构造二维随机向量联合密度函数 $f(x,y)$ 的方法: i) 根据实际问题给出 $f(x,y)$; ii) 根据随机变量的独立性有 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$; iii) 根据乘法公式 $f(x,y)=f_X(x)f_{Y|X}(y|x)$.

关于二维正态分布的条件分布有

定理 5.4 若随机向量 $(X,Y)\sim\mathcal{N}(\mu_x,\mu_y,\sigma_x^2,\sigma_y^2,\rho)$, 则在 $Y=y$ 的条件下随机变量 X 服从正态分布 $\mathcal{N}(\mu_x+\rho\sigma_x(y-\mu_y)/\sigma_y,(1-\rho^2)\sigma_x^2)$, 以及在 $X=x$ 的条件下随机变量 Y 服从正态分布 $\mathcal{N}(\mu_y+\rho\sigma_y(x-\mu_x)/\sigma_x,(1-\rho^2)\sigma_y^2)$.

证明 若随机向量 $(X,Y)\sim\mathcal{N}(\mu_x,\mu_y,\sigma_x^2,\sigma_y^2,\rho)$, 则随机变量 X 的边缘分布为 $\mathcal{N}(\mu_x,\sigma_x^2)$, 即

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x}\exp\Big(-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2}\Big).$$

二维随机向量 (X,Y) 的联合密度函数 $f(x,y)$ 可分解为

$$f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x}\exp\Big(-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2}\Big)\times\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}}\exp\Big(-\frac{(y-\mu_y-\rho\sigma_y(x-\mu_x)/\sigma_x)^2}{2\sigma_y^2(1-\rho^2)}\Big).$$

根据条件密度函数的定义可得

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}}\exp\Big(-\frac{(y-\mu_y-\rho\sigma_y(x-\mu_x)/\sigma_x)^2}{2\sigma_y^2(1-\rho^2)}\Big),$$

即正态分布 $\mathcal{N}(\mu_y+\rho\sigma_y(x-\mu_x)/\sigma_x,(1-\rho^2)\sigma_y^2)$. 同理可证在 $Y=y$ 的条件下随机变量 X 的条件分布为 $\mathcal{N}(\mu_x+\rho\sigma_x(y-\mu_y)/\sigma_y,(1-\rho^2)\sigma_x^2)$.

例 5.8 设二维随机向量 (X,Y) 的密度函数

$$f(x,y)=\begin{cases}e^{-x/y}e^{-y}/y & x>0,y>0\\ 0 & \text{其它},\end{cases}$$

求 $P(X>1|Y=y)$.

解 如图 5.5(a) 所示, 随机变量 Y 的边缘分布为

$$f_Y(y)=\int_0^{+\infty}e^{-x/y}e^{-y}/y\,dx=e^{-y}\left[-e^{-x/y}\right]_0^{+\infty}=e^{-y}\qquad(y>0).$$

进而得到在 $Y=y$ 条件下 X 的条件概率密度为

$$f_{X|Y}(x|y)=e^{-x/y}/y.$$

最后求解得到

$$P(X>1|Y=y)=\int_1^{\infty}e^{-x/y}/y\,dx=-\left[e^{-x/y}\right]_1^{\infty}=e^{-1/y}.$$

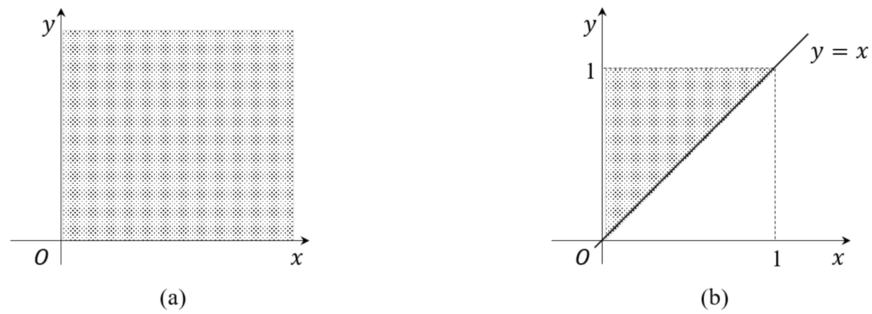

图 5.5 例 5.8 和 5.9 的积分区域

例 5.9 若随机变量 $X \sim U(0,1)$, 在观察到 $X = x$ 的条件下随机变量 $Y \sim U(x,1)$, 求随机变量 Y 的概率密度.

解 随机变量 $X \sim U(0,1)$, 在随机变量 $X = x$ 的条件下 $Y \sim U(x,1)$, 于是当 $y \in (x,1)$ 时有

$$f_{Y|X}(y|x) = 1/(1-x).$$

根据条件概率乘积公式有

$$f(x,y) = f_X(x)f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} 1/(1-x) & 0 < x < y < 1, \\ 0 & \text{其它}. \end{cases}$$

积分区域如图 5.5(b) 所示, 当 $y \in (0,1)$ 时随机变量 Y 的边缘分布

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = \int_0^y \frac{1}{1-x}dx = -\ln(1-y).$$

5.6 多维随机变量函数的分布

已知二维随机向量 (X,Y) 的概率分布, 如何求解随机变量函数 $Z = g(X,Y)$ 的概率分布? 下面分离散型和连续型随机变量两种情况进行讨论.

5.6.1 二维离散型随机向量的函数

已知二维离散型随机向量 (X,Y) 的联合分布列, 求函数 $Z = g(X,Y)$ 分布列的方法: i) 针对 X,Y 的各种取值, 计算随机变量 Z 的值; ii) 对相同的 Z 值合并, 对应的概率相加. 下面研究两个相互独立的离散型随机变量之和, 即离散型随机变量的卷积公式.

定理 5.5 若离散型随机变量 X 与 Y 相互独立, 以及 X 与 Y 的分布列分别为 $a_i = P(X = i)$ 和 $b_j = P(Y = j)$ $(i,j = 0,1,\cdots)$, 则随机变量 $Z = X + Y$ 的分布列为

$$P(Z = k) = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}.$$

证明 根据独立性可知

$$P(X=i,Y=j)=P(X=i)P(Y=j)=a_ib_j.$$

因此随机变量 Z 的分布列为

$$\begin{aligned} P(Z=k) &= P(X+Y=k) \\ &= \sum_{i=0}^{k} P(X=i,Y=k-i)=\sum_{i=0}^{k} P(X=i)P(Y=k-i)=\sum_{i=0}^{k} a_ib_{k-i}. \end{aligned}$$

基于定理 5.5, 可以得到一系列推论:

推论 5.1 若随机变量 $X\sim B(n_1,p)$ 和 $Y\sim B(n_2,p)$ 相互独立, 则有

$$Z=X+Y\sim B(n_1+n_2,p).$$

证明 根据二项分布的定义, 当 $i=0,1,\cdots,n_1$ 和 $j=0,1,\cdots,n_2$ 有

$$P(X=i)=\binom{n_1}{i}p^i(1-p)^{n_1-i} \quad \text{和} \quad P(X=j)=\binom{n_2}{j}p^j(1-p)^{n_2-j}.$$

对 $k=0,1,\cdots,n_1+n_2$, 根据定理 5.5 有

$$\begin{aligned} &P[Z=k] \\ &= \sum_{i=0}^{k} P[X=i]P[Y=k-i]=\sum_{i=0}^{k}\binom{n_1}{i}p^i(1-p)^{n_1-i}\binom{n_2}{k-i}p^{k-i}(1-p)^{n_2-(k-i)} \\ &= p^k(1-p)^{n_1+n_2-k}\sum_{i=0}^{k}\binom{n_1}{i}\binom{n_2}{k-i}=\binom{n_1+n_2}{k}p^k(1-p)^{n_1+n_2-k}. \end{aligned}$$

利用归纳法和推论 5.1, 若相互独立的随机变量 $X_i\sim \mathrm{Ber}(p)=B(1,p)$ $(i\in[n])$, 则随机变量

$$X=X_1+X_2+\cdots+X_n \ \sim \ B(n,p).$$

即随机变量 $X\sim B(n,p)$ 可以看作 n 个相互独立的服从参数为 p 的伯努利分布随机变量之和.

推论 5.2 若随机变量 $X\sim P(\lambda_1)$ 和 $Y\sim P(\lambda_2)$ 相互独立, 则随机变量

$$Z=X+Y\sim P(\lambda_1+\lambda_2).$$

证明 根据泊松分布的定义, 对任意非负整数 i 和 j 有

$$P(X=i)=\lambda_1^i e^{-\lambda_1}/i! \quad \text{和} \quad P(Y=j)=\lambda_2^j e^{-\lambda_2}/j!.$$

对任意非负整数 k, 根据定理 5.5 有

$$\begin{aligned} P(Z=k) &= \sum_{i=0}^{k} P(X=i, Y=k-i) = \sum_{i=0}^{k} P(X=i)P(Y=k-i) \\ &= \sum_{i=0}^{k} \frac{\lambda_1^i}{i!}\frac{\lambda_2^{k-i}}{(k-i)!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} = \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\lambda_1^i\lambda_2^{k-i} = \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!}(\lambda_1+\lambda_2)^k. \end{aligned}$$

5.6.2 二维连续型随机向量函数

已知二维连续型随机向量 (X,Y) 的联合概率密度为 $f(x,y)$, 求随机变量 $Z=g(X,Y)$ 的概率密度, 一般先求解分布函数

$$F_Z(z)=P(Z\leqslant z)=P(g(x,y)\leqslant z)=\iint_{g(x,y)\leqslant z} f(x,y)dxdy,$$

再对分布函数 $F_Z(z)$ 求导得到密度函数 $f_Z(z)=F'_Z(z)$.

例 5.10 若随机变量 X 和 Y 服从 $\mathcal{N}(0,1)$ 且相互独立, 求 $Z=\sqrt{X^2+Y^2}$ 的密度函数.

解 根据独立性有随机变量 X 和 Y 的联合密度函数

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\frac{1}{2\pi}e^{-x^2/2-y^2/2}.$$

当 $z\leqslant 0$ 时, 根据 $Z=\sqrt{X^2+Y^2}$ 很显然有分布函数 $F_Z(z)=0$; 当 $z>0$ 时有

$$F_Z(z)=P(Z\leqslant z)=P\left(\sqrt{X^2+Y^2}\leqslant z\right)=\frac{1}{2\pi}\iint_{X^2+Y^2\leqslant z^2} e^{-(x^2+y^2)/2}dxdy,$$

利用极坐标积分变换 $x=r\cos\theta$ 和 $y=r\sin\theta$ 有

$$F_Z(z)=\int_0^{2\pi}\int_0^z \frac{r}{2\pi}e^{-r^2/2}d\theta dr=\int_0^z re^{-r^2/2}dr=1-e^{-z^2/2}.$$

由此得到随机变量 Z 的密度函数为

$$f_Z(z)=\begin{cases} ze^{-z^2/2} & z>0 \\ 0 & z\leqslant 0. \end{cases}$$

上述分布称为 **瑞利分布** (Rayleigh distribution), 该分布常用于通信等领域.

若随机变量 X 和 Y 服从 $\mathcal{N}(0,1)$ 且相互独立, 同理可证

$$Z = X^2 + Y^2 \sim e(1/2).$$

5.6.2.1 和的分布 $Z = X + Y$

引理 5.1 设二维随机向量 (X,Y) 的联合密度函数为 $f(x,y)$, 则有 $Z = X + Y$ 的密度函数

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x)dx \quad \text{或} \quad f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y, y)dy.$$

解 首先求解 $Z = X + Y$ 的分布函数

$$F_Z(z) = P(Z \leqslant z) = P(X + Y \leqslant z) = \iint_{x+y\leqslant z} f(x,y)dxdy = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{z-x} f(x,y)dy,$$

这里考虑的积分区域 $\{(x,y)\colon x + y \leqslant z\}$, 如图 5.6(a) 所示. 利用变量替换 $u = y + x$ 并积分换序有

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{z} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, u-x)dx \right) du,$$

两边同时对 z 求导数可得

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x)dx.$$

同理可证 $f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y, y)dy$.

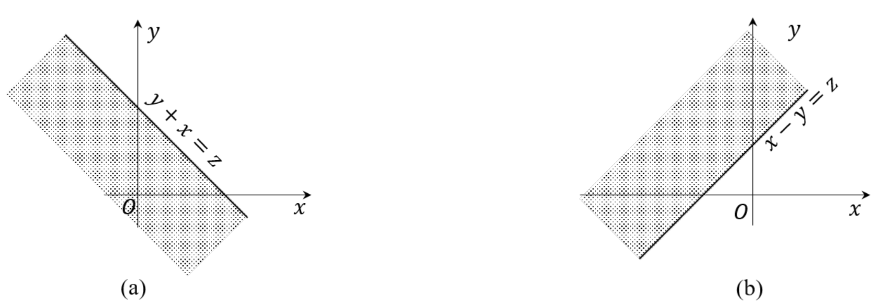

图 5.6 函数 $Z = X + Y$ 和 $Z = X - Y$ 的积分区域

对随机变量函数 $Z = X - Y$, 其积分区域 $\{(x,y)\colon x - y \leqslant z\}$, 如图 5.6(b) 所示, 可类似得到 $Z = X - Y$ 的密度函数为

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, x-z)dx \quad \text{或} \quad f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z+y, y)dy.$$

若随机变量 X 和 Y 相互独立, 则有 $f(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$. 结合引理 5.1 给出下面著名的定理:

定理 5.6 (卷积公式) 若连续型随机变量 X 与 Y 相互独立, 且它们的密度函数分别为 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$, 则随机变量 $Z=X+Y$ 的密度函数为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y)f_Y(y)dy.$$

推论 5.3 若随机变量 $X\sim\mathcal{N}(\mu_x,\sigma_x^2)$ 和 $Y\sim\mathcal{N}(\mu_y,\sigma_y^2)$ 相互独立, 则随机变量

$$X+Y\sim\mathcal{N}(\mu_x+\mu_y,\sigma_x^2+\sigma_y^2).$$

根据上面的推论很容易得到 $X-Y\sim\mathcal{N}(\mu_x-\mu_y,\sigma_x^2+\sigma_y^2)$. 该结论可以推广到 n 个随机变量, 设随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立、且 $X_i\sim\mathcal{N}(\mu_i,\sigma_i^2)$, 则随机变量

$$Z=X_1+X_2+\cdots+X_n\sim\mathcal{N}(\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_n,\sigma_1^2+\sigma_2^2+\cdots+\sigma_n^2).$$

证明 若随机变量 $X\sim\mathcal{N}(\mu_x,\sigma_x^2)$ 和 $Y\sim\mathcal{N}(\mu_y,\sigma_y^2)$, 则根据正态分布的性质有

$$X'=X-\mu_x\sim\mathcal{N}(0,\sigma_x^2)\qquad \text{和} \qquad Y'=Y-\mu_y\sim\mathcal{N}(0,\sigma_y^2).$$

因此只需证明 $Z=X'+Y'\sim\mathcal{N}(0,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$. 根据卷积公式有

$$\begin{aligned}
f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_1^2}-\frac{(z-x)^2}{2\sigma_2^2}\right)dx\\
&= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}\left(x-\frac{\sigma_1^2 z}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right)^2-\frac{z^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}\right)dx\\
&= \frac{\exp\left(-\frac{z^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}\right)}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}\times\frac{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}{\sqrt{2\pi}\sigma_1\sigma_2}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}\left(x-\frac{\sigma_1^2 z}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right)^2\right)dx\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}\exp\left(-\frac{z^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}\right),
\end{aligned}$$

最后一个等式成立是因为正态分布的规范性.

例 5.11 设随机变量 $X\sim U(0,1)$ 和 $Y\sim U(0,1)$ 相互独立, 求 $Z=X+Y$ 的概率密度.

解 根据卷积公式有

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx.$$

根据区间 $(0,1)$ 上的均匀分布, 当 $x\in[0,1]$ 时有 $f_X(x)=1$; 当 $z-x\in[0,1]$ 时有 $f_Y(z-x)=1$. 由此可得非零的积分区域为 $\{x\in[0,1],z-x\in[0,1]\}$, 如图 5.7(a) 所示. 当 $z\leqslant 0$ 或 $z\geqslant 2$ 时有 $f_Z(z)=0$; 当 $z\in(0,1)$ 时有

$$f_Z(z)=\int_0^z 1dz=z\ ;$$

当 $z \in [1,2)$ 时有

$$f_Z(z) = \int_{z-1}^{1} dx = 2 - z.$$

综上所述, 随机变量 $Z = X + Y$ 的概率密度

$$f_Z(z) = \begin{cases} z & z \in [0,1] \\ 2 - z & z \in [1,2] \\ 0 & \text{其它}. \end{cases}$$

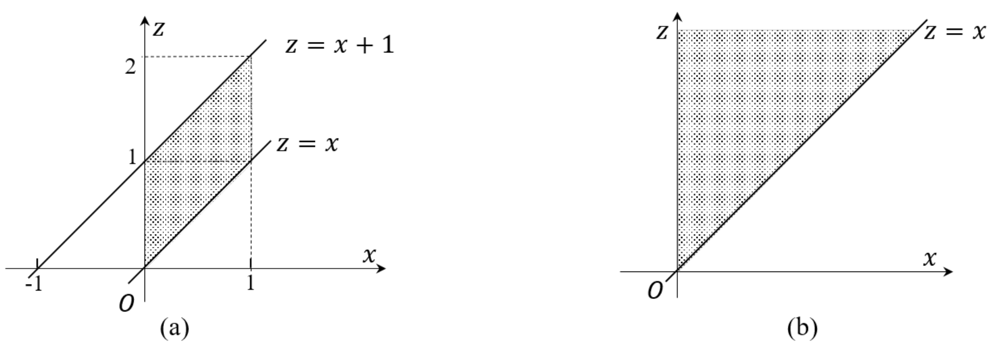

图 5.7 例 5.11 和 5.12 中积分区域示意图

例 5.12 设随机变量 $X \sim e(\lambda)$ 和 $Y \sim e(\lambda)$ 相互独立, 求 $Z = X + Y$ 的概率密度.

解 由卷积公式可得

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z - x) dx.$$

根据指数分布的定义, 当 $x \geqslant 0$ 时有 $f_X(x) = \lambda \exp(-\lambda x)$; 当 $z - x \geqslant 0$ 时有 $f_Y(z - x) = \lambda \exp(-\lambda(z - x))$, 因此积分区域 $\{x \in [0, +\infty), z - x \in [0, +\infty)\}$ 如图 5.7(b) 所示. 当 $z \geqslant 0$ 时有

$$f_Z(z) = \lambda^2 \int_0^z \exp(-\lambda x) \exp(-\lambda(z - x)) dx = \lambda^2 z \exp(-\lambda z).$$

5.6.2.2 随机变量的乘/除法分布

定理 5.7 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为 $f(x, y)$, 则随机变量 $Z = XY$ 的概率密度为

$$f_{XY}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|x|} f(x, \frac{z}{x}) dx\ ;$$

随机变量 $Z = Y/X$ 的概率密度为

$$f_{Y/X}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x, xz) dx.$$