# 量子力学

## 第七章：带电粒子在电磁场中的运动

肖志广

中国科学技术大学物理学院近代物理系

*xiaozg@ustc.edu.cn*

2019 年 11 月 25 日

## 经典 Hamilton 量：

考虑质量为 $\mu$，电荷量为 $q$ 的粒子在电磁场中的运动.

**问题：**

研究处于外电磁场中运动的带电粒子的量子力学时，如何构造体系的 Hamilton 算符呢?

经典情形：
设电磁场的规范势为 $(\phi, \mathbf{A})$，则此带电粒子的运动由洛仑兹力决定

$$\mu\,\ddot{\mathbf{x}} = q\mathbf{E} + \frac{q}{c}\,\mathbf{v}\times\mathbf{B}$$

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c}\partial_t\mathbf{A}, \qquad \mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A}$$

分别是外电磁场的电场强度与磁感应强度. Lorentz 力依赖速度，不能写成势的梯度.

# 经典哈密顿量

粒子的动力学可以由如下哈密顿量描写：

$$H = \frac{1}{2\mu}\left(\mathbf{P} - \frac{q}{c}\mathbf{A}\right)^2 + q\phi$$

式中 $\mathbf{P}$ 称为粒子的正则动量，其显式表示由 Hamilton 正则方程 $\dot{\mathbf{r}} = \nabla_{\mathbf{P}} H$ 决定，

$$v_i = \dot{x}_i = \partial_{P_i} H = \frac{1}{\mu}\left(P_i - \frac{q}{c}A_i\right) \qquad \rightsquigarrow \quad \mathbf{P} = \mu\mathbf{v} + \frac{q}{c}\mathbf{A}$$

所以，在存在磁场的情况下，带电粒子的正则动量 $\mathbf{P}$ 不等于其机械动量 $\mu\mathbf{v}$.

$$H = \frac{1}{2\mu}\left(\mathbf{P} - \frac{q}{c}\mathbf{A}\right)^2 + q\phi$$

粒子的经典动力学方程由另一 Hamilton 方程 $\dot{\mathbf{P}} = -\nabla_{\mathbf{r}} H$ 给出：

$$\dot{P}_i = \frac{q}{\mu c}\left(P_j - \frac{q}{c}A_j\right)\ \partial_i A_j - q\partial_i\phi = \frac{q}{c}v_j\partial_i A_j - q\partial_i\phi$$

利用前面得到正则动量 $\mathbf{P} = \mu\mathbf{v} + \frac{q}{c}\mathbf{A}(\mathbf{x}(t), t)$ ，

$$\dot{P}_i = \mu\dot{v}_i + \frac{q}{c}\dot{A}_i = \mu\dot{v}_i + \frac{q}{c}\left(\partial_t A_i(\mathbf{x}(t), t) + v_j\partial_j A_i(\mathbf{x}, t)\right)$$

所以：

$$\begin{aligned}
\mu\dot{v}_i \quad &= -\frac{q}{c}\left(\partial_t A_i + v_j\partial_j A_i\right) + \frac{q}{c}v_j\partial_i A_j - q\partial_i\phi \\
&= q\left(-\partial_i\phi - \frac{1}{c}\partial_t A_i\right) + \frac{q}{c}v_j(\partial_i A_j - \partial_j A_i) \\
&= q\left(E_i + \frac{1}{c}\epsilon_{ijk}v_j B_k\right)
\end{aligned}$$

即,

$$\mu\,\ddot{\mathbf{x}} = q\mathbf{E} + \frac{q}{c}\,\mathbf{v}\times\mathbf{B}$$

正是带电粒子在电磁场中运动的 Lorentz 力公式 (Gauss 单位制).
式中

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c}\partial_t\mathbf{A}, \qquad \mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A}$$

分别是外电磁场的电场强度与磁感应强度.

# 正则量子化:

从经典力学向量子力学过渡的正则量子化程序:
在经典哈密顿量中将粒子的正则动量 $\mathbf{P}$替换为如下 Hilbert 空间中的线性 Hermite 算符

$$\mathbf{P} \qquad\qquad \rightsquigarrow \hat{\mathbf{P}} = -i\hbar\nabla$$

就得到了位置表象中描写带电粒子在电磁场中运动的 Hamilton 算符:

$$\hat{H} = \frac{1}{2\mu}\left(-i\hbar\nabla - \frac{q}{c}\mathbf{A}\right)^2 + q\phi$$

相应的 Schrödinger 方程表为:

$$i\hbar\partial_t\psi = \left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\left(\nabla - \frac{iq}{\hbar c}\mathbf{A}\right)^2 + q\phi\right]\psi$$

## 说明：

一般情况下，$\hat{\mathbf{P}}$ 与 $\mathbf{A}$ 不对易，

$$\hat{\mathbf{P}}\cdot\mathbf{A}-\mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{P}}=\hat{P}_iA_i-A_i\hat{P}_i=[\hat{P}_i,\ A_i]=-i\hbar\partial_iA_i=-i\hbar\nabla\cdot\mathbf{A}$$

但若利用库仑规范 $\nabla\cdot\mathbf{A}=0$，则可令上式右端为零. 于是，可以将 Schrödinger 方程在库仑规范中等价地表为：

$$\begin{aligned}i\hbar\partial_t\psi &= \left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\left(\nabla-\frac{iq}{\hbar c}\mathbf{A}\right)\left(\nabla-\frac{iq}{\hbar c}\mathbf{A}\right)+q\phi\right]\psi\\ &= \left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\left(\nabla^2-\frac{iq}{\hbar c}\mathbf{A}\cdot\nabla-\frac{iq}{\hbar c}\Big((\nabla\cdot\mathbf{A})+\mathbf{A}\cdot\nabla\Big)-\frac{q^2}{\hbar^2c^2}\mathbf{A}^2\right)+q\phi\right]\psi\\ &= \left[\frac{1}{2\mu}\hat{\mathbf{P}}^2-\frac{q}{\mu c}\mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{P}}+\frac{q^2}{2\mu c^2}\mathbf{A}^2+q\phi\right]\psi\end{aligned}$$

说明：

关于正则量子化: 必须是正则动量 $\mathbf{P} \rightarrow -i\hbar\nabla$。

更一般的，由泊松括号和正则方程：($q$,$p$ 为正则坐标和正则动量)

$$\begin{aligned}
\{f(q,p), g(q,p)\} =& \frac{\partial f(q,p)}{\partial q}\frac{\partial g(q,p)}{\partial p} - \frac{\partial f(q,p)}{\partial p}\frac{\partial g(q,p)}{\partial q} \\
\{q,p\} =& 1 \\
\dot{q} =& \frac{\partial H(q,p)}{\partial p} = \{q, H(q,p)\} \\
\dot{p} =& -\frac{\partial H(q,p)}{\partial q} = \{p, H(q,p)\}
\end{aligned}$$

将泊松括号 $\{\ ,\ \} \rightarrow -\frac{i}{\hbar}[\ ,\ ]$, 所有力学量变成算符

$$[\hat{q},\hat{p}] = i\hbar, \quad \frac{d\hat{q}}{dt} = -\frac{i}{\hbar}[\hat{q},\hat{H}], \quad \frac{d\hat{p}}{dt} = -\frac{i}{\hbar}[\hat{p},\hat{H}]$$

得到我们熟知的正则对易关系和海森堡图像下的算符演化方程。

## 讨论:

- 概率守恒定律. 现在计算 $|\psi|^2$ 的时间变化率. 注意到库仑规范里薛定谔方程及其复共轭方程分别为:

$$i\hbar\partial_t\psi = \left[\frac{1}{2\mu}\hat{\mathbf{P}}^2 - \frac{q}{\mu c}\mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{P}} + \frac{q^2}{2\mu c^2}\mathbf{A}^2 + q\phi\right]\psi$$

$$-i\hbar\partial_t\psi^* = \left[\frac{1}{2\mu}\hat{\mathbf{P}}^2 + \frac{q}{\mu c}\mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{P}} + \frac{q^2}{2\mu c^2}\mathbf{A}^2 + q\phi\right]\psi^*$$

且 $\nabla\cdot\mathbf{A}=0$, 我们有:

$$\begin{aligned}
i\hbar\partial_t|\psi|^2 =& \frac{1}{2\mu}\left(\psi^*\hat{\mathbf{P}}^2\psi - \psi\hat{\mathbf{P}}^2\psi^*\right) - \frac{q}{\mu c}\left(\psi^*\mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{P}}\psi + \psi\mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{P}}\psi^*\right)\\
=& -\frac{i\hbar}{2\mu}\nabla\cdot\left(\psi^*\hat{\mathbf{P}}\psi - \psi\hat{\mathbf{P}}\psi^* - \frac{2q}{c}\psi^*\mathbf{A}\psi\right)\\
=& -\frac{i\hbar}{2\mu}\nabla\cdot\left[\psi^*\left(\hat{\mathbf{P}} - \frac{q}{c}\mathbf{A}\right)\psi + \psi\left(\hat{\mathbf{P}} - \frac{q}{c}\mathbf{A}\right)^*\psi^*\right]
\end{aligned}$$

即

$$\partial_t\rho+\nabla\cdot\mathbf{j}=0$$

即概率守恒定律，式中

$$\begin{aligned}\rho&=\psi^*\psi\\ \mathbf{j}&=\frac{1}{2\mu}\left[\psi^*\left(\hat{\mathbf{P}}-\frac{q}{c}\mathbf{A}\right)\psi+\psi\left(\hat{\mathbf{P}}-\frac{q}{c}\mathbf{A}\right)^*\psi^*\right]\end{aligned}$$

注意到电磁场中带电粒子的速度算符是

$$\hat{\mathbf{v}}=\frac{1}{\mu}\left(\hat{\mathbf{P}}-\frac{q}{c}\mathbf{A}\right)$$

概率流密度矢量又可以写为:

$$\mathbf{j}=\frac{1}{2}(\psi^*\hat{\mathbf{v}}\psi+\psi\hat{\mathbf{v}}^*\psi^*)=\mathrm{Re}(\psi^*\hat{\mathbf{v}}\psi)$$

相当于将没有电磁场的概率密度流中 $\hat{\mathbf{P}}\to(\hat{\mathbf{P}}-\frac{q}{c}\mathbf{A})$

# 规范对称性

- 电磁场是一种规范场，当电磁势作下列定域规范变换时，

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \quad &\rightsquigarrow \quad \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\chi(\mathbf{r}, t) \\ \phi \quad &\rightsquigarrow \quad \phi' = \phi - \frac{1}{c}\partial_t\chi(\mathbf{r}, t)\end{aligned}$$

电场强度 $\mathbf{E}$ 与磁感应强度 $\mathbf{B}$ 都不改变。 在经典电动力学中，带电粒子的动力学方程中只出现 $(\mathbf{E},\ \mathbf{B})$，不出现 $(\mathbf{A},\ \phi)$. 所以，其规范不变性是显然的.

可观测量都是规范变换下不变的。规范变换是不可观测的。
那么，量子力学的情况如何呢？

# 规范对称性

Schrödinger 方程中出现了依赖于规范选择的电磁势 $(\mathbf{A},\ \phi)$，但它可以通过对波函数做一个相位变换使其具有规范变换下的不变性，不变性意味着：规范变换前的薛定谔方程：

$$i\hbar\partial_t\psi = \left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\left(\nabla - \frac{iq}{\hbar c}\mathbf{A}\right)^2 + q\phi\right]\psi$$

变换后的 $\mathbf{A}'(x)$, $\phi'$, $\psi'$ 应该满足同样的方程：

$$i\hbar\partial_t\psi' = \left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\left(\nabla - \frac{iq}{\hbar c}\mathbf{A}'\right)^2 + q\phi'\right]\psi'$$

结论是：

$$\psi \qquad \rightsquigarrow \psi' = \exp\left[\frac{iq}{\hbar c}\,\chi(\mathbf{r}, t)\right]\,\psi$$

## 验证：

由

$$\psi' = \exp\left[\frac{iq}{\hbar c}\ \chi(\mathbf{r},t)\right]\psi$$

求其时间导数，薛定谔方程左边有：

$$\begin{aligned}
i\hbar\partial_t\psi' =& \exp\left[\frac{iq}{\hbar c}\ \chi(\mathbf{r},t)\right]\left[i\hbar\partial_t\psi - \frac{q}{c}\partial_t\chi(\mathbf{r},t)\ \psi\right] \\
=& \exp\left[\frac{iq}{\hbar c}\ \chi(\mathbf{r},t)\right]\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\left(\nabla - \frac{iq}{\hbar c}\mathbf{A}\right)^2\psi(x) + q\phi(x)\psi(x)\right. \\
&\left. -\frac{q}{c}\partial_t\chi(\mathbf{r},t)\ \psi\right]
\end{aligned}$$

右边, 先看 $\left(\nabla - \frac{iq}{\hbar c}\mathbf{A}'\right)^2 \psi'$。
利用 $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\chi$, $\phi'(x) = \phi(x) - \frac{1}{c}\partial_t\chi$,

$$
\begin{aligned}
& \left(\nabla - \frac{iq}{\hbar c}\mathbf{A}'\right)\psi'(x) \\
= \;& \exp\left[\frac{iq}{\hbar c}\,\chi(\mathbf{r},t)\right]\left(\frac{iq}{\hbar c}\nabla\chi + \nabla - \frac{iq}{\hbar c}(\mathbf{A} + \nabla\chi)\right)\psi(x) \\
= \;& \exp\left[\frac{iq}{\hbar c}\,\chi(\mathbf{r},t)\right]\left(\nabla - \frac{iq}{\hbar c}\mathbf{A}\right)\psi(x)
\end{aligned}
$$

同样:

$$
\begin{aligned}
& \left(\nabla - \frac{iq}{\hbar c}\mathbf{A}'\right)^2 \psi'(x) \\
= \;& \exp\left[\frac{iq}{\hbar c}\,\chi(\mathbf{r},t)\right]\left(\nabla - \frac{iq}{\hbar c}\mathbf{A}\right)^2 \psi(x)
\end{aligned}
$$

这样，右边

$$
\begin{aligned}
&\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\left(\nabla-\frac{iq}{\hbar c}\mathbf{A}'\right)^2+q\phi'\right]\psi' \\
&=\exp\left[-\frac{iq}{\hbar c}\ \chi(\mathbf{r},t)\right]\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\left(\nabla-\frac{iq}{\hbar c}\mathbf{A}\right)^2\psi(x)+q\phi\psi(x)-\frac{q}{c}(\partial_t\chi)\psi\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
i\hbar\partial_t\psi' &=\exp\left[\frac{iq}{\hbar c}\ \chi(\mathbf{r},t)\right]\left[i\hbar\partial_t\psi-\frac{q}{c}\partial_t\chi(\mathbf{r},t)\ \psi\right] \\
&=\exp\left[\frac{iq}{\hbar c}\ \chi(\mathbf{r},t)\right]\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\left(\nabla-\frac{iq}{\hbar c}\mathbf{A}\right)^2\psi(x)+q\phi(x)\psi(x)\right. \\
&\qquad\qquad\left.-\frac{q}{c}\partial_t\chi(\mathbf{r},t)\ \psi\right] \\
&=\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\left(\nabla-\frac{iq}{\hbar c}\mathbf{A}'\right)^2+q\phi'(\mathbf{r},t)\ \right]\psi'
\end{aligned}
$$

亦即电磁场中的 Schrödinger 方程具有规范变换下的不变性.

# 规范变换：

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} \quad &\rightsquigarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\chi(\mathbf{r}, t) \\
\phi \quad &\rightsquigarrow \phi' = \phi - \frac{1}{c}\partial_t\chi(\mathbf{r}, t) \\
\psi \quad &\rightsquigarrow \psi' = \exp\left[\frac{iq}{\hbar c}\ \chi(\mathbf{r}, t)\right]\ \psi
\end{aligned}$$

代表非物理的自由度：规范自由度, 对应同一个物理的电磁场场强 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$, 规范势 $\mathbf{A}$ 的选取不唯一。

(1) 库仑规范：$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$

(2) 洛仑兹规范：$\partial_\mu A^\mu = 0$, $\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A} = 0$.

# 规范变换

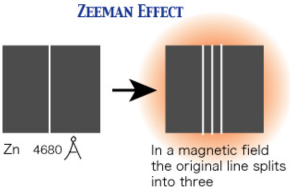
## 说明

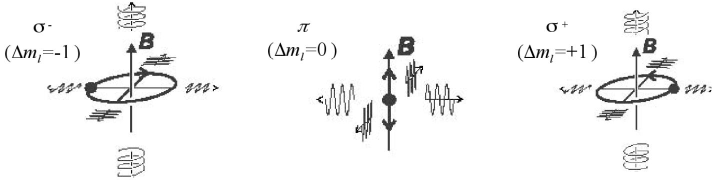
- 所有的可观测量应该跟规范选取无关。**E**, **B**.
- 概率密度:
$$\psi^*(x)\psi(x) = \psi'^*(x)\psi'(x)$$
- 概率流密度，由 $(\hat{\mathbf{P}} - \frac{q}{c}\mathbf{A}')\psi' = e^{\frac{iq}{\hbar c}\chi(\mathbf{r},t)}(\hat{\mathbf{P}} - \frac{q}{c}\mathbf{A})\psi$,
$$\frac{1}{2\mu}(\psi^*(\hat{\mathbf{P}} - \frac{q}{c}\mathbf{A})\psi + c.c.) = \frac{1}{2\mu}(\psi'^*(\hat{\mathbf{P}} - \frac{q}{c}\mathbf{A}')\psi' + c.c.)$$
- 没有电磁场的 $\nabla \to \nabla - i\frac{q}{\hbar c}\mathbf{A}$, 协变导数, 可以保证规范不变。

# 正常 ZEEMAN 效应：

原子中的电子可近似地看成在一个中心平均力场中运动，故其能级一般是简并的.

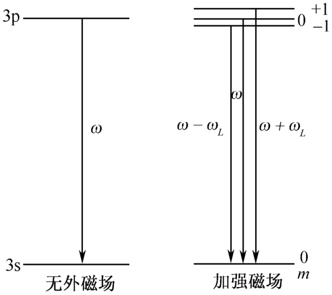
- 若将原子置于强磁场中，实验发现在垂直于磁场方向上看到原子所发出的每条光谱线都将分裂为 3 条. 并且为线偏振光。最外两条线偏振方向与中间线偏振方向垂直。
- 在平行于磁场方向上看到分裂成两条，圆偏振光。



物理机制：

- 光谱线的分裂意味着原子的简并能级在外磁场中发生了分裂，能级简并被原子与外磁场之间的相互作用哈密顿量解除或部分解除.



- 在原子尺度上，实验室中常用的外磁场都可视为均匀磁场，磁感应强度记为 $\mathbf{B}$，其大小、方向均不依赖于原子中电子的空间坐标. 根据量纲分析，不妨取相应的矢势为：

$$\mathbf{A} = \alpha \mathbf{r} \times \mathbf{B}\,, \quad \text{满足} \nabla \cdot \mathbf{A} = \epsilon_{ijk}\partial_i(x_j B_k) = -\mathbf{r} \cdot \nabla \times \mathbf{B} = 0$$

式中的常系数 $\alpha$ 由下式决定：

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} = \alpha \nabla \times (\mathbf{r} \times \mathbf{B}) = \alpha \mathbf{e}_i \epsilon_{ijk}\epsilon_{mnk}\partial_j(x_m B_n) \\ &= -\alpha \mathbf{e}_i \epsilon_{ijk}\epsilon_{njk} B_n = -2\alpha \mathbf{e}_i \delta_{in} B_n \\ &= -2\alpha \mathbf{B}\end{aligned}$$

故 $\alpha = -1/2$. 均匀外磁场的矢势表为：

$$\mathbf{A} = -\frac{1}{2}\mathbf{r} \times \mathbf{B}$$

取磁感应强度矢量的方向为$z$轴正方向，则矢势在直角坐标系中的各个分量是：

$$A_x = -\frac{1}{2}yB, \qquad A_y = \frac{1}{2}xB, \qquad A_z = 0.$$

$$A_x = -\frac{1}{2} yB, \qquad A_y = \frac{1}{2} xB, \qquad A_z = 0.$$

下面举例讨论正常 Zeeman 效应. 为简单计，考虑碱金属原子. 碱金属原子只有一个价电子 ($q = -e$)，它在原子核与内层满壳电子所产生的屏蔽 Coulomb 场 $-e\phi = V(r)$中运动. 在均匀外磁场中，价电子的 Hamilton 算符表为：

$$\begin{aligned}
\hat{H} &= \frac{1}{2\mu}\left[\left(\hat{P}_x - \frac{eB}{2c} y\right)^2 + \left(\hat{P}_y + \frac{eB}{2c} x\right)^2 + \hat{P}_z^2\right] + V(r) \\
&= \frac{1}{2\mu}\left[\hat{\mathbf{P}}^2 + \frac{eB}{c}(x\hat{P}_y - y\hat{P}_x) + \frac{e^2 B^2}{4c^2}(x^2 + y^2)\right] + V(r) \\
&= \frac{1}{2\mu}\left[\hat{\mathbf{P}}^2 + \frac{eB}{c}\hat{L}_z + \frac{e^2 B^2}{4c^2}(x^2 + y^2)\right] + V(r)
\end{aligned}$$

式中

$$\hat{L}_z = x\hat{P}_y - y\hat{P}_x = -i\hbar(x\partial_y - y\partial_x) = -i\hbar\partial_\varphi$$

是电子轨道角动量算符的 $z$ 分量.

在原子中，

$$(x^2+y^2)\sim a^2\sim(10^{-8}\text{cm})^2$$

对于实验室中磁场的磁感应强度，$B\sim 10^5\text{Gs}$，我们估算出哈密顿算符中 $B^2$ 项的量级远小于 $B$ 的线性项：(gauss 单位制，$e\sim 4.8\times 10^{-10}esu$, $c\sim 3\times 10^{10}cm/s$, $\hbar\sim 10^{-27}erg\cdot s$)

$$\left|\frac{B^2\text{-terms}}{B\text{-terms}}\right|\sim\frac{\frac{e^2B^2a^2}{4c^2}}{\frac{eB\hbar}{c}}=\frac{eBa^2}{4\hbar c}<10^{-4}$$

因此可以在哈密顿算符表达式中略去 $B^2$ 项，

$$\hat{H}=\frac{1}{2\mu}\hat{\mathbf{P}}^2+V(r)+\frac{eB}{2\mu c}\hat{L}_z$$

此式右端最后一项可写为$-\hat{\mathbf{M}}\cdot\mathbf{B}$ (这里 $\hat{\mathbf{M}}=-\frac{e}{2\mu c}\hat{\mathbf{L}}=-\frac{\mu_B}{\hbar}\hat{\mathbf{L}}$, $\mu_B$ 玻尔磁子)， 它描写的是电子的轨道磁矩与外磁场之间的相互耦合.

$$\hat{H} = \frac{1}{2\mu}\hat{\mathbf{P}}^2 + V(r) + \frac{eB}{2\mu c}\hat{L}_z$$

- 当把碱金属原子置于强均匀外磁场之后，原有的球对称性被破坏 ($\hat{L}_z$ 项)，$\hat{L}_x$, $\hat{L}_y$ 不再是守恒量，

$$[\hat{L}_x,\ \hat{H}] \neq 0, \qquad [\hat{L}_y,\ \hat{H}] \neq 0.$$

- $\mathbf{L}^2$ 与 $L_z$ 仍为守恒量. 因此，能量本征函数可以选择成守恒量完全集 $\{\hat{H},\ \hat{\mathbf{L}}^2,\ \hat{L}_z\}$ 的共同本征函数：

$$\psi(r,\theta,\varphi) \sim R(r)\,Y_{lm}(\theta,\varphi),$$

其中 $R(r)$ 满足的方程：

$$\Big[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\Big(\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}r - \frac{l(l+1)}{r^2}\Big) + V(r)\Big]R(r) = \Big(E - \frac{eB}{2\mu c}m\hbar\Big)R(r)$$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\left(\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}r-\frac{l(l+1)}{r^2}\right)+V(r)\right]R(r)=\left(E-\frac{eB}{2\mu c}m\hbar\right)R(r)$$

- 无磁场时的径向方程的解 $\mathscr{R}_{n_r l}(r)$ 即满足上述类似方程，只与 $n_r$, $l$ 有关，与 $m$ 无关：

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\left(\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}r-\frac{l(l+1)}{r^2}\right)+V(r)\right]\mathscr{R}_{n_r l}=E_{n_r l}\mathscr{R}_{n_r l}$$

$E_{n_r l}$ 为无磁场时的能量的本征值. 所以，有磁场时的径向本征函数没有变，本征值 $E_{n_r lm}=E_{n_r l}+m\frac{eB\hbar}{2\mu c}$。

- 有磁场时的能量本征函数

$$\psi_{n_r lm}(r,\theta,\varphi)=\mathscr{R}_{n_r l}(r)\ Y_{lm}(\theta,\varphi)$$

这里 $n_r$, $l=0$, 1, 2, $\cdots$, $m=0$, $\pm 1$, $\pm 2,\cdots$, $\pm l$.
相应的能量本征值为：

$$E_{n_r lm}=E_{n_r l}+m\frac{eB\hbar}{2\mu c}$$

$E_{n_r l}$ 为无磁场时的能量本征值，与 $m$ 无关。

# 说明：

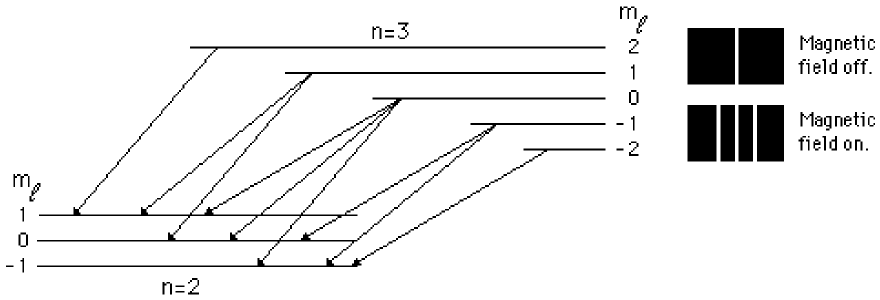
1. 屏蔽库仑场与纯 Coulomb 场不同，它只具有空间转动这种几何对称性． 于是，$\hat{H}_0$ 的本征值与径向量子数 $n_r$、角量子数 $l$ 都有关系，
$$E = E_{n_r l}$$
简并度为 $(2l+1)$.

2. 计入电子的轨道磁矩与外磁场之间的耦合后，Hamilton 算符的球对称性被破坏，能级简并被完全解除，$\hat{H}$ 的本征值与 $n_r$, $l$, $m$ 三个量子数都有关． 无磁场时的能级 $E_{n_r l}$ 在加入磁场后分裂成 $(2l+1)$ 个子能级, $E_{nlm} = E_{nl} + m\hbar\omega_L$. 相邻子能级的间距为 $\hbar\omega_L$，
$$\omega_L = \frac{eB}{2\mu c} \sim B$$
$\omega_L$ 称为 Larmor 频率, 与 $nlm$ 无关.

3. 由于能级分裂，相应的光谱线也发生分裂. $\Delta E = \Delta m\hbar\omega_L$.

- 按照量子跃迁的选择定则，$\Delta m = \pm 1, 0,\ \Delta l = \pm 1$。无磁场时一条频率为 $\omega$ 的谱线当存在外磁场时将分裂为角频率为 $\omega, \omega \pm \omega_L$ 的三条谱线, $\Delta E = \Delta m \hbar \omega_L$, 与 $nl$ 无关. $\rightsquigarrow$ 外磁场愈强，谱线分裂愈大.

$$\Delta m = \pm 1, 0,\ \Delta l = \pm 1$$



# LANDAU 能级：

现在考虑一自由电子(质量为 $M$，电荷量为 $-e$) 处于均匀外磁场 $\mathbf{B}$ 中. 设 $\mathbf{B}$ 沿 $z$ 轴正方向. 若将矢势取为 $\mathbf{A}=-\frac{1}{2}\mathbf{r}\times\mathbf{B}$，则：

$$A_x=-\frac{1}{2}By,\qquad A_y=\frac{1}{2}Bx,\qquad A_z=0.$$

经典情形：

粒子受洛伦兹力，力的方向垂直于 $\mathbf{B}$ 和粒子运动方向，$\mathbf{F}=\frac{q}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{B}$ 粒子做螺旋运动，速度大小固定，则半径固定

$$M\frac{v_{xy}^2}{r}=\frac{|q|}{c}v_{xy}B\rightarrow\omega=\frac{v_{xy}}{r}=\frac{|q|B}{Mc}\rightarrow 2\omega_L,\ \text{if } q\rightarrow e$$

- 回转频率只跟荷质比和磁感应强度有关。
- 角动量：

$$\mathbf{L}=\mathbf{r}\times\mathbf{P}=\mathbf{r}\times(M\mathbf{v}+\frac{q}{c}\mathbf{A})$$

电子的 Hamilton 算符为：

$$
\begin{aligned}
\hat{H} &= \frac{1}{2M}\left[\left(\hat{P}_x - \frac{eB}{2c}y\right)^2 + \left(\hat{P}_y + \frac{eB}{2c}x\right)^2 + \hat{P}_z^2\right] \\
&= \underbrace{\frac{1}{2M}(\hat{P}_x^2 + \hat{P}_y^2) + \frac{e^2B^2}{8Mc^2}(x^2+y^2)}_{H_0} + \underbrace{\overbrace{\frac{eB}{2Mc}}^{\omega_L}\overbrace{(x\hat{P}_y - y\hat{P}_x)}^{\hat{L}_z}}_{H'} + \underbrace{\frac{1}{2M}\hat{P}_z^2}_{H_1} \\
&= H_2 + H_1\,; \quad \text{其中}\, H_2 \equiv H_0 + H'
\end{aligned}
$$

$\omega_L = \frac{eB}{2Mc}$ 是 Larmor 频率.
可以看出：$[\hat{H}_0, \hat{H}_1] = 0$, $[\hat{H}', \hat{H}_1] = 0$, $[\hat{H}_0, \hat{H}'] = 0$ 所以可以选 $\hat{H}, \hat{P}_z, H' \sim L_z$ 作为对易力学量的完全集。

显然，电子在 $z$ 轴方向不受磁场的作用，其运动是自由运动：

$$\hat{H}_1 = \frac{\hat{P}_z^2}{2M}, \qquad \psi(z) \sim e^{ip_z z/\hbar}$$

下面只需研究电子在 $xy$ 平面上的运动. 相关的 Hamilton 算符

$$\hat{H}_2 = \hat{H}_0 + \hat{H}'$$

式中，

$$\hat{H}_0 = \frac{1}{2M}(\hat{P}_x^2 + \hat{P}_y^2) + \frac{e^2 B^2}{8Mc^2}(x^2 + y^2), \qquad \hat{H}' = \omega_L \hat{L}_z$$

在研究原子中的 Zeeman 效应时，由于电子局限于原子内部运动，在通常实验室所用的磁场强度下，$B^2$ 项很小，常忽略不计. 但对于自由电子而言，忽略 $B^2$ 项就没有道理了. 计入 $B^2$ 项的贡献后，$\hat{H}_0$ 在数学形式上等同于一个二维各向同性简谐振子的 Hamilton 算符.

在 $xy$ 平面上采用极坐标系：

$$x=\rho\cos\varphi,\qquad y=\rho\sin\varphi$$

注意到 $\nabla_2^2\psi:=(\partial_x^2+\partial_y^2)\psi$ 用极坐标可以表达为

$(\nabla=\mathbf{e}_\rho\partial_\rho+\mathbf{e}_\varphi\frac{\partial_\varphi}{\rho}$, $\partial_\rho\mathbf{e}_\rho=\partial_\rho\mathbf{e}_\varphi=0$, $\partial_\varphi\mathbf{e}_\rho=\mathbf{e}_\varphi$,$\partial_\varphi\mathbf{e}_\varphi=-\mathbf{e}_\rho$,
$\nabla\cdot\left(\frac{\mathbf{e}_\rho}{\rho}\right)=0$, $\nabla\cdot\mathbf{e}_\varphi=0$ )：

$$\begin{aligned}\nabla_2^2\psi&=\nabla_2\cdot(\mathbf{e}_\rho\partial_\rho\psi+\frac{1}{\rho}\mathbf{e}_\varphi\partial_\varphi\psi)=\frac{\mathbf{e}_\rho}{\rho}\cdot\nabla_2(\rho\partial_\rho\psi)+\mathbf{e}_\varphi\cdot\nabla_2(\frac{1}{\rho}\partial_\varphi\psi)\\&=\frac{1}{\rho}\partial_\rho(\rho\partial_\rho\psi)+\frac{1}{\rho^2}\partial_\varphi^2\psi\end{aligned}$$

$\hat{\mathbf{L}}=-i\hbar(\rho\mathbf{e}_\rho+z\mathbf{e}_z)\times(\mathbf{e}_\rho\partial_\rho+\mathbf{e}_\varphi\frac{\partial_\varphi}{\rho}),\Rightarrow\hat{L}_z=\mathbf{e}_z\cdot\hat{\mathbf{L}}=-i\hbar\partial_\varphi$

$\hat{H}_0$ 与 $\hat{H}'$ 可以重新表达为：

$$\hat{H}_0=-\frac{\hbar^2}{2M}\left[\frac{1}{\rho}\partial_\rho(\rho\partial_\rho)+\frac{1}{\rho^2}\partial_\varphi^2\right]+\frac{1}{2}M\omega_L^2\rho^2,\qquad\hat{H}'=-i\hbar\omega_L\partial_\varphi.$$

由于 $[\hat{H}_0,\ \hat{H}']=0$. 故 $\hat{H}_2$ 的本征函数可以选择为 $\hat{H}_0$ 与 $\hat{H}'$ 的共同本征函数.

因为 $\hat{H}' = \omega_L \hat{L}_z = -i\hbar\partial_\varphi$，其本征函数为：

$$e^{im\varphi}, \qquad m = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \cdots$$

我们把 $\hat{H}_2$ 的本征函数设为：

$$\psi(\rho, \ \varphi) = \mathcal{R}(\rho) \ e^{im\varphi}$$

代入到能量本征方程 $\hat{H}_2\psi = E\psi$，$(E = \epsilon - \frac{p_z^2}{2M})$, 得：

$$-\frac{\hbar^2}{2M}\left[\frac{1}{\rho}\partial_\rho(\rho\partial_\rho) - \frac{m^2}{\rho^2}\right]\mathcal{R}(\rho) + \frac{1}{2}M\omega_L^2\rho^2\mathcal{R}(\rho) = (E - m\hbar\omega_L)\mathcal{R}(\rho)$$

按下式引入无量纲径向坐标 $\xi$,

$$\rho = \sqrt{\frac{\hbar}{M\omega_L}}\ \xi$$

可以把本征值方程 $\hat{H}_2\psi = E\psi$, 重新写为:

$$\left(\partial_\xi^2 + \frac{1}{\xi}\partial_\xi - \frac{m^2}{\xi^2} - \xi^2\right)\mathcal{R}(\xi) + 2\left(\frac{E}{\hbar\omega_L} - m\right)\mathcal{R}(\xi) = 0$$

为了简化此方程的求解，我们先研究一下它在 $\xi$ 趋于零 (正则奇点) 和趋于无穷大 (非正则奇点) 两种极限情形下的渐近行为.

- 当 $\xi \sim 0$，方程近似为:

$$0 \approx \partial_\xi^2\mathcal{R}(\xi) + \frac{1}{\xi}\partial_\xi\mathcal{R}(\xi) - \frac{m^2}{\xi^2}\mathcal{R}(\xi)$$

故径向波函数 $\mathcal{R}(\xi)$ 在 $\xi \sim 0$ 时满足平方可积的渐近行为

$$\mathcal{R}(\xi) \sim \xi^{|m|}$$

- 当 $\xi \to \infty$，方程近似为：

$$0 \approx \left(\partial_\xi^2 \;-\; \xi^2\right)\mathcal{R}(\xi)$$

故径向波函数 $\mathcal{R}(\xi)$ 在 $\xi \to \infty$ 时的渐近行为

$$\mathcal{R}(\xi) \sim e^{-\xi^2/2}$$

现在把 $\mathcal{R}(\rho)$ 的精确解设为：

$$\mathcal{R}(\xi) = \xi^{|m|} e^{-\xi^2/2} \; u(\xi)$$

$$\mathcal{R}(\xi) = \xi^{|m|} e^{-\xi^2/2}\ u(\xi)$$

代入

$$\left(\partial_\xi^2 + \frac{1}{\xi}\partial_\xi - \frac{m^2}{\xi^2} - \xi^2\right)\mathcal{R}(\xi) + 2\left(\frac{E}{\hbar\omega_L} - m\right)\mathcal{R}(\xi) = 0$$

不难求出 $u(\xi)$ 须满足的方程为:

$$u''(\xi) + \frac{(2|m| - 2\xi^2 + 1)}{\xi}u'(\xi) + \left(\frac{2E}{\hbar\omega_L} - 2m - 2|m| - 2\right)u(\xi) = 0$$

我们现在考察一下它可否通过自变量的更换化为标准的合流超几何方程.

$$\zeta u''(\zeta) + (\gamma - \zeta)u'(\zeta) - \alpha u(\zeta) = 0$$

令 $\xi = \sqrt{\zeta}$ 则有:

$$u(\xi) = \tilde{u}(\zeta), \quad u'(\xi) = 2\sqrt{\zeta}\tilde{u}'(\zeta), \quad u''(\xi) = 4\zeta\tilde{u}''(\zeta) + 2\tilde{u}'(\zeta).$$

后面为简单起见，省略~

$u(\zeta)$ 满足的方程是：

$$\zeta u''(\zeta)+(|m|+1-\zeta)u'(\zeta)+\left[\frac{E}{2\hbar\omega_L}-\frac{(m+|m|+1)}{2}\right]u(\zeta)=0$$

- 与合流超几何方程的标准形式

$$\zeta u''(\zeta)+(\gamma-\zeta)u'(\zeta)-\alpha u(\zeta)=0$$

相比较，我们看到:

$$\alpha=\frac{(m+|m|+1)}{2}-\frac{E}{2\hbar\omega_L},\qquad \gamma=|m|+1$$

所以，$u(\zeta)$ 在 $\zeta=0$ 处解析的一般解是合流超几何级数：

$$\begin{aligned}F(\alpha,\gamma,\zeta)=&1+\frac{\alpha}{\gamma}\zeta+\frac{\alpha(\alpha+1)}{\gamma(\gamma+1)}\frac{\zeta^2}{2!}+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}\frac{\zeta^3}{3!}+\cdots\\=&\sum_{k=0}^{+\infty}c_k\frac{\zeta^k}{k!},\qquad\qquad c_k=\frac{\alpha+k-1}{\gamma+k-1}c_{k-1},\quad c_0=1.\end{aligned}$$

由于

$$\lim_{\zeta\to\infty} F(\alpha,\gamma,\zeta) = e^{\zeta} \sim e^{\xi^2}$$

上述解对应的径向波函数 $\mathcal{R}(\xi) \sim e^{-\xi^2/2} F(\alpha,\gamma,\zeta) \sim e^{\xi^2/2}$ 在 $\xi \to \infty$ 处发散，不满足束缚态条件.

存在束缚态的前提是 $F(\alpha,\gamma,\zeta)$ 中断为多项式. 这就要求 $\alpha$ 只能为零或取值为某个负整数：

$$\alpha = \frac{m+|m|+1}{2} - \frac{E}{2\hbar\omega_L} = -n_\rho, \qquad n_\rho = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$$

所以，均匀磁场中的自由电子在 $xy$ 平面的运动可以处于束缚态，其径向能量本征函数由两个量子数 $n_\rho$ 和 $|m|$ 刻画：

$$\mathcal{R}_{n_\rho,|m|}(\xi) \sim \xi^{|m|} e^{-\xi^2/2} F(-n_\rho, |m|+1, \xi^2)$$

$n_\rho$ 仍然对应节点数。相应的能量本征值称为 Landau 能级：

$$E_{n_\rho,m} = \big(2n_\rho + m + |m| + 1\big)\hbar\omega_L$$

# LANDAU 能级的特点：

总的波函数（算上沿着 $z$ 轴方向的自由运动）：

$$\psi_{n_\rho,m,p_z}(\rho,\varphi,z) = \mathcal{N}\xi^{|m|}e^{-\xi^2/2}F(-n_\rho,|m|+1,\xi^2)\,e^{im\varphi}\,e^{ip_z z/\hbar}$$

$$E_N = ({\color{blue}N}+1)\hbar\omega_L + \frac{p_z^2}{2M} = \big({\color{blue}2n_\rho + m + |m|}+1\big)\hbar\omega_L + \frac{p_z^2}{2M},$$

$$n_\rho = 0,1,2,\ldots; \quad m = 0,\pm1,\pm2,\ldots; \quad p_z \in (-\infty,\infty),$$

$$N = 2n_\rho + m + |m|, \quad \xi = \sqrt{\frac{M\omega_L}{\hbar}}\rho$$

$N$ 只能是偶数。

- 对于相同 $n_\rho$，径向分布函数 $|\mathcal{R}|^2$ 只跟 $|m|$ 有关，对于 $m=+1$，$m=-1$ 能量不同但是径向分布函数相同。
- 概率流密度: (矢势 $\mathbf{A} = -\frac{1}{2}\rho\mathbf{e}_\rho \times \mathbf{e}_z B = \frac{1}{2}\rho B\mathbf{e}_\varphi$，$q=-e$.)

$$\mathbf{j} = \frac{1}{2M}\left[\psi^*(\hat{\mathbf{P}} - \frac{q}{c}\mathbf{A})\psi + c.c\right] = \left(\mathbf{e}_\phi\left(\frac{m\hbar}{\rho M} + \frac{eB\rho}{2Mc}\right) + \mathbf{e}_z\frac{p_z}{M}\right)|\psi|^2$$

$$= \left(\mathbf{e}_\phi\left(\frac{m\hbar}{\rho M} + \rho\omega_L\right) + \mathbf{e}_z\frac{p_z}{M}\right)|\psi|^2$$

# LANDAU 能级的特点：$(p_z = 0)$

- 简并度：所有 $m \le 0$ 的本征态所对应的能量本征值都相同，其值为

$$E = (2n_\rho + 1)\hbar\omega_L, \quad \text{即 (给定 } n_\rho \text{ 时)} \quad N = 2n_\rho$$

换言之，能量为 $E = (2n_\rho + 1)\hbar\omega_L$ 的能级都是简并的，且简并度为无穷大.

- $m > 0$ , $E = (2(n_\rho + m) + 1)\hbar\omega$.

| $N$ | $E_N/\hbar\omega_L$ | $n_\rho$ | $m$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 | $0, -1, -2, -3, \ldots$ |
| 2 | 3 | 0 | 1 |
| | | 1 | $0, -1, -2, -3, \ldots$ |
| 4 | 5 | 0 | 2 |
| | | 1 | 1 |
| | | 2 | $0, -1, -2, -3, \ldots$ |
| 6 | 7 | 0 | 3 |
| | | 1 | 2 |
| | | 2 | 1 |
| | | 3 | $0, -1, -2, -3, \ldots$ |

# LANDAU 能级的特点：

- Landau 能级 $E$ 所示的电子能量可以理解为电子与外磁场之间的相互作用能 ($\omega_L = \frac{eB}{2Mc}$)：

$$-\mu \cdot \mathbf{B} = -M_z B = (2n_\rho + m + |m| + 1)\hbar\omega_L$$

等效磁矩为：

$$\mu_z = -(2n_\rho + m + |m| + 1)\frac{e\hbar}{2Mc} < 0$$

所以，自由电子在受到外磁场作用时将具有抗磁性. 实际上，换成带正电的粒子也是有抗磁性。

# 不对称规范

$$A_x = -By, \quad A_y = A_z = 0$$

$x - y$ 平面内的 Hamilton 量：

$$\hat{H} = \frac{1}{2M}\left[\left(\hat{P}_x - \frac{eB}{c}y\right)^2 + \hat{P}_y^2\right]$$

对易力学量完全集可以选为 $(\hat{H}, \hat{P}_x)$,本征态可选为：
$\psi(x, y) = e^{iP_x x/\hbar}\phi(y), \quad -\infty < P_x < +\infty$。那么，$\phi(y)$ 满足方程

$$\frac{1}{2M}\left[\left(P_x - \frac{eB}{c}y\right)^2 - \hbar^2\frac{d^2}{dy^2}\right]\phi(y) = E\phi(y)$$

令 $y_0 = \frac{cP_x}{eB}$,$\omega_c = \frac{eB}{Mc} = 2\omega_L$, 则方程化为：

$$-\frac{\hbar^2}{2M}\frac{d^2}{dy^2}\phi(y) + \frac{1}{2}M\omega_c^2(y - y_0)^2\phi(y) = E\phi(y)$$

平衡点在 $y = y_0 = \frac{cP_x}{eB}$ 的一维谐振子，$\omega_c$ 称为回旋角频率。

$$-\frac{\hbar^2}{2M}\frac{d^2}{dy^2}\phi(y)+\frac{1}{2}M\omega_c^2(y-y_0)^2\phi(y)=E\phi(y)$$

平衡点在 $y=y_0=\frac{cP_x}{eB}$ 的一维谐振子。
本征能量：

$$\begin{aligned} E=E_n&=\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega_c, \quad n=0,1,2,\ldots \\ &=(N+1)\hbar\omega_L, \qquad N=2n=0,2,4,\ldots \end{aligned}$$

能量本征函数 $\phi_{n,y_0}(y)\propto e^{-\alpha^2(y-y_0)^2/2}H_n(\alpha(y-y_0))$,
$\alpha=\sqrt{\frac{m\omega_c}{\hbar}}$.

- 能量 $E_n$ 不依赖于 $P_x$, $\psi(x,y)=e^{iP_xx/\hbar}\phi_{n,y_0}(y)$, $y_0$ 依赖于 $P_x$，$-\infty<P_x<\infty$, 因此，能级无穷度简并。
- $x$ 方向为平面波，当 $P_x\to\pm\infty$, $y_0\to\pm\infty$. 非束缚态，但是能量却是分立的。

# 总结

- 带电粒子在电磁场中运动的哈密顿量，机械动量和正则动量。
$$H = \frac{1}{2\mu}\left(\mathbf{P} - \frac{q}{c}\mathbf{A}\right)^2 + q\phi$$
- 规范变换:
$$\mathbf{A} \to \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\chi(\mathbf{r},t)\,, \quad \phi \to \ \phi' = \phi - \frac{1}{c}\partial_t\chi(\mathbf{r},t)\,,$$
$$\psi \to \psi' = \exp\left[\frac{iq}{\hbar c}\,\chi(\mathbf{r},t)\right]\,\psi$$
- Zeeman 效应: $H \sim B_z L_z$, 球对称被破坏，$\hat{L}_x, \hat{L}_y$ 不再守恒量，但守恒量完全集仍然可选 $\{\hat{H}, \hat{\mathbf{L}}^2, \hat{L}_z\}$。能级简并解除 $E_{n_r,l,m}$。
- Landau 能级: 差规范变换的两个表象，守恒量完全集，对称表象 $\{\hat{H}, \hat{P}_z, \hat{L}_z\}$, 不对称表象，$\{\hat{H}, \hat{P}_z, \hat{P}_x\}$。无穷度简并。

## 作业：

曾谨言《量子力学教程》(第三版):
P126:
- 6.1, (将最后一式改为平均值形式:$\frac{d\langle\hat{v}\rangle}{dt} = \frac{q}{2c}(\langle\hat{v}\rangle \times \boldsymbol{B} - \boldsymbol{B} \times \langle\hat{v}\rangle)$.
- 6.3.

# 附录：高斯单位制和国际单位制

高斯单位制的基本公式是: $F = \frac{Q_1 Q_2}{r^2}$, 长度单位 cm, 力单位是达因 dyne $= \mathrm{g} \cdot \mathrm{cm/s^2}$, 电荷单位 statcoulomb (statC) 或 esu.

SI 单位制: 基本公式是 $\frac{F}{L} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1 I_2}{d}$, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} N/A^2$, 定义电流单位 $A$ 安培。库仑由公式 $F = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ 定义，真空光速 $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}$。

| | Gaussian | SI |
|---|---|---|
| Gauss' Law (E) | $\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 4\pi\rho(x)$ | $\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{1}{\epsilon_0}\rho(x)$ |
| Gauss' Law (E) | $\nabla \cdot \boldsymbol{D} = 4\pi\rho_f(x)$ | $\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho_f(x)$ |
| Gauss' Law (M) | $\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$ | $\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$ |
| Ampère's Law | $\nabla \times \boldsymbol{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{J}$ | $\nabla \times \boldsymbol{B} - (\epsilon_0\mu_0)\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \mu_0 \boldsymbol{J}$ |
| Ampère's Law | $\nabla \times \boldsymbol{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{J}_f$ | $\nabla \times \boldsymbol{H} - \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} = \boldsymbol{J}_f$ |
| Faraday's Law | $\nabla \times \boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0$ | $\nabla \times \boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0$ |
| Lorentz Force Law | $\boldsymbol{F} = Q(\boldsymbol{E} + \frac{\boldsymbol{v}}{c} \times \boldsymbol{B})$ | $\boldsymbol{F} = Q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$ |
| | $\boldsymbol{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c}\partial_t \boldsymbol{A}$ | $\boldsymbol{E} = -\nabla\phi - \partial_t \boldsymbol{A}$ |
| | $\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$ | $\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$ |
| | $\boldsymbol{D} = (1 + 4\pi\chi_e)\boldsymbol{E} = \epsilon \boldsymbol{E}$ | $\boldsymbol{D} = \epsilon_0(1 + \chi_e)\boldsymbol{E} = \epsilon \boldsymbol{E}$ |
| | $\boldsymbol{P} = \chi_e \boldsymbol{E}$ | $\boldsymbol{P} = \epsilon_0\chi_e E$ |
| | $\boldsymbol{B} = (1 + 4\pi\chi_m)\boldsymbol{H} = \mu \boldsymbol{H}$ | $\boldsymbol{B} = \mu_0(1 + \chi_m)\boldsymbol{H} = \mu \boldsymbol{H}$ |
| | $\boldsymbol{M} = \chi_m \boldsymbol{H}$ | $\boldsymbol{M} = \chi_m \boldsymbol{H}$ |

高斯 $\to$ SI:
$Q \to \frac{1}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}} Q$, $(\boldsymbol{E}, \phi) \to \sqrt{4\pi\epsilon_0}(\boldsymbol{E}, \phi)$,
$(\boldsymbol{B}, \boldsymbol{A}) \to c\sqrt{4\pi\epsilon_0}(\boldsymbol{B}, \boldsymbol{A}) = \frac{\sqrt{4\pi}}{\sqrt{\mu_0}}(\boldsymbol{B}, \boldsymbol{A})$, $\boldsymbol{D} \to \sqrt{\frac{4\pi}{\epsilon_0}}\boldsymbol{D}$,
$\boldsymbol{H} \to \sqrt{4\pi\mu_0}\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{P} \to \frac{1}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}}\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{M} \to \sqrt{\frac{\mu_0}{4\pi}} M$
高斯单位制中 $[\boldsymbol{E}] = [\boldsymbol{B}]$, $[Qv] = [\boldsymbol{J}]$, $[\phi] = [\boldsymbol{A}]$. $\chi_{e,m}^{SI} = 4\pi\chi_{e,m}^{G}$.