作业 07

题 1. 课本 p47 习题 14

(2)

证：反证法。

假设原公式不是永真式，即存在模型(M,σ)，使得$(\forall x\forall y(x \doteq y \to y \doteq x))_{M[\sigma]} = F$。

也即存在 a, b ∈ M，使得$(x \doteq y \to y \doteq x)_{M[\sigma:x=a,y=b]} = F$。

由于$(x \doteq y \to y \doteq x)_{M[\sigma:x=a,y=b]} = \mathbf{B}_{\to}((x \doteq y)_{M[\sigma:x=a,y=b]}, (y \doteq x)_{M[\sigma:x=a,y=b]})$

$= \mathbf{B}_{\to}(a = b, b = a) = T$，可得矛盾。 □

(3)

证：反证法。

假设原公式不是永真式，即存在模型(M,σ)，使得$(\forall x\forall y\forall z((x \doteq y \wedge y \doteq z) \to x \doteq z))_{M[\sigma]} = F$。

也即存在 a, b, c ∈ M，使得$((x \doteq y \wedge y \doteq z) \to x \doteq z)_{M[\sigma:x=a,y=b,z=c]} = F$。

$((x \doteq y \wedge y \doteq z) \to x \doteq z)_{M[\sigma:x=a,y=b,z=c]}$

$= \mathbf{B}_{\to}((x \doteq y \wedge y \doteq z)_{M[\sigma:x=a,y=b,z=c]}, (x \doteq z)_{M[\sigma:x=a,y=b,z=c]})$

$= \mathbf{B}_{\to}(\mathbf{B}_{\wedge}(a = b, b = c), a = c)$。

有如下两种情况：

1. 若$a = b$和$b = c$为真，则有$a = c$为真，因此$\mathbf{B}_{\to}(\mathbf{B}_{\wedge}(a = b, b = c), a = c) = T$。
2. 若$a = b$和$b = c$至少一个为假，则$\mathbf{B}_{\wedge}(a = b, b = c) = F$，从而$\mathbf{B}_{\to}(\mathbf{B}_{\wedge}(a = b, b = c), a = c) = T$。

因此，无论 a, b, c 取何值，$\mathbf{B}_{\to}(\mathbf{B}_{\wedge}(a = b, b = c), a = c) = T$，矛盾。 □

题 2. 课本 p48 习题 15

证：对于任意模型(M, σ)，有如下几种情况：

$A_{M[\sigma]}$	$B_{M[\sigma]}$	$(\neg(A \wedge B))_{M[\sigma]}$	$(\neg A \vee \neg B)_{M[\sigma]}$	$(\neg(A \wedge B)) \leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)_{M[\sigma]}$
T	T	F	F	T
T	F	T	T	T
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

所以$(\neg(A \wedge B)) \leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$是永真的。

其他式子是永真的证明是类似的，此处省略。

题 3. 课本 p48 习题 16

证：对于任意模型(M, σ)，

$$(\neg\forall xA)_{M[\sigma]} = \begin{cases} B_{\neg}(T), & 若\forall a \in M, A_{M[\sigma[x:=a]]} = T \\ B_{\neg}(F), & 若\exists a \in M, A_{M[\sigma[x:=a]]} = F \end{cases} = \begin{cases} F, & 若\forall a \in M, A_{M[\sigma[x:=a]]} = T \\ T, & 若\exists a \in M, A_{M[\sigma[x:=a]]} = F \end{cases},$$

$$(\exists x\neg A)_{M[\sigma]} = \begin{cases} T, & 若\exists a \in M, \neg A_{M[\sigma[x:=a]]} = T \\ F, & 若\forall a \in M, \neg A_{M[\sigma[x:=a]]} = F \end{cases} = \begin{cases} T, & 若\exists a \in M, A_{M[\sigma[x:=a]]} = F \\ F, & 若\forall a \in M, A_{M[\sigma[x:=a]]} = T \end{cases}.$$

所以$(\neg\forall xA) \leftrightarrow (\exists x\neg A)$是永真的。

$\vDash (\neg\exists xA) \leftrightarrow (\forall x\neg A)$的证明也是类似的。

题 4. 课本 p48 习题 17

(1) Γ_n可满足。

证：考虑初等算数的标准模型(N,I)。构造赋值σ，使得$\sigma(x) = n+1$，对任何Γ_n中的公式，显然对于模型(N,σ)可满足，因此$N \vDash_\sigma \Gamma_n$。 □

(2) 在标准模型 N 中，Γ不可满足。

证：反证法。

假设Γ可满足，即存在一个模型(N,σ)，使得对于Γ中任意的公式可满足。

对于此处赋值σ，不妨设$\sigma(x) = a \in N$，

那么对于Γ中的公式 $x > S^a 0$，它的解释为假，矛盾。 □

作业 08

题 1. 证明~为等价关系（课本 p43 命题 3.28）。

证：下证~有自反性、对称性和传递性。

自反性：$\forall t \in T$，由 Hintikka 集定义第 13 条，知 $t \doteq t \in \Psi$，即 t~t。

对称性：$\forall t, s \in T$，若 t~s，则 $t \doteq s \in \Psi$。由 Hintikka 集定义第 14 条，知 $t \doteq s \to s \doteq t \in \Psi$。又由 Hintikka 集定义第 3 条，知 $s \doteq t \in \Psi$，即 s~t。

传递性：$\forall t, s, u \in T$，由 Hintikka 集定义第 15 条，知 $t \doteq s \to (s \doteq u \to t \doteq u) \in \Psi$。若 t~s 且 s~u，则 $t \doteq s \in \Psi$且 $s \doteq u \in \Psi$。又由 Hintikka 集定义第 3 条，知 $s \doteq u \to t \doteq u \in \Psi$，从而 $t \doteq u \in \Psi$，即 t~u。

题 2. 课本 p48 习题 18

证：对于任意模型(M,σ)，

$$(\forall xA)_{M[\sigma]} = \begin{cases} T, & 若\forall a \in M, A_{M[\sigma[x:=a]]} = T \\ F, & 若\exists a \in M, A_{M[\sigma[x:=a]]} = F \end{cases},$$

$$(\forall yA[y/x])_{M[\sigma]} = \begin{cases} T, & 若\forall a \in M, A[y/x]_{M[\sigma[y:=a]]} = T \\ F, & 若\exists a \in M, A[y/x]_{M[\sigma[y:=a]]} = F \end{cases}$$

$$= \begin{cases} T, & 若\forall a \in M, A_{M[\sigma[y:=a][x:=y_{M[\sigma[y:=a]]}]]} = T \\ F, & 若\exists a \in M, A_{M[\sigma[y:=a][x:=y_{M[\sigma[y:=a]]}]]} = F \end{cases}$$

$$= \begin{cases} T, & 若\forall a \in M, A_{M[\sigma[y:=a][x:=a]]} = T \\ F, & 若\exists a \in M, A_{M[\sigma[y:=a][x:=a]]} = F \end{cases} = \begin{cases} T, & 若\forall a \in M, A_{M[\sigma[x:=a]]} = T \\ F, & 若\exists a \in M, A_{M[\sigma[x:=a]]} = F \end{cases}.$$

所以$(\forall xA) \leftrightarrow (\forall yA[y/x])$是永真的。

$\vDash (\exists xA) \leftrightarrow (\exists yA[y/x])$的证明也是类似的。

题 3. 课本 p48 习题 19

（1）

证：反证法，假设存在模型(M,σ)，使得$(\forall xA \leftrightarrow A[t/x])_{M[\sigma]} = F$。则有两种情况：

情况 1：$(\forall xA)_{M[\sigma]} = T$，$(A[t/x])_{M[\sigma]} = F$。由语义的定义和替换引理，

可知$\forall \mathrm{a} \in \mathrm{M}$，$A_{M[\sigma[x:=a]]} = T$，$A_{M[\sigma[x:=t_{M[\sigma]}]]} = F$。

当 $\mathrm{a} = t_{M[\sigma]}$，可得$A_{M[\sigma[x:=t_{M[\sigma]}]]} = T$，矛盾。

情况 2：$(\forall xA)_{M[\sigma]} = F$，$(A[t/x])_{M[\sigma]} = T$。

？？？

（2）

证：反证法，假设存在模型(M,σ)，使得$(A[t/x] \to \exists xA)_{M[\sigma]} = F$。

则$(A[t/x])_{M[\sigma]} = T$，$(\exists xA)_{M[\sigma]} = F$。由语义的定义和替换引理，

可知$A_{M[\sigma[x:=t_{M[\sigma]}]]} = T$，$\forall \mathrm{a} \in \mathrm{M}$，$A_{M[\sigma[x:=a]]} = F$。

当 $\mathrm{a} = t_{M[\sigma]}$，可得$A_{M[\sigma[x:=t_{M[\sigma]}]]} = F$，矛盾。