一阶线性常微分方程

一阶线性微分方程的标准形式为

$$y' + P(x)y = Q(x),$$

其中$P(x), Q(x)$是已知的连续函数. 它的通解为

$$y = \mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left[\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C\right].$$

一阶线性常微分方程

一阶线性微分方程的标准形式为

$$y' + P(x)y = Q(x),$$

其中$P(x), Q(x)$是已知的连续函数. 它的通解为

$$y = \mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left[\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C\right].$$

对于一阶线性微分方程的初值问题

$$y' + P(x)y = Q(x),\ \ y(x_0) = y_0.$$

它的特解为

$$y = y_0\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x} P(s)\mathrm{d}s} + \int_{x_0}^{x} Q(s)\mathrm{e}^{-\int_{s}^{x} P(\xi)\mathrm{d}\xi}\mathrm{d}s.$$

常系数二阶线性齐次微分方程

给定一个常系数二阶线性齐次ODE

$$ay'' + by' + cy = 0.$$

常系数二阶线性齐次微分方程

给定一个常系数二阶线性齐次ODE

$$ay'' + by' + cy = 0.$$

其对应的特征方程$ak^2 + bk + c = 0$有两个根k_1, k_2.

常系数二阶线性齐次微分方程

给定一个常系数二阶线性齐次ODE

$$ay'' + by' + cy = 0.$$

其对应的特征方程$ak^2 + bk + c = 0$有两个根k_1, k_2.

1. 当k_1, k_2为实数且$k_1 \neq k_2$时，$y(x) = C_1 \mathrm{e}^{k_1 x} + C_2 \mathrm{e}^{k_2 x}$;
2. 当$k_1 = k_2 = k$为实数时，$y(x) = (C_1 + C_2 x)\mathrm{e}^{kx}$;
3. 当$k_1 = \mu + \mathrm{i}\nu$, $k_2 = \mu - \mathrm{i}\nu$时，

$$y(x) = \mathrm{e}^{\mu x}(C_1 \cos \nu x + C_2 \sin \nu x).$$

变系数二阶线性齐次微分方程(Euler方程)

对于二阶Euler方程

$$ax^2y'' + bxy' + cy = 0,$$

变系数二阶线性齐次微分方程(Euler方程)

对于二阶Euler方程

$$ax^2y'' + bxy' + cy = 0,$$

若令$x = e^t$, 可将其化简成常系数微分方程

$$a\ddot{y} + (b-a)\dot{y} + cy = 0,$$

其中$\dot{y} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, \ddot{y} = \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}$.

二阶线性非齐次微分方程(待定系数法)

常系数二阶线性非齐次微分方程$ay'' + by' + cy = f(x)$，其中a, b, c是实常数，且$a \neq 0$，$f(x)$是已知函数. 由解的结构，只需求出此方程的一个特解$Y(x)$，就能构造出非齐次方程通解.

二阶线性非齐次微分方程(待定系数法)

常系数二阶线性非齐次微分方程$ay'' + by' + cy = f(x)$，其中a, b, c是实常数，且$a \neq 0$，$f(x)$是已知函数. 由解的结构，只需求出此方程的一个特解$Y(x)$，就能构造出非齐次方程通解.

1. 自由项$f(x) = P_n(x)\mathrm{e}^{\alpha x}$ 的情形:

(1) 当α 不是特征方程的根时, 特解具有形式

$$Y = Q_n(x)\mathrm{e}^{\alpha x}.$$

(2) 当α是特征方程的单重根时, 特解具有形式

$$Y = xQ_n(x)\mathrm{e}^{\alpha x}.$$

(3) 当α是特征方程的二重根时, 特解具有形式

$$Y = x^2Q_n(x)\mathrm{e}^{\alpha x}.$$

二阶线性非齐次微分方程(待定系数法)

2. 自由项$f(x)=P_n(x)\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x$ 或$P_n(x)\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x$ 的情形，其中$P_n(x)$是n实系数次多项式，α 是实常数.

二阶线性非齐次微分方程(待定系数法)

2. 自由项$f(x) = P_n(x)\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x$ 或$P_n(x)\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x$ 的情形，其中$P_n(x)$是n实系数次多项式，α 是实常数.

把方程转化为复形式

$$ay'' + by' + cy = P_n(x)\mathrm{e}^{(\alpha+i\beta)x}.$$

如果$Y(x)$ 是此方程的一个复特解，则其实部$\mathrm{Re}Y(x)$ 与虚部$\mathrm{Im}Y(x)$ 是原方程中自由项分别对应

$$f(x) = P_n(x)\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x \text{ 与 } f(x) = P_n(x)\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x$$

的特解.

根据$\alpha + i\beta$是否为特征根，特解Y有两种形式:

$$Y = Q_n(x)\mathrm{e}^{(\alpha+i\beta)x} \text{ 或 } Y = xQ_n(x)\mathrm{e}^{(\alpha+i\beta)x}.$$

二阶线性非齐次微分方程(齐次化原理)

为了求线性非齐次方程的一个特解Y，不妨设这个特解满足二阶线性非齐次ODE的初值问题

$$\begin{cases} y'' + by' + cy = f(x), \ x > 0, \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

二阶线性非齐次微分方程(齐次化原理)

为了求线性非齐次方程的一个特解Y，不妨设这个特解满足二阶线性非齐次ODE的初值问题

$$\begin{cases} y'' + by' + cy = f(x), \ x > 0, \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

(齐次化原理) 如果$w(x;\tau)$是齐次方程的初值问题

$$\begin{cases} w'' + bw' + cw = 0, \ x > 0, \\ w(0;\tau) = 0, \quad w'(0;\tau) = f(\tau) \end{cases} \tag{2}$$

的解．则下列函数$Y(x) = \int_0^x w(x-\tau;\tau)\mathrm{d}\tau$是问题(1)的解

傅立叶级数与平方可积空间

设函数$f(x)$以$2l$为周期，则可将$f(x)$表示为级数形式

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{1}^{\infty}(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}),$$

该级数就称为$f(x)$的傅立叶级数. 即将$f(x)$表示为正交函数系

$$\{\cos\frac{n\pi x}{l}\}_{n=0}^{\infty} \cup \{\sin\frac{n\pi x}{l}\}_{n=1}^{\infty}$$

线性组合. 又由函数系的正交性，可得上式中的傅立叶系数为

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x, \quad n = 0, 1, 2, \cdots,$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

傅立叶级数与平方可积空间

当f为偶函数时，f展开为余弦级数

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l},$$

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x, \quad n = 0, 1, 2, \cdots.$$

当f为奇函数时，f展开为正弦级数

$$f(x) \sim \sum_{1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l},$$

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

傅立叶级数与平方可积空间

如果f在$[a,b]$上除了有限多个第一类间断点外连续，则称函数f分段连续，记为$f\in PC[a,b]$. 如果$f,f'\in PC[a,b]$，则称f分段光滑，记为$f\in PS[a,b]$.

定理2.1 设f是周期为$2l$的函数，且$f\in PS[-l,l]$，则

$$\frac{1}{2}[f(x+)+f(x-)]=\frac{a_0}{2}+\sum_1^\infty(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}),\ \forall\, x\in(-l,l).$$

当$x=\pm l$时，傅立叶级数收敛于$\frac{1}{2}[f(-l+)+f(l-)]$.

定理2.2 设f是周期为$2l$的函数，

且$f\in C[-l,l]$，$f'\in PC[-l,l]$，则$f(x)$的傅立叶级数在$[-l,l]$上一致收敛于$f(x)$.

内积

- 设函数$f(x), g(x)$，$x \in [a, b]$，则称

$$(f, g) = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x,$$

为f与g的内积，其中$\overline{g(x)}$是$g(x)$的复共轭函数，因而此内积也称为共轭内积.

内积

- 设函数$f(x), g(x)$，$x \in [a,b]$，则称

$$(f,g) = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\ \mathrm{d}x,$$

为f与g的内积，其中$\overline{g(x)}$是$g(x)$的复共轭函数，因而此内积也称为共轭内积.共轭内积满足性质: $(f,g) = \overline{(g,f)}$;

$$(\alpha f_1+\beta f_2, g) = \alpha(f_1,g)+\beta(f_2,g); (f,\alpha g_1+\beta g_2) = \overline{\alpha}(f,g_1)+\overline{\beta}(f,g_2$$

其中α，β是复常数.

内积

- 设函数$f(x), g(x)$, $x \in [a, b]$，则称

$$(f, g) = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x,$$

为f与g的内积，其中$\overline{g(x)}$是$g(x)$的复共轭函数，因而此内积也称为共轭内积.共轭内积满足性质: $(f, g) = \overline{(g, f)}$;

$$(\alpha f_1+\beta f_2, g) = \alpha(f_1, g)+\beta(f_2, g); (f, \alpha g_1+\beta g_2) = \overline{\alpha}(f, g_1)+\overline{\beta}(f, g_2$$

其中α, β是复常数.

- 称

$$\|f\| = \sqrt{(f, f)} = \left(\int_a^b |f(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}$$

为函数f的范数（函数大小的度量）.

内积空间

- Cauchy-Schwarz不等式，即内积空间中的重要不等式

$$|(f,g)| \leq \|f\| \, \|g\|.$$

内积空间

- Cauchy-Schwarz不等式，即内积空间中的重要不等式

$$|(f,g)| \leq \|f\| \, \|g\|.$$

如果$\|f\| = 0$，并不能得出$f(x) \equiv 0$，只能得到去掉一个零测集外$f(x) = 0$，称之为f几乎处处(almost everywhere)为零，记为$f = 0$, $a.e.$.

内积空间

- Cauchy-Schwarz不等式，即内积空间中的重要不等式

$$|(f,g)| \leq \|f\|\ \|g\|.$$

如果$\|f\|=0$，并不能得出$f(x)\equiv 0$，只能得到去掉一个零测集外$f(x)=0$，称之为f几乎处处(almost everywhere)为零，记为$f=0,\ a.e.$.

将区间$[a,b]$上所有满足$\|f\|<\infty$的函数构成的集合称为$[a,b]$上的**平方可积空间**，记为$L^2[a,b]$，即

$$L^2[a,b] := \{\, f \mid \int_a^b |f(x)|^2 \mathrm{d}x < \infty \}.$$

如果$f=g,a.e.$，则$\|f-g\|=0$，在$L^2[a,b]$中认为$f=g$，因此不予区分它们.

内积空间

平方可积空间$L^2[a,b]$具有性质:

- 函数空间$L^2[a,b]$是一个完备空间，即此空间中任意柯西函数列均收敛于空间中一个函数，即

$$\|f_n - f_m\| \to 0, \quad n, m \to \ \infty, \quad \Rightarrow$$
$$\exists\ f \in L^2[a,b],\ \text{s.t}\ \|f_n - f\| \to 0\ \ (n \to \infty).$$

- 可以用C^∞函数序列在L^2范数下逼近其中的任意函数，即

$$\forall\ f \in L^2[a,b],\ \ \exists\ \ f_n \in C^\infty[a,b],\ \ \text{s.t}\ \|f_n - f\| \to 0\ (n \to \infty).$$

- **定义** 如果函数系$\{\phi_k\}_1^\infty \subset L^2[a,b]$满足

$$(\phi_k,\ \phi_j) = \delta_{kj}, \qquad \|\phi_k\| = 1,$$

其中 δ_{kj} 为Kronecker记号, 则称其为$L^2[a,b]$中的标准正交函数系.

- **定义** 如果函数系$\{\phi_k\}_1^\infty \subset L^2[a,b]$满足

$$(\phi_k,\ \phi_j) = \delta_{kj}, \qquad \|\phi_k\| = 1,$$

其中 δ_{kj} 为Kronecker记号, 则称其为$L^2[a,b]$中的标准正交函数系.

- 在$L^2[a,b]$中考虑函数项级数及其部分和函数

$$\sum_1^\infty c_k\phi_k(x), \quad S_N(x) = \sum_1^N c_k\phi_k(x).$$

如果存在$f \in L^2[a,b]$，使得当$N \to \infty$时，$\|S_N - f\| \to 0$，则称该级数在$L^2[a,b]$中收敛于f，$f(x)$称为和函数，记为

$$f = \sum_1^\infty c_k\phi_k.$$

此时级数$\sum_1^\infty c_k\phi_k(x)$称为$f$的傅立叶级数，$c_k = (f,\ \phi_k)$称为傅立叶系数.

内积空间

定理2.3(Bessel 不等式) 设$\{\phi_k\}_1^\infty$是$L^2[a,b]$中的标准正交函数系，$f\in L^2[a,b]$，则f的傅立叶系数$\{c_k\}$满足

$$\sum_1^\infty |c_k|^2 \ \le \ \|f\|^2.$$

内积空间

定理2.3(Bessel 不等式) 设$\{\phi_k\}_1^\infty$是$L^2[a,b]$中的标准正交函数系，$f \in L^2[a,b]$，则f的傅立叶系数$\{c_k\}$满足

$$\sum_1^\infty |c_k|^2 \ \le \ \|f\|^2.$$

定理2.4(Riesz-Fischer) 设$\{\phi_k\}_1^\infty$是$L^2[a,b]$中的标准正交函数系，若数列$\{c_k\}$满足$\sum_1^\infty |c_k|^2 < \infty$，则级数$\sum_1^\infty c_k\phi_k(x)$在$L^2[a,b]$中收敛于某个函数$f$，并且系数$c_k = (f,\ \phi_k)$满足Parseval等式

$$\sum_1^\infty |c_k|^2 \ = \ \|f\|^2.$$

内积空间

定义

设$\{\phi_k\}_1^\infty$是$L^2[a,b]$中的标准正交函数系，如果

$$\forall\ f \in L^2[a,b],\quad (f,\phi_k)=0,\quad k=1,2,\cdots \quad \Rightarrow \quad f=0,\quad a.e.,$$

则称函数系$\{\phi_k\}_1^\infty$是完备的，并称$\{\phi_k\}_1^\infty$是$L^2[a,b]$中的一组标准正交基.

内积空间

定理2.5

设$\{\phi_k\}_1^\infty$是$L^2[a,b]$中的标准正交函数系，则下面三个结论等价：

(a) $\{\phi_k\}_1^\infty$是$L^2[a,b]$中的一组标准正交基;

(b) 对任意的$f \in L^2[a,b]$，有

$$f = \sum_1^\infty (f,\phi_k)\phi_k, \quad a.e.;$$

(c) 对任意的$f \in L^2[a,b]$，Parseval等式成立，即

$$\sum_1^\infty |(f,\phi_k)|^2 = \|f\|^2.$$

内积空间

例2.1 记

$$\phi_k(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad k = 1, 2, \cdots,$$

试证明 $\{\phi_k\}$是$L^2[0, l]$的标准正交基.

内积空间

例2.1 记

$$\phi_k(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad k = 1, 2, \cdots,$$

试证明 $\{\phi_k\}$是$L^2[0, l]$的标准正交基.

证明： 容易验证 $\{\phi_k\}$是$L^2[0, l]$的标准正交函数系.

内积空间

例2.1 记

$$\phi_k(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad k = 1, 2, \cdots,$$

试证明 $\{\phi_k\}$是$L^2[0, l]$的标准正交基.

证明： 容易验证 $\{\phi_k\}$是$L^2[0, l]$的标准正交函数系.
下面证明该函数系的完备性. 基本思路：利用定理2.5(b)

内积空间

(1) 利用逼近性质(2)，对任意的$\varepsilon > 0$，存在周期为$2l$的奇函数$\widetilde{f} \in C^\infty[0, l]$，使得$\|f - \widetilde{f}\| < \varepsilon/3$. 记傅里叶系数$c_k = (f, \phi_k)$，$\widetilde{c}_k = (\widetilde{f}, \phi_k)$.

内积空间

(1) 利用逼近性质(2)，对任意的$\varepsilon > 0$，存在周期为$2l$的奇函数$\widetilde{f} \in C^\infty[0,l]$，使得$\|f-\widetilde{f}\| < \varepsilon/3$. 记傅里叶系数$c_k = (f,\phi_k)$，$\widetilde{c}_k = (\widetilde{f},\phi_k)$.

(2) 利用连续函数傅立叶级数的一致收敛性知，

取$N = N(\varepsilon)$充分大，使得$\|\widetilde{f} - \sum_1^N \widetilde{c}_k\phi_k\| < \varepsilon/3$.

内积空间

(1) 利用逼近性质(2)，对任意的$\varepsilon > 0$，存在周期为$2l$的奇函数$\widetilde{f} \in C^{\infty}[0, l]$，使得$\|f - \widetilde{f}\| < \varepsilon/3$. 记傅里叶系数$c_k = (f, \phi_k)$，$\widetilde{c_k} = (\widetilde{f}, \phi_k)$.

(2) 利用连续函数傅立叶级数的一致收敛性知，

取$N = N(\varepsilon)$充分大，使得$\|\widetilde{f} - \sum_{1}^{N} \widetilde{c_k}\phi_k\| < \varepsilon/3$.

(3) 利用Bessel 不等式，$\|\sum_{1}^{N}(c_k - \widetilde{c_k})\phi_k\| \leq \|f - \widetilde{f}\|$.

内积空间

(1) 利用逼近性质(2)，对任意的$\varepsilon > 0$，存在周期为$2l$的奇函数$\widetilde{f} \in C^{\infty}[0, l]$，使得$\|f - \widetilde{f}\| < \varepsilon/3$. 记傅里叶系数$c_k = (f, \phi_k)$, $\widetilde{c}_k = (\widetilde{f}, \phi_k)$.

(2) 利用连续函数傅立叶级数的一致收敛性知，

取$N = N(\varepsilon)$充分大，使得$\|\widetilde{f} - \sum_1^N \widetilde{c}_k \phi_k\| < \varepsilon/3$.

(3) 利用Bessel 不等式，$\|\sum_1^N (c_k - \widetilde{c}_k)\phi_k\| \leq \|f - \widetilde{f}\|$.

(4) $\|f - \sum_1^N c_k \phi_k\| \leq$

$$\|f - \widetilde{f}\| + \|\widetilde{f} - \sum_1^N \widetilde{c}_k \phi_k\| + \|\sum_1^N (c_k - \widetilde{c}_k)\phi_k\| < \varepsilon.$$