判断P^4中的向量组

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix}0\\1\\1\\1\end{bmatrix}, \alpha_4 = \begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$$

是否为P^4的一个基，如果是，求$\alpha = [a_1, a_2, a_3, a_4]^T$在此基下的坐标

解: $[\alpha_1, \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4] = \begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&1\\0&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix} = A$

且 $|A| \neq 0$, $\Rightarrow$ $(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4)$ 为 P^4 的一个基

$\alpha = \begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&1\\0&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}$ $\quad \alpha = (\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4)\cdot\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix} = (\alpha_4-\alpha_3, \alpha_3-\alpha_2, \alpha_2-\alpha_1, \alpha_1)$

设V是n维线性空间，$v_1, v_2, \cdots, v_m$是一组线性无关的向量（是V的子空间U的一组基），又$e_1, e_2, \cdots, e_n$是V的基，证明：可以在$e_1, e_2, \cdots, e_n$中选出$n-m$个向量，使之和$v_1, v_2, \cdots, v_m$一起组成V的一组基。

证: 当 $n=m$ 时，易证.

当 $m<n$ 时 必定 $\exists i$, st $e_i, v_1\ v_2 \cdots v_m$ 线性无关.

$\Rightarrow$ 假设不存在这样一个 e_i $\Rightarrow$ $v_1\ v_2 \cdots v_m$ 可线性表出 $e_1\ e_2 \cdots e_n$

又 $n>m$. $\Rightarrow$ $e_1\ e_2 \cdots e_n$ 必线性相关 矛盾

$\Rightarrow \exists$ 这样一个 e_i $\Rightarrow$ 将 $v_1\ v_2 \cdots v_m$ 迭代

为 $v_1\ v_2 \cdots v_{m+1}$ 其中 $v_{m+1} = e_i$

重复 $n-m$ 次 直至 $m=n$ 即证.

此时取了 $n-m$ 个向量.