

Problem Set 3.

作业 3

题 1. 课本 p17 习题 5

题 2. 课本 p17 习题 11

5. 求以下公式的 $\wedge\nu\text{-nf}$ 和 $\vee\wedge\text{-nf}$.

(a) $\neg((P \rightarrow \neg Q) \rightarrow R)$

(b) $\neg(\neg(\neg R \wedge Q) \wedge P)$

这里 $P, Q, R \in PS$.

解: (a)
$$\begin{aligned} &\equiv \neg((\neg P \vee \neg Q) \rightarrow R) \\ &\equiv \neg((\neg P \wedge Q) \vee R) \equiv (\neg P \vee \neg Q) \wedge \neg R \\ \wedge\nu\text{-nf}: &(\neg P \wedge \neg R) \vee (\neg Q \wedge \neg R) \\ \vee\wedge\text{-nf}: &(\neg P \vee \neg Q) \wedge \neg R \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} &\neg(\neg(R \wedge Q) \wedge P) \equiv \neg[(\neg R \vee \neg Q) \wedge P] \\ &\equiv (R \wedge Q) \vee \neg P \\ \wedge\nu\text{-nf}: &(R \wedge Q) \vee \neg P \\ \vee\wedge\text{-nf}: &(R \vee \neg P) \wedge (Q \vee \neg P) \end{aligned}$$

11 写出公式 $(\neg A \wedge \neg B) \vee (\neg C \vee D)$ 的等价式, 要求等价式中只出现联结词 \neg 和 \rightarrow .

解:
$$\begin{aligned} &\equiv \neg(A \vee B) \vee (\neg C \vee D) \\ &\equiv (A \vee B) \rightarrow (\neg C \vee D) \\ &\equiv (\neg A \rightarrow B) \rightarrow (C \rightarrow D) \end{aligned}$$

Problem Set 4.

作业 4

题 1. 课本 p17 习题 6

即给出在 G' 中

- (a) $\vdash A \rightarrow A$ 的证明树。
- (b) $\vdash ((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C)$ 的证明树。
- (c) ...
- (d) ...
- (e) ...
- (f) ...

题 2. 课本 p17 习题 7

题 3. 课本 p18 习题 10

题 4. 课本 p18 习题 13

题 5. 课本 p18 习题 14

(a) $A \rightarrow A$

(b) $((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C)$

(c) $\neg(A \wedge B) \rightarrow (\neg A \vee \neg B)$

(d) $(\neg A \vee \neg B) \rightarrow \neg(A \wedge B)$

(e) $\neg(A \vee B) \rightarrow (\neg A \wedge \neg B)$

(f) $(\neg A \wedge \neg B) \rightarrow \neg(A \vee B)$

解:

a). $A \vdash A$

$\vdash A \rightarrow A$

b). $A, B \vdash B, C \quad A, B, C \vdash C$

$A, B, B \rightarrow C \vdash C$

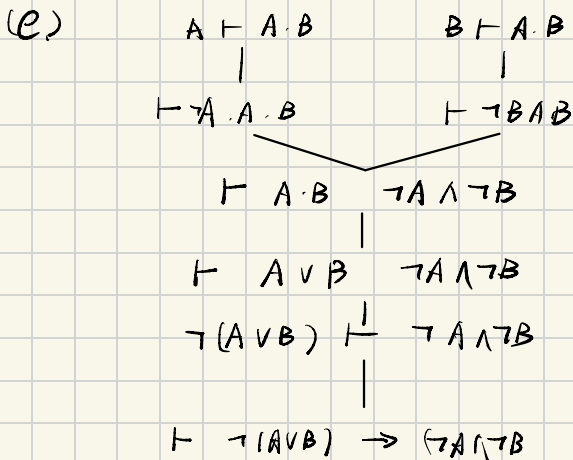
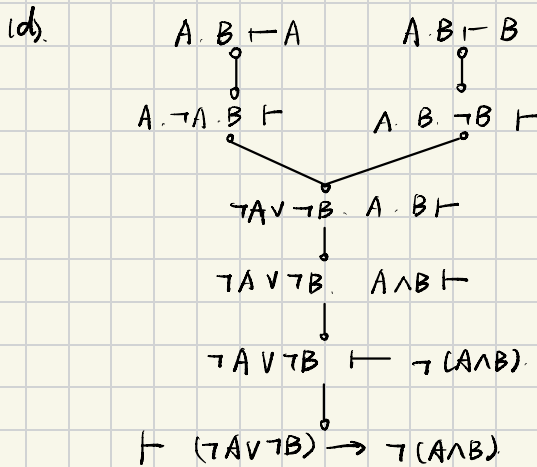
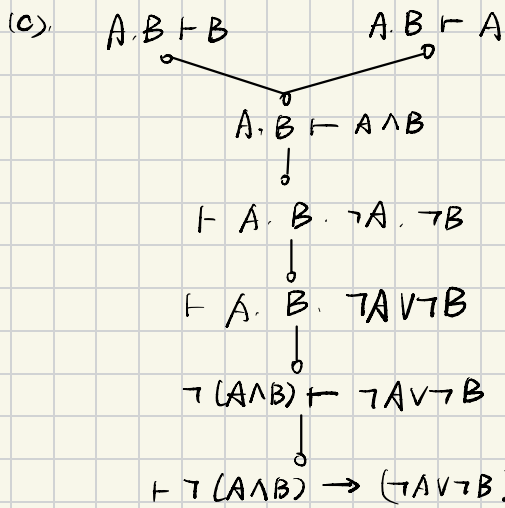
$A, B \rightarrow C \vdash A, C$

$A, A \rightarrow B, B \rightarrow C \vdash C$

$A \rightarrow B, B \rightarrow C \vdash A \rightarrow C$

$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \vdash A \rightarrow C$

$\vdash (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)$



(7)

$$\begin{array}{c}
 A \vdash A \cdot B \qquad B \vdash A \cdot B \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 A \vee B \vdash A \cdot B \\
 | \\
 A \vee B, \neg A, \neg B \vdash \\
 | \\
 A \vee B, \neg A \wedge \neg B \vdash \\
 | \\
 \neg(A \vee B) \vdash \neg A \wedge \neg B \\
 | \\
 \vdash \neg(A \vee B) \rightarrow (\neg A \wedge \neg B)
 \end{array}$$

7. 证明在 G' 中 $\vdash (P \rightarrow Q) \vee R$ 不可证, 这里 $P, Q, R \in PS$.

证: 反设 $\vdash (P \rightarrow Q) \vee R$ 可证. 则 $(P \rightarrow Q) \vee R$ 有效
 但 $\forall (P=1 \quad Q=0 \quad R=0)$ 时 形成反例
 \Rightarrow 矛盾
 $\vdash (P \rightarrow Q) \vee R$ 不可证.

10. 在 G' 中导出规则 MP:

$$\frac{\vdash A \quad \vdash A \rightarrow B}{\vdash B}$$

$$\begin{array}{c}
 \frac{\vdash A \quad A \vdash A \cdot B}{\vdash A \cdot B} \text{Cut} \quad B \vdash B \\
 \hline
 A \rightarrow B \vdash B \quad \rightarrow L \quad \vdash A \rightarrow B \\
 \hline
 \vdash B \quad \text{Cut}
 \end{array}$$

13. 证明 $A \rightarrow (\neg(S \wedge D) \rightarrow \neg B), A, \neg D \vdash \neg B$ 可证.

证: $\equiv \neg A \vee (\neg(S \wedge D) \rightarrow \neg B)$
 $\equiv \neg A \vee ((S \wedge D) \vee \neg B)$
 $\equiv \neg A \vee \neg B \vee (S \wedge D)$
 当 $A=1 \quad D=0$ 时
 原式 $\equiv \neg B \rightarrow$ 原式可证.

14. 证明 $\neg A \vee B, A \rightarrow (B \wedge C), D \rightarrow B \vdash B \vee C$ 不可证.

证: 反设可证, 则命题是有效.

取 $V(A=0, B=0, C=0, D=0)$ 为反例
矛盾

\Rightarrow 命题不可证.