量子力学

第九章：力学量本征值的代数方法

肖志广

中国科学技术大学物理学院近代物理系

xiaozg@ustc.edu.cn

2019 年 12 月 22 日

谐振子的代数解法

一维谐振子哈密顿量：

$$\begin{aligned}\hat{H} &= \frac{1}{2\mu}\hat{p}^2+\frac{1}{2}\mu\omega^2x^2, \quad \text{其中}\omega=\sqrt{k/\mu} \\ &= \hbar\omega\left(\frac{\mu\omega}{2\hbar}(\hat{x}-\frac{i}{\mu\omega}\hat{p})(\hat{x}+\frac{i}{\mu\omega}\hat{p})+\frac{1}{2}\right)\end{aligned}$$

定义：$\hat{a}=\sqrt{\frac{\mu\omega}{2\hbar}}(\hat{x}+\frac{i}{\mu\omega}\hat{p})$，$\hat{a}^\dagger=\sqrt{\frac{\mu\omega}{2\hbar}}(\hat{x}-\frac{i}{\mu\omega}\hat{p})$ 则

$$\hat{H}=\hbar\omega(\hat{a}^\dagger\hat{a}+\frac{1}{2})=\hbar\omega(\hat{N}+\frac{1}{2}), \quad \hat{N}\equiv\hat{a}^\dagger\hat{a}$$

利用 $[\hat{x},\hat{p}]=i\hbar$ 得到对易关系

$$\begin{aligned}[\hat{a},\hat{a}^\dagger] &= \frac{\mu\omega}{2\hbar}\left[\hat{x}+\frac{i}{\mu\omega}\hat{p},\hat{x}-\frac{i}{\mu\omega}\hat{p}\right]=1\,, \\ [\hat{a},\hat{a}] &= 0, \quad [\hat{a}^\dagger,\hat{a}^\dagger]=0\end{aligned}$$

$\hat{a}$ 称作降算符（湮灭算符，吸收算符），$\hat{a}^\dagger$ 称作升算符（产生算符，发射算符）。

$\hat{a}$,$\hat{a}^\dagger$ 并不是厄米算符，互为厄米共轭。$\hat{N} = a^\dagger a$ 是厄米算符，称作粒子数算符，满足对易关系：

$$[\hat{N}, \hat{a}] = -\hat{a}, \quad [\hat{N}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}^\dagger$$

- $\hat{N}$正定：对于 $\forall\psi$

$$\langle\hat{N}\rangle = (\psi, \hat{a}^\dagger a\psi) = (\hat{a}\psi, \hat{a}\psi) \geq 0$$

- $\hat{N}$ 的本征值为非负整数，

证明:

设 $|n\rangle$ 是 $\hat{N}$ 的已归一化的本征态，$\hat{N}|n\rangle = n|n\rangle$，则由 $[\hat{N}, \hat{a}]|n\rangle = -\hat{a}|n\rangle$ 得

$$\hat{N}\hat{a}|n\rangle = \hat{a}\hat{N}|n\rangle - \hat{a}|n\rangle = (n-1)\hat{a}|n\rangle$$

即 $\hat{a}|n\rangle$ 是 $\hat{N}$ 的本征值为 $n-1$ 的本征态。以此类推：

态	$\lvert n\rangle$	$\hat{a}\lvert n\rangle$	$\hat{a}^2\lvert n\rangle$	$\dots$
本征值	n	$n-1$	$n-2$	$\dots$

由于 $\hat{N}$ 正定且厄米，所以本征值为非负实数，设最小本征值是 n_0，则必有

$$a|n_0\rangle = \mathbf{0},$$

这是因为，否则 $a|n_0\rangle \sim |n_0 - 1\rangle$，与 n_0 最小矛盾。$|n_0\rangle$ 实际上是 $\hat{N}$ 的本征值为 0 的本征态:

$$\hat{N}|n_0\rangle = \hat{a}^\dagger a|n_0\rangle = \mathbf{0} = 0|n_0\rangle \quad \Rightarrow \quad n_0 = 0, \quad |n_0\rangle = |0\rangle$$

由 $[\hat{N}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}^\dagger$ 得

$$\hat{N}\hat{a}^\dagger|n\rangle = \hat{a}^\dagger N|n\rangle + \hat{a}^\dagger|n\rangle = (n+1)\hat{a}^\dagger|n\rangle \quad \Rightarrow \quad \hat{a}^\dagger|n\rangle \sim |n+1\rangle$$

所以

$$\begin{array}{lcccc} \text{本征态} & |0\rangle & \hat{a}^\dagger|0\rangle & (\hat{a}^\dagger)^2|0\rangle & \dots \\ \text{本征值} & 0 & 1 & 2 & \dots \end{array}$$

本征值是非负整数。

各 $|n\rangle$ 为归一化的态，我们来看 $|n\rangle$ 与 $|n-1\rangle$ 态之间的关系，$\hat{a}^\dagger|n\rangle = \lambda_n|n+1\rangle$，求 λ_n

$$\begin{aligned}\langle n|\hat{a}\hat{a}^\dagger|n\rangle =& \langle n|[\hat{a},\hat{a}^\dagger] + \hat{a}^\dagger\hat{a}|n\rangle = n+1 \\ =& |\lambda_n|^2\langle n+1|n+1\rangle = |\lambda_n|^2\end{aligned}$$

可以选取 $|n\rangle$ 相位使得 λ_n 为实数，$\lambda_n = \sqrt{n+1}$，即

$$\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$$

则递推的使用上式

$$(\hat{a}^\dagger)^n|0\rangle = (\hat{a}^\dagger)^{n-1}\sqrt{1}|1\rangle = \cdots = \sqrt{n!}|n\rangle.$$

所以，

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(\hat{a}^\dagger)^n|0\rangle$$

$|n\rangle$ 是 $\hat{N}$ 的归一的本征态，也是 $\hat{H}$ 的本征态：

$$\hat{H}|n\rangle = \hbar\omega\left(\hat{N}+\frac{1}{2}\right)|n\rangle = \left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega|n\rangle$$

粒子数表象下各算符的矩阵形式

- $\hat{N}$ 的矩阵形式：在 $|n\rangle$ 基下已经对角：
  $N_{mn} = n\delta_{mn}, \quad n = 0, 1, 2, \cdots$ 此表象也叫粒子数表象。
- $\hat{a}$ 的矩阵元：$\hat{a}|n\rangle = \tilde{\lambda}_n|n-1\rangle$,

$$\hat{a}^\dagger\hat{a}|n\rangle = n|n\rangle = \tilde{\lambda}_n\hat{a}^\dagger|n-1\rangle = \tilde{\lambda}_n\sqrt{n}|n\rangle \quad \Rightarrow \tilde{\lambda}_n = \sqrt{n},$$

即 $\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$, 或者 $\langle m|\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}\delta_{m,n-1}$

这样，$a = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$

- $\hat{a}^\dagger$ 的矩阵元：由 $\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$，得

$\langle m|\hat{a}^\dagger|n\rangle = \delta_{m,n+1}\sqrt{n+1}$, 即 $a^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \sqrt{1} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$

由 $\hat{a}=\sqrt{\frac{\mu\omega}{2\hbar}}(\hat{x}+\frac{i}{\mu\omega}\hat{p})$, $\hat{a}^\dagger=\sqrt{\frac{\mu\omega}{2\hbar}}(\hat{x}-\frac{i}{\mu\omega}\hat{p})$

$$x = \Big(\frac{\hbar}{2\mu\omega}\Big)^{1/2}(a^\dagger+a)=\Big(\frac{\hbar}{2\mu\omega}\Big)^{1/2}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 & \cdots \\ \sqrt{1} & 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

$$p = i\Big(\frac{\hbar\mu\omega}{2}\Big)^{1/2}(a^\dagger-a)=i\Big(\frac{\hbar\mu\omega}{2}\Big)^{1/2}\begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{1} & 0 & \cdots \\ \sqrt{1} & 0 & -\sqrt{2} & \cdots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

$\hat{x}$ 实对称, $\hat{p}$ 纯虚反对称。或者

$$x_{mn} = \Big(\frac{\hbar}{2\mu\omega}\Big)^{1/2}(a^\dagger+a)=\Big(\frac{\hbar}{2\mu\omega}\Big)^{1/2}(\sqrt{n+1}\delta_{m,n+1}+\sqrt{n}\delta_{m,n-1})$$

$$p_{mn} = i\Big(\frac{\hbar\mu\omega}{2}\Big)^{1/2}(a^\dagger-a)=i\Big(\frac{\hbar}{2\mu\omega}\Big)^{1/2}(\sqrt{n+1}\delta_{m,n+1}-\sqrt{n}\delta_{m,n-1})$$

坐标表象下的波函数

在坐标表象下基态波函数 $\psi_0(x) = \langle x|0\rangle$，由于 $\hat{a}|0\rangle = 0$，满足：

$$0 = \langle x|\hat{a}|0\rangle = \int dx' \langle x|\hat{a}|x'\rangle \langle x'|0\rangle = \int dx' \left(\frac{\mu\omega}{2\hbar}\right)^{1/2} \left\langle x\middle|\left(\hat{x} + \frac{i}{\mu\omega}\hat{p}\right)\middle|x'\right\rangle \langle x'|0\rangle$$

$$= \int dx' \left(\frac{\mu\omega}{2\hbar}\right)^{1/2} \left(x\delta(x-x') + \frac{\hbar}{\mu\omega}\frac{d}{dx}\delta(x-x')\right)\psi_0(x')$$

$$= \left(\frac{\mu\omega}{2\hbar}\right)^{1/2} \left(x + \frac{\hbar}{\mu\omega}\frac{d}{dx}\right)\psi_0(x)$$

解微分方程可得: $\psi_0(x) \propto e^{-\alpha^2 x^2/2}$, $\alpha = \sqrt{\mu\omega/\hbar}$. 归一化得到

$$\psi_0(x) = \left(\frac{\alpha^2}{\pi}\right)^{1/4} e^{-\alpha^2 x^2/2}$$

基态

$$\psi_0(x) = \left(\frac{\alpha^2}{\pi}\right)^{1/4} e^{-\alpha^2 x^2/2}$$

坐标表象中

$$\hat{a}^\dagger \to \left(\frac{\mu\omega}{2\hbar}\right)^{1/2}\left(x - \frac{\hbar}{\mu\omega}\frac{d}{dx}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\alpha x - \frac{1}{\alpha}\frac{d}{dx}\right)$$

由 $|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(\hat{a}^\dagger)^n|0\rangle$, 坐标表象中 $\psi_n(x) = \langle x|n\rangle$ 可以表示为

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n!}}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\alpha x - \frac{1}{\alpha}\frac{d}{dx}\right)\right]^n \psi_0(x)$$

作业：

曾谨言《量子力学教程》(第三版):

P181.
9.1, 9.2,
9.3 打印错误 (a) 中 $\psi_n(x) = \phi_n(x - x_0) = e^{ix_0\hat{p}/\hbar}\phi_n(x)$,
$x_0 = \frac{q\mathcal{E}}{m\omega^2}$, ϕ_n 是没有电场时谐振子的解。
(b) H 可表示为 $H = (b^\dagger b + \frac{1}{2})\hbar\omega - \frac{q^2\mathcal{E}^2}{2m\omega^2}$, $b = a - a_0$,
$a_0 = x_0\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}$.

4. 求谐振子能量本征波函数在动量表象中的表达式。

角动量的本征值与本征态

角动量三个分量算符 $\hat{j}_x$,$\hat{j}_y$, $\hat{j}_z$, 满足角动量的基本对易式：

$$[\hat{j}_x, \hat{j}_y] = i\hbar\hat{j}_z\,, \quad [\hat{j}_y, \hat{j}_z] = i\hbar\hat{j}_x\,, \quad [\hat{j}_z, \hat{j}_x] = i\hbar\hat{j}_y$$

轨道角动量 $\hat{\mathbf{L}}$，自旋角动量 $\hat{\mathbf{S}}$，总角动量 $\hat{\mathbf{J}}$, 且作为力学量算符都是厄米算符，

- 定义：$\hat{\mathbf{j}}^2 = \hat{j}_x^2 + \hat{j}_y^2 + \hat{j}_z^2$, 易证 $[\hat{\mathbf{j}}^2, \hat{j}_\alpha] = 0$, $\alpha = x, y, z$.
- 定义：$\hat{j}_\pm = \hat{j}_x \pm i\hat{j}_y$, 易证：

$$[\hat{j}_z, \hat{j}_\pm] = \pm\hbar\hat{j}_\pm\,, \quad [\hat{j}_+, \hat{j}_-] = 2\hbar\hat{j}_z$$

$$\hat{\mathbf{j}}^2 = \frac{1}{2}(\hat{j}_+\hat{j}_- + \hat{j}_-\hat{j}_+) + \hat{j}_z^2$$

- $\hat{\mathbf{j}}^2$ 和 $\hat{j}_z$ 有共同本征态系：$|\lambda m\rangle$，假设正交归一 $\langle\lambda m|\lambda' m'\rangle = \delta_{\lambda\lambda'}\delta_{mm'}$

$$\hat{j}^2|\lambda m\rangle = \lambda\hbar^2|\lambda m\rangle\,, \quad \hat{j}_z|\lambda m\rangle = m\hbar|\lambda m\rangle$$

下面我们来看 λ,m 的可能取值

下面我们来看 λ,m 的可能取值

- 厄米算符 $\hat{A}$，$\hat{A}^2$ 的本征值 a 非负：

$$a=\langle\psi_a|\hat{A}^2|\psi_a\rangle=\langle\hat{A}\psi_a|\hat{A}\psi_a\rangle\geq 0$$

所以对于 $\hat{j}^2=\hat{j}_x^2+\hat{j}_y^2+\hat{j}_z^2$, 本征值$\lambda\geq 0$

- $\hat{j}_x^2+\hat{j}_y^2=\hat{j}^2-\hat{j}_z^2$, 本征值也非负, 而

$$\hat{j}_x^2+\hat{j}_y^2|\lambda m\rangle=(\lambda-m^2)\hbar^2|\lambda m\rangle$$

所以 $\lambda-m^2\geq 0$, 即

$$-\sqrt{\lambda}\leq m\leq\sqrt{\lambda}$$

- 由 $[\hat{\mathbf{j}}^2, \hat{j}_\pm] = \hat{\mathbf{j}}^2\hat{j}_\pm - \hat{j}_\pm\hat{\mathbf{j}}^2 = 0$,

$$\hat{\mathbf{j}}^2\hat{j}_\pm|\lambda m\rangle = \hat{j}_\pm\hat{\mathbf{j}}^2|\lambda m\rangle = \lambda\hbar^2\hat{j}_\pm|\lambda m\rangle$$

$\hat{j}_\pm|\lambda m\rangle$ 也是 $\hat{\mathbf{j}}^2$ 的本征态，本征值也是 $\lambda\hbar^2$

$$\langle\lambda' m'|\hat{j}_\pm|\lambda m\rangle = \delta_{\lambda\lambda'}\langle\lambda m'|\hat{j}_\pm|\lambda m\rangle$$

- 由 $[\hat{j}_z, \hat{j}_\pm] = \hat{j}_z\hat{j}_\pm - \hat{j}_\pm\hat{j}_z = \pm\hbar\hat{j}_\pm$ 得

$$\hat{j}_z\hat{j}_\pm|\lambda m\rangle = (\hat{j}_\pm\hat{j}_z \pm \hbar\hat{j}_\pm)|\lambda m\rangle = (m\pm 1)\hbar\hat{j}_\pm|\lambda m\rangle$$

$\hat{j}_\pm|\lambda m\rangle$是 $\hat{j}_z$ 的本征态，本征值$(m\pm 1)\hbar$,

$$\hat{j}_\pm|\lambda m\rangle = N_\pm(\lambda, m)\hbar|\lambda m \pm 1\rangle.$$

$\hat{j}_\pm$ 使此量子数 m 增加或减少 1, 也称上升、下降算符。

$$\langle\lambda' m'|\hat{j}_\pm|\lambda m\rangle = \delta_{\lambda\lambda'}\delta_{m',m\pm 1}\langle\lambda m\pm 1|\hat{j}_\pm|\lambda m\rangle = \delta_{\lambda\lambda'}\delta_{m',m\pm 1}N_\pm(\lambda, m)\hbar$$

- 对于固定的 λ, 由于$-\sqrt{\lambda} \le m \le \sqrt{\lambda}$, m 有上下界，设分别为$\overline{m}$, $\underline{m}$

$$\hat{j}_+|\lambda\overline{m}\rangle = 0\,, \quad \hat{j}_-|\lambda\underline{m}\rangle = 0$$

- 由 (类似于谐振子中的 $N = a^\dagger a$)

$$\hat{j}_\pm\hat{j}_\mp = \hat{j}_x^2 + \hat{j}_y^2 \mp i(\hat{j}_x\hat{j}_y - \hat{j}_y\hat{j}_x) = \hat{\mathbf{j}}^2 - \hat{j}_z(\hat{j}_z \mp \hbar)\,,$$

且 $\hat{j}_+\hat{j}_-|\lambda\underline{m}\rangle = 0$, $\hat{j}_-\hat{j}_+|\lambda\overline{m}\rangle = 0$ 得到

$$\lambda - \overline{m}(\overline{m}+1) = 0\,, \quad \lambda - \underline{m}(\underline{m}-1) = 0$$

即 $\overline{m}(\overline{m}+1) - \underline{m}(\underline{m}-1) = 0$ 或 $(\overline{m}+\underline{m})(\overline{m}-\underline{m}+1) = 0$
得到 $\overline{m} = -\underline{m}$, 或者 $\overline{m} = \underline{m} - 1$,
由于 $\overline{m} \ge \underline{m}$, 所以只能

$$\overline{m} = -\underline{m}, \quad \overline{m} > 0.$$

- 由于相继的 m 差 1, $\overline{m} - \underline{m} = 2\overline{m}$ 是非负整数, 令 $\overline{m} = j$, 则 $\underline{m} = -j$。m 取值范围为$-j \le m \le j$, $2j$ 为非负整数.
- 由前$\lambda = \overline{m}(\overline{m}+1) = j(j+1)$. 由于 $2j$ 是非负整数，$j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots$

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{j}}^2|jm\rangle = j(j+1)\hbar^2|jm\rangle\,, & j=0,\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},\ldots \\ \hat{j}_z|jm\rangle = m\hbar|jm\rangle\,, & m=-j,-j+1,-j+2,\ldots,j \end{cases}$$

- 系数 $N_\pm$：$\hat{j}_\pm|\lambda m\rangle = N_\pm(\lambda,m)\hbar|\lambda m\pm 1\rangle$.

$$\begin{aligned} |N_\pm|^2\hbar^2 &= \langle jm|\hat{j}_\pm^\dagger\hat{j}_\pm|jm\rangle = \langle jm|\hat{j}_\mp\hat{j}_\pm|jm\rangle \\ &= \langle jm|\,\hat{\mathbf{j}}^2 - \hat{j}_z^2 \pm i\,[\hat{j}_x,\hat{j}_y]\,|jm\rangle \\ &= \hbar^2\big(j(j+1)-m(m\pm 1)\big) \end{aligned}$$

选择各态的相位使得 $N_\pm = \sqrt{j(j+1)-m(m\pm 1)}$,

$$\begin{aligned} \hat{j}_\pm|jm\rangle &= \sqrt{j(j+1)-m(m\pm 1)}\hbar|jm\pm 1\rangle \\ &= \sqrt{(j\mp m)(j\pm m+1)}\hbar|jm\pm 1\rangle \end{aligned}$$

- $|jm\rangle$ 构成 $(\hat{\mathbf{j}}^2,\hat{j}_z)$ 表象中的基矢。
- $\hat{j}_\pm$ 矩阵元：

$$(\hat{j}_\pm)_{jm,j'm'} = \langle jm|\hat{j}_\pm|j'm'\rangle = \delta_{jj'}\delta_{m,m'\pm 1}\sqrt{(j\mp m')(j\pm m'+1)}\hbar$$

由 $\hat{j}_x = \frac{1}{2}(\hat{j}_+ + \hat{j}_-)$, $\hat{j}_y = \frac{1}{2i}(\hat{j}_+ - \hat{j}_-)$ 可以得到 $\hat{j}_x$, $\hat{j}_y$ 矩阵元：

$$
\begin{aligned}
(\hat{j}_x)_{jm,j'm'} =& \frac{\hbar}{2}\delta_{jj'}\Big[\sqrt{(j-m')(j+m'+1)}\delta_{m,m'+1} \\
&+\sqrt{(j+m')(j-m'+1)}\delta_{m,m'-1}\Big] \\
(\hat{j}_y)_{jm,j'm'} =& \frac{\hbar}{2i}\delta_{jj'}\Big[\sqrt{(j-m')(j+m'+1)}\delta_{m,m'+1} \\
&-\sqrt{(j+m')(j-m'+1)}\delta_{m,m'-1}\Big]
\end{aligned}
$$

总结：

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{j}}^2|jm\rangle = j(j+1)\hbar^2|jm\rangle\,, & j\text{ 可能取值} j=0,\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},\ldots \\ \hat{j}_z|jm\rangle = m\hbar|jm\rangle\,, & \text{取定} j \text{ 后} m=-j,-j+1,-j+2,\ldots,j \end{cases}$$

$$\hat{j}_\pm|jm\rangle = \sqrt{(j\mp m)(j\pm m+1)}\hbar|jm\pm 1\rangle$$

$\hat{j}_\pm$ 矩阵元：

$$(\hat{j}_\pm)_{jm,j'm'} = \langle jm|\hat{j}_\pm|j'm'\rangle = \delta_{jj'}\delta_{m,m'\pm 1}\sqrt{(j\mp m')(j\pm m'+1)}\hbar$$

上一章我们考虑了哈密顿量中有轨道角动量和自旋的耦合项 $\hat{\mathbf{S}}\cdot\hat{\mathbf{L}}$,

- $\hat{\mathbf{L}}^2$, $\hat{L}_z$, $\hat{\mathbf{S}}^2$, $\hat{S}_z$ 两两对易，可以有共同的本征态系。
- 自旋量子数 $s=1/2$, $\mathbf{S}^2=s(s+1)\hbar^2=\frac{3}{4}\hbar^2; s_z=m_s\hbar$, $m_s=\pm\frac{1}{2}$,
- 轨道量子数 l, $\hat{\mathbf{L}}^2$ 的本征值 $l(l+1)\hbar^2$, $l=0,1,2,\ldots;$ $L_z=m\hbar$, $m=-l,-l+1,\ldots,l$.
- $|l,m\rangle\otimes|\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2}\rangle$ 构成轨道和自旋张量积空间的一组基矢 — ($\hat{\mathbf{S}}^2$, $\hat{S}_z$, $\hat{\mathbf{L}}^2$, $\hat{L}_z$) 表象, $\hat{S}_z, L_z$ 并不是守恒量。

- 总角动量 $\hat{\mathbf{J}} = \hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{S}}$, 是守恒量。$\hat{\mathbf{J}}^2$, $\hat{J}_z$, $\hat{\mathbf{L}}^2$, $\hat{\mathbf{S}}^2$ 两两对易，可以有共同的本征态 — ($\hat{\mathbf{J}}^2$, $\hat{J}_z$, $\hat{\mathbf{L}}^2$, $\hat{\mathbf{S}}^2$) 表象, 均为守恒量

$$
\begin{aligned}
\hat{\mathbf{J}}^2|l,s,j,m_j\rangle &= j(j+1)\hbar^2|l,s,j,m_j\rangle, \\
\hat{\mathbf{L}}^2|l,s,j,m_j\rangle &= l(l+1)\hbar^2|l,s,j,m_j\rangle\,, \\
\hat{\mathbf{S}}^2|l,s,j,m_j\rangle &= s(s+1)\hbar^2|l,s,j,m_j\rangle \xrightarrow{s=1/2} \frac{3}{4}\hbar^2|l,s,j,m_j\rangle, \\
\hat{J}_z|l,s,j,m_j\rangle &= m_j\hbar|l,s,j,m_j\rangle
\end{aligned}
$$

给定 $s=1/2$ 和 l, 总角动量角量子数 j 的可能取值是 $l \pm \frac{1}{2}$, $m_j = -j, -j+1, \ldots j$, $s = 1/2$.

$$\Psi_{ljm_j} = \frac{1}{\sqrt{2j}} \begin{bmatrix} \sqrt{j+m_j} \; Y_{j-1/2,m_j-1/2} \\ \sqrt{j-m_j} \; Y_{j-1/2,m_j+1/2} \end{bmatrix}, \quad \begin{array}{rl} j = & \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \ldots \\ m_j = & -j, -j+1, \ldots, j \end{array}$$

$$\Psi_{ljm_j} = \frac{1}{\sqrt{2j+2}} \begin{bmatrix} -\sqrt{j-m_j+1} \; Y_{j+1/2,m_j-1/2} \\ \sqrt{j+m_j+1} \; Y_{j+1/2,m_j+1/2} \end{bmatrix},$$

$$j = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \ldots; m_j = -j, -j+1, \ldots, j$$

给定 $|l, s, j, m_j\rangle$, $l = j \pm 1/2$, $s = 1/2$, 可以用 $(\hat{\mathbf{L}}^2, \hat{L}_z, \hat{\mathbf{S}}^2, \hat{S}_z)$ 表象的基矢 $|l, m_z; s, m_s\rangle \equiv |l, m_z\rangle \otimes |s, m_s\rangle$ 展开:

$$\begin{aligned} \left|j-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, j, m_j\right\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2j}}\left(\sqrt{j+m_j}\left|j-\frac{1}{2}, m_j-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle\right. \\ &\quad \left. +\sqrt{j-m_j}\left|j-\frac{1}{2}, m_j+\frac{1}{2}; \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle\right) \\ \left|j+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, j, m_j\right\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2j+2}}\left(-\sqrt{j-m_j+1}\left|j+\frac{1}{2}, m_j-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle\right. \\ &\quad \left. +\sqrt{j+m_j+1}\left|j+\frac{1}{2}, m_j+\frac{1}{2}; \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle\right) \end{aligned}$$

我们还学过了两个自旋 1/2 全同粒子耦合：

- $(\hat{\mathbf{s}}_1^2, \hat{s}_{1z}, \hat{\mathbf{s}}_2^2, \hat{s}_{2z})$ 表象，基矢 $|s_1, m_{1s}; s_2, m_{2s}\rangle \equiv |s_1, m_{1s}\rangle \otimes |s_2, m_{2s}\rangle$：

$$|\uparrow,\uparrow\rangle \equiv |\frac{1}{2},\frac{1}{2};\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle, \qquad |\uparrow,\downarrow\rangle \equiv |\frac{1}{2},\frac{1}{2};\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle,$$
$$|\downarrow,\uparrow\rangle \equiv |\frac{1}{2},-\frac{1}{2};\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle, \qquad |\downarrow,\downarrow\rangle \equiv |\frac{1}{2},-\frac{1}{2};\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle$$

- 定义总自旋角动量 $\hat{\mathbf{S}} = \hat{\mathbf{s}}_1 + \hat{\mathbf{s}}_2$.
  $(\hat{\mathbf{s}}_1^2, \hat{\mathbf{s}}_2^2, \hat{\mathbf{S}}^2, \hat{S}_z)$ 表象，基矢 $|S, M_S\rangle \equiv |s_1 = \frac{1}{2}, s_2 = \frac{1}{2}, S, M_S\rangle$,
  $\hat{\mathbf{S}}^2|S, M_S\rangle = S(S+1)\hbar^2|S, M_S\rangle$,
  $S = s_1 + s_2 = 1$ 或者 $s_1 - s_2 = 0$.
- $|S, M_S\rangle$ 可以在 $(\hat{\mathbf{S}}_1^2, \hat{S}_{1z}; \hat{\mathbf{S}}_2^2, \hat{S}_{2z})$ 表象展开：

$$\begin{aligned}
|0,0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow,\downarrow\rangle - |\downarrow,\uparrow\rangle) \\
|1,0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow,\downarrow\rangle + |\downarrow,\uparrow\rangle) \\
|1,1\rangle &= |\uparrow,\uparrow\rangle, \quad |1,-1\rangle = |\downarrow,\downarrow\rangle
\end{aligned}$$

现在来考虑一般的两个角动量耦合 $\hat{\mathbf{J}}_1$, $\hat{\mathbf{J}}_2$, 对易关系：

$$\hat{\mathbf{J}}_1 \times \hat{\mathbf{J}}_1 = i\hbar \hat{\mathbf{J}}_1\,, \quad \hat{\mathbf{J}}_2 \times \hat{\mathbf{J}}_2 = i\hbar \hat{\mathbf{J}}_2\,, \quad [\hat{J}_{1i}, \hat{J}_{2j}] = 0\,.$$

$\hat{\mathbf{J}}_1, \hat{\mathbf{J}}_2$ 相互独立，对应两组独立的自由度。

- 算符 $\hat{\mathbf{J}}_1^2$, $\hat{J}_{1z}$, $\hat{\mathbf{J}}_2^2$, $\hat{J}_{2z}$ 互相对易，有共同本征态系，

  $$\begin{cases} \hat{\mathbf{J}}_1^2 |j_1, m_1\rangle = j_1(j_1+1)\hbar^2 |j_1, m_1\rangle\,, \\ \hat{J}_{1z} |j_1, m_1\rangle = m_1\hbar |j_1, m_1\rangle\,, \end{cases} \quad \begin{cases} \hat{\mathbf{J}}_2^2 |j_2, m_2\rangle = j_2(j_2+1)\hbar^2 |j_2, m_2\rangle\,, \\ \hat{J}_{2z} |j_2, m_2\rangle = m_2\hbar |j_2, m_2\rangle\,, \end{cases}$$

  $|j_1, m_1; j_2, m_2\rangle \equiv |j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle$ 是共同本征态，构成 $(\hat{\mathbf{J}}_1^2, \hat{J}_{1z}, \hat{\mathbf{J}}_2^2, \hat{J}_{2z})$ 表象中一组基矢, 称作非耦合表象。
- 固定 j_1,j_2, 则 $-j_1 \le m_1 \le j_1$, $-j_2 \le m_2 \le j_2$, 构成 $(2j_1+1) \times (2j_2+1)$ 维子空间。

定义总角动量 $\hat{\mathbf{J}} = \hat{\mathbf{J}}_1 + \hat{\mathbf{J}}_2$, 同样满足角动量对易关系

$$\hat{\mathbf{J}} \times \hat{\mathbf{J}} = i\hbar\hat{\mathbf{J}}$$

且

$$[\hat{\mathbf{J}}^2, \hat{\mathbf{J}}] = 0, \quad [\hat{\mathbf{J}}^2, \hat{\mathbf{J}}_1^2] = 0\,, \quad [\hat{\mathbf{J}}^2, \hat{\mathbf{J}}_2^2] = 0, \quad [\hat{\mathbf{J}}_1^2, \hat{J}_z] = 0, \quad [\hat{\mathbf{J}}_2^2, \hat{J}_z] = 0$$

所以 $(\hat{\mathbf{J}}_1^2, \hat{\mathbf{J}}_2^2, \hat{\mathbf{J}}^2, \hat{J}_z)$ 构成一组对易力学量完全集（CSCO），共同本征态 $|j_1 j_2, jm\rangle$, 或在固定 j_1, j_2 时简写为 $|jm\rangle$：

$$\hat{\mathbf{J}}^2|j_1 j_2, jm\rangle = j(j+1)\hbar^2|j_1 j_2, jm\rangle\,, \quad \hat{\mathbf{J}}_z|j_1 j_2, jm\rangle = m\hbar|j_1 j_2, jm\rangle$$
$$\hat{\mathbf{J}}_1^2|j_1 j_2, jm\rangle = j_1(j_1+1)\hbar^2|j_1 j_2, jm\rangle\,, \quad \hat{\mathbf{J}}_2^2|j_1 j_2, jm\rangle = j_2(j_2+1)\hbar^2|j_1 j_2, jm\rangle$$

称为耦合表象。

下面我们来看耦合表象与非耦合表象之间的关系 (固定 j_1, j_2)

- $|j_1, m_1; j_2, m_2\rangle$ 是 $\hat{J}_z = \hat{J}_{1z} + \hat{J}_{2z}$ 的本征态,

$$\hat{J}_z|j_1, m_1; j_2, m_2\rangle = (m_1 + m_2)\hbar|j_1, m_1; j_2, m_2\rangle$$

- 由

$$\hat{\mathbf{J}}^2 = \hat{\mathbf{J}}_1^2 + \hat{\mathbf{J}}_2^2 + 2\hat{\mathbf{J}}_1 \cdot \hat{\mathbf{J}}_2,$$

$|j_1, m_1; j_2, m_2\rangle$ 并不是 $\hat{\mathbf{J}}^2$ 的本征态，$|jm\rangle \equiv |j_1 j_2, jm\rangle$ 可以用这组基展开

$$\begin{aligned} |jm\rangle &= \sum_{\substack{m_1, m_2 \\ m_1+m_2=m}} |j_1, m_1; j_2, m_2\rangle\langle j_1, m_1; j_2, m_2|jm\rangle \\ &= \sum_{m_1} C^{jm}_{j_1 m_1 j_2, m-m_1}|j_1, m_1; j_2, m - m_1\rangle \end{aligned}$$

$C^{jm}_{j_1 m_1 j_2 m_2}$ 称作Clebsch-Gordan (CG) 系数, 只有 $m = m_1 + m_2$时不为零。由于波函数相因子的任意性，我们可以选择各态相因子使 CG 系数取成实数。

- 由态的正交归一性 (选定 j_1, j_2, 令 $|jm\rangle \equiv |j_1 j_2, jm\rangle$), 对于 $m = m'$:

$$
\begin{aligned}
\delta_{jj'} &= \langle j' m | jm\rangle \\
&= \sum_{m_1, m_2} \langle j' m | j_1, m_1; j_2, m_2\rangle \langle j_1, m_1; j_2, m_2 | jm\rangle \\
&= \sum_{m_1} \langle j' m | j_1, m_1; j_2, m - m_1\rangle \langle j_1, m_1; j_2, m - m_1 | jm\rangle
\end{aligned}
$$

得到: $$\sum_{m_1} \langle j_1, m_1; j_2, m - m_1 | j' m\rangle \langle j_1, m_1; j_2, m - m_1 | jm\rangle = \delta_{jj'}$$

即: $$\sum_{m_1} C^{j' m}_{j_1 m_1 j_2, m-m_1} C^{jm}_{j_1 m_1 j_2, m-m_1} = \delta_{jj'}$$

- 逆变换：

$$
\begin{aligned}
|j_1, m_1; j_2, m_2\rangle &= \sum_{\substack{j,m \\ m=m_1+m_2}} |jm\rangle\langle jm|j_1, m_1; j_2, m_2\rangle \\
&= \sum_{j} \langle j_1, m_1; j_2, m_2|j, m_1+m_2\rangle |j, m_1+m_2\rangle
\end{aligned}
$$

给定 j_1, j_2, m_1, m_2 后，对所有可能的 j 求和，我们需要知道给定 j_1, j_2 后 j 的可能取值。

给定 j_1,j_2 后，m_1, m_2 取值：

$$\begin{cases} m_1 = -j_1, -j_1+1, \ldots, j_1 \\ m_2 = -j_2, -j_2+1, \ldots, j_2 \end{cases}$$

由 $m = m_1 + m_2$，m 的可能取值如下：

$$\begin{cases}
\begin{array}{rllll}
j_1+j_2: & j_1+j_2 & & \\
j_1+j_2-1: & j_1+(j_2-1) & (j_1-1)+j_2 & \\
j_1+j_2-2: & j_1+(j_2-2) & (j_1-1)+(j_2-1) & (j_1-2)+j_2 \\
 & \cdots\cdots & & \\
-j_1-j_2+2: & -j_1-(j_2-2) & -(j_1-1)-(j_2-1) & -(j_1-2)-j_2 \\
-j_1-j_2+1: & -j_1-(j_2-1) & -(j_1-1)-j_2 & \\
-j_1-j_2: & -j_1-j_2 & &
\end{array}
\end{cases}$$

- $m_{max} = m_{1,max} + m_{2,max} = j_1 + j_2$，唯一的态 $\left|j_1, j_1; j_2, j_2\right\rangle$，只有可能是 $|jm\rangle = \left|j_1+j_2, j_1+j_2\right\rangle$ 态，j 的最大值是 $j_1 + j_2$。

验证：由

$$\hat{\mathbf{J}}^2 = \hat{\mathbf{J}}_1^2 + \hat{\mathbf{J}}_2^2 + (\hat{J}_{1+}\hat{J}_{2-} + \hat{J}_{1-}\hat{J}_{2+} + 2\hat{J}_{1z}\hat{J}_{2z}),$$

其中 $\hat{J}_{i\pm} = \hat{J}_{ix} \pm i\hat{J}_{iy}$, $\hat{J}_{i+}|j_i, j_i\rangle = 0$, $i = 1, 2$

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{J}}^2|j_1, j_1; j_2, j_2\rangle &= \hbar^2\big(j_1(j_1+1) + j_2(j_2+1) + 2j_1j_2\big)|j_1, j_1; j_2, j_2\rangle \\
&= \hbar^2(j_1+j_2)(j_1+j_2+1)|j_1, j_1; j_2, j_2\rangle
\end{aligned}$$

$|j_1, j_1; j_2, j_2\rangle$ 是 $\hat{\mathbf{J}}^2$ 的本征态，总角动量角量子数$j = j_1 + j_2$。

我们实际上得到了一个 CG 系数：

$$\langle j_1, m_1 = j_1; j_2, m_2 = j_2 | j_1 + j_2, m = j_1 + j_2\rangle = 1.$$

利用$\hat{J}_-|J,M\rangle=\sqrt{(J+M)(J-M+1)}|J,M-1\rangle$, 可以得到总角动量角量子数为 $j=j_1+j_2$ 的 $\hat{\mathbf{J}}^2$, $\hat{J}_z$ 的其他的共同本征态.

$$
\begin{aligned}
|j_1+j_2,j_1+j_2-1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2(j_1+j_2)}}\hat{J}_-|j_1+j_2,j_1+j_2\rangle \\
&=\frac{1}{\sqrt{2(j_1+j_2)}}(\hat{J}_{1-}+\hat{J}_{2-})|j_1,j_1;j_2,j_2\rangle \\
&=\frac{1}{\sqrt{2(j_1+j_2)}}(\sqrt{2j_1}|j_1,j_1-1;j_2,j_2\rangle+\sqrt{2j_2}|j_1,j_1;j_2,j_2-1\rangle)
\end{aligned}
$$

所以我们已经求出了两个 CG 系数：

$$
\begin{cases}
\langle j_1,j_1-1;j_2,j_2|j_1+j_2,j_1+j_2-1\rangle=\sqrt{\frac{j_1}{j_1+j_2}} \\
\langle j_1,j_1;j_2,j_2-1|j_1+j_2,j_1+j_2-1\rangle=\sqrt{\frac{j_2}{j_1+j_2}}
\end{cases}
$$

以此类推，用 $\hat{J}_-$ 作用下去，得到总角动量角量子数为$j=j_1+j_2$的所有 $\hat{\mathbf{J}}^2$ 和 $\hat{J}_z$ 的共同本征态$|j_1+j_2,m\rangle$, $m=-(j_1+j_2),-(j_1+j_2)+1,\ldots,j_1+j_2$ 用 $|j_1,m_1;j_2,m_2\rangle$ 的表示形式。

- 前面我们固定 j_1,j_2, 总角动量角量子数最大的取值为 j_1+j_2, 求出了各态。
- 剩下的非耦合态中，m 最大值为j_1+j_2-1, 所以剩下的态中总角动量角量子数最大是j_1+j_2-1.
- 对于 $\hat{J}_z$ 本征值为 $m=j_1+j_2-1$ 的独立的态，有两个，$|j_1,j_1;j_2,j_2-1\rangle$, $|j_1,j_1-1;j_2,j_2\rangle$.
- 我们已经求得

$$|j_1+j_2,j_1+j_2-1\rangle=\frac{1}{\sqrt{(j_1+j_2)}}\left(\sqrt{j_1}|j_1,j_1-1;j_2,j_2\rangle+\sqrt{j_2}|j_1,j_1;j_2,j_2-1\rangle\right)$$

还有一个与之正交的, 只能是$j=j_1+j_2-1$的 $\hat{\mathbf{J}}^2$ 的本征态，$m=j_1+j_2-1$:

$$|j_1+j_2-1,j_1+j_2-1\rangle=\frac{1}{\sqrt{(j_1+j_2)}}\left(\sqrt{j_2}|j_1,j_1-1;j_2,j_2\rangle-\sqrt{j_1}|j_1,j_1;j_2,j_2-1\rangle\right)$$

- 类似前面, 用$\hat{J}_-$作用上去，得到其他磁量子数对应的态。这样我们的到了在耦合表象中$j=j_1+j_2-1$的所有 $\hat{\mathbf{J}}^2$ 和 $\hat{J}_z$ 的共同本征态$|j_1+j_2-1,m\rangle$, $m=-(j_1+j_2-1),-(j_1+j_2-1)+1,\ldots,j_1+j_2-1$ 用 $|j_1,m_1;j_2,m_2\rangle$ 的表示形式。

以此类推：我们还可以得到总角动量角量子数的所有取值

$$j = j_1 + j_2, j_1 + j_2 - 1, \ldots, j_{min}$$

的所有态。j_{min} 的最小值我们可以利用空间的总维数与基矢的选取无关求得：

- 非耦合表象中，所有的态 $|j_1, m_1; j_2, m_2\rangle$，固定 j_1,j_2 后，m_1,m_2 取值不同，总共有$(2j_1 + 1) \times (2j_2 + 1)$个态。
- 耦合表象中，所有的态 $|j, m\rangle$，固定 j_1,j_2 后，$j = j_1 + j_2, j_1 + j_2 - 1, \ldots, j_{min}$，总共有

$$\sum_{j=j_{min}}^{j_1+j_2} (2j + 1) = (j_1 + j_2 + j_{min} + 1)(j_1 + j_2 - j_{min} + 1)$$

个态。

- 两者相等，求得：若 $j_1 \geq j_2$，$j_{min} = j_1 - j_2$；若 $j_2 \geq j_1$，$j_{min} = j_2 - j_1$，即 $j_{min} = |j_1 - j_2|$. 这样，j 的取值范围：

$$j = j_1 + j_2, j_1 + j_2 - 1, \ldots, |j_1 - j_2|$$

两个角动量算符耦合, CG 系数性质：

- 仅当 $m = m_1 + m_2$ 时，$\langle j_1, m_1; j_2, m_2 | jm \rangle$ 才不为零。
- 仅当 $|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2$ 时，$\langle j_1, m_1; j_2, m_2 | jm \rangle$ 不为零。

CG 系数的相位约定：

- CG 系数为实。
- $\langle j_1, m_1 = j_1; j_2, m_2 = j - j_1 | j, m = j \rangle$ 为非负实数。

CG 系数的对称性关系：

$$
\begin{aligned}
\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j_3 m_3 \rangle &= (-1)^{j_1+j_2-j_3} \langle j_1, -m_1; j_2, -m_2 | j_3, -m_3 \rangle \\
&= (-1)^{j_1+j_2-j_3} \langle j_2 m_2; j_1 m_1 | j_3 m_3 \rangle \\
&= (-1)^{j_1-m_1} \sqrt{\frac{2j_3+1}{2j_2+1}} \langle j_1 m_1; j_3, -m_3 | j_2, -m_2 \rangle \\
&= (-1)^{j_2+m_2} \sqrt{\frac{2j_3+1}{2j_1+1}} \langle j_3, -m_3; j_2 m_2 | j_1, -m_1 \rangle \\
&= (-1)^{j_1-m_1} \sqrt{\frac{2j_3+1}{2j_2+1}} \langle j_3 m_3; j_1, -m_1 | j_2 m_2 \rangle \\
&= (-1)^{j_2+m_2} \sqrt{\frac{2j_3+1}{2j_1+1}} \langle j_3 m_3; j_2, -m_2 | j_1 m_1 \rangle
\end{aligned}
$$

总结

- 谐振子的代数解法：升算符，降算符

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1, \quad [\hat{a}, \hat{a}] = [\hat{a}^\dagger, \hat{a}^\dagger] = 0$$

粒子数表象，$\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$, 的本征态 $|n\rangle$, $n = 0, 1, \ldots,$

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \quad a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle\,.$$

- 角动量本征值本征态：$\hat{j}^2, \hat{j}_z$ 共同本征态 $|jm\rangle$，上升下降算符 $\hat{j}_\pm = \hat{j}_x \pm i\hat{j}_y$, 对易关系，以及
$\hat{j}_\pm|jm\rangle = \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}|jm \pm 1\rangle$。
- 两个角动量的耦合：
非耦合表象 $\{\hat{\mathbf{J}}_1^2, \hat{J}_{1z}, \hat{\mathbf{J}}_2^2, \hat{J}_{2z}\}$, $|j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle$.
耦合表象 $\{\hat{\mathbf{J}}_1^2, \hat{\mathbf{J}}_2^2, \hat{\mathbf{J}}^2, \hat{J}_z\}$, $|j_1 j_2, jm\rangle$.
CG 系数 $C^{jm}_{j_1, m_1; j_2, m-m_1} = \langle j_1, m_1; j_2, m - m_1 | jm\rangle$.
固定 j_1, j_2, $j = j_1 + j_2, j_1 + j_2 - 1, \ldots, |j_1 - j_2|$.

作业：

曾谨言《量子力学教程》(第三版):

1. P181-182: 9.4

2. 设算符 $\hat{F}$ 与角动量算符 $\hat{\mathbf{J}}$ 对易。$\{\hat{\mathbf{J}}^2, \hat{J}_z\}$ 共同本征态 $|jm\rangle$ 下，证明：
(1) $\langle jm+1|\hat{F}|jm+1\rangle = \langle jm|\hat{F}|jm\rangle$, 从而说明 $\hat{F}$ 的平均值与磁量子数 m 没有关系。
(2) 在选定 j 的 $2j+1$ 个基矢 $|jm\rangle$, $m=-j,\ldots,j$，张成的子空间里，$\hat{F}$ 表示为常数对角矩阵。

3.) 两个角动量 $\hat{\mathbf{J}}_1$, $\hat{\mathbf{J}}_2$ 耦合，总角动量 $\hat{\mathbf{J}} = \hat{\mathbf{J}}_1 + \hat{\mathbf{J}}_2$, 在耦合表象 $|j_1j_2, jm\rangle$ 下, 证明：

$$\begin{aligned}\langle j_1j_2, jm|\hat{J}_{1x}|j_1j_2, jm\rangle =& \langle j_1j_2, jm|\hat{J}_{1y}|j_1j_2, jm\rangle = \\ & \langle j_1j_2, jm|\hat{J}_{2x}|j_1j_2, jm\rangle = \langle j_1j_2, jm|\hat{J}_{2y}|j_1j_2, jm\rangle = 0\end{aligned}$$