解：1. (1)

$$
\begin{aligned}
f(x_1,x_2,x_3) &= x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+2x_1x_2-4x_1x_3 \\
&= (x_1+x_2-2x_3)^2+2x_2^2-x_3^2-4x_2x_3 \\
&= (x_1+x_2-2x_3)^2-(2x_2+x_3)^2+6x_2^2 \\
&= z_1^2+6z_2^2-z_3^2
\end{aligned}
$$

(2).

$$
\begin{aligned}
f(x_1,x_2,x_3) &= 2x_1x_2+4x_1x_3 \\
&= (x_1+x_2+2x_3)^2-x_1^2-x_2^2-4x_3^2-4x_2x_3 \\
&= (x_1+x_2+2x_3)^2-(x_2+2x_3)^2-x_1^2 \\
&= z_1^2-\cancel{z_2^2}-z_3^2 \quad = z_1^2+4z_2^2.
\end{aligned}
$$

2. (1).

$$
\begin{bmatrix} 1&1&0\\ 1&0&1\\ 0&1&-1\\ 1&0&0\\ 0&1&0\\ 0&0&1 \end{bmatrix}
\to
\begin{bmatrix} 1&0&0\\ 0&-1&1\\ 0&1&-1\\ 1&-1&0\\ 0&1&0\\ 0&0&1 \end{bmatrix}
\to
\begin{bmatrix} 1&0&0\\ 0&-1&0\\ 0&0&0\\ 1&-1&-1\\ 0&1&1\\ 0&0&1 \end{bmatrix}
$$

$$\to \quad = z_1^2-z_2^2$$

(2).

$$
\begin{bmatrix} 0&1&2&1\\ 1&2&1&1\\ 2&1&3&2\\ 1&1&2&1\\ 1&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1 \end{bmatrix}
\longrightarrow
\begin{bmatrix} 1&1&2&1\\ 1&2&1&1\\ 2&1&3&2\\ 1&1&2&0\\ 0&0&0&1\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ 1&0&0&0 \end{bmatrix}
\longrightarrow
\begin{bmatrix} 1&0&0&0\\ 1&1&-1&0\\ 2&-1&-1&0\\ 1&0&0&-1\\ 0&0&0&1\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ 1&-1&-2&-1 \end{bmatrix}
$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

$z_1^2 + z_2^2 - 2z_3^2 - z_4^2$.

$k \cdot A$

3.

证 (1).

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot A^* \Rightarrow A^* = |A| \cdot A^{-1}.$$

若 $A = A^T$ $\quad A^{-1} = (A^{-1})^T$

$$(A^*)^T = (|A| \cdot A^{-1})^T = |A| \cdot (A^{-1})^T = A^*$$

$A \xrightarrow{\checkmark} A^*$ $\quad A \xleftarrow{\times} A^*$

(2). $A^* = |A| \cdot A^{-1}$

若 A正定 $\Rightarrow \exists C.\ st\ A = C^T C$ $\quad$ A正定 $\rightarrow A^*$正定

$\cancel{\leftarrow}$

$\because A^{-1} = C^{-1} \cdot (C^{-1})^T \Rightarrow A^{-1}$正定.

$\Rightarrow A^* = |C|^2 \cdot A^{-1}$

若 $A^{-1} = X^T A \cdot X > 0 \Rightarrow A^* = X^T |C|^2 A \cdot X > 0$

$\Rightarrow A^*$ 正定.

4. $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2tx_2x_3$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -t \\ -1 & -t & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 2 & -t \\ -t & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -t \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -t \end{vmatrix}$$

$$= (4 - t^2) + (-2 - t) - (t + 2)$$

$$= -t^2 - 2t > 0 = (-t)(t+2) > 0.$$

$t \in (-2, 0)$

5.

$$C=\begin{pmatrix} A_{m\times m} & O \\ O & B_{n\times n}\end{pmatrix}.$$ 不妨设 $P^TAP=E$ $Q^TBQ=E$

$$\begin{pmatrix} P^T & O \\ O & Q^T\end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & O \\ O & B\end{pmatrix}\begin{pmatrix} P & O \\ O & Q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E_{m\times m} & O \\ O & E_{n\times n}\end{pmatrix}$$

又 $\begin{pmatrix} P^T & O \\ O & Q^T\end{pmatrix}=\left(\begin{pmatrix} P & O \\ O & Q\end{pmatrix}\right)^T \Rightarrow$ 即证.

6.

X^TAX 为 n 元二次型.

$\exists a_1, a_2 \in R^n$ $\exists a_1, a_2$ st $a_1^TAa_1>0$ $a_2^TAa_2<0$

求证 $\exists a_3$ $a_3^TAa_3=0$.

证: $\because$ $\exists a_1, a_2$ st. $a_1^TAa_1>0$ $a_2^TAa_2<0$

$\Rightarrow$ 可将 A 化为规范形, 形如 $\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{bmatrix}$

设 $c=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$ 取 $a_3=c$ $\Rightarrow$ $a_3^T\cdot A\cdot a_3=0$ 即证.

7. A 为 n 阶实对称矩阵. 若 $|A|<0$ 则 R^n 中 $\exists\alpha$. $\alpha^TA\alpha<0$.

证: 若 不存在 α, st. $\alpha^TA\alpha<0$ $\Leftrightarrow$ $\forall\alpha\in R^n$ $\alpha^TA\alpha\geq0$

$\Rightarrow$ A 为正定矩阵

$\Rightarrow$ $|A|>0$ 矛盾 $\Rightarrow$ $\exists$ 这样的 α, st $\alpha^TA\alpha<0$.

8. A 为正定 $\Rightarrow A=C^TC$ $\Rightarrow A^{-1}=(C^TC)^{-1}$

$A^{-1}=(C^{-1})\cdot(C^{-1})^T \Rightarrow A^{-1}$ 正定.