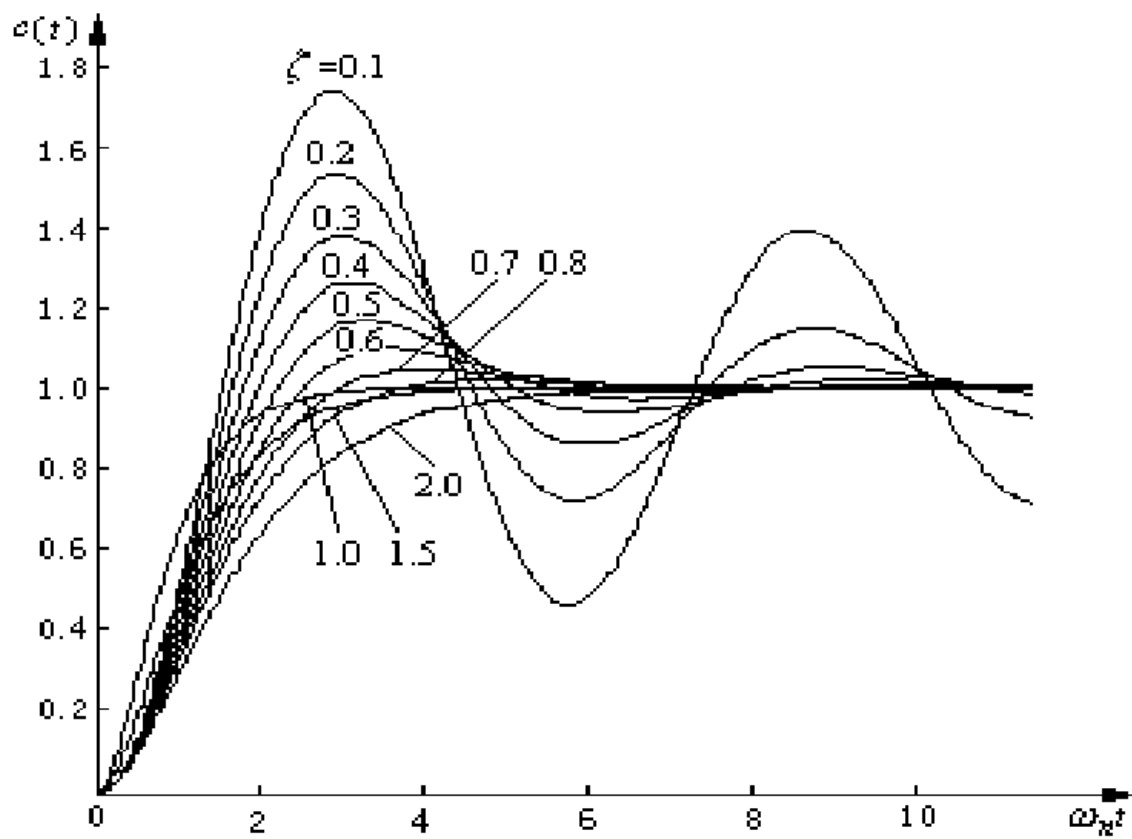
$$c(t) = 1 - \cos \omega_n t$$

二阶系统的阶跃响应

在稳定的情况下

不同 ζ 值下的二阶系统单位阶跃响应曲线族如下

在特定 ζ 值下, 欠阻尼系统比临界阻尼系统更快地达到稳态值, 所以一般系统大多设计成欠阻尼系统。



(2) 欠阻尼二阶系统的性能指标

$$c(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t + \beta) \quad \zeta = \cos \beta$$

1) 上升时间 t_r (从0到100% $c(\infty)$)

令 $c(t_r) = c(\infty)$ ，就可求得 $\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t + \beta) = 0$

$$\sin(\omega_d t + \beta) = 0 \quad \omega_d t + \beta = n\pi$$

$$\omega_d t_r + \beta = \pi \quad t_r = \frac{\pi - \beta}{\omega_d} = \frac{\pi - \beta}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}$$

结论:

t_r 与有阻尼振荡频率 ω_d 成反比。因此 ω_d 应当越大越好。

ζ 一定， ω_n 越大， t_r 也越小；

若 ω_n 为固定值，则 ζ 越小， t_r 也越小。

·2) 峰值时间 t_p

·对 $c(t)$ 求一阶导数，并令其为零，可得到

$$\omega_d \cos(\omega_d t + \beta) - \zeta \omega_n \sin(\omega_d t + \beta) = 0$$

$$\tan(\omega_d t + \beta) = \frac{\omega_d}{\zeta \omega_n} = \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta} = \tan \beta$$

$$\omega_d t = n\pi$$

到达第一个峰值时， $n=1$

$$\omega_d t_p = \pi$$

·所以

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}}$$

·**结论：**峰值时间 t_p 与有阻尼振荡频率 ω_d 成反比；

· 当 ω_n 一定， ζ 越小， t_p 也越小； ζ 一定， ω_n 越大， t_p 也越小 **42**

3) 最大超调量 σ_p

$$c(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t + \beta)$$

$t = t_p$ 代入上式, 可得到最大百分比超调量

$$c(t_p) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n \frac{\pi}{\omega_d}} \sin\left(\omega_d \frac{\pi}{\omega_d} + \beta\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} (-\sin \beta)$$

$$= 1 + \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \cdot \sqrt{1-\zeta^2} = 1 + e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

$$\sigma_p \% = \frac{c(t_p) - c(\infty)}{c(\infty)} = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100\%$$

$$\sigma_p \% = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100\%$$

结论:

最大超调量完全由 ζ 决定;

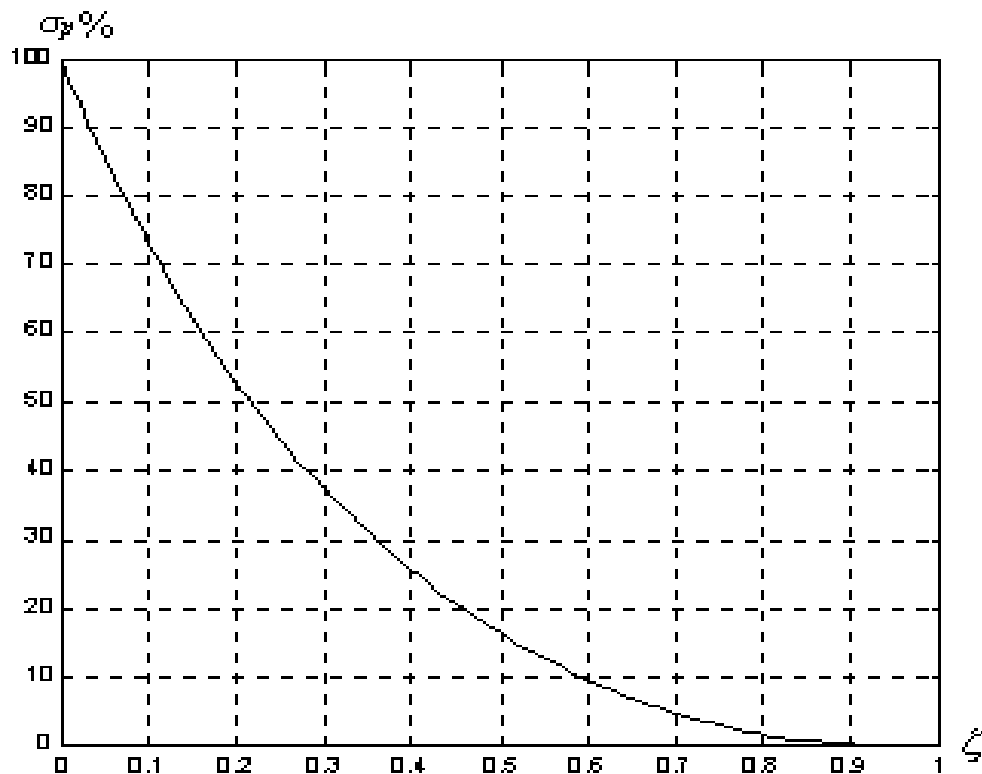
ζ 越小, 超调量越大。

当 $\zeta = 0$ 时, $\sigma_p \% = 100\%$,

当 $\zeta = 1$ 时, $\sigma_p \% = 0$ 。

$\sigma_p \% = 5\%$ 时, $\zeta = 0.69$

$\sigma_p \% = 2\%$ 时, $\zeta = 0.78$



4) 调节时间 t_s

·根据调节时间 t_s 的定义

$$|c(t) - c(\infty)| \leq \Delta \cdot c(\infty) \quad t \geq t_s$$

·其中 Δ 为误差范围

$$\left| \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t + \beta) \right| \leq \Delta \quad t \geq t_s$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t}$$

·是衰减曲线的包络线，所以上式可写为

$$\left| \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \right| \leq \Delta \quad t \geq t_s$$

·对上式两边求自然对数可得

$$t_s \geq \frac{1}{\zeta\omega_n} \ln \frac{1}{\Delta \sqrt{1-\zeta^2}}$$

欠阻尼二阶系统的性能指标

·取 $\Delta=0.02$ 时,

$$t_s \geq \frac{3.912 + \ln \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}}{\zeta\omega_n} \quad 0 < \zeta \leq 0.78$$

·取 $\Delta=0.05$ 时,

$$t_s \geq \frac{3 + \ln \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}}{\zeta\omega_n} \quad 0 < \zeta \leq 0.69$$

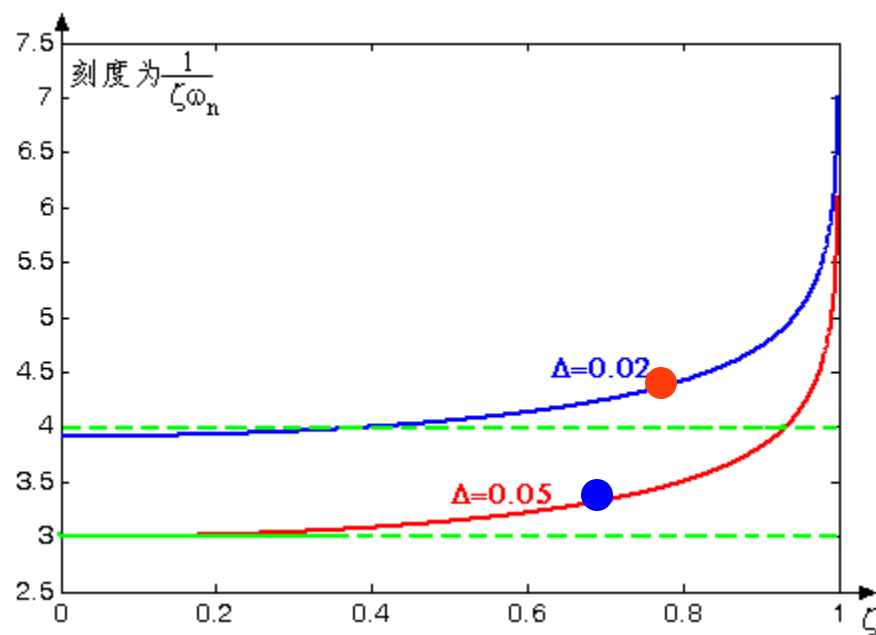
· $\Delta=0.02$

$$t_s \approx \frac{4}{\zeta\omega_n} = 4T$$

$$T = \frac{1}{\zeta\omega_n}$$

· $\Delta=0.05$

$$t_s \approx \frac{3}{\zeta\omega_n} = 3T$$



实际的调整时间

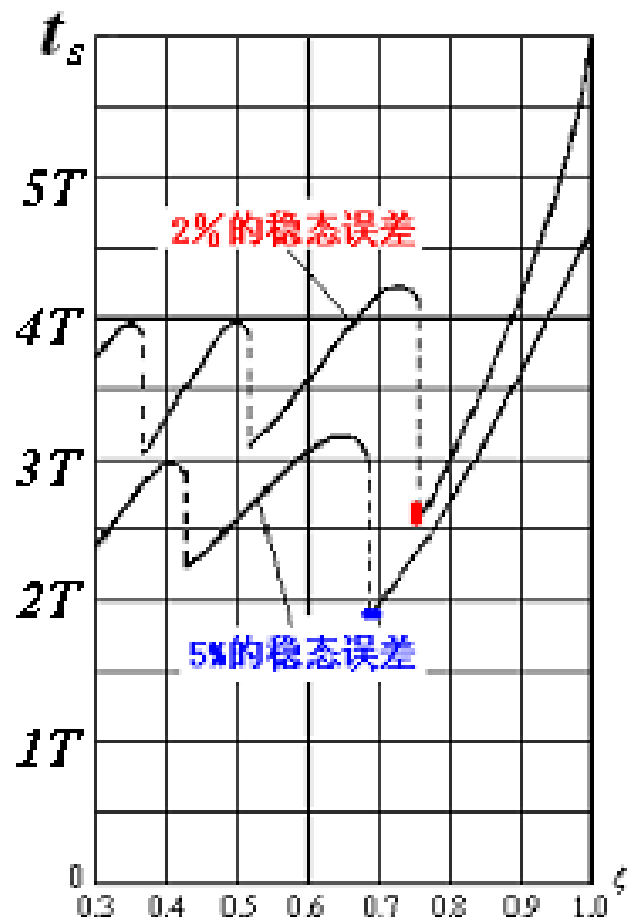
$$t_s \approx \frac{3}{\zeta \omega_n} = 3T \quad \Delta = 5\%$$

$$t_s \approx \frac{4}{\zeta \omega_n} = 4T \quad \Delta = 2\%$$

结论:

t_s 与 $\zeta \omega_n$ 近似成反比, 即 $\zeta \omega_n$ 大,
 t_s 就小;

当 ω_n 一定, 则 t_s 与 ζ 成反比, 这
与 t_p , t_r 与 ζ 的关系正好相反。

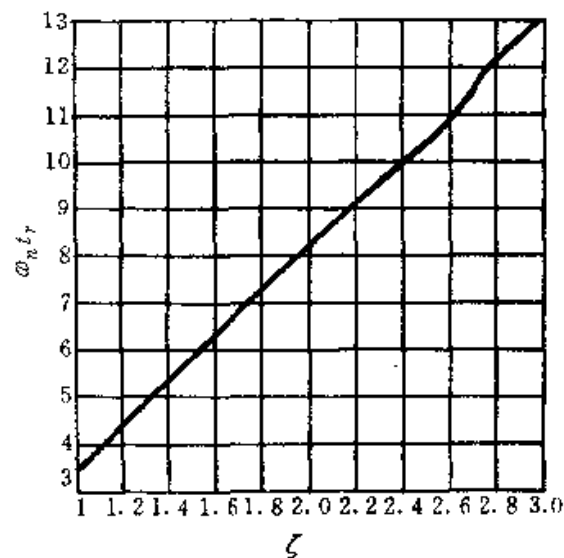
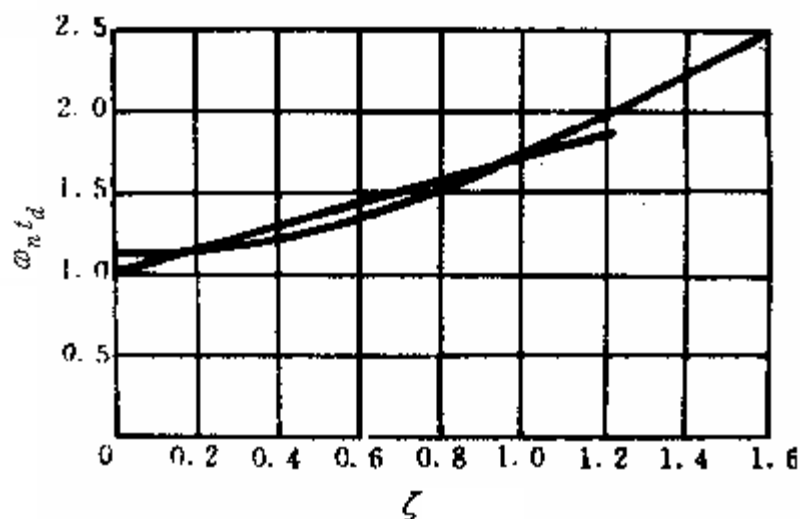


(3) 过阻尼二阶系统的性能指标

对于过阻尼系统没有超调量和峰值时间。

当两个实数根相差7~10倍，可以近似为一阶系统求性能指标，

当两个根比较接近，则很难根据响应得到上升时间、和调节时间与 ζ 的关系，通过曲线拟合的方法可以得到下列经验公式



$$t_d = \frac{1 + 0.6\zeta + 0.2\zeta^2}{\omega_n}$$

$$t_r = \frac{1 + 1.5\zeta + \zeta^2}{\omega_n}$$

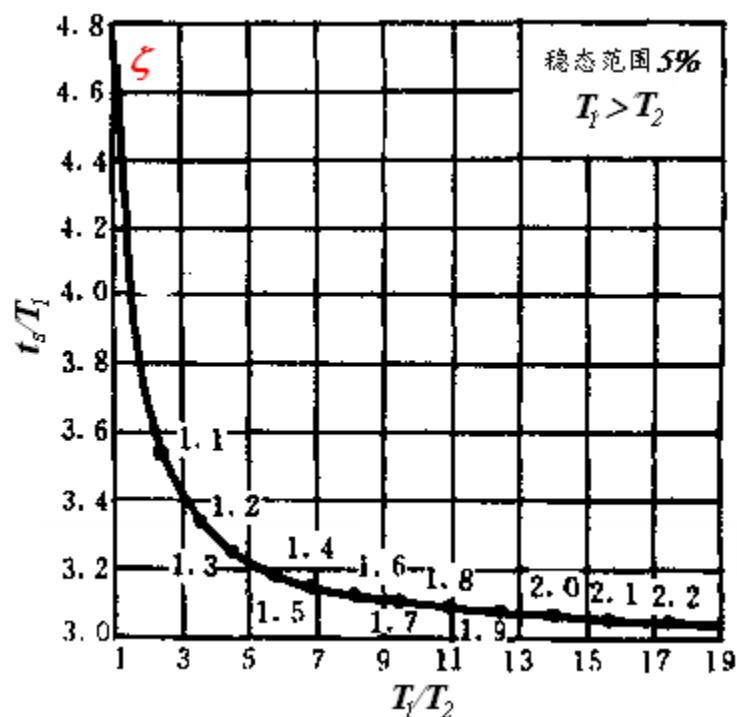
过阻尼二阶系统的性能指标

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = (s + \frac{1}{T_1})(s + \frac{1}{T_2})$$

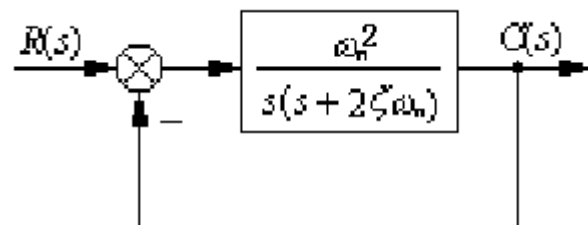
$$\zeta = \frac{1 + (T_1/T_2)}{2\sqrt{T_1/T_2}}$$

$$T_1 \geq 4T_2 \quad t_s = 3T_1 (\Delta = 5\%)$$

$$T_1 = T_2 \quad t_s = 4.75T_1$$



欠阻尼二阶性能指标结论： 只适用于典型二阶系统



$$\sigma_p \% = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100\% \quad t_s = \frac{3}{\zeta\omega_n} \sim \frac{4}{\zeta\omega_n} \quad \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$
$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} \quad t_r = \frac{\pi - \beta}{\omega_d}$$

如何选取 ζ 和 ω_n 来满足系统设计的要求，总结几点如下：

- 最大超调量 σ_p 和N只由 ζ 决定， ζ 越小， σ_p 越大。
- 增大 ω_n ，能使 t_r ， t_p 和 t_s 都减少。
- 当 ω_n 一定，减少 ζ 值，可以减小 t_r 和 t_p ，但增加 t_s ，
- 通常设计二阶系统时，一般取 $\zeta = 0.6 \sim 0.8$ 综合性能较好。

3.2.3 二阶系统设计与分析

例1: 已知单位反馈系统的传递函数为

$$G(s) = \frac{5K_A}{s(s + 34.5)}$$

设系统的输入量为单位阶跃函数,试计算放大器增益 $K_A=200$ 时,系统输出响应的动态性能指标。当 K_A 增大到1500时或减小到 $K_A=13.5$,这时系统的动态性能指标如何?

解:系统的闭环传递函数为

$$G_B(s) = \frac{5K_A}{s^2 + 34.5s + 5K_A}$$

$$K_A = 200 \quad G_B(s) = \frac{1000}{s^2 + 34.5s + 1000}$$

$$\omega_n = 31.6 (\text{弧度 / 秒}) \quad \zeta = 0.546$$

$$K_A = 200 \quad \omega_n = 31.6 (\text{弧度 / 秒}) \quad \zeta = 0.546$$

$$\sigma_p = e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100\% = 13\%$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} = 0.12 (\text{秒})$$

$$t_s \approx \frac{3}{\zeta \omega_n} = 0.174 (\text{秒})$$

$$K_A = 1500 \quad G_B(s) = \frac{5K_A}{s^2 + 34.5s + 5K_A} = \frac{7500}{s^2 + 34.5s + 7500}$$

$$\omega_n = 86.2 (\text{弧度 / 秒}) \quad \zeta = 0.2$$

$$\sigma_p = 52.7\% \quad t_p = 0.037 (\text{秒}) \quad t_s \approx 0.174 (\text{秒})$$

$$K_A = 13.5 \quad G_B(s) = \frac{5K_A}{s^2 + 34.5s + 5K_A} = \frac{67.5}{s^2 + 34.5s + 67.5}$$

$$\omega_n = 8.22 (\text{弧度 / 秒}) \quad \zeta = 2.1$$

$$s_1 = -32.4 \quad s_2 = -2.082$$

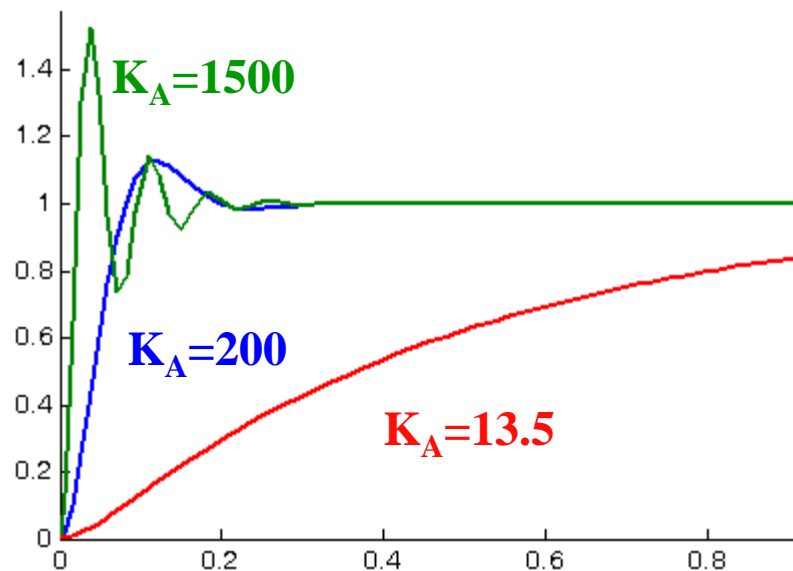
s_1 远离虚轴，可以忽略

$$G_B(s) = \frac{67.5}{(s + 32.4)(s + 2.082)} \approx \frac{1}{(\frac{1}{2.082}s + 1)}$$

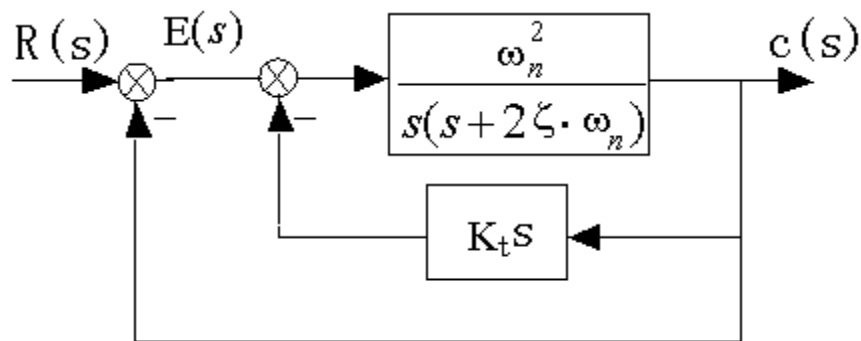
$$t_s \approx 3T_2 = \frac{3}{2.082} = 1.44 (\text{秒})$$

K_A 增大, t_p 减小, t_r 减小, t_s 不变(实部不变),
表明 K_A 增大可以提高响应初期的快速性, 超调量也随之增加;
 K_A 减小, t_p 增大, t_r 增大, 对于过阻尼时 t_s 增大, 没有超调;
仅靠调节放大器的增益, 即比例调节, 难以兼顾系统的快速性和平稳性。

要兼顾快速性和平稳性, 需要采用校正装置。



例2 如图所示是采用了速度反馈控制的二阶系统。试分析速度反馈校正对系统性能的影响。



解:系统的开环传递函数为

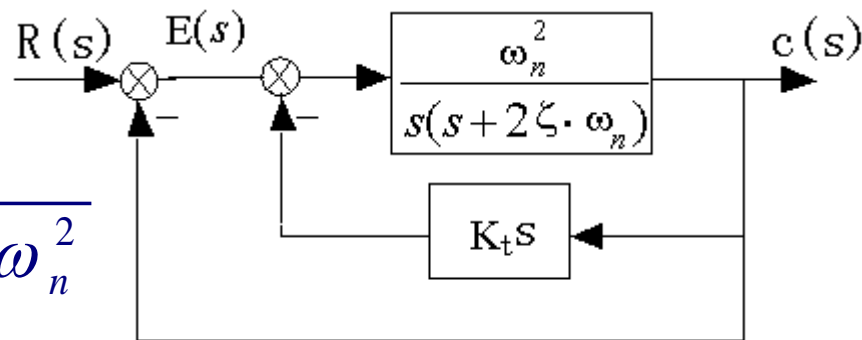
$$G(s) = \frac{\frac{\omega_n^2}{s(s + 2\zeta\omega_n)}}{1 + \frac{\omega_n^2 K_t s}{s(s + 2\zeta\omega_n)}} = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\zeta\omega_n + \omega_n^2 K_t)}$$

闭环传递函数为

$$G_B(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + (2\zeta\omega_n + \omega_n^2 K_t)s + \omega_n^2}$$

$$G_B(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2(\zeta + 0.5\omega_n K_t)\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$\omega'_n = \omega_n \quad \zeta' = \zeta + 0.5\omega_n K_t \quad K_t > 0$$



加入速度反馈后

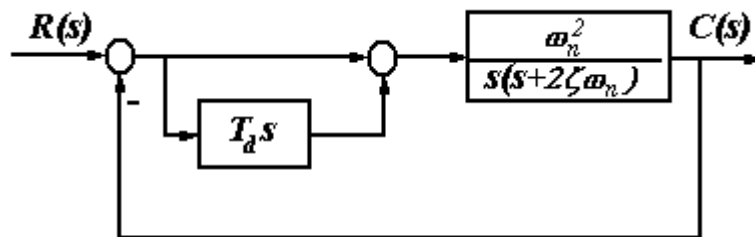
自然振荡频率没变

阻尼比增大，超调量减小

虽然上升时间增大，

但调节时间却减小。（ K_t 不能太大，不能变为过阻尼）

·例3 带比例微分控制系统结构图如图所示，分析动态性能指标 (σ_p 和 t_s)



·解：开环传递函数为

$$G_K = \frac{\omega_n^2 (1 + T_d s)}{s(s + 2\zeta\omega_n)}$$

·闭环传递函数为

$$G_B = \frac{\omega_n^2 (1 + T_d s)}{s^2 + (2\zeta\omega_n + T_d\omega_n^2)s + \omega_n^2} \quad z = \frac{1}{T_d}$$

- 为非典型二阶，比典型二阶多了一个闭环零点。
- 不能直接用公式。
- 必须求出输出的拉氏变换后进行反拉氏变换求解。

·如系统闭环传递函数为

$$G_B = \frac{(0.4s + 1)}{s^2 + 0.9s + 1}$$

$$G'_B = \frac{1}{s^2 + 0.9s + 1}$$

$$\zeta = 0.45 \quad \omega_n = 1 \quad \beta = \arccos \zeta = 1.104 \text{ rad} / s$$

·如果按照二阶公式计算

$$t_r = \frac{\pi - 1.104}{0.893} = 2.27 s$$

$$t_p = \frac{\pi}{0.893} = 3.516 s$$

$$t_s = \frac{3}{\zeta \omega_n} = 6.67 s$$

$$\sigma_p = e^{-\frac{\pi \times 0.45}{\sqrt{1-0.45^2}}} \% = 20.55 \%$$

按照反拉氏变换求解

$$\begin{aligned} C(s) &= G_B R(s) = \frac{(0.4s + 1)}{s^2 + 0.9s + 1} \cdot \frac{1}{s} \\ &= \frac{1}{s} - \frac{s + 0.45}{(s + 0.45)^2 + 0.893^2} - \frac{0.05}{(s + 0.45)^2 + 0.893^2} \end{aligned}$$

$$c(t) = 1 - e^{-0.45t} [\cos 0.893t + 0.056 \sin 0.893t]$$

$$c(t) = 1 - 1.002 e^{-0.45t} \sin(0.893t + 1.508)$$

$$0.893t_r + 1.508 = \pi \qquad t_r = \frac{\pi - 1.508}{0.893} = 1.82$$

$$\begin{aligned} \dot{c}(t) &= 0.4509 e^{-0.45t} \sin(0.893t + 1.508) - \\ &0.895 e^{-0.45t} \cos(0.893t + 1.508) = 0 \end{aligned}$$



$$c(t) = 1 - 1.002 e^{-0.45t} \sin(0.893t + 1.508)$$

$$\dot{c}(t) = 0.4509 e^{-0.45t} \sin(0.893t + 1.508) - 0.895 e^{-0.45t} \cos(0.893t + 1.508) = 0$$

$$\tan(0.893t_p + 1.508) = 1.984$$

$$t_p = 3.06 \text{ s}$$

$$c(t_p) = 1 - 1.002 e^{-0.45 \times 3.06} \sin(0.893 \times 3.06 + 1.508) = 1.225$$

$$\sigma_p = \frac{1.225 - 1}{1} = 22.5\%$$

$$\left| 1.002 e^{-0.45t_s} \right| \leq 0.05$$

$$t_s = 6.67 \text{ s}$$

$$G_B = \frac{1}{s^2 + 0.9s + 1}$$

$$t_r = 2.27 s$$

$$t_p = 3.516 s$$

$$\sigma_p = 20.55\%$$

$$t_s = 6.67 s$$

$$G_B = \frac{(0.4s + 1)}{s^2 + 0.9s + 1}$$

$$t_r = 1.82$$

$$t_p = 3.06 s$$

$$\sigma_p = 22.5\%$$

$$t_s = 6.67 s$$

带有闭环零点的二阶系统不能用以前的公式来求性能指标；
闭环零点对性能的影响：

超调量增大；

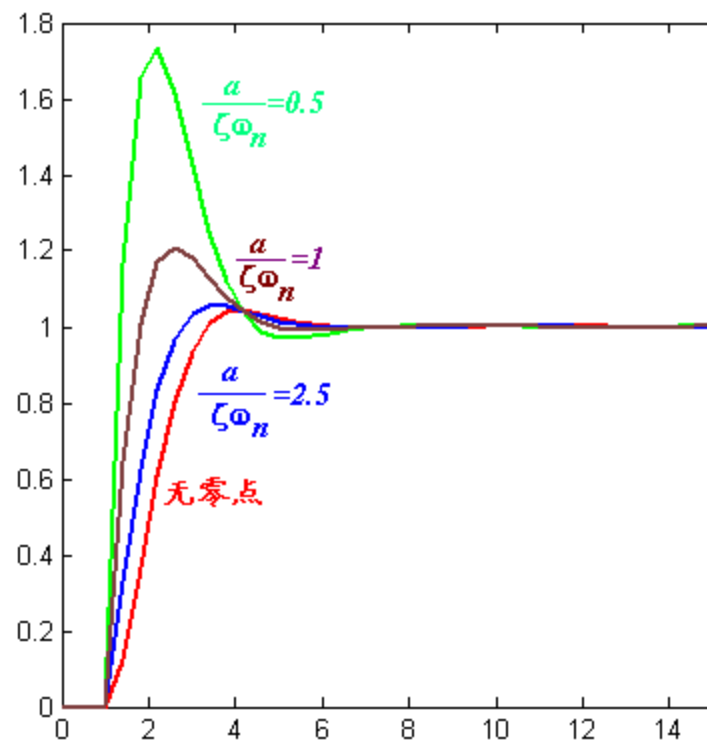
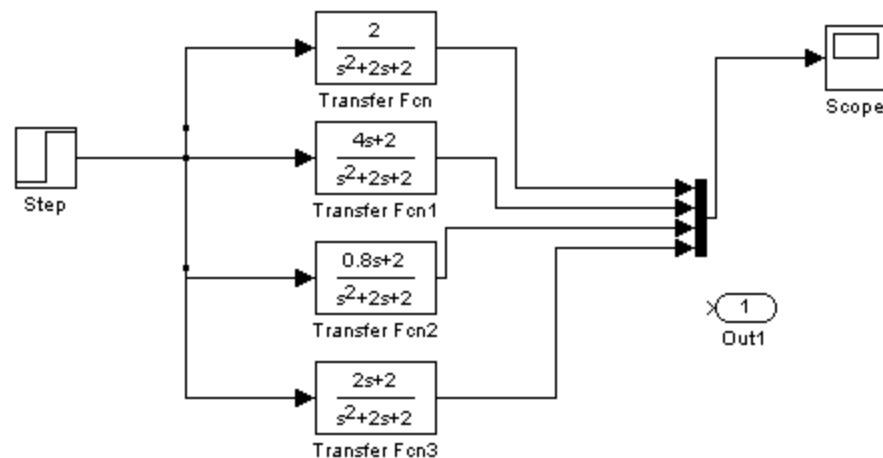
上升时间、峰值时间缩短

调节时间基本不变

$$G_B = \frac{2}{s^2 + 2s + 2} \quad G_B = \frac{4(s + 0.5)}{s^2 + 2s + 2}$$

$$G_B = \frac{0.8(s + 2.5)}{s^2 + 2s + 2} \quad G_B = \frac{2(s + 1)}{s^2 + 2s + 2}$$

仿真



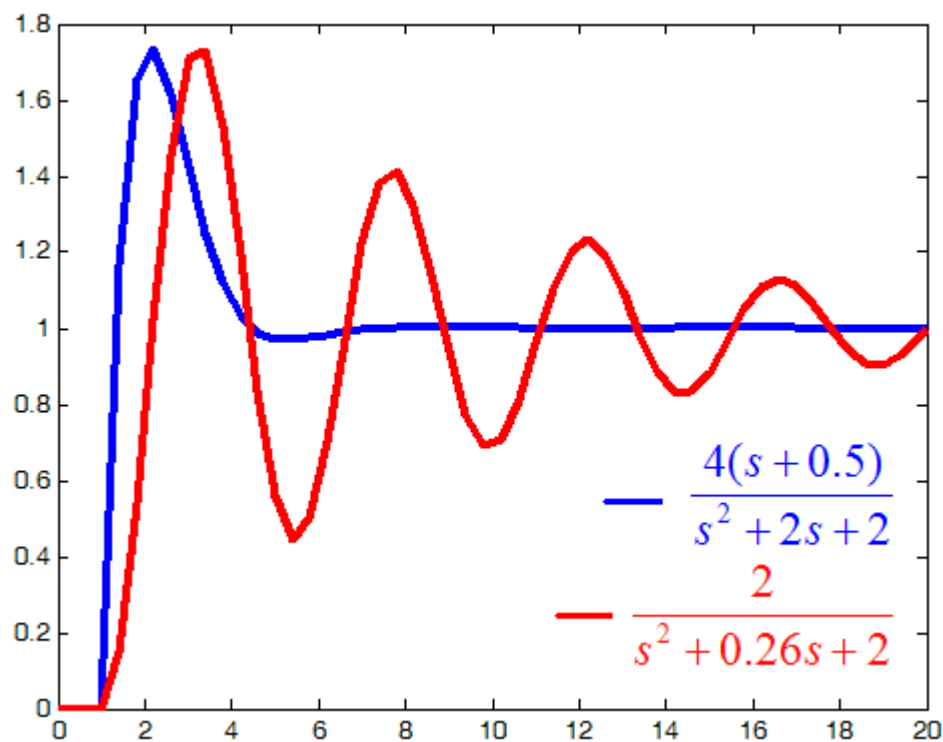
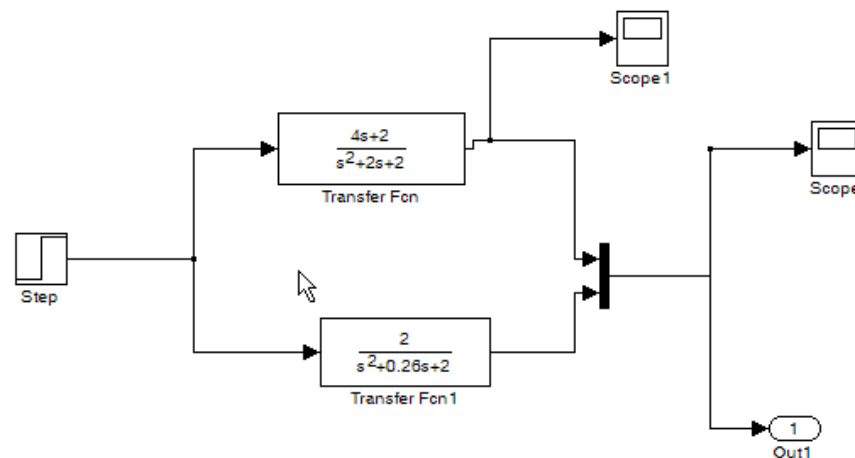
闭环零点的作用使得超调量增加；
闭环零点比共轭复数极点的实部
更靠近虚轴产生的影响就更大。

$$G_B = \frac{4(s + 0.5)}{s^2 + 2s + 2}$$

$$G_B = \frac{2}{s^2 + 0.26s + 2}$$

仿真

闭环零点的虽然增加了超调量，但与单纯二阶相比相同的超调量却有较好的平稳性。



带闭环零点的动态性能指标

$$G_B = \frac{\omega_n^2}{z} \cdot \frac{(s + z)}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$t_r = \frac{\pi - \varphi - \beta}{\omega_d} \quad t_p = \frac{\pi - \varphi}{\omega_d}$$

$$\sigma_p \% = \frac{1}{\zeta} \sqrt{\zeta^2 - 2\gamma\zeta^2 + \gamma^2} \cdot e^{-\frac{(\pi - \varphi)\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}}} \times 100\%$$

$$\gamma = \frac{\zeta\omega_n}{z}$$

$$t_s \approx \frac{(3 \sim 4) + \ln(l/z)}{\zeta\omega_n}$$

$$l = \sqrt{(z - \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2}$$

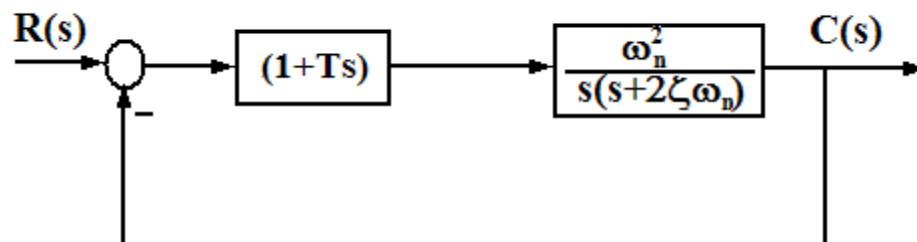
$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$

$$\beta = \arccos \zeta$$

$$\varphi = \arctg \frac{\omega_d}{z - \zeta\omega_n}$$



比例微分



$$G_B = \frac{\omega_n^2}{z} \cdot \frac{(s+z)}{s^2 + (2\zeta\omega_n + T\omega_n^2)s + \omega_n^2} \quad z = \frac{1}{T}$$

阻尼比增大 ——超调量减小，调节时间缩短

增加一个闭环零点

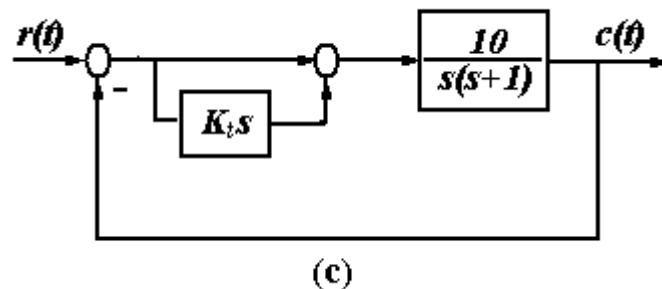
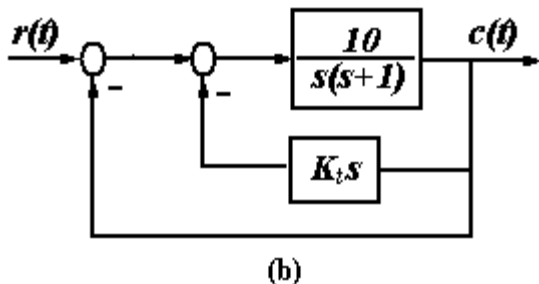
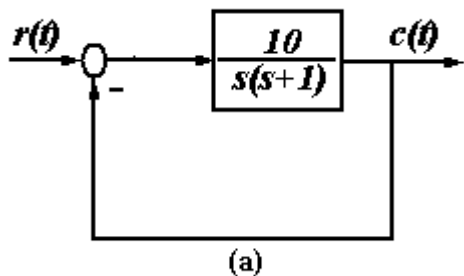
——超调量增大，调节时间有所增加

改变的大小取决于该零点相对于极点实部位置

综合性能取决于参数T的大小。

系统设计与分析

· 例5 设系统结构图分别如图(a)(b)和(c)所示, 其中 $K_t=0.216$, 分别写出各自的开环传递函数、闭环传递函数以及单位阶跃响应的表达式, 并计算动态性能指标 (σ_p 和 t_s)



· 解: 开环传递函数为

$$G_{Ka} = \frac{10}{s(s+1)}$$

$$G_{Kb} = \frac{10}{s(s+1) + 10K_t s}$$

$$G_{Kc} = \frac{10(1 + K_t s)}{s(s+1)}$$

· 闭环传递函数为

$$G_{Ba} = \frac{10}{s^2 + s + 10}$$

$$G_{Bb} = \frac{10}{s^2 + (1 + 10K_t)s + 10}$$

$$G_{Bc} = \frac{10(1 + K_t s)}{s^2 + (1 + 10K_t)s + 10}$$

典型二阶

速度反馈

比例微分

结构图	(a)	(b)	(c)
闭环传函	$\frac{10}{s^2 + s + 10}$	$\frac{10}{s^2 + 3.16s + 10}$	$\frac{10}{4.63} \frac{10(s + 4.63)}{(s^2 + 3.16s + 10)}$
闭环零点	无	无	-4.63
闭环极点	$-0.5 \pm j3.12$	$-1.58 \pm j2.74$	$-1.58 \pm j2.74$
参数 ω_n	3.16	3.16	3.16
参数 ζ	0.158	0.5	0.5

结构图	(a)	(b)	(c)
闭环传函	$\frac{10}{s^2 + s + 10}$	$\frac{10}{s^2 + 3.16s + 10}$	$\frac{10(1 + 0.216s)}{s^2 + 3.16s + 10}$
参数 ζ	0.158	0.5	0.5
参数 ω_n	3.16	3.16	3.16
性能 $\sigma_p\%$	60%	16.3%	23%
性能 t_p	1.01	1.15	1.05
性能 t_s	7	2.2	2.1
闭环零点	无	无	-4.63
闭环极点	$-0.5 \pm j3.12$	$-1.58 \pm j2.74$	$-1.58 \pm j2.74$

速度反馈通过改变系统闭环极点达到改善系统的目的

增大阻尼比达到减小超调量

自然振荡频率不变，达到减小调节时间

典型二阶和比例微分不能直接进行比较，因为不仅闭环传递函数发生变化，而且闭环零点也不同。

可以将比例微分和速度反馈进行比较，区别是比例微分带有一个闭环零点，

闭环零点会使得系统的超调量增加，调节时间基本不变。

3.2.5 高阶系统响应

增加零极点对二阶系统响应的影响

实际的控制系统，多数是高于二阶的系统，即高阶系统。高阶系统的传递函数一般可以写成如下形式

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} \quad (m \leq n)$$

将上式写成为零极点形式，则

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_m \prod_{i=1}^q (s + z_i) \prod_{i=1}^l (s^2 + 2\zeta_{mi} \omega_{mi} s + \omega_{mi}^2)}{a_n \prod_{i=1}^k (s + p_i) \prod_{i=1}^r (s^2 + 2\zeta_{ni} \omega_{ni} s + \omega_{ni}^2)} \quad (m \leq n)$$

式中 $q+2l=m$ ， $k+2r=n$ 。

·不失一般性，假如没有重极点，则

$$C(s) = \frac{b_0}{a_0} \frac{1}{s} + \sum_{i=1}^k \frac{C_i}{s + p_i} + \sum_{i=1}^r \frac{A_i (s + \zeta_{ni} \omega_{ni}) + B_i \omega_{ni} \sqrt{1 - \zeta_{ni}^2}}{s^2 + 2\zeta_{ni} \omega_{ni} s + \omega_{ni}^2}$$

$$c(t) = \frac{b_0}{a_0} + \sum_{i=1}^k C_i e^{-p_i t} + \sum_{i=1}^r e^{-\zeta_{ni} \omega_{ni} t} (A_i \cos \omega_{ni} \sqrt{1 - \zeta_{ni}^2} t + B_i \sin \omega_{ni} \sqrt{1 - \zeta_{ni}^2} t) \\ (t \geq 0)$$

- ❖ 高阶系统的响应是由惯性环节和振荡环节(二阶系统)的单位阶跃响应叠加构成；
- ❖ 各分量的相对大小由系数和衰减快慢两个因素决定；
- ❖ 所以了解了各分量及其相对大小，就可知高阶系统的瞬态响应。

$$c(t) = \frac{b_0}{a_0} + \sum_{i=1}^k C_i e^{-p_i t} + \sum_{i=1}^r e^{-\zeta_{ni} \omega_{ni} t} (A_i \cos \omega_{ni} \sqrt{1 - \zeta_{ni}^2} t + B_i \sin \omega_{ni} \sqrt{1 - \zeta_{ni}^2} t)$$

·当系统是稳定的,

❖ 各分量的**衰减快慢**由 $-p_i$ 、 $-\zeta_{ni}\omega_{ni}$ 决定, 也即系统极点在s平面左半部离虚轴越远, 相应的分量衰减越快。

❖ 各分量所对应的**系数**决定于系统的零、极点之间的位置分布。

$$C(s) = \frac{(s + 2.5)}{s(s + 2)(s + 0.5)} = \frac{2.5}{s} + \frac{1/6}{(s + 2)} - \frac{16/6}{(s + 0.5)}$$

■ 当某极点 $-p_i$ 靠近零点, 而远离其它极点和原点, 则相应的系数 C_i 越小;

■ 若一对**零极点**互相**很接近**, 则在输出 $c(t)$ 中与该极点对应的分量就几乎被消除。

■ 一对接近的零极点称为**偶极子**。(接近是相对的)

$$C(s) = \frac{1}{s(s+5)(s+2)(s+4)} = \frac{0.025}{s} - \frac{0.067}{s+5} + \frac{0.125}{s+4} - \frac{0.083}{s+2}$$

$$C(s) = \frac{s+1}{s(s+5)(s+2)(s+4)} = \frac{0.025}{s} + \frac{0.267}{s+5} - \frac{0.375}{s+4} + \frac{0.083}{s+2}$$

■ 若极点 $-p_i$ 虽然远离原点，但也远离零点，却越接近其它极点，则相应的系数 C_i 越大；该瞬态分量影响也就不能忽略。
两个相互接近的极点会强化作用。

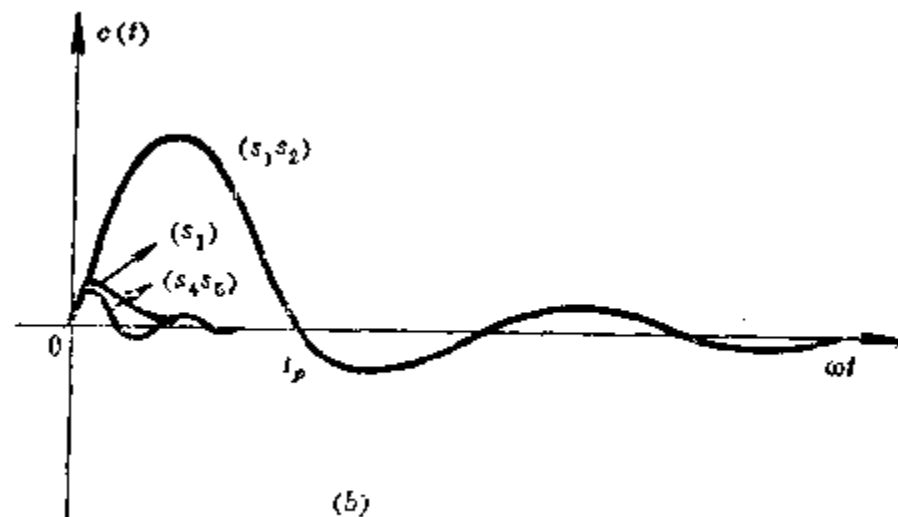
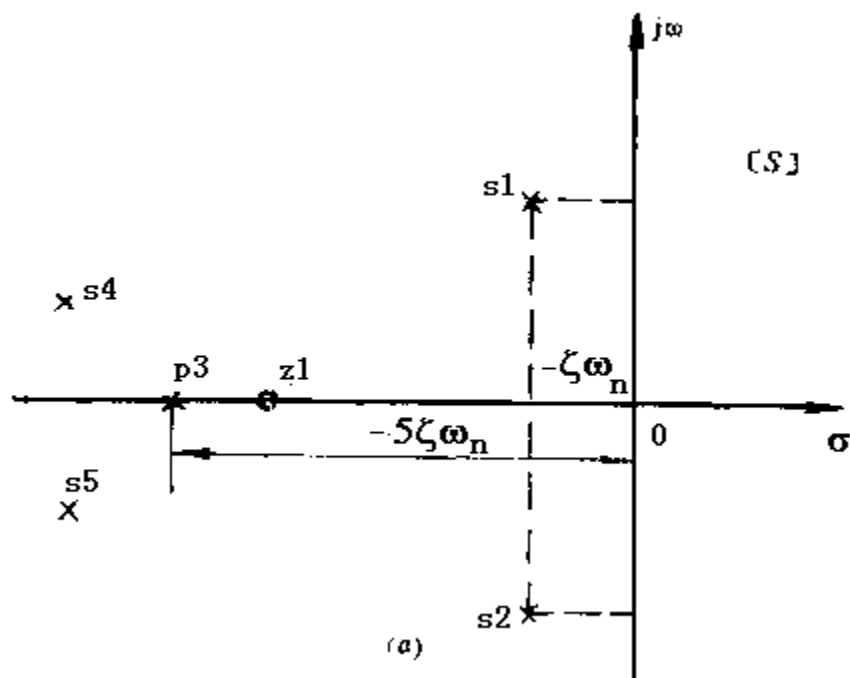
❖ 系统的零点、极点共同决定了系统瞬态响应曲线的形状。

结论：

对于系数很小（影响很小）的分量、远离虚轴衰减很快的分量常常可以忽略，因而高阶系统的性能就可用低阶系统来近似估计。

最靠近虚轴，附近没有零点，且其它极点距虚轴距离较远，称最靠近虚轴的极点为主导极点。

·例如以下一个五阶系统

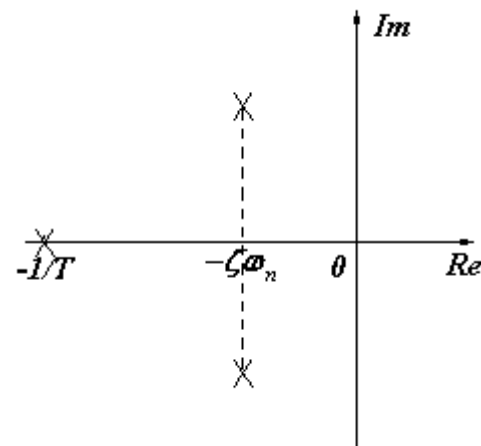


·可近似看成以 s_1 、 s_2 为主导极点的二阶系统。

下面通过具体实例来说明，一个极点或一个零点对系统响应的影响。
首先考察一个三阶系统，其闭环传递函数为

$$G_B(s) = \frac{\omega_n}{(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n)(Ts + 1)}$$

这是一个三阶系统，其极点在 s 平面的分布如图所示。

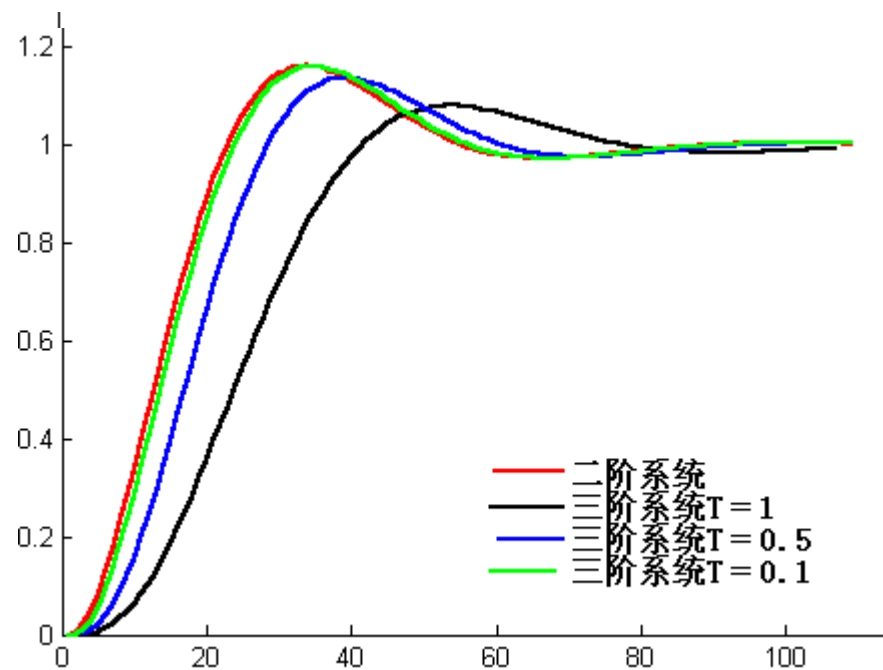


·实验证明，若下式成立，即 $|1/T| \geq 10|\zeta\omega_n|$

·也就是说，当主导极点的实部小于第3个根实部的1/10时，该三阶系统的响应可以用由主导极点表示的二阶系统的响应来近似。

$$G_B(s) = \frac{1}{(s^2 + s + 1)(Ts + 1)}$$

$$\zeta\omega_n = 0.5$$



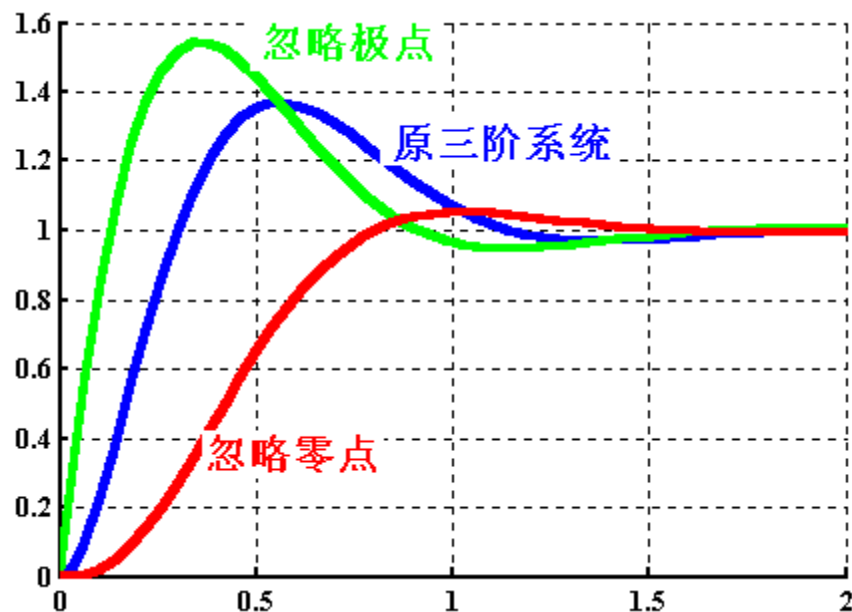
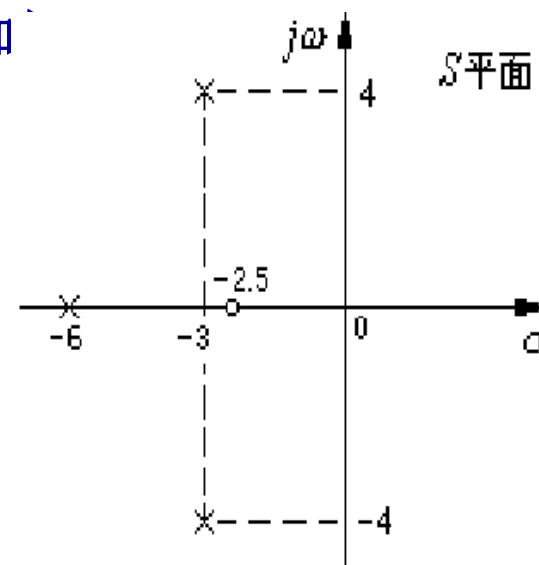
·例 假设系统的闭环传递函数为 $G_B(s) = \frac{60(s + 2.5)}{(s^2 + 6s + 25)(s + 6)}$

·试分析零点-2.5和极点-6对系统阶跃响应的影响

解 系统的传递系数（或静态增益）为1，
系统零极点在S平面上的分布如图所示。

主导极点为 $-3 \pm 4j$;

MATLAB进行计算机仿真结果如图，



·结论1：由于其他零极点离主导极点很近，所以都不能忽略。

·A: 原三阶系统:

· $\sigma_p\% = 37\%$, $t_s = 1.6$ 秒;

·B: 忽略极点的系统

$$\frac{10(s + 2.5)}{s^2 + 6s + 25}$$

$\sigma_p\% = 54.5\%$, $t_s = 1.48$ 秒;

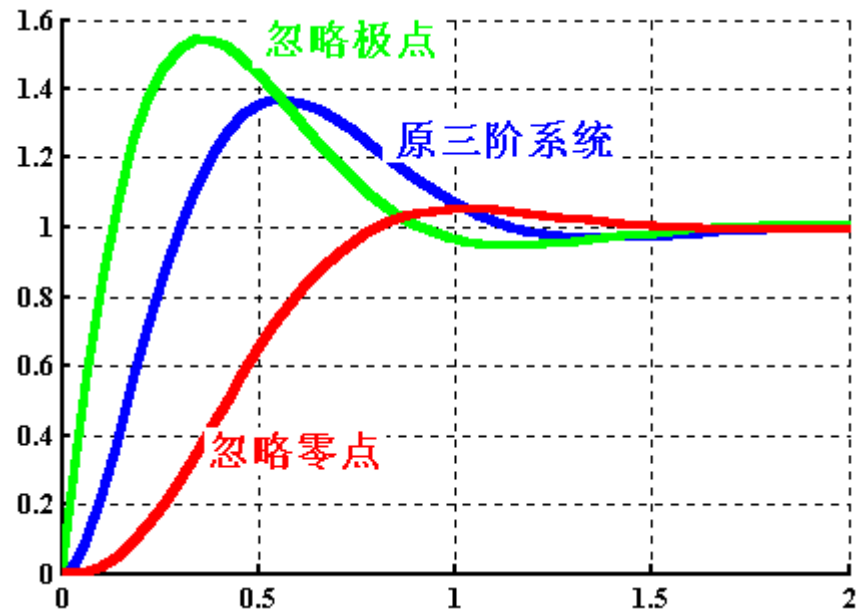
·结论2:

·闭环极点对系统的影响是使超调量减小, 调节时间稍稍增加。

·C: 忽略零点的系统

$$\frac{150}{(s^2 + 6s + 25)(s + 6)}$$

$\sigma_p\% = 5.5\%$, $t_s = 1.3$ 秒;



结论3:

闭环零点对系统的影响是使超调量加大, 响应速度变化稍微变慢;

例：已知系统的闭环传递函数为：

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{3.12 \times 10^5 s + 6.25 \times 10^6}{s^4 + 100s^3 + 8000s^2 + 4.4 \times 10^5 s + 6.24 \times 10^6}$$

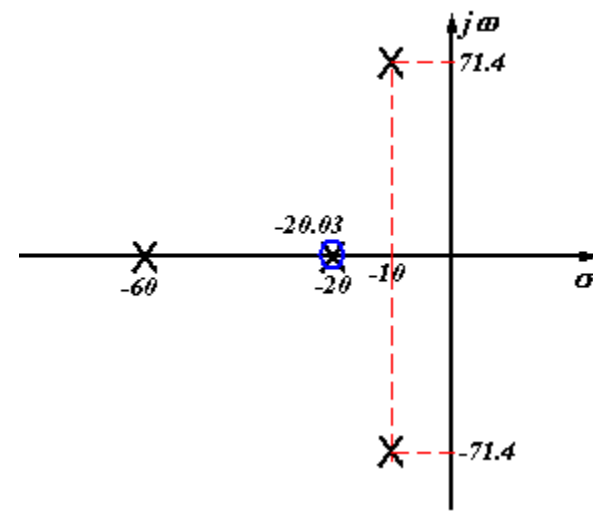
求系统近似单位阶跃响应。

解：系统闭环传递函数的零极点形式为：

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{3.12 \times 10^5 (s + 20.03)}{(s + 20)(s + 60)(s + 10 + j71.4)(s + 10 - j71.4)}$$

零点 $z_1 = -20.03$ 和极点 $p_1 = -20$ 构成一对偶极子，可以消去，

共轭复数极点 $p_{3,4} = -10 \pm j71.4$ 与极点 $p_2 = -60$ 相距很远， $p_{3,4}$ 为系统的主导极点， p_2 对响应的影响可以忽略，



$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{3.12 \times 10^5 (s + 20.03)}{(s + 20)(s + 60)(s + 10 + j71.4)(s + 10 - j71.4)}$$

闭环传递函数近似为

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{3.12 \times 10^5}{60(s + 10 + j71.4)(s + 10 - j71.4)} = \frac{5.2 \times 10^3}{s^2 + 20s + 5.2 \times 10^3}$$

$$\omega_n = 72.11 \text{ rad} / \text{s} \quad \zeta = 0.139$$

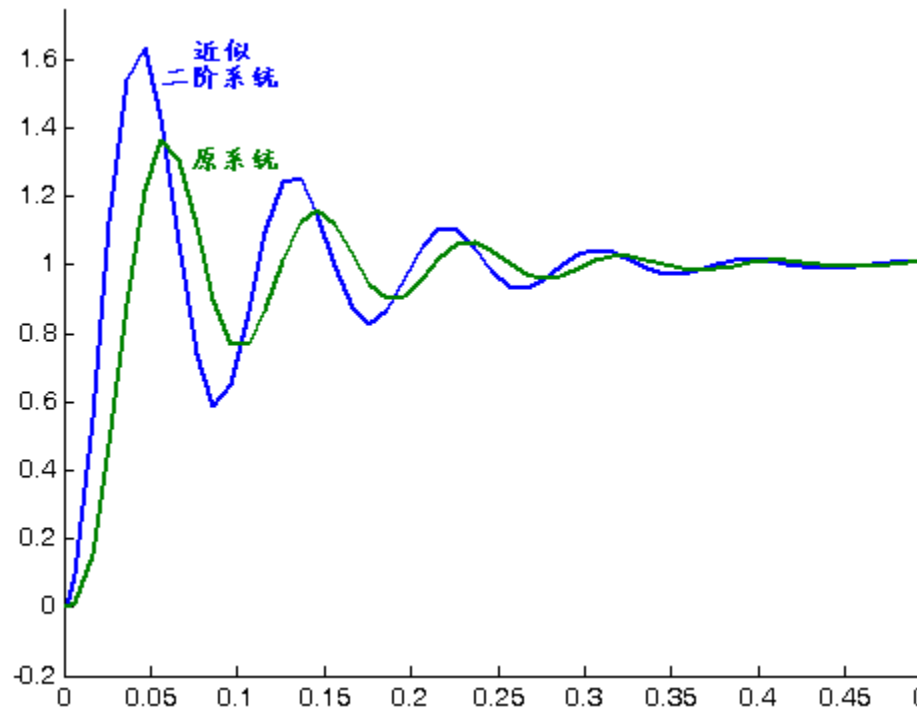
系统的超调量和调节时间为：

$$\sigma_P = 64.3\%, t_s = 0.4 \text{ s}$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{3.12 \times 10^5 (s + 20.03)}{(s + 20)(s + 60)(s + 10 + j71.4)(s + 10 - j71.4)}$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} \approx \frac{5.2 \times 10^3}{s^2 + 20s + 5.2 \times 10^3}$$

仿真



3.3 稳定性

- ❖ 明确稳定性的含义
- ❖ 明确线性系统稳定性的充要条件
- ❖ 劳斯判据
 - 两种特殊情况如何处理
 - 劳斯判据的应用
- ❖ 赫尔维茨判据

3.3.1 稳定性的概念

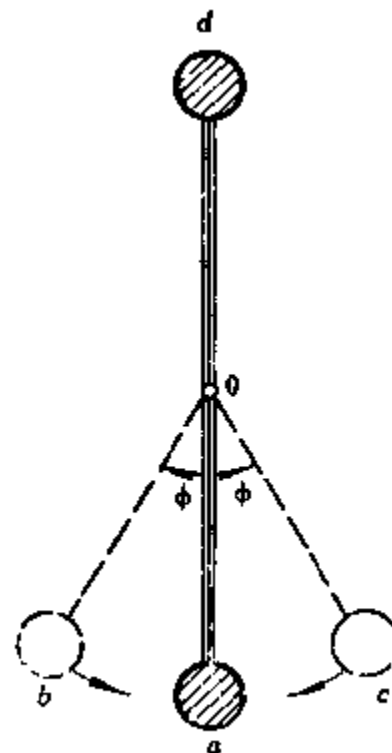
·首先看两个实际例子

·摆的示意图

·平衡点 “a” ——稳定的平衡点；

·平衡点 “d” ——不稳定的平衡点；

·稳定性针对平衡点而言。



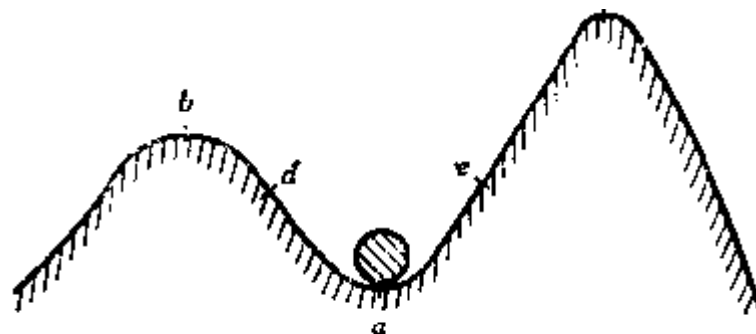
摆的平衡

运动小球

平衡点 “a”：当小球的起始偏差
超出区域d、e,为稳定平衡点

当小球的起始偏差超
出区域d、e,为不稳定平衡点

平衡点的稳定性可以在不同范围性，



小球的稳定域

1、稳定性的定义

·稳定性是由系统结构和参数决定的，与外界输入无关。

·稳定性的定义有很多种，介绍两种：

·定义一：

·在有界输入的作用下，其输出响应也是有界的。此时系统称为有界输入有界输出稳定，简称BIBO稳定。

·借输入输出关系来定义稳定性，但稳定性与输入无关。

·定义二：

·若一个系统处于平衡态，由于扰动作用，使其偏离平衡点。那么当扰动消失后，若系统能够依靠自身能力重新恢复到原始平衡状态，则称系统是稳定的；若扰动消失后不能恢复原始平衡状态，而偏差越来越大。则称系统是不稳定的。若扰动消失后，系统输出与原始的平衡状态间存在恒定的偏差或输出维持等幅振荡，则系统处于临界稳定状态。

·稳定性表征了系统由初始偏差状态回复平衡状态的能力。

·2、线性系统稳定的充要条件

假如原始平衡点在原点的单输入单输出系统，由齐次微分方程式来描述的

$$a_n c^{(n)} + a_{n-1} c^{(n-1)} + \cdots + a_1 \dot{c} + a_0 c = 0$$

·在**任何初始条件**下，若满足

$$\lim_{t \rightarrow \infty} c(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{c}(t) = \cdots = \lim_{t \rightarrow \infty} c^{(n-1)}(t) = 0 \quad (*)$$

·则称系统是稳定的。

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0$$

设上式有k个实根 p_i ($i=1, 2, \dots, k$), r对共扼复数根 $(\sigma_i \pm j\omega_i)$, ($i=1, 2, \dots, r$), 且 $k+2r=n$, 则齐次方程的解的一般式为

$$c(t) = \sum_{i=1}^k C_i e^{p_i t} + \sum_{i=1}^r e^{\sigma_i t} (A_i \cos \omega_i t + B_i \sin \omega_i t)$$

式中系数 A_i 、 B_i 和 C_i 由初始条件决定。

稳定的充要条件

$$c(t) = \sum_{i=1}^k C_i e^{p_i t} + \sum_{i=1}^r e^{\sigma_i t} (A_i \cos \omega_i t + B_i \sin \omega_i t)$$

若所有 $p_i < 0$, $\sigma_i < 0$ (即都是负数), 则(*)满足, 系统最终能恢复至平衡状态, 所以是稳定的;

或所有 $p_i < 0$, $\sigma_i < 0$, $\omega_i = 0$, 则系统仍是稳定的, 输出按指数曲线衰减;

若 p_i 或 σ_i 中有一个或一个以上是正数, 则条件式(*)不满足, $t \rightarrow \infty$ 时偏差越来越大, 系统是不稳定的;

只要 p_i 中有一个为零, 或 σ_i 中有一个为零 (即有一对虚根), 则式(*)不满足, 系统输出或者为一常值, 或者为等幅振荡, 不能恢复原平衡状态。这时称系统处于稳定的临界状态。

线性系统稳定的充分必要条件是:

系统所有的特征根均为负实数或具有负的实部
也就是它的所有极点均在S平面的左半部分。

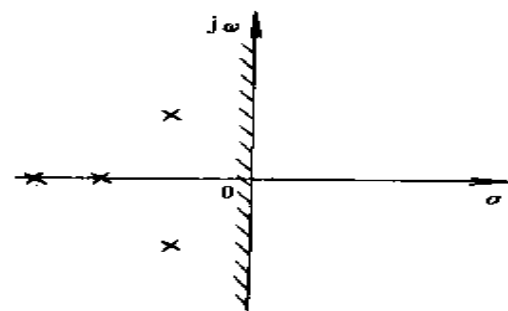


图 3-10 根平面

3.3.2 劳斯（Routh）稳定性判据

- 1、系统稳定性的初步鉴别
- 已知系统的特征方程式如下：

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0$$

- 式中所有系数均为实数；并设 $a_n > 0$ ，线性系统稳定的必要条件是
所有系数均为正数。
- 如果有负系数或零系数，系统就不稳定

·2、劳斯判据

- 1877年提出的代数判据，无需求解特征方程。

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0$$

设 $a_n > 0$ ，各项系数均为实数。

劳斯判据

1) 列写劳斯表

$$s^n \quad a_n \quad a_{n-2} \quad a_{n-4} \quad \dots$$

$$s^{n-1} \quad a_{n-1} \quad a_{n-3} \quad a_{n-5} \quad \dots$$

$$s^{n-2} \quad b_1 \quad b_2 \quad b_3 \quad \dots$$

$$s^{n-3} \quad c_1 \quad c_2 \quad c_3 \quad \dots$$

$$s^{n-2} \quad d_1 \quad d_2 \quad d_3 \quad \dots$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \dots$$

$$s^1 \quad f_1$$

$$s^0 \quad g_1$$

表中

$$b_1 = -\frac{1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}$$

$$b_2 = -\frac{1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix}$$

$$b_3 = -\frac{1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-6} \\ a_{n-1} & a_{n-7} \end{vmatrix}$$

...

直至 b_i 项均为零，再计算下一行

$$c_1 = -\frac{1}{b_1} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$c_2 = -\frac{1}{b_1} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-5} \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$c_3 = -\frac{1}{b_1} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-7} \\ b_1 & b_4 \end{vmatrix}$$

...

- 直至 c_i 项均为零；
- 依次计算，直到算到 s^0 行为止。

·2) 考察劳斯表左端第一列各数的符号

·若各数均为正数，系统稳定；

·若有负数，系统不稳定；

·第一列符号变化的次数，即为右半平面极点的个数

$\cdot s^n$	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	...
$\cdot s^{n-1}$	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	...
$\cdot s^{n-2}$	b_1	b_2	b_3	...
$\cdot s^{n-3}$	c_1	c_2	c_3	...
$\cdot \vdots$	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$\cdot s^0$	g_1			

·线性系统稳定的充分与必要条件是：

·劳斯行列表左端第一列各数均为正数。

劳斯判据

·例 设有下列多项式： $s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 4s + 5 = 0$

·用劳斯判据判断系统的稳定性。

s^4	1	3	5
s^3	2	4	0
s^2	1	5	
s^1	-6		
s^0	5		

系统不稳定；

且有两个不稳定根；

s^4	1	3	5
s^3	2	4	0
.	1	2	
s^2	1	5	
s^1	-3		
s^0	5		

系统不稳定；

且有两个不稳定根；

·为了数学上运算简化，可以将一行中所有各数均乘一个正整数，不影响稳定性判断。

劳斯判据的特殊情况

·例 设有下列多项式： $s^4 + 3s^3 + s^2 + 3s + 1 = 0$

·用劳斯判据判断系统的稳定性。

$$\begin{array}{cccc} s^4 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} s^3 & 3 & 3 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} s^2 & \cancel{0} \cdot \varepsilon & 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} s^1 & (3\varepsilon-3)/\varepsilon & & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} s^0 & 1 & & \end{array}$$

·当某行第一列元素为零，而其余元素不全为零时，将第一列零元素设为 ε ， ε 为非常小的正数。

因为 $(3\varepsilon-3)/\varepsilon < 0$ ，所以系统不稳定；

且有两个不稳定根；

劳斯判据的特殊情况

·例 设有下列多项式： $s^5 + 2s^4 + 24s^3 + 48s^2 - 25s - 50 = 0$
·用劳斯判据判断系统的不稳定根的个数。

s^5	1	24	-25
s^4	2	48	-50
s^3	0	0	0
	8	96	0
s^2	24	-50	
s^1	112.7	0	
s^0	-50		

·以全零行上一行系数建立辅助多项式P(s)

$$P(s) = 2s^4 + 48s^2 - 50$$

·对辅助多项式求导数可得全零行新系数

$$\frac{dP(s)}{ds} = 8s^3 + 96s$$

只有一个不稳定根；

·通常出现全零行的情况下，表明系统一般存在关于原点对称的特征根。解辅助方程可得关于原点对称的根。

$$2s^4 + 48s^2 - 50 = 0$$

$$s = \pm 1 \quad s = \pm 5j$$

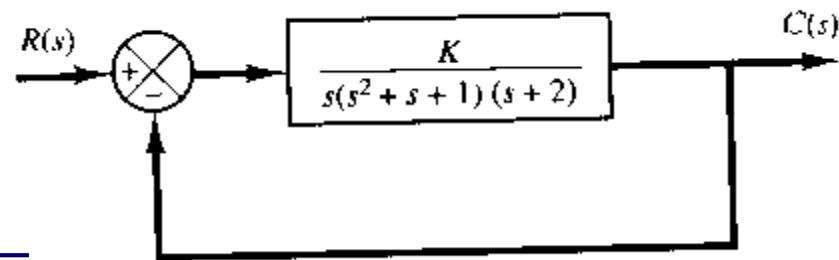
$$(s^2 + 25)(s^2 - 1) = 0$$

$$s = -2$$

·例 要使系统稳定，试确定K的范围

·解：首先写出闭环特征方程

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{s(s^2 + s + 1)(s + 2) + K}$$



$$s^4 + 3s^3 + 3s^2 + 2s + K = 0$$

·要使系统稳定，必须第一列所有元素为正，

$$s^4 \quad 1 \quad 3 \quad K$$

$$s^3 \quad 3 \quad 2 \quad 0$$

$$s^2 \quad 7/3 \quad K$$

$$s^1 \quad 2-9K/7 \quad 0$$

$$s^0 \quad K$$

$$\begin{cases} 2 - 9K/7 > 0 \\ K > 0 \end{cases}$$

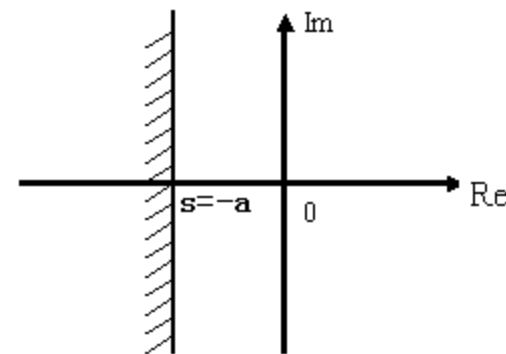
$$0 < K < \frac{14}{9}$$

·3、稳定裕量的检验

·相对稳定性：是指在稳定的情况下有多少稳定裕量。

·特征方程的左半平面的根越靠近虚轴稳定性越差，稳定裕量越小，相对稳定性越差；

可移动s平面的坐标轴，然后再应用劳斯判据。



·令 $s = z - a$

·即把虚轴左移a, 将上式代入特征式，得以z为变量的新的特征方程式，

·然后再检验新特征方程式有几个根位于新虚轴(垂直线 $s = -a$) 的右边。

·如果所有根均在新虚轴的左边(新劳斯行列表第一列均为正数)，则说系统具有稳定裕量a。

劳斯判据的应用

·例 检验特征方程式, $2s^3+10s^2+13s+4=0$

·是否有根在右半平面, 并检验有几个根的实部大于-1。

·解: 列劳斯表

$$\begin{array}{ccc} s^3 & 2 & 13 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} s^2 & 10 & 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} s^1 & 12.2 & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} s^0 & 4 & \end{array}$$

系统稳定; 在右半平面没有根

·根的实部小于-1表明根在 $s=-1$ 的左边, 进行坐标左移, 令 $z=s+1$, 当所有的 $\text{Re}(z) < 0$ 时, 即表示 $\text{Re}(s) < -1$; 将 $s=z-1$ 代入上面的特征方程

$$2(z-1)^3 + 10(z-1)^2 + 13(z-1) + 4 = 0$$

$$2z^3 + 4z^2 - z - 1 = 0$$

$$\begin{array}{ccc} s^3 & 2 & -1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} s^2 & 4 & -1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} s^1 & -0.5 & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} s^0 & -1 & \end{array}$$

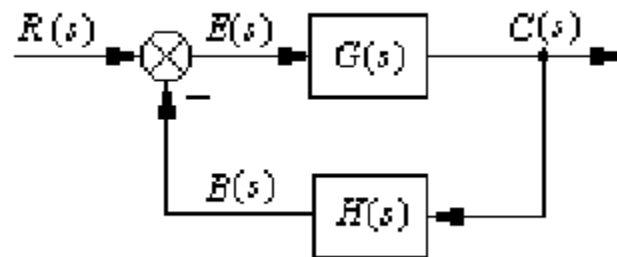
系统有一个根的实部大于-1

3.4 反馈控制系统的稳态误差

稳态误差一定是在系统稳定的情况下才有意义。

- 稳态误差是对系统精度的一种衡量；
- 误差的定义；
- 稳态误差受什么因素影响；
- 如何降低系统的稳态误差；

3.4.1 稳态误差的计算



1) 误差的定义

为参考输入信号和反馈信号的差值。

$$e(t) = r(t) - b(t)$$

误差的拉氏变换

$$E(s) = \frac{1}{1 + G(s)H(s)} R(s)$$

2) 稳态误差定义

$$e_{ss} = e(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} [r(t) - b(t)]$$

- **注意：**对于稳定系统，才有稳态误差的概念；
- 这种定义为缺省定义；
- 对于其它定义的稳态误差，必须首先给出误差的定义式。

3) 稳态误差的计算

·利用终值定理

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s)$$

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{R(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

注意：

当输入为正弦函数时，不能用终值定理求稳态误差；
因为正弦函数的拉氏变换在虚轴上有一对奇点。

·系统的稳态误差只取决于系统的结构参数和输入信号

·当输入信号的形式确定后，系统的稳态误差将只取决于系统的结构和参数。

·对稳态误差有影响的因素就是开环传递函数中积分环节数。

·3) 控制系统的型别

·若控制系统的开环传递函数为

$$G_K(s) = G(s)H(s) \\ = \frac{K(T_1s + 1)(T_2s + 1) \cdots (T_ms + 1)}{s^N (T_as + 1)(T_bs + 1) \cdots (T_ns + 1)}$$

·说明系统有N个积分环节串联，或表示在s=0处，有N重极点，因此称系统为N型系统。

·当N=0, 1, 2, ...时，则分别称之为0型、1型、2型...系统

·一阶系统：0型系统

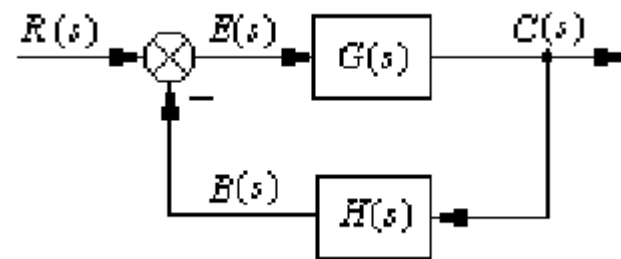
·二阶系统：1型系统

3.4.2 参考输入引起的稳态误差

· 计算不同参考输入信号时的稳态误差

· 1) 单位阶跃输入

· 系统参考输入为单位阶跃函数, $R(S)=1/s$



$$\begin{aligned} e_{ss} &= \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{1 + G(s)H(s)} R(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{1 + G(s)H(s)} \cdot \frac{1}{s} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + G(s)H(s)} = \frac{1}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} G(s)H(s)} \end{aligned}$$

· 令 $K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)H(s)$

· 称 K_p 为位置误差系数, 此时 $e_{ss} = \frac{1}{1 + K_p}$

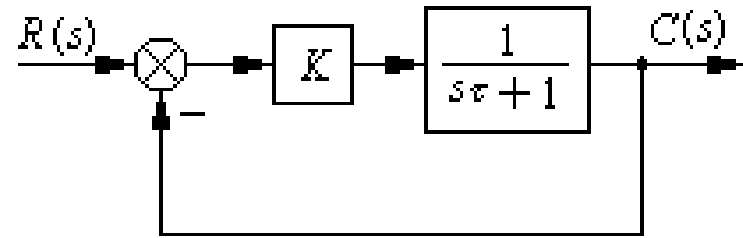
位置误差系数是针对阶跃输入定义的。

·对于0型系统: $N=0$

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K(1+T_1s)(1+T_2s)\cdots}{(1+T_as)(1+T_bs)\cdots} = K$$

$$e_{ss} = \frac{1}{1+K}$$

·开环放大系数

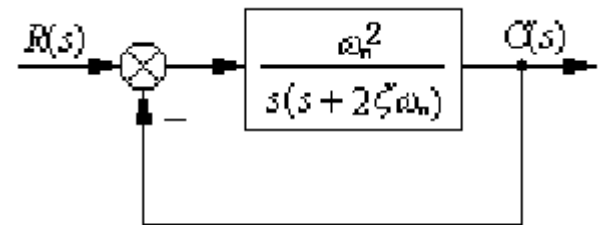


这种没有积分环节的0型系统，阶跃输入的稳态误差为一固定值K愈大， e_{ss} 愈小，称为有差系统。

·对于1型系统或1型以上系统: $N \geq 1$

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K(1+T_1s)(1+T_2s)\cdots}{s^N(1+T_as)(1+T_bs)\cdots} = \infty$$

$$e_{ss} = 0$$



- 对阶跃输入而言, 1型系统或1型以上系统没有稳态误差;
- 0型系统可通过增大K值减小稳态误差或增加型号数消除稳态误差。

·2)单位斜坡输入

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{1 + G(s)H(s)} \frac{1}{s^2} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{sG(s)H(s)}$$

·令
$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)H(s)$$

·称 K_v 为速度误差系数，此时
$$e_{ss} = \frac{1}{K_v}$$

速度误差系数是针对斜坡输入定义的。

对于0型系统：N=0

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{K(1+T_1s)(1+T_2s)\cdots}{(1+T_as)(1+T_bs)\cdots} = 0$$

$$e_{ss} = \infty$$

对于0型系统，输出不能跟上斜坡输入，最后稳态误差为 ∞ ；

·对于1型系统: $N=1$

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{K(1+T_1s)(1+T_2s)\cdots}{s(1+T_as)(1+T_bs)\cdots} = K \quad \cdot \text{开环放大系数}$$

$$e_{ss} = \frac{1}{K}$$

·对于1型系统, 其反馈信号能跟踪斜坡输入, 但总有一定误差; 其稳态误差与 K 成反比。

·对于2型系统或2型以上系统: $N \geq 2$

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{K(1+T_1s)(1+T_2s)\cdots}{s^N(1+T_as)(1+T_bs)\cdots} = \infty$$

$$e_{ss} = 0$$

·对斜坡输入而言, 2型系统或2型以上系统没有稳态误差;

·对斜坡输入, 要使系统稳态误差一定或为零, 必需 $N \geq 1$ 。也即必须有1个及以上积分环节数。

·3)单位抛物线输入

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{1 + G(s)H(s)} \frac{1}{s^3} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^2 G(s)H(s)}$$

$$\cdot \text{令} \quad K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s)H(s)$$

$$\cdot \text{称} K_a \text{为加速度误差系数, 此时} \quad e_{ss} = \frac{1}{K_a}$$

加速度误差系数是针对抛物线输入定义的。

对于0型或1型系统: $N=0, 1$

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 \cdot \frac{K(1+T_1s)(1+T_2s)\cdots}{s^N(1+T_as)(1+T_bs)\cdots} = 0$$

$$e_{ss} = \infty$$

0型或1型系统, 对于 抛物线输入不能紧跟, 最后稳态误差为 ∞ ;

·对于2型系统：N=2

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 \cdot \frac{K(1+T_1s)(1+T_2s)\cdots}{s^2(1+T_as)(1+T_bs)\cdots} = K \quad \cdot \text{开环放大系数}$$
$$e_{ss} = \frac{1}{K}$$

·2型系统，其输出能跟踪抛物线输入，但总有一定误差；其稳态误差与K成反比。

·对于3型系统或3型以上系统：N≥3

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 \cdot \frac{K(1+T_1s)(1+T_2s)\cdots}{s^N(1+T_as)(1+T_bs)\cdots} = \infty$$
$$e_{ss} = 0$$

·抛物线输入而言,3型系统或3型以上系统没有稳态误差；

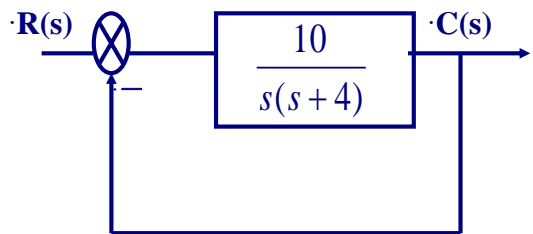
·对抛物线输入，要使系统稳态误差一定或为零，必需N≥2。也即必须有2个及以上的积分环节数。

· 小结

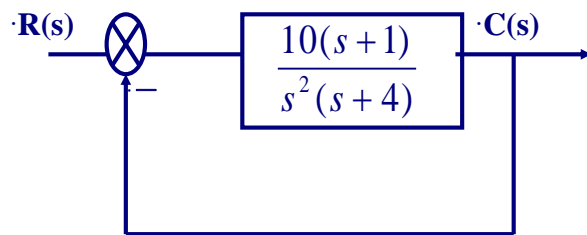
- 在对角线上出现的稳态误差具有有限值；在对角线以上出现的稳态误差，其值为无穷大；在对角线以下出现的稳态误差，其值为零。

	单位阶跃输入 $r(t) = 1$	单位斜坡输入 $r(t) = t$	单位抛物线输入 $r(t) = 0.5t^2$
	位置误差系数 $K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)H(s)$	速度误差系数 $K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)H(s)$	加速度误差系数 $K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2G(s)H(s)$
0型系统	$e_{ss} = \frac{1}{1+K}$	$e_{ss} = \infty$	$e_{ss} = \infty$
1型系统	$e_{ss} = 0$	$e_{ss} = \frac{1}{K}$	$e_{ss} = \infty$
2型系统	$e_{ss} = 0$	$e_{ss} = 0$	$e_{ss} = \frac{1}{K}$

·例 已知两个系统如图 所示，当参考输入为 $r(t) = 4 + 6t + 3t^2$ 时，试分别求出两个系统的稳态误差。



·(a)



·(b)

解：系统a为1型系统，

其 $K_a=0$ ，不能跟随 $r(t)$ 的 $3t^2$ 分量，

所以

$$e_{ss} = \infty$$

系统b为2型系统，

其 $K_a = K = 10/4$ ，

所以

$$e_{ss} = 6 / K_a = 2.4$$

本例说明：

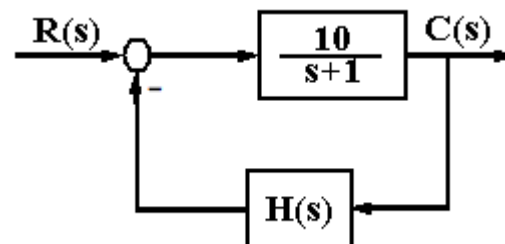
当输入为阶跃、斜坡和抛物线函数的组合时，抛物线函数分量要求系统型号最高。

计算稳态误差应按最高阶输入形式计算。

·例 已知系统结构如图 所示, 定义 $E(s) = \frac{1}{H(s)} R(s) - C(s)$

·分别求出 $H(s)=1$ 和 $H(s)=0.1$ 时系统的阶跃响应稳态误差。

·解: 当 $H(s)=1$,



$$E(s) = R(s) - C(s)$$

系统为0型系统,

$$e_{ss} = \frac{1}{K+1} = \frac{1}{11} = 0.091$$

当 $H(s)=0.1$, 非标准定义, 用终值定理来求。

$$E(s) = 10 R(s) - C(s) = 10 R(s) - \frac{G}{1+GH} R(s) = \frac{10(s+1)}{s+2} R(s)$$

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s E(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{10(s+1)}{s+2} \cdot \frac{1}{s} = 5$$

非标准误差定义, 不能用前面的结论。



·例控制系统结构图如图所示，误差定义 $E(s) = R(s) - C(s)$

·输入信号为 $r(t)=at$,, a 为任意正常数，试证明，合适选择 K_i ，可以使稳态误差为零。

·解： $E(s) = R(s) - C(s)$

$$C(s) = \frac{K(K_i s + 1)}{Ts^2 + s + K} \cdot R(s)$$

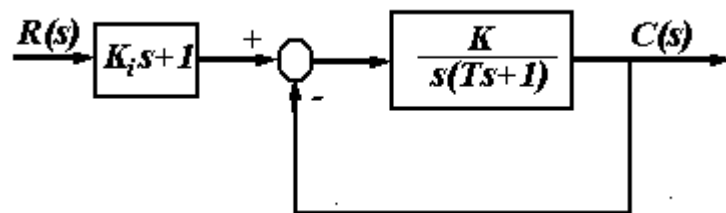
$$E(s) = \left[1 - \frac{K(K_i s + 1)}{Ts^2 + s + K}\right] R(s) = \frac{Ts^2 + (1 - KK_i)s}{Ts^2 + s + K} R(s)$$

用终值定理来求。

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{Ts^2 + (1 - KK_i)s}{Ts^2 + s + K} \cdot \frac{a}{s^2} = 0$$

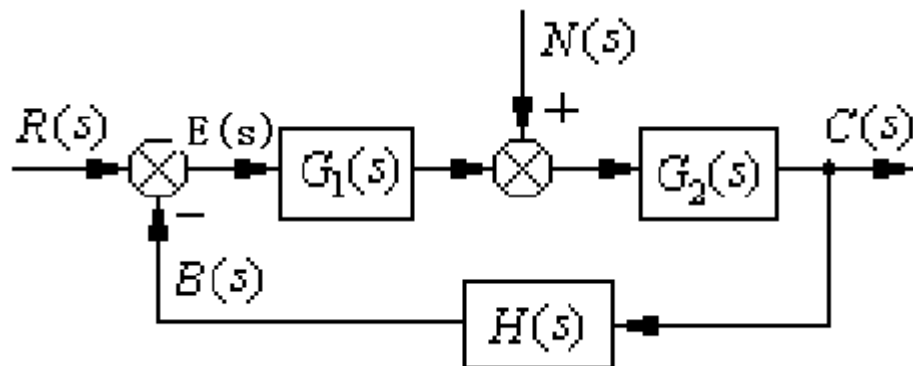
$$1 - K_i K = 0 \quad K_i = \frac{1}{K}$$

可以使系统对斜坡输入的稳态误差为零。



3.4.3 扰动输入引起的稳态误差

假如扰动 $n(t)$ 的作用点如图所示，现在分析它对输出或稳态误差的影响。



·例 $G_1(s) = K \quad G_2(s) = \frac{1}{Js}$

$$H(s) = 1$$

·分别计算当 $r(t)$ 和 $n(t)$ 为阶跃输入时的系统稳态误差

·解：

$$G_K(s) = G_1(s)G_2(s)H(s) = \frac{K}{Js}$$

·系统为I型系统，当 $r(t)=1(t)$ 时，稳态误差为零，即 $e_{ssr} = 0$

·当 $n(t)=1(t)$ 时 $G_{en}(s) = \frac{E(s)}{N(s)} = \frac{-G_2(s)H(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} = \frac{-1}{Js + K}$

$$e_{ssn} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{-1}{Js + K} \cdot \frac{1}{s} = -\frac{1}{K}$$

·稳态误差不为零

·若 $G_2(s) = K$ $G_1(s) = \frac{1}{Js}$ $H(s) = 1$ $G_K(s) = G_1(s)G_2(s)H(s) = \frac{K}{Js}$

·系统还是I型系统，当 $r(t)=1(t)$ 时，对于参考输入稳态误差仍然为零，即

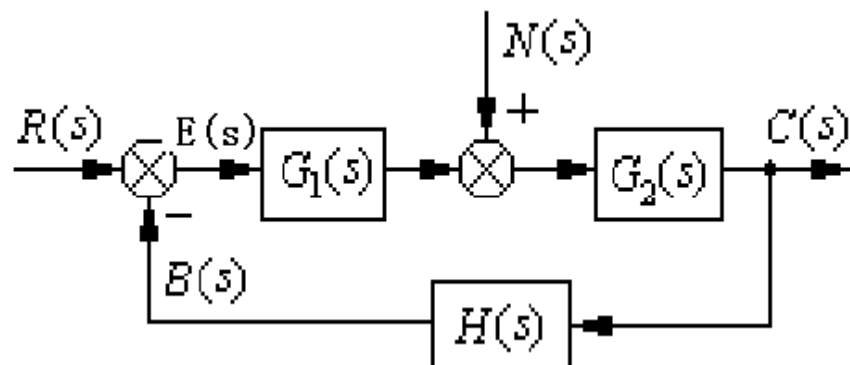
$$e_{ssr} = 0$$

·当 $n(t)=1(t)$ 时 $G_{en}(s) = \frac{E(s)}{N(s)} = \frac{-G_2(s)H(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} = \frac{-KJs}{Js + K}$

$$e_{ssn} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{-KJs}{Js + K} \cdot \frac{1}{s} = 0$$

·对于扰动的稳态误差等于零

·扰动引起的稳态误差
·不仅与积分环节有关；
·而且还与积分环节所在位置有关。



$$G_{en}(s) = \frac{E(s)}{N(s)} = \frac{-G_2(s)H(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

$$e_{ssn} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{-G_2(s)H(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} N(s)$$

若扰动为阶跃函数 $n(t)=1(t)$, 则

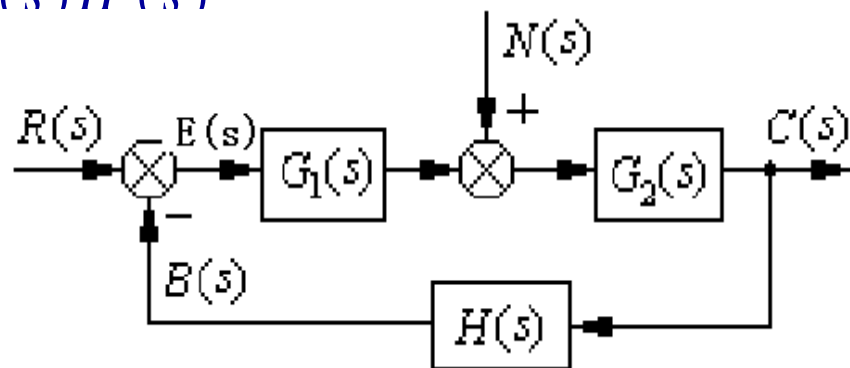
$$e_{ssn} = \frac{-G_2(0)H(0)}{1 + G_1(0)G_2(0)H(0)}$$

当 $G_1(0)G_2(0)H(0) \gg 1$

$$e_{ssn} = \frac{-G_2(0)H(0)}{1 + G_1(0)G_2(0)H(0)} \approx \frac{-1}{G_1(0)}$$

扰动作用点以前的系统前向通道传递系数 $G_1(0)$ 越大, 由一定扰动引起的稳态误差就越小。

对于阶跃输入要求系统无差, 应该**扰动作用点以前**的 $G_1(s)$ 中包含积分环节, 才能保证稳态误差为零。



·例试求如图所示系统的稳态误差（误差定义 $e(t) = r(t) - c(t)$ ）

·已知输入信号为 $r(t)=1(t)$, $n(t)=0.1 \times 1(t)$

·解：此图上没有所定义的误差信号

·分别求输入和扰动的误差传递函数

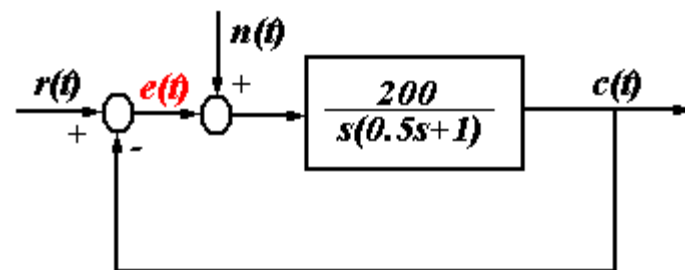
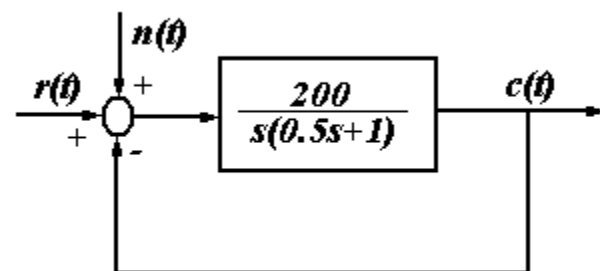
$$\cdot n(t)=0 \quad \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{s(0.5s+1)}{0.5s^2+s+200}$$

$$\cdot r(t)=0 \quad \frac{E(s)}{N(s)} = \frac{-200}{0.5s^2+s+200}$$

$$E(s) = \frac{s(0.5s+1)}{0.5s^2+s+200} \cdot R(s) + \frac{-200}{0.5s^2+s+200} \cdot N(s)$$

用终值定理来求。

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \left[\frac{s(0.5s+1)}{0.5s^2+s+200} \cdot \frac{1}{s} + \frac{-200}{0.5s^2+s+200} \cdot \frac{0.1}{s} \right] = -0.1$$



也可以用前面的结论来求

对于参考输入而言，此系统为1型系统

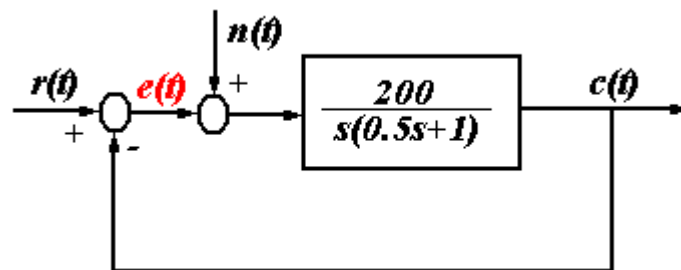
$$e_{ssr} = 0$$

对于扰动输入而言，作用点以前没有积分环节，
且作用点以前的环节增益为1

$$e_{ssn} = 0.1 \times \frac{-1}{1} = -0.1$$

总的稳态误差为

$$e_{ss} = e_{ssr} + e_{ssn} = -0.1$$



结论： 关于降低或消除稳态误差的问题

降低参考输入引起稳态误差的措施：

增大系统开环传递系数可减小有差系统的稳态误差；

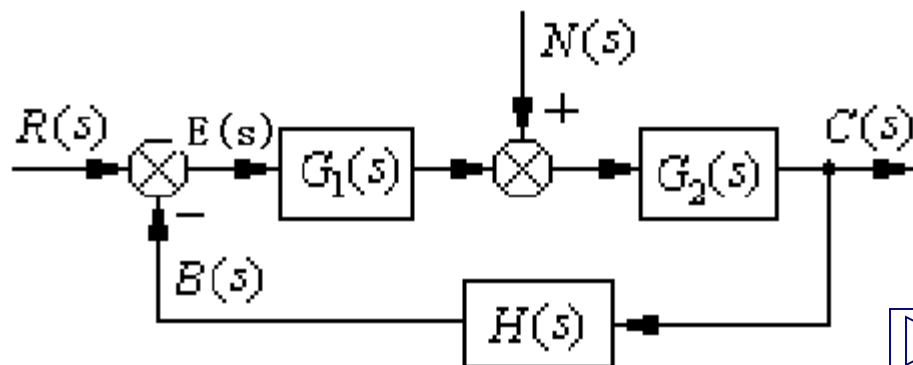
增加开环传递函数中积分环节数，使系统型号提高，可消除有差系统的稳态误差；

降低扰动引起稳态误差的措施：

增大扰动作用点以前的前向通道传递系数以降低有差系统由扰动引起的稳态误差。

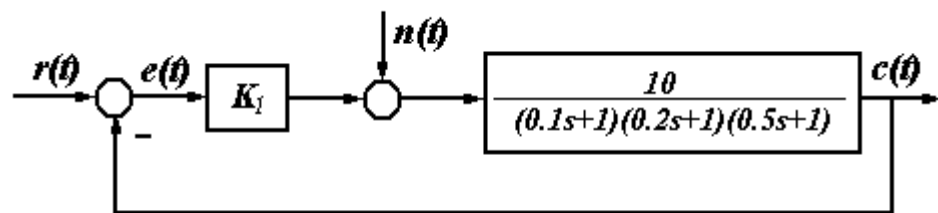
增加扰动作用点以前的前向通道中积分环节数，使系统型号提高，可消除有差系统由扰动引起的稳态误差；

还可以采用顺馈（或前馈）的控制方式消除稳态误差。



·例 已知系统结构图如图所示，试问是否可以选择某一合适的 K_1 值，使系统在扰动信号 $n(t)=1(t)$ 作用下的稳态误差 $e_{ssn}=-0.099$ ？

·解：扰动作用下的误差传递函数为



$$G_{en}(s) = \frac{E(s)}{N(s)} = \frac{-10}{(0.1s+1)(0.2s+1)(0.5s+1) + 10K_1}$$

·用终值定理

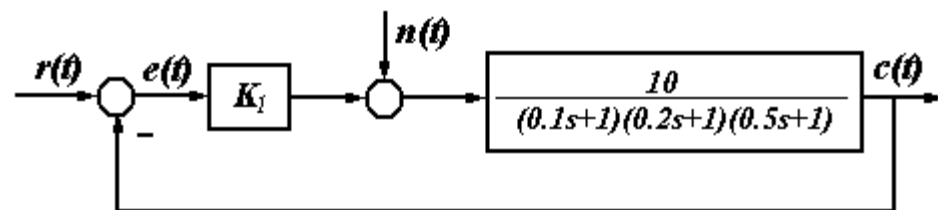
$$e_{ssn} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{-10}{(0.1s+1)(0.2s+1)(0.5s+1) + 10K_1} \cdot \frac{1}{s}$$

$$e_{ssn} = \frac{-10}{1 + 10K_1} = -0.099$$

$$K_1 \approx 10$$

系统扰动的稳态误差为**-0.099**

$$K_1 \approx 10$$



系统的特征方程为

$$s^3 + 17s^2 + 80s + (1000K_1 + 100) = 0$$

s^3	1	80
s^2	17	$1000K_1 + 100$
s^1	$17 \times 80 - (1000K_1 + 100)$	
s^0	$(1000K_1 + 100)$	

$$1360 - (1000K_1 + 100) > 0$$

$$(1000K_1 + 100) > 0$$

$$-0.1 < K_1 < 1.26$$

当 $K_1=10$ 时，系统不稳定

所以不存在使 $e_{ssn}=-0.099$ 的 K_1 值

3.5 系统综合设计

·**例1:** 已知单位反馈系统的开环传递函数 $G(s) = \frac{K}{s(Ts + 1)}$

·试选择参数K及T值以满足下列指标

· (1) 当 $r(t)=t$ 时, 系统的稳态误差 $e_{ss} \leq 0.02$;

· (2) 当 $r(t)=1(t)$ 时, 系统的动态性能指标 $\sigma_p\% \leq 40\%$,
 $t_s \leq 0.3s (\Delta=5\%)$

·解:
$$e_{ss} = \frac{1}{K} \leq 0.02$$

·开环放大系数 $K \geq 50$, 现取 $K=51$ 。

$$G(s) = \frac{K/T}{s(s + 1/T)} = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\zeta\omega_n)}$$

·故有
$$T = \frac{1}{2\zeta\omega_n} \quad \omega_n^2 = \frac{K}{T} \quad \omega_n = 2K\zeta$$

$$T = \frac{1}{2\zeta\omega_n} \quad \omega_n = 2K\zeta \quad K = 51$$

·取 $\sigma_p\% = 40\%$

$$\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \ln \frac{1}{\sigma_p} = \ln \frac{1}{0.4} = 0.916$$

·解得 $\zeta = 0.28$

$$\omega_n = 2K\zeta = 28.56 \text{ rad/s}$$

·此时

$$t_s = \frac{3}{\zeta\omega_n} = 0.375 \text{ s} > 0.3 \text{ s}$$

· t_s 不满足性能指标，重新选取参数。

·重新选取参数的方向：可以增大 ζ 或 ω_n

·调节时间长一般是平稳性不够好

·可以降低超调量

$$T = \frac{1}{2\zeta\omega_n} \quad \omega_n = 2K\zeta \quad K = 51$$

·取 $\sigma_p\% = 30\%$ $\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \ln \frac{1}{\sigma_p} = \ln \frac{1}{0.3} = 1.204$

·解得 $\zeta = 0.358$ $\omega_n = 2K\zeta = 36.52$

·此时 $t_s = \frac{3}{\zeta\omega_n} = 0.23$

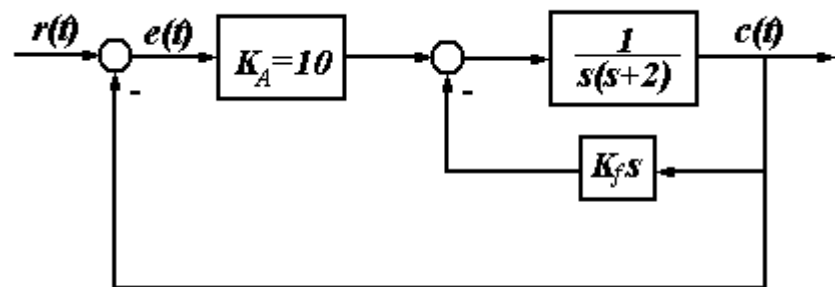
·满足性能指标，最后得到所选参数为

$$K = 51 \quad T = 0.04$$

系统设计——根据给出的性能指标确定参数（一般原则）

- ✓ 根据稳态误差或稳定性求出K的范围；
- ✓ 再根据动态指标给出主导极点后，确定二阶参数；

·例2：已知系统结构图如图所示



(1) 当 $K_f=0$ 时，试确定系统的阻尼比、自然振荡频率，并计算此时单位斜坡输入时的稳态误差。

(2) 当 $\zeta=0.6$ 时，试确定系统中 K_f 值和单位斜坡输入时的稳态误差。

(3) 若要使 $\zeta=0.6$ 时单位斜坡输入下的稳态误差 $e_{ss}=0.2$ ；试确定系统中 K_f 值和 K_A 值。

解： (1)

$$G_K(s) = \frac{10}{s(s+2)} \quad \omega_n = \sqrt{10} = 3.16 \quad \zeta = 0.316$$

$$e_{ss} = \frac{1}{K} = 0.2$$

$$(2) \quad G_K(s) = 10 \times \frac{\frac{1}{s(s+2)}}{1 + \frac{K_f s}{s(s+2)}} = \frac{10}{s(s+2) + K_f s} = \frac{10}{s[s + (2 + K_f)]}$$

$$K_f = 0 \quad \omega_n = \sqrt{10} = 3.16 \quad \zeta = 0.316 \quad e_{ss} = \frac{1}{K} = 0.2$$

$$(2) \quad G_K(s) = 10 \times \frac{\frac{1}{s(s+2)}}{1 + \frac{K_f s}{s(s+2)}} = \frac{10}{s(s+2) + K_f s} = \frac{10}{s[s + (2 + K_f)]}$$

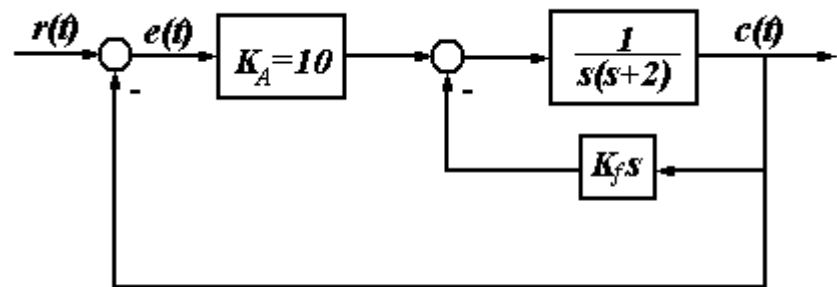
$$\omega_n = \sqrt{10} = 3.16 \quad \zeta = \frac{2 + K_f}{2\omega_n} = 0.6$$

$$K_f = 1.792$$

$$G_K(s) = \frac{10}{s(s + 3.792)} \quad e_{ss} = \frac{1}{K} = 0.3792$$

通过速度反馈可以增加阻尼比，但不改变自然振荡频率；
但系统开环放大系数减小，稳态误差增大。
速度反馈也是有弱点的。

(3) 若要使 $\zeta=0.6$ 时单位斜坡输入下的稳态误差 $e_{ss}=0.2$ ；试确定系统中 K_f 值和 K_A 值。在



$$G_K(s) = \frac{K_A}{s[s + (2 + K_f)]}$$

$$\omega_n = \sqrt{K_A} \quad \zeta = \frac{2 + K_f}{2\sqrt{K_A}} = 0.6 \quad e_{ss} = \frac{2 + K_f}{K_A} = 0.2$$

联立求解

$$K_f = 5.12 \quad K_A = 36$$

$$G_K(s) = \frac{36}{s(s + 7.12)}$$

在速度反馈中，由于稳态误差增大，要保持稳态性能不变必须增加前向通道的增益。

第三章小结

稳定性

含义：系统恢复平衡点的能力；

针对平衡点定义稳定性的；

对于线性定常系统，定义域范围内平衡点只有一个，

所以平衡点的稳定性就是系统的稳定性；

充要条件（线性定常系统）

所有特征根在 s 平面的左半平面。

劳斯判据

会列劳斯表

两种特殊情况

会判别相对稳定性

赫尔维茨判据

会列赫尔维茨矩阵

稳态性能

- ❖ 在系统稳定的前提下才有意义。
- ❖ 直接方法：求出误差的拉氏变换，用终值定理求
- ❖ 对于标准结构和标准定义的误差
 - 参考输入引起的稳态误差与系统型别和输入形式有关
 - 扰动输入引起的稳态误差与扰动作用点以前的环节型别以及输入形式有关
 - 消除或减小稳态误差的方法

动态性能——求出系统输出响应

直接方法——求出输出的拉氏变换，然后部分分式展开，求反拉氏变换。

典型一阶系统

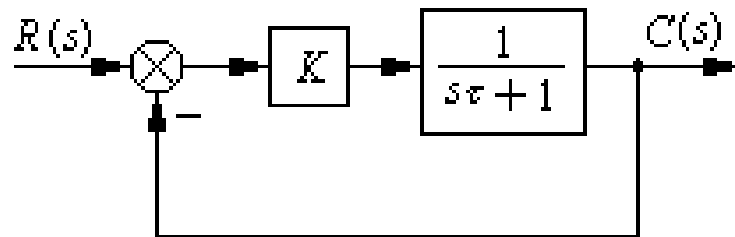
$$c(t) = \frac{K}{K+1} (1 - e^{-t/T}) \quad t \geq 0$$

$$T = \frac{\tau}{K+1}$$

$$\cdot t_r = 2.2T \quad t_d = 0.69T$$

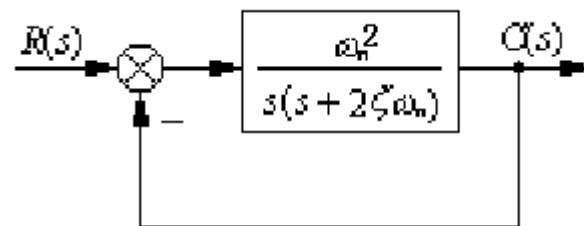
$$\cdot t_s = 3T \text{ (95\%)} \quad \text{或} \quad t_s = 4T \text{ (98\%)}$$

$$e(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \frac{1}{K+1}$$



典型二阶系统

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$



欠阻尼二阶性能指标结论:

$$N = \frac{(3 \sim 4)\sqrt{1-\zeta^2}}{2\pi\zeta}$$

$$\sigma_p \% = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100\%$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$t_r = \frac{\pi - \theta}{\omega_d}$$

$$t_s = \frac{3}{\zeta\omega_n} \sim \frac{4}{\zeta\omega_n}$$

带闭环零点的动态性能指标

$$G_B = \frac{\omega_n^2}{z} \cdot \frac{(s+z)}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$t_r = \frac{\pi - \varphi - \theta}{\omega_d} \quad t_p = \frac{\pi - \varphi}{\omega_d}$$

$$\sigma_p \% = \frac{1}{\zeta} \sqrt{\zeta^2 - 2\gamma\zeta^2 + \gamma^2} \cdot e^{-\frac{(\pi - \varphi)\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}}} \times 100\%$$

$$\gamma = \frac{\zeta\omega_n}{z}$$

$$t_s \approx \frac{(3 \sim 4) + \ln(l/z)}{\zeta\omega_n}$$

$$l = \sqrt{(z - \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2}$$

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$

$$\theta = \arccos \zeta$$

$$\varphi = \arctg \frac{\omega_d}{z - \zeta\omega_n}$$

高阶系统

主导极点和偶极子的概念；

主导极点以外的极点什么情况下可以忽略；

不能忽略的闭环极点对系统的影响：减少超调量

不能忽略的闭环零点对系统的影响：增大超调量

系统设计——根据给出的性能指标确定参数；（一般原则）

- ✓ 根据稳态误差或稳定性求出 K 的范围；
- ✓ 再根据动态指标给出主导极点后，确定二阶参数；



matlab

用Matlab计算时间响应

impulse(sys) 脉冲响应

step(sys) 阶跃响应

lsim(sys,u,t) 任何响应

root(sys,den{1})求闭环特征方程的根

[r,p,k] = Residue(num, den) 求各动态分量的系数

其中**p**为动态分量，**r**为对应的系数,**k**为直接项

如

$$y(t) = 4e^{-2t} + 3e^{2t} - 4e^{-3t}$$

$$p = [-2 \quad 2 \quad -3], r = [4 \quad 3 \quad -4]$$

```
n=[1]
```

```
d=[1 1 0]
```

```
[r, p, k]=residue(n, d)
```

```
s=tf(n, d)
```

```
s1=feedback(s, 1)
```

```
t=0:0.01:5;
```

```
u=t;
```

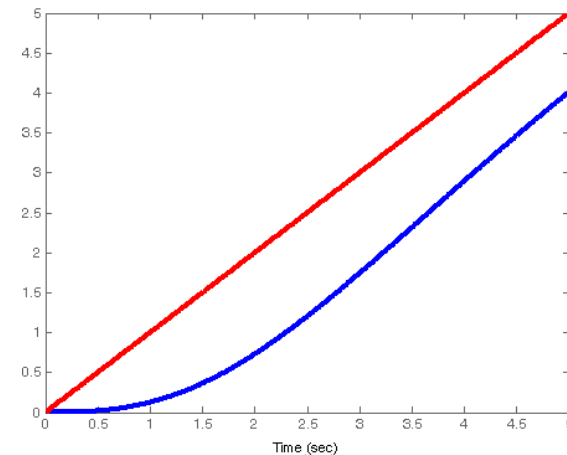
```
lsim(s1, u, t)
```

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

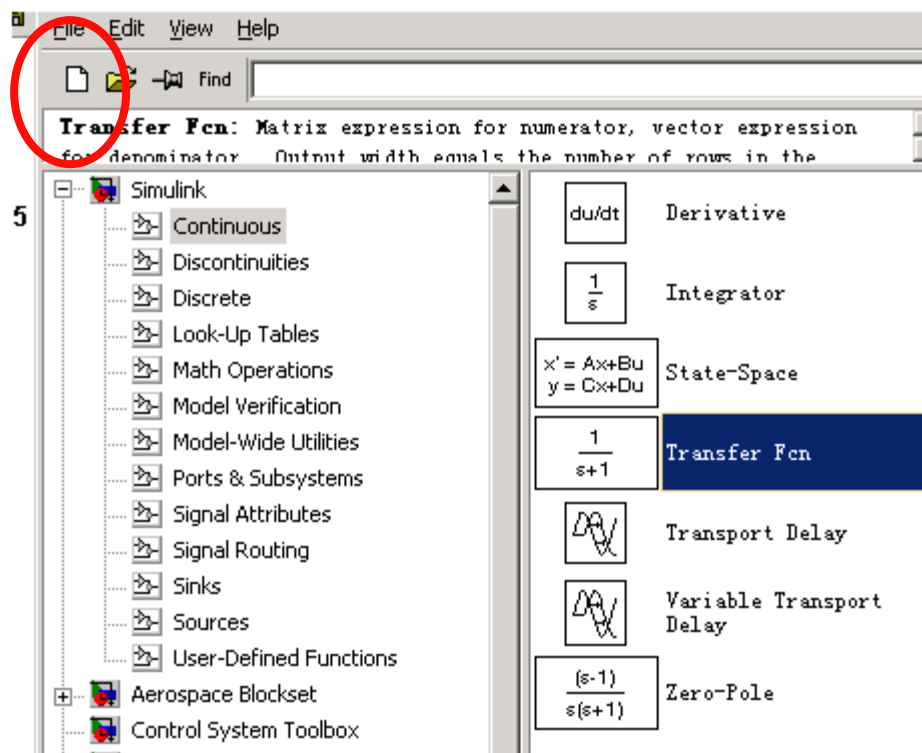
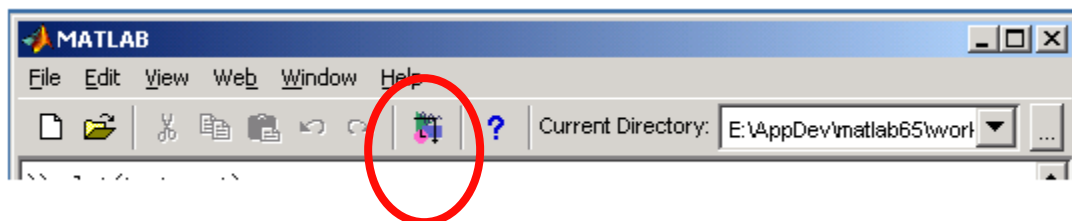
$$G(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{(s+1)}$$

$$\begin{array}{ccc} r = & p = & k = \\ & -1 & -1 \\ & 1 & 0 \end{array} \quad []$$

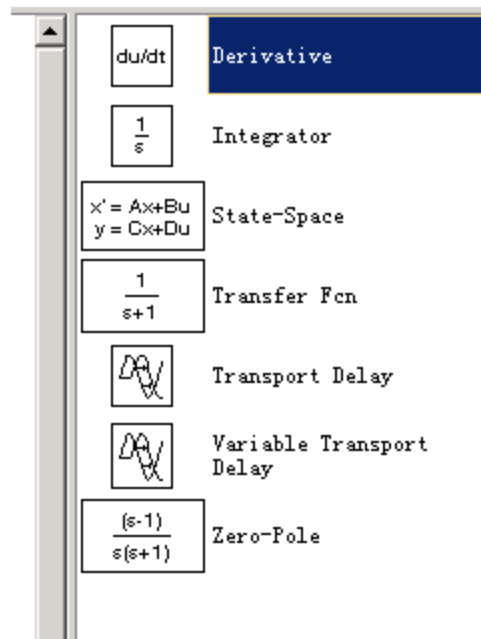
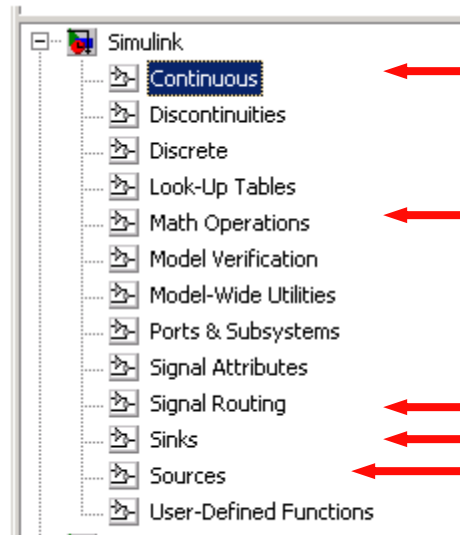
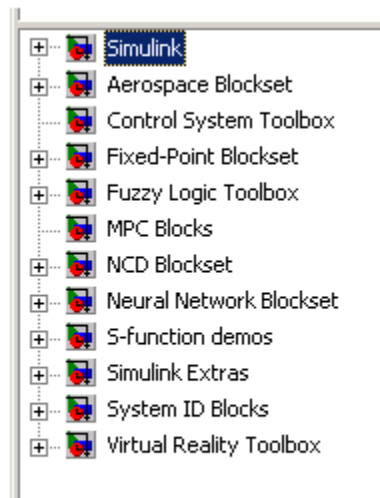
$$G_B(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1}$$



可以在simulink平台进行模块化的仿真



新建文件

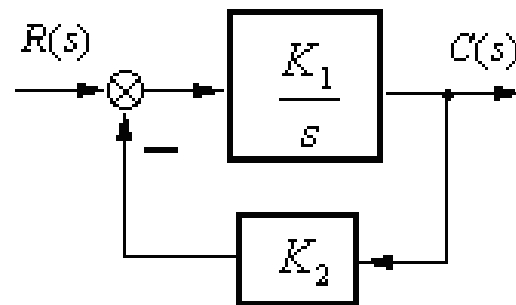




作业

补3-1、求下列函数的拉氏反变换

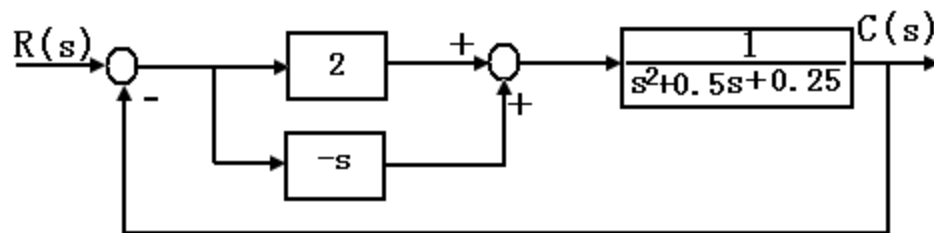
$$F(s) = \frac{1}{s(s^2 + 2s + 2)}$$



补3-2、一阶系统方块图如图所示。要求系统闭环放大系数 $K=2$ ，调节时间 $t_s \leq 0.4s$ 试确定参数 K_1, K_2 的值。

P89 3-3

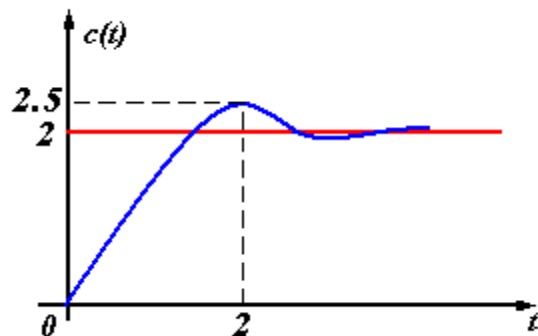
补3-3、设一系统如图所示



- 1) 求闭环传递函数 $\frac{C(s)}{R(s)}$ ，并在 s 平面上画出零极点分布图；
- 2) 当 $r(t)$ 为单位阶跃函数时，求 $c(t)$ 并作出 $c(t)$ 与 t 的关系曲线

P89 3—4

补3-4、典型二阶系统单位阶跃响应曲线如图所示，试确定系统的闭环传递函数。



补充3-5、设典型二阶系统在单位阶跃函数作用下其输出响应为

$$c(t) = 10 - 12.5 e^{-1.2t} \sin(1.6t + 53.1^\circ)$$

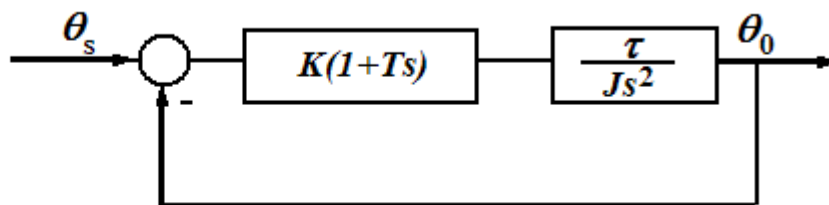
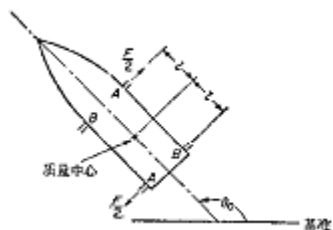
试求系统的超调量，峰值时间与调节时间。

补3-6、设单位反馈控制系统的开环传递函数是

$$G(s) = \frac{K}{(0.2s + 1)(0.4s + 1)}$$

当K分别取为1、3、7时，试列表比较系统的自然频率、阻尼比、上升时间、峰值时间、调节时间、超调量，并指出K值变化对系统产生的影响。

补3-7、图(a)是一个卫星姿态控制系统原理图，图(b)所示是系统的方块图，其中 $\frac{K\tau}{J} = \frac{2}{9} \text{ rad}^2 / \text{s}^2$ 试确定微分时间常数的值，以使得阻尼比 ζ 是0.707。并计算超调量及上升时间和调节时间。



P89 3-6

补3-8: 系统的特征方程如下, 试用劳斯判据判断系统的稳定性, 并求系统的特征根。

$$s^6 + 2s^5 + 8s^4 + 12s^3 + 20s^2 + 16s + 16 = 0$$

P90 3-15 3)

P90 3-16 2) 3)

P90 3-17

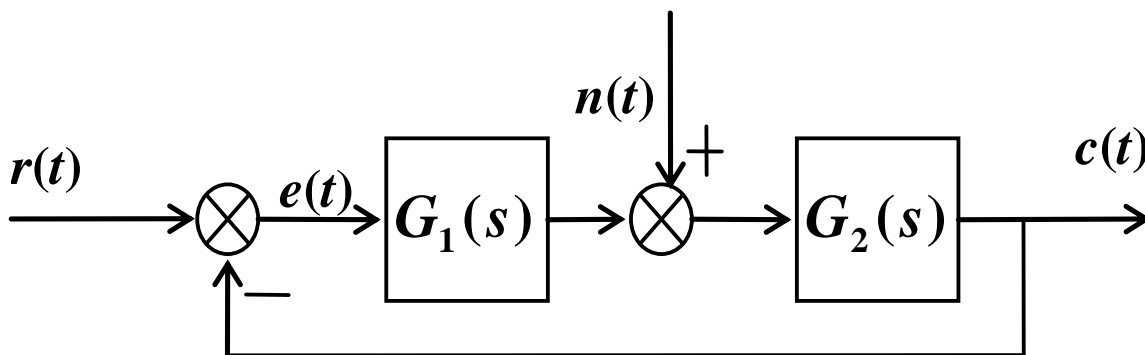
P89 3-7 3-8

P90 3-9 3-10

补3-9、已知某单位反馈系统的结构图如图所示，其中

$$G_1(s) = \frac{K}{s^2} \quad G_2(s) = \frac{s+1}{s^2+6s+7}$$

试确定参数K的范围，使得闭环系统在输入 $r(t) = 2 + 2t + t^2$ 和干扰 $n(t) = 2t^2$ 的共同作用下的稳态误差小于20。



补3-9、老版书作业3—18:

欲设计一个三阶闭环控制系统, 使得系统对阶跃输入的响应具有欠阻尼特性, 且满足下面的设计要求: $10\% < \text{超调量} < 20\%$, 调整时间 $< 0.6\text{s}$ (5%);

- 1) 试确定系统主导极点的配置区域;
- 2) 如果系统的主导极点为共轭复极点, 试确定第三个实极点的最小值;
- 3) 如果系统为单位反馈, 按调整时间为 0.6s , 超调量为 20% , 试确定系统的前向传递函数。