当 $z \in [1,2)$ 时有

$$f_Z(z) = \int_{z-1}^{1} dx = 2 - z.$$

综上所述, 随机变量 $Z = X + Y$ 的概率密度

$$f_Z(z) = \begin{cases} z & z \in [0,1] \\ 2 - z & z \in [1,2] \\ 0 & \text{其它.} \end{cases}$$

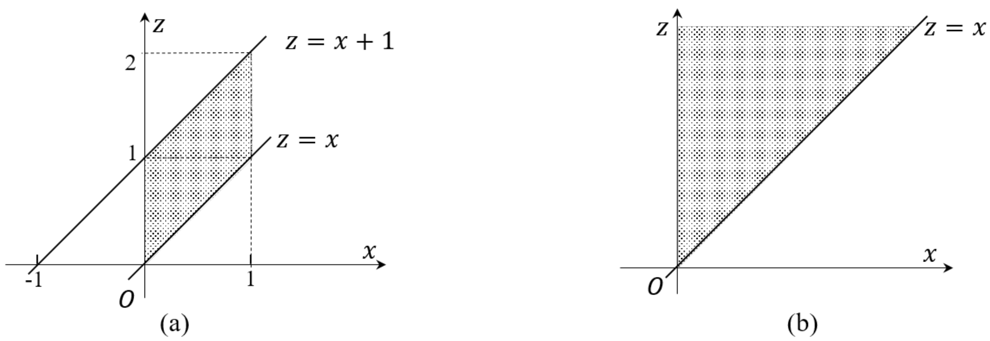

图 5.7 例 5.11 和 5.12 中积分区域示意图

例 5.12 设随机变量 $X \sim e(\lambda)$ 和 $Y \sim e(\lambda)$ 相互独立, 求 $Z = X + Y$ 的概率密度.

解 由卷积公式可得

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x) dx.$$

根据指数分布的定义, 当 $x \geqslant 0$ 时有 $f_X(x) = \lambda \exp(-\lambda x)$; 当 $z - x \geqslant 0$ 时有 $f_Y(z-x) = \lambda \exp(-\lambda(z-x))$, 因此积分区域 $\{x \in [0,+\infty), z - x \in [0,+\infty)\}$ 如图 5.7(b) 所示. 当 $z \geqslant 0$ 时有

$$f_Z(z) = \lambda^2 \int_0^z \exp(-\lambda x) \exp(-\lambda(z-x)) dx = \lambda^2 z \exp(-\lambda z).$$

5.6.2.2 随机变量的乘/除法分布

定理 5.7 若二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)$, 则随机变量函数 XY 的概率密度为

$$f_{XY}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|x|} f(x, \frac{z}{x}) dx \ ;$$

随机变量函数 Y/X 的概率密度为

$$f_{Y/X}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x, xz) dx.$$

证明 这里给出 $Z=Y/X$ 密度函数的证明, 同理考虑 $Z=XY$. 首先考虑分布函数

$$
\begin{aligned}
F_{Y/X}(z) &= P(Y/X \leqslant z) = \iint\limits_{y/x \leqslant z} f(x,y)dxdy \\
&= \iint\limits_{x<0, y \geqslant zx} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{x>0, y \leqslant zx} f(x,y)dxdy \\
&= \int_{-\infty}^{0} dx \int_{zx}^{+\infty} f(x,y)dy + \int_{0}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{xz} f(x,y)dy,
\end{aligned}
$$

引入新变量 $y=tx$ 有

$$
\begin{aligned}
F_{Y/X}(z) &= \int_{-\infty}^{0} dx \int_{z}^{-\infty} xf(x,tx)dt + \int_{0}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{z} xf(x,tx)dt \\
&= \int_{-\infty}^{0} \int_{-\infty}^{z} (-x)f(x,tx)dtdx + \int_{0}^{+\infty} \int_{-\infty}^{z} xf(x,tx)dtdx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{z} |x|f(x,tx)dtdx = \int_{-\infty}^{z} dt \int_{-\infty}^{+\infty} |x|f(x,tx)dx,
\end{aligned}
$$

对分布函数求导即可完成证明.

推论 5.4 若随机变量 X 和 Y 相互独立且服从 $\mathcal{N}(0,1)$, 则随机变量 $Z=Y/X$ 服从柯西分布.

证明 根据独立性和定理 5.7, 对任意实数 z 有

$$
\begin{aligned}
f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} |x|f(x,xz)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |x|f_X(x)f_Y(xz)dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |x|e^{-x^2(1+z^2)/2}dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} xe^{-x^2(1+z^2)/2}dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{e^{-x^2(1+z^2)/2}}{1+z^2}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{\pi(1+z^2)}.
\end{aligned}
$$

5.6.2.3 最大值和最小值的分布

定理 5.8 设随机变量 $X_1,\cdots,X_n$ 相互独立、且其分布函数分别为 $F_{X_1}(x_1),\cdots,F_{X_n}(x_n)$, 则随机变量 $Y=\max(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的分布函数为

$$F_Y(y) = F_{X_1}(y)F_{X_2}(y)\cdots F_{X_n}(y),$$

以及随机变量 $Z=\min(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的分布函数为

$$F_Z(z) = 1-(1-F_{X_1}(z))(1-F_{X_2}(z))\cdots(1-F_{X_n}(z)).$$

证明 根据独立性, 随机变量 $Y=\max(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的分布函数为

$$\begin{aligned}F_Y(y) &= P(Y\leqslant y)=P(\max(X_1,X_2,\cdots,X_n)\leqslant y)=P(X_1\leqslant y,X_2\leqslant y,\cdots,X_n\leqslant y)\\ &= P(X_1\leqslant y)P(X_2\leqslant y)\cdots P(X_n\leqslant y)=F_{X_1}(y)F_{X_2}(y)\cdots F_{X_n}(y).\end{aligned}$$

随机变量 $Z=\min(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的分布函数为

$$\begin{aligned}F_Z(z) &= P(Z\leqslant z)=P(\min(X_1,X_2,\cdots,X_n)\leqslant z)=1-P(\min(X_1,X_2,\cdots,X_n)>z)\\ &= 1-P(X_1>z,X_2>z,\cdots X_n>z)=1-P(X_1>z)P(X_2>z)\cdots P(X_n>z)\\ &= 1-(1-F_{X_1}(z))(1-F_{X_2}(z))\cdots(1-F_{X_n}(z)).\end{aligned}$$

根据定理 5.8 有

推论 5.5 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是独立同分布的随机变量, 其分布函数和密度函数分别为 $F(x)$ 和 $f(x)$, 则随机变量 $Y=\max(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的分布函数和密度函数分别为

$$F_Y(y)=(F(y))^n \qquad \text{和} \qquad f_Y(y)=n(F(y))^{n-1}f(y),$$

以及随机变量 $Z=\min(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的分布函数和密度函数分别为

$$F_Z(z)=1-(1-F(z))^n \qquad \text{和} \qquad f_Z(z)=n(1-F(z))^{n-1}f(z).$$

例 5.13 若随机变量 X 与 Y 相互独立, 且分别服从参数为 α 和 β 的指数分布, 求随机变量 $Z=\min(X,Y)$ 的概率密度.

解 根据指数分布随机变量的定义可知 X 和 Y 的分布函数为

$$F_X(x)=1-e^{-\alpha x} \quad \text{和} \quad F_Y(y)=1-e^{-\beta y}.$$

当 $z>0$ 时, 随机变量 Z 的分布函数为

$$F_Z(z)=1-(1-F_X(z))(1-F_Y(z))=1-e^{-(\alpha+\beta)z},$$

对 z 求导可得其概率密度为

$$f_Z(z)=\begin{cases}(\alpha+\beta)e^{-(\alpha+\beta)z} & z>0\\ 0 & z\leqslant 0.\end{cases}$$

即随机变量 $Z=\min(X,Y)$ 的服从参数为 $\alpha+\beta$ 的指数分布.

第 6 章　多维随机向量的数字特征

本章研究多维随机向量的数字特征, 具体包括随机向量函数的期望, 随机变量之间的协方差, 以及相关性等.

6.1 随机向量函数的期望

定理 6.1　若离散型随机向量 (X,Y) 的分布列为 $p_{ij}=P(X=x_i,Y=y_j)$, 则随机向量函数 $g(X,Y)$ 的期望为

$$E[g(X,Y)]=\sum_{i,j}g(x_i,y_j)p_{ij};$$

若连续型随机向量 (X,Y) 的密度函数为 $f(x,y)$, 则随机向量函数 $g(X,Y)$ 的期望为

$$E[g(X,Y)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}g(x,y)f(x,y)dxdy.$$

该定理的证明超出了本书的范畴. 由于连续型和离散型随机变量关于期望的相关性质相同, 因此本章后续只给出连续随机变量的证明. 当 $g(X,Y)=X$ 时, 对连续型随机变量有

$$E[X]=\int_{-\infty}^{+\infty}xdx\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_X(x)dx,$$

由此可知 X 的期望就是其边缘分布的期望; 当 $g(X,Y)=(X-E[X])^2$ 时有

$$E[g(X,Y)]=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-E[X])^2dx\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-E[X])^2f_X(x)dx=\mathrm{Var}(X),$$

即 X 的方差就是边缘分布的方差. 下面给出期望的一些性质:

性质 6.1　若随机变量 X 和 Y 满足 $X\geqslant Y$, 则有 $E[X]\geqslant E[Y]$.

证明　设函数 $g(X,Y)=X-Y$, 根据 $X\geqslant Y$ 可知

$$E[g(X,Y)]=\iint\limits_{(x,y):\,x\geqslant y}(x-y)f(x,y)dxdy\geqslant 0.$$

性质 6.2　对任意随机变量 X,Y 有 $E[X+Y]=E[X]+E[Y]$.

证明 根据期望的定义有

$$\begin{aligned}
E[X+Y] &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x+y)f(x,y)dxdy \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}xdx\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy+\int_{-\infty}^{+\infty}ydy\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}xf_X(x)dx+\int_{-\infty}^{+\infty}yf_Y(y)dy=E(X)+E(Y),
\end{aligned}$$

由此完成证明.

性质 6.2 可推广到 n 个随机变量, 即 $E[X_1+X_2+\cdots+X_n]=E[X_1]+E[X_2]+\cdots+E[X_n]$.

性质 6.3 若随机变量 X 和 Y 相互独立, 则有

$$E[XY]=E[X]E[Y];$$

对任意随机变量 X 和 Y, 有 Cauchy-Schwartz 不等式

$$|E[XY]|\leqslant\sqrt{E[X^2]E[Y^2]}.$$

证明 根据随机变量 X 与 Y 的独立性有 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$, 由此可得

$$\begin{aligned}
E[XY] &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)dxdy=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf_X(x)yf_Y(y)dxdy \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}xf_X(x)dx\int_{-\infty}^{+\infty}yf_Y(y)dy=E[X]E[Y].
\end{aligned}$$

对任意随机变量 X 和 Y, 以及对任意 $t\in\mathbb{R}$ 有 $E[(X+tY)^2]\geqslant 0$, 即

$$t^2E[Y^2]+E[X^2]+2tE[XY]\geqslant 0.$$

因此有 $\Delta=4(E[XY])^2-4E[X^2]E[Y^2]\leqslant 0$, 即 $|E[XY]|\leqslant\sqrt{E(X^2)E(Y^2)}$.

若随机变量 X 和 Y 相互独立, 根据性质 6.3 有 $E[h(X)g(Y)]=E[h(X)]E[g(Y)]$; 若随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立, 则有 $E[X_1X_2\cdots X_n]=E[X_1]E[X_2]\cdots E[X_n]$.

性质 6.4 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 则有

$$\mathrm{Var}(X\pm Y)=\mathrm{Var}(X)+\mathrm{Var}(Y).$$

证明 根据方差的定义有

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X\pm Y) &= E[(X-E[X]\pm(Y-E[Y]))^2] \\
&= E(X-E[X])^2+E(Y-E[Y])^2\pm 2E[(X-E[X])(Y-E[Y])] \\
&= \mathrm{Var}(X)+\mathrm{Var}(Y)\pm 2E[(X-E[X])(Y-E[Y])].
\end{aligned}$$

根据性质 6.3 有 $E[(X-E[X])(Y-E[Y])]=E[X-E[X]]E[Y-E[Y]]=0$, 由此完成证明.

例 6.1 设随机变量 $X\sim\mathcal{N}(0,1)$ 和 $Y\sim\mathcal{N}(0,1)$ 相互独立, 求 $E[\max(X,Y)]$.

解 根据独立性可知随机变量 X 和 Y 的联合概率密度为

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}.$$

考虑区域 $D_1=\{(x,y)\colon x\geqslant y\}$ 和 $D_2=\{(x,y)\colon x<y\}$, 如图 6.1 所示. 于是得到

$$\begin{aligned}
E[\max(X,Y)] &= \int\int_{D_1} xf(x,y)dxdy+\int\int_{D_2} yf(x,y)dxdy \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}dy\int_{y}^{+\infty}xf(x,y)dx+\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{x}^{+\infty}yf(x,y)dy \\
&= 2\int_{-\infty}^{+\infty}dy\int_{y}^{+\infty}xf(x,y)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}dy\int_{y}^{+\infty}xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-y^2}dy=\frac{1}{\sqrt{\pi}}
\end{aligned}$$

最后一个等式成立是根据 $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-y^2}dy=\sqrt{\pi}$.

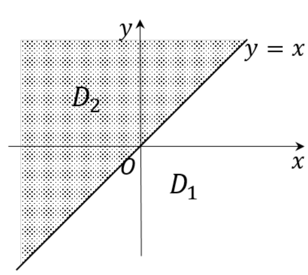

图 6.1 例 6.1 的积分区域 D_1 和 D_2.

例 6.2 某超市每周进货一定量的新鲜水果, 假设一周内出售水果的件数 X 服从 $\{1,2,\cdots,10\}$ 的均匀分布. 若本周内出售一件水果获利 10 元, 否则每件水果亏损 4 元, 求此超市的最优进货策略.

解 设该超市每周进货 n 件水果 $(1 \leqslant n \leqslant 10)$, 则每周的收益为

$$Y = \begin{cases} 10n & X \geqslant n \\ 10X - 4(n-X) & X < n. \end{cases}$$

由于收益 Y 是关于 X 的随机变量, 考虑在期望下的收益

$$\begin{aligned} E[Y] &= \sum_{i=1}^{n-1}(10i - 4(n-i))P(X=i) + \sum_{i=n}^{10} 10nP(X=i) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1}\frac{14i-4n}{10} + \sum_{i=n}^{10} n = \frac{-7n^2+107n}{10}. \end{aligned}$$

在上式中对 n 求一阶导数并令其等于零, 求解可得 $n = 7.64$, 最后取 $n = 8$.

6.2 协方差

随机变量的期望或方差仅涉及变量自身的统计信息, 没有刻画变量之间的统计信息. 本节引入一个新的统计特征: 协方差, 用于描述随机变量 X 和 Y 相互关系的数字特征.

定义 6.1 设二维随机向量 (X, Y) 的期望$E[(X-E(X))(Y-E(Y))]$ 存在, 则称其为 X 和 Y 的 **协方差**, 记为

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E\left[(X-E(X))(Y-E(Y))\right] = E(XY) - E(X)E(Y).$$

协方差是两个随机变量与它们各自期望的偏差之积的期望, 由于偏差可正可负, 因此协方差可正可负. 根据协方差的定义容易发现

$$\mathrm{Cov}(X, X) = \mathrm{Var}(X) \quad \text{和} \quad \mathrm{Var}(X \pm Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) \pm 2\mathrm{Cov}(X, Y).$$

下面进一步研究协方差的性质:

性质 6.5 对任意随机变量 X, Y 和常数 c 有

$$\mathrm{Cov}(X, c) = 0 \qquad \text{和} \qquad \mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{Cov}(Y, X).$$

性质 6.6 对任意随机变量 X, Y 和常数 a, b 有

$$\mathrm{Cov}(aX, bY) = ab\mathrm{Cov}(X, Y) \quad \text{和} \quad \mathrm{Cov}(X+a, Y+b) = \mathrm{Cov}(X, Y).$$