而包含有 3 个元件的系统有效的概率为

$$\binom{3}{2}p^2(1-p)+\binom{3}{3}p^3=p^2(3-2p)\ .$$

当 $p^3(6p^2-15p+10)>p^2(3-2p)$ 时, 即当 $3(p-1)^2(2p-1)>0$ 时 5 个元件的系统比 3 个元件的系统更有效, 此时 $p>1/2$.

3.4.3 泊松分布

泊松分布是概率论中另一种重要的分布, 用于描述大量试验中稀有事件出现次数的概率模型. 例如, 一个月内网站的访问量, 一个小时内公共汽车站来到的乘客数, 书中一页出现错误的语法数, 一天中银行办理业务的顾客数, 一年内中国发生的地震次数等.

定义 3.8 给定常数 $\lambda>0$, 若随机变量 X 的分布列为

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\qquad k=0,1,2,\cdots\ ,$$

则称随机变量 X 服从 **参数为 λ 的泊松分布** (Possion distribution), 记为 $X\sim P(\lambda)$.

容易验证 $P(X=k)=\lambda^ke^{-\lambda}/k!\geqslant 0$, 并根据指数的泰勒展式 $e^x=\sum_{k=0}^{\infty}x^k/k!$ 有

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}=e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda}=1.$$

关于泊松分布的数字特征有:

性质 3.11 给定常数 $\lambda>0$, 若随机变量 $X\sim P(\lambda)$, 则有 $E[X]=\lambda$ 和 $\mathrm{Var}(X)=\lambda$.

因此泊松分布可由期望或方差唯一确定.

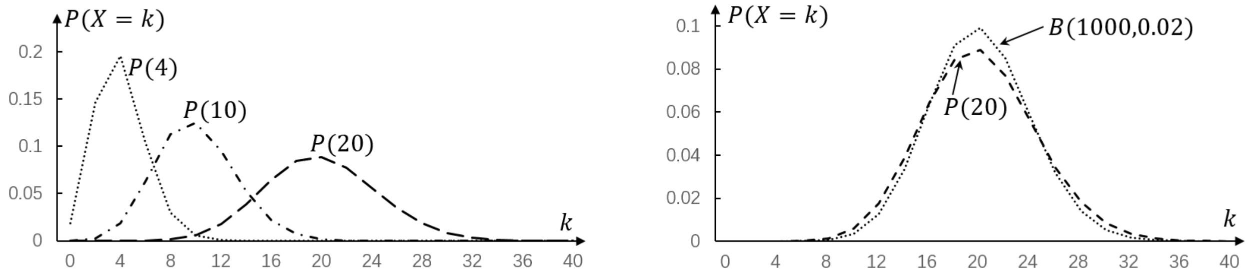
证明 根据期望的定义有

$$E[X]=\sum_{k=0}^{\infty}k\cdot P(X=k)=\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=\lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}=\lambda.$$

这里利用了指数的泰勒展开式 $e^x=\sum_{k=0}^{\infty}x^k/k!$. 对于随机变量的方差, 首先计算

$$E[X^2]=\sum_{k=0}^{\infty}k^2P(X=k)=\sum_{k=1}^{\infty}k(k-1)\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}+\lambda=\lambda^2e^{-\lambda}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!}+\lambda=\lambda^2+\lambda\ .$$

从而得到 $\mathrm{Var}(X)=E[X^2]-(E[X])^2=\lambda$.



a) 泊松分布示意图　　**b)**二项分布$B(1000,0.02)$与泊松分布$P(20)$的逼近性

图 3.2 泊松分布示意图、以及泊松分布与二项分布的逼近图

图 3.2(a) 给出了几个泊松分布的概率分布示意图. 若随机变量 $X \sim P(\lambda)$, 则概率 $P(X=k)$ 开始会随 k 的增加而增大, 一般在期望 λ 附近的整数点取得最大值, 然后会随 k 的增加而减小.

如图 3.2(b) 所示, 泊松分布与二项分布的分布图之间有一定的相似性, 有如下定理:

定理 3.4 (泊松定理) 设 $\lambda>0$ 任意给定的常数, n 是一个正整数, 若 $np_n=\lambda$, 则对任意给定的非负整数 k, 有

$$\lim_{n\to\infty}\binom{n}{k}p_n^k(1-p_n)^{n-k}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}.$$

证明 由 $p_n=\lambda/n$, 有

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k}p_n^k(1-p_n)^{n-k} &= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}\\
&= \frac{\lambda^k}{k!}(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{k-1}{n})\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}\\
&= \frac{\lambda^k}{k!}(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{k-1}{n})\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{\frac{n}{\lambda}\frac{n-k}{n}\lambda}
\end{aligned}$$

当 $n\to\infty$ 时有 $(1-\frac{\lambda}{n})^{\frac{n}{\lambda}}\to e^{-1}$ 以及 $\frac{n-k}{n}\lambda\to\lambda$, 从而完成证明.

泊松分布的应用: 若随机变量 $X\sim B(n,p)$, 当 n 比较大而 p 比较小时, 令 $\lambda=np$, 有

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\approx\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}.$$

即利用泊松分布近似计算二项分布. 针对彩票中奖、火山爆发、洪水泛滥、意外事故等小概率事件, 当试验的次数较多时, 可以将 n 重伯努利试验中小概率事件发生的次数近似服从泊松分布.

例 3.9 设有 80 台同类型设备独立工作, 每台发生故障的概率为 0.01, 一台设备发生故障时只能由一人处理, 考虑两种方案: I) 由四人维护, 每人单独负责 20 台; II) 由三人共同维护 80 台. 哪种方案更为合理?

解 首先讨论方案 I), 用事件 A_i 表示第 i 人负责的设备发生故障不能及时维修, 用 X_i 为第 i 人负责的 20 台设备同一时刻发生故障的台数, 则有 $X \sim B(20, 0.01)$, 根据泊松定理有近似有 $X \sim P(0.2)$, 进一步有

$$P(A_i) = P(X_i \geqslant 2) = 1 - P(X=0) - P(X=1) = 1 - e^{-0.2} - 0.2e^{-0.2} \approx 0.0175.$$

因四人独立维修, 有设备发生故障时而不能及时的概率

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) \geqslant P(A_1) \approx 0.0175.$$

对方案 II): 设随机变量 Y 为 80 台设备中同一时刻发生故障的台数, 则 $Y \sim B(80, 0.01)$, 根据泊松定理有近似有 $Y \sim P(0.8)$, 则有设备发生故障不能及时维修的概率为

$$P(Y \geqslant 4) = 1 - \sum_{k=0}^{3} P(Y=k) \approx 1 - \sum_{k=0}^{3} \frac{(0.8)^k}{k!} e^{-0.8} \approx 0.0091.$$

由此比较可知方案 II) 更优.

例 3.10 一个公共汽车站有很多路公交车, 若一个时间段内到站的乘客数 $X \sim P(\lambda)$ $(\lambda > 0)$, 所有到站的乘客是相互独立的、且选择 D1 路公交车的概率为 p $(p > 0)$, 求乘坐 D1 路公交车的乘客数 Y 的分布.

解 设一个时间段内到站的乘客数为 k, 该事件发生的概率

$$P(X=k) = \lambda^k e^{-\lambda}/k!\ .$$

根据题意可知到达公交站的 k 个人中乘坐 D1 的人数服从参数为 k 和 p 的二项分布 $B(k, p)$, 即

$$P(Y=i|X=k) = \binom{k}{i} p^i (1-p)^{k-i}\ .$$

根据全概率公式和指数函数 e^x 的泰勒展开式有

$$\begin{aligned} P(Y=i) &= \sum_{k=i}^{+\infty} P(X=k)P(Y=i|X=k) = p^i e^{-\lambda} \sum_{k=i}^{+\infty} \binom{k}{i} \frac{\lambda^k}{k!} (1-p)^{k-i} \\ &= \frac{(p\lambda)^i e^{-\lambda}}{i!} \sum_{k=i}^{+\infty} \frac{((1-p)\lambda)^{k-i}}{(k-i)!} = \frac{(p\lambda)^i e^{-\lambda}}{i!} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{((1-p)\lambda)^k}{(k)!} \\ &= \frac{(p\lambda)^i e^{-\lambda}}{i!} e^{(1-p)\lambda} = \frac{(p\lambda)^i e^{-p\lambda}}{i!}\ , \end{aligned}$$

由此可知乘坐 D1 路公交车的乘客数 $Y \sim P(p\lambda)$.

3.4.4 几何分布

在多重伯努利试验中, 事件 A 发生的概率为 p. 用随机变量 X 表示事件 A 首次发生需要的试验次数, 事件 $\{X=k\}$ 发生当且仅当事件 A 在前 $k-1$ 次不发生而第 k 次发生, 根据多重伯努利试验的独立性可知概率 $P(X=k)=(1-p)^{k-1}p$.

定义 3.9 给定常数 $p\in(0,1)$, 若随机变量 X 的分布列为

$$P(X=k)=(1-p)^{k-1}p \qquad (k\geqslant 1)\ , \tag{3.5}$$

称 X 服从 **参数为** p **的几何分布** (geometric distribution), 记 $X\sim G(p)$.

容易有 $P(X=k)\geqslant 0$ 以及

$$\sum_{k=1}^{\infty}P(X=k)=p\sum_{k=1}^{\infty}(1-p)^{k-1}=p\times\frac{1}{1-(1-p)}=1\ ,$$

从而验证了 (3.5) 构成概率分布列. 几何分布有一个重要的性质: **无记忆性** (memoryless property).

定理 3.5 给定常数 $p\in(0,1)$, 设随机变量 $X\sim G(p)$, 对任意正整数 m 和 n 有

$$P(X>m+n|X>m)=P(X>n).$$

证明 根据几何分布的定义, 对任何正整数 k 有

$$P(X>k)=\sum_{i=k+1}^{\infty}p(1-p)^{i-1}=p\sum_{i=k+1}^{\infty}(1-p)^{i-1}=p\frac{(1-p)^k}{1-(1-p)}=(1-p)^k\ .$$

根据条件概率的定义有

$$P(X>m+n|X>m)=\frac{P(X>m+n)}{P(X>m)}=\frac{(1-p)^{m+n}}{(1-p)^m}=(1-p)^n=P(X>n)\ ,$$

这里利用事件 $\{X>m+n\}\cap\{X>m\}=\{X>m+n\}$, 从而完成证明.

几何分布无记忆性的直观解释: 假设以前经历了 m 次失败, 从当前起至成功的次数与 m 无关. 例如, 一人买了很多次彩票都没有中奖, 于是理所当然地认为下一次应该中奖了, 然而无记忆性告诉大家: 下一次是否中奖与前面买了多少次彩票没有关系.

关于几何分布的数字特征有

性质 3.12 给定常数 $p\in(0,1)$, 若随机变量 $X\sim G(p)$, 则有

$$E[X]=1/p \qquad 和 \qquad \mathrm{Var}(X)=(1-p)/p^2\ .$$

证明 根据期望和几何分布的定义有

$$E[X] = \sum_{i=1}^{+\infty} iP(X=i) = p\sum_{i=1}^{+\infty} i(1-p)^{i-1} \ .$$

对级数展开式 $(1-x)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} x^i$ 两边先求导有 $(1-x)^{-2} = \sum_{i=1}^{\infty} ix^{i-1}$, 将 $x=1-p$ 带入可得

$$E[X] = 1/p \ .$$

对于随机变量 X 的方差, 计算

$$E(X^2) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 p(1-p)^{k-1} = p\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)(1-p)^{k-1} + 1/p \ .$$

对级数展开式 $(1-x)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$ 两边先求二阶导后乘 x 有 $\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)x^{k-1} = 2x/(1-x)^3$, 将 $x=1-p$ 带入可得

$$E(X^2) = (2-p)/p^2 \ .$$

最后有 $\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - (EX)^2 = (1-p)/p^2$, 由此完成证明.

例 3.11 古代重视生男孩但资源有限, 规定每个家庭可生一个男孩, 若没男孩可继续生育直至有一个男孩; 若已有一个男孩则不再生育. 设生男孩的概率为 $p=1/2$, 问题: 1) 一个家庭恰好有 n 个小孩的概率; 2) 一个家庭至少有 n 个小孩的概率; 3) 男女比例是否会失衡?

解 用随机变量 X 表示一个家庭的小孩个数, 其取值为 $\{1,2,\cdots\}$, 根据题意可知 $X \sim G(1/2)$, 因此一个家庭恰好有 n 个小孩的概率为

$$P(X=n) = 1/2^n \ .$$

一个家庭至少有 n 个小孩的概率为

$$P(X \geqslant n) = \sum_{k=n}^{+\infty} P(X=k) = \frac{1}{2^{n-1}} \ .$$

至于男女比例是否会失衡, 考虑一个家庭平均的孩子个数为

$$E[X] = \sum_{i\geqslant 1} P(X \geqslant i) = \sum_{i\geqslant 1} \frac{1}{2^{i-1}} = 2,$$

在平均的情形下, 一个家庭的小孩男女比例 $1:1$, 不会造成男女失衡.

几何分布考虑在多重试验中事件 A 首次发生时所进行的试验次数, 进一步考虑事件 A 第 r 次发生时所进行的试验次数. 设随机事件 A 发生的概率 $P(A)=p\in(0,1)$, 用 X 表示事件 A 第 r 次发生时的试验次数, 则 X 取值 $r,r+1,r+2,\cdots$, 其分布列为

$$P(X=k)=\binom{k-1}{r-1}p^r(1-p)^{k-r}\qquad(k=r,r+1,r+2,\cdots)\ ,$$

称随机变量 X 服从 **参数为 r 和 p 的负二项分布** 或 **帕斯卡分布**.

利用负二项式的展开式

$$(1-x)^{-r}=\sum_{i=0}^{+\infty}\binom{i+r-1}{i}x^i=\sum_{i=0}^{+\infty}\binom{i+r-1}{r-1}x^i\qquad(|x|\leqslant 1)\ ,$$

验证上述概率构成一个分布列, 以及证明期望 $E[X]=r/p$ 和方差 $\mathrm{Var}(X)=r(1-p)/p^2$. 相关证明将作为练习题.

3.5 案例分析

3.5.1 德国坦克问题

二战期间同盟国一直想确定德国坦克的生产数量, 有助于对德国战力的评估. 这个问题可描述为: 德国生产了 n 辆坦克, 编号分别为 $1,2,\cdots,n$. 盟军在战斗中任意随机击毁了 k 辆坦克, 被击毁的坦克编号分别为 $x_1,x_2,\ldots,x_k$, 能否通过被击毁的坦克编号信息来估计 n 的大小, 即估计德国生产了多少辆坦克.

在没有其它信息的情况下, 设被随机击毁的坦克是等可能事件, 即每辆坦克被击毁的概率为 $1/n$. 将问题转化为从集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ 中不放回随机抽取 k 个数, 用 X 表示抽到的 k 个数中的最大数. 则 X 的取值为 $\{k,k+1,\cdots,n\}$ 以及概率

$$P(X=i)=\binom{i-1}{k-1}\Big/\binom{n}{k}\qquad(i=k,k+1,\cdots,n)\ .$$

于是得到

$$E[X]=\sum_{i=k}^{n}i\binom{i-1}{k-1}\binom{n}{k}^{-1}=k\binom{n}{k}^{-1}\sum_{i=k}^{n}\binom{i}{k}\ .$$

针对 $\sum_{i=k}^{n}\binom{i}{k}$, 考虑从 $n+1$ 个元素中任意选取 $k+1$ 个元素, 共有 $\binom{n+1}{k+1}$ 种不同的方法. 将这些方法分成不同的情况讨论, 按选取的最大元素 $i=k+1,k+2,\cdots,n+1$ 进行分类; 若最大元素为 i, 则有 $\binom{i-1}{k}$ 种不同的方法. 于是有

$$\binom{n+1}{k+1}=\sum_{i=k+1}^{n+1}\binom{i-1}{k}=\sum_{i=k}^{n}\binom{i}{k}\ ,$$

代入期望 $E[X]$ 可得

$$E[X]=k\binom{n}{k}^{-1}\sum_{i=k}^{n}\binom{i}{k}=k\binom{n+1}{k+1}\Big/\binom{n}{k}=\frac{k(n+1)}{k+1}\ .$$

由于仅做了一次观察, 将观察中 k 个数的最大值近似期望 $E[X]$, 即 $E[X]\approx\max(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, 由此估计

$$n\approx\max(x_1,x_2,\cdots,x_n)\left(1+\frac{1}{k}\right)-1,$$

从而完成 n 的估计.

例如, 如果观察到被击毁坦克编号分别为 $17,68,94,127,135,212$, 根据上面的推到可估计出

$$n\approx 212\times(1+1/6)-1=246.$$

针对德国坦克数量的实际估计情况见下表, 可以发现利用上述所提的统计估计方法接近德国的实际产量, 比英国的情报估计准确得多.

时间	统计估计	英国情报估计	德国实际产量
1940-06	169	1000	122
1941-06	244	1550	271
1942-08	327	1550	342

3.5.2 集卡活动

很多小朋友喜欢各种集卡活动, 如奥特曼卡和叶罗丽卡等. 事实上很多成年人也对集卡游戏并不陌生, 例如 80 年代的葫芦娃洋画、或 90 年代的小虎队旋风卡等. 问题可以描述为: 市场上有 n 种不同类型的卡片, 假设每次都等可能概率、独立地收集一张卡片, 问在平均情况下至少要收集多少张卡才能收集齐 n 种不同类型的卡片.

这里先补充一个需要用到的引理, 证明将在后续章节中给出:

引理 3.1 对任意的随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 有

$$E(X_1+X_2+\cdots+X_n)=E(X_1)+E(X_2)+\cdots+E(X_n)\ .$$

用 X 表示收集 n 种不同类型的卡片所需的收集次数, 用 X_k 表示收集齐第 $k-1$ 种和第 k 种不同类型卡片之间所需的收集次数 $(k\in[n])$, 于是有 $X=X_1+X_2+\cdots+X_n$, 问题是计算期望 $E[X]$.

很容易发现随机变量 X_k 服从参数为 p_k 的几何分布. 当已经收集到 $k-1$ 种不同类型的卡片时, 再获得一张新卡的概率

$$p_k=1-(k-1)/n\ .$$

根据几何分布的性质有 $E[X_k] = 1/p_k = n/(n-k+1)$. 利用引理 3.1 有

$$E[X] = E\left(\sum_{k=1} X_k\right) = \sum_{k=1} E(X_k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n-k+1} = n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = nH(n)\ ,$$

这里 $H(n)$ 表示参数为 n 的调和数, 即 $H(n) = \sum_{k=1}^{n} 1/k$. 关于调和数有 $H(n) \in [\ln(n+1), 1+\ln(n)]$, 这是因为函数 $1/x$ 在 $x \in (0, +\infty)$ 单调递减有

$$\ln(n+1) = \int_{x=1}^{n+1} \frac{1}{x}dx \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = 1 + \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} \leqslant 1 + \int_{x=1}^{n}\frac{1}{x}dx = 1 + \ln(n).$$

最后得到 $n\ln(n+1) \leqslant E[X] \leqslant n + n\ln n$.

3.5.3 随机二叉树叶子结点的高度

随机树是机器学习中一类经典的分类或回归算法, 其构造过程非常简单: 首先给定二叉树的根结点, 然后在每一轮迭代过程中分以下两步:

- 在当前所有的叶子结点中随机选择一个叶子结点作为划分结点;
- 被选中的叶子结点变成一个内部结点, 生长出左、右两个叶子结点.

迭代进行 n 次, 最后得到一颗包含 n 个叶子结点的随机二叉树. 随机二叉树构造的示意图如下所示:

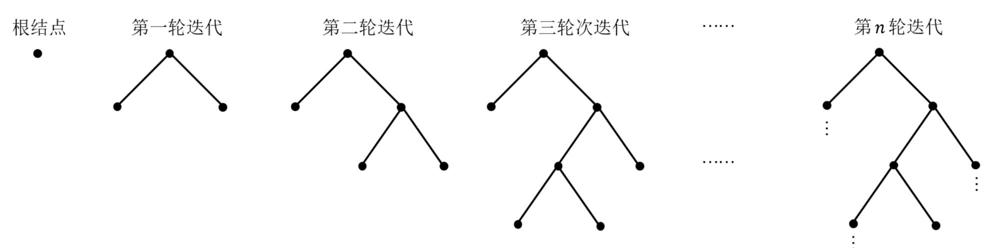


图 3.3 随机二叉树构造的示意图

叶结点的高度是从根结点到该叶结点的路径中边的条数, 对叶结点高度的估计在学习算法性能的分析中具有重要作用. 问题: 包含 n 个叶子结点的随机二叉树中一个叶结点的平均高度.

用随机变量 X 表示任意给定的一个叶结点的高度, 并用随机变量 X_i 表示在第 i 轮迭代过程中该叶子的祖先结点是否恰好被选中作为划分结点, 而在第 i 轮迭代过程中恰好有 i 个叶结点, 则有

$$X_i = \text{Ber}(1/i) \qquad 且 \qquad X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n.$$

根据期望的性质和引理 **??** 有

$$E[X] = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} 1/i = H(n) \in [\ln(n+1), 1 + \ln(n)]\ .$$