作业 09

题 1. 课本 p49 习题 21

(1) 考虑初等算术语言的标准模型$\mathbb{N} = (\mathrm{N}, \mathrm{I})$，令谓词 R 为 < 关系，对任意赋值$\sigma$，$(\mathrm{N}, \sigma)$为 A 的一个模型。

注：公式 A 没有自由变元，所以任意赋值的 A 的解释都一样。

(2)

证：设有穷论域为 $\mathrm{M} = \{\mathrm{m}_1, \ldots, \mathrm{m}_\mathrm{n}\}$。对任意模型$(\mathrm{M}, \sigma)$。

令 $\mathrm{R}(\mathrm{a}, \mathrm{b})$表示$R(x,y)_{M[\sigma[x:=a][y:=b]]}$。反证法，假设$\mathrm{A}_{M[\sigma]} = T$。

由$\forall \mathrm{x} \exists \mathrm{y} \mathrm{R}(\mathrm{x}, \mathrm{y})_{M[\sigma]} = T$，可知存在 $\mathrm{a} \in \mathrm{M}$，使得 $\mathrm{R}(\mathrm{m}_1, \mathrm{a}) = \mathrm{T}$。又由$\forall \mathrm{x} \neg \mathrm{R}(\mathrm{x}, \mathrm{x})_{M[\sigma]} = T$，知$\mathrm{m}_1 \neq \mathrm{a}$，不妨设 a 为$\mathrm{m}_2$，即 $\mathrm{R}(\mathrm{m}_1, \mathrm{m}_2) = \mathrm{T}$。以此类推，可得 $\mathrm{R}(\mathrm{m}_2, \mathrm{m}_3) = \mathrm{T}, \ldots, \mathrm{R}(\mathrm{m}_{\mathrm{n}-1}, \mathrm{m}_\mathrm{n}) = \mathrm{T}$。

由$\forall \mathrm{x} \exists \mathrm{y} \mathrm{R}(\mathrm{x}, \mathrm{y})_{M[\sigma]} = T$，可知存在$\mathrm{m}_\mathrm{i} \in \mathrm{M}$ 且 $\mathrm{i} \neq \mathrm{n}$，使得 $\mathrm{R}(\mathrm{m}_\mathrm{n}, \mathrm{m}_\mathrm{i}) = \mathrm{T}$。

由$\forall \mathrm{x} \forall \mathrm{y} \forall \mathrm{z}((\mathrm{R}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \wedge \mathrm{R}(\mathrm{y}, \mathrm{z})) \rightarrow \mathrm{R}(\mathrm{x}, \mathrm{z}))_{M[\sigma]} = T$，可知 $\mathrm{R}(\mathrm{m}_\mathrm{i}, \mathrm{m}_{\mathrm{i}+2}) = \mathrm{T}, \ldots, \mathrm{R}(\mathrm{m}_\mathrm{i}, \mathrm{m}_\mathrm{n}) = \mathrm{T}$，从而可得 $\mathrm{R}(\mathrm{m}_\mathrm{i}, \mathrm{m}_\mathrm{i}) = \mathrm{T}$，与$\forall \mathrm{x} \neg \mathrm{R}(\mathrm{x}, \mathrm{x})_{M[\sigma]} = T$矛盾。

题 2. 课本 p49 习题 22

此题即为课件“数理逻辑-08”中的引理 3.28。

题 3. 课本 p49 习题 24

证：

$$
\begin{aligned}
(\forall z A[z/x])_{M[\sigma]} &= \begin{cases} T, & 若\forall a \in M, A[z/x]_{M[\sigma[z:=a]]} = T \\ F, & 否则 \end{cases} \\
&= \begin{cases} T, & 若\forall a \in M, A_{M[\sigma[z:=a][x:=z_{M[\sigma[z:=a]]}]]} = T \\ F, & 否则 \end{cases} \\
&= \begin{cases} T, & 若\forall a \in M, A_{M[\sigma[z:=a][x:=a]]} = T \\ F, & 否则 \end{cases} = \begin{cases} T, & 若\forall a \in M, A_{M[\sigma[x:=a]]} = T \\ F, & 否则 \end{cases} \\
&= (\forall x A)_{M[\sigma]}.
\end{aligned}
$$

题 4. 课本 p59 习题 1 (1) (3) (5) (7) (9)

选(9)做为示例，其他的证明省略

(9) 证：

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{A[y/x] \vdash \exists x \neg A(x), A[y/x]}{\vdash \neg A[y/x], \exists x \neg A(x), A[y/x]} \neg R}{\vdash \exists x \neg A(x), A[y/x]} \exists R}{\vdash \exists x \neg A(x), \forall x A(x)} \forall R}{\neg \forall x A(x) \vdash \exists x \neg A(x)} \neg L}{\vdash \neg \forall x A(x) \to \exists x \neg A(x)} \to R$$

作业 10

题 1. 课本 p59 习题 3

证：当$\vdash A \to B$可证时，$A \vdash B$的证明树如下，

$$\cfrac{\vdash A \to B \quad \cfrac{A \vdash A, B \quad A, B \vdash B}{A, A \to B \vdash B} \to L}{A \vdash B} Cut$$

题 2. 课本 p59 习题 4

证：令 $\mathrm{Sub}(\Gamma)$表示Γ中所有公式的子公式的集合。对证明树的结构做归纳，

归纳基础：$\Gamma \vdash \Delta$为公理，显然。

归纳假设：若$\Gamma_1 \vdash \Delta_1, \mathrm{A}$ 在 G 中存在无 Cut 证明树，则证明树中仅包含$\Gamma_1 \vdash \Delta_1, \mathrm{A}$ 中公式的子公式。$\Gamma_1 \vdash \Delta_1, \mathrm{B}$，$\Gamma_2, \mathrm{A[t/x]}, \forall \mathrm{xA(x)} \vdash \Delta_2$等也有类似结论成立。

归纳步骤：若$\Gamma \vdash \Delta$在 G 中有无 Cut 证明树，则有 12 种情况：（以$\wedge$ R 和$\forall$L 为例，其它情况类似）

$\wedge$ R：$\Gamma \vdash \Delta$的证明树中有规则$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1, \mathrm{A} \quad \Gamma_1 \vdash \Delta_1, \mathrm{B}}{\Gamma \vdash \Delta_1, \mathrm{A} \wedge \mathrm{B}} \wedge \mathrm{R}$，其中$\Gamma = \Gamma_1$，$\Delta = \Delta_1 \cup \{\mathrm{A} \wedge \mathrm{B}\}$。

可知$\Gamma_1 \vdash \Delta_1, \mathrm{A}$ 与$\Gamma_1 \vdash \Delta_1, \mathrm{B}$ 均存在无 Cut 证明树。

由归纳假设，$\Gamma_1 \vdash \Delta_1, \mathrm{A}$ 与$\Gamma_1 \vdash \Delta_1, \mathrm{B}$ 的证明树中的公式，

仅在集合 $\mathrm{Sub}(\Gamma_1) \cup \mathrm{Sub}(\Delta_1) \cup \mathrm{Sub}(\mathrm{A}) \cup \mathrm{Sub}(\mathrm{B})$中。

由于$\Gamma = \Gamma_1$，$\Delta = \Delta_1 \cup \{\mathrm{A} \wedge \mathrm{B}\}$，则 $\mathrm{Sub}(\Gamma_1) \subseteq \mathrm{Sub}(\Gamma)$且 $\mathrm{Sub}(\Delta_1) \subseteq \mathrm{Sub}(\Delta)$

又由于 $\mathrm{Sub}(\mathrm{A} \wedge \mathrm{B}) = \mathrm{Sub}(\mathrm{A}) \cup \mathrm{Sub}(\mathrm{B}) \cup \{\mathrm{A} \wedge \mathrm{B}\}$，

所以 $\mathrm{Sub}(\Gamma_1) \cup \mathrm{Sub}(\Delta_1) \cup \mathrm{Sub}(\mathrm{A}) \cup \mathrm{Sub}(\mathrm{B}) \subseteq \mathrm{Sub}(\Gamma) \cup \mathrm{Sub}(\Delta)$。

$\forall$L：$\Gamma \vdash \Delta$的证明树中有规则$\frac{\Gamma_2, \mathrm{A[t/x]}, \forall \mathrm{xA(x)} \vdash \Delta_2}{\Gamma, \forall \mathrm{xA(x)} \vdash \Delta} \forall \mathrm{L}$，其中$\Gamma = \Gamma_2 \cup \{\forall \mathrm{xA(x)}\}$，$\Delta = \Delta_2$。

可知$\Gamma_2, \mathrm{A[t/x]}, \forall \mathrm{xA(x)} \vdash \Delta_2$存在无 Cut 证明树。

由归纳假设，$\Gamma_2, \mathrm{A[t/x]}, \forall \mathrm{xA(x)} \vdash \Delta_2$的证明树中的公式，

仅在集合 $\mathrm{Sub}(\Gamma_2) \cup \mathrm{Sub}(\Delta_2) \cup \mathrm{Sub}(\mathrm{A[t/x]}) \cup \mathrm{Sub}(\forall \mathrm{xA(x)})$中。

由于$\Gamma = \Gamma_2 \cup \{\forall \mathrm{xA(x)}\}$，$\Delta = \Delta_2$，则 $\mathrm{Sub}(\Gamma_2) \subseteq \mathrm{Sub}(\Gamma)$且 $\mathrm{Sub}(\Delta_2) \subseteq \mathrm{Sub}(\Delta)$

又由于 $\mathrm{Sub}(\forall \mathrm{xA(x)}) = \bigcup_{\mathrm{t} \in \mathrm{T}} \{\mathrm{Sub}(\mathrm{A[t/x]})\} \cup \{\forall \mathrm{xA(x)}\}$，

则 $\mathrm{Sub}(\mathrm{A[t/x]}) \subseteq \mathrm{Sub}(\forall \mathrm{xA(x)})$，

所以 $\mathrm{Sub}(\Gamma_2) \cup \mathrm{Sub}(\Delta_2) \cup \mathrm{Sub}(\mathrm{A[t/x]}) \cup \mathrm{Sub}(\forall \mathrm{xA(x)}) \subseteq \mathrm{Sub}(\Gamma) \cup \mathrm{Sub}(\Delta)$。

题 3. 课本 p59 习题 6

证：由可靠性知，只需证矢列不有效。

构造模型(M, σ)，其中 $M = \{a, b, c\}$，令 $I(P) = \{\langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle c, c\rangle, \langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle, \langle b, c\rangle, \langle c, b\rangle\}$

此时有 $M \vDash_\sigma \forall x. P(x, x)$，$M \vDash_\sigma \forall x. \forall y. (P(x, y) \rightarrow P(y, x))$，

但是 $M \nvDash_\sigma \forall x. \forall y. \forall z. ((P(x, y) \wedge P(y, z) \rightarrow P(x, z))$。

即此模型反驳这个矢列，因此矢列不可证。