当 $n$ 较大时, 利用泰勒展式 $e^x = 1 + x + x^2/2! + \cdots + x^n/n! + \cdots$ 以及令 $x = -1$ 有

$$e^{-1} = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!} + \cdots \approx \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!},$$

由此近似有 $P(A) = 1 - 1/e = 0.632$.

在概率计算的过程中, 有时可适当利用概率的性质来简化计算, 例如,

**例 1.16** 从 $\{1, 2, \cdots, 9\}$ 数中有放回取 $n$ 个, 试求取出 $n$ 个数的乘积被 10 整除的概率.

**解** 用事件 $A$ 表示取出 $n$ 个整数的乘积能被 10 整除, 用事件 $B$ 表示取出的 $n$ 个数中有偶数, 用事件 $C$ 表示取出的 $n$ 个数中至少有一个 5, 于是有 $A = BC$. 直接计算事件 $B$ 发生的概率较难, 可以考虑 $B$ 的对立事件的概率

$$P(\bar{B}) = P\big(\text{取出的 } n \text{ 个数中无偶数}\big) = P\big(\{\text{取出的 } n \text{ 个数只包括} 1, 3, 5, 7, 9\}\big) = 5^n/9^n.$$

同理可得

$$P(\bar{C}) = 8^n/9^n \qquad \text{和} \qquad P(\bar{B}\bar{C}) = 4^n/9^n.$$

根据概率的性质有

$$P(A) = 1 - P(\overline{BC}) = 1 - P(\bar{B} \cup \bar{C}) = 1 - P(\bar{B}) - P(\bar{C}) + P(\bar{B}\bar{C}) = 1 - \frac{5^n}{9^n} - \frac{8^n}{9^n} + \frac{4^n}{9^n}.$$

## 1.5 组合计数*

组合计数研究满足一定条件下计数对象的个数, 概率论中的很多问题都可以通过计算一个事件发生的数目来解决, 如古典概型, 此外组合计数在人工智能、计算机等领域具有广泛的应用, 本节将介绍经典的组合计数: 十二重计数 (The twelvefold way).

十二重计数由著名的组合学家 G.-C. Rota (1932-1999) 提出, 最初的问题表述为研究一定条件下两个集合之间映射的个数. 为了问题的可理解性, 这里采用 D. Knuth 在《计算机程序设计艺术》中的表述: 将 $n$ 个不同或相同的球, 放入 $m$ 个不同或相同的盒子, 在无任何限制、每个盒子至多放一个球、每个盒子至少放一个球这三种条件下, 研究十二种情形中分别有多少种不同的放法. 表 1.3 给出了十二重计数的结果, 相关知识和符号说明将在后续逐一介绍.

### 1.5.1 排列、环排列、组合与多重组合

在前面 1.2 节中介绍了排列, 即从 $n$ 个不同的元素中取出 $r$ 个元素进行排列, 不仅要考虑取出的元素, 还要考虑他们之间的排列顺序, 共有 $(n)_r = n(n-1)\cdots(n-r+1)$ 种不同的排列方法. 若 $r = n$ 时称全排列, 有 $n!$ 种方法.

**表 1.3** 十二重计数.

| $n$ 个球 | $m$ 个盒子 | 无任何限制 | 每个盒子至多放一球 | 每个盒子至少放一球 |
|---|---|---|---|---|
| 不同 | 不同 | $m^n$ | $(m)_n$ | $m!S(n,m)$ |
| 相同 | 不同 | $\binom{n+m-1}{n}$ | $\binom{m}{n}$ | $\binom{n-1}{m-1}$ |
| 不同 | 相同 | $\sum_{k=1}^{m} S(n,k)$ | $\begin{cases}1 & n \leqslant m \\ 0 & n > m\end{cases}$ | $S(n,m)$ |
| 相同 | 相同 | $\sum_{k=1}^{m} p(n,k)$ | $\begin{cases}1 & n \leqslant m \\ 0 & n > m\end{cases}$ | $p(n,m)$ |

从 $n$ 个不同的元素中取出 $r$ 个元素排成一个圆环, 称为 **环排列**.

如右图所示, 从顺时针看 a-b-c-a, b-c-a-b 和 c-a-b-c 是同一个环排列, 但 a-c-b-a 则不是. 因此从 $n$ 个不同的元素中取出 $r$ 个元素进行环排列, 每一个环排列对应于 $r$ 种不同的直线排列, 而且不同的环排列对应的直线排列互不相同. 因此有

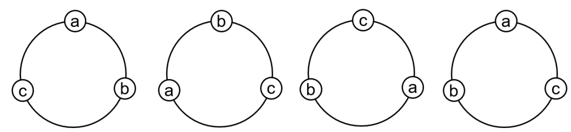


**图 1.5** 环排列.

**定义 1.8** 若从 $n$ 个不同的元素中取出 $r$ 个元素排成一个圆环, 有 $(n)_r/r$ 种不同的排法, 称 $(n)_r/r$ 为 **环排列数**. 特别地, $n$ 个不同元素的环排列数为 $(n-1)!$.

**例 1.17** 将 $n$ 对夫妇任意安排在一张圆桌, 求任何一对夫妻都被安排坐在一起的概率.

**解** 用 $\Omega$ 表示将 $n$ 对夫妇任意安排在一张圆桌时所有可能的环排列, 以及用 $A$ 表示任何一对夫妻都被安排坐在一起的事件. 则根据环排列可知

$$|\Omega| = (2n-1)! \qquad \text{和} \qquad |A| = 2^n(n-1)!,$$

由此可得任何一对夫妻都被安排坐在一起的概率 $2^n(n-1)!/(2n-1)!$.

在前面 1.2 节中介绍了组合数, 即从 $n$ 不同的元素中选取 $r$ 个元素, 取出的元素之间无顺序关系, 有 $\binom{n}{r}$ 种不同的方法, 称为组合数. 现将组合数的概念进行推广到多重组合数.

**定义 1.9** 将 $n$ 个不同的元素分成 $k$ 组, 每组分别有 $r_1, r_2, \cdots, r_k$ 个元素, 组内元素无顺序关系, 即满足 $n = r_1 + \cdots + r_k$ 且 $r_1, r_2, \cdots, r_k$ 为正整数, 则有

$$\binom{n}{r_1, r_2, \cdots, r_k} = \binom{n}{r_1}\binom{n-r_1}{r_2}\cdots\binom{n-r_1-r_2-\cdots-r_{k-1}}{r_k} = \frac{n!}{r_1!r_2!\cdots r_k!}$$

种不同的方法, 称 $\binom{n}{r_1, r_2, \cdots, r_k}$ 为 **多重组合数**.

将一个 $n$ 次多项式的展开有

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)^n = \sum_{n=r_1+r_2+\cdots+r_k} \binom{n}{r_1, r_2, \cdots, r_k} x_1^{r_1} x_2^{r_2} \cdots x_k^{r_k} \ ,$$

因此多重组合数又被称为多项式系数. 组合数本质上也属于多重组合数, 即 $\binom{n}{r} = \binom{n}{r,n-r}$.

以前研究的集合中元素都是互不相同、可以相互分辨的, 这里引入多重集的概念: 若集合中的元素是可以重复的, 且重复的元素是完全相同、不可分辨, 则称该集合为 **多重集**. 例如多重集 $\{1,1,1,2,2,2,3,3,4\}$.

假设多重集 $A$ 有 $k$ 类不同的元素, 每类元素的个数分别为 $r_1, r_2, \cdots, r_k$, 记 $n = r_1+r_2+\cdots+r_k$. 若将此多重集 $A$ 中的所有元素排列成一排, 则相当于从 $n$ 个位置中选取出 $r_1$ 个位置放第一类元素, 再从剩下的从 $n-r_1$ 个位置中选取出 $r_2$ 个位置放第二类元素, $\cdots$ , 从最后 $r_k$ 个位置放第 $k$ 类元素. 因此该多重集 $A$ 有

$$\binom{n}{r_1, r_2, \cdots, r_k}$$

种不同的排列方法, 即多重组合数.

针对将 $n$ 个球放入 $m$ 个盒子的问题, 根据排列组合数有

| $n$ 个球 | $m$ 个盒子 | 无任何限制 | 每个盒子至多放一球 |
|---|---|---|---|
| 不同 | 不同 | $m^n$ | $(m)_n$ |
| 相同 | 不同 | | $\binom{m}{n}$ |

### 1.5.2 整数的有序分解

本节研究将 $n$ 个完全相同、不可分辨的球放入 $m$ 个不同的盒子, 有多少种不同的放法. 鉴于球完全相同且不可分辨, 可以对问题进行转化: 假设第一个盒子有 $x_1$ 个球, 第二个盒子有 $x_2$ 个球, $\cdots$, 第 $m$ 个盒子有 $x_m$ 个球, 这里 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 是非负的整数, 并满足

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_m = n.$$

因此将 $n$ 个相同的球放入 $m$ 个不同的盒子等价于上述方程的非负整数解, 有如下定理:

**定理 1.1** 方程 $x_1 + x_2 + \cdots + x_m = n$ 有 $\binom{n+m-1}{m-1} = \binom{n+m-1}{n}$ 种不同的非负整数解.

**证明** 这里将通过构造一一对应关系给出组合证明. 将 $n$ 个相同的球对应于 $n$ 个圈 '$\circ$', 将 $m$ 个盒子与 $m$ 条竖线 '$|$' 进行关联. 现将 $n$ 个圆圈和 $m-1$ 条竖线排列成一行, 最后在排列末尾再加入一条竖线, 如下所示:

$$\underbrace{\circ\ \circ\ \circ\ \circ}_{x_1}\ |\ |\ \cdots|\underbrace{\circ\ \circ\ \circ\ \circ\ \circ}_{x_i}|\ \cdots\ |\underbrace{\circ\ \circ}_{x_m}|.$$

从左向右看, 用 $x_1$ 表示第一条竖线之前圆圈的个数, 用 $x_i$ 表示第 $i$ 条竖线与第 $i-1$ 条竖线之间圆圈的个数 $(2 \leqslant i \leqslant m)$. 由此可知方程 $x_1 + x_2 + \cdots + x_m = n$ 的非负整数解与上述的排列之间存在一一对应关系, 而这种排列有

$$\binom{n+m-1}{m-1} = \binom{n+m-1}{n}$$

种不同的方法, 即为所求方程 $x_1 + x_2 + \cdots + x_m = n$ 非负整数解的个数.

例如, 方程 $x_1+x_2+x_3=10$ 有 $\binom{12}{2}=66$ 种不同的非负整数解, 因此将 10 个相同的球放入 3 个不同的盒子有 66 种不同的放法. 定理 1.1 给出了方程 $x_1+x_2+\cdots+x_m=n$ 非负整数解的个数, 根据该定理可以进一步研究该方程的正整数解的个数, 以及不等式 $x_1+x_2+\cdots+x_m<n$ 非负整数解或正整数解的个数.

**推论 1.4** 方程 $x_1+x_2+\cdots+x_m=n$ $(m\leqslant n)$ 有 $\binom{n-1}{m-1}=\binom{n-1}{n-m}$ 种不同的正整数解.

**解** 引入新变量 $x_1'=x_1-1, x_2'=x_2-1,\cdots,x_m'=x_m-1$, 则方程 $x_1+x_2+\cdots+x_m=n$ 的正整数解等价于方程

$$x_1'+x_2'+\cdots+x_m'=n-m$$

的非负整数解. 根据定理 1.1 可知上述方程有

$$\binom{n-m+m-1}{m-1}=\binom{n-1}{m-1}=\binom{n-1}{n-m}$$

种不同的正整数解.

**例 1.18** 求多项式 $(x_1+x_2+\cdots+x_m)^n$ 的展开式中有多少种不同的展开项.

**解** 根据多项式的展开式有

$$(x_1+x_2+\cdots+x_m)^n=\sum_{r_1,r_2,\cdots,r_m\ \text{非负整数且和为}\ n}\binom{n}{r_1,r_2,\cdots,r_m}x_1^{r_1}x_2^{r_2}\cdots x_m^{r_m},$$

不同的展开项意味着各个变量不同的多项式次数, 此时与方程 $x_1+x_2+\cdots+x_m=n$ 的非负整数解建立一一对应关系, 因此多项式 $(x_1+x_2+\cdots+x_m)^n$ 有 $\binom{n+m-1}{m-1}$ 种不同的展开项.

针对将 $n$ 个球放入 $m$ 个盒子的问题, 根据整数的有序分解有:

| $n$ 个球 | $m$ 个盒子 | 无任何限制 | 每个盒子至少放一球 |
|---|---|---|---|
| 相同 | 不同 | $\binom{n+m-1}{m-1}$ | $\binom{n-1}{m-1}$ |

### 1.5.3 第二类 Stirling 数 (The Stirling number of the second kind)

本节研究将 $n$ 个不同的球放入 $m$ 个相同的盒子, 有多少种不同的放法, 这里盒子完全相同不可分辨, 只能通过盒子里放置的不同的球加以区分. 该问题可转化为组合学中的另一种表述: 将 $n$ 个不同的元素分成 $m$ 个非空子集 (block).

将 $n$ 个不同的元素分成 $m$ 个非空子集, 有多少种不同的划分个数, 称为**第二类 Stirling 数**, 记为 $S(n,m)$. 考虑三个不同的元素 $\{1,2,3\}$, 分成 $m=1,2,3$ 个非空的子集, 不同的划分情况如下:

- 若分成 $m=1$ 个非空的子集, 则有 $\{1,2,3\}$, 因此 $S(3,1)=1$;

- 若分成 $m=2$ 个非空的子集, 则有 $\{\{1\},\{2,3\}\}$, $\{\{2\},\{1,3\}\}$, $\{\{3\},\{1,2\}\}$, 因此 $S(3,2)=3$;
- 若分成 $m=3$ 个非空的子集, 则有 $\{\{1\},\{2\},\{3\}\}$, 因此 $S(3,3)=1$.

根据第二类 Stirling 数的定义可知, 当 $n\geqslant 1$ 时有

$$S(n,n)=1,\qquad S(n,1)=1,\qquad S(n,0)=0.$$

当 $m>n\geqslant 1$ 时有 $S(n,m)=0$. 按惯例设 $S(0,0)=1$. 对第二类 Stirling 数有如下递推关系:

**定理 1.2** 对 $n\geqslant m\geqslant 1$ 有

$$S(n,m)=mS(n-1,m)+S(n-1,m-1).$$

**证明** 根据第二类 Stirling 数的定义可知将 $\{1,2,\cdots,n\}$ 划分成 $m$ 个非空的子集, 有 $S(n,m)$ 种不同的划分数. 这些不同的划分可以分成两种情况进行考虑:

- 若元素 $n$ 被划分为单独的子集 $\{n\}$, 则其它剩余的元素被划分成 $m-1$ 个非空的子集, 此时有 $S(n-1,m-1)$ 种不同的划分数;
- 若元素 $n$ 未被划分为单独的子集, 其它剩余元素被划分成 $m$ 个非空的子集, 有 $S(n-1,m)$ 种不同的划分数; 再将元素 $n$ 放入已经划分好的 $m$ 个子集之一, 共 $mS(n-1,m)$ 种划分数.

由此完成证明.

根据上面的递推关系, 利用归纳法证明可得

**推论 1.5** 第二类 Stirling 数满足

$$S(n,m)=\frac{1}{m!}\sum_{i=0}^{m}(-1)^i\binom{m}{i}(m-i)^n \quad 和 \quad \sum_{m=1}^{n}S(n,m)(x)_m=x^n,$$

这里 $(x)_m=x(x-1)\cdots(x-m+1)$.

针对将 $n$ 个球放入 $m$ 个盒子的问题, 根据第二类 Stirling 数有

| $n$ 个球 | $m$ 个盒子 | 无任何限制 | 每个盒子至多放一球 | 每个盒子至少放一球 |
|---|---|---|---|---|
| 不同 | 不同 | | | $m!S(n,m)$ |
| 不同 | 相同 | $\sum\limits_{k=1}^{m}S(n,k)$ | $\begin{cases}1 & n\leqslant m\\ 0 & n>m\end{cases}$ | $S(n,m)$ |

### 1.5.4 正整数的无序分拆 (Partition)

本节研究将 $n$ 个相同的球放入 $m$ 个相同的盒子, 球与盒子都是完全相同、不可分辨的, 只能通过盒子内不同的球的个数加以区别. 该问题在组合学中有另一种表述: 将正整数 $n$ 划分成 $m$ 个无序的正整数之和, 即 **正整数的无序分拆**.

将正整数 $n$ 划分成 $m$ 个无序的正整数之和, 有多少种不同的划分数记为 $p(n,m)$. 考虑正整数 7 的无序划分, 相关分拆和划分数 $p(n,m)$ 如下表:

| | | |
|---|---|---|
| $m=1$ | $7$ | $p(7,1)=1$ |
| $m=2$ | $6+1,\ 5+2,\ 4+3$ | $p(7,2)=3$ |
| $m=3$ | $5+1+1,\ 4+2+1,\ 3+3+1,\ 3+2+2$ | $p(7,3)=4$ |
| $m=4$ | $4+1+1+1,\ 3+2+1+1,\ 2+2+2+1$ | $p(7,4)=3$ |
| $m=5$ | $3+1+1+1+1,\ 2+2+1+1+1$ | $p(7,5)=2$ |
| $m=6$ | $2+1+1+1+1+1$ | $p(7,6)=1$ |
| $m=7$ | $1+1+1+1+1+1+1$ | $p(7,7)=1$ |

通过上面的观察发现, 将正整数 $n$ 划分成 $m$ 个无序的正整数, 等价于下面方程的解

$$x_1+x_2+\cdots+x_m=n \quad \text{s.t.} \quad x_1 \geqslant x_2 \geqslant \cdots \geqslant x_m \geqslant 1.$$

根据定义可知, 当 $n \geqslant 1$ 时有

$$p(n,n)=1, \quad p(n,1)=1, \quad p(n,0)=0,$$

当 $m>n \geqslant 1$ 时有 $p(n,m)=0$, 按惯例设 $p(0,0)=1$. 对 $p(n,m)$ 有如下递推关系:

**定理 1.3** 对 $n \geqslant m \geqslant 1$ 有

$$p(n,m)=p(n-1,m-1)+p(n-m,m) \quad \text{和} \quad p(n,m)=\sum_{i=1}^{m} p(n-m,i).$$

**证明** 将正整数 $n$ 划分成 $m$ 个无序的正整数之和, 有 $p(n,m)$ 种不同的划分方法. 针对任意一种划分 $x_1+x_2+\cdots+x_m=n$ $(x_1 \geqslant x_2 \geqslant \cdots \geqslant x_m \geqslant 1)$, 可以考虑两种情况:

- 若最小部分 $x_m=1$, 则 $x_1+x_2+\cdots+x_{m-1}=n-1$ 是整数 $n-1$ 的 $m-1$ 部分的无序划分, 有 $p(n-1,m-1)$ 种不同的划分数;
- 若最小部分 $x_m>1$, 则 $x_1-1+x_2-1+\cdots+x_m-1=n-m$ 是整数 $n-m$ 的 $m$ 部分的无序划分, 有 $p(n-m,m)$ 种不同的划分数.

由此证明 $p(n,m)=p(n-1,m-1)+p(n-m,m)$.

对第二个等式的证明, 考虑任何一种划分 $x_1+x_2+\cdots+x_m=n$ $(x_1\geqslant x_2\geqslant\cdots\geqslant x_m\geqslant 1)$, 设 $y_j=x_j-1$, 则有

$$y_1+y_2+\cdots+y_m=n-m \quad \text{s. t.} \quad y_1\geqslant y_2\geqslant\cdots\geqslant y_m\geqslant 0.$$

考虑 $y_1,y_2,\cdots,y_m$ 非零元的个数, 假设恰好有 $i$ 个非零元, 则有 $p(n-m,i)$ 种不同的解, 由此证明

$$p(n,m)=\sum_{i=1}^{m}p(n-m,i).$$

下面给出了 $p(n,m)$ 的有效估计, 相关证明超出了本书的范围.

**定理 1.4** 对整数 $n\geqslant m\geqslant 1$ 有

$$\frac{1}{m!}\binom{n-1}{m-1}\leqslant p(n,m)\leqslant\frac{1}{m!}\binom{n-1+m(m-1)/2}{m-1}.$$

给定整数 $m\geqslant 1$, 当 $n$ 非常大或 $n\to\infty$ 有

$$p(n,m)\approx\frac{n^{m-1}}{m!(m-1)!}.$$

针对将 $n$ 个球放入 $m$ 个盒子的问题, 根据正整数的无序分拆有

| $n$ 个球 | $m$ 个盒子 | 无任何限制 | 每个盒子至多放一球 | 每个盒子至少放一球 |
|---|---|---|---|---|
| 相同 | 相同 | $\sum\limits_{k=1}^{m}p(n,k)$ | $\begin{cases}1 & n\leqslant m\\ 0 & n>m\end{cases}$ | $p(n,m)$ |