课堂练习

1.给出二次型 $f(x_1,x_2,\dots,x_n)=x_1^2-x_2^2+5x_2x_3+2x_3^2+4x_4^2$ 的矩阵A

2.证明: 若A_1与B_1合同，A_2与B_2合同，则$\begin{pmatrix}A_1 & 0\\ 0 & A_2\end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix}B_1 & 0\\ 0 & B_2\end{pmatrix}$合同

3.证明: 设A是n阶可逆实对称矩阵，且A与$-A$合同，则n必为偶数

4.证明: 单位矩阵E与$-E$在实数域上不合同

1.给出二次型 $f(x_1,x_2,\dots,x_n)=x_1^2-x_2^2+5x_2x_3+2x_3^2+4x_4^2$ 的矩阵A

解:

$$\begin{vmatrix} x_1^2 & x_1x_2 & x_1x_3 & x_1x_4 \\ & x_2^2 & x_2x_3 & x_2x_4 \\ & & x_3^2 & x_3x_4 \\ & & & x_4^2 \end{vmatrix} \Rightarrow A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

2.证明: 若A_1与B_1合同，A_2与B_2合同，则$\begin{pmatrix}A_1 & 0\\ 0 & A_2\end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix}B_1 & 0\\ 0 & B_2\end{pmatrix}$合同

证: A_1与B_1合同 $\Rightarrow$ $\exists\ C_1$ $\quad A_1=C_1^TB_1C_1$

同理 $\exists\ C_2$ $\quad A_2=C_2^TB_2C_2$.

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} C_1^T & 0 \\ 0 & C_2^T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} C_1^TBC_1 & 0 \\ 0 & C_2^TB_2C_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

即证.

3.证明: 设A是n阶可逆实对称矩阵，且A与$-A$合同，则n必为偶数

证: 若A与$-A$合同 $\Rightarrow$ $\exists B$ $-A = B^T \cdot A \cdot B$

两边取行列式 $(-1)^n \cdot |A| = |B^T \cdot A \cdot B|$

$$= |A| \cdot |B^T| \cdot |B|$$

$$= |A| \cdot |B|^2$$

又 $|A| \neq 0$ $|B| \neq 0$ 且 $|B|^2 > 0$.

$\Rightarrow$ $(-1)^n > 0$ $\Rightarrow$ n为偶数.

4.证明: 单位矩阵E与$-E$在实数域上不合同

证: 若E与$-E$合同, $\exists A$. st

$$-E = A^T \cdot E \cdot A \qquad \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

设 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & & \\ a_{n1} & \cdots & & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$. $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & & & \\ \cdot & & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$

则 $RHS = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & & & \\ a_{1n} & \cdots & & a_{nn} \end{bmatrix}$

$$= -E = \begin{bmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -1 \end{bmatrix}$$

其中 对角线元素为 $-1 = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}^2$ 不可能

$\Rightarrow$ E, $-E$ 一定不合同（实数域上）.