数学物理方法

2025春

教材：

《数学物理方法讲义》杨明、石佩虎编

2018.9 (2021.3 重印)

东南大学出版社

Ch5 格林函数法

1) 格林公式,全空间中的位势方程
2) 调和函数的基本性质
3) 格林函数的概念
4) 特殊区域上格林函数的构造

1) 格林公式,全空间中的位势方程

回顾:*Gauss*公式,*Green*公式

散度定理:设有界区域$D \subset R^n$,∂D光滑,$\vec{w} \in C^1$,

$$\int_D \operatorname{div} \vec{w}\, d\vec{x} = \int_{\partial D} \vec{w} \cdot \vec{n}\, dS,$$

其中$\vec{n}$是∂D的单位外法向量.

散度定理$\Rightarrow$第一*Green*公式$\Rightarrow$第二*Green*公式.

$$\int_D \nabla\cdot\mathbf{w}\,\mathrm{d}x = \int_{\partial D}\mathbf{w}\cdot n\,\mathrm{d}S.$$

令$\mathbf{w}=u\nabla v$，代入 $\int_D \nabla\cdot(u\nabla v)\,\mathrm{d}x = \int_{\partial D} u\nabla v\cdot n\,\mathrm{d}S.$

$$\nabla\cdot(u\nabla v) = u\Delta v+\nabla u\cdot\nabla v,\quad \nabla v\cdot n = \frac{\partial v}{\partial n},$$

$$\Rightarrow\quad \int_D u\Delta v+\nabla u\cdot\nabla v\,\mathrm{d}x = \int_{\partial D} u\frac{\partial v}{\partial n}\,\mathrm{d}S,$$

第一格林公式

取第一格林公式中的$u\equiv 1$，则得到公式

$$\int_D \Delta v\,\mathrm{d}x = \int_{\partial D}\frac{\partial v}{\partial n}\,\mathrm{d}S.$$

$$\int_D u\Delta v + \nabla u \cdot \nabla v \, \mathrm{d}x = \int_{\partial D} u \frac{\partial v}{\partial n} \, \mathrm{d}S,$$

将第一格林公式中的u, v互相调换位置得

$$\int_D v\Delta u + \nabla u \cdot \nabla v \, \mathrm{d}x = \int_{\partial D} v \frac{\partial u}{\partial n} \, \mathrm{d}S,$$

两式相减得

$$\int_D u\Delta v - v\Delta u \, \mathrm{d}x = \int_{\partial D} u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \, \mathrm{d}S,$$

第二格林公式.

课堂练习

仿照高维情况，请给出一维区间[a,b]情况下的第一格林公式和第二格林公式.

求位势方程的基本解:

$$-\Delta\phi = \delta(x), \quad x \in R^3.$$

物理背景:求单位点电荷产生的静电场的位势函数.

idea : $\boxed{\text{1.用Fourier变换}}$ 或者 $\boxed{\text{2.找球对称解}\ \phi(|x|)}$

$$\phi(x) = \frac{1}{4\pi |x|}.$$

$$\phi(r), \quad r = |x|, \quad x = (x_1, x_2, x_3)$$

$$\partial_{x_i}\phi = \phi'(r)\frac{x_i}{r}, \qquad \nabla\phi = \phi'(r)\frac{x}{r}.$$

设$n = \frac{x}{r}$,则$\frac{\partial\phi}{\partial n} = \nabla\phi\cdot n = \phi'(r)\frac{x}{r}\cdot\frac{x}{r} = \phi'(r).$

$$\partial_{x_i x_i}\phi = \phi''(r)(\frac{x_i}{r})^2 + \phi'(r)(\frac{1}{r} - \frac{x_i}{r^2}\frac{x_i}{r}),$$

$$\Rightarrow \quad \Delta\phi = \sum_{i=1}^{3}\partial_{x_i x_i}\phi = \phi''(r) + \frac{2}{r}\phi'(r).$$

$$-\Delta\phi=\delta(x),\quad x\in R^3.$$

记$r=|x|$,球坐标(r,θ,φ),容易看到ϕ只与r有关,故记解为$\phi(r)$.

$r>0$时，$\Delta\phi=\phi''+\dfrac{2}{r}\phi'=0.$

$\Rightarrow\phi(r)=\dfrac{C}{r}+D.$因为$\phi(\infty)=0$,所以$D=0.$

问题：如何求常数C?

(1) 通量法，（2）试验函数法.

方法1：利用 $\int_{\mathbb{R}^3} -\Delta\phi(x)\,\mathrm{d}x = 1$

$$-\int_{\partial B_\varepsilon(0)} \frac{\partial\phi}{\partial n}\,\mathrm{d}S = -\int_{B_\varepsilon(0)} \Delta\phi\,\mathrm{d}x = -\int_{\mathbb{R}^3} \Delta\phi\,\mathrm{d}x = 1$$

因而 $-\int_{\partial B_\varepsilon(0)} -\frac{C}{\varepsilon^2}\,\mathrm{d}S = 4\pi C = 1 \quad \Rightarrow \quad C = \frac{1}{4\pi}.$

该方法具有明显的物理意义，$-\nabla\phi$表示电场的场强，场强在边界上的第二型曲面积分为电通量等于区域内的总电荷1，因而我们将该方法称为通量法.

方法2

试验函数法： $\forall v \in C_0^\infty(R^3), \quad (-\Delta\phi, v) = (\delta, v).$

$$(-\Delta\phi, v) = -\int_{R^3} \Delta\phi(x)v(x)dx = -\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{B_\varepsilon} \Delta\phi(x)v(x)dx$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0+}[\int_{B_\varepsilon} \nabla\phi(x)\cdot\nabla v(x)dx - \int_{\partial B_\varepsilon} v(x)\frac{\partial\phi(x)}{\partial n}dS].$$

$$\because |\int_{B_\varepsilon} \nabla\phi(x)\cdot\nabla v(x)dx| \le \int_{B_\varepsilon} |\nabla\phi(x)|\cdot|\nabla v(x)|\,dx$$

$$\le M\int_{B_\varepsilon} |\nabla\phi(x)|\,dx = 4\pi MC\varepsilon,$$

$$\therefore (-\Delta\phi, v) = 0 + \lim_{\varepsilon\to 0+}\frac{C}{\varepsilon^2}\int_{\partial B_\varepsilon} v(x)dS = 4\pi Cv(0) = 4\pi C(\delta, v).$$

在R^n中有类似结论:

$$-\Delta\phi=\delta(x),\quad x\in R^n.$$

$$\text{基本解}:\phi(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{2\pi}\ln|x|, & n=2,\\ \dfrac{1}{(n-2)\omega_n|x|^{n-2}}, & n\geq 3.\end{cases}$$

其中ω_n是R^n中单位球面的面积,例如$\omega_3=4\pi$.

练习：请给出R^2中基本解的推导。

利用上面的结果求解更一般问题:

$$-\Delta u = f(x), \quad x \in R^3.$$

物理背景: $f(x)$表示带电体的电荷分布密度,

解$u(x)$表示该带电体产生的静电场的位势函数.

$$u(x) = \phi(x) * f(x).$$

结合卷积和基本解的物理意义理解解的表达式.

课堂练习

1. 利用对称性和通量法求二维拉普拉斯方程基本解

$$-\Delta\phi(x) = \delta(x), \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

2) 调和函数基本性质

(1) $\boxed{\text{平均值公式}}$

设$u \in C^2(D)$是区域D上的调和函数,则对D中任意的球$B_r(x)$有:

$$u(x) = \frac{1}{|\partial B_r(x)|}\int_{\partial B_r(x)} u(y)dS = \frac{1}{|B_r(x)|}\int_{B_r(x)} u(y)dy.$$

(2)最值原理

设$u \in C^2(D) \cap C(\overline{D})$是区域$D$上的调和函数,则

$$\max_{x\in\overline{D}} u = \max_{x\in\partial D} u, \qquad \min_{x\in\overline{D}} u = \min_{x\in\partial D} u.$$

证明 令 $$\varphi(r)=\frac{1}{|\partial B_r(x)|}\int_{\partial B_r(x)}u(y)\,\mathrm{d}S_y=\frac{1}{|\partial B_1(0)|}\int_{\partial B_1(0)}u(x+rz)\,\mathrm{d}S_z$$

$$\varphi'(r)=\frac{1}{|\partial B_1(0)|}\int_{\partial B_1(0)}\nabla u(x+rz)\cdot z\,\mathrm{d}S_z=\frac{1}{|\partial B_r(x)|}\int_{\partial B_r(x)}\nabla u(y)\cdot\frac{y-x}{r}\,\mathrm{d}S_y$$

$$=\frac{1}{|\partial B_r(x)|}\int_{\partial B_r(x)}\frac{\partial u}{\partial n}\,\mathrm{d}S_y=\frac{1}{|\partial B_r(x)|}\int_{B_r(x)}\Delta u(y)\,\mathrm{d}y=0.$$

所以φ是常数，因而

$$\varphi(r) = \lim_{r\to 0+} \varphi(r) = \lim_{r\to 0+} \frac{1}{|\partial B_r(x)|} \int_{\partial B_r(x)} u(y)\,\mathrm{d}S_y = u(x).$$

另外，注意到

$$\int_{B_r(x)} u(y)\,\mathrm{d}y = \int_0^r \Big(\int_{\partial B_s(x)} u(y)\,\mathrm{d}S \Big)\,\mathrm{d}s$$

$$= u(x) \int_0^r \omega(n) s^{n-1}\,\mathrm{d}s = |B_r(x)|u(x)$$

课堂练习

2 假设单位球上的调和函数$u(r,\theta,\varphi)$满足边界条件

.

$u(1,\theta,\varphi)=\sin^2\theta$，(1) 该调和函数的最大值和最小值分别是多少?

(2) 利用调和函数均值公式求u在原点的值.

思考题

利用球对称性和公式(5.1.4)求三维Helmholtz方程基本解

$$\begin{cases} \Delta\phi + k^2\phi = -\delta(x), & x \in \mathbb{R}^3,\ \ k > 0, \\ \lim\limits_{r\to+\infty} r(\phi_r - ik\phi) = 0, & r = |x|, \end{cases}$$

其中$r = +\infty$处满足的条件称为三维Sommerfield辐射条件

解　令$|x|=r$，则$r>0$时

$$\phi''(r)+\frac{2}{r}\phi'(r)+k^2\phi(r)=0,$$

$$(r\phi(r))''+k^2 r\phi(r)=0,$$

解得　$$\phi(r)=A\frac{e^{ikr}}{r}+B\frac{e^{-ikr}}{r},$$

因为$\lim\limits_{r\to\infty} r(\phi_r-ik\phi)=0$，所以$B=0$.

下面利用通量法求系数A. 方程两边积分得

$$-1 = \int_{\mathbb{R}^3} \Delta\phi + k^2\phi \,\mathrm{d}x = \int_{|x|<\varepsilon} \Delta\phi + k^2\phi \,\mathrm{d}x$$

$$= \int_{|x|=\varepsilon} \frac{\partial\phi}{\partial n} \,\mathrm{d}S + k^2 \int_{|x|<\varepsilon} \phi \,\mathrm{d}x.$$

其中

$$\int_{|x|=\varepsilon} \frac{\partial\phi}{\partial n} \,\mathrm{d}S = \int_{|x|=\varepsilon} A\left(-\frac{1}{\varepsilon^2} e^{ik\varepsilon} + \frac{ik}{\varepsilon} e^{ik\varepsilon}\right) \mathrm{d}S = -4\pi A(1-ik\varepsilon)e^{ik\varepsilon}$$

$$k^2 \int_{|x|<\varepsilon} \phi \,\mathrm{d}x = 4\pi A k^2 \int_0^{\varepsilon} r e^{ikr} \,\mathrm{d}r = 4\pi A(-ik\varepsilon e^{ik\varepsilon} + e^{ik\varepsilon} - 1)$$

代入得 $-1 = -4\pi A \quad \Rightarrow \quad A = \dfrac{1}{4\pi} \quad \Rightarrow \quad \phi(x) = \dfrac{e^{ik|x|}}{4\pi|x|}$