

# 用 MATLAB 解决汽车悬架的主动控制问题

伍先俊 江征风 刘小英 (武汉汽车工业大学, 430070)

**摘要** 为了解决汽车被动悬架不能兼顾乘坐舒适性和行驶稳定性的矛盾, 在汽车上采用主动悬架, 应用 MATLAB 这一优秀数学软件方便地对汽车上的悬架的主动控制力进行了求解, 对主动悬架进行了仿真分析。

**关键词** MATLAB SIMULINK 主动悬架 被动悬架 状态方程 仿真 BODE 图

## 1 前言

MATLAB (MATrix LABoratory, 即矩阵实验室) 是进行数学运算和数据处理的一种交互式程序设计的高技术工程计算语言, 广泛应用于应用数学、物理、化学、工程、经济几乎所有需要进行复杂数学计算的场合, 是一种集科学计算、图象处理、声音处理于一身的具有广泛应用前景的计算机高级编程语言。该软件使用容易, 提供了丰富的数学运算功能, 控制领域的研究人员很快利用它的这一特点开发了控制理论的专门应用程序集, 这些程序集就是与 MATLAB 配套的工具箱, 它们包括控制系统工具箱、系统辨识工具箱、鲁棒控制工具箱、多变量频域设计工具箱、 $\mu$  分析与校正工具箱、神经网络工具箱、最优化工具箱、信号处理工具箱、模糊推理系统工具箱、小波分析工具箱以及仿真软件包 SIMULINK。应用这些软件包可以既简单又方便地解决很多工程上的控制问题, 对汽车主动悬架问题的解决就是其中一例。

## 2 汽车悬架相关理论:

汽车悬架系统由弹性元件、导向元件和减振器等部分组成。弹性元件用来传递并承受垂直载荷, 它也具有一定的吸振能力; 导向元件用来传递纵向力、侧向力和由此而产生的力矩; 减振器用来迅速减小车身和车架的振动。

汽车悬架一般应具备下述功能:

(1) 承受汽车的重量;

(2) 承受并缓和汽车行驶时由路面通过车轮传给车身的冲击与振动;

(3) 在承受制动力、驱动力和转弯时产生的离心力时, 要保证操纵的稳定性: 包括汽车行驶时不要产生过大的侧倾与仰倾, 使制动时产生的“点头”现象尽可能小;

(4) 使汽车具有不足转向特性, 不产生过度转向;

(5) 使汽车与路面有较好的附着特性, 不会由于过大的振动而使车轮脱离路面;

(6) 在凸、凹不平的路面上行驶时, 为了保证必要的离地间隙, 能主动调节车身高度。

随着汽车工业的发展, 汽车制造技术的进步, 汽车性能日益完善。为了改善驾驶、乘客的舒适性, 对汽车悬架系统的要求也越来越高。传统的被动悬架的各个参数一经设计好后就无法改变, 无法主动去适应变化的外部条件, 因此 70 年代、80 年代各种主动控制悬架、半主动控制悬架应运而生。

图 1 为一 1/4 汽车模型的主动悬架模型示意图:

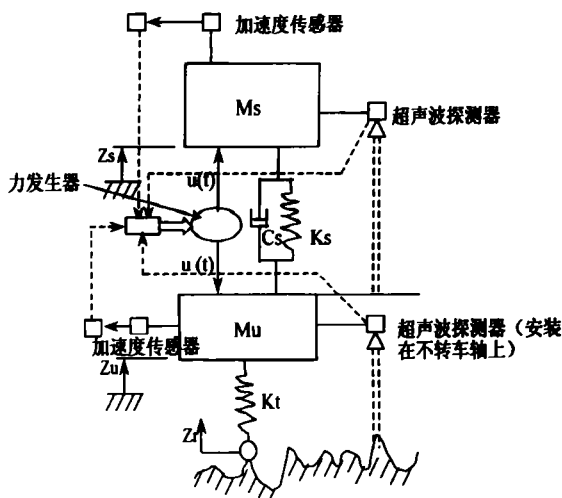


图 1 1/4 汽车模型的主动悬架模型示意图

图中各符号含义如下:

$M_s$ ——簧上质量

伍先俊, 武汉汽车工业大学硕士研究生。

江征风, 教授, 硕士导师, 现武汉汽车工业大学教务处处长, 从事汽车平顺性方面研究工作。

刘小英, 讲师, 在职博士, 从事汽车平顺性方面研究工作。

收稿日期: 1999 05 21

$K_s$ ——悬架弹簧刚度  
 $C_s$ ——悬架阻尼系数  
 $M_u$ ——簧下质量  
 $K_t$ ——轮胎刚度  
 $Z_s$ ——车身垂直位移  
 $Z_u$ ——轮胎垂直位移  
 $Z_r$ ——地面垂直位移  
 $u(t)$ ——主动控制力

该1/4汽车悬架模型由簧上质量、悬架弹簧、阻尼器、簧下质量、轮胎等效弹簧和主动控制力发生器构成,地面输入垂直扰动位移信号  $Z_r$ ,它使车身和轮胎分别产生垂直位移振动  $Z_s$ 、 $Z_u$ 。为了减小振动,在簧上质量和簧下质量之间施加一主动控制力  $u(t)$ ,该主动力的大小由检测到状态变量车身加速度、车身车轴相对位移变化量、轮胎加速度、轮胎轴与地面相对位移计算求得,这些反馈量分别由加速度传感器和超声波探测器测得。采用了该主动控制力后就能够极大地提高汽车的舒适性。主动力的计算公式是通过数学建模采用优化法得到的,而具体计算则采用 MATLAB 软件。

### 3 数学建模:

#### 3.1 主动悬架两自由度状态方程建立如下:

力学方程如下:

$$M_s \ddot{Z}_s = K_s(Z_u - Z_s) + C_s(\dot{Z}_u - \dot{Z}_s) + u(t)$$

$$M_u \ddot{Z}_u = K_s(Z_u - Z_s) - C_s(\dot{Z}_u - \dot{Z}_s) + K_t(Z_r - Z_u) - u(t)$$

方程中各变量含义如下:

$M_s$ ——簧上质量  
 $K_s$ ——悬架弹簧刚度  
 $C_s$ ——悬架阻尼系数  
 $M_u$ ——簧下质量  
 $K_t$ ——轮胎刚度  
 $Z_s$ ——车身垂直位移  
 $Z_u$ ——轮胎垂直位移  
 $Z_r$ ——地面垂直位移  
 $u(t)$ ——主动控制力

选取下述状态变量:

$$x_1 = Z_s - Z_u, x_2 = \dot{Z}_s, x_3 = Z_u - Z_r, x_4 = \dot{Z}_u$$

有下列方程:

$$\dot{x}_1 = x_2 - x_4$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{K_s}{M_s}x_1 - \frac{C_s}{M_s}x_2 + \frac{C_s}{M_s}x_4 + \frac{u(t)}{M_s}$$

$$\dot{x}_3 = x_4 - Z_r$$

$$\dot{x}_4 = \frac{K_s}{M_u}x_1 + \frac{C_s}{M_u}x_2 - \frac{K_t}{M_u}x_3 - \frac{C_s}{M_u}x_4 - \frac{u(t)}{M_u}$$

选取下述输出变量:

$$y_1 = x_2', y_2 = x_1, y_3 = x_3$$

有下列输出的表达式:

$$y_1 = \frac{K_s}{M_s}x_1 - \frac{C_s}{M_s}x_2 + \frac{C_s}{M_s}x_4 + \frac{u(t)}{M_s}$$

$$y_2 = x_2$$

$$y_3 = x_3$$

所以有状态方程为:

$$\dot{X} = AX + Bu(t) + FW(t)$$

$$Y = CX + Du(t)$$

方程中

$$X = (x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4)^T$$

$$Y = (y_1 \ y_2 \ y_3)^T$$

$$W(t) = Z^T r(t)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -\frac{K_s}{M_s} & -\frac{C_s}{M_s} & 0 & \frac{C_s}{M_s} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{K_s}{M_u} & \frac{C_s}{M_u} & -\frac{K_t}{M_u} & -\frac{C_s}{M_u} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M_s} \\ 0 \\ -\frac{1}{M_u} \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -\frac{K_s}{M_s} & -\frac{C_s}{M_s} & 0 & \frac{C_s}{M_s} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} \frac{1}{M_s} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

#### 3.2 优化求解:

主动悬架的最优控制目标是使汽车获得高的平顺性和操作稳定性,反映在物理量就是尽可能降低车身加速度和轮胎变形,同时限制悬架动绕度,防止发生悬架撞击缓冲块。此外,从控制的角度说,使控制所需的所消耗控制能量尽可能小。

所以优化指标可以表述如下:

$$J = \int_0^{\infty} [q_1 \cdot Z_s^2 + q_2 \cdot (Z_s - Z_u)^2 + q_3 \cdot (Z_u - Z_r)^2 + r \cdot u(t)^2] dt$$

式中:

$q_1, q_2, q_3, r$  加权系数,  $q_1, q_2, q_3, r$  可以根据我们对性能指标各分量的不同要求程度而定。

因为  $Y = [Z_s' \quad Z_s - Z_u \quad Z_u - Z_r]^T$

所以优化指标变为:

$$J = \int_0^{\infty} [Y^T Q Y + u(t)^T R u(t)] dt$$

式中:

$$Q = \begin{bmatrix} q_1 & 0 & 0 \\ 0 & q_2 & 0 \\ 0 & 0 & q_3 \end{bmatrix}$$

因为  $Y = CX + Du(t)$

所以

$$J = \int_0^{\infty} \{ [CX + Du(t)]^T Q [CX + Du(t)] + u(t)^T R u(t) \} dt$$

$$= \int_0^{\infty} [X^T \times (C^T Q C) \times X + 2X^T \times (C^T Q D) \times u(t) + u(t)^T (R + D^T D) \times u(t)] dt$$

令  $Q_d = C^T Q C$

$N_d = C^T Q D$

$R_d = R + D^T D$

取控制规律  $u = -KX$

则  $K = R_d^{-1} (N_d^T + B^T L)$

式中:  $K$ ——反馈矩阵

$L$ ——由下述 Riccati 方程求得

$$LA + A^T L - LBR_d^{-1} B^T L + Q_d = 0$$

分析:

由上述表达式可知, 求解主动悬架控制力的关键在于算出反馈矩阵  $K$ , 在求出主动控制力之后, 我们就可以用 MATLAB 的 SIMULINK 软件包对主动悬架进行仿真分析。但求主动悬架控制力时需要先算得  $L$  值, 我们必须求解一个高次多元方程组以获得  $L$ :

$$LA + A^T L - LBR_d^{-1} B^T L + Q_d = 0$$

解该高次多元方程组若采用手工计算, 从计算效率上和计算精度上来说, 都是不可行的, 采用 C 语言或是 FORTRAN 语言编程也得费你一番工夫, 而使用 MATLAB 软件一个 LQR 函数就可以轻而易举地帮我们算出  $L$ , 求出  $L$  后的主动悬架进行仿真就很容易了。下面我们用一个实例来给以说明。

#### 4 实例分析与仿真:

下面对一旅行车后悬架作分析:

— 52 —

表 1 结构参数如下

名称	符号	数值
簧上质量	$M_s$	1091.49kg
簧下质量	$M_u$	162.51kg
悬架弹簧刚度	$K_s$	94835N/m
悬架阻尼系数	$C_s$	3235N/m
轮胎刚度	$K_t$	1164593N/m

(1)  $K$  值求解:

在建立数学模型之后, 可以直接带入具体参数求解了。

选取  $r=1, q_1=14400, q_2=3.11 \times 10^8, q_3=7.35 \times 10^9$

在将上述参数代入  $A, B, R_d, Q_d, N_d$  的代数表达式(参看数学建模部分), 求得  $A, B, R_d, Q_d, N_d$  的具体值后, 我们可以调用 MATLAB 的 LQR 函数即可求得相应的反馈矩阵  $K$  了。

LQR 函数的调用格式为  $[K, L, E] = \text{LQR}(A, B, R, Q, N)$

$A, B, R, Q, N$  的参数就相应代入上述的  $A, B, R_d, Q_d, N_d$ 。

(其中函数返回值  $K$  就是反馈矩阵)。

最后求得  $K = [3810.94 \quad 1534.01 \quad -9258.17 \quad -350.33]$

(2) 仿真分析:

在求出  $K$  后我们可以利用 SIMULINK 建立动态仿真模型进行仿真了。

用 SIMULINK 建立主动悬架控制系统框图, 其模型框图如下(图 2):

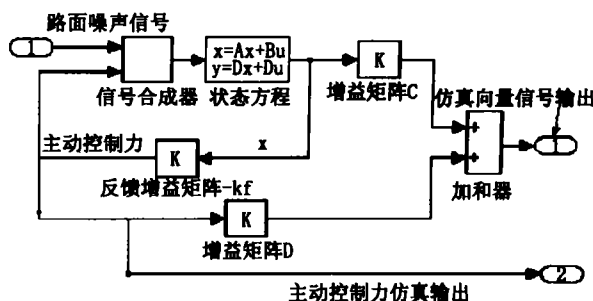


图 2 主动悬架控制系统框图

图中“状态方程”方框为频域加权后系统的状态方程, 输入路面垂直振动速度白噪声信号, 输出信号(1)为  $(Z_s', Z_s - Z_u, Z_u - Z_r)^T$ , 即对应为车身加速度、车身车轴间隙变化、车轴地面间隙变化, 输出信号(2)为主动控制力( $u$ )大小。而方框  $-k_f$  即为我们通过优化之后算得的最优反馈矩阵  $K$  的相反值,  $-k_f$  与状态变量相乘后得到了主动控制力的大小, 该反馈主动控制力最后施加于主动悬架系统上。

主动悬架时域响应分析框图如下(图 3):

图中方框“主动悬架模型”为上述主动悬架模型的封装, 输入地面垂直振动的速度白噪声, 输出为车身加速度

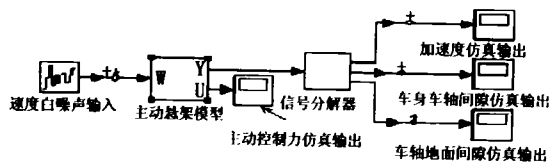


图3 主动悬架分析框图

( $Z's$ ), 车身车轴间隙( $Z_s - Z_u$ ), 车轴地面间隙( $Z_u - Z_r$ )及主动控制力( $u$ )。

输入悬架的白噪声的功率谱密度由下决定:

假设我们以 B 级路面作为测试输入, 并假设汽车时速为 60km/h。

根据路面谱的时间功率谱密度公式(取  $w=2$ )。

$$G'_q(f) = (2\pi f)^2 G_q(f) = 4\pi^2 G_q(n_0) n_0^2 v。$$

又 B 级路面的  $G_q(n_0) = 64 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{m}^{-1}$ 。

代入公式:

$$G'_q(f) = 4\pi^2 \times 64 \times 10^{-6} \times 60000 \times (0.1)^2 / 3600 = 0.00042 \text{ m}^2/\text{s}$$

(上述计算公式由参考文献 1 查得)。

最后可以得到相应的  $Z's$ ,  $Z_s - Z_u$ ,  $Z_u - Z_r$  及  $u$  时域响应曲线。

下图(图 4)即为主动控制力的时域响应曲线:(横轴代表时间, 单位 s, 纵轴代表力的大小, 单位为 N)

由图 4 可以看出主动控制力大小在 400 牛顿之内, 这在物理上是可以实现的, 因此主动控制力是可行的。

相应的我们可以对比一下主动悬架与被动悬架的舒适性对比, 在建立相应主动悬架与被动悬架对比系统模型框图, 可以得到主动悬架与被动悬架的加速度  $a$  的 BODE 图(图 5)对比(由 MATLAB5.2 的仿真软件包 SIMULINK 得出):(该图的上半部分为幅频关系图(图 5-1), 下面为幅频关系图(图 5-2);带“X”的线为主动悬架的曲线, 实线为被动悬架的曲线)

由加速度  $a$  的 BODE 图(图 5-1)可知在汽车的悬架系统上采用了主动控制之后, 汽车在 1—4Hz 的频率段车身垂直振动加速度得到减少(带“X”的曲线在实曲线下面), 即汽车的舒适性得到了提高, 效果是明显的。

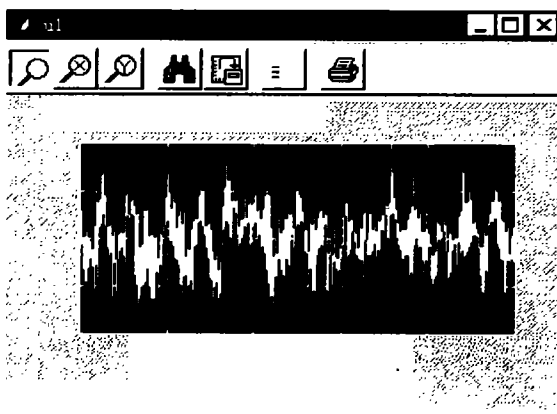


图4 主动控制力时域响应曲线

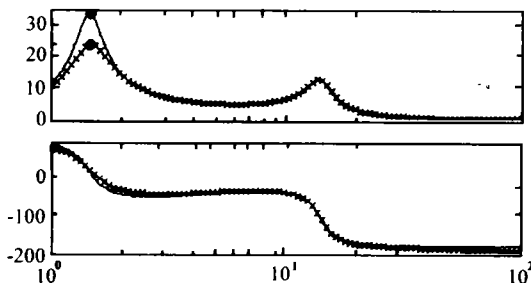


图5 主动悬架、被动悬架车身加速度 BODE 图对比

## 5 结束语

科学计算软件在一定程度上决定着一个社会的科技的进步, 好的科学计算软件对于社会各行各业都有积极地推动和促进作用。由于 MATLAB 软件包的易用性、可靠性、通用性和专业性, 并且它将一般的科学计算和高深的专业应用结合在一起, 它可以被应用来解决很多工程上的问题。

## 参考文献

- [1] 余志生, 汽车理论, 机械工业出版社, 1990
- [2] 周凤岐等, 现代控制理论及其应用, 电子科技大学出版社, 1993
- [3] 薛定宇著, 控制系统计算机辅助设计——MATLAB 语言及应用, 清华大学出版社, 1996

# Solution of Automobile Active Suspension Control Problem Using MATLAB Software

Wu Xianjun Jiang Zhengfeng Liu Xiaoying (Wuhan Automobile Polytechnic University, 430070)

(下转第 14 页)



图3 潜望镜观察到的可视化效果



图4 导演室观察到的可视化效果

## 7 结束语

可视化研究在我国已开展多年,并取得了许多研究成果,但有关军事方面的可视化研究并不多见。本文正是基于这种情况,对潜艇战法的可视化方法和关键技术进行了深入研究,取得了突破性成果。并将该成果及时应用于潜艇战法的研讨、教学和部队的作战训练。随着计算机技术的不断发展,可视化技术在军事领域的应用将更加广泛。

## 参考文献

- [1] 李汉清,宋裕农. 潜艇作战虚拟场景系统中的实体建模. 北京:装备指挥技术学院学报,1999.10(5)
- [2] 李达生,宋裕农编. 指挥自动化系统及其在潜艇上的应用. 北京:海潮出版社,1995
- [3] 宋裕农等. VR在潜艇作战模拟中的应用. 太原:火力与指挥控制,1998.23(4)
- [4] 肖滨等. 基于PC的虚拟现实系统研究. 青岛:青岛-香港国际计算机会议论文集,1999.10
- [5] Elliot S, Miller P. 3D Studio MAX 技术精粹. 北京:清华大学出版社,1997.9

## The Technology in the Visualization of Submarine Combat Simulating

Li Hanqing Song Yunong (Navy Submarine Academy Qingdao, 266071)

Li Lu (701 Research Institute of China Shipping Parent Company Wuhan, 430064)

**ABSTRACT** This paper describes one method of research on visualization of submarine combat by means of Virtual Reality. The format of network data and the scheme of hardware system are given. The key technology in creating object model and nature scene and the method of displaying are discussed.

**KEYWORDS** Visualization technology Virtual reality Simulation Submarine combat method

(上接第53页)

**ABSTRACT** To solve the conflict between ride comfortable and steer stabilisation of automobile passive suspension, active suspension is used on automobile. MATLAB, one of the most famous software to solve maths problem, is used to work out the active control force of active suspension and simulate active suspension system.

**KEYWORDS** MATLAB SIMULINK Active suspensive Passive suspensive State space equation Simulation BODE plot