1、考试范围：课件 1~11，其中一阶逻辑不可判定性和哥德尔不完全性定理不考，哥德尔码、Hintikka 集、Henkin 集的定义不需要记。

2、考试题型：与期中考试类似，80%~90%题目的题型与作业、课上的问题相同。

3、命题逻辑与一阶逻辑的占比约为 3:7。

1、试用一阶语言表示“一个人不能在所有的时刻欺骗所有的人。”

答案：

定义谓词 $P(x,y,z)$ 表示“x 能在 y 时刻欺骗 z”，谓词 $H(x)$ 表示“x 是人”，谓词 $T(x)$表示“x 是时刻”。则可以表示为：

$$H(x) \to \neg(\forall t. \forall y. (T(t) \land H(y) \to P(x,t,y))).$$

2、定义初等算术语言$\mathcal{A}$为带等词的一阶逻辑语言，其常元符集为$\{0\}$，函数符集为$\{S, +, \cdot\}$，谓词符集为$\{<\}$。定义$\mathcal{A}$上的结构$\mathbb{N} = (\mathrm{N}, \mathrm{I})$，其中N为自然数集，$\mathrm{I}(0) = 0$，$\mathrm{I}(\mathrm{S})$为后继函数，$\mathrm{I}(+)$为加法，$\mathrm{I}(\cdot)$为乘法，$\mathrm{I}(<)$为小于关系，称$\mathbb{N}$为初等算术的标准模型。试用初等算术语言，并基于它的标准模型的解释，来表示如下自然语言的句子：

（1）“1+1=2”。

（2）“对于所有自然数，有大于它的素数”。

答案：

（1）$+(\mathrm{S}(0), \mathrm{S}(0)) \doteq \mathrm{S}(\mathrm{S}(0))$

（2）$\forall x. \exists y. ((x < y) \land (\forall u. \forall v. (\neg(u \doteq \mathrm{S}(0)) \land \neg(v \doteq \mathrm{S}(0)) \to \neg(\cdot\,(u, v) \doteq y))))$

3、令(M,σ)是一阶逻辑语言$\mathcal{L}$的一个模型，t为项，A为公式，证明$t_{M[\sigma]} \in M$且$A_{M[\sigma]} \in \{T,F\}$。

答案：

归纳基础：t 为变元和常元时，显然有$t_{M[\sigma]} \in M$。

归纳假设：$t_{1_{M[\sigma]}} \in M,\ldots,t_{n_{M[\sigma]}} \in M$。

归纳步骤：若$t = f(t_1,\ldots,t_n)$，其中f为函数符，$t_1,\ldots,t_n$为项。

由定义和归纳假设知$t_{M[\sigma]} = (f(t_1,\ldots,t_n))_{M[\sigma]} = f_M(t_{1_{M[\sigma]}},\ldots,t_{n_{M[\sigma]}})$，

其中f_M是从M^n到M的映射，所以$f_M(t_{1_{M[\sigma]}},\ldots,t_{n_{M[\sigma]}}) \in M$。

再对公式的结构做归纳，证明$A_{M[\sigma]} \in \{T,F\}$。

4、设Γ是公式集，则Γ是协调的当且仅当对任何公式A，对任何Γ的有穷子集Δ，$\Delta \vdash A$不可证或 $\Delta \vdash \neg A$不可证。

答案：

⇒：反证法。假设存在公式A和Γ的有穷子集Δ，$\Delta \vdash A$可证且$\Delta \vdash \neg A$可证。由

$$\cfrac{\cfrac{\Delta \vdash A}{\Delta, \neg A \vdash} \quad \Delta \vdash \neg A}{\Delta \vdash} Cut$$

知$\Delta \vdash$可证。另一方面，由协调的定义知任何Γ的有穷子集Δ，$\Delta \vdash$不可证，矛盾。

$\Leftarrow$：已知对任意公式A，对任意Γ的有穷子集Δ，$\Delta \vdash A$不可证或 $\Delta \vdash \neg A$不可证。假设$\Delta \vdash$可证，不妨设$B \in \Delta$。由于

$$\frac{\Delta, B \vdash \quad \Delta \vdash B, A}{\Delta \vdash A} Cut$$

可知$\Delta \vdash A$可证且$\Delta \vdash \neg A$可证，矛盾。因此$\Delta \vdash$不可证，则有对任何Γ的有穷子集Δ，$\Delta \vdash$不可证，即Γ是协调的。

5、证明空矢列{} ⊢ {}在 G 中不可证。

答案：

假设存在矢列{} ⊢ {}的证明树。由于 Cut 规则以外的规则的结论中都包含某个主命题，因此{} ⊢ {}的证明树中，{} ⊢ {}只能由 Cut 规则推理出。由定理 4.2 知，Cut 规则可由其他规则导出，矛盾。

另外：①在有效性的定义中，我们约定了{} ⊢ {}非有效；②假设矢列{} ⊢ {}可证，由定理 4.12 知，任何矢列都可证。

6、试给出一个算法，用于从哥德尔码#A 求出 A 的表达式。

答案：

输入：某公式A的哥德尔码$\#A$。

Step1. 依次用素数从小到大整除$\#A$，可以得到$\#A_{\mathrm{i}} = \mathrm{ep}(\#A, \mathrm{i})$，

Step2. 若$\langle \#A_0, \#A_1, ... \rangle$对应的是逻辑符或非逻辑符，则返回此符号，否则依次以$\#A_{\mathrm{i}}$为输入跳转 Step1 进入递归。

7、证明存在公式 A、B 和模型使得下列公式的解释为假：

（1）$\exists x. A \to \forall x. A$

（2）$\forall x. (A \vee B) \to ((\forall x. A) \vee (\forall x. B))$

答案：

（1）证明与第（2）问类似。

（2）考虑初等算术语言的标准模型$\mathbb{N} = (\mathrm{N}, \mathrm{I})$，令A为$\mathrm{x} < \mathrm{y} + S(0)$，B为$\mathrm{y} < \mathrm{x}$，

对赋值σ，此时$\forall \mathrm{x}. (\mathrm{A} \vee \mathrm{B})_{N[\sigma]} = T$，$\forall \mathrm{x}. (\mathrm{A})_{N[\sigma]} = F$，$\forall \mathrm{x}. (\mathrm{B})_{N[\sigma]} = F$，使得原公式解释为假。

8、在 G 中导出规则：

$$(1)\quad \frac{\exists x.\mathrm{A}(x),\Gamma\vdash\Lambda}{\mathrm{A}[y/x],\Gamma\vdash\Lambda},\qquad (2)\quad \frac{\vdash\forall x.A(x)}{\vdash\forall y.A[\frac{y}{x}]}$$

答案：

$$\cfrac{\cfrac{\mathrm{A}[y/x]\vdash\mathrm{A}[y/x],\exists x.A(x)}{\mathrm{A}[y/x]\vdash\exists x.A(x)}\exists R\quad \exists x.A(x),\Gamma\vdash\Lambda}{\mathrm{A}[y/x],\Gamma\vdash\Lambda}Cut$$

$$
\dfrac{\vdash \forall x.\, A(x) \qquad \dfrac{\dfrac{A[\frac{z}{x}], \forall x.\, A(x) \vdash A[\frac{z}{x}]}{\forall x.\, A(x) \vdash A[\frac{y}{x}][\frac{z}{y}]}\,\forall L}{\forall x.\, A(x) \vdash \forall y.\, A[\frac{y}{x}]}\,\forall R}{\vdash \forall y.\, A[\frac{y}{x}]}\,Cut
$$

9、设Φ与Ψ为协调集，证明：（1）$\mathrm{Con}(\Phi\cap\Psi)$；（2）给出$\mathrm{Con}(\Phi\cup\Psi)$不成立的反例。

答案：

由定义知，对任意Φ、Ψ的有穷子集Δ，$\Delta\vdash$ 不可证。由于任意$\Phi\cap\Psi$的有穷子集Δ'也为Φ的有穷子集，因此$\Delta'\ \vdash$不可证，即有$\mathrm{Con}(\Phi\cap\Psi)$。

考虑公式A，A和$\neg$A都不是永真式，则$\{A\}$和$\{\neg A\}$为协调集，但是$\{A\}\cup\{\neg A\}$是矛盾的。