实验报告五

题目（摘要）

利用 Gauss 列主元消去法求解线性方程组：

$$Ax = b$$

$$\begin{bmatrix} 0.4096 & 0.1234 & 0.3678 & 0.2943 \\ 0.2246 & 0.3872 & 0.4015 & 0.1129 \\ 0.3645 & 0.1920 & 0.3781 & 0.0643 \\ 0.1784 & 0.4002 & 0.2786 & 0.3927 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.1951 \\ 1.1262 \\ 0.9989 \\ 1.2499 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 136.01 & 90.860 & 0 & 0 \\ 90.860 & 98.810 & -67.590 & 0 \\ 0 & -67.590 & 132.01 & 46.260 \\ 0 & 0 & 46.260 & 177.17 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 226.87 \\ 122.08 \\ 110.68 \\ 223.43 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 \\ 1/4 & 1/5 & 1/6 & 1/7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25/12 \\ 77/60 \\ 57/60 \\ 319/420 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{bmatrix}$$

前言：（目的和意义）

1. 熟悉运用已学的数值运算方法求解线性方程——Gauss 列主消去法；
2. 加深对计算方法技巧的认识，正确使用计算方法来求解方程；
3. 培养用计算机来实现科学计算和解决问题的能力。

数学原理

一般地，牛顿迭代高斯（Gauss）列主元消去法：对给定的 n 阶线性方程组 $Ax=b$，首先进行列主元消元过程，然后进行回代过程，最后得到解或确定该线性方程组是奇异的。

如果系数矩阵的元素按绝对值在数量级方面相差很大，那么，在进行列主元消元过程前，先把系数矩阵的元素进行行平衡：系数矩阵的每行元素和相应的右端向量元素同除以该行元素绝对值最大的元素。这就是所谓的平衡技术。然后再进行列主元消元过程。

如果真正进行运算去确定相对主元，则称为显式相对 Gauss 列主元消去法；如果不进行运算，也能确定相对主元，则称为隐式相对 Gauss 列主元消去法。

显式相对 Gauss 列主元消去法：对给定的 n 阶线性方程组$Ax=b$，首先进行列主元消元过程，在消元过程中利用显式平衡技术，然后进行回代过程，最后得到解或确定该线性方程组是奇异的。

隐式相对 Gauss 列主元消去法：对给定的 n 阶线性方程组$Ax=b$，首先进行列主元消元过程，在消元过程中利用隐式平衡技术，然后进行回代过程，最后得到解或确定该线性方程组是奇异的。

程序设计流程

输入：n，$A_{n\times n}, b_n$

输出：线性方程组$Ax=b$根x^*的近似值或者计算失败的标志

流程：

1 对 k= $1,2,\ldots,n-1$:

1.1 寻找最小的正整数 p，$k\le p\le n$和$\left|a_{pk}\right|=\max\limits_{k\le j\le n}|a_{jk}|$。如果$\left|a_{jk}\right|=0$，输出奇异标志，停机；

1.2 如果$p\ne k$,那么交换 p,k 两行；

1.3 对$i=k+1,\ldots,n$，记$m_{ik}=a_{ik}/a_kk$，计算

$$\begin{cases} a_{ij}=a_{ij}-a_{ij}m_{ik} \\ i=k+1,\ldots,n \\ j=k+1,\ldots,n \\ b_i=b_i-b_km_{ik} \\ i=k+1,\ldots,n \end{cases}$$

2 当$a_{nn}=0$，输出奇异标志，停机；

3 置$x_n=b_n/a_{nn}$，回代过程

4 对$k=n-1,\ldots,2,1$，置$x_k=\frac{b_k-\sum_{j=k+1}^{n}a_{kj}x_j}{a_{kk}}$

实验结果、结论与讨论

实验具体结果见下一页。

结论：

1. 实验结果与理论一致；
2. 使用列主元消元法的误差较小；
3. 运用程序能更好地实现理论与科学计算的统一和协调。