

数学分析习题课三（问题）

April 1, 2024

问题 1. 设函数

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1 - e^{x(x^2 + y^2)}}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

求 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 点的四阶泰勒展开式, 并求 $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$, $\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}(0, 0)$, $\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2}(0, 0)$.

问题 2. 求函数 $z = (2x + 3y - 6)^2$ 在椭圆 $x^2 + 4y^2 \leq 4$ 中的最大值和最小值.

问题 3. 求 $f(x, y, z) = \ln x + 2 \ln y + 3 \ln z$ 的最大值, 其中

$$x^2 + y^2 + z^2 = 6r^2 \quad (r > 0), \quad x > 0, y > 0, z > 0.$$

并证明对 $\forall a, b, c > 0$, 有

$$ab^2c^3 \leq 108 \left(\frac{a+b+c}{6} \right)^6.$$

问题 4. 设平面区域 D 由曲线 $y = x^3$, $y = 0$, $x = 1$ 围成, 试求连续函数 $f(x, y)$, 使其满足

$$f(x, y) = xy + \iint_D f(x, y) dx dy.$$

问题 5. 计算下列积分:

(1) $\iint_D \frac{af(x) + bf(y)}{f(x) + f(y)} dx dy$, 其中 $D = \{(x, y) | |x| + |y| \leq 1\}$, f 为正值连续函数, a, b 是常数.

$$(2) \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx \quad (0 < a < b).$$

$$(3) \iint_D \frac{dx dy}{(1 + x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \text{其中 } D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}.$$

(4) $\iint_D x(1 + ye^{x^4 y^6}) dx dy$, 其中 D 是由曲线 $y = \sin x$, $x = -\frac{\pi}{2}$ 及 $y = 1$ 所围成的.

问题 6. 设函数 $f(x)$ 连续, 区域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq t^2, t > 0\}$.

(1) 设 $f(x)$ 满足 $f(t^2) = \iint_D (y^2 + f(x^2 + y^2)) dx dy$, $f(1) = \pi$, 求 $\int_0^1 f(x) dx$ 及 $f(0)$.

(2) 若 $f'(0) = 1$, 求极限 $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{\pi t^4} \iint_D (y^2 + f(x^2 + y^2)) dx dy$.

问题 7. 已知 $\int_{\alpha}^{\beta} f(\cos \theta, \sin \theta) d\theta = A$, $f(0, 0) = 1$, 其中 $f(x, y)$ 有一阶连续偏导数, $D = \{(r, \theta) | 0 \leq r \leq 1, \alpha \leq \theta \leq \beta \text{ } (\beta - \alpha \leq 2\pi)\}$, 求

$$\iint_D \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{y}{x^2 + y^2} \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx dy.$$