

数学分析习题课七（问题）

June 1, 2024

问题 1. 求下列函数项级数的收敛域.

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{\sqrt{n}}$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^x}$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)^x, \quad x > 0$$

问题 2. 讨论下列函数项级数在指定区间上的一致收敛性.

$$(1) \sum_{n=2}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{x}{n \ln^2 n} \right), \quad x \in (-l, l), l > 0.$$

$$(2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x}{(1+x)^n}, \quad x > 0.$$

$$(3) \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \sin \frac{1}{3^n x}, \quad x > 0.$$

问题 3. 设函数 $f(x)$ 在有界闭区间 $[a, b]$ 上连续, 又设

$$F_1(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad F_{n+1}(x) = \int_a^x F_n(t) dt, \quad n = 1, 2, \dots, \quad a \leq x \leq b.$$

证明: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} F_n(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上一致收敛.

问题 4. 求下列幂级数的收敛半径, 收敛区间和收敛域.

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2} x^n$$

$$(2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 + \cos n}{3 + \ln n} (x - 4)^{5n}$$

问题 5. 求下列幂级数在收敛区间内的和函数

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$$

$$(2) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n^2 - n}$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) x^n$$

问题 6. 求下列常数项级数的和

$$(1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)3^n}$$

$$(2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^3}{(-1)^n \cdot n!}$$

问题 7. 求下列函数的麦克劳林展开式，并指明展开式的成立范围

$$(1) \ln(-2x^2 + x + 1)$$

$$(2) \arctan \frac{a+x}{a-x}, \quad a > 0$$

(3)

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \int_0^x \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 dt, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

问题 8. 设幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 在开区间 $(-R, R)$ 中一致收敛，证明它在闭区间 $[-R, R]$ 中也是一致收敛的.