



# 一阶逻辑的自然推理系统





# G系统的公理和规则

**定义4.1.**  $\Gamma, \Delta, \Lambda, \Theta$ 为一阶逻辑公式的有穷集合。 $\Gamma \vdash \Delta$ 称为矢列， $\Gamma$ 为其前件， $\Delta$ 为其后件。G由如下公理和规则组成：

- 公理： $\Gamma, A, \Delta \vdash \Lambda, A, \Theta$

# G系统的公理和规则

**定义4.1.**  $\Gamma, \Delta, \Lambda, \Theta$  为一阶逻辑公式的有穷集合。 $\Gamma \vdash \Delta$  称为矢列， $\Gamma$  为其前件， $\Delta$  为其后件。G由如下公理和规则组成：

- 公理： $\Gamma, A, \Delta \vdash \Lambda, A, \Theta$
- 规则：

$$\neg L: \frac{\Gamma, \Delta \vdash \Lambda, A}{\Gamma, \neg A, \Delta \vdash \Lambda}$$

$$\neg R: \frac{\Gamma, A \vdash \Lambda, \Theta}{\Gamma \vdash \Lambda, \neg A, \Theta}$$

$$\vee L: \frac{\Gamma, A, \Delta \vdash \Lambda \quad \Gamma, B, \Delta \vdash \Lambda}{\Gamma, A \vee B, \Delta \vdash \Lambda}$$

$$\vee R: \frac{\Gamma \vdash \Lambda, A, B, \Theta}{\Gamma \vdash \Lambda, A \vee B, \Theta}$$

$$\wedge L: \frac{\Gamma, A, B, \Delta \vdash \Lambda}{\Gamma, A \wedge B, \Delta \vdash \Lambda}$$

$$\wedge R: \frac{\Gamma \vdash \Lambda, A, \Theta \quad \Gamma \vdash \Lambda, B, \Theta}{\Gamma \vdash \Lambda, A \wedge B, \Theta}$$

# G系统的公理和规则

$$\rightarrow L: \frac{\Gamma, \Delta \vdash \Lambda, A \quad \Gamma, B, \Delta \vdash \Lambda}{\Gamma, A \rightarrow B, \Delta \vdash \Lambda}$$

$$\rightarrow R: \frac{\Gamma, A \vdash \Lambda, B, \Theta}{\Gamma \vdash \Lambda, A \rightarrow B, \Theta}$$

$$\forall L: \frac{\Gamma, A[\frac{t}{x}], \forall x. A(x), \Delta \vdash \Lambda}{\Gamma, \forall x. A(x), \Delta \vdash \Lambda}$$

$$\forall R: \frac{\Gamma \vdash \Lambda, A[\frac{y}{x}], \Theta}{\Gamma \vdash \Lambda, \forall x. A(x), \Theta}$$

$$\exists L: \frac{\Gamma, A[\frac{y}{x}], \Delta \vdash \Lambda}{\Gamma, \exists x. A(x), \Delta \vdash \Lambda}$$

$$\exists R: \frac{\Gamma \vdash \Lambda, A[\frac{t}{x}], \exists x. A(x), \Theta}{\Gamma \vdash \Lambda, \exists x. A(x), \Theta}$$

$$\text{Cut: } \frac{\Gamma \vdash \Lambda, A \quad \Delta, A \vdash \Theta}{\Gamma, \Delta \vdash \Lambda, \Theta}$$

注：  $t$  为任意的项，  $y$  是新变元。

**定理4.2.** Cut规则可用其他规则导出。



# 证明树

**定义4.3.** 设  $\Gamma \vdash A$  为矢列, 树  $T$  为  $\Gamma \vdash A$  的**证明树**指

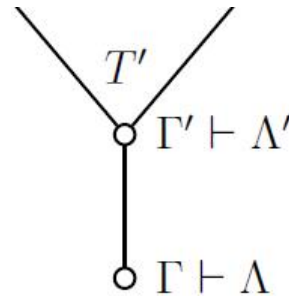
(1) 当  $\Gamma \vdash A$  为  $G$  的公理, 以  $\Gamma \vdash A$  为节点的单点树  $T$  为其证明树。

# 证明树

**定义4.3.** 设  $\Gamma \vdash \Lambda$  为矢列, 树  $T$  为  $\Gamma \vdash \Lambda$  的**证明树**指

(1) 当  $\Gamma \vdash \Lambda$  为  $G$  的公理, 以  $\Gamma \vdash \Lambda$  为节点的单点树  $T$  为其证明树。

(2) 当  $\frac{\Gamma' \vdash \Lambda'}{\Gamma \vdash \Lambda}$  为  $G$  的规则时, 若  $T'$  为  $\Gamma' \vdash \Lambda'$  的证明树, 则树  $T$  如下为  $\Gamma \vdash \Lambda$  的证明树。

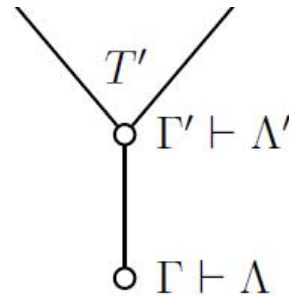


# 证明树

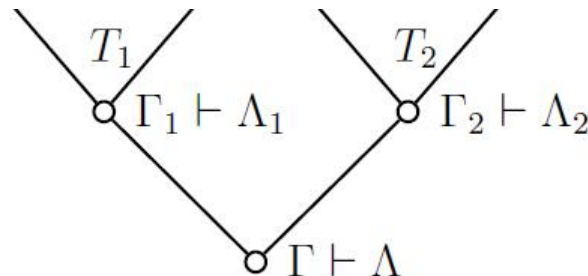
**定义4.3.** 设  $\Gamma \vdash \Lambda$  为矢列, 树  $T$  为  $\Gamma \vdash \Lambda$  的**证明树**指

(1) 当  $\Gamma \vdash \Lambda$  为  $G$  的公理, 以  $\Gamma \vdash \Lambda$  为节点的单点树  $T$  为其证明树。

(2) 当  $\frac{\Gamma' \vdash \Lambda'}{\Gamma \vdash \Lambda}$  为  $G$  的规则时, 若  $T'$  为  $\Gamma' \vdash \Lambda'$  的证明树, 则树  $T$  如下为  $\Gamma \vdash \Lambda$  的证明树。



(3) 当  $\frac{\Gamma_1 \vdash \Lambda_1 \quad \Gamma_2 \vdash \Lambda_2}{\Gamma \vdash \Lambda}$  为  $G$  规则时, 若树  $T_i$  为  $\Gamma_i \vdash \Lambda_i$  的证明树, 则树  $T$  如下为  $\Gamma \vdash \Lambda$  的证明树。



# 可证



**定义4.4.** 设  $\Gamma \vdash A$  为矢列,  $\Gamma \vdash A$  可证指存在  $\Gamma \vdash A$  的证明树。





# 可证

**定义4.4.** 设  $\Gamma \vdash A$  为矢列,  $\Gamma \vdash A$  可证指存在  $\Gamma \vdash A$  的证明树。

如何证明不可证?

**例4.1.** 证明下列矢列可证。

$$(1) \vdash A \rightarrow A$$

$$(2) \vdash A \vee \neg A$$

$$(3) \vdash \neg(A \wedge \neg A)$$



**例4.2.** 证明下列矢列可证。

$$(1) \vdash \forall x. A(x) \rightarrow A(t)$$

$$(2) \vdash A(t) \rightarrow \exists x. A(x)$$

$$(3) \vdash (\forall x. (P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge P(t)) \rightarrow Q(t)$$

这里  $A(t)$  为  $A[\frac{t}{x}]$  的简写,  $P(t)$ 和 $Q(t)$ 同理。



**例4.2.** 证明下列矢列可证。

$$(1) \vdash \forall x. A(x) \rightarrow A(t)$$



**例4.2.** 证明下列矢列可证。

$$(1) \vdash \forall x. A(x) \rightarrow A(t)$$

证：

$$\frac{\frac{A(t), \forall x. A(x) \vdash A(t)}{\forall x. A(x) \vdash A(t)} \forall L}{\vdash \forall x. A(x) \rightarrow A(t)} \rightarrow R$$





**例4.2.** 证明下列矢列可证。

$$(2) \vdash A(t) \rightarrow \exists x. A(x)$$



**例4.2.** 证明下列矢列可证。

$$(2) \vdash A(t) \rightarrow \exists x. A(x)$$

证：

$$\frac{\frac{A(t) \vdash A(t), \exists x. A(x)}{A(t) \vdash \exists x. A(x)} \exists R}{\vdash A(t) \rightarrow \exists x. A(x)} \rightarrow R$$

□



**例4.2.** 证明下列矢列可证。

$$(3) \vdash (\forall x. (P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge P(t)) \rightarrow Q(t)$$



**例4.2.** 证明下列矢列可证。

$$(3) \vdash (\forall x. (P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge P(t)) \rightarrow Q(t)$$

证：

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\forall x. (P(x) \rightarrow Q(x)), P(t) \vdash P(t), Q(t) \quad Q(t), \forall x. (P(x) \rightarrow Q(x)), P(t) \vdash Q(t)}{P(t) \rightarrow Q(t), \forall x. (P(x) \rightarrow Q(x)), P(t) \vdash Q(t)} \rightarrow L}{\forall x. (P(x) \rightarrow Q(x)), P(t) \vdash Q(t)} \forall L}{\forall x. (P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge P(t) \vdash Q(t)} \wedge L}{\vdash (\forall x. (P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge P(t)) \rightarrow Q(t)} \rightarrow R$$

□





**例4.3.** 证明  $\forall x. P(x) \wedge \exists y. Q(y) \vdash P(f(v)) \wedge \exists z. Q(z)$  可证。



**例4.3.** 证明  $\forall x. P(x) \wedge \exists y. Q(y) \vdash P(f(v)) \wedge \exists z. Q(z)$  可证。

证：引入新变元  $y_1$ 。

$$\begin{array}{c}
 \frac{P(f(v)), \forall x. P(x), \exists y. Q(y) \vdash P(f(v))}{\forall x. P(x), \exists y. Q(y) \vdash P(f(v))} \forall L \quad \frac{\frac{\forall x. P(x), Q(y_1) \vdash Q(y_1), \exists z. Q(z)}{\forall x. P(x), Q(y_1) \vdash \exists z. Q(z)} \exists R}{\forall x. P(x), \exists y. Q(y) \vdash \exists z. Q(z)} \exists L \\
 \hline
 \frac{\forall x. P(x), \exists y. Q(y) \vdash P(f(v)) \wedge \exists z. Q(z)}{\forall x. P(x) \wedge \exists y. Q(y) \vdash P(f(v)) \wedge \exists z. Q(z)} \wedge L
 \end{array}$$

□



**例4.4.** 证明若  $\Gamma_1 \vdash A$  和  $A \vdash \Gamma_3$  可证, 则  $\Gamma_1 \vdash \Gamma_3$  可证。



**例4.4.** 证明若  $\Gamma_1 \vdash A$  和  $A \vdash \Gamma_3$  可证, 则  $\Gamma_1 \vdash \Gamma_3$  可证。

证:

$$\frac{\Gamma_1 \vdash A \quad A \vdash \Gamma_3}{\Gamma_1 \vdash \Gamma_3} \text{Cut}$$





**命题4.5.**  $A_1, \dots, A_m \vdash B_1, \dots, B_n$  可证  $\Leftrightarrow \bigwedge_{i=1}^m A_i \vdash \bigvee_{i=1}^n B_i$  可证。

证:  $\Rightarrow$

$$\frac{\frac{A_1, \dots, A_m \vdash B_1, \dots, B_n}{\bigwedge_{i=1}^m A_i \vdash B_1, \dots, B_n} \wedge L}{\bigwedge_{i=1}^m A_i \vdash \bigvee_{i=1}^n B_i} \vee R$$

⇐

$$\frac{A_1, \dots, A_m \vdash A_1, \dots, A_m}{A_1, \dots, A_m \vdash \bigwedge_{i=1}^m A_i} \wedge R$$

∴  $A_1, \dots, A_m \vdash \bigwedge_{i=1}^m A_i$  可证。

$\Leftarrow$

$$\frac{A_1, \dots, A_m \vdash A_1, \dots, A_m}{A_1, \dots, A_m \vdash \bigwedge_{i=1}^m A_i} \wedge R$$

$\therefore A_1, \dots, A_m \vdash \bigwedge_{i=1}^m A_i$  可证。

$$\frac{B_1 \vdash B_1, \dots, B_n \quad \dots \quad B_n \vdash B_1, \dots, B_n}{\bigvee_{i=1}^n B_i \vdash B_1, \dots, B_n} \vee L$$

$\therefore \bigvee_{i=1}^n B_i \vdash B_1, \dots, B_n$  可证。

⇐

$$\frac{A_1, \dots, A_m \vdash A_1, \dots, A_m}{A_1, \dots, A_m \vdash \bigwedge_{i=1}^m A_i} \wedge R$$

∴  $A_1, \dots, A_m \vdash \bigwedge_{i=1}^m A_i$  可证。

$$\frac{B_1 \vdash B_1, \dots, B_n \quad \dots \quad B_n \vdash B_1, \dots, B_n}{\bigvee_{i=1}^n B_i \vdash B_1, \dots, B_n} \vee L$$

∴  $\bigvee_{i=1}^n B_i \vdash B_1, \dots, B_n$  可证。

$$\frac{\frac{A_1, \dots, A_m \vdash \bigwedge_{i=1}^m A_i \quad \bigwedge_{i=1}^m A_i \vdash \bigvee_{i=1}^n B_i}{A_1, \dots, A_m \vdash \bigvee_{i=1}^n B_i} \text{Cut} \quad \bigvee_{i=1}^n B_i \vdash B_1, \dots, B_n}{A_1, \dots, A_m \vdash B_1, \dots, B_n} C$$

□





# 一些导出规则

(1) 反证法规则:

$$\frac{\neg A, \Gamma \vdash B \quad \neg A, \Gamma \vdash \neg B}{\Gamma \vdash A}$$

# 一些导出规则

(1) 反证法规则:

$$\frac{\neg A, \Gamma \vdash B \quad \neg A, \Gamma \vdash \neg B}{\Gamma \vdash A}$$

证:

$$\frac{\frac{\neg A, \Gamma \vdash B}{\neg A, \Gamma \vdash \neg \neg B} \neg R, \neg L \quad \frac{\neg A, \Gamma \vdash \neg B}{\neg A, \Gamma, \neg \neg B \vdash} \neg L}{\neg A, \Gamma \vdash} \text{Cut}$$

# 一些导出规则

(1) 反证法规则:

$$\frac{\neg A, \Gamma \vdash B \quad \neg A, \Gamma \vdash \neg B}{\Gamma \vdash A}$$

证:

$$\frac{\frac{\neg A, \Gamma \vdash B}{\neg A, \Gamma \vdash \neg \neg B} \neg R, \neg L \quad \frac{\neg A, \Gamma \vdash \neg B}{\neg A, \Gamma, \neg \neg B \vdash} \neg L}{\neg A, \Gamma \vdash} \text{Cut}$$
  

$$\frac{\frac{\neg A, \Gamma \vdash}{\Gamma \vdash \neg \neg A} \neg R \quad \frac{A \vdash A}{\neg \neg A \vdash A} \neg L, \neg R}{\Gamma \vdash A} \text{Cut}$$



# 一些导出规则

(2) 分情况规则:

$$\frac{A, \Gamma \vdash B \quad \neg A, \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash B}$$



# 一些导出规则

(2) 分情况规则:

$$\frac{A, \Gamma \vdash B \quad \neg A, \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash B}$$

证:

$$\frac{\frac{A, \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash B, \neg A} \neg R \quad \neg A, \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash B} \text{Cut}$$

□



# 一些导出规则

(3) 逆否推演:

$$\frac{\Gamma \vdash A \rightarrow B}{\Gamma \vdash \neg B \rightarrow \neg A}$$



# 一些导出规则

(3) 逆否推演:

$$\frac{\Gamma \vdash A \rightarrow B}{\Gamma \vdash \neg B \rightarrow \neg A}$$

证:

$$\frac{\Gamma \vdash A \rightarrow B \quad \frac{\frac{\frac{A \vdash A, B \quad A, B \vdash B}{A, A \rightarrow B \vdash B} \rightarrow L}{\neg B, A, A \rightarrow B \vdash} \neg L}{\neg B, A \rightarrow B \vdash \neg A} \neg R}{A \rightarrow B \vdash \neg B \rightarrow \neg A} \rightarrow R}{\Gamma \vdash \neg B \rightarrow \neg A} \text{Cut}$$

□



# 一些导出规则

(4) 矛盾规则:

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash \neg A}{\Gamma \vdash B}$$





# 一些导出规则

(4) 矛盾规则:

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash \neg A}{\Gamma \vdash B}$$

证:

$$\frac{\frac{\frac{\Gamma \vdash A \quad A \vdash A, B}{\Gamma \vdash A, B} \text{Cut}}{\neg A, \Gamma \vdash B} \neg L \quad \frac{\frac{\Gamma \vdash \neg A \quad \neg A \vdash \neg A, B}{\Gamma \vdash \neg A, B} \text{Cut}}{\Gamma \vdash B} \text{Cut}$$

□



# 一些导出规则

(5) MP:

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash A \rightarrow B}{\Gamma \vdash B}$$



# 一些导出规则

(5) MP:

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash A \rightarrow B}{\Gamma \vdash B}$$

证:

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \frac{A \vdash A, B \quad A, B \vdash B}{A, A \rightarrow B \vdash B} \rightarrow L}{\Gamma, A \rightarrow B \vdash B} \text{Cut} \quad \Gamma \vdash A \rightarrow B \quad \text{Cut} \\ \Gamma \vdash B$$

□



# 一些导出规则

(6) 三段论:

$$\frac{\Gamma \vdash A(t) \quad \Gamma \vdash \forall x. (A(x) \rightarrow B(x))}{\Gamma \vdash B(t)}$$



# 一些导出规则

(6) 三段论:

$$\frac{\Gamma \vdash A(t) \quad \Gamma \vdash \forall x. (A(x) \rightarrow B(x))}{\Gamma \vdash B(t)}$$

证:

$$\frac{\Gamma \vdash \forall x. (A(x) \rightarrow B(x)) \quad \frac{A(t) \rightarrow B(t), \forall x. (A(x) \rightarrow B(x)) \vdash A(t) \rightarrow B(t)}{\forall x. (A(x) \rightarrow B(x)) \vdash A(t) \rightarrow B(t)} \forall L}{\Gamma \vdash A(t) \rightarrow B(t)} \text{Cut}$$



# 一些导出规则

(6) 三段论:

$$\frac{\Gamma \vdash A(t) \quad \Gamma \vdash \forall x. (A(x) \rightarrow B(x))}{\Gamma \vdash B(t)}$$

证:

$$\frac{\Gamma \vdash \forall x. (A(x) \rightarrow B(x)) \quad \frac{A(t) \rightarrow B(t), \forall x. (A(x) \rightarrow B(x)) \vdash A(t) \rightarrow B(t)}{\forall x. (A(x) \rightarrow B(x)) \vdash A(t) \rightarrow B(t)} \forall L}{\Gamma \vdash A(t) \rightarrow B(t)} \text{Cut}$$
$$\frac{\Gamma \vdash A(t) \rightarrow B(t) \quad \Gamma \vdash A(t)}{\Gamma \vdash B(t)} \text{MP}$$

□



# G的语义性质

**定义4.6.** 设  $\Gamma \vdash \Delta$  为矢列,  $\Gamma$  为  $\{A_1, \dots, A_n\}$ ,  $\Delta$  为  $\{B_1, \dots, B_m\}$ , 称  $\Gamma \vdash \Delta$  **有效** (记为  $\Gamma \models \Delta$ ) 指  $\models (\bigwedge_{i=1}^n A_i) \rightarrow (\bigvee_{j=1}^m B_j)$ 。特别地,

- (1) 当  $n = 0, m \neq 0$  时, 即  $\Gamma$  空时,  $\models \Delta$  指  $\models \bigvee_{j=1}^m B_j$ ;
- (2) 当  $n \neq 0, m = 0$  时, 即  $\Delta$  空时,  $\Gamma \models$  指  $\models \neg(\bigwedge_{i=1}^n A_i)$ ;
- (3) 当  $n = 0, m = 0$  时, 即  $\Gamma, \Delta$  皆为空时, 约定  $\{\} \models \{\}$  不是有效的。

注:  $\Gamma \vdash \Delta$  **有反例**指  $\Gamma \vdash \Delta$  非有效。



# G的语义性质

## 命题4.7.

1)  $A_1, \dots, A_n \vdash B_1, \dots, B_m$  有效 iff 对任何模型  $(M, \sigma)$ , 有  $M \models_{\sigma} \neg A_i, \exists i \in \{1, \dots, n\}$  或  $M \models_{\sigma} B_j, \exists j \in \{1, \dots, m\}$ 。

$$\models (\bigwedge_{i=1}^n A_i) \rightarrow (\bigvee_{j=1}^m B_j)$$





# G的语义性质

## 命题4.7.

- 1)  $A_1, \dots, A_n \vdash B_1, \dots, B_m$  有效 iff 对任何模型  $(M, \sigma)$ , 有  
 $M \models_{\sigma} \neg A_i, \exists i \in \{1, \dots, n\}$  或  $M \models_{\sigma} B_j, \exists j \in \{1, \dots, m\}$ 。
- 2)  $A_1, \dots, A_n \vdash B_1, \dots, B_m$  有反例 iff 存在模型  $(M, \sigma)$ , 使得  
 $M \models_{\sigma} A_i, \forall i \in \{1, \dots, n\}$  且  $M \models_{\sigma} \neg B_j, \forall j \in \{1, \dots, m\}$ 。

$$\models (\bigwedge_{i=1}^n A_i) \rightarrow (\bigvee_{j=1}^m B_j)$$



# G的语义性质

引理4.8. G的公理有效。

$$\models (\wedge_{i=1}^n A_i) \rightarrow (\vee_{j=1}^m B_j)$$



# G的语义性质

**引理4.9.** 对于除Cut外的G中的规则，所有前提有效 iff 结论有效。

证：只需证对于规则，结论有反例 iff 至少一个前提有反例。



# G的语义性质

**引理4.9.** 对于除Cut外的G中的规则，所有前提有效 iff 结论有效。

证：只需证对于规则，结论有反例 iff 至少一个前提有反例。

情况 $\forall L$ ：设  $\Gamma \cup \Delta$  为  $\{A_1, \dots, A_m\}$ ， $\Lambda$  为  $\{B_1, \dots, B_n\}$ 。

$\Gamma, \forall x. A(x), \Delta \vdash \Lambda$  有反例

$\Leftrightarrow$  存在模型  $(M, \sigma)$ ，使得  $M \models_{\sigma} A_i, \forall i \in \{1, \dots, m\}$  且

$M \models_{\sigma} \neg B_i, \forall i \in \{1, \dots, n\}$  且  $M \models_{\sigma} \forall x. A(x)$

$$\forall L: \frac{\Gamma, A[\frac{t}{x}], \forall x. A(x), \Delta \vdash \Lambda}{\Gamma, \forall x. A(x), \Delta \vdash \Lambda}$$

# G的语义性质

$$\text{由 } (A[\frac{t}{x}])_{M[\sigma]} = A_{M[\sigma[x:=t_{M[\sigma]}]]},$$

$$\text{可知 } M \models_{\sigma} \forall x. A(x) \Rightarrow M \models_{\sigma} A[\frac{t}{x}].$$

$\therefore \Gamma, \forall x. A(x), \Delta \vdash \Lambda$  有反例

$\Leftrightarrow$  存在模型  $(M, \sigma)$ , 使得  $M \models_{\sigma} A_i, \forall i \in \{1, \dots, m\}$  且

$$M \models_{\sigma} \neg B_i, \forall i \in \{1, \dots, n\} \text{ 且 } M \models_{\sigma} \forall x. A(x) \text{ 且 } M \models_{\sigma} A[\frac{t}{x}]$$

$\Leftrightarrow \Gamma, A[\frac{t}{x}], \forall x. A(x), \Delta \vdash \Lambda$  有反例。

其他情况同理可证。

$$\forall L: \frac{\Gamma, A[\frac{t}{x}], \forall x. A(x), \Delta \vdash \Lambda}{\Gamma, \forall x. A(x), \Delta \vdash \Lambda}$$



# G的语义性质

**引理4.10.** 对于Cut:  $\frac{\Gamma \vdash \Lambda, A \quad \Delta, A \vdash \Theta}{\Gamma, \Delta \vdash \Lambda, \Theta}$ , 若  $\Gamma \vdash \Lambda, A$  和  $\Delta, A \vdash \Theta$  有效, 则  $\Gamma, \Delta \vdash \Lambda, \Theta$  有效, 反之不然。

证:  $\Gamma, \Delta \vdash \Lambda, \Theta$  有反例

$\Rightarrow$  存在模型  $(M, \sigma)$ , 使得  $\Gamma, \Delta$  中的所有公式为真, 而不满足  $\Lambda, \Theta$  的所有公式为假

$\Rightarrow$  当  $M \models_{\sigma} A$  时,  $\Delta, A \vdash \Theta$  有反例, 当  $M \models_{\sigma} \neg A$  时,  $\Gamma \vdash \Lambda, A$  有反例

$\Rightarrow$  至少一个前提有反例



# G的语义性质

所以若两个前提都有效，则结论有效。

反之可举反例如下：

$$\frac{\vdash \neg A \quad \neg A \vdash A}{\vdash A} \text{Cut}$$

若 $\vdash A$ 有效，则 $\vdash \neg A$ 非有效。

□



# G的可靠性

**定理4.11 (Soundness)**. 若  $\Gamma \vdash \Delta$  在G中可证, 则  $\Gamma \models \Delta$ 。

证: 对  $\Gamma \vdash \Delta$  的证明树的结构做归纳。





# G的可靠性

**定理4.11 (Soundness)**. 若  $\Gamma \vdash \Delta$  在G中可证, 则  $\Gamma \models \Delta$ .

证: 对  $\Gamma \vdash \Delta$  的证明树的结构做归纳。

归纳基础: 当  $\Gamma \vdash \Delta$  为公理时, 引理4.8已证。

归纳假设:  $\Gamma \vdash \Delta$  的证明树中的前提都有效。

归纳步骤: 情况1:

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1}{\Gamma \vdash \Delta} (R_1)$$

由归纳假设知  $\Gamma_1 \vdash \Delta_1$  有效, 从而由引理4.9知  $\Gamma \vdash \Delta$  有效。

**引理4.8.** G的公理有效。

**引理4.9.** 对于除Cut外的G中的规则, 所有前提有效 iff 结论有效。



# G的可靠性

情况2:

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1 \quad \Gamma_2 \vdash \Delta_2}{\Gamma \vdash \Delta} (R_2)$$

由归纳假设知  $\Gamma_1 \vdash \Delta_1$  和  $\Gamma_2 \vdash \Delta_2$  有效, 从而由引理4.9和4.10知  $\Gamma \vdash \Delta$  有效。

□

**引理4.9.** 对于除Cut外的G中的规则, 所有前提有效 iff 结论有效。

**引理4.10.** 对于Cut规则, 若前提均有效, 则结论有效, 反之不然。



**命题4.12.** 若  $\Gamma \vdash \Lambda$  可证, 则  $\Gamma, \Delta \vdash \Lambda, \Theta$  可证。

证: 对  $\Gamma \vdash \Lambda$  的证明树的结构做归纳。

归纳基础: 当  $\Gamma \vdash \Lambda$  为公理时,  $\Gamma, \Delta \vdash \Lambda, \Theta$  也是公理。

归纳假设:  $\Gamma \vdash \Lambda$  证明树呈形  $\frac{\Gamma_1 \vdash \Lambda_1}{\Gamma \vdash \Lambda} (R_1)$  或  $\frac{\Gamma_1 \vdash \Lambda_1 \quad \Gamma_2 \vdash \Lambda_2}{\Gamma \vdash \Lambda} (R_2)$  且  $\Gamma_1, \Delta \vdash \Lambda_1, \Theta$  和  $\Gamma_2, \Delta \vdash \Lambda_2, \Theta$  可证。

归纳步骤: 对情况  $\frac{\Gamma_1, \Delta \vdash \Lambda_1, \Theta}{\Gamma, \Delta \vdash \Lambda, \Theta} (R_1)$  和情况  $\frac{\Gamma_1, \Delta \vdash \Lambda_1, \Theta \quad \Gamma_2, \Delta \vdash \Lambda_2, \Theta}{\Gamma, \Delta \vdash \Lambda, \Theta}$

均可由归纳假设知  $\Gamma, \Delta \vdash \Lambda, \Theta$  可证。

□



# 本讲小结

- G系统的公理和规则
- 证明树与可证
- 一些导出规则
- G的语义性质（有效）
- G的可靠性