数学分析习题课四（问题）

April 15, 2024

问题 1. 计算重积分

(1) $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} \mathrm{d}y \int_0^{\frac{y}{2}} \frac{\cos z}{(2z-1)^2}\mathrm{d}z.$

(2) $\iiint_V \frac{y\sin x}{x}\mathrm{d}V$, 其中$V$是由 $y=\sqrt{x}, y=0, z=0, x+z=\frac{\pi}{2}$ 所围成的区域.

(3) $\iiint_V (\sqrt{x^2+y^2+z^2}+x-y^3)\mathrm{d}V$, 其中$V$是由球面 $x^2+y^2+z^2=2z$ $(z\geq 1)$ 与锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 所围成的区域.

(4) $\iiint_V \mathrm{d}V$, 其中V是由曲面$\left(\frac{|x|}{a}+\frac{|y|}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1$ 围成的区域. （即计算 V 区域所占体积）.

问题 2. 计算第一型线积分

(1) $\oint_L \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}s$，其中 $L: x^2+y^2=4x$.

(2) $\oint_L (x^2+y)\mathrm{d}s$，其中 L 是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 与平面 $x+y+z=R$ 的交线，$R>0$.

问题 3. 计算第一型面积分

(1) $\iint_S (ax+by+cy^2+|xyz|)\mathrm{d}S$，其中 S 是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被平面 $z=1$ 截下的部分.

(2) $\iint_S |y|\mathrm{d}S$，其中 S 是柱面 $x^2+y^2=x$ 被球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 所截下的部分曲面.

问题 4. 计算第二型线积分

(1) $\int_L x^2\mathrm{d}y$，其中 L 是由点 $A(-2,1)$ 沿直线到点 $B(3,4)$，再由 B 沿圆心在坐标原点半径为 5 的圆周上的劣弧到点 $C(5,0)$.

(2) $\oint_L (y+1)\mathrm{d}x+(z+2)\mathrm{d}y+(x+3)\mathrm{d}z$，其中 L 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ $(a>0)$ 与平面 $x+y+z=0$ 的交线，且从 z 轴正向充分远处看 L 的方向为逆时针.

问题 5. 计算第二型面积分

(1) $\iint_S -y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+(z-1)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$，其中 S 是圆柱面 $x^2+y^2=4$ 被两平面 $x+z=2$ 和 $z=0$ 所截下的部分的外侧.

(2) $\iint_S \frac{x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+z^2\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y}{x^2+y^2+z^2}$，其中 S 是圆柱面 $x^2+y^2=R^2$ 与两平面 $z=R$ 和 $z=-R$ 所围立体表面的外侧.

问题 6. 已知平面区域 $D=\{(x,y)|0\leq x\leq\pi,0\leq y\leq\pi\}$，$L$ 为 D 的逆时针边界. 证明： $\oint_L x\mathrm{e}^{\sin y}\mathrm{d}y-y\mathrm{e}^{-\sin x}\mathrm{d}x=\oint_L x\mathrm{e}^{-\sin y}\mathrm{d}y-y\mathrm{e}^{\sin x}\mathrm{d}x\geq 2\pi^2$.