# 第 4 章　连续型随机变量

## 4.1 分布函数

离散型随机变量通过分布列完整刻画了随机变量的取值及其对应的概率, 然而一些随机现象的试验结果可能不是可列的, 不能一一列举出来, 例如候车的等待时间、一个地区的降雨量、一盏电灯的寿命等. 特别地, 对于连续性随机变量, 在任意一个特定值的概率为 0, 此时仍用分布列来刻画随机变量就行不通了.

对一些具体的问题, 可能更关心在某个区间内的概率, 而不是在特定点的概率. 例如, 对于一盏电灯而言, 通常关注其寿命大于 1000 小时的概率, 而不是恰好 1005 个时的概率. 为关注一个区间上的概率, 这里引入分布函数的概念.

**定义 4.1** 给定随机变量 $X$, 对任意实数 $x \in (-\infty, +\infty)$, 函数

$$F(x) = P(X \leqslant x)$$

称为随机变量 $X$ 的 **分布函数** (Cumulative Distribution Function, CDF).

分布函数 $F(x)$ 是定义在 $(-\infty, +\infty)$ 的普通函数, 与随机事件的概率相关联, 有利于通过数学分析来研究随机变量. 分布函数不受随机变量类型的限制, 无论是离散型随机变量、还是非离散型随机变量都有各自的分布函数.

分布函数的本质是概率, 考虑事件 $X \in (-\infty, x]$ 的概率, 对任意实数 $x_1 < x_2$ 有

$$P(x_1 < X \leqslant x_2) = P(X \leqslant x_2) - P(X \leqslant x_1) = F(x_2) - F(x_1).$$

若已知 $X$ 的分布函数 $F(x)$, 则可以知道 $X$ 落入任意区间 $(x_1, x_2]$ 上的概率, 因此分布函数完整刻画了随机变量的统计规律.

**性质 4.1** 分布函数 $F(x)$ 具有如下性质:

- 单调性: 若 $x_1 < x_2$, 则 $F(x_1) \leqslant F(x_2)$;
- 规范性: $F(x) \in [0, 1]$, 且 $F(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $F(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$;
- 右连续性: $F(x+0) = \lim_{\Delta \to 0^+} F(x+\Delta) = F(x)$.

**证明** 根据概率的非负性, 对任意 $x_1 < x_2$ 有

$$F(x_2) - F(x_1) = P(x_1 < X \leqslant x_2) \geqslant 0.$$

根据规范性有

$$
\begin{aligned}
1 = P(-\infty < X < +\infty) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} P(n < X \leqslant n+1) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(n+1) - F(n) \\
&= \lim_{n\to+\infty} F(n) - \lim_{m\to-\infty} F(m).
\end{aligned}
$$

根据 $F(x)$ 的单调性有 $F(-\infty) = \lim_{x\to-\infty} F(x) = \lim_{n\to-\infty} F(n)$ 和 $F(+\infty) = \lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{n\to+\infty} F(n)$, 以及结合 $F(-\infty), F(+\infty) \in [0,1]$ 和 $F(+\infty) - F(-\infty) = 1$ 可得

$$
F(-\infty) = 0 \quad 和 \quad F(+\infty) = 1.
$$

针对右连续性, 设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一个单调递减的数列且 $x_n \to x$, 则有

$$
F(x_1) - F(x) = P(x < X \leqslant x_1) = \sum_{n=1}^{+\infty} F(x_n) - F(x_{n+1}) = F(x_1) - \lim_{n\to+\infty} F(x_n).
$$

于是得到 $\lim_{n\to+\infty} F(x_n) = F(x)$, 再结合函数 $F(x)$ 的单调性有

$$
F(x+0) = \lim_{n\to+\infty} F(x_n) = F(x),
$$

由此完成证明.

任何分布函数都满足三条基本性质, 而满足上面三条基本性质的函数必是某随机变量的分布函数. 基于分布函数很容易表示随机变量 $X$ 在区间上的概率, 例如

$$
\begin{aligned}
P(X > a) &= 1 - F(a) \\
P(X < a) &= F(a-0) = \lim_{x\to a^-} F(x) \\
P(X = a) &= F(a) - F(a-0) \\
P(X \geqslant a) &= 1 - F(a-0) \\
P(a \leqslant X \leqslant b) &= F(b) - F(a-0).
\end{aligned}
$$

若离散型的随机变量 $X$ 的分布列为 $p_k = P(X = x_k)$ $(k = 1, 2, \cdots)$, 则可得 $X$ 的分布函数为

$$
F(x) = P(X \leqslant x) = \sum_{k:\ x_k \leqslant x} p_k. \tag{4.1}
$$

**例 4.1** 设离散型随机变量 $X$ 的分布列为 $P(X=-1) = P(X=3) = 1/4$ 和 $P(X=2) = 1/2$, 求 $X$ 的分布函数.

**解** 当 $x < -1$ 时, 根据 (4.1) 有

$$F(x) = P(X \leqslant x) = P(\emptyset) = 0;$$

当 $-1 \leqslant x < 2$ 时, 根据 (4.1) 有

$$F(x) = P(X \leqslant x) = P(X = -1) = \frac{1}{4};$$

当 $2 \leqslant x < 3$ 时, 根据 (4.1) 有

$$F(x) = P(X \leqslant x) = P(X = -1) + P(X = 2) = \frac{3}{4};$$

当 $x \geqslant 3$ 时有 $F(x) = 1$. 如图 4.1(a) 所示, 分布函数 $F(x)$ 是一条阶梯形的曲线, 在 $x = -1, 2, 3$ 处有跳跃点.

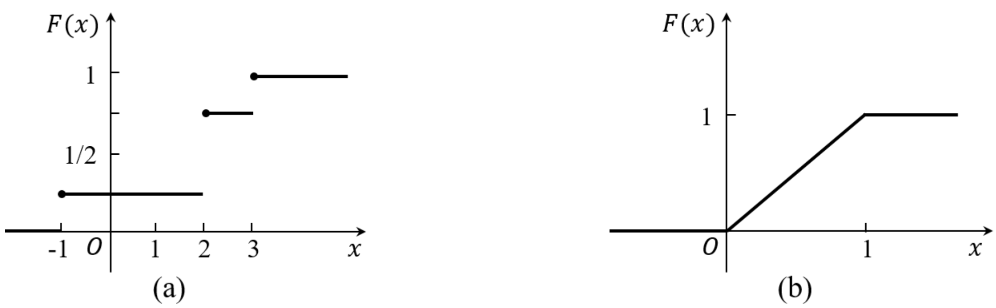


**图 4.1** 图 (a) 和 (b) 分别给出了例 4.1 和 4.2 的分布函数

**例 4.2** 在 $[0, 1]$ 区间随机抛一个点, 用 $X$ 表示落点的坐标, 假设 $X$ 落入 $[0, 1]$ 区间内任一子区间的概率与区间长度成正比, 求 $X$ 的分布函数.

**解** 设随机变量 $X$ 的分布函数为 $F(x)$, 其中 $x \in [0, 1]$, 当 $x < 0$ 时有 $F(x) = 0$; 当 $x > 1$ 时有 $F(x) = 1$. 当 $x \in [0, 1]$ 时有

$$F(x) = P(X \leqslant x) = kx.$$

根据 $F(1) = 1$ 求解可得 $k = 1$. 从而得到 $X$ 的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ x & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 1 & x > 1. \end{cases}$$

如图 4.1(b) 所示, 分布函数 $F(x)$ 是一条连续的折线.

**例 4.3** 随机变量 $X$ 的分布函数 $F(x)=A+B\arctan x$, $x\in(-\infty,+\infty)$, 求 $P(X\leqslant 1)$.

**解** 由分布函数的性质有

$$0=F(-\infty)=\lim_{x\to-\infty}A+B\arctan x=A-\pi B/2,$$
$$1=F(+\infty)=\lim_{x\to+\infty}A+B\arctan x=A+\pi B/2,$$

求解可得 $A=1/2$ 和 $B=1/\pi$, 从而得到 $P(X\leqslant 1)=3/4$.

## 4.2 概率密度函数

基于分布函数可以给出连续随机变量的定义, 以及概率密度函数.

**定义 4.2** 设随机变量 $X$ 的分布函数为 $F(x)$, 如果存在可积函数 $f(x)$, 使得对任意实数 $x$ 有

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt,$$

则称 $X$ 为 **连续型随机变量**, 函数 $f(x)$ 为随机变量 $X$ 的 **概率密度函数** (Probability Density Function, PDF), 简称 **密度函数**.

下面给出密度函数的一些性质:

**性质 4.2** 概率密度函数 $f(x)$ 满足非负性 $f(x)\geqslant 0$ 和规范性 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)dt=1$.

任意密度函数必然满足非负性和规范性; 而满足非负性和规范性的可积函数 $f(x)$ 必为某随机变量的密度函数, 并有分布函数为 $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt$, 密度函数完整地刻画了随机变量的统计规律. 与分布函数相比, 密度函数在图形上对各种分布特征的显示要优越得多, 比分布函数更常用.

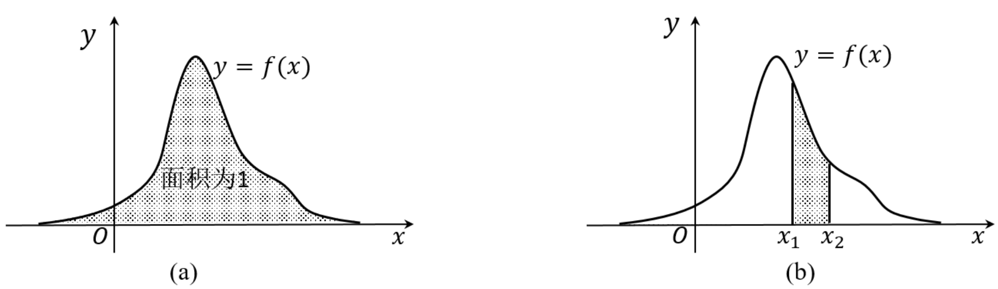


**图 4.2** 概率密度函数的几何解释

根据规范性可知曲线 $y=f(x)$ 与 $x$ 轴所围成的面积为 1 (如图 4.2(a) 所示). 对任意 $x_1<x_2$, 有

$$P(x_1<X\leqslant x_2)=F(x_2)-F(x_1)=\int_{x_1}^{x_2}f(t)dt.$$

概率密度的几何解释: 随机变量 $X$ 落入区间 $(x_1, x_2]$ 的概率等于由 $x$ 轴, $x = x_1$, $x = x_2$ 和 $y = f(x)$ 所围成的曲边梯形的面积, 如图 4.2(b) 所示.

**性质 4.3** 对连续随机变量 $X$, 分布函数 $F(x)$ 在整个实数域上连续; 若密度函数 $f(x)$ 在 $x$ 点连续, 则分布函数 $F(x)$ 在 $x$ 点可导, 且有 $F^{'}(x) = f(x)$.

**证明** 根据函数的积分性质可知: 若函数 $f(x)$ 在实数域上可积, 则积分函数

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

在实数域上连续; 若函数 $f(x)$ 在实数域上连续, 则 $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ 在实数域上可导, 且有 $F'(x) = f(x)$ 成立.

**性质 4.4** 对任意常数 $c$ 和连续型随机变量 $X$, 有 $P(X = c) = 0$.

**证明** 对任意实数 $\Delta > 0$ 有事件 $\{X = c\} \subset \{X \in (c - \Delta, c]\}$, 根据积分中值定理有

$$P(X = c) \leqslant \lim_{\Delta \to 0^+} P(c - \Delta \leqslant X \leqslant c) = \lim_{\Delta \to 0^+} \int_{c-\Delta}^{c} f(t)dt \leqslant \lim_{\Delta \to 0^+} f(\xi)\Delta = 0,$$

其中 $\xi = \arg\max_{x \in [c-\Delta, c]}\{f(x)\}$, 再根据概率的非负性完成证明.

根据上面的性质, 概率为 0 的事件不一定是不可能事件, 即概率为 0 的事件仍然可能发生. 概率为 1 的事件也不一定是必然事件. 此外, 连续随机变量的概率无需强调端点, 即

$$P(a \leqslant X \leqslant b) = P(a < X < b) = P(a \leqslant X < b) = P(a < X \leqslant b).$$

根据上面的性质有 $P(X = c) = 0$, 但可能密度函数 $f(c) \neq 0$, 因此概率密度函数不是概率.

若 $f(x)$ 在点 $x$ 连续, 由连续性定义有

$$\lim_{\Delta \to 0^+} \frac{P(x - \Delta \leqslant X \leqslant x + \Delta)}{\Delta} = \lim_{\Delta \to 0^+} \frac{\int_{x-\Delta}^{x+\Delta} f(t)dt}{\Delta} = \lim_{\Delta \to 0^+} \frac{2\Delta \cdot f(\xi)}{\Delta} = 2f(x),$$

其中 $\xi \in [x - \Delta, x + \Delta]$. 由此可得

$$P(x - \Delta \leqslant X \leqslant x + \Delta) \approx 2f(x)\Delta,$$

若概率密度 $f(x)$ 越大, 则 $X$ 在 $x$ 附近取值的概率越大.

**例 4.4** 设随机变量 $X$ 的密度函数

$$f(x)=\begin{cases} x & 0<x\leqslant 1 \\ a-x & 1<x<2 \\ 0 & \text{其它}, \end{cases}$$

求其分布函数 $F(x)$.

**解** 根据概率密度的规范性有

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt=\int_0^1 tdt+\int_1^2 (a-t)dt=a-1,$$

从而求解出 $a=2$. 当 $x\leqslant 0$ 时有 $F(x)=0$; 当 $0<x\leqslant 1$ 时, 有

$$F(x)=\int_0^x f(t)dt=x^2/2;$$

当 $1<x\leqslant 2$ 时, 有

$$F(x)=\int_0^1 f(t)dt+\int_1^x f(t)dt=1/2+\int_1^x (2-t)dt=-x^2/2+2x-1;$$

当 $x\geqslant 2$ 时有 $F(x)=1$. 综合可得

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x\leqslant 0, \\ x^2/2 & 0<x\leqslant 1, \\ -x^2/2+2x-1 & 1<x\leqslant 2, \\ 1 & x\geqslant 2. \end{cases}$$

随机变量 $X$ 的密度函数和分布函数如图 4.3 所示.

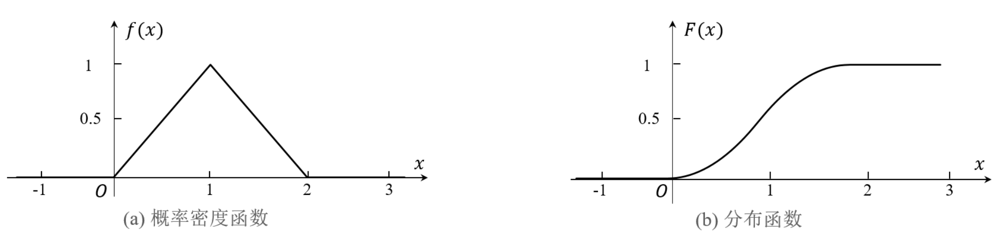


**图 4.3** 例 4.4 中随机变量 $X$ 的密度函数和分布函数图

**例 4.5** 连续随机变量 $X$ 的密度函数 $f(x)$ 和随机变量 $Y$ 满足

$$f(x)=\begin{cases}cx^2, & x\in(0,3)\\ 0, & \text{其它}\end{cases}\quad \text{和}\quad Y=\begin{cases}2, & X\leqslant 1\\ X, & X\in(1,2)\\ 1, & X\geqslant 2\end{cases}$$

求随机变量 $Y$ 的分布函数和概率 $P(Y\geqslant X)$.

**解** 根据规范性有 $1=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)dt=9c$, 由此可得 $c=1/9$.

用 $F_Y(y)$ 表示随机变量 $Y$ 的分布函数. 当 $y<1$ 时, 有 $F_Y(y)=P(Y\leqslant y)=0$; 当 $y\geqslant 2$ 时, 有 $F_Y(y)=P(Y\leqslant y)=1$; 当 $1\leqslant y<2$ 时有

$$\begin{aligned}F_Y(y) &= P(Y\leqslant y)=P(Y=1)+P(1<Y\leqslant y)\\ &= P(X\geqslant 2)+P(1<X\leqslant y)=\int_2^3 t^2/9dt+\int_1^y t^2/9dt=\frac{2}{3}+\frac{y^3}{27}.\end{aligned}$$

由此可得随机变量 $Y$ 的分布函数为

$$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<1,\\ (18+y^3)/27, & y\in[1,2),\\ 1, & y\geqslant 2.\end{cases}$$

最后计算概率

$$P(X\leqslant Y)=P(X<2)=\int_0^2 t^2/9dt=\frac{8}{27}.$$

**例 4.6** 已知一个靶半径为 2 米的圆盘, 击中靶上任一同心圆盘上的点的概率与该圆盘的面积成正比. 假设射击都能击中靶, 用 $X$ 表示击中点与圆心的距离, 求 $X$ 的概率密度函数.

**解** 根据题意分析随机变量 $X$ 的分布函数 $F(x)$. 当 $x<0$ 时有 $F(x)=0$; 当 $0\leqslant x\leqslant 2$ 时有

$$F(x)=P(X\leqslant x)=P(0\leqslant X\leqslant x)=kx^2.$$

根据分布函数的性质有 $F(2)=1=4k$, 求解可得 $k=1/4$, 进一步得到 $X$ 的概率密度

$$f(x)=\begin{cases}x/2 & 0\leqslant x\leqslant 2\\ 0 & \text{其它}.\end{cases}$$

## 4.3 连续型随机变量的期望和方差

本节讨论连续型随机变量的期望和方差, 有助于对连续型随机变量的整体了解.

**定义 4.3** 设连续型随机变量 $X$ 的概率密度函数为 $f(x)$, 若积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}|x|f(x)dx$ 收敛, 称 $\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx$ 为随机变量 $X$ 的 **期望**, 记为 $E(X)$, 即

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}tf(t)dt.$$

类似于离散型随机变量, 连续型随机变量的期望具有以下一些性质:

**性质 4.5 (线性关系)** 对任意任意常数 $a,b$ 和连续随机变量 $X$, 有 $E(aX+b)=aE(X)+b$.

**性质 4.6 (Jensen 不等式)** 对连续随机变量 $X$ 和函数 $g(x)$,

- 若 $g(x)$ 是凸函数, 则有 $g(E(X))\leqslant E[g(X)]$;
- 若 $g(x)$ 是凹函数, 则有 $g(E(X))\geqslant E[g(X)]$.

对于非负的连续型随机变量, 也可以利用 $P(X>t)$ 来直接计算期望:

**性质 4.7** 若连续型随机变量 $X\geqslant 0$, 则有

$$E[X]=\int_0^{\infty}P(X>t)dt.$$

该定理对随机变量函数 $Y=g(X)\geqslant 0$ 也成立, 即 $E[g(X)]=\int_0^{\infty}P(g(X)>t)dt$.

**证明** 根据期望的定义有

$$E[X]=\int_0^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^{+\infty}\left[\int_0^{x}\mathbb{I}[x>t]dt\right]f(x)dx=\int_0^{+\infty}\left[\int_0^{+\infty}\mathbb{I}[x>t]dt\right]f(x)dx,$$

这里引入了示性函数 $\mathbb{I}[\cdot]$, 如果论断为真, 其值为 1, 否则为 0. 通过积分交换顺序有

$$\begin{aligned}
E[X] &= \int_0^{+\infty}\left[\int_0^{+\infty}\mathbb{I}[x>t]f(x)dx\right]dt\\
&= \int_0^{+\infty}\left[\int_0^{t}\mathbb{I}[x>t]f(x)dx+\int_t^{+\infty}\mathbb{I}[x>t]f(x)dx\right]dt\\
&= \int_0^{+\infty}\left[\int_t^{+\infty}f(x)dx\right]dt=\int_0^{+\infty}P(X>t)dt.
\end{aligned}$$

由此完成证明.

对于连续随机变量函数的期望有

**定理 4.1** 设随机变量 $X$ 的密度函数为 $f(x)$, 且 $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)f(t)dt$ 绝对可积, 则

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)f(t)dt.$$

该定理表明, 若已知随机变量 $X$ 的密度函数为 $f(x)$, 以及随机变量函数 $Y = g(X)$, 可以直接利用随机变量 $X$ 的密度函数来计算 $Y$ 的期望, 而不需要知道随机变量 $Y$ 的密度函数. 该定理的证明过程较为复杂, 这里将不在讨论.

下面介绍物理学中用到的柯西分布 (Cauchy distribution).

**例 4.7** 设连续随机变量 $X$ 的密度函数为 $f(x) = 1/\pi(1+x^2)$ $(x \in \mathbb{R})$, 求期望 $E(X)$.

因为积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|x|}{\pi(1+x^2)}dx = 2\int_0^{+\infty} \frac{x}{\pi(1+x^2)}dx = \frac{1}{\pi}\left[\ln(1+x^2)\right]_0^{+\infty} = +\infty,$$

由此可知期望 $E(X)$ 不存在.

**例 4.8** 古代运送粮草, 早到存储费 $a$ 元/天, 晚到延期费 $b$ 元/天 $(b > a)$. 运送粮草需要的时间 $X$ (天) 是随机的, 其分布函数和密度函数分别为 $F(x)$ 和 $f(x)$, 求什么时候出发使平均的费用最小?

**解** 设提前了 $t$ 天出发, 运送粮草需要 $X$ 天, 则所需费用为

$$\ell_t(X) = \begin{cases} a(t-X) & X \leqslant t, \\ b(X-t) & X > t. \end{cases}$$

因此所需费用的期望为

$$\begin{aligned} E[\ell_t(X)] &= \int_0^{+\infty} \ell_t(x)f(x)dx = \int_0^t a(t-x)f(x)dx + \int_t^{+\infty} b(x-t)f(x)dx \\ &= atF(a) - a\int_0^t xf(x)dx + b\int_t^{+\infty} xf(x)dx - bt(1-F(t)). \end{aligned}$$

对 $t$ 求导并令其导数为零可得

$$\frac{d}{dt}E[\ell_t(X)] = aF(t) - b(1-F(t)) = (a+b)F(t) - b = 0.$$

求解可得期望最小的 $t^*$ 应该满足

$$F(t^*) = \frac{b}{a+b}.$$