实验报告二 龙贝格积分法

题目（摘要）

利用龙贝格积分法计算积分$\int_a^b f(x)\,dx$。给定积分上下限$a,b,f(x)$,和误差限ε,得到龙贝格$T-$数表。

其中,$\int_a^b f(x)\,dx$:

$$\int_0^1 x^2 e^x dx，\ \varepsilon = 10^{-6}$$

$$\int_1^3 e^x \sin x dx，\ \varepsilon = 10^{-6}$$

$$\int_0^1 \frac{4}{1+x^2} dx，\ \varepsilon = 10^{-6}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x+1} dx，\ \varepsilon = 10^{-6}$$

前言：（目的和意义）

目的：

1. 进一步理解和掌握龙贝格积分的原理;
2. 运用龙贝格积分法数值计算定积分。

意义：

龙贝格积分法实在梯形公式、辛普森公式和柯特斯公式之间的关系基础上，构造出的一种加速计算积分的方法，作为一种外推算法，在不增加计算量的前提下提高了误差的精度。

数学原理

利用复化梯形求积公式、复化辛普森求积公式、复化柯特斯求积公式的误差估计式计算积分$\int_a^b f(x)\,dx$。记$\hbar = \frac{b-a}{n}, x_k = a + k * h, k = 0,1,\dots,n$, 其计算公式:

$$T_n = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}[f(x_{k-1}) + f(x_k)]$$

$$T_{2n} = \frac{1}{2}T_n + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} f\left(x_k - \frac{h}{2}\right)$$

$$S_n = \frac{1}{3}(4T_{2n} - T_n)$$

$$C_n = \frac{1}{15}(16S_{2n} - S_n)$$

$$R_n = \frac{1}{63}(64C_{2n} - C_n)$$

得到$T-$数表:

$$\begin{array}{llll} T_1 & & & \\ T_2 & S_1 & & \\ T_4 & S_2 & C_1 & \\ T_8 & S_4 & C_2 & R_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

程序设计流程

输入：a, b, N, ε

输出：龙贝格$T-$数表

具体流程：

1　置$h = b - a, i = 1$；$T_{1,1} = \frac{1}{2}h[f(a) + f(b)], err = \varepsilon + 1$

2　当$err > \varepsilon$, 循环：

2.1　$i = i + 1$;

2.2　置$sum = \sum_{k=1}^{2^{i-2}} f\left(a + kh - \frac{h}{2}\right)$

2.3　置$T_{i,1} = \frac{T_{i-1,1}}{2} + sum * \frac{h}{2}$

2.4　置$end = \max(4, i)$

2.5　对$j = 2,3, \ldots, end$, 循环:

2.5.1 $T_{i,j} = T_{i,j-1} + \frac{T_{i,j-1} - T_{i-1,j-1}}{4^{j-1} - 1}$

2.5.2 如果$j = 4$, 且$abs\left(T_{i,1} - T_{i,1}\right) < \varepsilon$, 则停机

2.6　$h = \frac{h}{2}$

实验结果、结论与讨论

代码发布报告、具体结果在下页。结论与预期相符。

思考题：

显然, 随着二分次数的增加, 精度也在提升。