自觉遵守考场纪律 如考试作弊 此答卷无效

姓名________ 学号________

……线……封……密……

东 南 大 学 考 试 卷 (B)

课程名称 数学物理方法 考试学期 18-19-3 得分________

适用专业 面上 考试形式 闭卷 考试时间长度 120分钟

题目	一	二	三	四	五
得分					

注意：本份试卷可能会用到以下公式：

1、$\mathscr{L}[\sin\alpha t](p)=\dfrac{\alpha}{p^2+\alpha^2}$，$\mathscr{L}[\cos\alpha t](p)=\dfrac{p}{p^2+\alpha^2}$，$\mathscr{L}[t^n e^{at}](p)=\dfrac{n!}{(p-a)^{n+1}}$；

2、$\mathscr{L}[f(t-t_0)H(t-t_0)](p)=\tilde{f}(p)e^{-t_0p},\ t_0\geq 0$;

3、第二Green公式：$\displaystyle\int_\Omega[v\Delta u-u\Delta v]\mathrm{d}x=\oint_{\partial\Omega}\left[v\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial v}{\partial n}\right]\mathrm{d}S$

4、$(x^\nu J_\nu(x))'=x^\nu J_{\nu-1}(x),\ (x^{-\nu}J_\nu(x))'=-x^{-\nu}J_{\nu+1}(x)$.

一 填空题 $(5\times 6'=30')$

1. 在细杆的热传导过程中，若细杆一端绝热，另一端与温度为零的介质有热交换，则热传导方程的边界条件可表示为 $\underline{u_x(0,t)=0,u_x(l,t)+\sigma u(l,t)=0,\sigma>0}$.

2. 用特征函数展开法求解初边值问题

$$\begin{cases} u_t-a^2u_{xx}=f(x,t), & 0<x<l,t>0,\\ u(0,t)=0,\ u_x(l,t)=0, & t>0,\\ u(x,0)=\varphi(x), & 0\leq x\leq l\end{cases}$$

时，需要用到的特征函数系是$\underline{\sin\frac{2n-1)\pi x}{2l},\ n=1,2,\cdots}$.

3. 已知$f(x)$的Fourier变换为$\hat{f}(\omega)$, 则函数$f(2x-2)$的Fourier变换为$\underline{\frac{1}{2}e^{-i\omega}\hat{f}\left(\frac{\omega}{2}\right)}$.

4. 对于一维波动方程

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=0,-\infty<x<\infty,t>0,\\ u(x,0)=\varphi(x),\ u_t(x,0)=\psi(x),\ -\infty<x<\infty,\end{cases}$$

则由d'Alembert公式，解在点(x_0,t_0)的依赖区间是$\underline{[x_0-at_0,x_0+at_0]}$.

5. 利用恒等式$e^{ix\sin\theta}=\displaystyle\sum_{-\infty}^{\infty}J_n(x)e^{in\theta}$, 计算积分$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\cos(x\sin\theta)\mathrm{d}\theta=\underline{2\pi J_0(x)}$(计算结果用Bessel函数表示).

二 简单计算 $(4\times 8'=32')$

1. 对非齐次边界条件化为齐次边界条件的初边值问题：设有初边值问题

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=\sin x, & 0<x<\pi, t>0, \\ u(0,t)=1,\ u_x(\pi,t)=0, & t\geq 0, \\ u(x,0)=\varphi(x), u_t(x,t)=0, & 0<x<\pi, \end{cases}$$

求函数$w(x)$, 使得利用变换$u(x,t)=v(x,t)+w(x)$把未知函数v化为满足一个齐次方程及齐次边界条件的初边值问题，并写出v所满足这个齐次方程齐次边界条件的初边值问题.

解：函数$w(x)$满足问题

$$\begin{cases} -a^2w''=\sin x, & 0<x<\pi, \\ w(0)=1,\ w'(\pi)=0. \end{cases}$$

求得$w(x)=\frac{x+\sin x}{a^2}+1$. 于是$v$所满初边值问题

$$\begin{cases} v_{tt}-a^2v_{xx}=0, & 0<x<\pi, t>0, \\ v(0,t)=0,\ v_x(\pi,t)=0, & t\geq 0, \\ v(x,0)=\varphi(x)-w(x), v_t(x,t)=0, & 0<x<\pi, \end{cases}$$

2. 求函数$f(t)=\dfrac{1-\cos t}{t}$的Laplace变换.

解：利用Laplace变换的性质

$$\begin{aligned} L[f(t)](p) &= L\Big[\frac{1-\cos t}{t}\Big]=\int_p^\infty L[1-\cos t](\rho)\mathrm{d}\rho \\ &= \int_p^\infty [\frac{1}{\rho}-\frac{\rho}{\rho^2+1}]\mathrm{d}\rho \\ &= -\ln\frac{p}{\sqrt{p^2+1}}. \end{aligned}$$

3. 利用叠加原理，d′Alembert公式和降维法理论求解初值问题

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz})=f(x,t) & (x,y,z)\in\mathbb{R}^3, t>0,\\ u(x,y,z,0)=\varphi(y)+\psi(z), u_t(x,y,z,0)=xh(z), & (x,y,z)\in\mathbb{R}^3, \end{cases}$$

其中函数f,h,φ,ψ都是连续函数.

解：利用叠加原理，问题可以拆分为如下初值问题

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz})=f(x,t) & (x,y,z)\in\mathbb{R}^3, t>0,\\ u(x,y,z,0)=0, u_t(x,y,z,0)=0, & (x,y,z)\in\mathbb{R}^3, \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz})=0 & (x,y,z)\in\mathbb{R}^3, t>0,\\ u(x,y,z,0)=\varphi(y)+\psi(z), u_t(x,y,z,0)=0, & (x,y,z)\in\mathbb{R}^3, \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz})=0 & (x,y,z)\in\mathbb{R}^3, t>0,\\ u(x,y,z,0)=0, u_t(x,y,z,0)=xh(z), & (x,y,z)\in\mathbb{R}^3, \end{cases}$$

上述问题的解分别为u_1,u_2,u_3, 则由降维法理论得

$$\begin{aligned} u &= u_1+u_2+u_3\\ &= \frac{1}{2a}\int_0^t\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau+\frac{1}{2}[\varphi(y+at)+\psi(z+at)+\varphi(y-at)+\psi(z-at)]\\ &\quad +\frac{x}{2a}\int_{z-at}^{z+at} h(\eta)\mathrm{d}\eta. \end{aligned}$$

4. 用镜像法构造与下列上半球域上边值问题对应的Green函数，并用此Green函数建立如下边值问题的求解公式

$$\begin{cases} -\Delta u(x)=0, & x_1^2+x_2^2+x_3^2<R^2, x_3>0,\\ u(x_1,x_2,x_3)=0, & x_1^2+x_2^2+x_3^2=R^2, x_3>0,\\ u_{x_3}(x_1,x_2,0)=h(x_1,x_2), & x_1^2+x_2^2\le R^2. \end{cases}$$

解: 取$x=(x_1,x_2,x_3)$上半球内任意一点，其关于球面的对称点为$x^*=\frac{R^2}{|x|^2}x$,点x,x^*关于坐标面$y_3=0$的对称点分别为$x_{-1}=(x_1,x_2,-x_3)$, $x_-^*=\frac{R^2}{|x|^2}x_-$. 于是Green 函数为

$$G(x,y)=\frac{1}{4\pi}\Big[\frac{1}{|x-y|}+\frac{R/|x|}{|x_-^*-y|}-\frac{1}{|x_--y|}-\frac{R/|x|}{|x^*-y|}\Big].$$

记边界$\Gamma_1=\{(y_1,y_2,y_3)\ |y_1^2+y_2^2+y_3^2=R^2, y_3>0\}$, $\Gamma_2=\{(y_1,y_2,y_3)\ |y_1^2+y_2^2\le R^2, y_3=0\}$，则解为

$$\begin{aligned} u(x) &= -\int_{\Gamma_1} u(y)\frac{\partial G(x,y)}{\partial n}\mathrm{d}S+\int_{\Gamma_2}\frac{\partial u(y)}{\partial n}G(x,y)\mathrm{d}S\\ &= -\int_D h(y_1,y_2)G(x,y)\Big|_{y_3=0}\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2, \end{aligned}$$

其中$D=\{(y_1,y_2)|y_1^2+y_2^2\le R^2\}$.

三 (13′) 用分离变量求解Laplace方程边值问题

$$\begin{cases} \Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{yy} = 0, & 0 < x < 1, 0 < y < 1, 0 < z < 1, \\ u(0, y, z) = u(1, y, z) = 0, & 0 \le y, z \le 1, \\ u(x, 0, z) = u(x, 1, z) = 0, & 0 \le x, z \le 1, \\ u(x, y, 0) = 0,\ u(x, y, 1) = \sin \pi x \sin 3\pi y. \end{cases}$$

解：令$u(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$ 代入方程及齐次边界条件，得

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} + \frac{Z''(z)}{Z(z)} = 0,$$
$$X(0) = X(1) = 0,\ Y(0) = Y(1) = 0,\ Z(0) = 0.$$

令

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda,\ \frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\mu,$$

于是得到常微分方程$Z''(z) - (\lambda + \mu)Z(z) = 0, Z(0) = 0$及特征值问题

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0,\ X(0) = X(1) = 0;$$
$$Y''(y) + \mu Y(y) = 0,\ Y(0) = Y(1) = 0.$$

求解这两个特征值问题，得

$$\lambda_n = (n\pi)^2,\ X_n(x) = \sin n\pi x,\ n = 1, 2, \cdots;$$
$$\mu_m = (m\pi)^2,\ Y_m(y) = \sin m\pi y,\ m = 1, 2, \cdots.$$

把λ_n, μ_m代入$Z(z)$的方程，得

$$Z''_{nm}(z) - (\lambda_n + \mu_m)Z_{nm}(z) = 0,\ Z_{nm}(0) = 0,$$

其解为

$$Z_{nm}(z) = \sinh(\sqrt{n^2 + m^2}\pi z).$$

故一般解为

$$u(x, y, z) = \sum_{n,m=1}^{\infty} A_{nm} \sinh(\sqrt{n^2 + m^2}\pi z) \sin n\pi x \sin m\pi y.$$

由边界条件$u(x, y, 1) = \sin \pi x \sin 3\pi y$，得

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} A_{nm} \sinh(\sqrt{n^2 + m^2}\pi) \sin n\pi x \sin m\pi y = \sin \pi x \sin 3\pi y.$$

比较两边的系数，得$A_{nm} = 0,\ n \ne 1, m \ne 3$, 且$A_{13} \sinh(\sqrt{10}\pi) = 1$, 即$A_{13} = 1/\sinh(\sqrt{10}\pi)$. 因此得到解

$$u(x, y, z) = \frac{\sinh(\sqrt{10}\pi z)}{\sinh(\sqrt{10}\pi)} \sin \pi x \sin 3\pi y.$$

四 (12′) 已知Fourier变换公式

$$F[\frac{\sinh ax}{\sinh \pi x}](\omega) = \frac{\sin a}{\cosh \omega + \cos a},\ 0 < a < \pi,$$

利用Fourier变换法求解Laplace方程边值问题

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & -\infty < x < \infty,\ 0 < y < 1, \\ u(x,0) = 0,\ u(x,1) = f(x), & -\infty < x < \infty. \end{cases}$$

解：关于x做Fourier变换，记$\hat{u}(\omega, y) = F[u(x,y)]$, $\hat{f}(\omega) = F[f(x)]$, 对边值问题做Fourier变换, 得

$$\begin{cases} -\omega^2 u + \hat{u}_{yy} = 0, & 0 < y < 1, \\ u(\omega,0) = 0,\ u(\omega,1) = \hat{f}(\omega). \end{cases}$$

求得解

$$\hat{u}(\omega, y) = \hat{f}(\omega)\frac{\sinh(\omega y)}{\sinh w}.$$

利用已知Fourier变换及伸缩性质，得

$$\begin{aligned} F[\frac{\sinh ax}{\sinh x}](\omega) &= F[\frac{\sinh a\pi(x/\pi)}{\sinh \pi(x/\pi)}](\omega) \\ &= \pi\frac{\sin a\pi}{\cosh(\omega\pi) + \cos a\pi}. \end{aligned}$$

再利用相似性质，得

$$F^{-1}[\frac{\sinh(\omega y)}{\sinh w}](x) = \frac{1}{2\pi}F[\frac{\sinh(\omega y)}{\sinh w}](-x) = \frac{1}{2}\frac{\sin \pi y}{\cosh(\pi x) + \cos \pi y}.$$

故，作Fourier逆变换，得

$$u(x,y) = f(x) * F^{-1}[\frac{\sinh(\omega y)}{\sinh w}](x) = \frac{\sin \pi y}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\xi)}{\cosh(\pi(x-\xi)) + \cos \pi y}\mathrm{d}\xi$$

密 封 线

五 (13′) 设有下列圆盘的振动问题

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2(u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta})=0, & 0<r<1,\ 0\le\theta\le 2\pi,\ t>0, \\ |u(0,\theta,t)|<\infty,\ u(1,\theta,t)=0, & 0\le\theta\le 2\pi, t>0, \\ u(r,\theta,0)=f(r),\ u_t(r,\theta,0)=g(r), & 0\le r\le 1, 0\le\theta\le 2\pi. \end{cases}$$

(1) 证明此问题的解与θ无关. (2) 用分离变量法及Bessel函数理论推导此问题的求解公式.

注：$N_{nm}^2=\int_0^1 xJ_m^2(\alpha_{mn}x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}J_{m+1}^2(\alpha_{mn})$, 其中$\alpha_{mn}$是 $J_m(x)$的第n个正零点.

线

解：(1) 记$D=\{(r,\theta)\ |0\le r<1,\ 0\le\theta\le 2\pi\}=\{(x,y)|\ x^2+y^2<1\}$, 令$v(r,\theta,t)=u_\theta(r,\theta,t)$, 则$v$满足

$$\begin{cases} v_{tt}-a^2(v_{rr}+\frac{1}{r}v_r+\frac{1}{r^2}v_{\theta\theta})=0, & 0<r<1,\ 0\le\theta\le 2\pi,\ t>0, \\ |v(0,\theta,t)|<\infty,\ v(1,\theta,t)=0, & 0\le\theta\le 2\pi, t>0, \\ v(r,\theta,0)=v_t(r,\theta,0)=0, & 0\le r\le 1, 0\le\theta\le 2\pi. \end{cases}$$

化为直角坐标系下的问题，得

$$\begin{cases} v_{tt}-a^2\Delta v=0, & (x,y)\in D,\ t>0, \\ v(x,y,t)=0, & (x,y)\in\partial D, t\ge 0, \\ v(x,y,0)=v_t(x,y,0)=0, & (x,y)\in\bar{D}. \end{cases}$$

封

方程两边同乘以$2v_t$并在D上积分，利用第一Green公式，得

$$\int_D [v_t^2+a^2|\nabla v|^2]\mathrm{d}x=0,$$

因此$v_t\equiv 0, \nabla v\equiv 0$, 即$v$是常数. 又$v(x,y,0)=0$, 故$u_\theta=v\equiv 0$, 即$u$与$\theta$无关.

(2) 令$u(r,t)=R(r)T(t)$为非零特解，代入方程及边界条件，得常微分方程$T''(t)+a^2\lambda T(t)=0$及特征值问题

密

$$\begin{cases} r^2R''(r)+rR'(r)+\lambda r^2R(r)=0, & 0<r<1, \\ |R(0)|<\infty,\ R(1)=0. \end{cases}$$

此特征值问题的解为

$$\lambda_k=(\alpha_{0k})^2,\ R_k(r)=J_0(\alpha_{0k}r),\ k=1,2,\cdots.$$

再由$T(t)$的方程，得

$$T_k(t)=C_k\cos(\alpha_{0k}at)+D_k\sin(\alpha_{0k}at).$$

于是得到一般解

$$u(r,t)=\sum_1^\infty [C_k\cos(\alpha_{0k}at)+D_k\sin(\alpha_{0k}at)]J_0(\alpha_{0k}r).$$

由初始条件，得

$$\sum_{1}^{\infty} C_k J_0(\alpha_{0k} r) = f(r),\ \sum_{1}^{\infty} D_k(\alpha_{0k} a) J_0(\alpha_{0k} r) = g(r).$$

故

$$C_k = \frac{2}{J_1^2(\alpha_{0k})}\int_0^1 r f(r) J_0(\alpha_{0k} r)\mathrm{d}r,\ D_k = \frac{2}{\alpha_{0k} a J_1^2(\alpha_{0k})}\int_0^1 r g(r) J_0(\alpha_{0k} r)\mathrm{d}r.$$