、

数学分析-习题 2

课程助教　徐業釗

2023 年 10 月 8 日

1. 证明收敛数列必定有单调有界的收敛子列.

2. 设 $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$,$n \geq 1$, 研究数列 $\{a_n\}$ 的极限.

解:

$\sqrt{2+a_n} < \sqrt{4}$　$a_n<2$　$\{a_n\} \to 2$

3. 设 $a_1 > 0$, $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{1}{a_n})$, $n \geq 1$ 研究数列 $\{a_n\}$ 的极限.　$\{a_n\} \to 1$

解:

4. 设 $a_1 = 1$,$a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n}$, $n \geq 1$. 研究数列 $\{a_n\}$ 的极限.

解:

5. 计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2})^n$

解:

6. 设 $0 \leq q < 1$ 为常数，数列 $\{a_n\}$ 满足条件

$$|a_{n+1} - a_n| \leq q|a_n - a_{n-1}|, \forall n \geq 2$$

证明 $\{a_n\}$ 为 Cauchy 列。

解

7. 设数列 $\{a_n\}$ 如果存在常数 M, 使得

$$|a_2 - a_1| + |a_3 - a_2| + \cdots + |a_{n+1} - a_n| \leq M, \forall n \geq 1 \tag{1}$$

则称 $\{a_n\}$ 为有界变差数列。证明有界变差数列均为 Cauchy 列

解

8. 设 $a_0 = a, a_1 = b$, 定义:

$$a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n-2}), \forall n \geq 2 \tag{2}$$

证明 $\{a_n\}$ 为有界变差数列，且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{3}(a + 2b)$

解:

9. 设函数 $f(x)$ 是闭区间 $[a, b]$ 上的单调递增函数，且

$$f(a) > a, f(b) < b$$

证明存在 $\xi \in (a, b)$ 使得 $f(\xi) = \xi$

解

10. **压缩映射原理：**已知数列 $\{a_n\}$ 存在常数 $r \in (0,1)$, 使得

$$|a_{n+1} - a_n| \leqslant r\,|a_n - a_{n-1}|\,(n = 2, 3, \cdots, n)$$

则数列收敛, 特别得如果数列 a_n 由递推公式 $a_{n+1} = f(a_n)$ 给出, 其中 f 是可微函数, 且存在 $r \in (0,1)$ 使得

$$f'(x) \leqslant r \leqslant 0$$

则 a_n 收敛。