一. 判断题（20 分） 16

1. 一次多项式都是不可约多项式。（ 对 ）

2. 若$f(x)|g(x)h(x)$，则$f(x)|g(x)$或$f(x)|h(x)$。（ 错 ） 缺少$f(x)$不可约的前提

3. 设μ_1，μ_2是n元线性方程组$AX=b$的解向量，那么$\frac{1}{3}\mu_1+\frac{2}{3}\mu_2$也是这个方程组的一个解向量。（ 对 ）

4. A,B,C都是n阶矩阵，若$AB=AC$，且$A\neq O$，则$B=C$。（ 错 ） $|A|\neq 0$

5. 偶数阶反对称矩阵的行列式一定为 0。（ 错 ） 奇数阶

6. 如果矩阵A的行列式为非零值，那么A的所有特征值也必定非零。（ 对 ）

7. 对于任意$n\times n$的非零矩阵A，总有$\det(2A)=2\det(A)$。（ 错 ） $\det(2A)=2^n*\det(A)$

8. 向量组与它的极大线性无关组等价。（ 对 ）

9. 可逆矩阵不一定能经过初等行变化简化为单位矩阵。（ 错 ）

10. A，B都是n阶对称矩阵，则AB为对称矩阵的充分必要条件是A与B可交换。（ 对 ）

二. （10 分） 7

(1) 解矩阵方程（5 分）

$$\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&4&2\\1&-1&0\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}2&-3&1\\1&1&0\\2&1&1\end{pmatrix}$$

(2) 求齐次线性方程组的一个基础解系并用它表出全部解（5 分）

$$\begin{cases}x_1-2x_2+x_3+x_4-x_5=0,\\2x_1+x_2-x_3-x_4-x_5=0,\\x_1+7x_2-5x_3-5x_4+5x_5=0,\\3x_1-x_2-2x_3+x_4-x_5=0\end{cases}$$

参考答案：

(1)

$$\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&4&2\\1&-1&0\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}2&1&4\\2&1&-2\\-4&1&4\end{pmatrix}$$

从而

$$X=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}2&1&4\\2&1&-2\\-4&1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-3&1\\1&1&0\\2&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{13}{6}&-\frac{1}{6}&1\\\frac{1}{6}&-\frac{7}{6}&0\\\frac{1}{6}&\frac{17}{6}&0\end{pmatrix}$$

(2)$\mu_1=\left(\frac{1}{2},1,\frac{2}{3},\frac{13}{12},\frac{1}{4}\right)$是基础解系，全部解为$\mu=a\mu_1$，其中$a$为任意常数

三. （10 分）

10

设$1 \le k \le n-1$，在下面两个数域$\mathbb{K}$上的线性方程组中，$\hat{x}_i$表示x_i不出现在方程中:

$$
\mathrm{I}\ \begin{cases} \hat{x}_1 + \cdots + x_k + x_{k+1} + \cdots + x_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_1 + \cdots + \hat{x}_k + x_{k+1} + \cdots + x_n = 0, \end{cases}
$$

$$
\mathrm{II}\ \begin{cases} x_1 + \cdots + x_k + \hat{x}_{k+1} + \cdots + x_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots + x_k + x_{k+1} + \cdots + \hat{x}_n = 0. \end{cases}
$$

设方程组I的解空间为V_1，方程组II的解空间为V_2。求证：由V_1和V_2的基向量线性组合构成的新空间V的维度为n。

参考答案：

设方程组I的系数矩阵为A_1，方程组II的系数矩阵为A_2，则联立方程组I和II得到的新方程组的系数矩阵为$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$，解空间为$V_1 \cap V_2$。利用求和法计算可得$|A| \neq 0$，故$Ax = 0$只有零解，即$V_1 \cap V_2 = 0$。由于$A$是非异阵，故也为行满秩阵，于是$A_1$的$k$个行向量线性无关，$A_2$的$n-k$个行向量线性无关，因此$r(A_1) = k$，$r(A_2) = n-k$，从而$dimV_1 = n-k, dimV_2 = n-(n-k) = k$. 由于$V_1V_2$线性无关，于是$dim(V) = dimV_1 + dimV_2 = n$.

四. （10 分）

3

证明：设多项式$f(x) = (x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)+1$，其中$a_1, a_2, \cdots a_n$为互异整数，则$f(x)$不能分解成两个次数不同且次数不低于1的整系数多项式乘积。

参考答案：

证明：假设$f(x) = p(x)q(x)$，考虑$p(x) - q(x)$.

由$p(a_i)q(a_i) = 1$，则$p(a_i) = q(a_i)$，

所以$p(a_i) - q(a_i) = 0 (i = 1,2,\cdots,n)$.

又$p(x)$和$q(x)$次数均小于n，于是$p(x) - q(x)$的次数小于n.

但是$p(a_i) - q(a_i) = 0$有n个根，即$p(a_i) - q(a_i) = r(x-a_i)\cdots(x-a_n)$.

若$r \neq 0$，则$p(x) - q(x)$的次数等于n，这是不可能的，因此$r = 0$，即$p(x) = q(x)$.这与题设中$p(x)$和$q(x)$次数不同矛盾。故原命题得证。

五. （10 分）8

计算行列式

$$\begin{vmatrix} a+x_1 & a+x_1^2 & \cdots & a+x_1^n \\ a+x_2 & a+x_2^2 & \cdots & a+x_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a+x_n & a+x_n^2 & \cdots & a+x_n^n \end{vmatrix}$$

参考答案：

解： 将行列式升阶为

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a & a+x_1 & a+x_1^2 & \cdots & a+x_1^n \\ a & a+x_2 & a+x_2^2 & \cdots & a+x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & 1+x_n & 1+x_n^2 & \cdots & 1+x_n^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ a & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ a & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$$

将第一行拆开，得

$$|A| = \begin{vmatrix} 1+a & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ a & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -a & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ a & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ a & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$$

$$= (1+a)\begin{vmatrix} x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & & & \vdots \\ x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} + (-a)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$$

$$= \left[(1+a)x_1\cdots x_n - a\prod_{k=1}^{n}(x_k-1)\right]\prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i).$$

六. （10 分）6.

如果n阶方阵A满足$A^2=A$，那么称A为幂等矩阵。证明：A是幂等矩阵当且仅当

$$\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(I-A)=n,$$

其中I是单位矩阵。

参考答案：

证明 n 阶矩阵 A 是幂等矩阵 $A^2=A \Leftrightarrow A-A^2=0 \Leftrightarrow \operatorname{rank}(A-A^2)=0.$

由于

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I-A \end{pmatrix} \overset{2+1}{\to} \begin{pmatrix} A & 0 \\ A & I-A \end{pmatrix} \overset{2+1}{\to} \begin{pmatrix} A & A \\ A & I \end{pmatrix} \overset{1+(-A)2}{\to} \begin{pmatrix} A-A^2 & 0 \\ A & I \end{pmatrix} \overset{1+2(-A)}{\to} \begin{pmatrix} A-A^2 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

因此

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I-A \end{pmatrix} = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} A-A^2 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

$$\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(I-A)=\operatorname{rank}(A-A^2)+n$$

由此得出，n 阶矩阵 A 是幂等矩阵.

七．（15 分） 9

设$|A|$为n阶行列式，其中n为奇数，且$|A|$的所有元素都是整数。

(1)证明: 若A为奇数阶反对称矩阵，则 $|A| = 0$。（5 分）

(2)证明: 若对任意的$1 \le i \le n, a_{ii}$都是偶数，且对任意的$1 \le i < j \le n, a_{ij} + a_{ji}$都是偶数，则$|A|$也是偶数。（10 分）

参考答案：

(1)假设A是一个$n \times n$的奇数阶反对称矩阵。这意味着n是奇数，且A满足$A^T = -A$。我们知道行列式的转置不改变其值，即$\det(A^T) = \det(A)$。同时，由于A是反对称的，我们有$A^T = -A$，因此，

$$\det(A^T) = \det(A) = \det(-A)$$

行列式的一个性质是，如果矩阵乘以一个常数，其行列式等于该常数的n次幂乘以原行列式的值，因此

$$\det(-A) = (-1)^n \det(A)$$

由于n是奇数，意味着$\det(A) = -\det(A)$，即$2\det(A) = 0$。因此，对于任意奇数阶反对称矩阵，其行列式必须为 0.

七．（15 分）

设$|A|$为n阶行列式，其中n为奇数，且$|A|$的所有元素都是整数。

(1)证明: 若A为奇数阶反对称矩阵，则 $|A| = 0$。（5 分）

(2)证明: 若对任意的$1 \le i \le n, a_{ii}$都是偶数，且对任意的$1 \le i < j \le n, a_{ij} + a_{ji}$都是偶数，则$|A|$也是偶数。（10 分）

(2)设整数行列式$|A| = |a_{ij}|$，将$|A|$的某个元素加上 2 的整数倍,其余元素保持不变，这种操作称为“加 2 变换”.. 例如，将a_{11}变为$a_{11} + 2m$，其中m为整数, $|A|$的其余元素保持不变,得到的新行列式记为$|B|$.将$|A|$的第一行拆分为$(a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n}) + (2\mathrm{m}, 0, \ldots, 0)$, 则由拆分法可得$|B| = |A| + 2mA_{11}$，于是加 2 变换得到的行列式$|B|$与原行列式$|A|$保持相同的奇偶性. 回到本题的证明. 由于$|A|$的主对角元$a_{ii}$都为偶数,故可利用加 2 变换将$a_{ii}$都变成 0;又$|A|$关于主对角线的对称点都满足$a_{ij} + a_{ji}$为偶数,故$a_{ji}$与-$a_{ij}$有相同奇偶性,于是可利用加 2 变换将$a_{ji}$都变成-$a_{ij}$. 最后得到的行列式记为$|B|$. 根据上述操作可知$|B|$为奇数阶反对称阵,由高代白皮书例 1.43 可得$|B| = 0$, 又$|A|$与$|B|$有相同的奇偶性,于是$|A|$必为偶数.熟悉有限域$F_2 = \frac{Z}{2Z} = \{\bar{0}, \bar{1}\}$的读者,也可以用“模 2 同余”的方法来证明本题,具体细节可参考教学论文[9]. 当然, 直接利用高代白皮书例 1.43 的证明过程来讨论也可以.

八. (15 分)

10

设 A,B,C,D 均为 n 阶方阵。

(1) 若 $A^2=A, B^2=B, (A+B)^2=A+B$, 证明: $AB=BA=O$。(4 分)

(2) 若存在正整数 k, 使得 $(AB)^k=O$, 证明: I_n-BA 是可逆阵。(4 分)

(3) 若 A,D 和 $D-CA^{-1}B$ 均为可逆阵, 证明: $A-BD^{-1}C$ 也是可逆阵, 并求其逆阵。(7 分)

参考答案:

(1)由条件可得$AB+BA=0$, 即$AB=-BA$, 因此有

$$AB=A^2B=A(AB)=A(-BA)=-(AB)A=-(-BA)A=BA^2=BA$$

从而得到$AB=BA=O$.

(2) 由条件可得$O=B(AB)^kA=(BA)^{k+1}$, 因此有

$$(I_n-BA)(I_n+BA+\cdots+(BA)^k)=I_n$$

从而I_n-BA 是可逆阵

(3) 若 A,D 和 $D-CA^{-1}B$ 均为可逆阵, 证明: $A-BD^{-1}C$ 也是可逆阵, 并求其逆阵。(7 分)

(3)设$H=(D-CA^{-1}B)^{-1}$, 则

$$(D-CA^{-1}B)H=I_n.\cdots(1)$$

将(1)式两边同时左乘D^{-1}, 可得

$$(I_n-D^{-1}CA^{-1}B)H=D^{-1}.\cdots(2)$$

将(2)式两边同时左乘B右乘C, 可得

$$BHC-BD^{-1}CA^{-1}BHC=BD^{-1}C.\cdots(3)$$

(3)式左边提出公因子$A^{-1}BHC$，右边的$BD^{-1}C$移到左边，并且两边同时加上A，以凑出$A-BD^{-1}C$，可得

$$(A-BD^{-1}C)A^{-1}BHC+(A-BD^{-1}C)=A.\cdots(4)$$

将(4)式左边的公因子$(A-BD^{-1}C)$提出，并将两边同时右乘A^{-1}，可得

$$(A-BD^{-1}C)(I_n+A^{-1}BHC)A^{-1}=I_n.\cdots(5)$$

由(5)式即得到

$$(A-BD^{-1}C)^{-1}=A^{-1}+A^{-1}BHCA^{-1}=A^{-1}+A^{-1}B(D-CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1}$$