实验十三　弦上驻波实验　实验报告

物理学院　庄易诚

2024 年 6 月 2 日

目录

1 实验数据和现象及其分析、处理和结论

1.1 测量弦线线密度

使用螺旋测微器测得弦的直径为

$$d_e = (1.160 \pm 0.004)\,\mathrm{mm}$$

用螺旋测微器测得与其材质和颜色相同，直径最接近的标准弦直径为

$$d_b = (1.168 \pm 0.004)\,\mathrm{mm}$$

用毫米钢尺测得样品长度

$$l = (0.7730 \pm 0.0005)\,\mathrm{m}$$

用电子天平测量其质量

$$m_0 = (5.60 \pm 0.02)\,\mathrm{g}$$

弦的线密度为

$$\rho = \frac{m_0}{l} = 7.244 \times 10^{-3}\,\mathrm{kg/m}$$

其不确定度

$$\sigma_\rho = \rho\sqrt{(\frac{\sigma_{m_0}}{m_0})^2 + (\frac{\sigma_l}{l})^2} = 0.03\mathrm{kg/m}$$

因此标准弦线的线密度的测量值为

$$\rho = (7.24 \pm 0.03) \times 10^{-3}\,\mathrm{kg/m}$$

1.2 对同一弦线，固定有效长度和张力，测量共振频率与驻波波腹个数的关系，并测定波速

实验所用 Driver 输出的驱动力频率与信号发生器的频率一致。实验中保持有效弦长 L=60.0cm，并固定弦的张力为 T=3mg。

用电子天平测量砝码质量为 $m = (1000.32 \pm 0.02)g$, 取 $g = 9.8m/s^2$，并且忽略 g 带来的不确定度。因此弦的张力为 $T = 3mg = (29.4094 \pm 0.0006)N$，由此可见，张力对不确定度的贡献相比线密度可以忽略。

根据理论公式：

$$v_t = \sqrt{\frac{T}{\rho}} = 63.73\mathrm{m/s}$$

其不确定度为：

$$\sigma_v \approx \frac{v\sigma_\rho}{2\rho} = 0.13\mathrm{m/s}$$

因此, 理论值为：

$$v_t = (63.73 \pm 0.13)\mathrm{m/s}$$

波动弦线，估计此时的基频为 54Hz。测量共振时 f-n 关系结果如表 1 所示。其中 n 代表波腹个数，f（信号源）代表信号发生器上的频率读数，f 代表示波器测得的频率读数，即为弦线振动的频率，之后的表格记号同理。

表 1: 共振频率与驻波波腹个数关系表

n	f(信号源)/Hz	f/Hz
1	54.30	54.25
2	109.80	109.6
3	164.60	164.8
4	219.30	218.9
5	275.00	274.8

从表中可以看出，f 和 f（信号源）几乎相等。对 f-n 做线性拟合，作图如下。

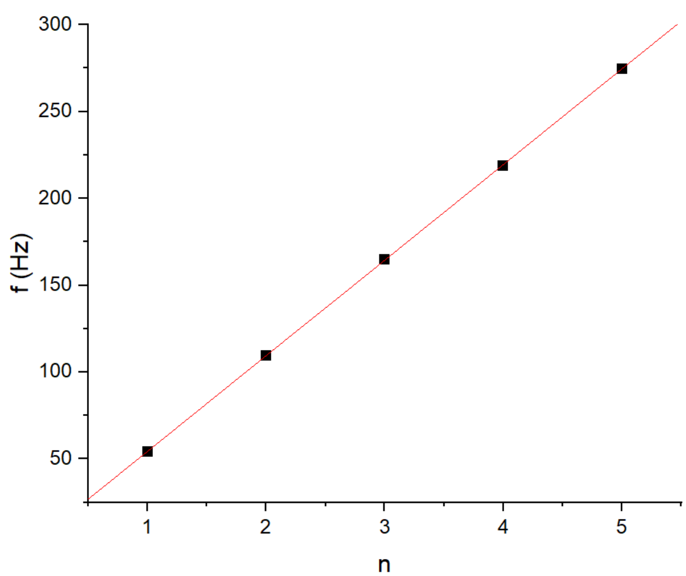

图 1: f-n 关系图

拟合结果与斜率的不确定度如下：

$$f = an + b$$
$$a = 55.04Hz$$
$$b = -0.65Hz$$
$$r = 0.999990$$
$$\sigma_a = a\sqrt{\frac{1/r^2 - 1}{n-2}} = 0.14Hz$$

这说明线性关系很好。估计测量 L 的允差 e=0.1cm, 其不确定度 $\sigma_L = \frac{e}{\sqrt{3}}$. 由理论公式，$f = \frac{n}{2L} \times v$，因此有 $v = 2aL$, 计算得

$$v = 66.048m/s$$
$$\sigma_v = v\sqrt{(\frac{\sigma_a}{a})^2 + (\frac{\sigma_L}{L})^2} = 0.18m/s$$

可以看出，斜率 a 对 v 的不确定度的贡献占主导，波速的测量结果为：

$$v = (66.05 \pm 0.18)m/s$$

可以看出它略大于理论值。对比理论值，其相对误差为：

$$\eta = |\frac{v - v_t}{v_t}| = 3.6\%$$

该误差在可以接受的范围内。

由于 $\rho = \frac{T}{v^2}$, 线密度的测量结果为：

$$\rho = (6.76 \pm 0.03) \times 10^{-3}kg/m$$

与理论值有所偏差。

1.3 从起振到共振的实验现象与判断弦线共振的判据

将 Detector 放在轨道上，用手拨动弦起振。可以看到示波器上显示的频率在不断地波动，其最小值近似在弦的固有频率附近，据此可以快速找到基频。

加入 Driver 后，弦中会出现基波、与驱动力频率相同、驱动力频率二倍等波的叠加，振幅较小并且会不断地波动，示波器上显示的频率会跳动。随着时间进行，基波会逐渐消失，仅留下驱动力频率的波。随着频率逐渐靠近共振频率，可以看出基波消失速程度随着驱动频率接近共振频率而增加，能量逐渐积累，观察弦线可以看出振动变得剧烈，并且能听到声音。接近固有频率时，可以观察到示波器上输出的信号迅速增大，弦线剧烈振动，发出明显的单频振动的声音。当频率超过共振频率后，能量会突然释放，振幅剧烈减小。此后反向调节频率，则会出现类似的现象。

另外，由于本人第一次所用的 Driver（输出信号的频率为信号发生器示数的两倍）杂波干扰较大，波形很难稳定，因此在老师的帮助下换了 Driver（输出信号的频率与信号发生器示数

相同，内部可能是永磁体）。我发现对于不同的 Driver，波形和起振难易有较大区别。另外，对不同 Driver 和 detector 的位置，探测到的波形、起振难易也会有较大差别。当起振器处于附近共振频率对应驻波的波节附近时，起振会比较困难。

判据总结如下： 将探测器放在波腹附近。达到共振时，示波器上的波形不会波动，最稳定，振幅达到极大值，示波器上显示的频率相对稳定且与信号源频率几乎相等。弦线剧烈振动，发出明显的单频振动的声音。用手轻微扰动或按住弦，短时间内波形会逐渐恢复（以区别于伪共振）。在共振频率附近调节，振幅会迅速衰减。

此外，移动 Detector，能观察到波腹波节交替出现，并且波节等间距出现。用 L 除以相邻波节间的距离可以求得波腹数目。

1.4 对同一弦线，固定有效长度，改变张力测量共振频率（基频）

固定有效弦长为 L=60.0cm，调整弦的张力，测量弦的基频。测量结果如表 2 所示。表中 T 为张力。

表 2: 基频与弦线张力的关系的测量结果

T/mg	f(信号源)/Hz	f/Hz	lnT	lnf	$\sqrt{T}/(mg)^{1/2}$	f^2/Hz^2
1	33.40	33.24	0.000	3.503	1.000	1104
2	45.50	45.61	0.693	3.820	1.414	2080
3	54.30	54.67	1.099	4.000	1.732	2988
4	63.10	63.11	1.386	4.145	2.000	3982
5	69.40	70.25	1.609	4.252	2.236	4935

1.4.1 lnf-lnT 关系

以 $\ln T$ 为横轴，$\ln f$ 为纵轴进行作图，结果如图 2 所示。

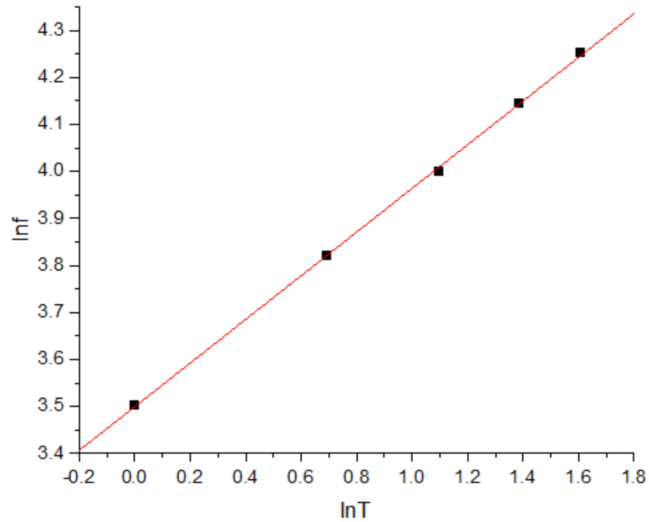

图 2: lnf-lnT 关系图

拟合结果为

$$a = 0.464$$
$$b = 3.499$$
$$r = 0.9998$$

斜率不确定度为

$$\sigma_a = a\sqrt{\frac{1/r^2 - 1}{n-2}} = 0.006$$

故斜率测量结果为

$$a = 0.464 \pm 0.006$$

与理论值 0.5 较为接近，结论是共振频率近似正比于张力的平方根。

但是，实验值小于 0.5，个人猜测可能的原因有小振动近似带来的误差（我实验中尽管调低了电压，但弦的振动幅度还是略大），系统的能量损耗，杂波和噪声的干扰，真实的张力与我们所预期的 kmg 并不相同。

1.4.2 $f - \sqrt{T}$ 关系

以 $\sqrt{T}$ 为横轴，f 为纵轴进行作图，结果如图 3 所示。拟合结果为

$$a = (29.90 \pm 0.24) Hz/(mg)^{0.5}$$
$$r = 0.99990$$

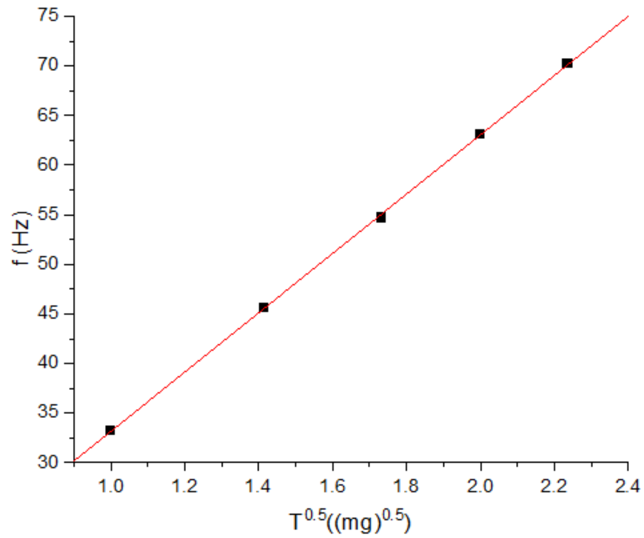

图 3: $f - T^{\frac{1}{2}}$ 关系图

可见线性关系较好，进一步证明共振频率近似正比于张力的平方根。截距并不为 0，这也印证了取对数拟合后斜率不严格等于理论值 0.5。由于基频时 $f = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\rho}}$, 其中 $T = kmg$, 据此可以求出弦线的线密度:

$$a = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{mg}{\rho}}$$

$$\rho = mg(\frac{1}{2aL})^2 = 7.61 \times 10^{-3} kg/m$$

从量级上可以看出线密度的不确定度由 a 主导，因此估算不确定度如下:

$$\sigma_\rho = \frac{2\rho\sigma_a}{a} = 0.12 \times 10^{-3} kg/m$$

因此:

$$\rho = (7.61 \pm 0.12) \times 10^{-3} kg/m$$

可见该值相对于理论值偏大。

1.4.3 $f^2 - T$ 关系图

以 T 为横轴，f^2 为纵轴进行作图，结果如图 4 所示。拟合结果为

$$a = (956 \pm 7) Hz^2/mg$$

$$b = 148.6 Hz^2$$

$$r = 0.9998$$

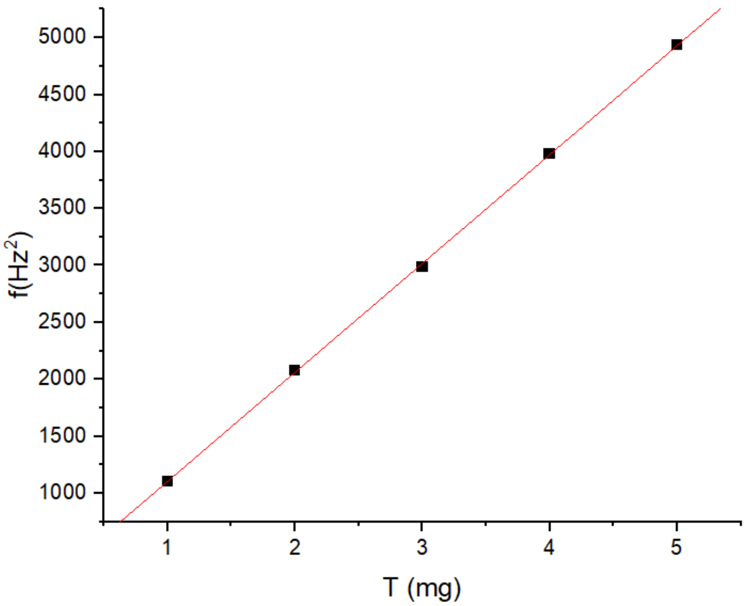

图 4: $f^2 - T$ 关系图

可以发现横截距为 $-\frac{b}{a} = -0.155mg$, 表征张力的误差，它是负值。一个可能解释是系统所受张力可能比 kmg 要大，存在一个附加的张力，我猜测一个原因是：固定弦的卡板使得非有效长度段水平条件不能被严格保证，使得弦的张力增大。当然，其它系统误差（比如杠杆无法严格水平）以及取点造成的统计误差等都会对截距产生影响。

1.5 对同一弦线，固定张力，改变弦线有效长度测量共振频率（基频）

固定弦张力为 $3Mg$，调整弦的有效长度，测量弦的基频。测量结果如表 3 所示。

表 3: 基频与弦长的关系的测量结果

L/cm	f(信号源)/Hz	f/Hz	lnL	lnf	L^{-1}/cm^{-1}
30.00	109.40	109.6	3.401	4.697	0.033
35.00	95.30	95.21	3.555	4.557	0.029
40.00	82.20	82.23	3.689	4.410	0,025
45.00	73.10	73.30	3.807	4.295	0.022
50.00	65.50	65.85	3.912	4.187	0.020
55.00	59.40	59.24	4.007	4.082	0.018
60.00	54.30	54.25	4.094	3.994	0.017

以 $\ln L$ 为横轴，$\ln f$ 为纵轴进行作图，结果如图 5 所示。

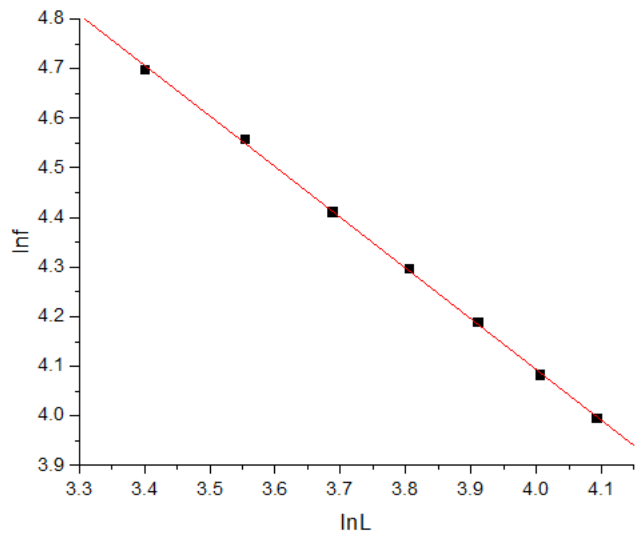

图 5: $lnf - lnL$ 关系图

拟合结果为

$$a = -(1.02 \pm 0.01)$$
$$b = 8.18$$
$$r = -0.9997$$

与理论值-1 极其接近，说明共振频率近似与弦长成反比。
以 L^{-1} 为横轴，f 为纵轴进行作图，结果如图 6 所示。

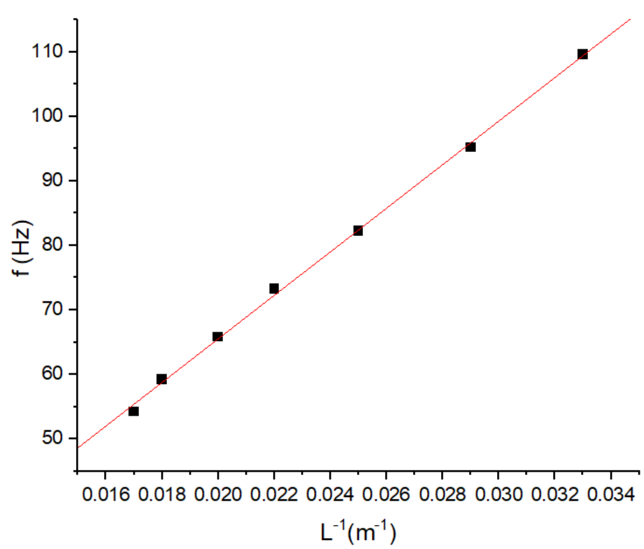

图 6: $f - L^{-1}$ 关系图

拟合结果为

$$a = (33.8 \pm 0.6)m/s$$
$$b = -1.984Hz$$
$$r = -0.9993$$

由于 $f = \frac{v}{2L} = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\rho}}$，可以求出波速和线密度：

$$v = 2a = (67.6 \pm 1.2)m/s$$
$$\rho = (6.43 \pm 0.23) \times 10^{-3} kg/m$$

可以看出与理论值有所偏差。

2 分析与讨论

2.1 误差来源的分析

2.1.1 测量弦线密度时的误差分析

如果不考虑样品和实际的弦的差异（这部分的影响存在但难以做分析），在测量弦线密度时，主要误差是弦线无法伸直对长度测量造成的影响，这会导致测得的弦密度偏大。同时，由于实验中所用弦的直径比样品弦小，故这也会导致测得的线密度偏大。另外，实验所用弦线线密度可能会因为弦线张紧而减小，这也会带来误差。

可以进行如下估算：假设弦未完全伸直的部分约 1.5cm(就实际测量情况，这个估计较为保守)，计算新的波速，得到结果为

$$v' = v\sqrt{\frac{l + \delta_l}{l}} == 64.34\,\mathrm{m/s}$$

与实验值更接近。可见，实验中一部分误差来自于计算理论值时所用参数的误差，也就是“标定值”的误差。张力的实际值和标定值 kmg 之间也存在误差。

2.1.2 判定共振频率所用依据所引起的误差

在本实验中，用来判定共振频率的依据是振幅达到极大及其相关现象。但系统中存在能量的积累与释放，会对共振频率的测量造成干扰。在实验中，我观察到在共振点附近上下做较大调节时，即短时间内朝不同方向趋近共振频率时，观察到的共振频率会有轻微的偏移，这可能是能量积累与释放干扰了判断。

轻微扰动时，可能会改变边界条件，造成共振频率发生变化，为了检验共振所施加的干扰也会带来误差。

2.1.3 小振动近似的误差

在共振频率附近，弦的振动较为剧烈。此时弦线的响应会偏离线性，因此驻波公式本身会存在误差。这可以通过调低电压来改善，但过小的振动会增加噪声的影响。

2.1.4 实验装置和非线性效应带来的误差

由于 Driver 和 Detector 之间存在互感，距离过近时会带来较大的噪声。Driver 输出的不是严格的正弦波，输出也不够稳定，在我换 Driver 前它的影响尤其显著，输出二倍频的 Driver 更容易混入杂波。弦线也无法保证均匀，Detector 无法严格还原波形。他们都会带来非线性效应的系统误差。由于 Driver 是电磁感应驱动，二倍频的影响会较大，由于磁滞效应等原因，波形不稳。

一个可能的减小误差的方法是：将 Detector 放在探测器放在波腹上（对应于二次谐波的波节），这样可以滤去二次谐波的干扰。

另外，我尝试从 0 开始逐渐增加信号源的电压偏置。我观察到，在加入偏置的情况下，弦更容易起振，波形更稳，接近共振时也是如此。随着偏置的加强，波形离基频正弦波也越来越近。偏置可能对高次谐波有一定的抑制作用。

2.1.5 卡板带来的误差

之前已经分析过，卡板的几何限制会导致非有效长度段弦线无法严格平行于水平面，这会导致弦的张力存在误差。尤其是在探究频率和有效长度的关系时，会来回移动卡版，这时的影响会更大。

其次，由于固定弦的卡板有一定厚度，弦无法保证边界条件是在某个特定的点保持静止，这会使有效长度不准确，振动时边界条件也并不严格。另外，振动时，有效长度会有被拉长的趋势，这会造成共振频率发生轻微的漂移。

2.1.6 统计误差

较准确的线性拟合要求数据点尽量足够多并且分布均匀，这在对数拟合中难以做到。对于不均匀的情况，拟合直线可能会更偏向那些较稀疏的点，另外，取点过少。这一项误差也比较大。

2.2 可能观察到的倍频现象

一开始所用的 Driver 输出的驱动力频率是信号源的两倍，这是因为 $F = (m \cdot \nabla)B$,m 正比于 B，因此 F 的频率为信号源的两倍。后来，我换用了另一个 Driver，输出的驱动力频率与信号源一致（可能因为内部是永磁体）。但在示波器上有时仍然能观察到少量二倍频的成分。（具体表现为有时波形有两个不同高度的峰，显示频率会跳出二倍频）对信号做傅立叶展开，二倍频在高次谐波中贡献最大。尝试调节驱动力频率至基波的一半，可以观察到轻微的类似共振的现象，说明确实有二倍频的存在。为了减小二倍频的干扰，可以将 Detector 放在驻波波腹上（对应于二倍频的波节），另外设定偏置，以降低二倍频的干扰。

2.3 小振动条件满足程度对实验结果的影响

只有小振动条件满足时，才能认为弦线的响应是线性的，高阶项可以被忽略。理论上共振时弦的振动频率等于驱动力的频率。(如果不考虑装置的非线性效应) 但由于共振时振动幅度较大，小振动不能严格满足，因此会有非线性项，对应于高次谐波的产生，如二倍频，波形会更大程度的偏离正弦。同时，振动情况可能会与初值条件有关，加扰动后会导致共振点变化。另外，振动如果过大会导致有效长度变化 (弦被拉长)。做实验时，应调整电压，使振动幅度合适。