作业 01

题 1. 证明$|\mathrm{PROP}| = |\mathrm{N}|$。

证：令$A_n = \{$长度为n的命题公式$\}$，$A = PS \cup \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, (,)\}$为字母表，则$A_n \subseteq A^n$。

由于$|PS| = |N|$，所以$|A|$=$|\mathrm{N}|$，又由有限个可数集的笛卡尔积为可数集，可知$|A^n| = |N|$，$|A_n| = |N|$。

由于 $\mathrm{PROP} = \bigcup_{\mathrm{n}=1}^{\infty} A_n$，可数个可数集的并是可数集，所以$|\mathrm{PROP}| = |\mathrm{N}|$。 □

题 2. 证明括号引理。
证：对命题的结构做归纳。
归纳基础：对于只有一个命题符的命题，不包含括号，括号引理显然成立。
归纳假设：命题 B，C 满足括号引理。
归纳步骤：

情况 1：$A = (\neg B)$，A 中左（右）括号数为 B 中左（右）括号数加一，根据归纳假设，可知此处 A 的左右括号数目相同。

情况 2：$A = (B * C)$，其中$* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$，A 中左（右）括号数为 B 和 C 中左（右）括号数之和再加一，根据归纳假设，可知此处 A 的左右括号数目相同。 □

题 3. 命题公式的**复杂度** $\deg(\mathrm{A})$可以如下递归定义：

(1) $\deg(\mathrm{A}) = 0$，对于 $\mathrm{A} \in \mathrm{PS}$；
(2) $\deg((\neg \mathrm{A})) = \deg(\mathrm{A}) + 1$；
(3) $\deg((\mathrm{A} * \mathrm{B})) = \max(\deg(\mathrm{A}), \deg(\mathrm{B})) + 1.$

问：(1) 证明 $\deg(\mathrm{A})$ 小于等于 联结符号在 A 中出现的次数。
(2) 给出使(1)中“小于”或“等于”成立的 A 的例子。

（1）
证：对于命题 A，令 $\mathrm{c}(\mathrm{A})$表示 A 中联结符号数目，下面归纳证明(*) $0 \leq \deg(\mathrm{A}) \leq \mathrm{c}(\mathrm{A})$。
归纳基础：命题 A 为命题符时，$\deg(\mathrm{A}) = 0$，$\mathrm{c}(\mathrm{A}) = 0$，所以(*)成立。
归纳假设：对于命题 B，C 均有(*)成立。
归纳步骤：

情况 1：$A = (\neg B)$，$\deg(\mathrm{A}) = \deg((\neg B)) = \deg(\mathrm{B}) + 1$，A 中联结符号数为 B 中联结符号数加一，即 $\mathrm{c}(\mathrm{A}) = \mathrm{c}(\mathrm{B}) + 1$。根据归纳假设，可知 $0 < \deg(\mathrm{B}) + 1 \leq \mathrm{c}(\mathrm{B}) + 1$，即对 A 有(*)成立。

情况 2：$A = (B * C)$，其中$* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$，

$$\deg(\mathrm{A}) = \deg((B * C)) = \max(\deg(\mathrm{B}), \deg(\mathrm{C})) + 1,$$

A 中联结符号数为 B 和 C 中联结符号数之和加一，即 $\mathrm{c}(\mathrm{A}) = \mathrm{c}(\mathrm{B}) + \mathrm{c}(\mathrm{C}) + 1$。

根据归纳假设，可知 $\deg(\mathrm{B}) + \deg(\mathrm{C}) + 1 \leq \mathrm{c}(\mathrm{B}) + \mathrm{c}(\mathrm{C}) + 1$，且 $\deg(\mathrm{B}) \geq 0$，$\deg(\mathrm{C}) \geq 0$，因此 $0 \leq \max(\deg(\mathrm{B}), \deg(\mathrm{C})) + 1 \leq \deg(\mathrm{B}) + \deg(\mathrm{C}) + 1 \leq \mathrm{c}(\mathrm{B}) + \mathrm{c}(\mathrm{C}) + 1$，即(*)成立。 □

（2）等于：p

小于：$(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$

作业 02

题 1. 课本 p17 习题 3 (a) (b) (c)
真值表证明即可。

题 2. 课本 p17 习题 4
给出满足命题的赋值即可。

题 3. 课本 p17 习题 8 (c) (d) (e) (f)
真值表证明即可。

题 4. 课本 p18 习题 12
(a) 永真式。
(b) 矛盾式。
(c) 既不是永真式，也不是矛盾式。
(d) 既不是永真式，也不是矛盾式。