

数学分析-习题 5

课程助教 徐業釗

2023 年 12 月 5 日

1. 设 f 在 (a, b) 中可导, 且 $|f'(x)| \leq M, \forall x \in (a, b)$, 证明: 极限 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ 和 $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ 都存在且有限。
2. 证明: 奇函数的导数是偶函数, 偶函数的导数是奇函数, 周期函数的导数是周期函数。
3. 设 f 的周期是 T , 则其原函数 F 以 T 为周期函数当且仅当 $F(T) = F(0)$ 。
4. 设 f 为奇函数, 则其原函数 F 为偶函数; 设 f 为偶函数, 则其原函数 F 为奇函数当且仅当 $F(0) = 0$
5. 通过对 $(1-x)^n$ 求导并利用二项式定理证明等式

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k k^m = \begin{cases} 0, m = 0, 1, \dots \\ (-1)^n n!, m = n \end{cases}$$

连接.

6. 证明: 对于 $[a, b]$ 上的非负可积函数 $f(x)$, $f(x) = 0$ 的充要条件是 $\int_a^b f(x) dx = 0$
7. 设 f 是 $[a, b]$ 上的连续函数, 如果对于任意满足条件 $\int_a^b g(x) dx = 0$ 的连续函数 g , 均有:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$$

证明: $f(x) = C$ (C 为常数)

8. 求函数 $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ 的导数。

9. 设 f 是 $[a, b]$ 上的连续函数, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\int_a^b |f(x)|^n dx \right]^{\frac{1}{n}} = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$$