# 第二十五章　存贮论

存贮论（或称为库存论）是定量方法和技术最早的领域之一，是研究存贮系统的性质、运行规律以及如何寻找最优存贮策略的一门学科，是运筹学的重要分支。存贮论的数学模型一般分成两类：一类是确定性模型，它不包含任何随机因素，另一类是带有随机因素的随机存贮模型。

## §1　存贮模型中的基本概念

所谓存贮实质上是将供应与需求两个环节以存贮中心联结起来，起到协调与缓和供需之间矛盾的作用。存贮模型的基本形式如图 1 所示。


图 1　存贮问题基本模型

1．存贮问题的基本要素

（1）需求率：单位时间内对某种物品的需求量，用 $D$ 表示。

（2）订货批量：一次订货中，包含某种货物的数量，用 $Q$ 表示。

（3）订货间隔期：两次订货之间的时间间隔，用 $T$ 表示。

2．存贮模型的基本费用

（1）订货费：每组织一次生产、订货或采购的费用，通常认为与定购数量无关，记为 $C_D$。

（2）存贮费：所有用于存贮的全部费用，通常与存贮物品的多少和时间长短有关。单位存贮费记为 $C_P$。

（3）短缺损失费：由于物品短缺所产生的一切损失费用，通常与损失物品的多少和短缺时间的长短有关，记为 $C_S$。

3．存贮策略

所谓一个存贮策略，是指决定什么情况下对存贮进行补充，以及补充数量的多少。下面是一些比较常见的存贮策略。

（1）$t$ 循环策略：不论实际的存贮状态如何，总是每隔一个固定的时间 $t$，补充一个固定的存贮量 $Q$。

（2）$(t,S)$ 策略：每隔一个固定的时间 $t$ 补充一次，补充数量以补足一个固定的最大存贮量 $S$ 为准。因此，每次补充的数量是不固定的，要视实际存贮量而定。当存

贮（余额）为$I$时，补充数量为$Q=S-I$。

（3）$(s,S)$策略：当存贮（余额）为$I$，若$I>s$，则不对存贮进行补充；若$I\le s$，则对存贮进行补充，补充数量$Q=S-I$。补充后达到最大存贮量$S$。$s$称为订货点（或保险存贮量、安全存贮量、警戒点等）。在很多情况下，实际存贮量需要通过盘点才能得知。若每隔一个固定的时间$t$盘点一次，得知当时存贮$I$，然后根据$I$是否超过订货点$s$，决定是否订货、订货多少，这样的策略称为$(t,s,S)$策略。

## §2　无约束的确定型存贮模型

我们首先考察经济订购批量存贮模型。

所谓经济订购批量存贮模型（economic ordering quantity, EOQ）是指不允许缺货、货物生产（或补充）的时间很短（通常近似为 0）的模型。

### 2.1　模型一：不允许缺货，补充时间极短—基本的经济订购批量存贮模型

基本的经济订购批量存贮模型有以下假设：

（1）短缺费为无穷，即$C_S=\infty$；

（2）当存贮降到零后，可以立即得到补充；

（3）需求是连续的、均匀的，即需求速度（单位时间的需求量）$D$为常数；

（4）每次的订货量不变，订购费不变；

（5）单位存贮费为$C_p$。

由上述假设，存贮量的变化情况如图 2 所示。

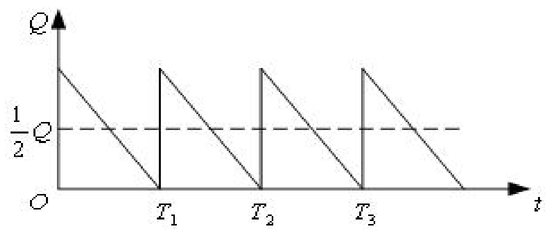


图 2　EOQ 模型的存贮量曲线

在每一个周期（$T$）内，最大的存贮量为$Q$，最小的存贮量为 0，且需求是连续均匀的，因此在一个周期内，其平均存贮量为$\frac{1}{2}Q$，存贮费用为$\frac{1}{2}C_PQ$。

一次订货费为$C_D$，那么在一个周期（$T$）内的平均订货非为$C_D/T$。由于在最初时刻，订货量为$Q$，在$T$时刻，存贮量为 0，而且单位时间的需求量为$D$且连续均匀变化，因此，得到订货量$Q$、需求量$D$和订货周期$T$之间的关系$T=\dfrac{Q}{D}$。

由此计算出一个单位时间内的平均总费用

$$C=\frac{1}{2}C_PQ+\frac{C_DD}{Q} \tag{1}$$

对式（1）求导数，并令其为 0，即

$$\frac{dC}{dQ}=\frac{1}{2}C_P-\frac{C_DD}{Q^2}=0 \tag{2}$$

得到费用最小的订货量

$$Q^*=\sqrt{\frac{2C_DD}{C_P}} \tag{3}$$

最佳订货周期

$$T^*=\frac{Q^*}{D}=\sqrt{\frac{2C_D}{C_PD}} \tag{4}$$

最小费用

$$C^*=\frac{1}{2}C_PQ^*+\frac{C_DD}{Q}=\sqrt{2C_DC_PD} \tag{5}$$

公式（3）称为经济订购批量（economic ordering quantity，简写 EOQ）公式，也称为经济批量（economic lot size）公式。

例 1　某商品单位成本为 5 元，每天保管费为成本的 0.1%，每次定购费为 10 元。已知对该商品的需求是 100 件/天，不允许缺货。假设该商品的进货可以随时实现。问应怎样组织进货，才能最经济。

解　根据题意，$C_p=5\times0.1\%=0.005$（元/件・天），$C_D=10$ 元，$D=100$ 件/天。

由式（3）～（5），有

$$Q^*=\sqrt{\frac{2C_DD}{C_P}}=\sqrt{\frac{2\times10\times100}{0.005}}=632\text{（件）}$$

$$T^* = \frac{Q^*}{D} = \frac{632}{100} = 6.32 \text{（天）}$$

$$C^* = \sqrt{2C_D C_P D} = 3.16 \text{（元/天）}$$

所以，应该每隔 6.32 天进货一次，每次进货该商品 632 件，能使总费用（存贮费和定购费之和）为最少，平均约 3.16 元/天。

进一步研究，全年的订货次数为

$$n = \frac{365}{6.32} = 57.75 \text{（天）}$$

但 $n$ 必须为正整数，故还需要比较 $n = 57$ 与 $n = 58$ 时全年的费用。

编写如下LINGO程序：

```
model:
sets:
times/1 2/:n,Q,C;
endsets
data:
n=57 58;
enddata
C_D=10;
D=100*365;
C_P=0.005*365;
@for(times:n=D/Q;C=0.5*C_P*Q+C_D*D/Q);
end
```

求得全年组织 58 次订货费用少一点。

利用 LINGO 软件，我们可以直接求出问题的整数解。

LINGO 程序如下：

```
model:
sets:
times/1..100/:C,Q; !100不是必须的，通常取一个适当大的数就可以了;
endsets
C_D=10;
D=100*365;
C_P=0.005*365;
@for(times(i):Q(i)=D/i;C(i)=0.5*C_P*Q+C_D*D/Q);
C_min=@min(times:C);
Q_best=@sum(times(i):Q(i)*(C(i) #eq# C_min));
N_best=D/Q_best;
end
```

求得一年组织 58 次订货，每次的订货量为 629.3 件，最优费用为 1154.25 元。

2.2　模型二：允许缺货，补充时间较长—经济生产批量存贮模型

模型假设条件：

（1）需求是连续的，即需求速度 $D$ 为常数；

（2）补充需要一定时间。即一旦需要，生产可立刻开始，但生产需要一定周期。设生产是连续均匀的，即生产速度 $P$ 为常数。同时，设 $P > D$；

（3）单位存贮费为 $C_P$，单位缺货费为 $C_S$，订购费为 $C_D$。不考虑货物价值。

存贮状态图见图 3。

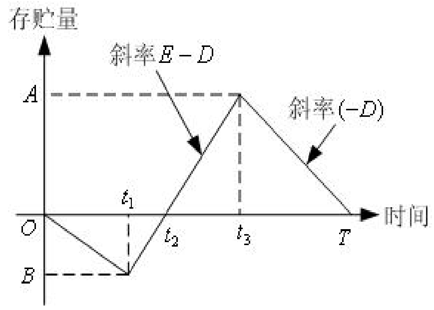


图 3　允许缺货且补充时间较长的存贮模型

$[0,T]$ 为一个存贮周期，$t_1$ 时刻开始生产，$t_3$ 时刻结束生产。

$[0,t_2]$ 时间内存贮为 0，$t_1$ 时达到最大缺货量 $B$，$[t_1,t_2]$ 时间内产量一方面以速度 $D$ 满足需求，另一方面以速度 $P-D$ 补充 $[0,t_1]$ 时间内的缺货，至 $t_2$ 时刻缺货补足。

$[t_2,t_3]$ 时间内产量一方面以速度 $D$ 满足需求，另一方面以速度 $P-D$ 增加存贮。至 $t_3$ 时刻达到最大存贮量 $A$，并停止生产。

$[t_3,T]$ 时间内以存贮满足需求，存贮以速度 $D$ 减少。至 $T$ 时刻存贮降为零，进入下一个存贮周期。

下面，根据模型假设条件和存贮状态图，首先导出 $[0,T]$ 时间内的平均总费用（即费用函数），然后确定最优存贮策略。

从 $[0,t_1]$ 看，最大缺货量 $B = Dt_1$；从 $[t_1,t_2]$ 看，最大缺货量 $B = (P-D)(t_2 - t_1)$。

故有 $Dt_1=(P-D)(t_2-t_1)$，从中解出：

$$t_1=\frac{P-D}{P}t_2 \tag{6}$$

从 $[t_2,t_3]$ 看，最大存贮量 $A=(P-D)(t_3-t_2)$；从 $[t_3,T]$ 看，最大存贮量 $A=D(T-t_3)$。故有 $(P-D)(t_3-t_2)=R(T-t_3)$，从中解得

$$t_3-t_2=\frac{D}{P}(T-t_2) \tag{7}$$

易知，在 $[0,T]$ 时间内：

存贮费为 $\frac{1}{2}C_P(P-D)(t_3-t_2)(T-t_2)$；

缺货费为 $\frac{1}{2}C_S Dt_1t_2$；

定购费为 $C_D$。

故 $[0,T]$ 时间内平均总费用为

$$C(T,t_2)=\frac{1}{T}\left[\frac{1}{2}C_P(P-D)(t_3-t_2)(T-t_2)+\frac{1}{2}C_s Dt_1t_2+C_D\right]$$

故将（6）和（7）代入，整理后得

$$C(T,t_2)=\frac{(P-D)D}{2P}\left[C_pT-2C_Pt_2+(C_P+C_S)\frac{t_2^2}{T}\right]+\frac{C_D}{T} \tag{8}$$

解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial C(T,t_2)}{\partial T}=0\\ \dfrac{\partial C(T,t_2)}{\partial t_2}=0\end{cases}$$

可得

$$T^*=\sqrt{\frac{2C_D(C_P+C_S)}{DC_PC_S(1-\frac{D}{P})}}$$

$$t_2^* = \frac{C_P}{C_P + C_S} T^*$$

容易证明，此时的费用$C(T^*, t_2^*)$是费用函数$C(T, t_2)$的最小值。

因此，模型的最优存贮策略各参数值为：

最优存贮周期$T^* = T^* = \sqrt{\frac{2C_D(C_P + C_S)}{DC_P C_S(1 - \frac{D}{P})}}$ （9）

经济生产批量$Q^* = DT^* = \sqrt{\frac{2C_D D(C_P + C_S)}{C_P C_S(1 - \frac{D}{P})}}$ （10）

缺货补足时间$t_2^* = \frac{C_P}{C_P + C_S} T^* = \sqrt{\frac{2C_D C_P D}{C_S(C_P + C_S)(1 - \frac{D}{P})}}$ （11）

开始生产时间$t_1^* = \frac{P - D}{P} t_2^* = \sqrt{\frac{2C_D C_P D(1 - \frac{D}{P})}{C_S(C_P + C_S)}}$ （12）

结束生产时间$t_3^* = \frac{D}{P} T^* + (1 - \frac{D}{P}) t_2^*$ （13）

最大存贮量$A^* = D(T^* - t_3^*)$ （14）

最大缺货量$B^* = Dt_1^*$ （15）

平均总费用$C^* = \frac{2C_D}{T^*}$ （16）

例 2　有一个生产和销售图书设备的公司，经营一种图书专用设备，基于以往的销售记录和今后市场预测。估计今后一年的需求量为 4900 个，由于占用资金的利息以及存贮库房和其它人力物力的费用，存贮一个书架一年要花费 1000 元。这种书架是该公司自己生产的，每年的生产量 9800 个，而组织一次生产要花费设备调试等生产准备费 500 元。如果允许缺货，缺货费为每年每件 2000 元。该公司为了把成本降到最低，应如何组织生产？要求出其生产、存贮周期，每个周期的最优生产量，以及最少的年总费用。

解　根据题意知，$D = 4900$，$C_P = 1000$，$P = 9800$，$C_D = 500$，$C_S = 2000$，

利用式（9）～（13），（16）求相关的指标。

编写的 LINGO 程序如下：

```
model:
D=4900;
C_P=1000;
P=9800;
C_D=500;
C_S=2000;
T1=(2*C_D*(C_P+C_S)/(D*C_P*C_S*(1-D/P)))^0.5;  !单位为年;
T=T1*365;  !单位为天;
Q=D*T1;
T_S=C_P*T/(C_P+C_S);  !求缺货时间;
T_P=D*T/P;   ! 求生产周期;
C=2*C_D/T1;  ! 求年总费用;
end
```

求得每个周期为 9 天，其中 9 天中有 4.5 天在生产，每次的生产量为 121 件，而且缺货的时间有 3 天。总的费用（包括存贮费、订货费和缺货费）为 4044.52 元。

可以把模型一看作模型二的特殊情况。在模型二中，取消允许缺货和补充需要一定时间的条件，即 $C_S \to \infty$，$P \to \infty$，则模型二就是模型一。事实上，如将 $C_S \to \infty$ 和 $P \to \infty$ 代入模型二的最优存贮策略各参数公式，就可得到模型一的最优存贮策略。只是必须注意，按照模型一的假设条件，应有

$$t_1^* = t_2^* = t_3^* = 0\text{，}\quad A^* = Q^*\text{，}\quad B^* = 0$$

### 2.3　模型三：不允许缺货，补充时间较长—基本的经济生产批量存贮模型

在模型二的假设条件中，取消允许缺货条件（即设 $C_s \to \infty$，$t_2 = 0$），就成为模型三。因此，模型三的存贮状态图和最优存贮策略可以从模型二直接导出。

模型三的存贮状态见图 4。下面我们用另外的方法导出模型三的最优存贮策略。

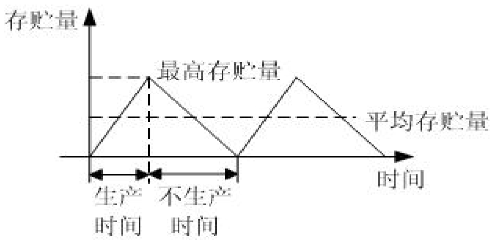


图 4　经济生产批量模型存贮量的变化情况

经济生产批量存贮模型除满足基本假设外，其最主要的假设是：当存贮降到零后，

开始进行生产，生产率为 $P$ ，且 $P>D$ ，即生产的产品一部分满足需求，剩余部分才作为存贮。

设生产批量为 $Q$ ，生产时间为 $t$ ，则生产时间与生产率之间的关系为

$$t=\frac{Q}{P}$$

对于经济生产批量模型，有

$$\text{最高存贮量}=(P-D)t=(P-D)\frac{Q}{P}=(1-\frac{D}{P})Q \tag{17}$$

而平均存贮量是最高存贮量的一半，关于平均固定生产费与经济定购模型中的平均订货费相同，同样是 $\frac{C_D D}{Q}$ 。这样，平均总费用为

$$C=\frac{1}{2}(1-\frac{D}{P})QC_P+\frac{C_D D}{Q} \tag{18}$$

类似于前面的推导，得到最优生产量、最优存贮周期、最大存贮量和最优存贮费用

$$Q^*=\sqrt{\frac{2C_D D}{C_P(1-\frac{D}{P})}} \tag{19}$$

$$T^*=\frac{Q^*}{D}=\sqrt{\frac{2C_D P}{C_P D(P-D)}} \tag{20}$$

$$A^*=(1-\frac{D}{P})Q^*=\sqrt{\frac{2(1-\frac{D}{P})C_D D}{C_P}} \tag{21}$$

$$C^*=\frac{2C_D}{T^*}=\sqrt{2(1-\frac{D}{P})C_P C_D D} \tag{22}$$

例 3　商店经销某商品，月需求量为 30 件，需求速度为常数。该商品每件进价 300 元，月存贮费为进价的 2%。向工厂订购该商品时订购费每次 20 元，定购后需 5 天才开始到货，到货速度为常数，即 2 件/天。求最优存贮策略。

解　本例特点是补充除需要入库时间（相当于生产时间）外，还需要考虑拖后时间。因此，订购时间应在存贮降为零之前的第 5 天。除此之外，本例和模型三的假设条件完全一致。本例的存贮状态见图 5。

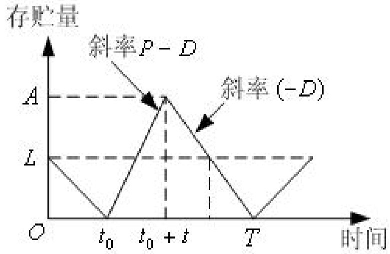


图 5　拖后时间的存贮模型

从图 5 可见，拖后时间为$[0,t_0]$，存贮量$L$应恰好满足这段时间的需求，故$L=Dt_0$。

根据题意，有$P=2$件/天，$D=1$件/天，$C_P=300\times 2\%\times\frac{1}{30}=0.2$元/天·件，$C_D=20$元/次，$t_0=5$天，$L=1\times 5=5$件。代入（19）～（22），求得

$$Q^*=20\text{件}，T^*=20\text{天}，A^*=10\text{件}，C^*=2\text{元}$$

在本例中，$L$称为订货点，其意义是每当发现存贮量降到$L$或更低时就定购。在存贮管理中，称这样的存贮策略为“定点订货”。类似地，称每隔一个固定时间就订货的存贮策略为“定时订货”，称每次订购量不变的存贮策略为“定量订货”。

### 2.4　模型四：允许缺货，补充时间极短的经济订购批量存贮模型

在模型二的假设条件中，取消补充需要一定时间的条件（即设$P\to\infty$），就成为模型四。因此，和模型三一样，模型四的存贮状态图和最优存贮策略也可以从模型二直接导出。

模型四的存贮状态图见图 6。下面我们用另外的方法导出模型四的最优存贮策略。

设$T$仍为时间周期，其中$T_1$表示$T$中不缺货时间，$T_2$表示$T$中缺货时间，即$T_1+T_2=T$。$S$为最大缺货量,$C_s$为缺货损失的单价，$Q$仍为每次的最高订货量，则$Q-S$为最高存贮量，因为每次得到订货量$Q$后，立即支付给顾客最大缺货$S$。

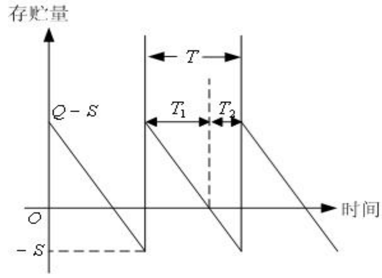


图 6　允许缺货的经济订购批量存贮模型的存贮情况

以一个周期为例，计算出平均存贮量、平均缺货量和平均总费用。

$$平均存贮量=\frac{\frac{1}{2}(Q-S)T_1+0T_2}{T}=\frac{(Q-S)T_1}{2T} \tag{23}$$

其中

$$T_1=\frac{Q-S}{D},\ T_2=\frac{S}{D},\ T=\frac{Q}{D} \tag{24}$$

由此计算出

$$平均存贮量=\frac{(Q-S)T_1}{2T}=\frac{(Q-S)^2}{2Q}, \tag{25}$$

$$平均缺货量=\frac{ST_2}{2T}=\frac{S^2}{2Q} \tag{26}$$

因此，允许缺货的经济订购批量存贮模型的平均总费用

$$C=\frac{C_P(Q-S)^2}{2Q}+\frac{C_D D}{Q}+\frac{C_S S^2}{2Q} \tag{27}$$

求式（10）关于 $Q$ 和 $S$ 的偏导数，并求出其极小点

$$Q^*=\sqrt{\frac{2C_D D(C_P+C_s)}{C_P C_s}} \tag{28}$$

$$S^*=\frac{C_P}{C_P+C_s}Q^* \tag{29}$$

最佳订货周期

$$T^*=\frac{Q^*}{D}=\sqrt{\frac{2C_D(C_P+C_s)}{C_P C_s D}} \tag{30}$$

最大存贮量

$$A^* = Q^* - S^* = \sqrt{\frac{2C_D C_S D}{C_P(C_P + C_s)}} \tag{31}$$

最小费用

$$C^* = \frac{2C_D}{T^*} = \frac{C_P(Q^* - S^*)^2}{2Q^*} + \frac{C_D D}{Q^*} + \frac{C_S(S^*)^2}{2Q^*} \tag{32}$$

例 4 某电器公司的生产流水线需要某种零件，该零件需要靠订货得到。已知批量订货的订货费 12000 元/次，每个零件的存贮机费用为 0.3 元/（件·月），每个零件的缺货损失为 1.1 元/（件·月），设该零件的每月需求量为 8000 件。求全年的订货次数、订货量以及最优存贮费用。

解 根据题意，取一年为单位时间，由已知条件，订货费 $C_D = 12000$ 元/次，存贮费 $C_P = 3.6$ 元/（件·年），缺货损失费 $C_S = 13.2$ 元/（件·年），需求率 $D = 96000$ 件/年。该存贮问题可由一个整数规划来表示

$$\min \frac{C_P(Q-S)^2}{2Q} + \frac{C_D D}{Q} + \frac{C_S S^2}{2Q}$$

$$\text{s.t.} \quad n = \frac{D}{Q},$$

$$Q, S \ge 0,\quad n \ge 0 \text{ 且取整数}$$

编写 LINGO 程序如下：

```
model:
min=0.5*C_P*(Q-S)^2/Q+C_D*D/Q+0.5*C_S*S^2/Q;
n=D/Q;@gin(n);
data:
C_D=12000;
D=96000;
C_P=3.6;
C_S=13.2;
enddata
end
```

求得全年组织 3 次订货，每次的订货量为 32000 件，最大缺货量为 6857.141 件，最优费用为 81257.14 元。

对于确定型存贮问题，上述四个模型是最基本的模型。其中，模型一、三、四又

可看作模型二的特殊情况。在每个模型的最优存贮策略的各个参数中，最优存贮周期$T$是最基本的参数，其它各个参数和它的关系在各个模型中都是相同的。根据模型假设条件的不同，各个模型的最优存贮周期$T^*$之间也有明显的规律性。因子$\frac{C_P+C_S}{C_S}$对应了是否允许缺货的假设条件，因子$\frac{P}{P-D}$对应了补充是否需要时间的假设条件。

一个存贮问题是否允许缺货或补充是否需要时间，完全取决于对实际问题的处理角度，不存在绝对意义上的不允许缺货或绝对意义上的补充不需要时间。如果缺货引起的后果或损失十分严重，则从管理的角度应当提出不允许缺货的建模要求；否则，可视为允许缺货的情况。至于缺货损失的估计，应当力求全面和精确。如果补充需要的时间相对于存贮周期是微不足道的，则可考虑补充不需要时间的假设条件；否则，需要考虑补充时间。在考虑补充时间时，必须分清拖后时间和生产时间，两者在概念上是不同的。

### 2.5 模型五：经济定购批量折扣模型

所谓经济订购批量折扣模型是经济订购批量存贮模型的一种发展，即商品的价格是不固定的，是随着订货量的多少而改变的。就一半情况而论，物品订购的越多，物品的单价也就越低，因此折扣模型就是讨论这种情况下物品的订购数量。

一年花费的总费用由三个方面组成：年平均存贮费、年平均订货费和商品的购买费用，即

$$C=\frac{1}{2}QC_P(Q)+\frac{C_D D}{Q}+DK(Q) \tag{33}$$

在式（33）中，$K(Q)$是物品的价格，它与物品的订购数量有关，一般是一个分段表示的函数，即

$$K(Q)=\begin{cases} K_1, & 0\le Q\le Q_1 \\ K_2, & Q_1<Q\le Q_2 \\ \vdots & \\ K_m, & Q_{m-1}<Q\le Q_m \end{cases}$$

其中$\{Q_i\}_{1\le i\le m}$是单调递增的，而$\{C_i\}_{1\le i\le m}$是单调递减的。

物品的存贮费$C_P(Q)$与物品的价格有关，通常是价格$K(Q)$的$r$（$0<r<1$）倍，即

$$C_P(Q)=rK(Q) \tag{34}$$

在经济订购批量存贮模型中，也应包含时（33）中的第三项，但当时 $K(Q)=c$ 是常数，因此，第三项也为常数，与目标函数求极值无关，因此，在分析时，没有讨论此项。

对于折扣模型，经济订购批量折扣存贮模型中求最优订购量的公式（3）仍然成立，只不过此时的 $C_P$ 不是常数罢了。假设 $C_P$ 是由式（29）和式（30）确定的，则最优订购量为

$$Q_j^* = \sqrt{\frac{2C_D D}{rK_j}}\,,\quad j=1,2,\cdots,m\,, \tag{35}$$

$$C_j^* = \frac{1}{2} rK_j Q_j^* + \frac{C_D D}{Q_j^*} + K_j D\,,\quad j=1,2,\cdots,m \tag{36}$$

然后再根据 $Q_j^*$ 所在的区间和 $C_j^*$ 的值，选择合适的 $Q_j^*$。实际上，若存在某个 $i\in\{1,2,\cdots,m\}$，使得 $Q_i^*\in[Q_{i-1},Q_i]$，则该 $Q_i^*$ 就为最优订货量。

例 5　某公司计划订购一种商品用于销售。该商品的年销售量为 40000 件，每次订货费为 9000 元，商品的价格与订货量的大小有关，为

$$K(Q)=\begin{cases}35.225, & 0\le Q\le 10000\\ 34.525, & 10000<Q\le 20000\\ 34.175, & 20000<Q\le 30000\\ 33.825, & 30000<Q\end{cases}$$

存贮费是商品价格的 20%。问如何安排订购量与订货时间。

解　按上述方法，编写如下的 LINGO 程序：

```
model:
sets:
range/1..4/:B,K,C_P,Q,EOQ,C; !B是订货量的分界点，Q表示由式（35）计算出的订货量，EOQ是调整后的订货量;
endsets
data:
D=40000; C_D=9000; R=0.2;
B=10000,20000,30000,40000;
K=35.225,34.525,34.175,33.825;
Enddata
@for(range:C_P=R*K;Q=(2*C_D*D/C_P)^0.5);
EOQ(1)=Q(1)-(Q(1)-B(1))*(Q(1)#gt# B(1));
```

```
@for(range(i)|i #gt# 1:EOQ(i)=Q(i)+(B(i-1)-Q(i)+1)*(Q(i) #lt#
B(i-1))-(Q(i)-B(i))*(Q(i) #gt# B(i)));
@for(range:C=0.5*C_P*EOQ+C_D*D/EOQ+K*D);
C_min=@min(range:C);
Q_best=@sum(range:EOQ*(C #eq# C_min));
T_best=Q_best/D;
end
```

求得最优订货量为 10211 件，最优存贮费用为 145151510 元，最优订货周期是平均 0.255 年一次。

比较计算结果中的 Q 值与 EOQ 值，会对程序的理解有很大的帮助。

我们也可以使用如下的LINGO程序求得最优订货量和最优订货周期。

```
model:
sets:
range/1..4/:B,K,C_P,Q; !B是订货量的分界点，Q表示由式（35）计算出的订货量，EOQ是调整后的订货量;
endsets
data:
D=40000; C_D=9000; R=0.2;
B=10000,20000,30000,40000;
K=35.225,34.525,34.175,33.825;
Enddata
n=@size(range);
@for(range:C_P=R*K;Q=(2*C_D*D/C_P)^0.5);
Q_best=Q(1)*(Q(1) #le# B(1))+@sum(range(i)| i #ne# 1 :Q(i)*(Q(i) #gt#
B(i-1) #and# Q(i) #le# B(i)));
T_best=Q_best/D;
end
```

## §3 有约束的确定型存贮模型

### 3.1 带有约束的经济订购批量存贮模型

现在考虑多物品、带有约束的情况。设有 $m$ 种物品，采用下列记号：

（1）$D_i, Q_i, K_i$（$i=1,2,\cdots,m$）分别表示第 $i$ 种物品的单位需求量、每次订货的批量和物品的单价；

（2）$C_D$ 表示实施一次订货的订货费，即无论物品是否相同，订货费总是相同的；

（3）$C_{P_i}$（$i=1,2,\cdots,m$）表示第 $i$ 种产品的单位存贮费；

（4） $J, W_T$ 分别表示每次订货可占用资金和库存总容量；

（5） $w_i$ （$i=1,2,\cdots,m$）表示单位第 $i$ 种物品占用的库容量。

类似于前面的推导，可以得到带有约束的多物品的 EOQ 模型。

3.1.1　具有资金约束的 EOQ 模型

类似前面的分析，对于第 $i$（$i=1,2,\cdots,m$）种物品，当每次订货的订货量为 $Q_i$ 时，单位时间总平均费用为

$$C_i = \frac{1}{2}C_{P_i}Q_i + \frac{C_D D_i}{Q_i}$$

每种物品的单价为 $K_i$，每次的订货量为 $Q_i$，则 $K_iQ_i$ 是该种物品占用的资金。因此，资金约束为

$$\sum_{i=1}^{m} K_iQ_i \le J$$

综上所述，得到具有资金约束的 EOQ 模型

$$\min \quad \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{1}{2}C_{P_i}Q_i + \frac{C_D D_i}{Q_i}\right) \tag{37}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^{m} K_iQ_i \le J \tag{38}$$

$$Q_i \ge 0\text{，}i=1,2,\cdots,m \tag{39}$$

3.1.2　具有库容约束的 EOQ 模型

单位第 $i$ 种物品占用的库容量是 $w_i$，因此，$w_iQ_i$ 是该种物品占用的总的库容量，结合上面的分析，具有库容约束的 EOQ 模型是

$$\min \quad \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{1}{2}C_{P_i}Q_i + \frac{C_D D_i}{Q_i}\right) \tag{40}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^{m} w_iQ_i \le W_T \tag{41}$$

$$Q_i \ge 0\text{，}i=1,2,\cdots,m \tag{42}$$

3.1.3　兼有资金与库容约束的最佳批量模型

结合上述两种模型，得到兼有资金与库容约束的最佳批量模型

$$\min \quad \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{1}{2}C_{P_i}Q_i+\frac{C_D D_i}{Q_i}\right) \tag{43}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^{m}K_i Q_i \le J \tag{44}$$

$$\sum_{i=1}^{m}w_i Q_i \le W_T \tag{45}$$

$$Q_i \ge 0\,,\ i=1,2,\cdots,m \tag{46}$$

对于这三种模型，可以容易地用 LINGO 软件进行求解。

例 6　某公司需要 5 种物资，其供应与存贮模式为确定性、周期补充、均匀消耗和不允许缺货模型。设该公司的最大库容量 $(W_T)$ 为 1500m³，一次订货占用流动资金的上限（$J$）为 40 万元，订货费（$C_D$）为 1000 元。5 种物资的年需求量 $D_i$，物资单价 $K_i$，物资的存贮费 $C_{P_i}$，单位占用库 $w_i$ 如表 1 所示。试求各种物品的订货次数、订货量和总的存贮费用。

表 1　物资需求、单价、存贮费和单位占用库容情况表

| 物资 $i$ | 年需求量 $D_i$ | 单价 $K_i$ (元/件) | 存贮费 $C_{P_i}$ (元/(件·年)) | 单位占用库容 $w_i$（m³/件） |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 600 | 300 | 60 | 1.0 |
| 2 | 900 | 1000 | 200 | 1.5 |
| 3 | 2400 | 500 | 100 | 0.5 |
| 4 | 12000 | 500 | 100 | 2.0 |
| 5 | 18000 | 100 | 20 | 1.0 |

解　设 $n_i$ 是第 $i$（$i=1,2,3,4,5$）中物资的年订货次数，按照带有资金与库容约束的最佳批量模型（43）～（46），写出相应的整数规划模型

$$\min \quad \sum_{i=1}^{5}\left(\frac{1}{2}C_{P_i}Q_i+\frac{C_D D_i}{Q_i}\right)$$

s.t. $\sum_{i=1}^{5} K_i Q_i \le J$

$$\sum_{i=1}^{5} w_i Q_i \le W_T$$

$$Q_i \ge 0,\quad i=1,2,\cdots,5$$

$$n_i = \frac{D_i}{Q_i},\ 且 n_i 为整数，\ i=1,2,\cdots,5$$

编写 LINGO 程序如下：

```
model:
sets:
kinds/1..5/:C_P,D,K,W,Q,N;
endsets
min=@sum(kinds:0.5*C_P*Q+C_D*D/Q);
@sum(kinds:K*Q)<J;
@sum(kinds:W*Q)<W_T;
@for(kinds:N=D/Q;@gin(n));
data:
C_D=1000;
D=600 900 2400 12000 18000;
K=300 1000 500 500 100;
C_P=60 200 100 100 20;
W=1.0 1.5 0.5 2.0 1.0;
J=400000;
W_T=1500;
enddata
end
```

求得总费用为 142272.8 元，订货资金还余 7271.694 元，库存余 4.035621 $m^3$，其余计算结果整理在表 2 中。

表 2　物资的订货次数与订货量

| 物资 $i$ | 订货次数 | 订货量 $Q_i^*$（件） |
|---|---|---|
| 1 | 7 | 85.71429 |
| 2 | 13 | 69.23077 |
| 3 | 14 | 171.4286 |
| 4 | 40 | 300.0000 |

| | | |
|---|---|---|
| 5 | 29 | 620.6897 |

上述计算采用整数规划，如果不计算年订货次数，而只有年订货周期，则不需要整数约束。由于整数规划的计算较慢，因此，在有可能的情况下，应尽量避免求解整数规划问题。

3.2 带有约束允许缺货模型

类似于不允许缺货情况的讨论，对于允许缺货模型，也可以考虑多种类、带有资金和库容约束的数学模型。设 $S_i, C_{S_i}$ 分别为第 $i$ 种物品的最大缺货量、缺货损失单价，其它符号的意义不变。由于 $Q_i$ 是第 $i$ 种物品的最大订货量，则 $K_iQ_i$ 是第 $i$ 种物品占用资金数，$Q_i - S_i$ 是第 $i$ 种物品的最大存贮量（占用库存数），因为 $S_i$ 部分偿还缺货，已不用存贮了。因此，带有资金和库容约束允许缺货的数学模型如下：

$$\min \quad \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{C_{P_i}(Q_i - S_i)^2}{2Q_i} + \frac{C_D D_i}{Q_i} + \frac{C_{S_i} S_i^2}{2Q_i}\right) \tag{47}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^{n} K_i Q_i \le J \tag{48}$$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i (Q_i - S_i) \le W_T \tag{49}$$

$$Q_i \ge 0\text{，} i = 1,2,\cdots,n \tag{50}$$

例 7（续例 6） 假设缺货损失费（$C_{S_i}$）是物品的存贮费（$C_{P_i}$）的 2 倍，其它参数不变，试求出各种物品的订货次数、订货量和总的存贮费用。

解 设 $n_i$ 是第 $i$ 种物品的年订货次数，按照模型（47）～（50），写出相应的整数规划模型

$$\min \quad \sum_{i=1}^{5}\left(\frac{C_{P_i}(Q_i - S_i)^2}{2Q_i} + \frac{C_D D_i}{Q_i} + \frac{C_{S_i} S_i^2}{2Q_i}\right)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^{5} K_i Q_i \le J$$

$$\sum_{i=1}^{5} w_i(Q_i - S_i) \le W_T$$

$$n_i = \frac{D_i}{Q_i}，且 n_i 为整数，i = 1,2,\cdots,5$$

$$Q_i \ge 0，i = 1,2,\cdots,5$$

编写 LINGO 程序如下：

```
model:
sets:
kinds/1..5/:C_P,D,K,W,C_S,Q,S,N;
endsets
min=@sum(kinds:0.5*C_P*(Q-S)^2/Q+C_D*D/Q+0.5*C_S*S^2/Q);
@sum(kinds:K*Q)<J;
@sum(kinds:W*(Q-S))<W_T;
@for(kinds:N=D/Q;@gin(n));
data:
C_D=1000;
D=600 900 2400 12000 18000;
K=300 1000 500 500 100;
C_P=60 200 100 100 20;
W=1.0 1.5 0.5 2.0 1.0;
J=400000;
W_T=1500;
enddata
@for(kinds:C_S=2*C_P);
end
```

求得总费用为 124660.8 元，订货资金还余 88.46 元，库存余 343.317m$^3$，其余计算结果整理在表 3 中。

表 3　允许缺货的物资的订货次数与订货量

| 物资 $i$ | 订货次数 | 订货量 $Q_i^*$（件） | 最大缺货量 $S_i$（件） |
|---|---|---|---|
| 1 | 7 | 85.71429 | 28.57142 |
| 2 | 15 | 60.00000 | 20.00000 |
| 3 | 17 | 141.1765 | 47.05881 |
| 4 | 38 | 315.7895 | 105.2631 |
| 5 | 21 | 857.1429 | 285.7142 |

3.3　带有约束的经济生产批量存贮模型

与经济定购模型类似，对于经济生产批量存贮模型，也可以考虑带有不同情况的约束条件和各种不同物品的综合情况。下面用一个例子来说明问题。

例 8　某公司生产并销售 $A,B,C$ 三种商品，根据市场预测，三种商品每天需求量分别是 400，300，300（件），三种商品每天的生产量分别是 1300，1100，900（件），每安排一次生产，其固定费用（与生产量无关）分别为 10000，12000，13000（元），生产费用每件分别为 1.0，1.1，1.4（元）。商品的生产速率、需求率和最大生产量满足如下约束：

$$\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{D_i}{P_i}+\frac{1.5D_i}{Q_i}\right)\le 1$$

求每种商品的最优生产时间与存贮时间，以及总的最优存贮费用。

解　建立最优生产批量存贮模型：

$$\min \quad \sum_{i=1}^{3}\left[\frac{1}{2}(1-\frac{D_i}{P_i})Q_i C_{P_i}+\frac{C_{D_i}D_i}{Q_i}\right]$$

$$\text{s.t.}\quad \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{D_i}{P_i}+\frac{1.5D_i}{Q_i}\right)\le 1$$

$$T_i=\frac{Q_i}{D_i},\quad i=1,2,3$$

$$T_i\ge 0,\quad Q_i\ge 0,\quad i=1,2,3$$

编写 LINGO 程序如下：

```
model:
sets:
kinds/1..3/:C_P,P,C_D,D,Q,T,T_P; !T_P表示生产时间;
endsets
min=@sum(kinds:0.5*(1-D/P)*Q*C_P+C_D*D/Q);
@sum(kinds:D/P+1.5*D/Q)<1;
@for(kinds:T=Q/D;T_P=Q/P);
data:
C_D=1000,1200,1300;
D=400,300,300;
C_P=1.0,1.1,1.4;
P=1300,1100,900;
enddata
```

```
end
```

求得 $A,B,C$ 三种商品的生产、存贮周期分别为 51.05936，54.86175，50.79914 天，其中生产天数分别为 15.71057，14.96229，16.93305 天。总的最优生产，存贮费用为 20832.10 元。

## §4 单周期随机库存模型

在许多情形中需求量是随机的。随机需求模型可以分为周期观测与连续观测两类。周期观测模型又可分为单周期、多周期及无穷周期等模型。

本节仅讨论单周期随机库存模型。

单周期库存模型又称为单订货模型。模型假定周期末库存对下一个周期没有任何价值。这个问题也称为报童问题，因为报童手中的报纸若卖不完，明天就没有用了。该模型研究的是仅有一次机会的存贮与供需关系的产品。

### 4.1 模型的基本假设

本模型的基本假设如下：

（1）在整个需求期内只订购一次货物，订货量为 $Q$，订购费和初始库存均为 0，每单位产品的购价（成本）为 $K$；

（2）需求量 $D$ 为一个连续的随机变量，且 $D$ 的概率密度为 $f(x)$，当货物出售时，每单位产品的价格为 $U$；

（3）需求期结束时，没有卖出的货物不存贮而是折价卖出，单位价格为 $V$。

### 4.2 模型的推导

单周期随机库存模型的问题是求订购量 $Q$ 为多少时，使得总利润最大。

当需求量 $D=x$ 时，物品的出售量取决于物品的订购量 $Q$ 和需求量 $x$，即

$$\text{出售量}=\begin{cases} x, & x\le Q \\ Q, & x>Q \end{cases} \tag{51}$$

因此，产生的利润

$$G(Q)=\begin{cases} Ux+V(Q-x)-KQ, & x\le Q \\ UQ-KQ, & x>Q \end{cases} \tag{52}$$

这样一个周期的总利润应该是 $G(Q)$ 的期望值，即

$$E(G(Q))=\int_0^Q (Ux+V(Q-x)-KQ)f(x)dx+\int_Q^\infty (UQ-KQ)f(x)dx$$

$$=(U-K)Q-(U-V)\int_0^Q (Q-x)f(x)dx \tag{53}$$

注意，在上式推导中用到概率密度的性质 $\int_0^{+\infty} f(x)dx = 1$。

为求极大值，对式（53）两端关于 $Q$ 求导数，得到

$$\frac{dE[G(Q)]}{dQ} = (U-K)-(U-V)\int_0^Q f(x)dx \tag{54}$$

$$\frac{d^2E[G(Q)]}{dQ^2} = -(U-V)f(Q) < 0 \text{，} \tag{55}$$

注意到二阶导数小于 0，因此，满足方程

$$\int_0^Q f(x)dx = \frac{U-K}{U-V} \tag{56}$$

的 $Q$ 一定是 $E[G(Q)]$ 的极大值点。

对于销售价 $U$、成本价 $K$ 和折扣价 $V$，应满足 $U > K > V$。令 $g = U-K$ 是物品出售后的利润，同时表示物品不足时，由于缺货造成的损失。令 $h = K-V$ 是物品折扣出售的损失，因此方程（56）也可写成

$$\int_0^Q f(x)dx = \frac{U-K}{U-V} = \frac{g}{g+h} \tag{57}$$

为进一步理解公式（53）的含义，将公式（53）改写为

$$E[G(Q)] = (U-K)Q-(U-V)(Q-\mu)-(U-V)\int_Q^{+\infty}(Q-x)f(x)dx$$

$$=U\mu-KQ+V(Q-\mu)-(U-V)\int_Q^{\infty}(x-Q)f(x)dx \tag{58}$$

其中 $\mu = \int_0^{+\infty} xf(x)dx$ 为需求量 $D$ 的数学期望。或者写成

$$E[G(Q)] = g\,\mu - h(Q-\mu)-(g+h)\int_Q^{+\infty}(x-Q)f(x)dx \tag{59}$$

在式（58）中，积分 $\int_Q^{+\infty}(x-Q)f(x)dx$ 相当于当 $x > Q$ 时的损失函数，即式（58）可以理解为

$$\frac{\text{总利润}}{\text{期望值}} = \frac{\text{总收入}}{\text{期望值}} - \text{成本} + \frac{\text{折扣收入}}{\text{期望值}} - \frac{\text{缺货收入}}{\text{期望值}}$$

4.3　模型的求解

例 9（报童问题）　在街中有一报亭，平均每天出售报纸 500 份，出售报纸的数量，与来往的人流有关，假设服从 Poisson 分布，每卖出一份报纸能盈利 0.15 元。如果卖不出去，只能作为废纸处理，每份报纸亏损 0.40 元，问：报亭应如何安排报纸的订购量，使得报亭的利润最大？

解　由题意知，均值 $\mu=500$；每份报纸的利润 $g=0.15$ 元；作为废纸处理时，每份报纸亏损 $h=0.4$ 元。利用式（57）计算出 $Q$ 来，再利用式（59）计算出期望总利润。

对于 Poisson 分布，式（57）中的积分 $\int_0^Q f(x)dx$ 可由 LINGO 中的函数@pps 计算，@pps( $\mu,Q$ )是均值为 $\mu$ 的 Poisson 分布函数，即

$$@\text{pps}(\mu,Q)=\sum_{x=0}^{Q}\frac{\mu^x}{x!}e^{-\mu}$$

若 $Q$ 不是整数，该函数采用线性插值计算。

式（59）中的积分 $\int_Q^{+\infty}(x-Q)f(x)dx$ 可由函数@ppl 计算，@ppl( $\mu,Q$ )表示 Poisson 分布的线性损失函数，即

$$@\text{ppl}(\mu,Q)=\sum_{x=Q+1}^{+\infty}\frac{(x-Q)\mu^x}{x!}e^{-\mu}$$

编写 LINGO 程序如下：

```
model:
data:
mu=500;g=0.15;h=0.40;
enddata
@pps(mu,Q)=g/(g+h);
E_G=g*mu-h*(Q-mu)-(g+h)*@ppl(mu,Q);
end
```

求得报亭每天订购报纸 486 份，每天盈利 70.93 元。

下面我们使用 MATLAB 求例 9 的解。实际上式(57)中的 $Q$ 是 Poisson 分布的 $\frac{g}{g+h}$ 分位点。对于式（59）中的积分计算，首先定义被积函数，然后使用 MATLAB 中的积分命令 QUADL 进行积分，注意在积分时必须把积分区间化成有限区间。MATLAB 中

被积函数定义如下（其中文件名为 fun1.m）

```
function f=fun1(x);
global Q mu
f=(x-Q).*poisspdf(mu,x);
```

最后编写调用的程序如下：

```
global mu Q
mu=500;g=0.15;h=0.40;
Q=poissinv(g/(g+h),mu)
E_G=g*mu-h*(Q-mu)-(g+h)*(mu-Q-quadl(@fun1,0,Q))
```

求得报亭每天订购报纸 486 份，每天赢利 71.09 元。

例 10　设在某食品店内，每天对面包的需求服从 $\mu=300$， $\sigma=50$ 的正态分布。已知每个面包的售价为 1.50 元，成本 0.90 元，对当天未售出的其处理价为每个 0.60 元，问该商店每天应生产多少面包，使预期的利润为最大？

解　根据题意 $\mu=300$， $\sigma=50$， $U=1.50$， $K=0.9$， $V=0.60$。利用式（57）计算出 $Q$ 来，再利用式（59）计算出期望总利润。但对于正态分布分布，LINGO 只提供了标准正态分布函数@psn( $Z$ )，即

$$@\mathrm{psn}(Z)=\Phi(Z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{Z}e^{-\tau^2/2}d\tau$$

和标准正态分布的线性损失函数@psl( $Z$ )，即

$$@\mathrm{psl}(Z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{z}^{+\infty}(\tau-Z)e^{-\tau^2/2}d\tau$$

因此，若用函数@psn 和@psl 计算式（57）和式（59）的积分

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\int_{-\infty}^{Q}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx \quad 和 \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\int_{Q}^{+\infty}(x-Q)e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx$$

需要做变换 $\tau=\dfrac{x-\mu}{\sigma}$，即

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\int_{-\infty}^{Q}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{Z}e^{-\frac{\tau^2}{2}}d\tau=@\mathrm{psn}(Z)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\int_{Q}^{+\infty}(x-Q)e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx=\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{Z}^{+\infty}(\tau-Z)e^{-\frac{\tau^2}{2}}d\tau=\sigma@\mathrm{psl}(Z)$$

其中 $Z=\dfrac{Q-\mu}{\sigma}$。

编写 LINGO 程序如下

```
data:
mu = 300; sigma = 50; U = 1.50; K = 0.90; V = 0.60;
enddata
@psn(Z)=(U-K)/(U-V);
Z=(Q-mu)/sigma;
@free(Z);
E_G = U*mu-K*Q+V*(Q-mu)-(U-V)*sigma*@psl(Z);
```

求得商店每天生产 322 个面包，可以使总利润达到最大，预期的最大利润为 163.638 元。

同样地，我们使用 MATLAB 求例 10 的解。实际上，式（57）中的 $Q$ 是正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$ 的 $\dfrac{U-K}{U-V}$ 分位点。式（59）中的被积函数的 MATLAB 定义如下（其中文件名为 fun2.m）：

```
function f=fun2(x);
global mu sigma Q
f=(x-Q).*normpdf(x,mu,sigma);
```

最后编写调用的程序如下：

```
global mu sigma Q
mu = 300; sigma = 50; U = 1.50; K = 0.90; V = 0.60;
Q=norminv((U-K)/(U-V),mu,sigma)
E_G=U*mu-K*Q+V*(Q-mu)-(U-V)*(mu-Q-quadl(@fun2,0,Q))
```

求得的结果和 LINGO 的计算结果完全一样。

例 11 （航空机票超订票问题） 某航空公司执行两地的飞行任务，已知飞机的有效载客量为 150 人。按民用航空管理有关规定：旅客因有事或误机，机票可免费改签一次，此外也可在飞机起飞前退票。航空公司为了避免由此发生的损失，采用超量订票的方法，即每班售出票数大于飞机载客数。但由此会发生持票登机旅客多于座位数的情况，在这种情况下，航空公司让超员旅客改乘其它航班，并给旅客机票价的 20%作为补偿。现假设两地的机票价为 1500 元，每位旅客有 0.04 的概率发生有事、误机或退票的情况，问航空公司多售出多少张票？使该公司的预期损失达到最小。

解 先对该问题进行分析。

设飞机的有效载客数为 $N$，超订票数为 $S$（即售出票数为 $N+S$），$k$ 为每个座位的赢利值，$h$ 为改乘其它航班旅客的补偿值。设 $x$ 是购票未登机的人数，是一个随机变量，其概率密度为 $f(x)$。当 $x\le S$ 时，有 $S-x$ 个人购票后，不能登机，航空公司要为

这部分旅客进行补偿。当 $x > S$ 时，有 $x - S$ 个座位没有人坐，航空公司损失的是座位应得的利润，因此，航空公司的损失函数为

$$L(S) = \begin{cases} h(S-x), & x \le S \\ k(x-S), & x > S \end{cases} \tag{60}$$

其期望值为

$$\begin{aligned} E[L(S)] &= \int_0^S h(S-x) f(x) dx + \int_S^{+\infty} k(x-S) f(x) dx \\ &= k\mu - kS + (k+h)\int_0^S (S-x) f(x) dx \end{aligned} \tag{61}$$

其中 $\mu = \int_0^{+\infty} x f(x) dx$ 为购票未登机的期望人数。

对式（61）两端关于 $S$ 求导数，得到

$$\frac{dE[L(S)]}{dS} = -k + (k+h)\int_0^S f(x) dx \tag{62}$$

$$\frac{d^2 E[L(S)]}{dS^2} = (k+h) f(S) > 0 \tag{63}$$

因此，满足方程

$$\int_0^S f(x) dx = \frac{k}{k+h} \tag{64}$$

的 $S$ 是函数 $E[L(S)]$ 的极小值点，即满足方程（64）的 $S$ 使航空公司的损失达到最小。

下面给出具体的求解过程。

设每位顾客购票未登机的概率为 $p$，共有 $N+S$ 位旅客，则恰有 $y$ 位旅客未登机的概率是 $C_{N+S}^{y} p^{y} (1-p)^{N+S-y}$，即未登机人数 $x$ 服从二项分布。因此，式（64）中的积分应用二项分布计算。

在 LINGO 中提供了二项分布函数 $@\mathrm{pbn}(p, N+S, S)$，即

$$@\mathrm{pbn}(p, N+S, S) = \sum_{y=0}^{S} C_{N+S}^{y} p^{y} (1-p)^{N+S-y} \tag{65}$$

当 $N+S$ 和 $S$ 不是整数时，采用线性插值计算。

在这里，$@\mathrm{pbn}(p, N+S, S)$ 的直观意义是：在 $N+S$ 位旅客中至多有 $S$ 位旅客购票未登机的概率。

根据题意，$N=150$，$p=0.04$，$k=1500$（假设机票价就是航空公司的赢利），$h=1500\times 0.2=300$。写出相应的 LINGO 程序如下：

```
data:
  N = 150;p = 0.04;k = 1500;h = 300;
enddata
@pbn(p, N+S, S) = k/(k+h);
```

求得超订的票数 $S=8.222487$，因而，超订的票数在 8～9 张之间，即每班售出的票数在 158～159 张之间。

下面我们使用 MATLAB 求例 11 的解。首先定义函数 $g(S)=\int_0^S f(x)dx-\dfrac{k}{k+h}$，然后求 $G(S)$ 的零点即可。编写 $g(S)$ 的 MATLAB 函数如下（文件名为 fun3.m）：

```
function f=fun3(s);
N = 150;p = 0.04;k = 1500;h = 300;
f=binocdf(s,s+N,p)-k/(k+h);
```

MATLAB 中求函数 $g(S)$ 的零点时溢出（使用命令 FZERO），我们只能编写 MATLAB 的搜索算法如下：

```
for s=1:100
    g(s)=fun3(s);
end
g
```

例 12（续例 11）　所有参数不变，问航空公司多售出多少张票，使该公司的预期利润达到最大，并计算出相应的利润。

解　下面的计算希望达到以下目的：第一，得到超订票的整数解；第二，计算出预期的利润值。

设飞机的有效载客数为 $N$，超订票数为 $S$（即售出票数为 $N+S$），$k$ 为每个座位的赢利值，$h$ 为改乘其它航班旅客的补偿值，$p$ 为每位旅客购票未登机的概率。设 $x$ 是购票未登机的人数，是一个随机变量，其概率密度为 $f(x)$。当 $x\le S$ 时，飞机满座，有 $S-x$ 个人购票后，不能登机，航空公司要为这部分旅客进行补偿。当 $x>S$ 时，飞机没有满座，有 $N+S-x$ 名旅客乘机，因此，航空公司的利润函数为

$$I(S)=\begin{cases} kN-h(S-x), & x\le S \\ k(N+S-x), & x>S \end{cases} \tag{66}$$

其期望值为

$$E[I(S)]=\int_0^S(kN-hS+hx)f(x)dx+\int_S^{+\infty}k(N+S-x)f(x)dx$$

$$=k(N+S-\mu)-(h+k)S\int_0^S f(x)dx+(h+k)\int_0^S xf(x)dx \qquad (67)$$

其中 $\mu=\int_0^{+\infty}xf(x)dx$ 为购票未登机的期望人数。

对式（67）两端关于 $S$ 求导数，得到

$$\frac{dE[L(S)]}{dS}=k-(k+h)\int_0^S f(x)dx \qquad (68)$$

$$\frac{d^2E[L(S)]}{dS^2}=-(k+h)f(S)<0 \qquad (69)$$

因此，满足方程

$$\int_0^S f(x)dx=\frac{k}{k+h} \qquad (70)$$

的 $S$ 是函数 $E[I(S)]$ 的极小值点，即满足方程（70）的 $S$ 使航空公司的利润达到最大。

具体的求解过程同例 11。下面我们比较一下 $S=8$ 和 $S=9$ 哪种情形下的利润最大，首先把式（67）改写成

$$E[I(S)]=k(N+S-\mu)-(h+k)\int_0^S F(x)dx$$

编写的 MATLAB 程序如下：

```
clear,clc
N = 150;p = 0.04;k = 1500;h = 300;
for S=1:15
E_I(S)=k*(N+S-(N+S)*p)-(h+k)*quadl(@(x)binocdf(x,N+S,p),0,S);
end
E_I
```

上面的算法，我们实际上把二项分布看成是连续型的分布。下面从离散分布的角度建立赢利期望值的递推公式。

记 $E_j$（$j=0,1,\cdots,S$）为超订票数为 $j$ 时，航空公司赢利的期望值。$E_j^L$ 为超订票数为 $j$ 时，最后一个旅客的订票使航空公司获得赢利的期望值。则有

$$E_j=E_{j-1}+E_j^L$$

$E_j^L$ ＝最后 1 名旅客乘到飞机时航空公司赢利值－最后 1 名乘客无座位时的补偿值

因而有

$$E_0 = kN(1-p),$$

$$E_1 = E_0 + E_1^L = E_0 + (1-p)P\{N\text{名旅客中至少有1人不乘机}\}\cdot k$$

$$-(1-p)P\{N\text{名旅客都乘机}\}\cdot h$$

$$= E_0 + (1-p)[1-@\text{pbn}(p,N,0)]\cdot k - (1-p)\cdot @\text{pbn}(p,N,0)\cdot h$$

$$= E_0 + (1-p)[k-(k+h)\cdot @\text{pbn}(p,N,0)]$$

$$\vdots$$

$$E_j = E_{j-1} + E_j^L = E_{j-1} + (1-p)P\{N+i-1\text{个旅客至少有 }i\text{人不乘机}\}\cdot k$$

$$-(1-p)P\{N+i-1\text{个旅客至多有 }i\text{—}1\text{人不乘机}\}\cdot h$$

$$= E_0 + (1-p)[1-@\text{pbn}(p,N+i-1,i-1)]\cdot k$$
$$-(1-p)\cdot @\text{pbn}(p,N+i-1,i-1)\cdot h$$

$$= E_0 + (1-p)[k-(k+h)\cdot @\text{pbn}(p,N+i-1,i-1)]$$

在上式中，$@\text{pbn}(p,m,x)$ 是 LINGO 中的二项分布函数，即

$$@\text{pbn}(p,m,x) = \sum_{k=0}^{x} C_m^k p^k (1-p)^{m-k}$$

因此，我们只要计算出超订票数 $S = 0,1,2,\cdots$ 的期望值，并比较它们的大小，就可以计算出最优的超订票数和最大赢利的期望值。编写 LINGO 程序如下：

```
sets:
   seats/1..150/;
   extra/1..15/: E_T;
endsets
data:
k = 1500; h = 300; p = 0.04;
enddata
N = @size(seats);
E_T0 = k*N*(1-p);
E_T(1) = E_T0+(1-p)*(k-(k+h)*@pbn(p,N,0));
@for(extra(i)|i #gt# 1:E_T(i) =
```

```
E_T(i-1)+(1-p)*(k-(k+h)*@pbn(p,N+i-1, i-1)));
```

从计算结果可以看出，超订票数为9张时，航空公司获利利润最大，预期的期望值达到223832.6。

下面我们写出递推运算的 MATLAB 程序如下：

```
clear,clc
k = 1500; h = 300; p = 0.04; n=150;
E_T0=k*n*(1-p)
E_T(1)=E_T0+(1-p)*(k-(k+h)*binocdf(0,n,p));
for i=2:15
    E_T(i)=E_T(i-1)+(1-p)*(k-(k+h)*binocdf(i-1,n+i-1,p));
end
E_T
```

计算结果和 LINGO 的计算结果完全一致。

## 习题二十五

1．企业生产某种产品，正常生产条件下可生产 10 件/天。根据供货合同，需按 7 件/天供货。存贮费每件 0.13 元/天，缺货费每件 0.5 元/天，每次生产准备费用（装配费）为 80 元，求最优存贮策略。

2．某大型机械需要外购 3 种零件，其有关数据见表 4。若存贮费占单件价格的 25 %，不允许缺货。又限定外购零件的总费用不超过 240000 元，仓库总面积为 250m$^2$，试确定每种外购零件的最优订货量、订货周期和最小费用。

表 4　三种外购零件的相关数据

| 零件 | 年需求量（件） | 订货费（元） | 单价（元） | 占用仓库面积（m$^2$） |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1000 | 1000 | 3000 | 0.5 |
| 2 | 3000 | 1000 | 1000 | 1 |
| 3 | 2000 | 1000 | 2500 | 0.8 |

3.（航空公司超订票问题）　已知飞机的有效载客量为 150 人，机票价为 1500 元。根据公司的长期统计，每个航班旅客的退票和改签发生的人数如表 5 所示。在登机旅客多于座位数的情况下，航空公司规定：超员旅客改乘本公司下一班机，机票免费（即退回原机票款）；若改乘其它航空公司的航班，按机票的 105%退款。据统计前一类旅客占超员旅客的 80%，后一类旅客占 20%。问航空公司多售出多少张票，使该公司的预期损失达到最小。

表 5　航班旅客退票和改签人数概率表

| 人数 $i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | 0.18 | 0.25 | 0.25 | 0.16 | 0.06 | 0.04 | 0.03 | 0.02 | 0.01 |

4．某工厂生产某种产品必须经过两道工序，第一道工序在甲车间进行，第二道工序在乙车间进行，甲车间生产的产品作为乙车间生产的原料，工厂计划年生产 1200 件产品，因而乙车间的生产速度为每月 100 件，而甲车间的生产速度为每月 500 件。由于受到乙车间生产能力的限制，甲车间要进行等周期分批的有间断的生产，同时还必须保证乙车间不停工待料。甲车间的产品运到乙车间时要包装，平均每批的包装费为 5 元。若运到乙车间后暂时来不及加工，则要花费存贮费，每件存贮费为 0.4 元。试研究甲车间的最优生产周期，生产时间和生产批量。