自觉遵守考场纪律 如考试作弊 此答卷无效

姓名______ 学号______ 密……封……线

东 南 大 学 考 试 卷 (B)

课程名称 数学物理方法 考试学期 18-19-3 得分______

适用专业 面上 考试形式 闭卷 考试时间长度 120分钟

题目	一	二	三	四	五
得分					

注意：本份试卷可能会用到以下公式：

1、$\mathscr{L}[\sin\alpha t](p)=\dfrac{\alpha}{p^2+\alpha^2}$，$\mathscr{L}[\cos\alpha t](p)=\dfrac{p}{p^2+\alpha^2}$，$\mathscr{L}[t^n\mathrm{e}^{at}](p)=\dfrac{n!}{(p-a)^{n+1}}$;

2、$\mathscr{L}[f(t-t_0)H(t-t_0)](p)=\tilde{f}(p)\mathrm{e}^{-t_0p},\ t_0\geq 0$;

3、第二Green公式：$\displaystyle\int_\Omega[v\Delta u-u\Delta v]\mathrm{d}x=\oint_{\partial\Omega}\left[v\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial v}{\partial n}\right]\mathrm{d}S$

4、$(x^\nu J_\nu(x))'=x^\nu J_{\nu-1}(x),\ (x^{-\nu}J_\nu(x))'=-x^{-\nu}J_{\nu+1}(x)$.

一 填空题 $(5\times 6'=30')$

1. 在细杆的热传导过程中，若细杆一端绝热，另一端与温度为零的介质有热交换，则热传导方程的边界条件可表示为 ________.

2. 用特征函数展开法求解初边值问题

$$\begin{cases}u_t-a^2u_{xx}=f(x,t), & 0<x<l,t>0,\\ u(0,t)=0,\ u_x(l,t)=0, & t>0,\\ u(x,0)=\varphi(x), & 0\leq x\leq l\end{cases}$$

时，需要用到的特征函数系是____________.

3. 已知$f(x)$的Fourier变换为$\hat{f}(\omega)$, 则函数$f(2x-2)$的Fourier变换为________.

4. 对于一维波动方程

$$\begin{cases}u_{tt}-a^2u_{xx}=0,-\infty<x<\infty,t>0,\\ u(x,0)=\varphi(x),\ u_t(x,0)=\psi(x),\ -\infty<x<\infty,\end{cases}$$

则由d'Alembert公式，解在点(x_0,t_0)的依赖区间是________.

5. 利用恒等式$\mathrm{e}^{ix\sin\theta}=\displaystyle\sum_{-\infty}^{\infty}J_n(x)\mathrm{e}^{in\theta}$, 计算积分$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\cos(x\sin\theta)\mathrm{d}\theta=$______(计算结果用Bessel函数表示).

二 简单计算 $(4\times 8'=32')$

1. 对非齐次边界条件化为齐次边界条件的初边值问题：设有初边值问题

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=\sin x, & 0<x<\pi, t>0,\\ u(0,t)=1,\ u_x(\pi,t)=0, & t\geq 0,\\ u(x,0)=\varphi(x), u_t(x,t)=0, & 0<x<\pi, \end{cases}$$

求函数$w(x)$, 使得利用变换$u(x,t)=v(x,t)+w(x)$把未知函数v化为满足一个齐次方程及齐次边界条件的初边值问题，并写出v所满足这个齐次方程齐次边界条件的初边值问题.

2. 求函数$f(t)=\dfrac{1-\cos t}{t}$的Laplace变换.

线

封

密

3. 利用叠加原理，d′Alembert公式和降维法理论求解初值问题

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz})=f(x,t) & (x,y,z)\in\mathbb{R}^3, t>0, \\ u(x,y,z,0)=\varphi(y)+\psi(z), u_t(x,y,z,0)=xh(z), & (x,y,z)\in\mathbb{R}^3, \end{cases}$$

其中函数f,h,φ,ψ都是连续函数.

线

4. 用镜像法构造与下列上半球域上边值问题对应的Green函数，并用此Green函数建立如下边值问题的求解公式

封

$$\begin{cases} -\Delta u(x)=0, & x_1^2+x_2^2+x_3^2<R^2, x_3>0, \\ u(x_1,x_2,x_3)=0, & x_1^2+x_2^2+x_3^2=R^2, x_3>0, \\ u_{x_3}(x_1,x_2,0)=h(x_1,x_2), & x_1^2+x_2^2\le R^2. \end{cases}$$

密

三 (13′) 用分离变量求解Laplace方程边值问题

$$\begin{cases} \Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{yy} = 0, & 0 < x < 1, 0 < y < 1, 0 < z < 1, \\ u(0, y, z) = u(1, y, z) = 0, & 0 \le y, z \le 1, \\ u(x, 0, z) = u(x, 1, z) = 0, & 0 \le x, z \le 1, \\ u(x, y, 0) = 0,\ u(x, y, 1) = \sin \pi x \sin 3\pi y. \end{cases}$$

密 …… 封 …… 线

四　(12′) 已知Fourier变换公式

$$F\Big[\frac{\sinh ax}{\sinh \pi x}\Big](\omega) = \frac{\sin a}{\cosh \omega + \cos a},\ 0 < a < \pi,$$

利用Fourier变换法求解Laplace方程边值问题

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & -\infty < x < \infty,\ 0 < y < 1, \\ u(x,0) = 0,\ u(x,1) = f(x), & -\infty < x < \infty. \end{cases}$$

密　　封　　线

五 (13′) 设有下列圆盘的振动问题

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2(u_{rr}+\dfrac{1}{r}u_r+\dfrac{1}{r^2}u_{\theta\theta})=0, & 0<r<1,\ 0\le\theta\le 2\pi,\ t>0, \\ |u(0,\theta,t)|<\infty,\ u(1,\theta,t)=0, & 0\le\theta\le 2\pi, t>0, \\ u(r,\theta,0)=f(r),\ u_t(r,\theta,0)=g(r), & 0\le r\le 1, 0\le\theta\le 2\pi. \end{cases}$$

(1) 证明此问题的解与θ无关. (2) 用分离变量法及Bessel函数理论推导此问题的求解公式.

注：$N_{nm}^2=\int_0^1 xJ_m^2(\alpha_{mn}x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}J_{m+1}^2(\alpha_{mn})$, 其中$\alpha_{mn}$是 $J_m(x)$的第n个正零点.

线

封

密