第 1 章　随机事件与概率

自然界和人类社会存在着各种各样的现象, 有一类现象在一定条件下是必然发生的, 常被称为 **必然现象**, 又称 **确定性现象**. 例如, 太阳从东边升起; 成熟的苹果会从树上掉下来; 在标准大气压下, 水在 0°C 以下会结冰, 加热到 100°C 以上会沸腾; 平面三角形两边之和大于第三边; 等等. 这些现象发生的条件与结果之间具有确定性关系, 可用确切的数学函数进行描述.

在自然界和人类社会还存在着另一类不确定的现象. 例如, 今晚能否观察到夜空中的流星; 随意投掷一枚硬币, 可能正面朝上, 也可能反面朝上; 当你穿过马路时, 遇见的信号灯可能是绿色, 也可能是红色; 两位相恋的人最终能否走在一起; 等等. 这些现象在一定条件下可能出现这种结果, 也可能出现那种结果, 出现的结果并不唯一, 而事先不能确定哪种结果会出现, 被称为 **随机现象**, 这类现象发生的条件与结果之间具有不确定性关系, 无法通过确切的数学函数进行刻画.

随机现象尽管在一次观察中无法确定哪种结果发生, 表现出不确定性或偶然性. 然而经过人们长期的研究后发现: 在大量重复的实验中, 随机现象的结果却表现出固有的规律性, 即 **统计规律性**. 例如多次重复投掷一枚均匀的硬币, 得到的正面朝上的次数和反面朝上的次数几乎总是差不多的. 因此随机现象通常表现出二重属性:

- **偶然性**: 对随机现象进行一次观察, 其结果表现出不确定性;
- **必然性**: 对随机现象进行大量重复观察, 其结果呈现出固有的统计规律性.

概率论与数理统计是研究和揭示随机现象统计规律性的一门学科, 应用几乎遍及所有的科学技术领域、行业生产、国民经济生活等, 如法国著名数学家拉普拉斯 (P. S. Laplace, 1794-1827) 所言: “对生活的大部分, 最重要的问题实际上都是概率问题”. 图灵奖得主 Y. LeCun 在其自传中指出: “历史上大多数重要成果的出现都是偶然事件... 所有的努力都是为了提高概率”. 对于计算机或人工智能专业而言, 概率论与数理统计是一门非常有用的数学学科.

1.1 随机事件及其运算

为研究和揭示随机现象的规律, 通常需要在相同的条件下重复进行一系列实验和观察, 常被称为 **随机试验**, 或简称为 **试验**. 一般用 E 或 E_1, E_2, $E_3, \cdots$ 表示, 本书所提及的试验均是随机试验. 下面给出一些随机试验的例子:

E_1: 随意抛一枚硬币, 观察正面朝上还是反面朝上.

E_2: 随意抛一枚骰子, 观察出现的点数.

E_3: 统计某地区一年内出生的婴儿数量.

E_4: 随机选取一盏电灯, 测试其寿命.

这些试验具有一些共有的特点: 试验在相同的条件下可重复进行, 具有多种结果, 在每次试验之前不确定出现哪一种结果. 例如抛硬币有正面/反面朝上两种结果, 在相同的条件下可以重复进行, 且每次试验前不确定正面/反面朝上. 概括而言, 随机试验具有以下三个特点:

- **可重复**: 在相同的条件下试验可重复进行;
- **多结果**: 试验结果不唯一, 所有可能发生的结果事先明确已知;
- **不确定**: 试验前无法预测或确定哪一种结果会发生.

1.1.1 样本空间与随机事件

随机试验尽管在每次试验前不能确定发生的结果, 但其所有可能发生的结果却是事先已知的. 将随机试验 E 所有可能的结果构成的集合称为试验 E 的 **样本空间**, 记为 Ω. 样本空间 Ω 中的每个元素, 即试验 E 的每种结果, 称为 **样本点**, 记为 ω.

例如前面所述的四种试验, 其样本空间分别为:

试验 E_1 的样本空间为 $\Omega_1 = \{$正面, 反面$\}$, 样本点分别为 ω_1=正面, ω_2=反面.

试验 E_2 的样本空间为 $\Omega_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, 样本点分别为 $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 2$, $\cdots$, $\omega_6 = 6$.

试验 E_3 的样本空间为 $\Omega_3 = \{0, 1, 2, \cdots\}$, 样本点为任意非负整数.

试验 E_4 的样本空间为 $\Omega_4 = \{t\colon t \geqslant 0\}$, 样本点为任意非负数.

包含有限个样本点的样本空间称为 **有限样本空间**, 如样本空间 Ω_1 和 Ω_2. 包含无限但可列多个样本点的样本空间称为 **可列样本空间**, 如样本空间 Ω_3. 有限样本空间和无限可列样本空间统称为 **离散样本空间**. 包含无限不可列个样本点的样本空间称为 **不可列样本空间**, 如样本空间 Ω_4.

在随机试验中, 通常关心具有某些特性的样本点构成的集合, 称之为 **随机事件**, 简称为 **事件**, 一般用大写字母 $A, B, C, \cdots$ 表示. 随机事件的本质是集合, 由单个或某些样本点所构成的集合, 是样本空间 Ω 的子集. 如果随机试验的结果是事件 A 中包含的元素, 则称 **事件 A 发生**.

只包含一样本点的事件称为 **基本事件**. 样本空间 Ω 包含所有样本点, 是其自身的子集, 每次试验必然发生, 因而称 Ω 为 **必然事件**. 另一方面, 如果某事件在每次试验中都不发生, 则该事件不可能包含任何样本点, 用空集符号 $\emptyset$ 表示, 称为 **不可能事件**.

例 1.1 随机试验 E: 抛一枚骰子观察其出现的点数, 其样本空间 $\Omega = \{1, 2, \cdots, 6\}$, 则:

事件 A 表示抛骰子的点数为 2, 则 $A = \{2\}$ 为基本事件;

事件 B 表示抛骰子的点数为偶数, 则 $B = \{2, 4, 6\}$;

事件 C 表示抛骰子的点数大于 7, 则 $C = \emptyset$ 为不可能事件;

事件 D 表示抛骰子的点数小于 7, 则 $D = \Omega$ 为必然事件.

1.1.2 随机事件的关系与运算

随机事件的本质是样本空间的子集, 因此随机事件的关系与运算可类比于集合论的关系与运算. 下面默认随机试验的样本空间为 Ω, 用 A, B, A_i $(i = 1, 2, \cdots)$ 表示样本空间 Ω 中的随机事件.

1) **包含事件** 若事件 A 发生必将导致事件 B 发生, 则称 **B 包含 A**, 记为 $A \subset B$ 或 $B \supset A$.
   若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$, 则称事件 A 与 B **相等**, 记为 $A = B$.

2) **事件的并/和** 若事件 A 和 B 中至少有一个发生所构成的事件称为 **事件 A 与 B 的并** (或 **和**) **事件**, 记为 $A \cup B$, 即
   $$A \cup B = \{\omega \colon \omega \in A \text{ 或 } \omega \in B\}.$$
   类似地, 事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中至少有一个发生所构成的事件称为事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的并事件, 记为
   $$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \{\omega \colon \exists\, i \in [n] \text{ s.t. } \omega \in A_i\} ,$$
   称 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ 为可列个事件 $A_1, A_2, \cdots$ 的并事件.

3) **事件的交/积** 若事件 A 和 B 同时发生所构成的事件称为 **事件 A 与 B 的交** (或 **积**) **事件**, 记为 $A \cap B$ 或 AB, 即
   $$AB = A \cap B = \{\omega \colon \omega \in A \text{ 且 } \omega \in B\} .$$
   类似地, 事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 同时发生所构成的事件称为事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的交事件, 记为
   $$A_1 A_2 \cdots A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = \{\omega \colon \forall i \in [n] \text{ s.t. } \omega \in A_i\} ,$$
   称 $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ 为可列个事件 $A_1, A_2, \cdots$ 的交事件.

4) **事件的差** 若事件 A 发生但事件 B 不发生所构成的事件称为 **事件 A 与 B 的差**, 记 $A - B$,
   $$A - B = A - AB = A\bar{B} = \{\omega \colon \omega \in A \text{ 且 } \omega \notin B\}.$$

5) **对立/逆事件** 对事件 A 而言, 所有不属于事件 A 的基本事件所构成的事件称为 **事件 A 的对立事件** 或 **逆事件**, 记为 $\bar{A}$, 即 $\bar{A} = \Omega - A$. 根据定义可知 $\bar{\bar{A}} = A$, $\bar{A} \cap A = \emptyset$ 和 $\Omega = A \cup \bar{A}$.

6) **互不相容/互斥事件** 若事件 A 和事件 B 不能同时发生, 即 $A \cap B = \emptyset$, 则称事件 A 和 B 是 **互不相容的** 或 **互斥的**.
   若事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中任意两事件不可能同时发生, 即对任意 $i \neq j$ 有 $A_i \cap A_j = \emptyset$ 成立, 则称 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是 **互不相容的** 或 **互斥的**, 类似地定义可列个互不相容的事件. 对立的事件是互不相容的, 但互不相容的事件并不一定是对立事件.

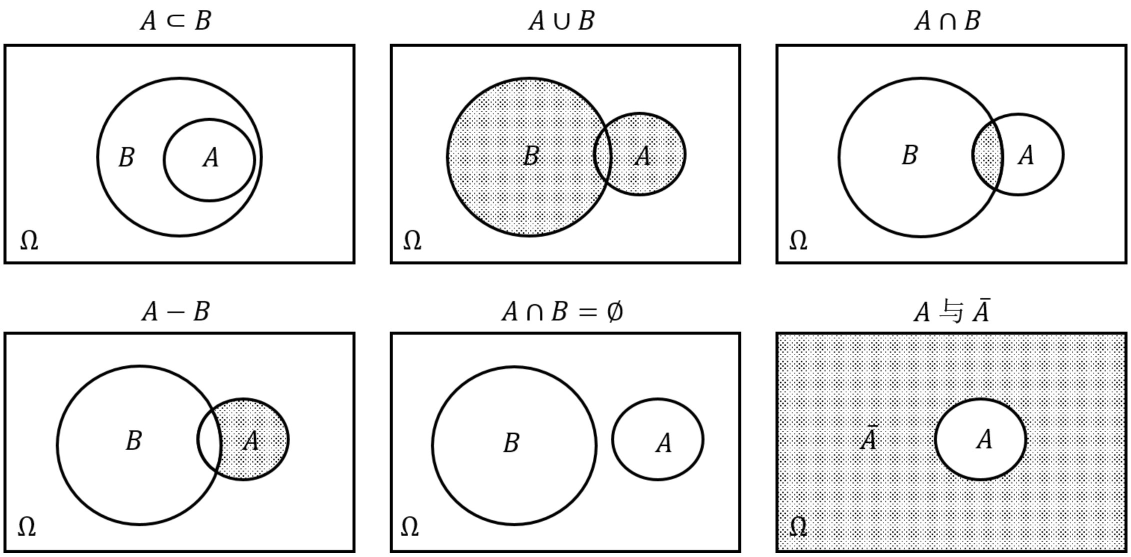

图 1.1 事件关系或运算通过韦恩图表示, $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, $\bar{A}$ 分别为图中阴影部分所示

如图 1.1 所示, 借助集合论的韦恩图 (Venn Diagram) 可直观地表示事件之间的关系或运算. 例如, 在 $A \subset B$ 的图示中, 矩形表示样本空间 Ω, 椭圆 A 和 B 分别表示事件 A 和 B, 椭圆 B 包含椭圆 A 则表示事件 $A \subset B$; 在 $A \cup B$ 的图示中阴影部分表示并事件 $A \cup B$.

根据定义可知道事件还满足下面的规律, 相关证明读者可参考集合的运算规律.

- 交换律: $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$;
- 结合律: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;
- 分配律: $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$, $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$;
- 德摩根 (De Morgen) 律: $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$, $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

上面的四条规律对有限个或可列个事件均成立, 例如对德摩根律有

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}, \qquad \overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}, \qquad \overline{\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i} = \bigcap_{i=1}^{+\infty} \overline{A_i}, \qquad \overline{\bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i} = \bigcup_{i=1}^{+\infty} \overline{A_i}\ .$$

此外, 若事件 $A \subset B$, 有 $AB = A$ 和 $A \cup B = B$ 成立.

例 1.2 设 A, B, C 为三个随机事件, 则有

- 事件 A 与 B 同时发生, 而事件 C 不发生的事件可表示为 $AB\bar{C}$ 或 $AB - C$;
- 这三个事件中至少有一个发生的事件可表示为 $A \cup B \cup C$;
- 这三个事件中恰好有一个发生的事件可表示为 $(A\bar{B}\bar{C}) \cup (\bar{A}B\bar{C}) \cup (\bar{A}\bar{B}C)$;

- 这三个事件中至多有一个发生的事件可表示为 $(A\bar{B}\bar{C})\cup(\bar{A}B\bar{C})\cup(\bar{A}\bar{B}C)\cup(\bar{A}\bar{B}\bar{C})$ 或 $\overline{AB\cup AC\cup BC}$;
- 这三个事件中至少有两个发生的事件可表示为 $AB\cup AC\cup BC$;
- 这三个事件中至多有两个发生的事件可表示为 $\bar{A}\cup\bar{B}\cup\bar{C}$;
- 这三个事件中恰好有两个发生的事件可表示为 $AB\bar{C}\cup AC\bar{B}\cup BC\bar{A}$.

例 1.3 设 A,B,C 为三个随机事件, 证明

$$(\bar{A}\cup B)(A\cup B)(\bar{A}\cup\bar{B})(A\cup\bar{B})=\emptyset \qquad \text{和} \qquad (A-B)\cup(B-C)=(A\cup B)-BC\ .$$

证明 根据事件的分配律有 $(\bar{A}\cup B)(A\cup B)=(A\cap\bar{A})\cup B=B$ 以及 $(\bar{A}\cup\bar{B})(A\cup\bar{B})=\bar{B}$, 由此可得 $(\bar{A}\cup B)(A\cup B)(\bar{A}\cup\bar{B})(A\cup\bar{B})=B\cap\bar{B}=\emptyset$.

根据事件的差 $A-B=A\bar{B}$ 可得 $(A-B)\cup(B-C)=(A\bar{B})\cup(B\bar{C})$. 根据事件的分配律和德摩根律有

$$\begin{aligned}(A\cup B)-BC &= (A\cup B)\overline{BC}=(A\cup B)\cap(\bar{B}\cup\bar{C})\\ &= (A\bar{B})\cup(A\bar{C})\cup(B\bar{B})\cup(B\bar{C})=(A\bar{B})\cup(A\bar{C})\cup(B\bar{C}).\end{aligned}$$

由此可知 $((A-B)\cup(B-C))\subset((A\cup B)-BC)$. 只需进一步证明 $A\bar{C}\subset(A\bar{B})\cup(B\bar{C})$, 对任意 $x\in A\bar{C}$, 有 $x\in A$ 且 $x\in\bar{C}$, 再根据 $x\in B$ 或 $x\in\bar{B}$ 有 $x\in A\bar{B}$ 或 $x\in B\bar{C}$ 成立.

事件的关系与运算可类比于集合的关系与运算, 表 1.1 简要地给出了概率论和集合论之间对应关系, 即概率统计中事件的关系与运算可通过集合的方式进行描述.

表 1.1 概率论与集合论之间相关概念的对应关系

符 号	概 率 论	集 合 论
Ω	必然事件, 样本空间	全集
$\emptyset$	不可能事件	空集
ω	基本事件	元素
A	随机事件	子集
$\bar{A}$	事件 A 的对立事件	集合 A 的补集
$\omega\in A$	事件 A 发生	元素 ω 属于集合 A
$A\subset B$	事件 A 发生导致 B 发生	集合 B 包含集合 A
$A=B$	事件 A 与 B 相等	集合 A 与 B 相等
$A\cup B$	事件 A 与 B 的并	集合 A 与 B 的并集
$A\cap B$	事件 A 与 B 的交	集合 A 与 B 的交集
$A-B$	事件 A 与 B 的差	集合 A 与 B 的差集
$AB=\emptyset$	事件 A 与 B 互不相容	集合 A 与 B 无相同元素