'

# 数学分析-习题 1

课程助教　徐業釗

2023 年 9 月 22 日

1. 研究数列 $\{sinn\}$ 的敛散性。
2. 设 $a_i > 0, i = 1, 2, \cdots m$, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sum_{i=1}^{m} a_i} = \max\limits_{1\le i\le m} a_i$。
3. 设 $a_i > 0, i = 1, 2, \cdots n$, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sum_{i=1}^{n} a_i} = \sup\limits_{1\le i\le m} a_i$。
4. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, 证明 $\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n} = A$
5. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, 证明 $\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} ia_i}{n^2} = \frac{A}{2}$
6. 计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \prod_{k=2}^{n}(1 - \frac{1}{k^2})$.
7. $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{1+2+\cdots+k}\right)$
8. 给定 $a_0 = a$, $b_0 = b$, $c_0 = c$, 数列 $a_n$, $b_n$, $c_n$ 满足:

$$\begin{cases} a_n = \frac{b_{n-1}+c_{n-1}}{2} \\ b_n = \frac{a_{n-1}+c_{n-1}}{2} \\ c_n = \frac{b_{n-1}+a_{n-1}}{2} \end{cases}$$

求证:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n = \frac{a+b+c}{3}$$

9. 如果 $a_0 + a_1 + \cdots + a_p = 0$, 求极限:

$$\lim_{n\to\infty} \left(a_0\sqrt{n} + a_1\sqrt{n+1} + \cdots + a_p\sqrt{n+p}\right)$$

10. 设 $f(x)$ 是闭区间 $[a, b]$ 上的非负连续函数则有

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sum_{i=1}^{n} \left(f(\frac{i}{n})^n\right) \frac{1}{n}} = \max_{x\in[0,1]} f(x)$$

**stolz 公式**

1. 已知 $\{b_n\}$ 严格单调递增趋于正无穷, 且

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = A$$

其中 A 为有限数或 $+\infty$ 或 $-\infty$, 则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = A$$

2. 已知 $\{b_n\}$ 严格单调递减趋于 0, $\{a_n\}$ 趋向于 0 且

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = A$$

其中 A 为有限数或 $+\infty$ 或 $-\infty$，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=A$$