

算法习题课 2 讲义

221300059 陈铭

2024 年 12 月 25 日

1 HW4

1.1 P5

1.1.1 a

分成 7 是可以的，分成 3 不行。

看表达式就知道了，分成 7 的话是：

$$T(n) \leq T(\frac{n}{7}) + T(\frac{5n}{7}) + O(n)$$

分成 3 是：

$$T(n) \leq T(\frac{n}{3}) + T(\frac{2n}{3}) + O(n)$$

1.1.2 b

其实这题巨简单，你只需要观察到那个元素只可能位于 $\frac{n}{4}, \frac{2n}{4}, \frac{3n}{4}$ ，就行，
然后用 select 嘛。

还不理解就想象一下一个滑动的窗口。

1.2 P6

1.2.1 a

sort 的 value 同时 weight 也跟着动，这里的复杂度是 $O(n \lg n)$

下面就是求个前缀和，到哪个数刚刚好大于 $W/2$ 哪个数就是。

1.2.2 b

上面的算法蠢在哪里？就是多做了很多次排序。

那要怎么砍掉时间复杂度？select。

通过找中位数，就可以知道那个 median 和 x 的大小关系，然后就有下面的式子：

$$T(n) = T(\frac{n}{2}) + O(n)$$

2 HW6

2.1 P5

2.1.1 a

不难想到先用一个辅助数组按照中序遍历把 sort 好的 node 存起来，接下来只要递归地建树就行。

不难想明白中序遍历时间复杂度 $O(n)$ ，递归地建树复杂度也为 $O(n)$ ，然后多开的数组空间复杂度也是 $O(n)$ ，这就满足了要求。

2.1.2 b

显然，毕竟深度的界还是 \log 。

2.1.3 c

显然左右子树最多差 1，所以是 0。

2.1.4 d

不平衡下，有：

$$\begin{aligned}\Delta x &= x.left - x.right \\ &= x.left - (x.size - 1 - x.left) \\ &= 2x.left - x.size + 1 \\ &\geq (2\alpha - 1)x.size + 1\end{aligned}$$

rebuild 需要 $O(x.size)$, 所以列个不等式就出来了。答案写成:

$$c \geq \frac{1}{2\alpha - 1}$$

2.1.5 e

按照势函数法就知道, 合理地选 c 就 OK。

3 HW7

3.1 I.1

使用 BFS 改进的算法, 主要区别是, 我们在每个节点有三个记录, 分别是用 mod3 为 0, 1, 2 的记录, 只有当一个节点的三个记录之一出现两次时该节点才不会被加入队列 (出现环)。

结束后检查 t 的 0 的记录就可以。

3.2 I.2

仿照上面的做法, 维护一下用于记录当前步骤的扩展限制的一个量。

就是说你如果前两步同色, 就不能选同色边。

4 HW8

4.1 P4

4.1.1 a

注意到定义是每两个点之间要有一条单向路线。

就只需要一个三个点的图, 两条边都从同一个出发分别指向另外两个点, 那么这另外两个点之间就没有通路。

4.1.2 b

先做拓扑排序, 做完之后只需要检查前一个点到后一个点是否有边就行 (没有就错了), 这个是充要条件, 不难证明。

4.1.3 c

先找 SCC，再按照 b 的方式就行。

5 HW9

5.1 P1

5.1.1 a

反证法。

假设包含最大权重的边，就剪掉，因为是圈，所以肯定有另一条边可以连上，连上了就是最小生成树，和最小生成树的特性矛盾。所以最小生成树不包含权重最大的边。

5.1.2 b

主要是不知道应该怎么理解这个 respect A 对吧。理解成这个是 A 跨过这个切的边的话，那肯定是正确的了。毕竟直接反证法就可以了。

但感觉可能有同学不是这样理解的，那我会根据你的理解给分，只要你的理解符合你举的反例，也会拿满分。

5.1.3 c

显然是错的，假设有 a,b,c,d 四个节点，你连成四边形，你要是 divide and conquer 到最长边，我们假设是 cd，那么显然最小生成树不会包含这条边，所以就错了。

5.2 P5

最符合直觉的一集。

证明的话只要说最优解一定包含第一个嘛，要不然就换，依次下去就行。

6 HW10

6.1 P1

都排序然后挨个配对就行。

证明也不难，数学归纳法，对人头数做归纳，关键步骤是要点出交换逆序对不会使总值增，所以一直交换肯定就是按顺序。

6.2 P5

改一下 bellman 算法即可。

前 $n-1$ 次循环已经能正确计算不在环上的，第 n 次出现的必然成环，那么只需要变成负无穷就行。

7 HW11

7.1 P2

7.1.1 a

将边的权重改成 \log 即可。

7.1.2 b

用 bellmanFord 算法看看有没有出现负圈即可。