数学分析习题课六（问题）

May 13, 2024

问题 1. 研究下列级数的敛散性.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \cos n$

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} \mathrm{d}x$

(3) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\cos \frac{n\pi}{4}}{\ln n}$

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n-1}{n+1} \sin \frac{1}{n}$

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\ln \frac{1}{n} - \ln \sin \frac{1}{n} \right)$

(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left[\mathrm{e} - \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right]^p$

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\sqrt{n}}}$

(8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\cos \frac{1}{n} \right)^{n^3}$

(9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{5^n + (-4)^n}$

问题 2. 证明：级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha \cdot (\ln n)^\beta}$收敛 当且仅当 $\alpha > 1$ 或 $\alpha = 1$且$\beta > 1$.

问题 3. 已知$0 < a_1 < a_2, a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, n = 3, 4, \ldots,$试证级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$收敛.

问题 4. 设常数 $\alpha \neq 0$，试证：

(1) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^\alpha - n^\alpha}{n^\beta}$ 收敛，当且仅当 $\beta > \alpha$.

(2) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(n+1)^\alpha-n^\alpha}{n^\beta}$ 收敛，当且仅当 $\beta>\alpha-1$.

问题 5. 证明下列命题:

(1) 若数列 $\{a_n\}$ 有界，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 绝对收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 绝对收敛.

(2) 若 $b_n\neq\pm1$，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 绝对收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{b_n}{1+b_n}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{b_n}{1-b_n}$ 都绝对收敛.

问题 6. 设正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$的通项 $a_n>0$, 并记部分和 $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$，试证:

(1) 若 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则对任意实数p，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{S_n^p}=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^p}$ 也收敛.

(2) 若 $p>1$, 则无论 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛与否，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{S_n^p}$ 总是收敛的.

(3) 若 $p\le1$ 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{S_n^p}$ 也发散.