作业 03

题 1.

(a) 求公式$(\neg((P \to \neg Q) \to R))$的$\wedge\vee-$ nf 和$\vee\wedge-$ nf。

解：真值表如下，

P	Q	R	$(\neg((P \to \neg Q) \to R))$	$\vee\wedge-$ nf	$\wedge\vee-$ nf
T	T	T	F		$\neg P \vee \neg Q \vee \neg R$
T	T	F	F		$\neg P \vee \neg Q \vee R$
T	F	T	F		$\neg P \vee Q \vee \neg R$
T	F	F	T	$P \wedge \neg Q \wedge \neg R$	
F	T	T	F		$P \vee \neg Q \vee \neg R$
F	T	F	T	$\neg P \wedge Q \wedge \neg R$	
F	F	T	F		$P \vee Q \vee \neg R$
F	F	F	T	$\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R$	

$\vee\wedge-$ nf: $(P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R)$

$\wedge\vee-$ nf: $(\neg P \vee \neg Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R) \wedge (P \vee \neg Q \vee \neg R) \wedge (P \vee Q \vee \neg R)$

(b) 求公式$\neg(\neg(\neg\neg R \wedge Q) \wedge P)$的$\wedge\vee-$ nf 和$\vee\wedge-$ nf。

解：真值表如下，

P	Q	R	$\neg(\neg(\neg\neg R \wedge Q) \wedge P)$	$\vee\wedge-$ nf	$\wedge\vee-$ nf
T	T	T	T	$P \wedge Q \wedge R$	
T	T	F	F		$\neg P \vee \neg Q \vee R$
T	F	T	F		$\neg P \vee Q \vee \neg R$
T	F	F	F		$\neg P \vee Q \vee R$
F	T	T	T	$\neg P \wedge Q \wedge R$	
F	T	F	T	$\neg P \wedge Q \wedge \neg R$	
F	F	T	T	$\neg P \wedge \neg Q \wedge R$	
F	F	F	T	$\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R$	

$\vee\wedge-$ nf: $(P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R)$

$\wedge\vee-$ nf: $(\neg P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R)$

题 2. 写出公式 $(\neg A \wedge \neg B) \vee (\neg C \vee D)$ 的等价式，要求等价式中只出现联结词$\neg$和$\to$。

解：
$$\begin{aligned}(\neg A \wedge \neg B) \vee (\neg C \vee D) &\simeq \neg(A \vee B) \vee (C \to D)\\ &\simeq \neg(\neg A \to B) \vee (C \to D)\\ &\simeq (\neg A \to B) \to (C \to D)\end{aligned}$$

作业 04

题 1.

(a) 在 G'中证明 $\vdash A \to A$。

$$\dfrac{A \vdash A}{\vdash A \to A} \to R$$

(b) 在 G'中证明 $\vdash ((A \to B) \wedge (B \to C)) \to (A \to C)$。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{B \to C, A \vdash A, C \qquad \dfrac{B, A \vdash B, C \quad B, C, A \vdash C}{B, B \to C, A \vdash C} \to L}{A \to B, B \to C, A \vdash C} \to L}{(A \to B) \wedge (B \to C), A \vdash C} \wedge L}{(A \to B) \wedge (B \to C) \vdash A \to C} \to R}{\vdash ((A \to B) \wedge (B \to C)) \to (A \to C)} \to R$$

(c) 在 G'中证明 $\vdash \neg(A \wedge B) \to (\neg A \vee \neg B)$。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \vdash A, \neg B}{\vdash A, \neg A, \neg B} \neg R}{\vdash A, \neg A \vee \neg B} \vee R \qquad \dfrac{\dfrac{B \vdash B, \neg A}{\vdash B, \neg A, \neg B} \neg R}{\vdash B, \neg A \vee \neg B} \vee R}{\vdash A \wedge B, \neg A \vee \neg B} \wedge R}{\neg(A \wedge B) \vdash \neg A \vee \neg B} \neg L}{\vdash \neg(A \wedge B) \to (\neg A \vee \neg B)} \to R$$

(d) 在 G'中证明 $\vdash (\neg A \vee \neg B) \to \neg(A \wedge B)$。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A, B \vdash A}{\neg A, A, B \vdash} \neg L}{\neg A, A \wedge B \vdash} \wedge L \qquad \dfrac{\dfrac{A, B \vdash B}{\neg B, A, B \vdash} \neg L}{\neg B, A \wedge B \vdash} \wedge L}{\neg A \vee \neg B, A \wedge B \vdash} \vee L}{\neg A \vee \neg B \vdash \neg(A \wedge B)} \neg R}{\vdash (\neg A \vee \neg B) \to \neg(A \wedge B)} \to R$$

(e)

……

(f)

……

题 2. 证明在 G'中 $\vdash (P \to Q) \vee R$ 不可证，这里$P, Q, R \in PS$。

证：

$$\dfrac{\dfrac{P \vdash Q, R}{\vdash P \to Q, R} \to R}{\vdash (P \to Q) \vee R} \vee R$$

$P \vdash Q, R$不是 G’中的公理。 □

题 3. 在 G'中导出规则 MP。

见课件。

题 4. 证明 $A \to (\neg(S \wedge D) \to \neg B), A, \neg D \vdash \neg B$ 可证。

证：反证法。

假设原矢列不可证，则存在赋值v，使得$\hat{v}((\mathrm{A} \to (\neg(\mathrm{S} \land \mathrm{D}) \to \neg \mathrm{B}) \land \mathrm{A} \land \neg \mathrm{D}) \to \neg \mathrm{B}) = \mathrm{F}$。
由命题逻辑的语义可知，$\hat{v}(\mathrm{A} \to (\neg(\mathrm{S} \land \mathrm{D}) \to \neg \mathrm{B}) \land \mathrm{A} \land \neg \mathrm{D}) = \mathrm{T}$ 且$\hat{v}(\neg \mathrm{B}) = \mathrm{F}$。
因此$v(\mathrm{A}) = \mathrm{T}$，$v(\mathrm{B}) = \mathrm{T}$，$v(\mathrm{D}) = \mathrm{F}$ 且$\hat{v}(\mathrm{A} \to (\neg(\mathrm{S} \land \mathrm{D}) \to \neg \mathrm{B})) = \mathrm{T}$。
由$v(\mathrm{D}) = \mathrm{F}$ 可知$\hat{v}(\neg(\mathrm{S} \land \mathrm{D})) = \mathrm{T}$，再结合$v(\mathrm{A}) = \mathrm{T}$，$v(\mathrm{B}) = \mathrm{T}$ 可知$\hat{v}(\mathrm{A} \to (\neg(\mathrm{S} \land \mathrm{D}) \to \neg \mathrm{B})) = \mathrm{F}$，矛盾。 □

题 5. 证明$\neg \mathrm{A} \lor \mathrm{B}, \mathrm{A} \to (\mathrm{B} \land \mathrm{C}), \mathrm{D} \to \mathrm{B} \vdash \mathrm{B} \lor \mathrm{C}$ 不可证。
证：构造赋值v，$v(\mathrm{A}) = v(\mathrm{B}) = v(\mathrm{C}) = v(\mathrm{D}) = \mathrm{F}$。
此时$v \nvDash ((\neg \mathrm{A} \lor \mathrm{B}) \land (\mathrm{A} \to (\mathrm{B} \land \mathrm{C})) \land (\mathrm{D} \to \mathrm{B})) \to (\mathrm{B} \lor \mathrm{C})$。
因此原矢列不是有效的，从而不可证。 □