- **为什么需要定解条件**

研究传输方程的通解和特解。

$$\begin{cases} u_t + bu_x = 0, & x \in R, t > 0, \\ u(x,0) = g(x), & x \in R. \end{cases}$$

考虑函数 $z(s) = u(x+sb, t+s)$,

直线参数方程：$X(s) = x + sb, T(s) = t + s.$

$$z'(s) = bu_x(x+sb, t+s) + u_t(x+sb, t+s) = 0,$$

$$u(x,t) = z(0) = z(-t) = u(x-bt, 0) := f(x-bt).$$

通解为$u(x,t) = f(x-bt)$，其中f为任意可微函数.

加上定解条件，$u(x,0) = g(x)$，特解为$u(x,t) = g(x-bt)$.

- 定解条件有哪些
  （初始条件Initial Cond.，
  边界条件Boundary Cond.）

- 各个空间维数区域及其边界

- 具体的定解问题及其物理含义
  （结合弦振动，热传导，位势方程）

D 是

区间$0 < x < l$，所以边界∂D就是两个端点$x = 0$, $x = l$;

平面区域，边界∂D就是一个闭合曲线;

液体的容器，此时边界∂D就是一个曲面;

对于三维静电场模型来说，

D就是整个空间，此时没有边界.

Dirichlet边界条件 u 在边界处的值给定,

Neumann边界条件 $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ 在边界处的值给定,

Robin边界条件 $\dfrac{\partial u}{\partial n}+\sigma u$ 在边界处的值给定,

- **弦振动模型** 设弦的两端是固定的，比如吉他的琴弦，此时边界条件是齐次Dirichlet边界条件 $u(0,t)=u(l,t)=0$. 如果琴弦的一端可以无阻力地自由滑动，此时端点处没有张力，所以 $u_x=0$，这是齐次Neumann边界条件. 如果弦的一端可以在弹性阻力下做滑动，则我们得到齐次Robin边界条件. 最后如果弦在外力作用下做某个特殊的滑动，则我们得到非齐次Dirichlet边界条件.

- **热扩散模型** 设导热体的边界温度分布已知，则得到Dirichlet边界条件. 如果导热体在边界处是绝热的，则边界处没有热的传导(热流)，此时是齐次Neumann边界条件 $\frac{\partial u}{\partial n}=0$. 最后，考虑有界杆 $0\leq x\leq l$ 上的热传导问题，在端点 $x=l$ 处外部温度为 $g(t)$，那么在此端点处的热交换满足Newton冷却定律，则

$$\frac{\partial u}{\partial x}(l,t)=-\sigma\left[u(l,t)-g(t)\right],$$

其中 $\sigma>0$，此时就是非齐次Robin边界条件.

偏微分方程加上定解条件构成定解问题，

- 波动方程+边界条件+初始条件⇒ 初边值问题；
- 波动方程+初始条件⇒ 初值问题；
- 热扩散方程+边界条件+初始条件⇒ 初边值问题；
- 热扩散方程+初始条件⇒ 初值问题；
- 位势方程+边界条件⇒ 边值问题.

•适定性（存在，唯一，稳定）

$$\begin{cases} \rho u_{tt} - T u_{xx} = f(x,t), & 0<x<l, t>0, \\ u(0,t) = g(t), u(l,t) = h(t), & t>0, \\ u(x,0) = \phi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), & 0<x<l. \end{cases}$$

对于$\forall f, g, h, \phi, \psi$(输入数据），$\exists$唯一解$u(x,t)$，且给这5个函数小扰动$\delta$(误差)，解$u^\delta$与真解$u$很靠近。

课堂练习

1. 利用散度定理(Gauss公式)推导三维导热体的热传导方程

$$u_t = k(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) = k\Delta u.$$

2. 验证 $u_n(x,y) = \sin nx \sinh ny,\ \ n > 0$ 是方程 $u_{xx} + u_{yy} = 0$ 的解.

3. 求解一阶运输方程初值问题

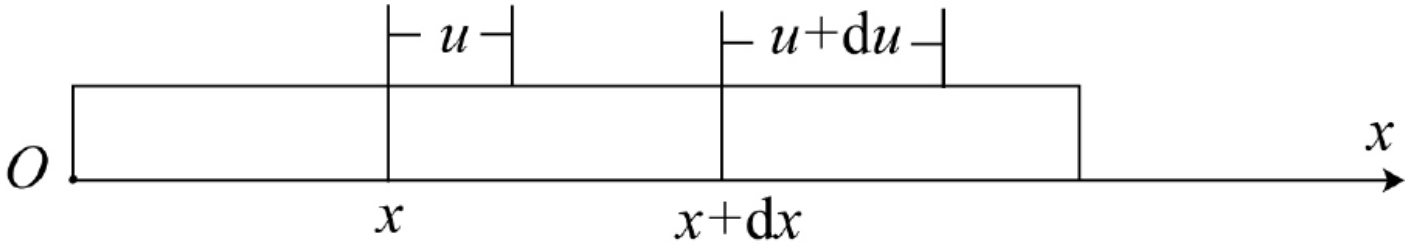
$$\begin{cases} u_t + 2u_x = 0, & x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(x,0) = \sin x, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

4. 有一个长为l的均匀细杆，内部热源为$f(x,t)$，初始温度为$g(x)$，端点$x=0$处温度为$\mu(t)$，另外一端$x=l$处与温度为$v(t)$的介质有热交换，请写出该热传导过程的定解问题.

$$
\begin{cases}
u_t - k u_{xx} = f(x,t), & 0 < x < l, \ \ t > 0, \\
u(0,t) = \mu(t), \quad u_x(l,t) = -\sigma(u(l,t) - \nu(t)), & t \geq 0, \\
u(x,0) = g(x), & 0 \leq x \leq l,
\end{cases}
$$

5. 思考题

一个长为l横截面积为S的均匀弹性杆，已知杆的一端$x=0$处固定，而另一端$x=l$在沿杆轴方向受外力挤压，在压缩了δ后而达到平衡. 在$t=0$时，撤去外力. 试利用牛顿第二定律和胡克定律推导杆的微小纵振动所满足的方程，并给出边界条件和初始条件.



思考题解答：杆的纵振动方程

解 设弹性杆的密度是常数ρ，用常数E表示杆的杨氏模量，用$u(x,t)$表示细弦在x点t时刻的纵向位移. 采用微元法来建立模型.

由牛顿第二运动定律知 $\rho S\,\mathrm{d}x\, u_{tt} = p(x+\mathrm{d}x,t)S - p(x,t)S$,

其中$p(x,t)$表示x点的截面在t时刻沿x轴方向所受到的应力.

$$\frac{p(x+\mathrm{d}x,t)-p(x,t)}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial p}{\partial x} \quad \Longrightarrow \quad \rho u_{tt} = \frac{\partial p}{\partial x}.$$

如果忽略垂直于杆长方向上的形变，则由胡克定律知，

应力与相对伸长成正比，比例系数为杨氏模量，即 $p = E\,u_x$,

$$\Longrightarrow \quad \rho\, u_{tt} = E\, u_{xx}.$$

边界条件：杆在$x=0$处固定，所以 $u(0,t)=0 \quad t\geq 0.$

在$x=l$处，$t=0$时，撤去外力，即$t\geq 0$时，$x=l$处为自由端，

所以 $u_x(l,t)=0 \quad t\geq 0.$

初始条件：因为杆在$x=l$处受外力F而达到平衡，可以考虑

$[l-\varepsilon,l]$这一小段，在$x=l-\varepsilon$处受应力 $ESu_x\big|_{x=l-\varepsilon}$，

在$x=l$处受外力F，所以平衡时有 $ESu_x\big|_{x=l-\varepsilon}+F=0,$

因为平衡时，杆的各处应力相等，所以对任意的x在$t=0$时

$$ESu_x(x,0)+F=0 \quad\Rightarrow\quad u_x(x,0)=-\frac{F}{ES},$$

从0到x积分得 $u(x,0)=-\dfrac{F}{ES}x$，已知$u(l,0)=-\delta$，所以

$$-\frac{F}{ES}l=-\delta \quad\Rightarrow\quad u(x,0)=-\frac{\delta}{l}x,$$

又因为$t=0$时平衡，所以初始速度为零，即 $u_t(x,0)=0.$

3) 线性方程的基本概念

- 线性算子,线性方程的定义
- 叠加原理
- 一阶线性PDE的特征线法
- 简单二阶线性PDE的分类

idea：

考虑方程 $u_{tt} - c^2 u_{xx} + r u_t = 0,$

将其写成 $(\partial_{tt} - c^2 \partial_{xx} + r\partial_t)u = 0.$

记算子 $L = \partial_{tt} - c^2 \partial_{xx} + r\partial_t,$

则方程可写成算子形式 $Lu = 0.$

- 什么是线性算子

$$L(c_1u_1+\cdots+c_ku_k)=c_1Lu_1+\cdots+c_kLu_k$$

- 齐次/非齐次方程

$$Lu=0,\qquad Lu=f$$

- 齐次/非齐次边界条件

$$Bu=0,\qquad Bu=g$$

- **叠加原理**

设L,B是线性算子，且

$Lu_i = f_i, Bu_i = g_i$，令$u = c_1u_1 + \cdots + c_ku_k$，则

$$\Rightarrow Lu = c_1f_1 + \cdots + c_kf_k, Bu = c_1g_1 + \cdots + c_kg_k$$

- **非齐次问题的线性拆分**

考虑问题 $Lu = f, Bu = g.$

先求解问题：$(1)\begin{cases} Lv = f \\ Bv = 0 \end{cases}$，$(2)\begin{cases} Lw = 0 \\ Bw = g \end{cases}$，

则$u = v + w.$

练习题

指出下面方程是几阶方程？是否是奇次方程？是否是线性方程？

(1) $u_t - u_{xx} + 1 = 0,$

(2) $u_t - u_{xx} + xu = 0,$

(3) $u_t - u_{xxt} + uu_x = 0,$

(4) $u_{tt} - u_{xx} + u^2 = 0,$

(5) $iu_t - u_{xx} + u/x = 0,$

(6) $u_x(1+u_x^2)^{-1/2} + u_y(1+u_y^2)^{-1/2} = 0,$

(7) $u_x + e^y u_y = 0,$

(8) $u_t + u_{xxxx} + \sqrt{1+u} = 0.$

一阶线性PDE的特征线法

$$\begin{cases} u_t + a(x,t)u_x + b(x,t)u = f(x,t), & x \in R, t > 0, \\ u(x,0) = g(x), & x \in R. \end{cases}$$

由运输方程的求解方法进行推广！

令曲线$x = x(t)$,满足$\dfrac{dx}{dt} = a(x,t)$,且$x(0) = c$.

令$U(t) = u(x(t),t)$,则

$$\frac{dU}{dt} + b(x(t),t)U = f(x(t),t), \quad U(0) = g(c).$$

例. 用特征线法求解运输方程初值问题：

$$\begin{cases} u_t + 2u_x = 0, & x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(x,0) = \sin x, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

解　先求该问题的特征线 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2, \quad x(0) = c,$

解得特征线为 $x = 2t + c$. 再令 $U(t) = u(x(t),t)$，则

$U'(t) = 0, \quad U(0) = \sin c$, 解得 $U(t) = \sin c$.

最后将 $c = x - 2t$ 代入即得 $u(x,t) = \sin(x - 2t)$.

例：试用特征线法求方程的通解.

$$u_x + 2xy^2 u_y = 0$$

解：$\dfrac{dy}{dx} = 2xy^2 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{dy}{y^2} = 2xdx$

$\Rightarrow \quad -\dfrac{1}{y} = x^2 - C \quad \Rightarrow y(x) = \dfrac{1}{C - x^2}$ 特征线

令$U(x) = u(x, y(x))$, 则

$U'(x) = u_x + u_y \cdot y'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad U(x) = f(C)$

$\Rightarrow \quad u(x, y) = f(x^2 + \dfrac{1}{y})$ 其中f是任意可微函数.

课堂练习

用特征线法求解下列方程的通解.

1. $(1+x^2)u_x + u_y = 0,$

2. $au_x + bu_y + cu = 0,$ 其中a,b,c为非零常数.

1. 先求特征线

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{1+x^2} \quad \Rightarrow \quad y(x) = \arctan x + C.$$

令$U(x) = u(x, y(x))$，则

$$U'(x) = u_x + \frac{1}{1+x^2} \cdot u_y = 0 \quad \Rightarrow \quad U(x) = f(C)$$

所以通解为 $u(x,y) = f(y - \arctan x)$

2. 先求特征线 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{b}{a} \Rightarrow y(x)=\frac{b}{a}x+C.$

令$U(x)=u(x,y(x))$，则

$$U'(x)=u_x+\frac{b}{a}\cdot u_y=-\frac{c}{a}U(x)$$

$$\Rightarrow U(x)=f(C)\cdot e^{-\frac{c}{a}x},$$

所以通解为 $u(x,y)=f(y-\frac{b}{a}x)\cdot e^{-\frac{c}{a}x},$

其中f是任意可微函数.

例： 求解问题

$$\begin{cases} u_t+(x+t)u_x+u=x, & x\in\mathbb{R},\ t>0, \\ u(x,0)=x, & x\in\mathbb{R}. \end{cases}$$

Step1.

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x+t, \\ x(0)=c. \end{cases} \qquad x(t)=e^t-t-1+ce^t,$$

Step2.

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}+U=e^t-t-1+ce^t, \\ U(0)=c. \end{cases} \qquad U(t)=-t+\frac{1}{2}(e^t-e^{-t})+\frac{c}{2}(e^t-e^{-t}),$$

问题的解 $u(x,t)=\dfrac{1}{2}(x-t+1)-e^{-t}+\dfrac{1}{2}(x+t+1)e^{-2t}.$