一阶逻辑（四）

结构（复习）

设 $\mathcal{L}$ 为一阶语言，$\mathcal{L}$ 的一个结构 $\mathbb{M}$ 为二元组 (M, I)，这里

(1) M 为非空集，称为**论域**；

(2) I 为 $\mathcal{L}$ 的映射，称为**定义域**，其满足：

(a) $\forall c \in \mathcal{L}_c$，有 $I(c) \in M$；

(b) $\forall f \in \mathcal{L}_f$且$\mu(f) = n > 0$，有 $I(f): M^n \to M$；

(c) $\forall P \in \mathcal{L}_P$且$\mu(P) = 0$，有 $I(P) \in \mathbf{B} = \{\mathrm{T}, \mathrm{F}\}$

(d) $\forall P \in \mathcal{L}_P$且$\mu(P) = n > 0$，有 $I(P) \subseteq M^n$。

赋值与模型（复习）

设 $V=\{x_0,x_1,\ldots,x_n,\ldots|n\in N\}$为一阶语言 $\mathcal{L}$ 的变元集，$\mathbb{M}$ 为一个 $\mathcal{L}$-结构。

(1) 一个 M 上的**赋值** σ 为从 V 到 M 的映射，即 $\sigma: V\to M$；

(2) $\mathcal{L}$ 的一个**模型**为二元组 $(\mathbb{M},\sigma)$，

这里 $\mathbb{M}$ 为 $\mathcal{L}$-结构且 σ 为 M 上的赋值。

项的解释（复习）

设(M,σ)为$\mathcal{L}$-模型，t为项，**项t的解释$t_{M[\sigma]}$**归纳定义如下：

(1) $x_{M[\sigma]} = \sigma(x)$，这里 $x \in V$；

(2) $c_{M[\sigma]} = c_M$，这里 $c \in \mathcal{L}_c$；

(3) $(f(t_1,...,t_n))_{M[\sigma]} = f_M((t_1)_{M[\sigma]},...,(t_n)_{M[\sigma]})$。

公式的解释（复习）

设(M,σ)为一个$\mathcal{L}$-模型，A为公式，**公式A的解释$A_{M[\sigma]}$**归纳定义如下：

$$(1)\ (P(t_1,\ldots,t_n))_{M[\sigma]} = \begin{cases} T, & \langle (t_1)_{M[\sigma]},\ldots,(t_n)_{M[\sigma]}\rangle \in P_M; \\ F, & \langle (t_1)_{M[\sigma]},\ldots,(t_n)_{M[\sigma]}\rangle \notin P_M. \end{cases}$$

$$(2)\ (t_1 \doteq t_2))_{M[\sigma]} = \begin{cases} T, & (t_1)_{M[\sigma]} = (t_2)_{M[\sigma]}; \\ F, & (t_1)_{M[\sigma]} \neq (t_2)_{M[\sigma]}. \end{cases}$$

$$(3)\ (\neg A)_{M[\sigma]} = \mathbf{B}_{\neg}(A_{M[\sigma]}).$$

$$(4)\ (A * B)_{M[\sigma]} = \mathbf{B}_{*}(A_{M[\sigma]}, B_{M[\sigma]}).$$

$$(5)\ (\forall x.A)_{M[\sigma]} = \begin{cases} T, & \text{对}\forall a \in M, A_{M[\sigma[x:=a]]} = T; \\ F, & \quad\text{否则}. \end{cases}$$

$$(6)\ (\exists x.A)_{M[\sigma]} = \begin{cases} T, & \text{若}\exists a \in M, A_{M[\sigma[x:=a]]} = T; \\ F, & \quad\text{否则}. \end{cases}$$

一阶逻辑的语义

引理3.28. 设$\mathcal{L}$为一阶语言，A为$\mathcal{L}$−公式，(M,σ_1)和(M,σ_2)为$\mathcal{L}$-模型。若$\sigma_1|FV(A)=\sigma_2|FV(A)$，则$A_{M[\sigma_1]}=A_{M[\sigma_2]}$。

例，$(\forall x.\,x \doteq y)_{M[\sigma[z:=a]]}=(\forall x.\,x \doteq y)_{M[\sigma]}$

一阶逻辑的语义

引理3.28. 设$\mathcal{L}$为一阶语言，A为$\mathcal{L}$-公式，(M,σ_1)和(M,σ_2)为$\mathcal{L}$-模型。若$\sigma_1|FV(A)=\sigma_2|FV(A)$，则$A_{M[\sigma_1]}=A_{M[\sigma_2]}$。

证明：先对项t的结构作归纳证明

若$\sigma_1|FV(t)=\sigma_2|FV(t)$，则$t_{M[\sigma_1]}=t_{M[\sigma_2]}$。 (*)

归纳基础：t为变元符或常元符时，(*) 显然成立。

归纳假设：对于项 $t_1,...,t_n$，(*) 成立。

归纳步骤：考虑$t=f(t_1,...,t_n)$，若$\sigma_1|FV(t)=\sigma_2|FV(t)$，

一阶逻辑的语义

归纳步骤：考虑$t = f(t_1,\dots,t_n)$，若$\sigma_1|FV(t) = \sigma_2|FV(t)$，

由于$FV(f(t_1,\dots,t_n)) = \bigcup_{i=1}^{n} FV(t_i)$，

所以$\sigma_1|FV(t_i) = \sigma_2|FV(t_i)$。

结合归纳假设，可知$t_{i_{M[\sigma_1]}} = t_{i_{M[\sigma_2]}}$。

$$f(t_1,\dots,t_n)_{M[\sigma_1]} = f_M({t_1}_{M[\sigma_1]},\dots,{t_n}_{M[\sigma_1]})$$

$$= f_M({t_1}_{M[\sigma_2]},\dots,{t_n}_{M[\sigma_2]}) = f(t_1,\dots,t_n)_{M[\sigma_2]}。$$

再对公式A的结构做归纳证明

若$\sigma_1|FV(A) = \sigma_2|FV(A)$，则$A_{M[\sigma_1]} = A_{M[\sigma_2]}$。 (*)

一阶逻辑的语义

归纳基础：已证明对任意的项都有(*)成立。

归纳假设：对于公式B和C，都有(*)成立。

归纳步骤：

情况1：$A = (s \doteq t)$，若 $\sigma_1|FV(A) = \sigma_2|FV(A)$，

由于$FV(s \doteq t) = FV(s) \cup FV(t)$，

所以$\sigma_1|FV(s) = \sigma_2|FV(s)$，$\sigma_1|FV(t) = \sigma_2|FV(t)$。

$$A_{M[\sigma_1]} = (s \doteq t)_{M[\sigma_1]} = \begin{cases} T, & s_{M[\sigma_1]} = t_{M[\sigma_1]} \\ F, & s_{M[\sigma_1]} \neq t_{M[\sigma_1]} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} T, & s_{M[\sigma_2]} = t_{M[\sigma_2]} \\ F, & s_{M[\sigma_2]} \neq t_{M[\sigma_2]} \end{cases} = A_{M[\sigma_2]}$$

一阶逻辑的语义

情况2：$A = P(t_1, \ldots, t_n)$，若 $\sigma_1|FV(A) = \sigma_2|FV(A)$，

由于$FV(P(t_1, \ldots, t_n)) = \bigcup_{i=1}^{n} FV(t_i)$，

所以$\sigma_1|FV(t_i) = \sigma_2|FV(t_i)$。

$$A_{M[\sigma_1]} = \begin{cases} T, & \langle (t_1)_{M[\sigma_1]}, \ldots, (t_n)_{M[\sigma_1]} \rangle \in P_M \\ F, & \langle (t_1)_{M[\sigma_1]}, \ldots, (t_n)_{M[\sigma_1]} \rangle \notin P_M \end{cases}$$

$$= \begin{cases} T, & \langle (t_1)_{M[\sigma_2]}, \ldots, (t_n)_{M[\sigma_2]} \rangle \in P_M \\ F, & \langle (t_1)_{M[\sigma_2]}, \ldots, (t_n)_{M[\sigma_2]} \rangle \notin P_M \end{cases}$$

$= A_{M[\sigma_2]}$。

一阶逻辑的语义

情况3：$A=\neg B$，若 $\sigma_1|FV(A)=\sigma_2|FV(A)$，

由于$FV(\neg B)=FV(B)$，

所以$\sigma_1|FV(B)=\sigma_2|FV(B)$。

$$\begin{aligned}A_{M[\sigma_1]} &= \mathbf{B}_{\neg}(B_{M[\sigma_1]})\\ &= \mathbf{B}_{\neg}(B_{M[\sigma_2]})\text{（归纳假设）}\\ &= A_{M[\sigma_2]}\text{。}\end{aligned}$$

情况4：$A=B*C$，证明略。

一阶逻辑的语义

情况5：$A = \forall x.B$，若 $\sigma_1|FV(A) = \sigma_2|FV(A)$，

由于$FV(\forall x.B) = FV(B) - \{x\}$，

所以$\sigma_1[x:=a]|FV(B) = \sigma_2[x:=a]|FV(B)$，$\forall a \in M$。

$$A_{M[\sigma_1]} = \begin{cases} T, & 对\forall a \in M, B_{M[\sigma_1[x:=a]]} = T \\ F, & 否则 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} T, & 对\forall a \in M, B_{M[\sigma_2[x:=a]]} = T \\ F, & 否则 \end{cases} \quad （归纳假设）$$

$$= A_{M[\sigma_2]}。$$

情况6：$A = \exists x.B$，证明略。 $\square$

可满足（复习）

设$\mathcal{L}$为一阶语言，A为$\mathcal{L}$的公式，Γ为$\mathcal{L}$的公式集，(M,σ) 为$\mathcal{L}$-模型。

(1) A 对于 (M,σ) **可满足**，记为 $M\vDash_\sigma A$，指 $A_{M[\sigma]}=T$；

(2) A **可满足**指存在 (M,σ) 使得 $M\vDash_\sigma A$；

(3) $M\vDash A$ 指对任何 M 上的赋值 σ 都有 $M\vDash_\sigma A$；

(4) Γ 对于 (M,σ) **可满足**，记为 $M\vDash_\sigma \Gamma$ 指对 $\forall A\in\Gamma$，$M\vDash_\sigma A$；

(5) Γ **可满足**指存在 (M,σ) 使得 $M\vDash_\sigma \Gamma$；

(6) $M\vDash\Gamma$ 指对任何 M 上的赋值 σ 都有 $M\vDash_\sigma \Gamma$。

语义结论（复习）

设$\mathcal{L}$为一阶语言，A为$\mathcal{L}$的公式，Γ为$\mathcal{L}$的公式集，(M,σ) 为$\mathcal{L}$-模型。A为Γ的**语义结论**，记为$\Gamma \vDash A$，指对于任何模型(M,σ)，若$M \vDash_{\sigma} \Gamma$，则 $M \vDash_{\sigma} A$。

逻辑等价

定义3.29. 设 $\mathcal{L}$ 为一阶语言，A、B为 $\mathcal{L}$-公式。A 与 B **逻辑等价**，记为$A \simeq B$，指对于任意$\mathcal{L}$-模型(M,σ)，$M \vDash_\sigma A$ 当且仅当 $M \vDash_\sigma B$。

例，$\neg\forall x. A \simeq \exists x. \neg A$

逻辑等价

定义3.29. 设 $\mathcal{L}$ 为一阶语言，A、B为 $\mathcal{L}$-公式。A 与 B **逻辑等价**，记为$A \simeq B$，指对于任意$\mathcal{L}$-模型(M,σ)，$M \vDash_\sigma A$ 当且仅当 $M \vDash_\sigma B$。

例，$\neg \forall x. A \simeq \exists x. \neg A$

$$(\neg \forall x. A)_{M[\sigma]} = \mathbf{B}_\neg((\forall x. A)_{M[\sigma]}) = \begin{cases} F, & \forall a \in M, A_{M[\sigma[x:=a]]} = T \\ T, & \text{否则} \end{cases}$$

$$(\exists x. \neg A)_{M[\sigma]} = \begin{cases} T, & \exists a \in M, (\neg A)_{M[\sigma[x:=a]]} = T \\ F, & \text{否则} \end{cases}$$

等值替换

定理3.30（等值替换）. 设 $\mathcal{L}$ 为一阶语言，A、B和C为$\mathcal{L}$-公式。若 $B \simeq C$ 且在 A 中把 B的某些出现替换为 C 而得到 A'，则 $A \simeq A'$。

项的替换（复习）

设 s 和 t 为项，x 为变元，对 s 的结构作归纳定义 $s\left[\frac{t}{x}\right]$ 如下：

(1) $x\left[\frac{t}{x}\right] = t$；

(2) $y\left[\frac{t}{x}\right] = y$，这里 y 为异于 x 的变元；

(3) $c\left[\frac{t}{x}\right] = c$，这里 c 为常元；

(4) $f(t_1, \ldots, t_n)\left[\frac{t}{x}\right] = f(t_1\left[\frac{t}{x}\right], \ldots, t_n\left[\frac{t}{x}\right])$。

公式的替换（复习）

设 A 为公式，t 为项，x 为变元，对 A 的结构作归纳定义

$A\left[\frac{t}{x}\right]$ 如下：

(1) $(t_1 \doteq t_2)\left[\frac{t}{x}\right] = (t_1\left[\frac{t}{x}\right] \doteq t_2\left[\frac{t}{x}\right])$；

(2) $R(t_1, \ldots, t_n)\left[\frac{t}{x}\right] = R(t_1\left[\frac{t}{x}\right], \ldots, t_n\left[\frac{t}{x}\right])$；

(3) $(\neg A)\left[\frac{t}{x}\right] = (\neg A\left[\frac{t}{x}\right])$；

(4) $(A * B)\left[\frac{t}{x}\right] = (A\left[\frac{t}{x}\right] * B\left[\frac{t}{x}\right])$；

公式的替换（复习）

(5) $(Qx.A)\left[\frac{t}{x}\right] = (Qx.A)$；

(6) $(Qy.A)\left[\frac{t}{x}\right] = (Qy.A\left[\frac{t}{x}\right])$，若 y 为异于 x 的变元且$y \notin FV(t)$；

(7) $(Qy.A)\left[\frac{t}{x}\right] = (Qz.A\left[\frac{z}{y}\right]\left[\frac{t}{x}\right])$，若 y 为异于 x 的变元且$y \in FV(t)$，这里 z 为满足 $z \notin FV(t)$ 且z不出现在A中的足标最小的变元。

替换引理-项

设(M,σ)为一阶语言$\mathcal{L}$的模型，t,s为$\mathcal{L}$-项，A为$\mathcal{L}$-公式。

引理3.31. $(t\left[\frac{s}{x}\right])_{M[\sigma]} = t_{M[\sigma[x:=s_{M[\sigma]}]]}$。

例，$(S(x+y)\left[\frac{s}{x}\right])_{M[\sigma]} = S(s+y)_{M[\sigma]} = s_{M[\sigma]} + \sigma(y) + 1$

$S(x+y)_{M[\sigma[x:=s_{M[\sigma]}]]}$

$= \sigma[x:=s_{M[\sigma]}](x) + \sigma[x:=s_{M[\sigma]}](y) + 1$

$= s_{M[\sigma]} + \sigma(y) + 1$

替换引理-项

设(M,σ)为一阶语言$\mathcal{L}$的模型，t,s为$\mathcal{L}$-项，A为$\mathcal{L}$-公式。

引理3.31. $(t\left[\frac{s}{x}\right])_{M[\sigma]} = t_{M[\sigma[x:=s_{M[\sigma]}]]}$。

项t的解释$t_{M[\sigma]}$归纳定义如下：

(1) $x_{M[\sigma]} = \sigma(x)$，这里 $x \in V$；

(2) $c_{M[\sigma]} = c_M$，这里 $c \in \mathcal{L}_c$；

(3) $(f(t_1,\ldots,t_n))_{M[\sigma]} = f_M((t_1)_{M[\sigma]},\ldots,(t_n)_{M[\sigma]})$。

替换引理-项

证：对项的结构作归纳证明$(t\left[\frac{s}{x}\right])_{M[\sigma]} = t_{M[\sigma[x:=s_{M[\sigma]}]]}$。

t	$(t\left[\frac{s}{x}\right])_{M[\sigma]}$	$t_{M[\sigma[x:=s_{M[\sigma]}]]}$
x	$s_{M[\sigma]}$	$s_{M[\sigma]}$
$y(\neq x)$		
c		
$f(u)$		
$f(t_1,...,t_n)$		

(1) $x_{M[\sigma]} = \sigma(x)$，这里 $x \in V$；

(2) $c_{M[\sigma]} = c_M$，这里 $c \in \mathcal{L}_c$；

(3) $(f(t_1,...,t_n))_{M[\sigma]} = f_M((t_1)_{M[\sigma]},...,(t_n)_{M[\sigma]})$。

替换引理-项

证：对项的结构作归纳证明$(t\left[\frac{s}{x}\right])_{M[\sigma]} = t_{M[\sigma[x:=s_{M[\sigma]}]]}$。

t	$(t\left[\frac{s}{x}\right])_{M[\sigma]}$	$t_{M[\sigma[x:=s_{M[\sigma]}]]}$
x	$s_{M[\sigma]}$	$s_{M[\sigma]}$
$y(\neq x)$	$\sigma(y)$	$\sigma(y)$
c		
$f(u)$		
$f(t_1, \ldots, t_n)$		

(1) $x_{M[\sigma]} = \sigma(x)$，这里 $x \in V$；

(2) $c_{M[\sigma]} = c_M$，这里 $c \in \mathcal{L}_c$；

(3) $(f(t_1, \ldots, t_n))_{M[\sigma]} = f_M((t_1)_{M[\sigma]}, \ldots, (t_n)_{M[\sigma]})$。

替换引理-项

证：对项的结构作归纳证明$(t\left[\frac{s}{x}\right])_{M[\sigma]} = t_{M[\sigma[x:=s_{M[\sigma]}]]}$。

t	$(t\left[\frac{s}{x}\right])_{M[\sigma]}$	$t_{M[\sigma[x:=s_{M[\sigma]}]]}$
x	$s_{M[\sigma]}$	$s_{M[\sigma]}$
$y(\neq x)$	$\sigma(y)$	$\sigma(y)$
c	c_M	c_M
$f(u)$		
$f(t_1,\ldots,t_n)$		

(2) $c_{M[\sigma]} = c_M$，这里 $c \in \mathcal{L}_c$；

(3) $(f(t_1,\ldots,t_n))_{M[\sigma]} = f_M((t_1)_{M[\sigma]},\ldots,(t_n)_{M[\sigma]})$。

替换引理-项

(4) $f(t_1,\ldots,t_n)\left[\frac{t}{x}\right] = f(t_1\left[\frac{t}{x}\right],\ldots,t_n\left[\frac{t}{x}\right])$。

证：对项的结构作归纳证明$(t\left[\frac{s}{x}\right])_{M[\sigma]} = t_{M[\sigma[x:=s_{M[\sigma]}]]}$。

t	$(t\left[\frac{s}{x}\right])_{M[\sigma]}$	$t_{M[\sigma[x:=s_{M[\sigma]}]]}$
x	$s_{M[\sigma]}$	$s_{M[\sigma]}$
$y(\neq x)$	$\sigma(y)$	$\sigma(y)$
c	c_M	c_M
$f(u)$	$(f(u)\left[\frac{s}{x}\right])_{M[\sigma]}$ $= f_M((u\left[\frac{s}{x}\right])_{M[\sigma]})$ $= f_M(u_{M[\sigma[x:=s_{M[\sigma]}]]})$	
$f(t_1,\ldots,t_n)$		

(3) $(f(t_1,\ldots,t_n))_{M[\sigma]} = f_M((t_1)_{M[\sigma]},\ldots,(t_n)_{M[\sigma]})$。

替换引理-项

(4) $f(t_1,\ldots,t_n)\left[\frac{t}{x}\right] = f(t_1\left[\frac{t}{x}\right],\ldots,t_n\left[\frac{t}{x}\right])$。

证：对项的结构作归纳证明$(t\left[\frac{s}{x}\right])_{M[\sigma]} = t_{M[\sigma[x:=s_{M[\sigma]}]]}$。

t	$(t\left[\frac{s}{x}\right])_{M[\sigma]}$	$t_{M[\sigma[x:=s_{M[\sigma]}]]}$
x	$s_{M[\sigma]}$	$s_{M[\sigma]}$
$y(\neq x)$	$\sigma(y)$	$\sigma(y)$
c	c_M	c_M
$f(u)$ 归纳假设	$(f(u)\left[\frac{s}{x}\right])_{M[\sigma]}$ $= f_M((u\left[\frac{s}{x}\right])_{M[\sigma]})$ $= f_M(u_{M[\sigma[x:=s_{M[\sigma]}]]})$	$f(u)_{M[\sigma[x:=s_{M[\sigma]}]]}$ $= f_M(u_{M[\sigma[x:=s_{M[\sigma]}]]})$
$f(t_1,\ldots,t_n)$		

(3) $(f(t_1,\ldots,t_n))_{M[\sigma]} = f_M((t_1)_{M[\sigma]},\ldots,(t_n)_{M[\sigma]})$。

替换引理-项

(4) $f(t_1,\ldots,t_n)\left[\frac{t}{x}\right] = f(t_1\left[\frac{t}{x}\right],\ldots,t_n\left[\frac{t}{x}\right])$。

证：对项的结构作归纳证明$(t\left[\frac{s}{x}\right])_{M[\sigma]} = t_{M[\sigma[x:=s_{M[\sigma]}]]}$。

t	$(t\left[\frac{s}{x}\right])_{M[\sigma]}$	$t_{M[\sigma[x:=s_{M[\sigma]}]]}$
x	$s_{M[\sigma]}$	$s_{M[\sigma]}$
$y(\neq x)$	$\sigma(y)$	$\sigma(y)$
c	c_M	c_M
$f(u)$ 归纳假设	$(f(u)\left[\frac{s}{x}\right])_{M[\sigma]}$ $= f_M((u\left[\frac{s}{x}\right])_{M[\sigma]})$ $= f_M(u_{M[\sigma[x:=s_{M[\sigma]}]]})$	$f(u)_{M[\sigma[x:=s_{M[\sigma]}]]}$ $= f_M(u_{M[\sigma[x:=s_{M[\sigma]}]]})$
$f(t_1,\ldots,t_n)$	同理	

(3) $(f(t_1,\ldots,t_n))_{M[\sigma]} = f_M((t_1)_{M[\sigma]},\ldots,(t_n)_{M[\sigma]})$。

替换引理-公式

引理3.32. $(A\left[\frac{t}{x}\right])_{M[\sigma]} = A_{M[\sigma[x:=t_{M[\sigma]}]]}$。

证明：令$\rho = \sigma[x: = t_{M[\sigma]}]$，

欲证$(A\left[\frac{t}{x}\right])_{M[\sigma]} = A_{M[\rho]}$，

替换引理-公式

引理3.32. $(A\left[\frac{t}{x}\right])_{M[\sigma]} = A_{M[\sigma[x:=t_{M[\sigma]}]]}$。

证明：令$\rho = \sigma[x: = t_{M[\sigma]}]$，

欲证$(A\left[\frac{t}{x}\right])_{M[\sigma]} = A_{M[\rho]}$，

$A_{M[\sigma]}, A_{M[\rho]} \in \{T, F\}$，
同真同假。

只需证 (*) $M \vDash_{\sigma} A\left[\frac{t}{x}\right]$当且仅当$M \vDash_{\rho} A$。

下面对A的结构作归纳证明(*)。

替换引理-公式

当A为原子公式时，

情况1：A为$u \doteq v$，u, v为项。

$$M \vDash_{\sigma} A\left[\frac{t}{x}\right] \text{ iff } M \vDash_{\sigma} u\left[\frac{t}{x}\right] \doteq v\left[\frac{t}{x}\right]$$

替换引理-公式

当A为原子公式时，

情况1：A为$u \doteq v$，u, v为项。

$$M \vDash_\sigma A\left[\frac{t}{x}\right] \text{ iff } M \vDash_\sigma u\left[\frac{t}{x}\right] \doteq v\left[\frac{t}{x}\right]$$

$$(t_1 \doteq t_2)\left[\frac{t}{x}\right] = \left(t_1\left[\frac{t}{x}\right] \doteq t_2\left[\frac{t}{x}\right]\right);$$

替换引理-公式

当A为原子公式时，

情况1：A为$u \doteq v$，u, v为项。

$$(t_1 \doteq t_2)\left[\frac{t}{x}\right] = (t_1\left[\frac{t}{x}\right] \doteq t_2\left[\frac{t}{x}\right]);$$

$$M \vDash_\sigma A\left[\frac{t}{x}\right] \text{ iff } M \vDash_\sigma u\left[\frac{t}{x}\right] \doteq v\left[\frac{t}{x}\right]$$

$$\text{iff } (u\left[\frac{t}{x}\right])_{M[\sigma]} = (v\left[\frac{t}{x}\right])_{M[\sigma]}$$（公式的解释）

$$\text{iff } u_{M[\sigma[x:=t_{M[\sigma]}]]} = v_{M[\sigma[x:=t_{M[\sigma]}]]}$$（引理3.31）

$$\text{iff } u_{M[\rho]} = v_{M[\rho]}$$

$$\text{iff } M \vDash_\rho u \doteq v \text{ iff } M \vDash_\rho A$$。

替换引理-公式

情况2：A为$P(t_1,\ldots,t_n)$。

$$P(t_1,\ldots,t_n)\left[\frac{t}{x}\right]=P\left(t_1\left[\frac{t}{x}\right],\ldots,t_n\left[\frac{t}{x}\right]\right);$$

$$M\vDash_\sigma A\left[\frac{t}{x}\right] \text{ iff } M\vDash_\sigma P\left(t_1\left[\frac{t}{x}\right],\ldots,t_n\left[\frac{t}{x}\right]\right)$$

替换引理-公式

情况2：A为$P(t_1,\ldots,t_n)$。

$P(t_1,\ldots,t_n)\left[\frac{t}{x}\right]=P(t_1\left[\frac{t}{x}\right],\ldots,t_n\left[\frac{t}{x}\right])$；

$M\vDash_\sigma A\left[\frac{t}{x}\right]$ iff $M\vDash_\sigma P(t_1\left[\frac{t}{x}\right],\ldots,t_n\left[\frac{t}{x}\right])$

iff $\langle(t_1\left[\frac{t}{x}\right])_{M[\sigma]},\ldots,(t_n\left[\frac{t}{x}\right])_{M[\sigma]}\rangle\in P_M$（公式的解释）

iff $\langle(t_1)_{M[\rho]},\ldots,(t_n)_{M[\rho]}\rangle\in P_M$（引理3.31）

iff $M\vDash_\rho P(t_1,\ldots,t_n)$ iff $M\vDash_\rho A$。

替换引理-公式

当A为复合公式时，

情况3：A为$\neg B$。

$$M \vDash_{\sigma} A\left[\frac{t}{x}\right] \text{ iff } M \vDash_{\sigma} \neg B\left[\frac{t}{x}\right]$$

替换引理-公式

当A为复合公式时，

情况3：A为$\neg B$。

$$M \vDash_{\sigma} A\left[\frac{t}{x}\right] \text{ iff } M \vDash_{\sigma} \neg B\left[\frac{t}{x}\right]$$

$$(\neg A)\left[\frac{t}{x}\right] = \left(\neg A\left[\frac{t}{x}\right]\right);$$

替换引理-公式

当A为复合公式时，

情况3：A为$\neg B$。

$$(\neg A)\left[\frac{t}{x}\right] = (\neg A\left[\frac{t}{x}\right]);$$

$$M \vDash_{\sigma} A\left[\frac{t}{x}\right] \text{ iff } M \vDash_{\sigma} \neg B\left[\frac{t}{x}\right]$$

$\text{iff } (B\left[\frac{t}{x}\right])_{M[\sigma]} = F$（公式的解释）

$\text{iff } B_{M[\rho]} = F$（归纳假设）

$\text{iff } (\neg B)_{M[\rho]} = T$

$\text{iff } M \vDash_{\rho} \neg B \text{ iff } M \vDash_{\rho} A$。

替换引理-公式

情况4：A为$B \wedge C$。

$$M \vDash_\sigma A\left[\frac{t}{x}\right] \text{ iff } M \vDash_\sigma \left(B\left[\frac{t}{x}\right]\right) \wedge \left(C\left[\frac{t}{x}\right]\right)$$

$$\boxed{(A * B)\left[\frac{t}{x}\right] = \left(A\left[\frac{t}{x}\right] * B\left[\frac{t}{x}\right]\right);}$$

替换引理-公式

情况4：A为$B \wedge C$。

$M \vDash_\sigma A\left[\frac{t}{x}\right]$ iff $M \vDash_\sigma (B\left[\frac{t}{x}\right]) \wedge (C\left[\frac{t}{x}\right])$

$(A * B)\left[\frac{t}{x}\right] = (A\left[\frac{t}{x}\right] * B\left[\frac{t}{x}\right])$;

iff $M \vDash_\sigma B\left[\frac{t}{x}\right]$ 且 $M \vDash_\sigma C\left[\frac{t}{x}\right]$（公式的解释）

替换引理-公式

情况4：A为$B \wedge C$。

$M \vDash_\sigma A\left[\frac{t}{x}\right]$ iff $M \vDash_\sigma (B\left[\frac{t}{x}\right]) \wedge (C\left[\frac{t}{x}\right])$

$\boxed{(A * B)\left[\frac{t}{x}\right] = (A\left[\frac{t}{x}\right] * B\left[\frac{t}{x}\right]);}$

iff $M \vDash_\sigma B\left[\frac{t}{x}\right]$ 且 $M \vDash_\sigma C\left[\frac{t}{x}\right]$（公式的解释）

iff $M \vDash_\rho B$ 且 $M \vDash_\rho C$（归纳假设）

iff $M \vDash_\rho B \wedge C$

iff $M \vDash_\rho A$。

情况5：A为$B \vee C$，$B \to C$，同理可证。

替换引理-公式

情况6：A为∀y. B。

子情况6.1 $y = x$：

有$\forall a \in M$，$\sigma[x:=a] = \rho[x:=a]$。

替换引理-公式

情况6：A为∀y. B。

子情况6.1 $y = x$：

有$\forall a \in M$，$\sigma[x := a] = \rho[x := a]$。

$M \vDash_\sigma A\left[\frac{t}{x}\right]$ iff $M \vDash_\sigma \forall x. B$

$(Qx. A)\left[\frac{t}{x}\right] = Qx. A$；

iff $(\forall x. B)_{M[\sigma]} = T$

iff $B_{M[\sigma[x:=a]]} = T$ 对 $\forall a \in M$ 成立（公式的解释）

iff $B_{M[\rho[x:=a]]} = T$ 对 $\forall a \in M$ 成立

iff $M \vDash_\rho \forall x. B$ iff $M \vDash_\rho A$。

替换引理-公式

子情况6.2 $y \neq x$且$y \notin FV(t)$：

$$(Qy.A)\left[\frac{t}{x}\right] = Qy.A\left[\frac{t}{x}\right];$$

$$M \vDash_\sigma A\left[\frac{t}{x}\right] \text{ iff } M \vDash_\sigma (\forall \mathrm{y}.B)\left[\frac{t}{x}\right] \text{ iff } M \vDash_\sigma \forall \mathrm{y}.\left(B\left[\frac{t}{x}\right]\right)$$

替换引理-公式

子情况6.2 $y \neq x$且$y \notin FV(t)$：

$(Qy.A)\left[\frac{t}{x}\right] = Qy.A\left[\frac{t}{x}\right]$；

$M \vDash_\sigma A\left[\frac{t}{x}\right]$ iff $M \vDash_\sigma (\forall y.B)\left[\frac{t}{x}\right]$ iff $M \vDash_\sigma \forall y.(B\left[\frac{t}{x}\right])$

iff $(B\left[\frac{t}{x}\right])_{M[\sigma[y:=a]]} = T$ 对 $\forall a \in M$ 成立（公式的解释）

iff $B_{M[\sigma[y:=a][x:=t_{M[\sigma[y:=a]]}]]} = T$ ...（归纳假设）

iff $B_{M[\sigma[y:=a][x:=t_{M[\sigma]}]]} = T$ ...（$y \notin FV(t)$、引理3.28）

iff $B_{M[\sigma[x:=t_{M[\sigma]}][y:=a]]} = T$ ...（$y \neq x$）

iff $B_{M[\rho[y:=a]]} = T$ ...

iff $M \vDash_\rho \forall y.B$ iff $M \vDash_\rho A$。

替换引理-公式

子情况6.3 $y \neq x$且$y \in FV(t)$：设z为新变元，

$$M \vDash_\sigma A\left[\frac{t}{x}\right] \text{ iff } M \vDash_\sigma \forall \mathrm{z}. B\left[\frac{z}{y}\right]\left[\frac{t}{x}\right]$$

$$\boxed{(Qy.A)\left[\frac{t}{x}\right] = (Qz.A\left[\frac{z}{y}\right]\left[\frac{t}{x}\right])\text{；}}$$

替换引理-公式

子情况6.3 $y \neq x$且$y \in FV(t)$：设z为新变元，

$$M \vDash_\sigma A\left[\frac{t}{x}\right] \text{ iff } M \vDash_\sigma \forall z. B\left[\frac{z}{y}\right]\left[\frac{t}{x}\right]$$

$$(Qy.A)\left[\frac{t}{x}\right] = (Qz.A\left[\frac{z}{y}\right]\left[\frac{t}{x}\right]);$$

$$\text{iff } M \vDash_\rho \forall z. B\left[\frac{z}{y}\right]$$（$z \neq x$且$z \notin FV(t)$，子情况6.2）

替换引理-公式

子情况6.3 $y \neq x$且$y \in FV(t)$：设z为新变元，

$(Qy.A)\left[\frac{t}{x}\right] = (Qz.A\left[\frac{z}{y}\right]\left[\frac{t}{x}\right])$；

$M \vDash_\sigma A\left[\frac{t}{x}\right]$ iff $M \vDash_\sigma \forall z.B\left[\frac{z}{y}\right]\left[\frac{t}{x}\right]$

iff $M \vDash_\rho \forall z.B\left[\frac{z}{y}\right]$（$z \neq x$且$z \notin FV(t)$，子情况6.2）

iff $M \vDash_{\rho[z:=a]} B\left[\frac{z}{y}\right]$ 对 $\forall a \in M$ 成立（公式的解释）

iff $M \vDash_{\rho[z:=a][y:=z_{M[\rho[z:=a]]}]} B$ 对 $\forall a \in M$ 成立（归纳假设）

iff $M \vDash_{\rho[z:=a][y:=a]} B$ 对 $\forall a \in M$ 成立

iff $M \vDash_{\rho[y:=a]} B$ 对 $\forall a \in M$ 成立（$z \notin FV(B)$, 引理3.28）

iff $M \vDash_\rho \forall y.B$ iff $M \vDash_\rho A$。

替换引理-公式

情况7：A为$\exists y.B$，同理可证。

$\square$

替换引理-公式

证明：对任何公式A，有 $\vDash \forall x. A \leftrightarrow A\left[\frac{t}{x}\right]$。

证：反证法。假设 $\exists(M,\sigma)$ s.t. $(\forall x. A \leftrightarrow A\left[\frac{t}{x}\right])_{M[\sigma]} = F$。

情况1 $(\forall x. A)_{M[\sigma]} = T, (A\left[\frac{t}{x}\right])_{M[\sigma]} = F$：

即$\forall a \in M, A_{M[\sigma[x:=a]]} = T, A_{M[\sigma[x:=t_{M[\sigma]}]]} = F$，

当$a = t_{M[\sigma]}$时，矛盾。

情况2 $(\forall x. A)_{M[\sigma]} = F, (\forall y. A\left[\frac{y}{x}\right])_{M[\sigma]} = T$，同理可证。