



一阶逻辑（二）





结构 (Structure)

定义 (结构) 3.10. 设 \mathcal{L} 为一阶语言, \mathcal{L} 的一个结构 \mathbb{M} 为二元组 (M, I) , 这里

- (1) M 为非空集, 称为**论域**;
- (2) I 为 \mathcal{L} 的映射, 称为**定义域**, 其满足:
 - (a) $\forall c \in \mathcal{L}_c$, 有 $I(c) \in M$;
 - (b) $\forall f \in \mathcal{L}_f$ 且 $\mu(f) = n > 0$, 有 $I(f): M^n \rightarrow M$;
 - (c) $\forall P \in \mathcal{L}_P$ 且 $\mu(P) = 0$, 有 $I(P) \in \mathbf{B} = \{T, F\}$
 - (d) $\forall P \in \mathcal{L}_P$ 且 $\mu(P) = n > 0$, 有 $I(P) \subseteq M^n$ 。



结构 (Structure)

定义 (结构) 3.10. 设 \mathcal{L} 为一阶语言, \mathcal{L} 的一个结构 \mathbb{M} 为二元组 (M, I) , 这里

(1) M 为非空集, 称为论域;

(2) I 为 \mathcal{L} 的映射, 称为定义域, 其满足:

(a) $\forall c \in \mathcal{L}_c$, 有 $I(c) \in M$;

(b) $\forall f \in \mathcal{L}_f$ 且 $\mu(f) = n > 0$, 有 $I(f): M^n \rightarrow M$;

(c) $\forall P \in \mathcal{L}_p$ 且 $\mu(P) = 0$, 有 $I(P) \in \mathbf{B} = \{T, F\}$

(d) $\forall P \in \mathcal{L}_p$ 且 $\mu(P) = n > 0$, 有 $I(P) \subseteq M^n$.

初等算术语言 \mathcal{A} :

常元符集 $\mathcal{L}_c = \{0\}$;

函数符集 $\mathcal{L}_f = \{S, +, \cdot\}$;

谓词符集 $\mathcal{L}_p = \{<\}$ 。



结构 (Structure)

定义 (结构) 3.10. 设 \mathcal{L} 为一阶语言, \mathcal{L} 的一个结构 \mathbb{M} 为二元组 (M, I) , 这里

(1) M 为非空集, 称为论域;

(2) I 为 \mathcal{L} 的映射, 称为定义域, 其满足:

(a) $\forall c \in \mathcal{L}_c$, 有 $I(c) \in M$;

(b) $\forall f \in \mathcal{L}_f$ 且 $\mu(f) = n > 0$, 有 $I(f): M^n \rightarrow M$;

(c) $\forall P \in \mathcal{L}_p$ 且 $\mu(P) = 0$, 有 $I(P) \in \mathbf{B} = \{T, F\}$

(d) $\forall P \in \mathcal{L}_p$ 且 $\mu(P) = n > 0$, 有 $I(P) \subseteq M^n$.

初等算术语言 \mathcal{A} :

常元符集 $\mathcal{L}_c = \{0\}$;

函数符集 $\mathcal{L}_f = \{S, +, \cdot\}$;

谓词符集 $\mathcal{L}_p = \{<\}$ 。

令 $\mathbb{N} = (N, I)$, 其满足 $N = \{0, 1, 2, \dots\}$, $I(0) = 0$, $I(S) = suc$,

$I(+)=+$, $I(\cdot)=\times$, $I(<)=<$, 称 \mathbb{N} 为初等算术的标准模型



结构 (Structure)

定义 (结构) 3.10. 设 \mathcal{L} 为一阶语言, \mathcal{L} 的一个结构 \mathbb{M} 为二元组 (M, I) , 这里

(1) M 为非空集, 称为**论域**;

$$I: \mathcal{L} \rightarrow ?$$

(2) I 为 \mathcal{L} 的映射, 称为**定义域**, 其满足:

(a) $\forall c \in \mathcal{L}_c$, 有 $I(c) \in M$;

(b) $\forall f \in \mathcal{L}_f$ 且 $\mu(f) = n > 0$, 有 $I(f): M^n \rightarrow M$;

(c) $\forall P \in \mathcal{L}_p$ 且 $\mu(P) = 0$, 有 $I(P) \in \mathbf{B} = \{T, F\}$

(d) $\forall P \in \mathcal{L}_p$ 且 $\mu(P) = n > 0$, 有 $I(P) \subseteq M^n$ 。



结构 (Structure)

定义 (结构) 3.10. 设 \mathcal{L} 为一阶语言, \mathcal{L} 的一个结构 \mathbb{M} 为二元组 (M, I) , 这里

(1) M 为非空集, 称为**论域**;

$I: \mathcal{L} \rightarrow ?$

(2) I 为 \mathcal{L} 的映射, 称为**定义域**, 其满足:

(a) $\forall c \in \mathcal{L}_c$, 有 $I(c) \in M$;

(b) $\forall f \in \mathcal{L}_f$ 且 $\mu(f) = n > 0$, 有 $I(f): M^n \rightarrow M$;

(c) $\forall P \in \mathcal{L}_P$ 且 $\mu(P) = 0$, 有 $I(P) \in \mathbf{B} = \{T, F\}$

(d) $\forall P \in \mathcal{L}_P$ 且 $\mu(P) = n > 0$, 有 $I(P) \subseteq M^n$ 。

符号



结构 (Structure)

定义 (结构) 3.10. 设 \mathcal{L} 为一阶语言, \mathcal{L} 的一个结构 \mathbb{M} 为二元组 (M, I) , 这里

(1) M 为非空集, 称为**论域**;

$$I: \mathcal{L} \rightarrow ?$$

(2) I 为 \mathcal{L} 的映射, 称为**定义域**, 其满足:

(a) $\forall c \in \mathcal{L}_c$, 有 $I(c) \in M$;

$$\mathcal{L}_c \rightarrow M$$

(b) $\forall f \in \mathcal{L}_f$ 且 $\mu(f) = n > 0$, 有 $I(f): M^n \rightarrow M$;

(c) $\forall P \in \mathcal{L}_P$ 且 $\mu(P) = 0$, 有 $I(P) \in \mathbf{B} = \{T, F\}$

(d) $\forall P \in \mathcal{L}_P$ 且 $\mu(P) = n > 0$, 有 $I(P) \subseteq M^n$.

符号



结构 (Structure)

定义 (结构) 3.10. 设 \mathcal{L} 为一阶语言, \mathcal{L} 的一个结构 \mathbb{M} 为二元组 (M, I) , 这里

(1) M 为非空集, 称为**论域**;

$$I: \mathcal{L} \rightarrow ?$$

(2) I 为 \mathcal{L} 的映射, 称为**定义域**, 其满足:

(a) $\forall c \in \mathcal{L}_c$, 有 $I(c) \in M$;

$$\mathcal{L}_c \rightarrow M$$

(b) $\forall f \in \mathcal{L}_f$ 且 $\mu(f) = n > 0$, 有 $I(f): M^n \rightarrow M$;

$$\mathcal{L}_f \rightarrow F$$

(c) $\forall P \in \mathcal{L}_P$ 且 $\mu(P) = 0$, 有 $I(P) \in \mathbf{B} = \{T, F\}$

(d) $\forall P \in \mathcal{L}_P$ 且 $\mu(P) = n > 0$, 有 $I(P) \subseteq M^n$.

符号



结构 (Structure)

定义 (结构) 3.10. 设 \mathcal{L} 为一阶语言, \mathcal{L} 的一个结构 \mathbb{M} 为二元组 (M, I) , 这里

(1) M 为非空集, 称为**论域**;

$$I: \mathcal{L} \rightarrow ?$$

(2) I 为 \mathcal{L} 的映射, 称为**定义域**, 其满足:

(a) $\forall c \in \mathcal{L}_c$, 有 $I(c) \in M$;

$$\mathcal{L}_c \rightarrow M$$

(b) $\forall f \in \mathcal{L}_f$ 且 $\mu(f) = n > 0$, 有 $I(f): M^n \rightarrow M$;

$$\mathcal{L}_f \rightarrow F$$

(c) $\forall P \in \mathcal{L}_P$ 且 $\mu(P) = 0$, 有 $I(P) \in \mathbf{B} = \{T, F\}$

(d) $\forall P \in \mathcal{L}_P$ 且 $\mu(P) = n > 0$, 有 $I(P) \subseteq M^n$ 。

$$\mathcal{L}_P \rightarrow \mathbf{B} \cup M^n$$

符号



结构 (Structure)

定义 (结构) 3.10. 设 \mathcal{L} 为一阶语言, \mathcal{L} 的一个结构 \mathbb{M} 为二元组 (M, I) , 这里

(1) M 为非空集, 称为**论域**;

$$I: \mathcal{L} \rightarrow ?$$

(2) I 为 \mathcal{L} 的映射, 称为**定义域**, 其满足:

(a) $\forall c \in \mathcal{L}_c$, 有 $I(c) \in M$;

$$\mathcal{L}_c \rightarrow M$$

(b) $\forall f \in \mathcal{L}_f$ 且 $\mu(f) = n > 0$, 有 $I(f): M^n \rightarrow M$;

$$\mathcal{L}_f \rightarrow F$$

(c) $\forall P \in \mathcal{L}_P$ 且 $\mu(P) = 0$, 有 $I(P) \in \mathbf{B} = \{T, F\}$

(d) $\forall P \in \mathcal{L}_P$ 且 $\mu(P) = n > 0$, 有 $I(P) \subseteq M^n$.

$$\mathcal{L}_P \rightarrow \mathbf{B} \cup \mathcal{M}$$

$$I(P) = \langle t_1, \dots, t_n \rangle \in \mathcal{M}$$

例如, “ $<$ ”可由 $\{\langle 0, 1 \rangle, \langle 0, 2 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \dots\}$ 表示

符号



结构 (Structure)

约定: c_M 表示 $I(c)$, f_M 表示 $I(f)$, 且 P_M 表示 $I(P)$ 。

\mathcal{L} 的结构给出了 \mathcal{L} 的**元素的解释**。

➤ $I: \mathcal{L} \rightarrow M \cup F \cup \mathbf{B} \cup \mathcal{M}$

习惯上, 用论域 M 代表结构 \mathbb{M} , 即对 M 和 \mathbb{M} 不加以区分。



赋值与模型

定义3.11. 设 $V = \{x_0, x_1, \dots, x_n, \dots | n \in N\}$ 为一阶语言 \mathcal{L} 的变元集, \mathbb{M} 为一个 \mathcal{L} -结构。

(1) 一个 M 上的**赋值** σ 为从 V 到 M 的映射, 即 $\sigma: V \rightarrow M$;

(2) \mathcal{L} 的一个**模型**为二元组 (\mathbb{M}, σ) ,

这里 \mathbb{M} 为 \mathcal{L} -结构且 σ 为 M 上的赋值。



赋值与模型

定义3.11. 设 $V = \{x_0, x_1, \dots, x_n, \dots | n \in N\}$ 为一阶语言 \mathcal{L} 的变元集, \mathbb{M} 为一个 \mathcal{L} -结构。

(1) 一个 M 上的**赋值** σ 为从 V 到 M 的映射, 即 $\sigma: V \rightarrow M$;

(2) \mathcal{L} 的一个**模型**为二元组 (\mathbb{M}, σ) , 也写成 (M, σ)

这里 \mathbb{M} 为 \mathcal{L} -结构且 σ 为 M 上的赋值。



赋值与模型

定义3.11. 设 $V = \{x_0, x_1, \dots, x_n, \dots | n \in N\}$ 为一阶语言 \mathcal{L} 的变元集, \mathbb{M} 为一个 \mathcal{L} -结构。

(1) 一个 M 上的**赋值** σ 为从 V 到 M 的映射, 即 $\sigma: V \rightarrow M$;

(2) \mathcal{L} 的一个**模型**为二元组 (\mathbb{M}, σ) , 也写成 (M, σ)

这里 \mathbb{M} 为 \mathcal{L} -结构且 σ 为 M 上的赋值。

(\mathcal{A} 的模型) 对于 $\mathbb{N} = (N, I)$, 其满足 $N = \{0, 1, 2, \dots\}$,

令 $\sigma(x_n) = n$, (N, σ) 为 \mathcal{A} 的模型。



赋值与模型

定义3.11. 设 $V = \{x_0, x_1, \dots, x_n, \dots | n \in N\}$ 为一阶语言 \mathcal{L} 的变元集, \mathbb{M} 为一个 \mathcal{L} -结构。

(1) 一个 M 上的**赋值** σ 为从 V 到 M 的映射, 即 $\sigma: V \rightarrow M$;

(2) \mathcal{L} 的一个**模型**为二元组 (\mathbb{M}, σ) , 也写成 (M, σ)

这里 \mathbb{M} 为 \mathcal{L} -结构且 σ 为 M 上的赋值。

定义3.12. 令 σ 为赋值, 记号 $\sigma[x_i := a]$ 为如下的赋值:

$$(\sigma[x_i := a])(x_j) = \begin{cases} \sigma(x_j), & i \neq j \\ a, & i = j \end{cases}.$$



项的解释

定义3.13（项的解释）. 设为 (M, σ) 一个 \mathcal{L} -模型, t 为项, **项**

t 的解释 $t_{M[\sigma]}$ 归纳定义如下:

- (1) $x_{M[\sigma]} = \sigma(x)$, 这里 $x \in V$;
- (2) $c_{M[\sigma]} = c_M$, 这里 $c \in \mathcal{L}_c$;
- (3) $(f(t_1, \dots, t_n))_{M[\sigma]} = f_M((t_1)_{M[\sigma]}, \dots, (t_n)_{M[\sigma]})$.



项的解释

定义3.13（项的解释）. 设为 (M, σ) 一个 \mathcal{L} -模型, t 为项, **项**
 t 的解释 $t_{M[\sigma]}$ 归纳定义如下:

(1) $x_{M[\sigma]} = \sigma(x)$, 这里 $x \in V$;

(2) $c_{M[\sigma]} = c_M$, 这里 $c \in \mathcal{L}_c$;

(3) $(f(t_1, \dots, t_n))_{M[\sigma]} = f_M((t_1)_{M[\sigma]}, \dots, (t_n)_{M[\sigma]})$.

c_M 为 $I(c)$, f_M 为 $I(f)$



项的解释

定义3.13（项的解释）. 设为 (M, σ) 一个 \mathcal{L} -模型, t 为项, **项**

t 的解释 $t_{M[\sigma]}$ 归纳定义如下:

(1) $x_{M[\sigma]} = \sigma(x)$, 这里 $x \in V$;

(2) $c_{M[\sigma]} = c_M$, 这里 $c \in \mathcal{L}_c$;

(3) $(f(t_1, \dots, t_n))_{M[\sigma]} = f_M((t_1)_{M[\sigma]}, \dots, (t_n)_{M[\sigma]})$.

c_M 为 $I(c)$, f_M 为 $I(f)$

例, 对 \mathcal{A} 的模型 (N, σ) , 求 $(+(x_1, S(x_7)))_{N[\sigma]}$.

$x_1 + S(x_7)$



项的解释

定义3.13 (项的解释). 设为 (M, σ) 一个 \mathcal{L} -模型, t 为项, **项**
 t 的解释 $t_{M[\sigma]}$ 归纳定义如下:

(1) $x_{M[\sigma]} = \sigma(x)$, 这里 $x \in V$;

(2) $c_{M[\sigma]} = c_M$, 这里 $c \in \mathcal{L}_c$;

(3) $(f(t_1, \dots, t_n))_{M[\sigma]} = f_M((t_1)_{M[\sigma]}, \dots, (t_n)_{M[\sigma]})$.

c_M 为 $I(c)$, f_M 为 $I(f)$

例, 对 \mathcal{A} 的模型 (N, σ) , 求 $(+(x_1, S(x_7)))_{N[\sigma]}$.

$$(+ (x_1, S(x_7)))_{N[\sigma]} = (x_1)_{N[\sigma]} + (S(x_7))_{N[\sigma]}$$

$$= \sigma(x_1) + \text{suc}(\sigma(x_7)) = 1 + \text{suc}(7) = 9$$

$I(+)=+$
 $I(S)=\text{suc}$
 $\sigma(x_1)=1$
 $\sigma(x_7)=7$



项的解释

定义3.13（项的解释）. 设为 (M, σ) 一个 \mathcal{L} -模型, t 为项, **项**

t 的解释 $t_{M[\sigma]}$ 归纳定义如下:

- (1) $x_{M[\sigma]} = \sigma(x)$, 这里 $x \in V$;
- (2) $c_{M[\sigma]} = c_M$, 这里 $c \in \mathcal{L}_c$;
- (3) $(f(t_1, \dots, t_n))_{M[\sigma]} = f_M((t_1)_{M[\sigma]}, \dots, (t_n)_{M[\sigma]})$.

引理3.14. $t_{M[\sigma]} \in M$.



项的解释

定义3.13 (项的解释). 设为 (M, σ) 一个 \mathcal{L} -模型, t 为项, **项**

t 的解释 $t_{M[\sigma]}$ 归纳定义如下:

- (1) $x_{M[\sigma]} = \sigma(x)$, 这里 $x \in V$;
- (2) $c_{M[\sigma]} = c_M$, 这里 $c \in \mathcal{L}_c$;
- (3) $(f(t_1, \dots, t_n))_{M[\sigma]} = f_M((t_1)_{M[\sigma]}, \dots, (t_n)_{M[\sigma]})$.

引理3.14. $t_{M[\sigma]} \in M$.

对项 t 的结构作归纳。

1. $(x_i)_{N[\sigma]} = \sigma(x_i) = i$;
2. $0_{N[\sigma]} = I(0) = 0$;
3. $(S(x_i))_{N[\sigma]} = \text{suc}(\sigma(x_i)) = \sigma(x_i) + 1$;
4. $(+(x_i, x_j))_{N[\sigma]} = \sigma(x_i) + \sigma(x_j)$;
5. $(\cdot(x_i, x_j))_{N[\sigma]} = \sigma(x_i) \times \sigma(x_j)$.



命题的解释

在结构的定义中，把0元谓词 P 解释为 $\mathbf{B} = \{T, F\}$ 中的元素，
这里我们承认排中律。

$$I(P) \in \mathbf{B} = \{T, F\}$$



命题的解释

在结构的定义中，把0元谓词 P 解释为 $\mathbf{B} = \{T, F\}$ 中的元素，
这里我们承认排中律。

$$I(P) \in \mathbf{B} = \{T, F\}$$

论域 M 中的每个命题要么为真，要么为假，别无他选。



联结词的解释

我们把联结词解释为**B**上的函数：

(1) 对 \neg 的解释 $B_{\neg}: \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B}$:

X	T	F
$B_{\neg}(X)$	F	T

(2) 对 \wedge 的解释 B_{\wedge} :

X	Y	$B_{\wedge}(X, Y)$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

\wedge	T	F
T	T	F
F	F	F



联结词的解释

(3) 对 \vee 的解释 B_{\vee} :

X	Y	$B_{\vee}(X, Y)$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

\vee	T	F
T	T	T
F	T	F

(4) 对 \rightarrow 的解释 B_{\rightarrow} :

X	Y	$B_{\rightarrow}(X, Y)$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

\rightarrow	T	F
T	T	F
F	T	T



联结词的解释

(3) 对 \vee 的解释 B_{\vee} :

X	Y	$B_{\vee}(X, Y)$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

与命题逻辑的语义是一致的

\vee	T	F
T	T	T
F	T	F

(4) 对 \rightarrow 的解释 B_{\rightarrow} :

X	Y	$B_{\rightarrow}(X, Y)$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

\rightarrow	T	F
T	T	F
F	T	T



公式的解释

定义3.15（公式的解释）. 设 (M, σ) 为一个 \mathcal{L} -模型, A 为公式,
公式 A 的解释 $A_{M[\sigma]}$ 归纳定义如下:

$$(1) (P(t_1, \dots, t_n))_{M[\sigma]} = \begin{cases} T, & \langle (t_1)_{M[\sigma]}, \dots, (t_n)_{M[\sigma]} \rangle \in P_M; \\ F, & \langle (t_1)_{M[\sigma]}, \dots, (t_n)_{M[\sigma]} \rangle \notin P_M. \end{cases}$$

$$(2) (t_1 \doteq t_2)_{M[\sigma]} = \begin{cases} T, & (t_1)_{M[\sigma]} = (t_2)_{M[\sigma]}; \\ F, & (t_1)_{M[\sigma]} \neq (t_2)_{M[\sigma]}. \end{cases}$$

$$(3) (\neg A)_{M[\sigma]} = \mathbf{B}_{\neg}(A_{M[\sigma]}).$$

$$(4) (A * B)_{M[\sigma]} = \mathbf{B}_*(A_{M[\sigma]}, B_{M[\sigma]}).$$

$$(5) (\forall x. A)_{M[\sigma]} = \begin{cases} T, & \text{对 } \forall a \in M, A_{M[\sigma[x:=a]]} = T; \\ F, & \text{否则.} \end{cases}$$

$$(6) (\exists x. A)_{M[\sigma]} = \begin{cases} T, & \text{若 } \exists a \in M, A_{M[\sigma[x:=a]]} = T; \\ F, & \text{否则.} \end{cases}$$



公式的解释

定义3.15（公式的解释）. 设 (M, σ) 为一个 \mathcal{L} -模型, A 为公式,
公式 A 的解释 $A_{M[\sigma]}$ 归纳定义如下:

$$(1) (P(t_1, \dots, t_n))_{M[\sigma]} = \begin{cases} T, & \langle (t_1)_{M[\sigma]}, \dots, (t_n)_{M[\sigma]} \rangle \in P_M; \\ F, & \langle (t_1)_{M[\sigma]}, \dots, (t_n)_{M[\sigma]} \rangle \notin P_M. \end{cases}$$

$$(2) (t_1 \doteq t_2)_{M[\sigma]} = \begin{cases} T, & (t_1)_{M[\sigma]} = (t_2)_{M[\sigma]}; \\ F, & (t_1)_{M[\sigma]} \neq (t_2)_{M[\sigma]}. \end{cases}$$

$$(3) (\neg A)_{M[\sigma]} = \mathbf{B}_{\neg}(A_{M[\sigma]}).$$

$$(4) (A * B)_{M[\sigma]} = \mathbf{B}_*(A_{M[\sigma]}, B_{M[\sigma]}).$$

$$(5) (\forall x. A)_{M[\sigma]} = \begin{cases} T, & \text{对 } \forall a \in M, A_{M[\sigma[x:=a]]} = T; \\ F, & \text{否则.} \end{cases}$$

$$(6) (\exists x. A)_{M[\sigma]} = \begin{cases} T, & \text{若 } \exists a \in M, A_{M[\sigma[x:=a]]} = T; \\ F, & \text{否则.} \end{cases}$$

变元 x 的赋值为 a ,
其它变元的赋值不变。



公式的解释

例，对于上面 \mathcal{A} 的模型 (N, σ) ，其中 $\sigma(x_n) = n$ ，

求 $(\forall x_3. (< (x_3, + (x_1, x_4))))_{N[\sigma]}$ 。

$$\forall x_3. (x_3 < x_1 + x_4)$$



公式的解释

例，对于上面 \mathcal{A} 的模型 (N, σ) ，其中 $\sigma(x_n) = n$ ，

$$\text{求 } (\forall x_3. (< (x_3, + (x_1, x_4))))_{N[\sigma]}.$$

$$\forall x_3. (x_3 < x_1 + x_4)$$

$$= \begin{cases} T, & \text{对 } \forall a \in N, (< (x_3, + (x_1, x_4)))_{N[\sigma[x_3:=a]]} = T; \\ F, & \text{否则.} \end{cases}$$



公式的解释

例，对于上面 \mathcal{A} 的模型 (N, σ) ，其中 $\sigma(x_n) = n$ ，

$$\text{求 } (\forall x_3. (< (x_3, + (x_1, x_4))))_{N[\sigma]}.$$

$\forall x_3. (x_3 < x_1 + x_4)$

$$= \begin{cases} T, & \text{对 } \forall a \in N, (< (x_3, + (x_1, x_4)))_{N[\sigma[x_3:=a]]} = T; \\ F, & \text{否则.} \end{cases}$$

其中 $(< (x_3, + (x_1, x_4)))_{N[\sigma[x_3:=a]]}$

$$= \begin{cases} T, & \langle (x_3)_{N[\sigma[x_3:=a]]}, (+ (x_1, x_4))_{N[\sigma[x_3:=a]]} \rangle \in <_N; \\ F, & \text{否则.} \end{cases}$$



公式的解释

例，对于上面 \mathcal{A} 的模型 (N, σ) ，其中 $\sigma(x_n) = n$ ，

$$\text{求 } (\forall x_3. (< (x_3, + (x_1, x_4))))_{N[\sigma]}.$$

$\forall x_3. (x_3 < x_1 + x_4)$

$$= \begin{cases} T, & \text{对 } \forall a \in N, (< (x_3, + (x_1, x_4)))_{N[\sigma[x_3:=a]]} = T; \\ F, & \text{否则.} \end{cases}$$

其中 $(< (x_3, + (x_1, x_4)))_{N[\sigma[x_3:=a]]}$

$$= \begin{cases} T, & \langle (x_3)_{N[\sigma[x_3:=a]]}, (+ (x_1, x_4))_{N[\sigma[x_3:=a]]} \rangle \in <_N; \\ F, & \text{否则.} \end{cases}$$

$(x_3)_{N[\sigma[x_3:=a]]} = (\sigma[x_3:=a])(x_3) = a$



公式的解释

例，对于上面 \mathcal{A} 的模型 (N, σ) ，其中 $\sigma(x_n) = n$ ，

$$\text{求 } (\forall x_3. (< (x_3, + (x_1, x_4))))_{N[\sigma]}.$$

$\forall x_3. (x_3 < x_1 + x_4)$

$$= \begin{cases} T, & \text{对 } \forall a \in N, (< (x_3, + (x_1, x_4)))_{N[\sigma[x_3:=a]]} = T; \\ F, & \text{否则.} \end{cases}$$

其中 $(< (x_3, + (x_1, x_4)))_{N[\sigma[x_3:=a]]}$

$$= \begin{cases} T, & \langle (x_3)_{N[\sigma[x_3:=a]]}, (+ (x_1, x_4))_{N[\sigma[x_3:=a]]} \rangle \in <_N; \\ F, & \text{否则.} \end{cases}$$

$(x_3)_{N[\sigma[x_3:=a]]} = (\sigma[x_3:=a])(x_3) = a$

$$\begin{aligned} (+ (x_1, x_4))_{N[\sigma[x_3:=a]]} &= (\sigma[x_3:=a])(x_1) + (\sigma[x_3:=a])(x_4) \\ &= 1 + 4 = 5 \end{aligned}$$



公式的解释

例，对于上面 \mathcal{A} 的模型 (N, σ) ，其中 $\sigma(x_n) = n$ ，

$$\text{求 } (\forall x_3. (< (x_3, + (x_1, x_4))))_{N[\sigma]}.$$

$$\forall x_3. (x_3 < x_1 + x_4)$$

$$= \begin{cases} T, & \text{对 } \forall a \in N, (< (x_3, + (x_1, x_4)))_{N[\sigma[x_3:=a]]} = T; \\ F, & \text{否则.} \end{cases}$$

$$\text{其中 } (< (x_3, + (x_1, x_4)))_{N[\sigma[x_3:=a]]} = \begin{cases} T, & a < 5; \\ F, & \text{否则.} \end{cases}$$



公式的解释

引理3.16. 对任何公式 A , $A_{M[\sigma]} \in \mathbf{B} = \{T, F\}$ 。

对公式 A 的结构作归纳。

一个等价的语义定义

定义3.15. 设 (M, σ) 为 \mathcal{L} -模型, A 为公式, $M \models_{\sigma} A$ 定义如下:

- $M \models_{\sigma} t_1 \doteq t_2$ iff $(t_1)_{M[\sigma]} \doteq (t_2)_{M[\sigma]}$;
- $M \models_{\sigma} P(t_1, \dots, t_n)$ iff $\langle (t_1)_{M[\sigma]}, \dots, (t_n)_{M[\sigma]} \rangle \in P_M$;
- $M \models_{\sigma} \neg A$ iff not $M \models_{\sigma} A$;
- $M \models_{\sigma} A \wedge B$ iff $M \models_{\sigma} A$ 且 $M \models_{\sigma} B$;
- $M \models_{\sigma} A \vee B$ iff $M \models_{\sigma} A$ 或 $M \models_{\sigma} B$;
- $M \models_{\sigma} A \rightarrow B$ iff $M \models_{\sigma} A$ 蕴含 $M \models_{\sigma} B$;
- $M \models_{\sigma} \forall x. A$ iff 对任意 $a \in M$, $M \models_{\sigma[x:=a]} A$;
- $M \models_{\sigma} \exists x. A$ iff 对某个 $a \in M$, $M \models_{\sigma[x:=a]} A$ 。



可满足

定义3.17. 设 \mathcal{L} 为一阶语言, A 为 \mathcal{L} 的公式, Γ 为 \mathcal{L} 的公式集,

(M, σ) 为 \mathcal{L} -模型。

$M \not\models_{\sigma} A$ 指 $A_{M[\sigma]} = F$

(1) A 对于 (M, σ) **可满足**, 记为 $M \models_{\sigma} A$, 指 $A_{M[\sigma]} = T$;

(2) A **可满足**指存在 (M, σ) 使得 $M \models_{\sigma} A$;

(3) $M \models A$ 指对任何 M 上的赋值 σ 都有 $M \models_{\sigma} A$;



可满足

定义3.17. 设 \mathcal{L} 为一阶语言, A 为 \mathcal{L} 的公式, Γ 为 \mathcal{L} 的公式集,

(M, σ) 为 \mathcal{L} -模型。

$M \not\models_{\sigma} A$ 指 $A_{M[\sigma]} = F$

(1) A 对于 (M, σ) **可满足**, 记为 $M \models_{\sigma} A$, 指 $A_{M[\sigma]} = T$;

(2) A **可满足**指存在 (M, σ) 使得 $M \models_{\sigma} A$; $M \not\models A$ 指 $\exists \sigma, A_{M[\sigma]} = F$

(3) $M \models A$ 指对任何 M 上的赋值 σ 都有 $M \models_{\sigma} A$;

(4) Γ 对于 (M, σ) **可满足**, 记为 $M \models_{\sigma} \Gamma$ 指对 $\forall A \in \Gamma, M \models_{\sigma} A$;

(5) Γ **可满足**指存在 (M, σ) 使得 $M \models_{\sigma} \Gamma$;

(6) $M \models \Gamma$ 指对任何 M 上的赋值 σ 都有 $M \models_{\sigma} \Gamma$ 。



可满足

定义3.17. 设 \mathcal{L} 为一阶语言, A 为 \mathcal{L} 的公式, Γ 为 \mathcal{L} 的公式集,

(M, σ) 为 \mathcal{L} -模型。

$M \not\models_{\sigma} A$ 指 $A_{M[\sigma]} = F$

(1) A 对于 (M, σ) **可满足**, 记为 $M \models_{\sigma} A$, 指 $A_{M[\sigma]} = T$;

(2) A **可满足**指存在 (M, σ) 使得 $M \models_{\sigma} A$; $M \not\models A$ 指 $\exists \sigma, A_{M[\sigma]} = F$

(3) $M \models A$ 指对任何 M 上的赋值 σ 都有 $M \models_{\sigma} A$;

(4) Γ 对于 (M, σ) **可满足**, 记为 $M \models_{\sigma} \Gamma$ 指对 $\forall A \in \Gamma, M \models_{\sigma} A$;

(5) Γ **可满足**指存在 (M, σ) 使得 $M \models_{\sigma} \Gamma$;

(6) $M \models \Gamma$ 指对任何 M 上的赋值 σ 都有 $M \models_{\sigma} \Gamma$ 。

$M \not\models_{\sigma} \Gamma$ 指 $\exists A \in \Gamma, A_{M[\sigma]} = F$

$M \not\models \Gamma$ 指 $\exists \sigma, M \not\models_{\sigma} \Gamma$

永真



定义3.18. 设 \mathcal{L} 为一阶语言, A 为 \mathcal{L} 的公式, Γ 为 \mathcal{L} 的公式集,
 (M, σ) 为 \mathcal{L} -模型。

- (1) A 永真, 记为 $\models A$, 指对于任何模型 (M, σ) 有 $M \models_{\sigma} A$;
- (2) Γ 永真, 记为 $\models \Gamma$, 指对于任何模型 (M, σ) 有 $M \models_{\sigma} \Gamma$ 。



语义结论

定义3.19. 设 \mathcal{L} 为一阶语言， A 为 \mathcal{L} 的公式， Γ 为 \mathcal{L} 的公式集， (M, σ) 为 \mathcal{L} -模型。 A 为 Γ 的**语义结论**，记为 $\Gamma \models A$ ，指对于任何模型 (M, σ) ，若 $M \models_{\sigma} \Gamma$ ，则 $M \models_{\sigma} A$ 。

- $\Gamma \not\models A$ 表示 $\Gamma \models A$ 不成立
 - 即存在模型 (M, σ) ，使得 $M \models_{\sigma} \Gamma$ ， $M \not\models_{\sigma} A$
- $\emptyset \models A$ iff A 永真，即 $\models A$



形式逻辑的基本定律

例（形式逻辑基本定律），

1. $\models A \vee \neg A$ 排中律

2. $\models \neg(A \wedge \neg A)$ 矛盾律

3. $\models (\forall x. (x \doteq x))$ 同一律



形式逻辑的基本定律

例（形式逻辑基本定律），

1. $\models A \vee \neg A$ 排中律

反证法。

假设存在模型 (M, σ) ，使得 $(A \vee \neg A)_{M[\sigma]} = F$ 。



形式逻辑的基本定律

例（形式逻辑基本定律），

1. $\models A \vee \neg A$ 排中律

反证法。

$$\begin{aligned}(\neg A)_{M[\sigma]} &= \mathbf{B}_{\neg}(A_{M[\sigma]}). \\ (A * B)_{M[\sigma]} &= \mathbf{B}_*(A_{M[\sigma]}, B_{M[\sigma]}).\end{aligned}$$

假设存在模型 (M, σ) ，使得 $(A \vee \neg A)_{M[\sigma]} = F$ 。

$$\begin{aligned}(A \vee \neg A)_{M[\sigma]} &= \mathbf{B}_{\vee}(A_{M[\sigma]}, (\neg A)_{M[\sigma]}) \\ &= \mathbf{B}_{\vee}(A_{M[\sigma]}, \mathbf{B}_{\neg}(A_{M[\sigma]})) = F\end{aligned}$$

$A_{M[\sigma]} = F$ 且 $\mathbf{B}_{\neg}(A_{M[\sigma]}) = F$ ，即 $A_{M[\sigma]} = F$ 且 $A_{M[\sigma]} = T$ ，矛盾。



形式逻辑的基本定律

例（形式逻辑基本定律），

3. $\models (\forall x. (x \doteq x))$ 同一律

反证法。

假设存在模型 (M, σ) ，使得 $(\forall x. (x \doteq x))_{M[\sigma]} = F$ 。



形式逻辑的基本定律

例（形式逻辑基本定律），

3. $\models (\forall x. (x \doteq x))$ 同一律

反证法。

$$(\forall x. A)_{M[\sigma]} = \begin{cases} T, & \text{对 } \forall a \in M, A_{M[\sigma[x:=a]]} = T; \\ F, & \text{否则.} \end{cases}$$

假设存在模型 (M, σ) ，使得 $(\forall x. (x \doteq x))_{M[\sigma]} = F$ 。

对于 $\forall a \in M$ ，

$$(x \doteq x)_{M[\sigma[x:=a]]} = \begin{cases} T, & (x)_{M[\sigma[x:=a]]} = (x)_{M[\sigma[x:=a]]}; \\ F, & \text{否则.} \end{cases}$$

所以 $(\forall x. (x \doteq x))_{M[\sigma]} = T$ ，矛盾。



形式逻辑的基本定律

例（形式逻辑基本定律），

1. $\models A \vee \neg A$ 排中律

2. $\models \neg(A \wedge \neg A)$ 矛盾律

3. $\models (\forall x. (x \doteq x))$ 同一律

引理3.20. 若 $\Gamma \models A$ ，则 $\Gamma \cup \{\neg A\}$ 不可满足。

反证法。假设 $\Gamma \cup \{\neg A\}$ 可满足。

那么存在某个模型 (M, σ) ， $M \models_{\sigma} \Gamma$ 且 $M \models_{\sigma} \neg A$ 。与 $\Gamma \models A$ 矛盾。



例，证明 $\forall x. (A \rightarrow B) \models \forall x. A \rightarrow \forall x. B$ 。

假设 $\forall x. (A \rightarrow B) \not\models \forall x. A \rightarrow \forall x. B$,

即存在模型 (M, σ) ，使得

$$(\forall x. (A \rightarrow B))_{M[\sigma]} = T, \quad (1)$$

$$(\forall x. A \rightarrow \forall x. B)_{M[\sigma]} = F. \quad (2)$$



例，证明 $\forall x. (A \rightarrow B) \models \forall x. A \rightarrow \forall x. B$ 。

假设 $\forall x. (A \rightarrow B) \not\models \forall x. A \rightarrow \forall x. B$,

即存在模型 (M, σ) ，使得

$$(\forall x. (A \rightarrow B))_{M[\sigma]} = T, \quad (1)$$

$$(\forall x. A \rightarrow \forall x. B)_{M[\sigma]} = F. \quad (2)$$

由(2)得 $(\forall x. A)_{M[\sigma]} = T$ 且 $(\forall x. B)_{M[\sigma]} = F$ 。



例，证明 $\forall x. (A \rightarrow B) \models \forall x. A \rightarrow \forall x. B$ 。

假设 $\forall x. (A \rightarrow B) \not\models \forall x. A \rightarrow \forall x. B$,

即存在模型 (M, σ) ，使得

$$(\forall x. (A \rightarrow B))_{M[\sigma]} = T, \quad (1)$$

$$(\forall x. A \rightarrow \forall x. B)_{M[\sigma]} = F. \quad (2)$$

由(2)得 $(\forall x. A)_{M[\sigma]} = T$ 且 $(\forall x. B)_{M[\sigma]} = F$ 。

$$(\forall x. A)_{M[\sigma]} = \begin{cases} T, & \text{对 } \forall a \in M, A_{M[\sigma[x:=a]]} = T; \\ F, & \text{否则.} \end{cases}$$



例，证明 $\forall x. (A \rightarrow B) \models \forall x. A \rightarrow \forall x. B$ 。

假设 $\forall x. (A \rightarrow B) \not\models \forall x. A \rightarrow \forall x. B$,

即存在模型 (M, σ) ，使得

$$(\forall x. (A \rightarrow B))_{M[\sigma]} = T, \quad (1)$$

$$(\forall x. A \rightarrow \forall x. B)_{M[\sigma]} = F. \quad (2)$$

由(2)得 $(\forall x. A)_{M[\sigma]} = T$ 且 $(\forall x. B)_{M[\sigma]} = F$ 。

即对 $\forall a \in M$, $A_{M[\sigma[x:=a]]} = T$, $\exists b \in M$, $B_{M[\sigma[x:=b]]} = F$ 。

$$(\forall x. A)_{M[\sigma]} = \begin{cases} T, & \text{对 } \forall a \in M, A_{M[\sigma[x:=a]]} = T; \\ F, & \text{否则.} \end{cases}$$



例，证明 $\forall x. (A \rightarrow B) \models \forall x. A \rightarrow \forall x. B$ 。

假设 $\forall x. (A \rightarrow B) \not\models \forall x. A \rightarrow \forall x. B$,

即存在模型 (M, σ) ，使得

$$(\forall x. (A \rightarrow B))_{M[\sigma]} = T, \quad (1)$$

$$(\forall x. A \rightarrow \forall x. B)_{M[\sigma]} = F. \quad (2)$$

由(2)得 $(\forall x. A)_{M[\sigma]} = T$ 且 $(\forall x. B)_{M[\sigma]} = F$ 。

即对 $\forall a \in M$, $A_{M[\sigma[x:=a]]} = T$, $\exists b \in M$, $B_{M[\sigma[x:=b]]} = F$ 。

所以 $\exists b \in M$, $A_{M[\sigma[x:=b]]} = T$ 且 $B_{M[\sigma[x:=b]]} = F$ 。

$$(\forall x. A)_{M[\sigma]} = \begin{cases} T, & \text{对 } \forall a \in M, A_{M[\sigma[x:=a]]} = T; \\ F, & \text{否则.} \end{cases}$$



例，证明 $\forall x. (A \rightarrow B) \models \forall x. A \rightarrow \forall x. B$ 。

假设 $\forall x. (A \rightarrow B) \not\models \forall x. A \rightarrow \forall x. B$,

即存在模型 (M, σ) ，使得

$$(\forall x. (A \rightarrow B))_{M[\sigma]} = T, \quad (1)$$

$$(\forall x. A \rightarrow \forall x. B)_{M[\sigma]} = F. \quad (2)$$

由(2)得 $(\forall x. A)_{M[\sigma]} = T$ 且 $(\forall x. B)_{M[\sigma]} = F$ 。

即对 $\forall a \in M$, $A_{M[\sigma[x:=a]]} = T$, $\exists b \in M$, $B_{M[\sigma[x:=b]]} = F$ 。

所以 $\exists b \in M$, $A_{M[\sigma[x:=b]]} = T$ 且 $B_{M[\sigma[x:=b]]} = F$ 。

也即 $\exists b \in M$, $(A \rightarrow B)_{M[\sigma[x:=b]]} = F$, 与(1)矛盾。

$$(\forall x. A)_{M[\sigma]} = \begin{cases} T, & \text{对 } \forall a \in M, A_{M[\sigma[x:=a]]} = T; \\ F, & \text{否则.} \end{cases}$$



小结

- 一阶逻辑的语义

- 结构 (M, I)
- 模型 (M, σ)
- 项的解释
- 公式的解释
- 可满足
- 语义结论