南京大学 Nanjing University

预备知识

集合

- 集合有一些对象汇集而成。这些对象称为元素。

$$a \in S$$

$$a \notin S$$

$$a, b, c \in S$$

- 集合由所包含的元素确定。称集合S与T相等，记作S=T，当且仅当对于$\forall x \in S$，有$x \in T$，且$\forall x \in T$，有$x \in S$。
  - {a} = {a, a},
  - {a, b} = {b, a} = {a, b, b} = {a, b, b, a}
  - {a, b, c} = {c, b, a} = {b, c, b, a}

集合

- 集合所包含元素的全体，称为外延。集合的元素所共有的性质，称为集合的内涵。
  - 例如，非负偶数集的外延为{0,2,4,...}，它的内涵是“非负的偶数”。

- 对于$\forall x \in S$，则$x \in T$，称S为T的子集，记作$S \subseteq T$。

- 称S为T的真子集，当且仅当$S \subseteq T$且$S \neq T$。

集合

- 空集是一个特殊的集合，它不包含任何元素，且是任何集合的子集。

- 给定集合S和T，我们定义

$$\bar{S} = \{x|x \notin S\},$$
$$S \cup T = \{x|x \in S\text{或}x \in T\},$$
$$S \cap T = \{x|x \in S\text{且}x \in T\},$$
$$S - T = \{x|x \in S\text{且}x \notin T\},$$

- 称$\bar{S}$为S的补（集），$S \cup T$为S和T的并（集），$S \cap T$为S和T的交（集），$S - T$为S和T的差（集）。

有序偶

- 对象a和b的有序偶记作$\langle a, b\rangle$.
  - $\langle a, b\rangle$=$\langle c, d\rangle$，当且仅当a=c且b=d
  - $\langle a, b\rangle$与{a,b}不同

- 有序n元组$\langle a_1, \ldots, a_n\rangle$.
  - $\langle a_1, \ldots, a_n\rangle$=$\langle b_1, \ldots, b_m\rangle$，当且仅当n=m且$a_i = b_i$。

- 例如，$\{\langle m, n\rangle | m, n$是自然数并且$m < n\}$是自然数的序偶的集合，其中序偶的第一个数小于第二个数。

笛卡尔积

- 集合$S_1,\ldots,S_n$的笛卡尔积为：

$$S_1 \times \ldots \times S_n = \{\langle x_1,\ldots,x_n\rangle | x_1 \in S_1,\ldots,x_n \in S_n\}.$$

- 当$S_1 = \ldots = S_n = S$时，$S_1 \times \ldots \times S_n = S^n$，称为S的n次笛卡尔积。

关系

- 当n=1时，S上的一元关系R是S中元素的一个性质：

$$R = \{x \in S | x\text{有}R\text{的性质}\}.$$

- 当$n \geq 2$时，集合S上的n元关系R为：

$$R = \{\langle x_1, \ldots, x_n \rangle | x_1, \ldots, x_n \in S, \text{且} x_1, \ldots, x_n \text{之间有} R \text{关系}\}.$$

  - 特别地，$R \subseteq S^n$。

关系

- 相等关系是任何集合S上的一个特殊二元关系

$$\{\langle x, y\rangle | x, y \in S, \text{且} x = y\},$$

$$\{\langle x, x\rangle | x \in S\}.$$

- 自然数集的一元关系“是偶数”，它的内涵是“被2整除”，它的外延是{x|x是自然数，且被2整除}。

关系

- 自然数集行的二元关系“小于”，m<n的内涵是：

  存在不等于0的自然数x，使得$m+x=n$。

  “小于”的外延是

  $$\{\langle m,n\rangle | m,n\text{是自然数}, \text{且} m<n\}.$$

函数

- 函数（也称映射）f是有序偶构成的集合，使得如果 $\langle x, y\rangle \in f$，并且$\langle x, z\rangle \in f$，则y=z。

- 函数f的定义域为：

$$dom(f) = \{x | \exists y, s.t., \langle x, y\rangle \in f\}.$$

- 函数f的值域为：

$$ran(f) = \{y | \exists x, s.t., \langle x, y\rangle \in f\}.$$

函数

- 若f是函数，且$x \in dom(f)$，则使得$\langle x, y\rangle \in f$成立的唯一的y记作f(x)，即y为f在x处的值。

- 若f是函数，且$dom(f) = S$，$ran(f) \subseteq T$，则称f为由S到T中的函数（或映射），记作
$$f: S \to T.$$
  - 若$ran(f) = T$，则称f映射S到T上，即满射。
  - 若f(x)=f(y)，则x=y，称f是单射。
  - 单射+满射=双射（一一映射）。

函数

- 集合S上的n元函数f是S^n到S中的映射。
  - 加法、乘法是自然数集上的二元函数

- 若f是n元函数，且$\langle x_1, \ldots, x_n \rangle \in dom(f)$，则一般用$f(x_1, \ldots, x_n)$表示$f(\langle x_1, \ldots, x_n \rangle)$。

关系与函数的限制

- 设R是S上的n元关系，$S_1 \subseteq S$。R到S_1上的限制为n元关系 $R \cap S_1^n = \{\langle x_1, ..., x_n\rangle | x_1, ..., x_n \in S_1, \text{且} x_i \text{之间有} R \text{关系}\}.$

- 设$f: S \to T$是函数，$S_1 \subseteq S$。f到S_1上的限制为：

$$f|S_1: S_1 \to T,$$

即，对于$\forall x \in S_1$，$(f|S_1)(x) = f(x)$。

等价类

- 设R是二元关系，我们常用

$$xRy$$

  表示$\langle x, y\rangle \in R$。

- R在S上是自反的，当且仅当对于$\forall x \in S$，xRx。

- R在S上是对称的，当且仅当对于$\forall x, y \in S$，若xRy，则yRx。

等价类

- R在S上是传递的，当且仅当对于$\forall x, y, z \in S$，若xRy，且yRz，则xRz。

- R是S上的二元关系，若R满足自反性、对称性、传递性，则称R是S上的等价关系。

- 设R是S上的等价关系，对于$\forall x \in S$，称集合

$$\bar{x} = \{y \in S | xRy\}$$

为x的R等价类。

等价类

- R等价类作出S的一个划分，即R等价类是S的子集，且S的每个元素恰好属于一个R等价类。
  - 对于$\forall x, y \in S$，有$\bar{x} = \bar{y}$当前仅当xRy。

- 例如，自然数集合上的同余等价类
  - x mod 3 = 0,1,2，(xRy即x mod 3 = y mod 3)

集合的势

- 称两个集合S和T为等势的，记作S~T，当且仅当存在有S到T的一一映射。
  - 等势是等价关系，所以可以根据等势将集合分类。

- 集合S的基数（或势），记作|S|。
  - 若|S|=|T|当前仅当S~T。
  - $|S| \leq |T|$表示存在从S到T中的一一函数。

集合的势

- 对于有限集S，|S|是一个自然数n，则n表示S内元素数目。且S与{1,...,n}是等势的。

- 称S为无限可数的，当且仅当|S|=|N|。

- 称S为可数的，当且仅当$|S| \le |N|$。

集合的势

- **定理：**

  可数集的子集是可数的。

  有限个可数集的并是可数的。

  可数个可数集的并是可数的。

  有限个可数集的笛卡尔积是可数的。

  所有以可数集的元素为分量的有限序列构成的集合是可数的。