南京大学
Nanjing University

一阶逻辑（五）

Hintikka集-定义

定义3.33. 设$\mathcal{L}$为一阶语言，Ψ为$\mathcal{L}$的公式集，令T为全体$\mathcal{L}$项的集合，Ψ为Hintikka集指：

1. 若公式A为原子公式，则A和$\neg A$不能都属于Ψ；
2. 若$\neg\neg A \in \Psi$，则$A \in \Psi$；
3. 若$A \to B \in \Psi$，则$\neg A \in \Psi$或$B \in \Psi$；
4. 若$\neg(A \to B) \in \Psi$，则$A \in \Psi$或$\neg B \in \Psi$；
5. 若$A \wedge B \in \Psi$，则$A \in \Psi$且$B \in \Psi$；
6. 若$\neg(A \wedge B) \in \Psi$，则$\neg A \in \Psi$或$\neg B \in \Psi$；

Hintikka集-定义

7. 若$A \vee B \in \Psi$，则$A \in \Psi$或$B \in \Psi$；

8. 若$\neg(A \vee B) \in \Psi$，则$\neg A \in \Psi$且$\neg B \in \Psi$；

9. 若$\forall x. A \in \Psi$，则$\forall t \in T$，$A\left[\frac{t}{x}\right] \in \Psi$；

10. 若$\neg\forall x. A \in \Psi$，则$\exists t \in T$，$\neg A\left[\frac{t}{x}\right] \in \Psi$；

11. 若$\exists x. A \in \Psi$，则$\exists t \in T$，$A\left[\frac{t}{x}\right] \in \Psi$；

12. 若$\neg\exists x. A \in \Psi$，则$\forall t \in T$，$\neg A\left[\frac{t}{x}\right] \in \Psi$；

Hintikka集-定义

13. $t \doteq t \in \Psi$;

14. $t \doteq s \to s \doteq t \in \Psi$;

15. $t \doteq s \to (s \doteq \mathrm{u} \to \mathrm{t} \doteq \mathrm{u}) \in \Psi$;

16. 若f为n元函数，$t_1, \ldots, t_n, s_1, \ldots, s_n$为项，则

$$\left(\bigwedge_{i=1}^{n} t_i \doteq s_i\right) \to (f(t_1, \ldots, t_n) \doteq f(s_1, \ldots, s_n)) \in \Psi;$$

Hintikka集-定义

13. $t \doteq t \in \Psi$;

14. $t \doteq s \to s \doteq t \in \Psi$;

15. $t \doteq s \to (s \doteq \mathrm{u} \to \mathrm{t} \doteq \mathrm{u}) \in \Psi$;

16. 若f为n元函数，$t_1, \ldots, t_n, s_1, \ldots, s_n$为项，则

$$(\bigwedge_{i=1}^{n} t_i \doteq s_i) \to (f(t_1, \ldots, t_n) \doteq f(s_1, \ldots, s_n)) \in \Psi;$$

17. 若P为n元谓词，$t_1, \ldots, t_n, s_1, \ldots, s_n$为项，则

$$(\bigwedge_{i=1}^{n} t_i \doteq s_i) \to (P(t_1, \ldots, t_n) \to P(s_1, \ldots, s_n)) \in \Psi.$$

Hintikka集

定理3.34. 若Ψ为Hintikka集，则Ψ可满足。

下面我们来证明该定理。

定义3.35. 定义T上的二元关系“~”如下：

$$s \sim t\text{指}s \doteq t \in \Psi.$$

命题3.36. ~为等价关系。

（证明留作习题）

定义3.37. 设$t \in T$，令$[t]$为关于~的等价类，从而 $[s] = [t]$ 当且仅当$s \sim t$。

引理3.38. 设$[t_i] = [s_i]$ ($i = 1,2,\ldots,n$)，则

1. 任何n元函数f，$[f(t_1,\ldots,t_n)] = [f(s_1,\ldots,s_n)]$；
2. 任何n元谓词P，若$P(t_1,\ldots,t_n) \in \Psi$，则$P(s_1,\ldots,s_n) \in \Psi$。

证：由Hintikka集定义直接证明。

1. 即证$f(t_1,\ldots,t_n) \doteq f(s_1,\ldots,s_n) \in \Psi$。

   由$[t_i] = [s_i]$，可知$t_i \doteq s_i \in \Psi$，则$\neg(t_i \doteq s_i) \notin \Psi$。

引理3.38. 设$[t_i] = [s_i]$ $(i = 1,2,\ldots,n)$，则

1. 任何n元函数f，$[f(t_1,\ldots,t_n)] = [f(s_1,\ldots,s_n)]$；
2. 任何n元谓词P，若$P(t_1,\ldots,t_n) \in \Psi$，则$P(s_1,\ldots,s_n) \in \Psi$。

证：由Hintikka集定义直接证明。

1. 即证$f(t_1,\ldots,t_n) \doteq f(s_1,\ldots,s_n) \in \Psi$。

定义的规则1

由$[t_i] = [s_i]$，可知$t_i \doteq s_i \in \Psi$，则$\neg(t_i \doteq s_i) \notin \Psi$。

又由于$(\bigwedge_{i=1}^{n} t_i \doteq s_i) \to f(t_1,\ldots,t_n) \doteq f(s_1,\ldots,s_n) \in \Psi$，

引理3.38. 设$[t_i] = [s_i]$ $(i = 1,2,\ldots,n)$，则

1. 任何n元函数f，$[f(t_1,\ldots,t_n)] = [f(s_1,\ldots,s_n)]$；
2. 任何n元谓词P，若$P(t_1,\ldots,t_n) \in \Psi$，则$P(s_1,\ldots,s_n) \in \Psi$。

证：由Hintikka集定义直接证明。

1. 即证$f(t_1,\ldots,t_n) \doteq f(s_1,\ldots,s_n) \in \Psi$。

定义的规则1

由$[t_i] = [s_i]$，可知$t_i \doteq s_i \in \Psi$，则$\neg(t_i \doteq s_i) \notin \Psi$。

又由于$(\bigwedge_{i=1}^{n} t_i \doteq s_i) \to f(t_1,\ldots,t_n) \doteq f(s_1,\ldots,s_n) \in \Psi$，

所以$f(t) \doteq f(s) \in \Psi$。

定义的规则16

引理3.38. 设$[t_i]=[s_i]$ $(i=1,2,...,n)$，则

1. 任何n元函数f，$[f(t_1,...,t_n)]=[f(s_1,...,s_n)]$；
2. 任何n元谓词P，若$P(t_1,...,t_n)\in\Psi$，则$P(s_1,...,s_n)\in\Psi$。

证：由Hintikka集定义直接证明。

1. 即证$f(t_1,...,t_n)\doteq f(s_1,...,s_n)\in\Psi$。 定义的规则1

   由$[t_i]=[s_i]$，可知$t_i\doteq s_i\in\Psi$，则$\neg(t_i\doteq s_i)\notin\Psi$。

   又由于$(\bigwedge_{i=1}^{n} t_i\doteq s_i)\to f(t_1,...,t_n)\doteq f(s_1,...,s_n)\in\Psi$，

   定义的规则16

   所以$f(t)\doteq f(s)\in\Psi$。

2. 与1同理。 定义的规则3

Hintikka集的模型

定义3.39. 模型$\mathbb{H} = (H, \sigma)$定义如下：

1. $H = \{[t] | t \in T\}$；
2. c为常元，$c_H = [c]$；
3. f为n元函数，$f_H([t_1], \dots, [t_n]) = [f(t_1, \dots, t_n)]$；
4. P为n元谓词，$P_H([t_1], \dots, [t_n])$真 iff $P(t_1, \dots, t_n) \in \Psi$，即

$P_H = \{\langle [t_1], \dots, [t_n] \rangle | P(t_1, \dots, t_n)\} \subseteq H^n$；

4. $\sigma(x) = [x]$，当x为变元。

注：引理3.38保证定义的合法性。

Hintikka集的模型

定义3.39. 模型$\mathbb{H} = (H, \sigma)$定义如下：

1. $H = \{[t] | t \in T\}$；
2. c为常元，$c_H = [c]$；
3. f为n元函数，$f_H([t_1], \ldots, [t_n]) = [f(t_1, \ldots, t_n)]$；
4. P为n元谓词，$P_H([t_1], \ldots, [t_n])$真 iff $P(t_1, \ldots, t_n) \in \Psi$，即 $P_H = \{\langle [t_1], \ldots, [t_n] \rangle | P(t_1, \ldots, t_n)\} \subseteq H^n$；
4. $\sigma(x) = [x]$，当x为变元。

引理3.40. 对任何t，$t_{H[\sigma]} = [t]$。

证明：对t的结构做归纳。

引理3.41. $H \vDash_{\sigma} \Psi$，即Ψ可满足。

证明：对公式A的结构作归纳证明：

(a) 若$A \in \Psi$，则$A_{H[\sigma]} = \mathrm{T}$。

(b) 若$\neg A \in \Psi$，则$A_{H[\sigma]} = \mathrm{F}$。

情况A：

1) A为$p(t)$（p为n元时同理可证）

由$A \in \Psi \Rightarrow p(t) \in \Psi \Rightarrow p_H([t])$真 $\Rightarrow p(t)_{H[\sigma]} = \mathrm{T}$，得(a)成立。

又由$\neg A \in \Psi \Rightarrow p(t) \notin \Psi \Rightarrow p_H([t])$假 $\Rightarrow p(t)_{H[\sigma]} = \mathrm{F}$，得(b)成立。

1) A为$p(t)$（p为n元时同理可证）

2) A为$s \doteq t$

由$s \doteq t \in \Psi \Rightarrow [\mathrm{s}] = [\mathrm{t}] \Rightarrow s_{H[\sigma]} = t_{H[\sigma]} \Rightarrow (s \doteq t)_{H[\sigma]} = \mathrm{T}$，得(a)成立。

由$\neg(s \doteq t) \in \Psi \Rightarrow s \doteq t \notin \Psi \Rightarrow [\mathrm{s}] \neq [\mathrm{t}] \Rightarrow s_{H[\sigma]} \neq t_{H[\sigma]} \Rightarrow (\neg(s \doteq t))_{H[\sigma]} = \mathrm{T}$，得(b)成立。

情况¬：A为$\neg B$

$A \in \Psi \Rightarrow \neg B \in \Psi \Rightarrow B_{H[\sigma]} = \mathrm{F} \Rightarrow A_{H[\sigma]} = \mathrm{T}$。

$\neg A \in \Psi \Rightarrow \neg\neg B \in \Psi \Rightarrow B \in \Psi \Rightarrow B_{H[\sigma]} = \mathrm{T} \Rightarrow A_{H[\sigma]} = \mathrm{F}$。

情况∧：A为$B \wedge C$

$A \in \Psi \Rightarrow B \wedge C \in \Psi \Rightarrow B, C \in \Psi$

$\Rightarrow B_{H[\sigma]} = C_{H[\sigma]} = \mathrm{T} \Rightarrow (B \wedge C)_{H[\sigma]} = \mathrm{T}$

$\Rightarrow A_{H[\sigma]} = \mathrm{T}$。

$\neg A \in \Psi \Rightarrow \neg(B \wedge C) \in \Psi \Rightarrow \neg B \in \Psi$ 或$\neg C \in \Psi$

$\Rightarrow B_{H[\sigma]} = \mathrm{F}$ 或 $= C_{H[\sigma]} = \mathrm{F}$

$\Rightarrow (B \wedge C)_{H[\sigma]} = \mathrm{F} \Rightarrow A_{H[\sigma]} = \mathrm{F}$。

情况∨, →：同理可证。

情况∀：A为$\forall x.B$

$\forall x.B \in \Psi \Rightarrow B\left[\frac{t}{x}\right] \in \Psi$，对$\forall t \in T$（Hintikka集定义）

$\Rightarrow B\left[\frac{t}{x}\right]_{H[\sigma]} = \mathrm{T}$，对$\forall t \in T$（归纳假设）

$\Rightarrow B_{H[\sigma[x:=t_{H[\sigma]}]]} = \mathrm{T}$，对$\forall t \in T$（替换引理）

$\Rightarrow B_{H[\sigma[x:=[t]]]} = \mathrm{T}$，对$\forall t \in T$（引理3.40）

$\Rightarrow B_{H[\sigma[x:=u]]} = \mathrm{T}$，对$\forall \mathrm{u} \in H$

$\Rightarrow (\forall x.B)_{H[\sigma]} = \mathrm{T}$（语义的定义）

$\Rightarrow A_{H[\sigma]} = \mathrm{T}$。

$\neg(\forall x.B) \in \Psi \Rightarrow \neg B\left[\frac{t}{x}\right] \in \Psi$，$\exists t \in T$（Hintikka集定义）

$\Rightarrow B\left[\frac{t}{x}\right]_{H[\sigma]} = \mathrm{F}$，$\exists t \in T$（归纳假设）

$\Rightarrow B_{H[\sigma[x:=t_{H[\sigma]}]]} = \mathrm{F}$，$\exists t \in T$（替换引理）

$\Rightarrow B_{H[\sigma[x:=[t]]]} = \mathrm{F}$，$\exists t \in T$（引理3.40）

$\Rightarrow B_{H[\sigma[x:=u]]} = \mathrm{F}$，$\exists \mathrm{u} \in H$

$\Rightarrow (\forall x.B)_{H[\sigma]} = \mathrm{F} \Rightarrow A_{H[\sigma]} = \mathrm{F}$。

情况∃：同理可证。 $\square$

$$\neg(\forall x.B) \in \Psi \Rightarrow \neg B\left[\frac{t}{x}\right] \in \Psi，\exists t \in T \text{（Hintikka集定义）}$$

$$\Rightarrow \neg B\left[\frac{t}{x}\right]_{H[\sigma]} = \mathrm{T}，\exists t \in T \text{（归纳假设）}$$

$$\Rightarrow \neg B_{H[\sigma[x:=t_{H[\sigma]}]]} = \mathrm{T}，\exists t \in T \text{（替换引理）}$$

$$\Rightarrow B_{H[\sigma[x:=[t]]]} = \mathrm{F}，\exists t \in T \text{（引理3.40）}$$

$$\Rightarrow B_{H[\sigma[x:=u]]} = \mathrm{F}，\exists \mathrm{u} \in H$$

$$\Rightarrow (\forall x.B)_{H[\sigma]} = \mathrm{F} \Rightarrow A_{H[\sigma]} = \mathrm{F}。$$

情况∃：同理可证。 □

定理3.34. 若Ψ为Hintikka集，则Ψ可满足。