



命题逻辑（一）



命题



- **定义1.1:** 命题是一个能判断真假的陈述句。



命题

- **定义1.1：** 命题是一个能判断真假的陈述句。
- **特征：**
 - 陈述客观外界发生事情的陈述句；
 - 真假必居其一，且只能其一。



命题

- 下述都是命题：

- $1+1>2$ 。
- 三角形的两边之和大于第三边。
- 明天会下雨。
- $P=NP$ 。(多项式时间可判定问题，非确定性多项式时间可判定问题)



命题

- 下述均不是命题：

- $1+1>2?$
- 帮我拿下快递。
- $a>b$ 。
- 我正在撒谎。（悖论）



命题的抽象

- 以字母 p 、 q 、 r 等表示命题。
- 以1表示真，0表示假。
- 若 p 取值1，则表示 p 为真命题。



联结词和复合命题

- 由简单命题构造更复杂的命题：
 - 他很聪明。（简单命题）
 - 他即聪明又努力。
 - 他要回家，除非下雨。
 - 如果下雨，他就在家；否则他将去学校。



联结词和复合命题

- “没有”，“如果...那么...”，“既...又...”等都是**联结词**。
- 由联结词和命题连接而成的更加复杂的命题称为**复合命题**。
- 相对地，不能分解为更简单的命题称为**简单命题**（原子命题）。
- 复合命题的真假完全由构成它的简单命题的真假所决定。



否定联结词

定义1.2. 设 p 为一个命题，复合命题“非 p ”为 p 的**否定式**，
（简称**否定**）记为 $\neg p$ ，“ \neg ”被称为否定联结词。

$\neg p$ 为真当且仅当 p 为假

p	$\neg p$
0	1
1	0



合取联结词

定义1.2. 设 p 、 q 为两个命题，复合命题“ p 且 q ”称为 p 、 q 的**合取式**（简称**合取**），记为 $p \wedge q$ ，“ \wedge ”称为合取联结词。

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$p \wedge q$ 为真当且仅当
 p 和 q 均为真



析取联结词

定义1.3. 设 p 、 q 为两个命题，复合命题“ p 或 q ”称为 p 、 q 的**析取式**（简称**析取**），记为 $p \vee q$ ，“ \vee ”称为析取联结词。

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

$p \vee q$ 为真当 p 与 q 中至少一个为真



“或”与“异或”

- 日常用语中“或”有两种含义，如：
 - 下周在一食堂或二食堂吃饭；
 - 下一餐在一食堂或二食堂吃。
- 当构成它们的简单命题均为真时，前者为真，后者为假。
- 前者称为“相容或”，即析取；后者称为“相异或”，也称异或 ($p \oplus q$)。

p	q	$p \oplus q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0



蕴含联结词

定义1.4. 设 p 、 q 为命题，复合命题“如果 p ，则 q ”称为 p 对 q 的**蕴含式**（简称**蕴含**），记作 $p \rightarrow q$ ，其中 p 为此蕴含式的**前件**， q 为**后件**，“ \rightarrow ”称为蕴含联结词。

p	q	$p \rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

$p \rightarrow q$ 为假当且仅当 p 为真 q 为假



蕴含联结词

- 日常用语中“如果...那么...”有时指它们所联结的两个命题之间的某种关系，可能具有很多涵义，不在我们所讨论的范围内。
 - 如果他来，那么太阳从西边升起了。
- 人们可能会觉得， p 为假的时候，“ p 蕴含 q ”是没有真假值的，或者这个命题是没有意义的。



蕴含联结词

- 在此处，“ p 蕴含 q ”的涵义为“ p 的真蕴含 q 的真”，或者“并非 p 真 q 假”。
 - 如果 $x > 3$ ，则 $x^2 > 9$

p	q	$p \rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1



等价联结词

定义1.5. 设 p 、 q 为命题，复合命题“ p 当且仅当 q ”称为 p 、 q 的**等值式**（简称**等值**），记作 $p \leftrightarrow q$ ，“ \leftrightarrow ”称为等价联结词。

p	q	$p \leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1



联结词和复合命题

- 注意：
 - 上述联结词来源于日常用语的词汇，但并不完全一致。
 - 我们主要关心命题的真假值的关系，而不关心命题的内容。



字母表

定义1.6（字母表）. 命题逻辑的字母表含三类符号：

(1) 命题符号：

$p \quad q \quad r \quad \dots$

(2) 联结符号（联结词）：

$\neg \quad \wedge \quad \vee \quad \rightarrow$

(3) 辅助符号（标点符号）：

(\quad)



字母表

定义1.6（字母表）. 命题逻辑的字母表含三类符号：

(1) 命题符号：

$p \quad q \quad r \quad \dots$

(2) 联结符号（联结词）：

$\neg \quad \wedge \quad \vee \quad \rightarrow$

(3) 辅助符号（标点符号）：

(\quad)

注：有些教科书联结符号还包含其它联结词，如“ \leftrightarrow ”。



表达式

- **表达式**是有限的符号串。
 - p
 - pq
 - (r)
 - $p \wedge \rightarrow q$
 - $(p \vee q)$
- 表达式的**长度**是其中符号出现的数目。
 - 长度为0的表达式，称为**空表达式**，用记号 \emptyset 表示。



表达式

- 两个表达式 U 和 V 是**相等**的，记作 $U = V$ ，当且仅当长度相同且依次有相同的符号。
- UV 表示 U 和 V 依次并列得到的表达式。
 - $U\emptyset = \emptyset U = U$



表达式

- 设 U, V, W_1, W_2 是表达式。

如果 $U = W_1 V W_2$ ，那么称 V 是 U 的**段**。

如果 V 是 U 的段，且 $V \neq U$ ，那么 V 是 U 的**真段**。



表达式

- 设 U, V, W_1, W_2 是表达式。

如果 $U = W_1 V W_2$ ，那么称 V 是 U 的**段**。

如果 V 是 U 的段，且 $V \neq U$ ，那么 V 是 U 的**真段**。

例如， $p \vee q$ 是 $(p \vee q)$ 的真段。

任何表达式是它自己的段。

空表达式是任何表达式的段。



表达式

- 设 U, V, W 是表达式。

如果 $U = VW$ ，那么 V 是 U 的**初始段**， W 是 U 的**结尾段**。

如果 $W \neq \emptyset$ ，那么 V 是 U 的**真初始段**。

如果 $V \neq \emptyset$ ，那么 W 是 U 的**真结尾段**。

表达式

- 设 U, V, W 是表达式。

如果 $U = VW$ ，那么 V 是 U 的**初始段**， W 是 U 的**结尾段**。

如果 $W \neq \emptyset$ ，那么 V 是 U 的**真初始段**。

如果 $V \neq \emptyset$ ，那么 W 是 U 的**真结尾段**。

例如， $(p \vee q)$ 是 $(p \vee q)$ 的初始段和结尾段。

p 是 $(p \vee q)$ 的真初始段。



命题公式

- 命题逻辑的所有原子公式和公式的集分别记为 **PS** （命题符集合）和 **$PROP$** （命题集）。
 - 公式由表达式定义
 - 公式相当于自然语言中符合语法规则的语句



命题公式

- 命题逻辑的所有原子公式和公式的集分别记为 **PS** （命题符集合）和 **$PROP$** （命题集）。
 - 公式由表达式定义
 - 公式相当于自然语言中符合语法规则的语句
- 表达式不一定是公式
 - p
 - pq
 - (r)
 - $p \wedge \rightarrow q$
 - $(p \vee q)$



命题公式

定义1.7 (PS). 命题语言中的一个表达式是 PS 中的元, 当且仅当它是单独的一个命题符号。

- 注: PS 是可数无穷集, 即 $|PS| = |\mathbb{N}|$ 。



命题的定义

定义1.8 ($PROP$) . $A \in PROP$ 当且仅当它能有限次地由以下

(i)~(iii)生成:

(i) $PS \subseteq PROP$;

(ii) 如果 $A \in PROP$, 则 $(\neg A) \in PROP$;

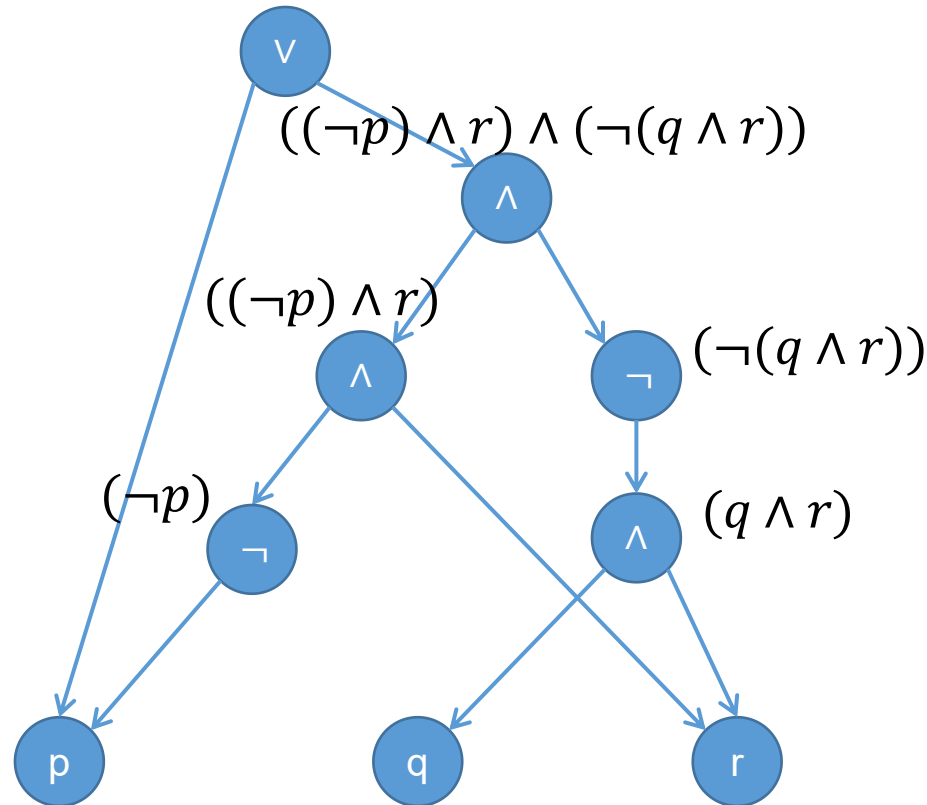
(iii) 如果 $A, B \in PROP$, 则 $(A * B) \in PROP$ 。

其中 $* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$ 。

- 定义中的(i)~(iii)称为命题公式的**形成规则**。

命题的定义

- 例, $(p \vee (((\neg p) \wedge r) \wedge (\neg(q \wedge r))))$ 。





命题的定义

定义1.9（命题）.

1. 命题符为命题；
2. 若 A , B 为命题, 则
 $(\neg A)$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$ 和 $(A \rightarrow B)$ 为命题；
3. 命题仅限于此。



命题的定义

定义1.9（命题）.

1. 命题符为命题；

2. 若 A , B 为命题, 则

$(\neg A)$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$ 和 $(A \rightarrow B)$ 为命题；

3. 命题仅限于此。

也可以用Bacrus-Naur Form定义命题为

$$\varphi ::= P | (\neg \varphi) | (\varphi_1 \wedge \varphi_2) | (\varphi_1 \vee \varphi_2) | (\varphi_1 \rightarrow \varphi_2)$$

其中 $P \in PS$ 。



命题的定义

也可以用封包法定义命题：

令 C_{\neg} , C_{\wedge} , C_{\vee} 和 C_{\rightarrow} 为所有表达式之集上的函数：

$$C_{\neg}(A) = (\neg A)$$

$$C_{*}(A, B) = (A * B)$$

其中 $* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$ 。



命题的定义

定义1.10 ($PROP$) .

所有命题的集合 $PROP$ 是满足以下条件的最小集合：

- (i) $PS \subseteq PROP$;
- (ii) 若 $A \in PROP$, 则 $C_{\neg}(A) \in PROP$;
- (iii) 若 $A, B \in PROP$, 则

$C_{\wedge}(A, B)$, $C_{\vee}(A, B)$ 和 $C_{\rightarrow}(A, B) \in PROP$ 。

即 $PROP$ 为在函数 C_{\neg} , C_{\wedge} , C_{\vee} 和 C_{\rightarrow} 下 PS 的归纳闭包。



命题的结构

定理1.11. 设 R 是一个性质。如果

- (i) 对于 $\forall p \in PS$, 有 $R(p)$;
 - (ii) 对于 $\forall A \in PROP$, 如果 $R(A)$, 则 $R(\neg A)$;
 - (iii) 对于 $\forall A, B \in PROP$, 如果 $R(A)$ 并且 $R(B)$, 则 $R(A * B)$;
- 则对于 $\forall A \in PROP$, 有 $R(A)$ 。



证明：令 $S = \{A \in PROP \mid R(A)\}$ ，则 $S \subseteq PROP$ 。

S 满足定义 1.10 中条件 (i)~(iii)：

(i) $PS \subseteq S$ ；

(ii) 若 $A \in S$ ，则 $(\neg A) \in PROP$ 且有 $R((\neg A))$ ，
因此 $(\neg A) \in S$ ；

(iii) 若 $A, B \in S$ ，则 $(A * B) \in PROP$ 且有 $R((A * B))$ ，
因此 $(A * B) \in S$ 。

由定义可知 $PROP \subseteq S$ ，即对于 $\forall A \in PROP$ ，有 $R(A)$ 。





命题的结构

证明：命题集是无穷可数集，即 $|PROP| = |N|$ 。

$$|PS| = |N|,$$

$\forall A \in PROP$ 经过有限步生成

括号引理



引理1.12. 命题公式是不空的表达式。





括号引理

引理1.12. 命题公式是不空的表达式。



引理1.13（括号引理）. 对于任意命题公式，左括号和右括号出现的数目相同。



例， $(p \vee (((\neg p) \wedge r) \wedge (\neg(q \wedge r))))$ 。



括号引理

引理1.12. 命题公式是不空的表达式。



引理1.13（括号引理）. 对于任意命题公式，左括号和右括号出现的数目相同。



易证，一个命题公式A要么为原子公式，要么以（为开始，）为结尾。



构造序列

引理1.14. $A \in PROP$ 等价于存在有穷序列 A_0, A_1, \dots, A_n 使得 $A = A_n$ 且对于 $\forall i \leq n$,

或(a) $A_i \in PS$,

或(b) $\exists k < i$ 使 A_i 为 $(\neg A_k)$,

或(c) $\exists k, l < i$ 使 A_i 为 $(A_k * A_l)$, 其中 $*$ $\in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$ 。

以上序列 A_0, A_1, \dots, A_n 被称为 A 的构造序列。



证明:

令 $PROP' = \{A \mid \text{存在有穷序列 } A_0, A_1, \dots, A_n \text{ 使 } A_n \text{ 为 } A \text{ 且对任何 } i \leq n \text{ 或 } (a) \text{ 或 } (b) \text{ 或 } (c)\}$ 。

欲证 $PROP = PROP'$, 只需证

(1) $PROP' \subseteq PROP$ 和 (2) $PROP \subseteq PROP'$

现证 (1)

设 $A \in PROP'$, 从而存在 A_0, A_1, \dots, A_n 满足对任何 $i \leq n$ 有 (a) 或 (b) 或 (c)。对 i 归纳证明 $A_i \in PROP$ 。

归纳基础: 当 $i = 0$ 时, 只有 (a) 成立, 即 $A_0 \in PS$ 。

归纳假设: 设对于 $\forall k < i$ 有 $A_k \in PROP$ 成立。

归纳步骤: 对于 i 有如下情况

(a) $A_i \in PS$ 从而 $A_i \in PROP$

(b) $A_i = (\neg A_k)$, 此处 $k < i$, 由归纳假设可知 $A_k \in PROP$ 。

由形成规则(ii), 可得 $A_i \in PROP$ 。



(c) $A_i = (A_k * A_l)$, 此时 $k, l < i$, 从而有归纳假设可知

$A_k, A_l \in PROP$, 由形成规则(iii), 可得 $A_i \in PROP$ 。

由数学归纳法, 可得 $A_n \in PROP$, $PROP' \subseteq PROP$ 。

现证 (2)

由定义1.10可知, $PROP$ 是满足定义1.10中条件(i)~(iii)的最小集合, 故只需证 $PROP'$ 也满足条件(i)~(iii)。

(i) $PS \subseteq PROP'$ 是显然的;



(ii) 设 $A \in PROP'$, 则存在 A 的构造序列 A_0, A_1, \dots, A_n , 那么

$$A_0, A_1, \dots, A_n, (\neg A)$$

是 $(\neg A)$ 的构造序列, 因此 $(\neg A) \in PROP'$;

(iii) 类似地, 设 $A, B \in PROP'$, 则存在 A 和 B 的构造序列,

A_0, A_1, \dots, A_n 和 B_0, B_1, \dots, B_n , 那么

$$A_0, A_1, \dots, A_n, B_0, B_1, \dots, B_n, (A * B)$$

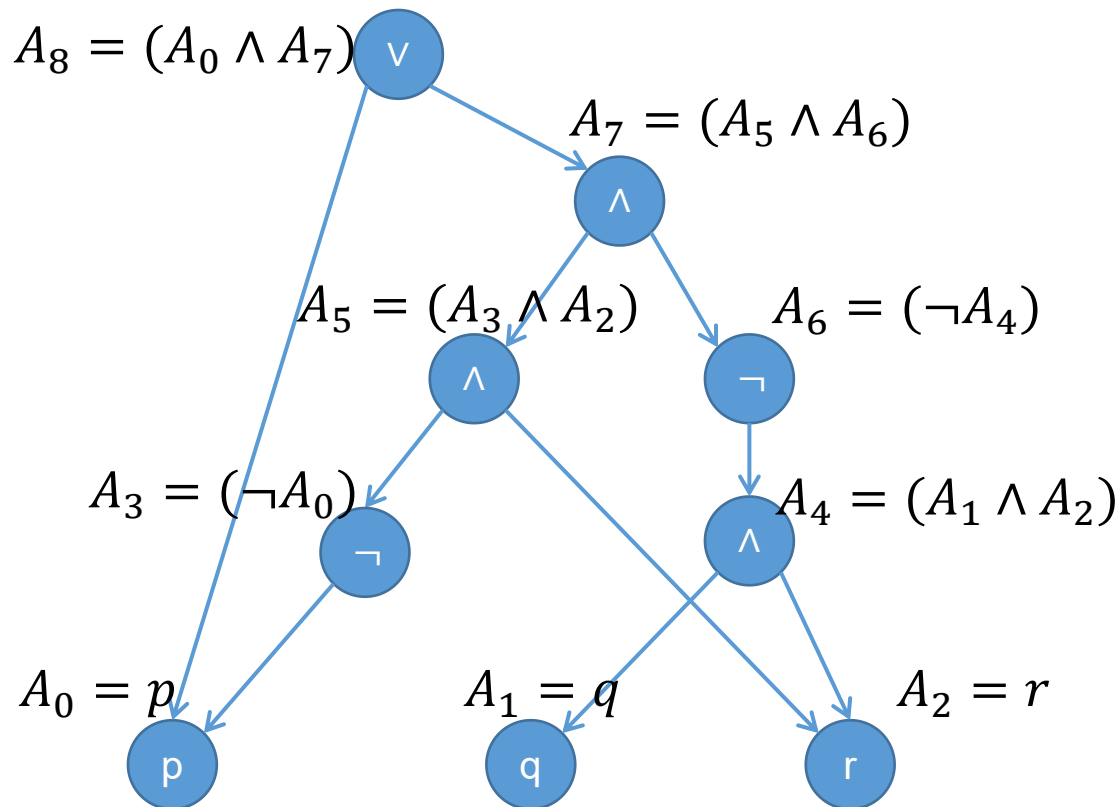
是 $(A * B)$ 的构造序列, 因此 $(A * B) \in PROP'$ 。

所以 $PROP'$ 也满足条件 (i)~(iii), 故 $PROP \subseteq PROP'$ 。



结构归纳

- 每个命题都有构造过程，但是不一定唯一。
- 例， $A = (p \vee (((\neg p) \wedge r) \wedge (\neg(q \wedge r)))) = A_8$ 。





结构归纳

- 每个命题都有构造过程，但是不一定唯一。
- 若 A_0, A_1, \dots, A_n 为 A 的最短构造序列，
则称 n 为 A 的**构造长度**。
- 上述归纳证明被称为对命题公式的生成过程的结构作归纳，
简称对命题公式的结构作归纳。



公式的结构

引理1.15.

在命题公式的任意非空真初始段中，左括号出现的次数大于右括号。

在命题公式的任意非空真结尾段中，右括号出现的次数大于左括号。

命题公式的非空真初始段和真结尾段都不是命题公式。



例， $U = VW$

$$A = (p \vee (((\neg p) \wedge r) \wedge (\neg(q \wedge r)))).$$



公式的结构

定理1.16. 命题逻辑公式恰好具有以下五种形式之一：

原子公式， $(\neg A)$ ， $(A \wedge B)$ ， $(A \vee B)$ ，或 $(A \rightarrow B)$ ；

并且公式所具有的那种形式是唯一的。



公式的结构

定理1.16. 命题逻辑公式恰好具有以下五种形式之一：

原子公式， $(\neg A)$ ， $(A \wedge B)$ ， $(A \vee B)$ ，或 $(A \rightarrow B)$ ；

并且公式所具有的那种形式是唯一的。

- 例，设 $A = (((\neg p) \vee (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \wedge r))$
属于上述哪一种形式？



公式的结构

定理1.16. 命题逻辑公式恰好具有以下五种形式之一：

原子公式， $(\neg A)$ ， $(A \wedge B)$ ， $(A \vee B)$ ，或 $(A \rightarrow B)$ ；

并且公式所具有的那种形式是唯一的。

- 例，设 $A = \underbrace{(((\neg p) \vee (q \rightarrow r))}_{B} \rightarrow \underbrace{(p \wedge r))}_{C}$ $A = (B \rightarrow C)$ ✓



公式的结构

定理1.16. 命题逻辑公式恰好具有以下五种形式之一：

原子公式， $(\neg A)$ ， $(A \wedge B)$ ， $(A \vee B)$ ，或 $(A \rightarrow B)$ ；

并且公式所具有的那种形式是唯一的。

- 例，设 $A = \underbrace{((\neg p) \vee (q \rightarrow r))}_B \rightarrow \underbrace{(p \wedge r)}_C$ $A = (B \rightarrow C)$ ✓

$$A = \underbrace{((\neg p) \vee (q \rightarrow r))}_B \rightarrow \underbrace{(p \wedge r)}_C \quad A = (B \vee C) \quad ?$$



公式的结构

定理1.16. 命题逻辑公式恰好具有以下五种形式之一：

原子公式， $(\neg A)$ ， $(A \wedge B)$ ， $(A \vee B)$ ，或 $(A \rightarrow B)$ ；

并且公式所具有的那种形式是唯一的。

- 例，设 $A = \underbrace{((\neg p) \vee (q \rightarrow r))}_B \rightarrow \underbrace{(p \wedge r)}_C$ $A = (B \rightarrow C)$ ✓

$$A = \underbrace{((\neg p) \vee (q \rightarrow r))}_B \rightarrow \underbrace{(p \wedge r)}_C \quad A = (B \vee C) \quad \times$$

$$B = ((\neg p), C = (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \wedge r)$$



公式的结构

定理1.16. 命题逻辑公式恰好具有以下五种形式之一：

原子公式， $(\neg A)$ ， $(A \wedge B)$ ， $(A \vee B)$ ，或 $(A \rightarrow B)$ ；

并且公式所具有的那种形式是唯一的。

● 例，设 $A = \underbrace{(((\neg p) \vee (q \rightarrow r))}_{B} \rightarrow \underbrace{(p \wedge r))}_{C}$ $A = (B \rightarrow C)$ ✓

$A = \underbrace{(((\neg p) \vee (q \rightarrow r))}_{B} \rightarrow \underbrace{(p \wedge r))}_{C}$ $A = (B \wedge C)$ ✗

$$B = ((\neg p) \vee (q \rightarrow r)) \rightarrow (p, \quad C = r)$$




公式的结构

定理1.16. 命题逻辑公式恰好具有以下五种形式之一：

原子公式， $(\neg A)$ ， $(A \wedge B)$ ， $(A \vee B)$ ，或 $(A \rightarrow B)$ ；

并且公式所具有的那种形式是唯一的。

- 例，设 $A = \underbrace{((\neg p) \vee (q \rightarrow r))}_B \rightarrow \underbrace{(p \wedge r)}_C$ $A = (B \rightarrow C)$ 

$$A = \underbrace{((\neg p) \vee (q \rightarrow r))}_B \rightarrow \underbrace{(p \wedge r)}_C \quad A = (B \rightarrow C) \quad \text{✗}$$

$$B = ((\neg p) \vee (q, C = r)) \rightarrow (p \wedge r)$$

证明：定理需要证明如下四点：

- (1) 每一个公式所具有的形式包括在五种形式之中。
- (2) 这五种形式中的任两种都不相同。
- (3) 如果 $(\neg A) = (\neg A_1)$ ，则 $A = A_1$ 。
- (4) 如果 $(A * B) = (A_1 *_1 B_1)$ ，则 $A = A_1$ ， $B = B_1$ 。

(1)至多五种，(2)一种不能少
(3)和(4)为证明唯一性。



由定义可得, (1)显然成立。

证(2)

原子公式是单独一个符号, 故与其它形式不同。

假设 $(\neg A)$ 和其它三种形式之一相同, 即存在 B 和 C , 使得

$$(\neg A) = (B * C).$$

那么符号 \neg 是公式 B 的初始段, 根据命题公式的定义, 矛盾。

继续证(2)

假设存在公式 A , B , A_1 和 B_1 , 使得

$$(A \wedge B) = (A_1 \vee B_1).$$

长度相等且依次有
相同符号

那么 A 和 A_1 以同一个符号开始。

假设 $A \neq A_1$, 那么其中一个是另一个的非空真初始段, 非空真初始段不是公式 (引理1.15), 矛盾。

由于 \wedge 与 \vee 不同, 所以 $(A \wedge B) \neq (A_1 \vee B_1)$ 。

其他两个不同的二元联结符号的情形都是类似的。



证(3)

如果 $(\neg A) = (\neg A_1)$, 则 $A = A_1$ 是显然的。

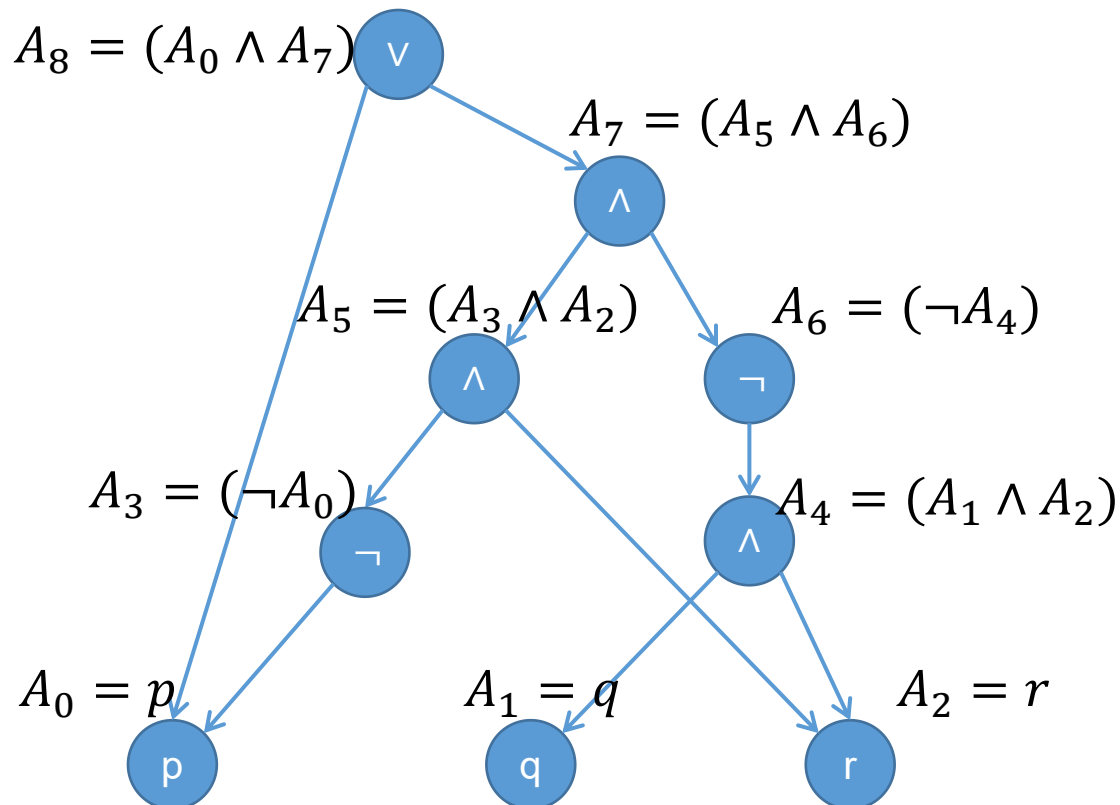
证(4)

如果 $(A * B) = (A_1 * _1 B_1)$, 由(2)的证明可证 $A = A_1$, 那么 $*$ 与 $*_1$ 是同一个符号, 所以自然地, $B = B_1$ 。



公式的结构

- $A \in PROP$ 的构造序列不唯一，但若不考虑其中步骤的顺序，那么公式的生成过程是唯一的。
- 例， $A = (p \vee (((\neg p) \wedge r) \wedge (\neg(q \wedge r)))) = A_8$ 。





辖域

定义1.17（辖域）.

如果 $(\neg A)$ 是C的段，则称A为它左边的 \neg 在C中的**辖域**。

如果 $(A * B)$ 是C的段，则分别称A和B为它们之间的 $*$ 在C中的**左辖域**和**右辖域**。

注：这里的A、B、C都是公式。



辖域

定义1.17（辖域）.

如果 $(\neg A)$ 是 C 的段，则称 A 为它左边的 \neg 在 C 中的**辖域**。

如果 $(A * B)$ 是 C 的段，则分别称 A 和 B 为它们之间的 $*$ 在 C 中的**左辖域**和**右辖域**。

例，设 $A = ((\neg(p \rightarrow q)) \vee (q \wedge (\neg r)))$ 。

第一个 \neg 在 A 中的辖域是 $(p \rightarrow q)$

第二个 \neg 在 A 中的辖域是 r

辖域

定义1.17（辖域）.

如果 $(\neg A)$ 是 C 的段，则称 A 为它左边的 \neg 在 C 中的**辖域**。

如果 $(A * B)$ 是 C 的段，则分别称 A 和 B 为它们之间的 $*$ 在 C 中的**左辖域**和**右辖域**。

例，设 $A = ((\neg(p \rightarrow q)) \vee (q \wedge (\neg r)))$ 。

\rightarrow 的左辖域是 p ，右辖域是 q

\vee 的左辖域是 $(\neg(p \rightarrow q))$ ，右辖域是 $(q \wedge (\neg r))$



辖域

定理1.18. 任何命题公式 A 中的任何 \neg （若存在）有唯一的辖域。任何 A 中的任何 $*$ （若存在）有唯一的左辖域和右辖域。

证明：

A 中任何 \neg 均由 \neg 的形成规则生成，
所以存在某个公式 B 使得 $(\neg B)$ 是 A 的段，
 B 即为此 \neg 在 A 中的辖域。

同理可证 $*$ 存在左辖域和右辖域。



下证辖域的唯一性。

设 \neg 是A中的一个联结符号，假设B和B'都是它在A中的辖域。

那么 $(\neg B)$ 和 $(\neg B')$ 均为A中的段。

由于B和B'左侧的 \neg 是A中的同一个符号，B和B'非空，

那么B与B'以A的同一个符号开始，因此 $B=B'$ （由定理1.16中关于(2)的证明可得）。



下证辖域的唯一性。

设 \neg 是A中的一个联结符号，假设B和B'都是它在A中的辖域。

那么 $(\neg B)$ 和 $(\neg B')$ 均为A中的段。

由于B和B'左侧的 \neg 是A中的同一个符号，B和B'非空，

那么B与B'以A的同一个符号开始，因此 $B=B'$ （由定理1.16中关于(2)的证明可得）。

注意： $(\neg B)$ 和 $(\neg B')$ 中的(和 \neg 都是同一个符号，但是右括号)不一定。



下证左、右辖域的唯一性。

设 $*$ 是 A 中的一个符号，假设 B 和 B' 是它在 A 中的左辖域， C 和 C' 是它在 A 中的右辖域。

那么 $(B * C)$ 和 $(B' * C')$ 都是 A 的段，且 B 、 C 与 B' 、 C' 间的 $*$ 是 A 中的同一个符号。

类似地， B 和 B' 以 A 的同一个符号结尾， C 和 C' 以 A 的同一个符号开始，从而可证 $B=B'$ ， $C=C'$ 。



辖域



推论1.19. 如果公式A是公式B的段，则A中任何联结符号在A中的辖域和它在B中的辖域是相同的。



辖域

推论1.19. 如果A是B的段，则A中任何联结符号在A中的辖域和它在B中的辖域是相同的。

例，设 $B = ((\neg(p \rightarrow q)) \vee (q \wedge (\neg r)))$,

$A = (q \wedge (\neg r))$ 是B的段。

\wedge 在A中的左、右辖域为 q 和 $(\neg r)$ ，在B中的左、右辖域也是 q 和 $(\neg r)$ 。

辖域



推论1.19. 如果公式A是公式B的段，则A中任何联结符号在A中的辖域和它在B中的辖域是相同的。

- 由命题公式生成过程的唯一性，与辖域的唯一性，可证。



公式的结构

定理1.20.

- (i) 如果公式 A 是 $(\neg B)$ 的段, 则 $A = (\neg B)$, 或者 A 是 B 的段。
- (ii) 如果公式 A 是 $(B * C)$ 的段, 则要么 $A = (B * C)$, 或者 A 是 B 或 C 的段。



公式的结构

定理1.20.

- (i) 如果 A 是 $(\neg B)$ 的段, 则 $A = (\neg B)$, 或者 A 是 B 的段。
- (ii) 如果 A 是 $(B * C)$ 的段, 则要么 $A = (B * C)$, 或者 A 是 B 或 C 的段。

例, 设 A 是 $(\neg B) = (\neg(((\neg p) \vee q) \rightarrow r))$ 的段。

若 A 是 $(\neg B)$ 的真段, 则 A 不能含 $(\neg B)$ 的开始左括号, 结尾的右括号, 和 B 左边的 \neg , 否则 A 不是公式。

A 只能为 p , $(\neg p)$, q , $((\neg p) \vee q)$, r 或 $((\neg p) \vee q) \rightarrow r$ 。



公式的结构

定理1.20.

- (i) 如果 A 是 $(\neg B)$ 的段, 则 $A = (\neg B)$, 或者 A 是 B 的段。
- (ii) 如果 A 是 $(B * C)$ 的段, 则要么 $A = (B * C)$, 或者 A 是 B 或 C 的段。

例, 设 A 是 $(B * C) = ((p \wedge (\neg q)) * (\neg r))$ 的段。

若 A 是 $(B * C)$ 的真段, 则 A 不能含 $(B * C)$ 的开始的括号, 结尾的右括号, 和 B 、 C 间的 $*$ 。

任何含这三个符号的 $(B * C)$ 的真段都不是公式。

证明:

要证(i), 只需证明, 若 A 是 $(\neg B)$ 的真段, 则 A 是 B 的段。

设 A 是 $(\neg B)$ 的真段, 即 $(\neg B) = WAW_1$ 。

假设 A 含 $(\neg B)$ 的开始的左括号, 则 A 是 $(\neg B)$ 的真初始段 (即 W 为空表达式), 那么 A 不是公式。

同理, A 也不能含有 $(\neg B)$ 的结尾的右括号。

假设 A 含 $(\neg B)$ 中 B 左侧的 \neg , 则 A 必须含 $(\neg B)$ 的开始的左括号, 那么 A 是 $(\neg B)$ 的真初始段, 矛盾。



现在证(ii), 即证明若 A 是 $(B * C)$ 的真段, 则 A 是 B 的段或是 C 的段。设 A 是 $(B * C)$ 的真段。

假设 A 含 $(B * C)$ 的开始的左括号或结尾的右括号, 证明同(i)。

假设 A 含 $(B * C)$ 的 B 、 C 之间的 $*$, 则由于 A 是公式, 此处的 $*$ 在 A 中有左、右辖域, 令它们分别为 B_1 和 C_1 。

由推论1.19可知, $B = B_1$ 和 $C = C_1$ 。

由辖域的定义1.17, 可知 $(B_1 * C_1) = (B * C)$ 是 A 的段, 矛盾。

□

思考



- 命题逻辑公式的长度不能为2、3或6，但其他长度都是可能的。



思考

- 命题逻辑公式的长度不能为2、3或6，但其他长度都是可能的。
- 设 U 、 V 和 W 是非空的命题表达式，证明 UV 和 VW 不能都是公式。



如何判断是否是公式

- 括号数目不足以判断一个表达式是公式。

➤ 必要非充分

- 例, (p)



如何判断是否是公式

令 U 是一个命题表达式。

- 第一步：空表达式不是公式。
- 第二步：单独一个符号的表达式是公式，当且仅当它是命题符号。
- 第三步：如果 U 长度大于1，则 U 必须以左括号开始，否则 U 不是公式。
- 第四步：
 - 如果 U 的第二个符号是 \neg ，则 U 必须是 $(\neg V)$ ，且 U 是公式当且仅当 V 是公式。
 - “ U 是否是公式”的问题规约为更短的表达式“ V 是否是公式”的问题，然后转入第一步。



如何判断是否是公式

- 第五步：
 - 如果U的第二个符号不是 \neg ，那么对U从左向右扫描，在遇到(V后停止，其中V是一个含左括号与右括号数目相同的表达式。
 - U是公式当且仅当U是 $(V * W)$ 的形式，且V和W均为公式。
 - 如果对U扫描完未发现这样的V，则U不是公式。
 - 因此将“U是否是公式”的问题规约为更短的表达式“V和W是否是公式”的问题，然后转入第一步。



如何判断是否是公式

- 第五步：
 - 如果U的第二个符号不是 \neg ，那么对U从左向右扫描，在遇到(V后停止，其中V是一个含左括号与右括号数目相同的表达式。
 - U是公式当且仅当U是 $(V * W)$ 的形式，且V和W均为公式。
 - 如果对U扫描完未发现这样的V，则U不是公式。
 - 因此将“U是否是公式”的问题规约为更短的表达式“V和W是否是公式”的问题，然后转入第一步。
- 由于表达式长度是有限的，上述过程会在有限步之后结束。



命题公式的简写

- $(p \vee (((\neg p) \wedge r) \wedge (\neg(q \wedge r))))$
- $((((\neg p) \vee (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \wedge r))$
- $((\neg(p \rightarrow q)) \vee (q \wedge (\neg r)))$
- $(\neg(((\neg p) \vee q) \rightarrow r))$
- 括号太多，不方便书写和阅读



命题公式的简写

- 通常省略最外层的括号

$$(((\neg p) \vee (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \wedge r))$$

可写成

$$((\neg p) \vee (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \wedge r)$$

- 辅助符号引入方括号、大括号

$$p \vee (((\neg p) \wedge r) \wedge (\neg(q \wedge r)))$$

可写成

$$p \vee \{[(\neg p) \wedge r] \wedge [\neg(q \wedge r)]\}$$



命题公式的简写

- 约定联结符号的优先级

$\neg \quad \wedge \quad \vee \quad \rightarrow$

$$((\neg p) \vee (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \wedge r)$$

可写成

$$\neg p \vee (q \rightarrow r) \rightarrow (p \wedge r)$$

$$p \vee (((\neg p) \wedge r) \wedge (\neg(q \wedge r)))$$

可写成

$$p \vee (\neg p \wedge r \wedge \neg(q \wedge r))$$



命题公式的简写

注：省略括号是为了方便阅读和书写。过渡省略括号会适得其反。

例如，命题公式

$$p \vee \neg q \wedge r \rightarrow \neg r$$

写成

$$p \vee (\neg q \wedge r) \rightarrow \neg r$$

可能更好。



命题公式的简写

注：省略括号是为了方便阅读和书写。过渡省略括号会适得其反。

当考虑公式的结构时，不能省略括号。



小结

- 命题逻辑表达式

- 命题逻辑公式

- 归纳定义

- 命题逻辑公式的结构

- 结构归纳证明

命题公式的语法