作业 05

题 1.

(a) 在 G’中推出规则$\frac{\vdash \neg B}{B \vdash}$

$$\dfrac{\vdash \neg B \qquad \dfrac{B \vdash B}{\neg B, B \vdash}\neg L}{B \vdash}\mathrm{Cut}$$

(b) 在 G’中推出规则$\frac{\vdash \neg A \to B \quad \vdash \neg B}{\vdash A}$

$$\dfrac{\vdash \neg A \to B \qquad \dfrac{\dfrac{A \vdash A}{\vdash \neg A, A}\neg R \qquad \dfrac{\vdash \neg B \qquad \dfrac{B \vdash B, A}{\neg B, B \vdash A}\neg L}{B \vdash A}\mathrm{Cut}}{\neg A \to B \vdash A}\to L}{\vdash A}\mathrm{Cut}$$

题 2. 证明所有项的集合 T 和公式集合 F 与自然数集等势。

证：令$T_n = \{长度为n的项\}$，A 为一阶逻辑的字母表集合，则$T_n \subseteq A^n$。

由变元集、常元集、函数符集、谓词符集是可数的，知$|\mathrm{A}| = |\mathrm{N}|$。

有限个可数集的笛卡尔积是可数集，因此$|A^n| = |\mathrm{N}|$，从而$|T_n| = |\mathrm{N}|$。

由$T = \bigcup_{\mathrm{n}=1}^{\infty} T_n$，可数个可数集的并是可数集，可知$|T| = |\mathrm{N}|$。

$|F| = |\mathrm{N}|$的证明过程也类似。

题 3. 证明括号引理。

证：先对项 t 的结构作归纳。

归纳基础：对于所有由单个变元符或常元符构成的项，不包含括号，所以括号引理成立。

归纳假设：对于项$t_1, \dots, t_n$有括号引理成立。

归纳步骤：若$t = f(t_1, \dots, t_n)$，t 的左（右）括号数目为$t_1, \dots, t_n$的左（右）括号数之和加一，由归纳假设知$t_1, \dots, t_n$的左右括号数均相同，所以 t 满足括号引理。

再对公式 A 的结构做归纳。

归纳基础：对于所有项已经证明了括号引理成立。

归纳假设：公式 B，C 有括号引理成立。

归纳步骤：有如下情况，

情况 1：$A = (\mathrm{s} \doteq \mathrm{t})$，A 的左（右）括号数为 s 和 t 的左（右）括号数之和加一，由归纳基础知 s 和 t 的左右括号数相同，所以 A 满足括号引理。

情况 2：$A = \mathrm{R}(t_1, \dots, t_n)$，A 的左（右）括号数目为$t_1, \dots, t_n$的左（右）括号数之和加

一，由归纳基础知$t_1,...,t_n$的左右括号数均相同，所以 A 满足括号引理。

情况 3：$A=(\neg B)$，A 的左（右）括号数目为 B 的左（右）括号数加一，由归纳假设知，A 满足括号引理。

情况 4：$A=(\mathrm{B}*\mathrm{C})$，A 的左（右）括号数目为 B 和 C 的左（右）括号数之和加一，由归纳假设知，A 满足括号引理。

情况 5：$A=(\forall \mathrm{x}.\mathrm{B})$，A 的左（右）括号数目为 B 的左（右）括号数加一，由归纳假设知，A 满足括号引理。

情况 6：$A=(\exists \mathrm{x}.\mathrm{B})$，证明与情况 5 类似。

□

题 4. 用一阶逻辑语言表示：欧氏几何的平行公理：过直线外一点，可作且只可作一条直线跟此直线不相交。

解：设谓词 L(x)表示 x 是直线，P(x)表示 x 是一点，C(x,y)表示 x 和 y 相交（若 x 和 y 一个为直线一个为点，则表示点不在直线之上）。

则平行公理可写成：

$$\forall \mathrm{x}.\forall \mathrm{y}.(\mathrm{L}(\mathrm{x})\wedge \mathrm{P}(\mathrm{y})\wedge \neg \mathrm{C}(\mathrm{x},\mathrm{y}) \rightarrow \exists \mathrm{z}.(\mathrm{L}(\mathrm{z})\wedge \mathrm{C}(\mathrm{y},\mathrm{z})\wedge \neg \mathrm{C}(\mathrm{x},\mathrm{z})\wedge \forall \mathrm{u}.(\mathrm{L}(\mathrm{u})\wedge \mathrm{C}(\mathrm{y},\mathrm{u})\wedge \neg \mathrm{C}(\mathrm{x},\mathrm{u}))\rightarrow \mathrm{z} \doteq \mathrm{u})),$$

（对任意 x 和 y，x 是一条直线，y 是一个点，x 与 y 不相交，则存在一条直线 z，y 与 z 相交且 x 与 z 不相交，且对任意 u，若 u 是一条直线，与 y 相交且与 x 不相交，则 z=u）。

作业 06

题 1. 设公式 A 为$\forall x(P(x,y)\wedge \forall z\exists y(y\doteq z))\vee (x\doteq x)$，求 FV(A)。

解：$\mathrm{FV}(A)=\mathrm{FV}(\forall x(P(x,y)\wedge \forall z\exists y(y\doteq z))\vee (x\doteq x))$

$$=\mathrm{FV}(\forall x(P(x,y)\wedge \forall z\exists y(y\doteq z))\cup \mathrm{FV}(x\doteq x)$$
$$=(\mathrm{FV}(P(x,y)\wedge \forall z\exists y(y\doteq z)-\{\mathrm{x}\})\cup \mathrm{FV}(x)\cup \mathrm{FV}(x)$$
$$=(\mathrm{FV}(P(x,y))\cup \mathrm{FV}(\forall z\exists y(y\doteq z))-\{\mathrm{x}\})\cup \{\mathrm{x}\}$$
$$=(\mathrm{FV}(x)\cup \mathrm{FV}(y)\cup (\mathrm{FV}(y\doteq z)-\{\mathrm{y}\}-\{\mathrm{z}\})-\{\mathrm{x}\})\cup \{\mathrm{x}\}$$
$$=(\{\mathrm{x},\mathrm{y}\}\cup (\{\mathrm{y},\mathrm{z}\}-\{\mathrm{y}\}-\{\mathrm{z}\})-\{\mathrm{x}\})\cup \{\mathrm{x}\}$$
$$=(\{\mathrm{x},\mathrm{y}\}-\{\mathrm{x}\})\cup \{\mathrm{x}\}$$
$$=\{\mathrm{x},\mathrm{y}\}$$

题 2. 对于上述的 A，求 $\mathrm{A}[\frac{\mathrm{f}(\mathrm{x})}{\mathrm{y}}]$和 $\mathrm{A}[\frac{\mathrm{f}(\mathrm{x})}{\mathrm{x}}]$。

解：$\mathrm{A}[\frac{\mathrm{f}(\mathrm{x})}{\mathrm{y}}]=(\forall x(P(x,y)\wedge \forall z\exists y(y\doteq z))\vee (x\doteq x))[\frac{\mathrm{f}(\mathrm{x})}{\mathrm{y}}]$

$$=\forall x(P(x,y)\wedge \forall z\exists y(y\doteq z))[\frac{\mathrm{f}(\mathrm{x})}{\mathrm{y}}]\vee (x\doteq x)[\frac{\mathrm{f}(\mathrm{x})}{\mathrm{y}}]$$

$$=\forall w((P(x,y)\wedge \forall z\exists y(y\doteq z))[\frac{\mathrm{w}}{\mathrm{x}}][\frac{\mathrm{f}(\mathrm{x})}{\mathrm{y}}])\vee (x[\frac{\mathrm{f}(\mathrm{x})}{\mathrm{y}}]\doteq x[\frac{\mathrm{f}(\mathrm{x})}{\mathrm{y}}])$$

$= \forall w(P(x,y)[\frac{w}{x}][\frac{f(x)}{y}] \wedge (\forall z \exists y(y \doteq z))[\frac{w}{x}][\frac{f(x)}{y}]) \vee (x \doteq x)$

$= \forall w(P(x[\frac{w}{x}][\frac{f(x)}{y}], y[\frac{w}{x}][\frac{f(x)}{y}]) \wedge \forall z(\exists y(y \doteq z)[\frac{w}{x}][\frac{f(x)}{y}])) \vee (x \doteq x)$

$= \forall w(P(w, f(x)) \wedge \forall z(\exists y(y[\frac{w}{x}] \doteq z[\frac{w}{x}])[\frac{f(x)}{y}])) \vee (x \doteq x)$

$= \forall w(P(w, f(x)) \wedge \forall z(\exists y(y[\frac{f(x)}{y}] \doteq z[\frac{f(x)}{y}]))) \vee (x \doteq x)$

$= \forall w(P(w, f(x)) \wedge \forall z \exists y(f(x) \doteq z)) \vee (x \doteq x)$.

$A[\frac{f(x)}{x}] = (\forall x.(P(x,y) \wedge \forall z \exists y(y \doteq z)) \vee (x \doteq x))[\frac{f(x)}{x}]$

$= \forall x(P(x,y) \wedge \forall z \exists y(y \doteq z))[\frac{f(x)}{x}] \vee (x \doteq x)[\frac{f(x)}{x}]$

$= \forall x(P(x,y) \wedge \forall z \exists y(y \doteq z)) \vee (x[\frac{f(x)}{x}] \doteq x[\frac{f(x)}{x}])$

$= \forall x(P(x,y) \wedge \forall z \exists y(y \doteq z)) \vee (f(x) \doteq f(x))$.

题 3. 求$((e * e * x_6)^{-1})_{M[\sigma]}$和$((x_6 * x_0)^{-1} * x_3)_{M[\sigma]}$，令 A 为$(x_1 * x_2)^{-1} \doteq x_2^{-1} * x_1^{-1}$，求$A_{M[\sigma]}$。

解：$((e * e * x_6)^{-1})_{M[\sigma]}$

$= I(^{-1})((e * e * x_6)_{M[\sigma]})$

$= n - (e * e * x_6)_{M[\sigma]}$

$= n - I(*)((e, e * x_6)_{M[\sigma]})$

$= n - I(*)(I(e), I(*)(I(e), \sigma(x_6)))$

$= n - (0 + 0 + 6)\ mod\ n$

$= n - (6\ mod\ n)$

$((x_6 * x_0)^{-1} * x_3)_{M[\sigma]}$

$= ((x_6 * x_0)^{-1})_{M[\sigma]} +_n \sigma(x_3)$

$= I(^{-1})((x_6 * x_0)_{M[\sigma]}) +_n \sigma(x_3)$

$= (n - (\sigma(x_6) +_n \sigma(x_0))) +_n \sigma(x_3)$

$= (n - (6 + 0)\ mod\ n) +_n 3\ mod\ n$

$= (n - 6\ mod\ n + 3\ mod\ n)\ mod\ n$

$= (-3)\ mod\ n$

$A_{M[\sigma]} = ((x_1 * x_2)^{-1} \doteq x_2^{-1} * x_1^{-1})_{M[\sigma]}$

若${(x_1 * x_2)^{-1}}_{M[\sigma]} = {x_2^{-1} * x_1^{-1}}_{M[\sigma]}$，则$A_{M[\sigma]} = T$，否则$A_{M[\sigma]} = F$。

由于${(x_1 * x_2)^{-1}}_{M[\sigma]} = n - (1 + 2)\ mod\ n = (-3)\ mod\ n$，

${x_2^{-1} * x_1^{-1}}_{M[\sigma]} = (n - 2\ mod\ n) +_n (n - 1\ mod\ n) = (-3)\ mod\ n$，

所以${(x_1 * x_2)^{-1}}_{M[\sigma]} = {x_2^{-1} * x_1^{-1}}_{M[\sigma]}$，从而$A_{M[\sigma]} = T$。