大学数学试卷　　2024.1.2

一、 简答题(每小题7分，共4题，计28分)

1. $\alpha = (1, 0, -1, 2), \beta = (2, -1, 0, 1)$，求 $|E_4 - \alpha^{\mathrm{T}}\beta|$.

2. 将向量组 $\alpha_1 = (1, 1, 0, 0)^{\mathrm{T}}, \alpha_2 = (0, 2, 1, 1)^{\mathrm{T}}, \alpha_3 = (0, 1, 1, 0)^{\mathrm{T}}$ 施密特正交化.

3. 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 \\ -3 & 1 & 3 \\ 3 & -3 & -5 \end{pmatrix}$ 的特征值及其重数. 说明 A 是否可以对角化.

4. $\mathbb{R}^4$ 中的子空间 W_1 的一组基为 $\alpha_1 = (1, -1, -1, 1)^{\mathrm{T}}, \alpha_2 = (1, -1, 1, -3)\mathrm{T}$, W_2 的一组基为 $\beta_1 = (2, 6, 1, 6)^{\mathrm{T}}, \beta_2 = (1, 3, 1, 2)^{\mathrm{T}}$. 求 $W_1 + W_2$ 的维数.

二、(本题12分) 计算 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^n$ 和 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}^n$. $(n \geq 3)$.

三、(本题12分) 方阵 $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ 满足 $A^2 + aA + bE_2 = O$，其中 $a, b \in \mathbb{R}, a^2 - 4b < 0$. 试证明

(1) 对于任意的非零向量 $\beta \in \mathbb{R}^2$，向量组 $\beta, A\beta$ 线性无关. (6分)

(2) 矩阵 A 相似于 $\begin{pmatrix} 0 & -b \\ 1 & -a \end{pmatrix}$. (6分).

四、(本题12分) 用正交变换将实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_2x_3$ 化成一个标准形并求 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的正惯性指数和负惯性指数.

五、(本题12分) 矩阵 $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 对称正定. 试证明

(1) $A + B$ 正定. (4分)

(2) 若 A 的所有特征值都大于1，则 $A - E_n$ 正定. (4分)

(3) 若 A 的特征值中的最小值大于 B 的特征值中的最大值，则 $A - B$ 正定. (4分)

六、(本题12分) 线性空间 $\mathbb{R}^3$ 中有两组基底 $\alpha_1 = (1, 1, 0)^{\mathrm{T}}, \alpha_2 = (1, 0, 1)^{\mathrm{T}}, \alpha_3 = (0, 1, 1)^{\mathrm{T}}$ 和 $\beta_1 = (1, -1, 0)^{\mathrm{T}}, \beta_2 = (-2, 1, 0)^{\mathrm{T}}, \beta_3 = (-1, 1, 1)^{\mathrm{T}}$. 求 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 到 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的过渡矩阵 M.

大学数学试卷 答案 2024.1.2

一、 简答题(每小题7分，共4题，计28分)

1. $\alpha=(1,0,-1,2),\beta=(2,-1,0,1)$，求 $|E_4-\alpha^{\mathrm{T}}\beta|$.

解：$|E_4-\alpha^{\mathrm{T}}\beta|=\begin{vmatrix}-1 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 2 & -1 & 1 & -1\\ -4 & 2 & 0 & -1\end{vmatrix}=-3.$

解法二：$D=\alpha^{\mathrm{T}}\beta$ 有特征值 $0,0,\beta\alpha^{\mathrm{T}}=4$，故 $|E_4-\alpha^{\mathrm{T}}\beta|=(1-0)(1-0)(1-4)=-3.$

2. 将向量组 $\alpha_1=(1,1,0,0)^{\mathrm{T}},\alpha_2=(0,2,1,1)^{\mathrm{T}},\alpha_3=(0,1,1,0)^{\mathrm{T}}$ 施密特正交化.

解：$\beta_1=\alpha_1=(1,1,0,0)^{\mathrm{T}},\beta_2=\alpha_2-\dfrac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=(-1,1,1,1)^{\mathrm{T}},$

$\beta_3=\alpha_3-\dfrac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\dfrac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2=(0,0,1/2,-1/2)^{\mathrm{T}}.$

3. 求 $A=\begin{pmatrix}1 & -3 & -3\\ -3 & 1 & 3\\ 3 & -3 & -5\end{pmatrix}$ 的特征值及其重数. 说明 A 是否可以对角化.

解：$|\lambda E-A|=(\lambda+2)^2(\lambda-1)$. 方阵 A 的特征值为 -2(二重)，1(一重). 注意到
$\mathrm{r}(-2E-A)=1,\mathrm{r}(E-A)=2$，因此 A 有三个线性无关的特征向量，从而 A 可对角化.

4. $\mathbb{R}^4$ 中的子空间 W_1 的一组基为 $\alpha_1=(1,-1,-1,1)^{\mathrm{T}},\alpha_2=(1,-1,1,-3)\mathrm{T}$, W_2 的一组基为
$\beta_1=(2,6,1,6)^{\mathrm{T}},\beta_2=(1,3,1,2)^{\mathrm{T}}$. 求 W_1+W_2 的维数.

解：注意到 $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$ 中的一组极大线性无关组为 $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1$. 因此
$\dim(W_1+W_2)=\dim(\mathrm{span}\{\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2\})=3.$

二、(本题12分) 计算 $\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}^n$ 和 $\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}^n$. $(n\geq 3)$.

解：令 $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$，计算得 $A^2=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$, $A^3=O$. $A^n=A^3A^{n-3}=OA^{n-3}=O$.

我们有 $\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}^n=(2E+A)^n=2^nE+n2^{n-1}A+\dfrac{n(n-1)}{2}2^{n-2}A^2=\begin{pmatrix}2^n & n2^{n-1} & 0\\ 0 & 2^n & 0\\ n2^{n-1} & n(n-1)2^{n-3} & 2^n\end{pmatrix}.$

三、(本题12分) 方阵 $A\in\mathbb{R}^{2\times 2}$ 满足 $A^2+aA+bE_2=O$，其中 $a,b\in\mathbb{R},a^2-4b<0$. 试证明

(1) 对于任意的非零向量 $\beta\in\mathbb{R}^2$，向量组 $\beta,A\beta$ 线性无关. (6分)

(2) 矩阵 A 相似于 $\begin{pmatrix}0 & -b\\ 1 & -a\end{pmatrix}$. (6分).

证：(1) 由于 β 非零，假设 $\beta,A\beta$ 线性相关，则存在 λ 使得 $A\beta=\lambda\beta$. 由于 $\beta,A\beta$ 是实向量，所以 λ 是实数. 由条件，$\theta=(A^2+aA+bE_2)\beta=(\lambda^2+a\lambda+b)\beta$. 从而 $\lambda^2+a\lambda+b=0$，这与判别式 $a^2-4b<0$ 矛盾. 因此 $\beta,A\beta$ 线性无关.

(2) 令 $M=(\beta,A\beta)$，由(1)得 M 可逆. 我们有

$AM=A(\beta,A\beta)=(A\beta,-aA\beta-b\beta)=(\beta,A\beta)\begin{pmatrix}0 & -b\\ 1 & -a\end{pmatrix}=M\begin{pmatrix}0 & -b\\ 1 & -a\end{pmatrix}$，从而 $M^{-1}AM=\begin{pmatrix}0 & -b\\ 1 & -a\end{pmatrix}$.

(2)证法二：设 λ 是 A 的特征值，由 $A^2+aA+bE_2=O$ 知 $\lambda^2+a\lambda+b=0$，又由 $a^2-4b<0$ 知 $\lambda^2+a\lambda+b=0$ 有两个不同的复数解 $\lambda_1=\dfrac{-a+i\sqrt{4b-a^2}}{2},\lambda_2=\dfrac{-a-i\sqrt{4b-a^2}}{2}$.
由于 A 是2阶实矩阵，故特征方程的解是两个共轭的复数，故 λ_1,λ_2 就是 A 的两个不同的特征值. 于是 A 相似于对角矩阵 $\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2)$.
令 $B=\begin{pmatrix}0 & -b\\ 1 & -a\end{pmatrix}$，则知 $|\lambda E-B|=\lambda^2+a\lambda+b=0$，于是 B 有与 A 相同的特征值 λ_1,λ_2，从而 B 也相似于 $\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2)$，于是 A 与 B 相似.

四、(本题12分) 用正交变换将实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+x_2x_3$ 化成一个标准形并求 $f(x_1,x_2,x_3)$

的正惯性指数和负惯性指数.

解：二次型矩阵为 $A=\begin{pmatrix}0&1/2&0\\1/2&0&1/2\\0&1/2&0\end{pmatrix}$，则 $f(x_1,x_2,x_3)=x^{\mathrm{T}}Ax,x=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$.

由 $|\lambda E-A|=\lambda(\lambda-1/\sqrt{2})(\lambda+1/\sqrt{2})=0$，故特征值为 $\lambda=0,1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2}$. 对应的三个单位特征向量为 $\beta_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)^{\mathrm{T}},\beta_2=\dfrac{1}{2}(1,\sqrt{2},1)^{\mathrm{T}},\beta_3=\dfrac{1}{2}(1,-\sqrt{2},1)^{\mathrm{T}}$.

令 $Q=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，则在正交变换 $x=Py,y=(y_1,y_2,y_3)^{\mathrm{T}}$ 下有 $f(x_1,x_2,x_3)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}y_2^2-\dfrac{1}{\sqrt{2}}y_3^2$.

故正惯性指数为1，负惯性指数为1.

五、(本题12分) 矩阵 $A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 对称正定. 试证明

(1) $A+B$ 正定. (4分)

(2) 若 A 的所有特征值都大于1，则 $A-E_n$ 正定. (4分)

(3) 若 A 的特征值中的最小值大于 B 的特征值中的最大值，则 $A-B$ 正定. (4分)

证：(1) A,B 对称正定，故有 $(A+B)^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}}+B^{\mathrm{T}}=A+B$，即 $A+B$ 对称.

且对任意$x\in\mathbb{R}^n,x\neq\theta$,有$x^{\mathrm{T}}Ax>0,x^{\mathrm{T}}Bx>0$, 故$x^{\mathrm{T}}(A+B)x=x^{\mathrm{T}}Ax+x^{\mathrm{T}}Bx>0$,即$A+B$正定.

(2) A 对称正定，故有正交矩阵Q，使得$Q^{\mathrm{T}}AQ=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$，其中 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$为$A$的全部特征值，且都大于1. 于是 $Q^{\mathrm{T}}(A-E_n)Q=\mathrm{diag}(\lambda_1-1,\cdots,\lambda_n-1)$，对角元 $\lambda_i-1>0,i=1,\cdots,n$.

即 $A-E_n$ 对应二次型的正惯性指数为 n，$A-E_n$ 的对称性显然，故 $A-E_n$ 正定.

(2)证法二：A 对称正定，A 的特征值都大于1，故 $\lambda(A-E_n)=\lambda(A)-1>0$，即 $A-E_n$ 的特征值都大于0，对称性显然，故 $A-E_n$ 正定.

(3) 设 A 的最小特征值为 a，B 的最大特征值为 b，$a>b$. 取 $k=\dfrac{1}{2}(a+b)$，则 $a>k,k>b$.

则 $A-kE_n$ 的特征值为 $\lambda(A)-k\geq a-k>0$，对称性显然，故 $A-kE_n$ 正定.

kE_n-B的特征值为 $k-\lambda(B)\geq k-b>0$，对称性显然，故 kE_n-B 正定.

由(1)知 $A-B=(A-kE_n)+(kE_n-B)$ 正定.

(3)证法二：先证 $\lambda_{\min}\leq f(x)=x^{\mathrm{T}}Ax\leq\lambda_{\max}$，其中 $x^{\mathrm{T}}x=1$.

A 对称，则有正交矩阵 Q 使得 $Q^{\mathrm{T}}AQ=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)=\Lambda$，其中 $\lambda_1\geq\lambda_2\geq\cdots\geq\lambda_n$.

取 $y=(y_1,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}=Q^{\mathrm{T}}x$，则 $y^{\mathrm{T}}y=y_1^2+\cdots+y_n^2=x^{\mathrm{T}}QQ^{\mathrm{T}}x=x^{\mathrm{T}}x=1$，且 $x=Qy$.

则有 $f(x)=x^{\mathrm{T}}Ax=y^{\mathrm{T}}\Lambda y=\lambda_1y_1^2+\cdots+\lambda_ny_n^2\geq\lambda_ny_1^2+\cdots+\lambda_ny_n^2=\lambda_n$. 同理 $f(x)\leq\lambda_1$.

再证 $x^{\mathrm{T}}(A-B)x>0$，其中 $x\neq\theta$.

当 $x\neq\theta$ 时，$x^{\mathrm{T}}Ax=\|x\|^2(\dfrac{1}{\|x\|}x)^{\mathrm{T}}A(\dfrac{1}{\|x\|}x)\geq\|x\|^2\lambda_{\min}(A)$. 同理 $x^{\mathrm{T}}Bx\leq\|x\|^2\lambda_{\max}(B)$.

于是$x\neq\theta$时，有 $x^{\mathrm{T}}(A-B)x\geq\|x\|^2(\lambda_{\min}(A)-\lambda_{\max}(B))>0$，对称性显然，故 $A-B$ 正定.

六、(本题12分) 线性空间 $\mathbb{R}^3$ 中有两组基底 $\alpha_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}},\alpha_2=(1,0,1)^{\mathrm{T}},\alpha_3=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$ 和 $\beta_1=(1,-1,0)^{\mathrm{T}},\beta_2=(-2,1,0)^{\mathrm{T}},\beta_3=(-1,1,1)^{\mathrm{T}}$. 求 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到 β_1,β_2,β_3 的过渡矩阵 M.

解：我们有 $(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)M$，因此

$$M=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)^{-1}(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\begin{pmatrix}0.5&0.5&-0.5\\0.5&-0.5&0.5\\-0.5&0.5&0.5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-2&-1\\-1&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-0.5&-0.5\\1&-1.5&-0.5\\-1&1.5&1.5\end{pmatrix}.$$

七、(本题12分) 矩阵 $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 满足 $AB-BA=aB,(a\neq 0)$. 求证

(1) 对任意的正整数 m，我们有 $AB^m-B^mA=maB^m$. (8分)

(2) 令 α 为 A 的一个特征向量，则存在正整数 k 使得 $B^k\alpha=\theta$. (4分)

证：(1) 当 $m=1$ 时，公式 $AB^m-B^mA=maB^m$ 由条件自动成立. 假设该公式在 $m=k\geq 1$ 时成立，当 $m=k+1$ 时，我们有

$$AB^m-B^mA=AB^{k+1}-B^{k+1}A=AB^{k+1}-BAB^k+BAB^k-B^{k+1}A$$
$$=(AB-BA)B^k+B(AB^k-B^kA)=(aB)B^k+B(kaB^k)=(k+1)aB^{k+1}=maB^m.$$

由数学归纳法，公式 $AB^m-B^mA=maB^m$ 对所有的正整数 m 成立.

(1)证法二：当 $m\geq 1$ 时，对 $AB-BA=aB$ 左乘 B^k，右乘 $B^{m-k-1}, k=0,1,\cdots,m-1$，有

$$\begin{array}{rrr}
B^0(AB-BA)B^{m-1}= & AB^m-BAB^{m-1}= & aB^m,\\
B^1(AB-BA)B^{m-2}= & BAB^{m-1}-B^2AB^{m-2}= & aB^m,\\
B^2(AB-BA)B^{m-3}= & B^2AB^{m-2}-B^3AB^{m-3}= & aB^m,\\
\cdots & \cdots & \cdots\\
+)\ B^{m-1}(AB-BA)B^0= & B^{m-1}AB-B^mA= & aB^m\\
\hline
 & AB^m-B^mA= & maB^m
\end{array}$$

故有 $AB^m-B^mA=maB^m$.

(2) 设 $A\alpha=\lambda\alpha$，对任意的正整数 m，我们有

$$A(B^m\alpha)=(B^mA+maB^m)\alpha=\lambda(B^m\alpha)+ma(B^m\alpha)=(\lambda+ma)(B^m\alpha).$$

如果对于任意的正整数 m，我们都有 $B^m\alpha\neq\theta$，那么对于任意的正整数 m，$B^m\alpha$ 是 A 的属于特征值 $\lambda+ma$ 的特征向量. 这和矩阵 A 的特征值只有有限多个矛盾. 因此，一定存在一个正整数 k 使得 $B^m\alpha=\theta$.