

## 数学分析-习题 3

课程助教 徐業釗

2023 年 10 月 24 日

1. 证明: 函数  $f(x)$  在点  $x_0$  处有极限的充要条件是  $f$  在  $x_0$  的左极限和右极限都存在且相等。

2. 研究  $f(x) = [x]$  函数的连续性, 并说一下其间断点类型。3. 求函数极限

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+mx)^n - (1+nx)^m}{x^2} \quad (2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{\frac{1}{m}} - 1}{x^{\frac{1}{n}} - 1} \quad (3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+mx)^{\frac{1}{n}} - (1+nx)^{\frac{1}{m}}}{x} \quad (4) \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{m}{1-x^m} - \frac{n}{1-x^n} \right)$$

$$(5) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{2^2} \right) \left( 1 - \frac{1}{3^2} \right) \cdots \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right) \quad (6) \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\pi \sqrt{n^2 + 1})$$

4. 计算极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\sin(\cdots(\sin x)))$  (n 次复合函数)

5. 设  $f$  为周期函数, 如果  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = C$ , 那么  $f \equiv C$

6. 设  $f, g$  都为周期函数且  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - g(x) = 0$ , 那么  $f(x) = g(x)$

7. 设  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x) - f(x)}{x} = 0$ , 证明  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$

8. 设  $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  满足条件  $f(2x) = f(x)$ ,  $f(x) = o(1)$  ( $x \rightarrow \infty$ ). 证明:  $f(x) \equiv 0$

9. 设  $f(x) = o(1)$ ,  $f(2x) - f(x) = O(x)$  ( $x \rightarrow 0$ ). 证明  $f(x) = O(x)$  ( $x \rightarrow 0$ )

10. 设  $f(x)$  为  $[a, b]$  上的连续函数, 定义

$$M(x) = \sup_{a \leq t \leq x} f(t), \quad m(x) = \inf_{a \leq t \leq x} f(t), \quad x \in [a, b],$$

则  $M(x)$  和  $m(x)$  也是  $[a, b]$  上的连续函数