数学分析习题课二（问题）

March 18, 2024

问题 1. 设函数$f(x,y)=x^2+(y-1)\arcsin\sqrt{\dfrac{y}{x}}$，求$f'_x(2,1),f'_y(2,1)$.

问题 2. 设函数$z=(x^2-y^2)\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}$，求$\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

问题 3. 设函数$u=xy\mathrm{e}^{x+y}$，求$\dfrac{\partial^{p+q}u}{\partial x^p\partial y^q}$，其中$p,q$是正整数.

问题 4. 设函数$f(x,y)=|x-y|g(x,y)$，其中函数$g(x,y)$在点$(0,0)$的邻域内连续.
*(1)*当偏导数$f'_x(0,0)$与$f'_y(0,0)$存在时，$g(x,y)$应满足什么条件?
*(2)*在上述条件下，分析函数$f(x,y)$在点$(0,0)$处的可微性.

问题 5. 设二元函数

$$f(x,y)=\begin{cases}(a\sqrt{|x|}+x^2+y^2+b)\frac{\sin(xy^2)}{x^2+y^4}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

请问:
*(1)*当a,b取何值时，函数$f(x,y)$在原点连续.
*(2)*当a,b取何值时，函数$f(x,y)$在原点可微.

问题 6. 设函数$u(x,y)=\varphi(x+y)+\varphi(x-y)+\displaystyle\int_{x-y}^{x+y}\psi(t)\mathrm{d}t$，其中函数$\varphi$具有二阶导数，函数$\psi$具有一阶导数，证明: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

问题 7. 设$u=f(x,y,z),g=(x^2,\mathrm{e}^y,z)=0,y=\sin x$，其中$f,g$都具有一阶连续偏导数，且$\dfrac{\partial g}{\partial z}\neq 0$，求$\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.

问题 8. 设$u=f(x,y,z)$有连续的一阶偏导数，$y=y(x)$由方程$\mathrm{e}^{xy}=xy+2$确定，$z=z(x)$由方程$\mathrm{e}^{x}=\int_0^{x-z}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$确定，求$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.

问题 9. 设函数$u=u(x,y)$具有二阶连续偏导数，且满足方程$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$及条件$u(x,2x)=x, u'_x(x,2x)=x^2$，求$u''_{xx}(x,2x), u''_{xy}(x,2x), u''_{yy}(x,2x)$.

问题 10. 证明方程

$$u''_{xx}+2u''_{xy}\cos x-u''_{yy}\sin^2 x-u'_y\sin x=0$$

经变换

$$\begin{cases}\xi=x-\sin x+y\\ \eta=x+\sin x-y\end{cases}$$

后变为方程$u''_{\xi\eta}=0$.