数学物理方法

2025春

教材：
《数学物理方法讲义》杨明、石佩虎编
2018.9 (2021.3 重印)
东南大学出版社

4. 非奇次方程求解

- 特征值函数展开法
- 齐次化原理 ODE → PDE

例1. 带有热源的热方程

$$\begin{cases} u_t - ku_{xx} = f(x,t), & 0 < x < \pi, t > 0, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

解 考虑其特征值问题

$$\phi'' + \lambda\phi = 0,\ \ 0 < x < \pi,\quad \phi(0) = \phi(\pi) = 0$$

$$\Rightarrow\ e.v.\ \ \lambda_n = n^2,\quad e.f.\ \ \phi_n(x) = \sin nx,\ \ n = 1, 2, \cdots$$

特征函数系$\{\sin nx\}_1^\infty$构成$L^2[0,\pi]$的一组正交基.

$$u(x,t) = \sum_1^\infty u_n(t)\phi_n(x),\ \ f(x,t) = \sum_1^\infty f_n(t)\phi_n(x),\ \ g(x) = \sum_1^\infty g_n\phi_n(x)$$

将这些展开式代入

$$\Rightarrow\ \Sigma_1^\infty u_n'(t)\phi_n(x) - k\Sigma_1^\infty u_n(t)\phi_n''(x) = \Sigma_1^\infty f_n(t)\phi_n(x)$$

$$\Sigma_1^\infty u_n(0)\phi_n(x) = \Sigma_1^\infty g_n\phi_n(x).$$

注意到$\phi_n''(x) = -\lambda_n\phi_n(x)$，比较$\phi_n(x)$的系数

$$\Rightarrow \begin{cases} u_n'(t) + k\lambda_n u_n(t) = f_n(t), & t > 0, \\ u_n(0) = g_n, & n = 1, 2, \cdots \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad u_n(t) = g_n e^{-k\lambda_n t} + \int_0^t f_n(s) e^{-k\lambda_n(t-s)} \mathrm{d}s$$

$$\Rightarrow \quad u(x,t) = \sum_1^\infty \left(g_n e^{-k\lambda_n t} + \int_0^t f_n(s) e^{-k\lambda_n(t-s)} \mathrm{d}s\right) \sin nx$$

练习1. 求解热方程初边值问题

$$\begin{cases} u_t - k u_{xx} = \cos 2x, & 0 < x < \pi, t > 0, \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0, & t \ge 0, \\ u(x,0) = 1, & 0 \le x \le \pi. \end{cases}$$

参考答案： $u(x,t) = 1 + \dfrac{1}{4k}(1 - e^{-4kt})\cos 2x.$

练习2：求下列问题的级数形式的解，

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}-ru_t,0<x<l,t>0; \\ u(0,t)=u(l,t)=0,t\geq 0; \\ u(x,0)=\varphi(x),u_t(x,0)=\psi(x),0\leq x\leq l. \end{cases}$$

其中$0<r<\dfrac{2\pi a}{l}$,r为常数。

请思考，如果$r>\dfrac{2\pi a}{l}$，那么求解过程有哪些不同?

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\frac{r}{2}t}\left(\varphi_n\cos\beta_n t+\frac{\psi_n+\frac{r}{2}\varphi_n}{\beta_n}\sin\beta_n t\right)\sin\frac{n\pi x}{l},$$

$\beta_n=\dfrac{\sqrt{(\frac{2n\pi a}{l})^2-r^2}}{2}$, φ_n, ψ_n是$\varphi(x)$, $\psi(x)$的Fourier系数.

例3.用特征函数展开法求解

$$\begin{cases} -\Delta u = 1+\cos\theta, & r<a\ , \\ u=0, & r=a. \end{cases}$$

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}$$

方程化为

$$r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\theta\theta} = -r^2(1+\cos\theta)$$

解 先考虑关于变量θ的特征值问题

$$\begin{cases} T''(\theta)+\lambda T(\theta)=0, \\ T(\theta)=T(\theta+2\pi). \end{cases}$$

$e.v.$ $\lambda_0=0,\ \lambda_n=n^2,$

$e.f.$ $T_0=1,\ T_n=A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta,\quad n=1,2,\cdots$

用此特征函数系将$u(r,\theta)$展开

$$u(r,\theta)=A_0(r)+\sum_{1}^{\infty}A_n(r)\cos n\theta+B_n(r)\sin n\theta$$

代入方程得

$$r^2\left[A_0''(r)+\sum_1^\infty (A_n''(r)\cos n\theta+B_n''(r)\sin n\theta)\right]$$

$$+r\left[A_0'(r)+\sum_1^\infty (A_n'(r)\cos n\theta+B_n'(r)\sin n\theta)\right]$$

$$-\sum_1^\infty n^2(A_n(r)\cos n\theta+B_n(r)\sin n\theta)=-r^2(1+\cos\theta)$$

代入边界条件得

$$A_0(a)+\sum_1^\infty A_n(a)\cos n\theta+B_n(a)\sin n\theta=0.$$

$$\begin{cases} r^2A_0''(r)+rA_0'(r)=-r^2, \qquad 0<r<a, \\ |A_0(0)|<\infty, \quad A_0(a)=0, \end{cases}$$

解得 $\quad A_0(r)=\dfrac{1}{4}(a^2-r^2)$

$$\begin{cases} r^2A_1''(r)+rA_1'(r)-A_1(r)=-r^2, \quad 0<r<a, \\ |A_1(0)|<\infty, \quad A_1(a)=0, \end{cases}$$

解得 $A_1(r)=\dfrac{r}{3}(a-r)$

其余系数 $A_n(r)=0 \ (n\neq 0,1), \qquad B_n(r)=0.$

$$\Longrightarrow \ u(r,\theta)=\frac{1}{4}(a^2-r^2)+\frac{r}{3}(a-r)\cos\theta.$$

自共轭算子的特征值问题

定义

设算子$T: L^2[a,b] \to L^2[a,b]$满足对任意的$f, g \in L^2[a,b]$有

$$(Tf, g) = (f, Tg),$$

则称T为自共轭算子(self-adjoint operator)，也称为对称算子.

自共轭算子的特征值问题

定义

设算子$T: L^2[a,b] \to L^2[a,b]$满足对任意的$f, g \in L^2[a,b]$有

$$(Tf, g) = (f, Tg),$$

则称T为**自共轭算子(self-adjoint operator)，也称为对称算子**.

考虑二阶线性微分算子

$$Lf = (rf')' + pf, \quad x \in (a,b),$$

其中a, b是有限数，函数$r, p \in C^2[a,b]$是已知实函数且$r > 0, p \geq 0$. 齐次边界条件为

自共轭算子的特征值问题

$$\begin{cases} \alpha_1 f(a) + \alpha_2 f'(a) = 0, & (\alpha_1, \alpha_2) \neq (0,0), \\ \beta_1 f(b) + \beta_2 f'(b) = 0, & (\beta_1, \beta_2) \neq (0,0). \end{cases} \quad (*)$$

则利用分部积分可以证明，带上述齐次B.C.的微分算子Lf是自共轭算子.

自共轭算子的特征值问题

$$\begin{cases} \alpha_1 f(a) + \alpha_2 f'(a) = 0, & (\alpha_1, \alpha_2) \neq (0,0), \\ \beta_1 f(b) + \beta_2 f'(b) = 0, & (\beta_1, \beta_2) \neq (0,0). \end{cases} \quad (*)$$

则利用分部积分可以证明，带上述齐次B.C.的微分算子Lf是自共轭算子.

考虑带有上述齐次B.C.的自共轭算子Lf 的特征值问题(Sturm-Liouville problem)

$$\begin{cases} Lf + \lambda \omega f = 0, & a < x < b, \\ B.C. \quad (*) \end{cases}$$

其中$\omega(x) > 0$为权函数.

自共轭算子的特征值问题

定义 加权平方可积空间$L^2_\omega[a,b]$为

$$L^2_\omega[a,b] := \left\{ f \middle| \int_a^b \omega |f|^2 \mathrm{d}x < \infty \right\}.$$

对于$\forall f, g \in L^2_\omega[a,b]$，它们在此空间中的内积定义为

$$(f,g)_\omega = \int_a^b \omega(x) f(x) \overline{g(x)}\, \mathrm{d}x.$$

定理2.6

(1) 自共轭算子L的所有特征值都是实数;

(2) 每个特征值都是单重;

(3) 不同特征值的特征函数在区间$[a,b]$上加权ω正交;

(4) 特征函数系构成$L^2_\omega[a,b]$的一组加权正交基.

自共轭算子的特征值问题

例1 求解下列特征值问题

(1) $\phi'' + \lambda\phi = 0, \quad 0 < x < l, \qquad \phi(0) = \phi'(l) = 0;$

(2) $\phi'' + \lambda\phi = 0, \quad 0 < x < l, \qquad \phi(0) = 0, \quad \phi'(l) + \sigma\phi(l) = 0,$
$\sigma > 0$为常数.

自共轭算子的特征值问题

例1 求解下列特征值问题

(1) $\phi''+\lambda\phi=0,\quad 0<x<l,\qquad \phi(0)=\phi'(l)=0;$

(2) $\phi''+\lambda\phi=0,\quad 0<x<l,\qquad \phi(0)=0,\quad \phi'(l)+\sigma\phi(l)=0,$

$\sigma>0$为常数.

解 (1) 先证明特征值$\lambda>0$，方程两边乘ϕ并在$[0,l]$上积分得

$$\int_0^l \phi\phi''+\lambda\phi^2\mathrm{d}x=0,$$

分部积分得

$$\lambda\int_0^l\phi^2\mathrm{d}x=-\int_0^l\phi\phi''\mathrm{d}x=-\phi\phi'\Big|_0^l+\int_0^l\phi'^2\mathrm{d}x=\int_0^l\phi'^2\mathrm{d}x.$$

因为$\phi \not\equiv 0, \phi'(x) \not\equiv 0$，所以$\int_0^l \phi^2 \mathrm{d}x > 0, \int_0^l \phi'^2 \mathrm{d}x > 0$，从而

$$\lambda = \frac{\int_0^l \phi'^2 \mathrm{d}x}{\int_0^l \phi^2 \mathrm{d}x} > 0.$$

因为$\phi \not\equiv 0, \phi'(x) \not\equiv 0$，所以$\int_0^l \phi^2 \mathrm{d}x > 0, \int_0^l \phi'^2 \mathrm{d}x > 0$，从而

$$\lambda = \frac{\int_0^l \phi'^2 \mathrm{d}x}{\int_0^l \phi^2 \mathrm{d}x} > 0.$$

设$\lambda = \beta^2$，$\beta > 0$，则方程通解为

$$\phi(x) = A\cos\beta x + B\sin\beta x,$$

由边界条件得$A = 0, \cos\beta l = 0$，从而$\beta l = (n - \frac{1}{2})\pi$，所以特征值为

$$\lambda_n = \left(\frac{(2n-1)\pi}{2l}\right)^2, \quad n = 1, 2, \cdots,$$

对应的特征函数为

$$\phi_n(x) = \sin\frac{(2n-1)\pi x}{2l}, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

(2)同法可证特征值$\lambda > 0$. 设$\lambda = \beta^2$, $\beta > 0$，则方程通解为

$$\phi(x) = A\cos\beta x + B\sin\beta x,$$

(2)同法可证特征值$\lambda > 0$. 设$\lambda = \beta^2$, $\beta > 0$，则方程通解为

$$\phi(x) = A\cos\beta x + B\sin\beta x,$$

由边界条件得$A = 0$, $\beta\cos\beta l + \sigma\sin\beta l = 0$，即

$$\tan\beta l = -\frac{\beta}{\sigma} \Longleftrightarrow \tan\gamma = -\frac{\gamma}{l\sigma}\ (\gamma = \beta l).$$

可以分析它有无穷多个正解，记此方程的第n个正解为β_n，则

特征值$\lambda_n = \beta_n^2$, $n = 1, 2, \cdots$,

特征函数$\phi_n(x) = \sin\beta_n x$, $n = 1, 2, \cdots$.

特征函数展开法

先看两端固定的弦作自由振动时，一般解的表达式

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l},$$

因为$\{\sin\frac{n\pi x}{l}\}$ 是正交基，所以可以用此正交基表示更广泛的一类函数$v(x,t)$,只要$v(0,t)=v(l,t)=0$. 因此，也可以用上述公式来表示两端固定的弦在外力作用下的位移，即表示一个非齐次弦振动方程的解.

特征函数展开法

先看两端固定的弦作自由振动时，一般解的表达式

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l},$$

因为$\{\sin\frac{n\pi x}{l}\}$ 是正交基，所以可以用此正交基表示更广泛的一类函数$v(x,t)$,只要$v(0,t)=v(l,t)=0$. 因此，也可以用上述公式来表示两端固定的弦在外力作用下的位移，即表示一个非齐次弦振动方程的解.

- 适用范围：齐次边界条件，方程可以非齐次
- 特征展开法求解定解问题的步骤

1 求特征函数系，用齐次方程及齐次边界条件来确定特征值问题，求解特征值问题得到的特征函数系；

2 将待求的解函数、初始函数和自由项都可以按照此函数系展开，并带入原方程和初始条件，推导出一组常微分方程初值问题；

3 求解常微分方程初值问题，最后求得定解问题的解.

特征函数展开法

例1 求解热方程初边值问题

$$
\begin{cases}
u_t - k u_{xx} = x, & 0 < x < \pi,\ \ t > 0, \\
u_x(0,t) = u_x(\pi,\ t) = 0, & t \geq 0, \\
u(x,0) = 1, & 0 \leq x \leq \pi.
\end{cases}
$$

特征函数展开法

例1 求解热方程初边值问题

$$\begin{cases} u_t - k u_{xx} = x, & 0 < x < \pi,\ t > 0, \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,\, t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x,0) = 1, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

解：第一步，该定解问题对应的特征值问题是

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X = 0, 0 < x < \pi, \\ X'(0) = X'(\pi) = 0, \end{cases}$$

特征函数展开法

例1 求解热方程初边值问题

$$\begin{cases} u_t - ku_{xx} = x, & 0 < x < \pi,\ t > 0, \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x,0) = 1, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

解: 第一步，该定解问题对应的特征值问题是

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X = 0, 0 < x < \pi, \\ X'(0) = X'(\pi) = 0, \end{cases}$$

对应的特征函数系是$\{\cos nx\}_{n=0}^{\infty}$.

第二步，把待求解函数$u(x,t)$ 和自由项$f(x,t)=x$关于x 按此特征函数系$\{\cos nx\}_{n=0}^{\infty}$在区间$[0,\pi]$上展开. 因为初始函数已经是特征函数的线性组合形式，所以不需要展开.

第二步，把待求解函数$u(x,t)$ 和自由项$f(x,t)=x$关于x 按此特征函数系$\{\cos nx\}_{n=0}^{\infty}$在区间$[0,\pi]$上展开. 因为初始函数已经是特征函数的线性组合形式，所以不需要展开.

$$\begin{aligned} u(x,t) &= u_0(t)+\sum_{1}^{\infty} u_n(t)\cos nx, \\ x &= \frac{\pi}{2}+\sum_{1}^{\infty}\frac{2[(-1)^n-1]}{n^2\pi}\cos nx. \end{aligned}$$

第二步，把待求解函数$u(x,t)$ 和自由项$f(x,t)=x$关于x 按此特征函数系$\{\cos nx\}_{n=0}^{\infty}$在区间$[0,\pi]$上展开. 因为初始函数已经是特征函数的线性组合形式，所以不需要展开.

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= u_0(t)+\sum_{1}^{\infty}u_n(t)\cos nx,\\
x &= \frac{\pi}{2}+\sum_{1}^{\infty}\frac{2[(-1)^n-1]}{n^2\pi}\cos nx.
\end{aligned}
$$

把展开式代入方程和初始条件,得

$$
u_0'(t)+\sum_{1}^{\infty}\left[u_n'(t)+n^2ku_n(t)\right]\cos nx=\frac{\pi}{2}+\sum_{1}^{\infty}\frac{2[(-1)^n-1]}{n^2\pi}\cos nx,
$$

$$
u_0(0)+\sum_{1}^{\infty}u_n(0)\cos nx=1.
$$

导出一列常微分方程

$$u_0'(t) = \pi/2, \quad u_n'(t) + n^2 k u_n(t) = \frac{2[(-1)^n - 1]}{n^2\pi}, \; n = 1, 2, \cdots .$$

及初值条件

$$u_0(0) = 1, \quad u_n(0) = 0, \; n = 1, 2, \cdots .$$

导出一列常微分方程

$$u_0'(t)=\pi/2,\quad u_n'(t)+n^2ku_n(t)=\frac{2[(-1)^n-1]}{n^2\pi},\ n=1,2,\cdots.$$

及初值条件

$$u_0(0)=1,\quad u_n(0)=0,\ n=1,2,\cdots.$$

第三步，求解一阶常微分方程的初值问题,得

$$u_0(t)=\frac{\pi t}{2}+1,\quad u_n(t)=\frac{2[(-1)^n-1]}{n^4k\pi}(1-\mathrm{e}^{-n^2kt}),n=1,2,\cdots.$$

导出一列常微分方程

$$u_0'(t)=\pi/2,\quad u_n'(t)+n^2ku_n(t)=\frac{2[(-1)^n-1]}{n^2\pi},\ n=1,2,\cdots.$$

及初值条件

$$u_0(0)=1,\quad u_n(0)=0,\ n=1,2,\cdots.$$

第三步，求解一阶常微分方程的初值问题,得

$$u_0(t)=\frac{\pi t}{2}+1,\quad u_n(t)=\frac{2[(-1)^n-1]}{n^4k\pi}(1-\mathrm{e}^{-n^2kt}),n=1,2,\cdots.$$

于是

$$u(x,t)=\frac{\pi t}{2}+1+\sum_{1}^{\infty}\frac{2[(-1)^n-1]}{n^4k\pi}(1-\mathrm{e}^{-n^2kt})\cos nx.$$

特征函数展开法

例2 求解弦振动方程初边值问题

$$
\begin{cases}
u_{tt} - u_{xx} = t\sin x, & 0 < x < \pi,\ \ t > 0,\\
u(0,t) = u(\pi,\ t) = 0, & t \geq 0,\\
u(x,0) = x(\pi - x),\quad u_t(x,0) = 0, & 0 \leq x \leq \pi.
\end{cases}
$$

特征函数展开法

例2 求解弦振动方程初边值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = t\sin x, & 0 < x < \pi,\ t > 0, \\ u(0,t) = u(\pi,\ t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x,0) = x(\pi - x),\quad u_t(x,0) = 0, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

解: 第一步，该定解问题对应的特征值问题是

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X = 0, & 0 < x < \pi, \\ X(0) = X(\pi) = 0, \end{cases}$$

因此，对应的特征函数系是$\{\sin nx\}_{n=1}^{\infty}$.

第二步，把待求解函数$u(x,t)$和初始函数$\varphi(x)=x(\pi-x)$关于x 按此特征函数系$\{\sin nx\}_{n=1}^{\infty}$展开，$f(x,t)=t\sin x$ 关于x已经是特征函数的线性组合，不需展开，

第二步，把待求解函数$u(x,t)$和初始函数$\varphi(x)=x(\pi-x)$关于x 按此特征函数系$\{\sin nx\}_{n=1}^{\infty}$展开，$f(x,t)=t\sin x$ 关于x已经是特征函数的线性组合，不需展开，

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\sin nx, \\
x(\pi-x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^3\pi}[1-(-1)^n]\sin nx.
\end{aligned}
$$

把这些展开式代入方程,得

$$
\sum_{n=1}^{\infty}[u_n''(t)+n^2u_n(t)]\sin nx = t\sin x,
$$

$$
\sum_{n=1}^{\infty} u_n(0)\sin nx = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^3\pi}[1-(-1)^n]\sin nx,
$$

$$
\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(0)\sin nx = 0.
$$

比较$\sin nx$的系数，得到一列常微分方程

$$u_1''(t)+u_1(t)=t,\quad u_n''(t)+n^2u_n(t)=0,\ \ n=2,3,\cdots.$$

和初值条件

$$u_n(0)=\frac{4}{n^3\pi}[1-(-1)^n],\quad u_n'(0)=0,\ n=1,2,\cdots.$$

比较$\sin nx$的系数，得到一列常微分方程

$$u_1''(t)+u_1(t)=t,\quad u_n''(t)+n^2u_n(t)=0,\ n=2,3,\cdots.$$

和初值条件

$$u_n(0)=\frac{4}{n^3\pi}[1-(-1)^n],\quad u_n'(0)=0,\ n=1,2,\cdots.$$

第三步，求解二阶常微分方程的初值问题得

$$\begin{aligned} u_1(t) &= t-\sin t+\frac{8}{\pi}\cos t, \\ u_n(t) &= \frac{4}{n^3\pi}[1-(-1)^n]\cos nt,\ n=2,3,\cdots.. \end{aligned}$$

比较$\sin nx$的系数，得到一列常微分方程

$$u_1''(t)+u_1(t)=t,\quad u_n''(t)+n^2u_n(t)=0,\ \ n=2,3,\cdots.$$

和初值条件

$$u_n(0)=\frac{4}{n^3\pi}[1-(-1)^n],\quad u_n'(0)=0,\ n=1,2,\cdots.$$

第三步，求解二阶常微分方程的初值问题得

$$\begin{aligned} u_1(t) &= t-\sin t+\frac{8}{\pi}\cos t, \\ u_n(t) &= \frac{4}{n^3\pi}[1-(-1)^n]\cos nt,\ \ n=2,3,\cdots.. \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} u(x,t) &= (t-\sin t)\sin x \\ &\quad+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^3\pi}[1-(-1)^n]\cos nt\sin nx. \end{aligned}$$

特征函数展开法

例3

求解如下位势方程的边值问题

$$\begin{cases} -\Delta u = -(u_{rr} + \dfrac{1}{r}u_r + \dfrac{1}{r^2}u_{\theta\theta}) = 1 + \cos\theta, & 0 < r < a, \\ |u(0,\theta)| < \infty, \quad u(a,\theta) = 0, & r = a. \end{cases}$$

特征函数展开法

例3

求解如下位势方程的边值问题

$$\begin{cases} -\Delta u = -(u_{rr} + \dfrac{1}{r}u_r + \dfrac{1}{r^2}u_{\theta\theta}) = 1 + \cos\theta, & 0 < r < a, \\ |u(0,\theta)| < \infty, \quad u(a,\theta) = 0, & r = a. \end{cases}$$

解 第一步：导出特征值问题. 利用对应齐次方程及分离变量法，可得特征值问题

$$\begin{cases} T''(\theta) + \lambda T(\theta) = 0, \\ T(\theta) = T(\theta + 2\pi) = 0. \end{cases}$$

求解该特征值问题，得$\lambda_0 = 0$, $T_0(\theta) = 1$,

$$\lambda_n = n^2, \quad T_n(\theta) = A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

求解该特征值问题，得$\lambda_0 = 0$, $T_0(\theta) = 1$,

$$\lambda_n = n^2, \quad T_n(\theta) = A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

第二步：用此特征函数系将$u(r, \theta)$展开，即

$$u(r, \theta) = A_0(r) + \sum_1^{\infty} [A_n(r) \cos n\theta + B_n(r) \sin n\theta].$$

非齐次项已经是特征函数的线性组合，不需展开.
把这些展开式代入方程得

$$[r^2 A_0''(r) + r A_0'(r)] + \sum_1^{\infty} [r^2 A_n''(r) + r A_n'(r) - n^2 A_n(r)] \cos n\theta$$

$$+ \sum_1^{\infty} [r^2 B_n''(r) + r B_n'(r) - n^2 B_n(r)] \sin n\theta = -r^2(1 + \cos\theta),$$

代入边界条件得

$$A_0(a)+\sum_{1}^{\infty}A_n(a)\cos n\theta+B_n(a)\sin n\theta=0.$$

比较特征函数的系数得

$$\begin{cases} r^2A_0''(r)+rA_0'(r)=-r^2, & 0<r<a,\\ |A_0(0)|<\infty, \quad A_0(a)=0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} r^2A_1''(r)+rA_1'(r)-A_1(r)=-r^2, & 0<r<a,\\ |A_1(0)|<\infty, \quad A_1(a)=0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} r^2A_n''(r)+rA_n'(r)-n^2A_n(r)=0, & 0<r<a,\\ |A_n(0)|<\infty, \quad A_n(a)=0, \end{cases} \quad n=2,3,\cdots,$$

$$\begin{cases} r^2 B_n''(r) + rB_n'(r) - n^2 B_n(r) = 0, & 0 < r < a, \\ |B_n(0)| < \infty, \quad B_n(a) = 0, \end{cases} \quad n = 1, 2, \cdots,$$

求解这些ode边值问题，得

$$A_0(r) = \frac{1}{4}(a^2 - r^2), \qquad A_1(r) = \frac{r}{3}(a - r),$$
$$A_n(r) = 0 \quad (n \neq 0, 1), \qquad B_n(r) = 0.$$

故问题的解为

$$u(r, \theta) = \frac{1}{4}(a^2 - r^2) + \frac{r}{3}(a - r)\cos\theta.$$

非齐次方程和齐次边界条件的定解问题

波动方程的初边值问题

例. 考虑两端固定的弦的受迫振动问题

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t), \quad 0 < x < l, t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = \psi(x), 0 \le x \le l, \quad (1) \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad t \ge 0. \end{cases}$$

分析一：由于泛定方程中非齐次$f(x, t)$的出现，若以$u(x, t) = X(x)T(t)$代入方程，不能实现变量分离。为此，可采用特征函数法(类比求解线性非齐次常微分方程的常数变易法)。

常数变易法回顾

对于二阶线性非齐次常微分方程

$$y''(t)+p(t)y'(t)+q(t)y(t)=f(t),$$

若对应的齐次方程 $y''(t)+p(t)y'(t)+q(t)y(t)=0$

有通解 $y(t)=C_1y_1(t)+C_2y_2(t)\quad(C_1,C_2\text{为常数})$

则该非齐次方程有特解

$$y(t)=C_1(t)y_1(t)+C_2(t)y_2(t),$$

其中 $C_1(t)$ 和$C_2(t)$ 可由下列方程组求得：

$$\begin{cases} C_1'(t)y_1(t)+C_2'(t)y_2(t)=0, \\ C_1'(t)y_1'(t)+C_2'(t)y_2'(t)=f(t). \end{cases}\qquad(2)$$

解. 法一：特征函数法

Step 1. 对应齐次问题的特征函数系

问题(1)所对应的齐次问题为

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}, \quad 0<x<l, t>0, \\ u(x,0)=\varphi(x), u_t(x,0)=\psi(x), 0\le x\le l, \\ u(0,t)=u(l,t)=0, \quad t\ge 0. \end{cases}$$

通过分离变量$u(x, t)=X(x)T(t)$后，得到的特征值问题为

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0, \quad 0<x<l, t>0, \\ X(0)=X(l). \end{cases}$$

由此解得特征函数为 $X_n(x)=C_n\sin\dfrac{n\pi x}{l}, \quad n=1,2,\cdots.$

Step 2. $T_n(t)$ 的方程和初始条件

类比常数变易法，设(1)的形式解为

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l},\quad T_n(t)(n=1,2,\cdots)\text{为待定函数,}\quad (3)$$

则(3)满足边界条件$u(0,t)=u(l,t)=0.$

将(3)代入泛定方程，得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[T_n''(t)+a^2\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2T_n(t)\right]\sin\frac{n\pi x}{l}=f(x,t)$$

此等式的左端是右端函数$f(x,t)$关于变量x的*Fourier*正弦级数展开，故有

$$T_n''(t)+a^2\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2T_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l f(x,t)\sin\frac{n\pi x}{l}dx:=f_n(t),\quad (4)$$

将(3)代入初始条件，有 $\begin{cases} \varphi(x) = u(x,0) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} T_n(0)\sin\dfrac{n\pi x}{l}, \\ \psi(x) = u_t(x,0) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} T_n'(0)\sin\dfrac{n\pi x}{l}. \end{cases}$

于是
$$\begin{cases} T_n(0) = \dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l \varphi(x)\sin\dfrac{n\pi x}{l}dx := a_n, \\ T_n'(0) = \dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l \psi(x)\sin\dfrac{n\pi x}{l}dx := b_n. \end{cases} \qquad (5)$$

Step 3. $T_n(t)$ 的求解

用常微分方程的常数变易法求解关于 $T_n(t)$ 的定解问题(4)和(5)。

因齐次方程 $T_n''(t)+\left(\dfrac{n\pi a}{l}\right)^2 T_n(t)=0$ 的通解为

$$T_n(t)=C_1\cos\frac{n\pi at}{l}+C_2\sin\frac{n\pi at}{l},$$

故设(4)的通解为

$$T_n(t)=C_1(t)\cos\frac{n\pi at}{l}+C_2(t)\sin\frac{n\pi at}{l},$$

其中 $C_1(t),C_2(t)$ 由(2)确定，即

$$C_1'(t)=\frac{\begin{vmatrix}0 & y_2\\ f_n(t) & y_2'\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}y_1 & y_2\\ y_1' & y_2'\end{vmatrix}}=\frac{-y_2f_n(t)}{y_1y_2'-y_2y_1'}$$

$$=\frac{-\sin\dfrac{n\pi at}{l}f_n(t)}{\dfrac{n\pi a}{l}\left[\cos^2\dfrac{n\pi at}{l}+\sin^2\dfrac{n\pi at}{l}\right]}=-\frac{l}{n\pi a}\sin\frac{n\pi at}{l}f_n(t),$$

$$C_2'(t)=\frac{l}{n\pi a}\cos\frac{n\pi at}{l}f_n(t).$$

于是 $\boxed{\begin{cases}C_1(t)=-\dfrac{l}{n\pi a}\displaystyle\int_0^t\sin\frac{n\pi a\tau}{l}f_n(\tau)d\tau+c_1,\\ C_2(t)=\dfrac{l}{n\pi a}\displaystyle\int_0^t\cos\frac{n\pi a\tau}{l}f_n(\tau)d\tau+c_2.\end{cases}}$ c_1,c_2为任意常数。

从而 $$T_n(t)=-\frac{l}{n\pi a}\cos\frac{n\pi at}{l}\int_0^t\sin\frac{n\pi a\tau}{l}f_n(\tau)d\tau+c_1\cos\frac{n\pi at}{l}$$
$$+\frac{l}{n\pi a}\sin\frac{n\pi at}{l}\int_0^t\cos\frac{n\pi a\tau}{l}f_n(\tau)d\tau+c_2\sin\frac{n\pi at}{l}$$
$$=c_1\cos\frac{n\pi at}{l}+c_2\sin\frac{n\pi at}{l}+\frac{l}{n\pi a}\int_0^t f_n(\tau)\sin\frac{n\pi a(t-\tau)}{l}d\tau.$$

代入(5)，得 $T_n(0)=c_1=a_n,\quad T_n'(0)=c_2\dfrac{n\pi a}{l}=b_n,$

因此

$$T_n(t)=a_n\cos\frac{n\pi at}{l}+\frac{b_n l}{n\pi a}\sin\frac{n\pi at}{l}+\frac{l}{n\pi a}\int_0^t f_n(\tau)\sin\frac{n\pi a(t-\tau)}{l}d\tau. \quad (6)$$

Step 4. 非齐次问题的解

将(6)代入(3)，得定解问题(1)的解为

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi at}{l}+\frac{b_n l}{n\pi a}\sin\frac{n\pi at}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l}$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{l}{n\pi a}\left(\int_0^t f_n(\tau)\sin\frac{n\pi a(t-\tau)}{l}d\tau\right)\sin\frac{n\pi x}{l}$$

$$:=u_1(x,t)+u_2(x,t), \quad (7)$$

其中 $a_n,b_n,f_n(t)$ 由(4)和(5)确定。

分析二: $u_1(x,t)$ 恰为齐次定解问题

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}, \quad 0<x<l, t>0, \\ u(x,0)=\varphi(x), u_t(x,0)=\psi(x), 0\le x\le l, \\ u(0,t)=u(l,t)=0, \quad t\ge 0. \end{cases} \quad (8)$$

的形式解，而 $u_2(x,t)$ 是零初始条件下非齐次问题

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,t), \quad 0<x<l, t>0, \\ u(x,0)=0, u_t(x,0)=0, 0\le x\le l, \\ u(0,t)=u(l,t)=0, \quad t\ge 0. \end{cases} \quad (9)$$

的形式解。可见，原非齐次定解问题(1)可由叠加原理分解为齐次定解问题(8)和零初始条件下非齐次问题(9)。

齐次定解问题(8)表示由初值引起的振动，可由分量变量法求解；零初始条件下非齐次问题(9)表示仅由强迫外力引起的振动，可由下面的齐次化原理转化为齐次问题利用分离变量法求解。

定理2. (齐次化原理)如果 $w(x,t;\tau)$ 是定解问题

$$\begin{cases} w_{tt}=a^2 w_{xx}, \quad 0<x<l, t>\tau, \\ w\big|_{t=\tau}=0, w_t\big|_{t=\tau}=f(x,\tau), 0\le x\le l, \\ w\big|_{x=0}=w\big|_{x=l}=0, \quad t\ge\tau. \end{cases} \tag{10}$$

的解，其中$\tau\ge 0$是参数，则$u_2(x,t)=\int_0^t w(x,t;\tau)d\tau$是定解问题(9)的解。

解. 法二：分离变量法+齐次化原理+叠加原理

Step 1. 分离变量法求解齐次问题(8)

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = \psi(x), 0 \le x \le l, \quad (8) \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad t \ge 0. \end{cases}$$

其形式解为 $$\boxed{u_1(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\frac{n\pi at}{l} + b_n \sin\frac{n\pi at}{l} \right) \sin\frac{n\pi x}{l}}$$

其中 $$\boxed{\begin{cases} a_n = \dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l \varphi(x) \sin\frac{n\pi x}{l} dx, \\ b_n = \dfrac{2}{n\pi a}\displaystyle\int_0^l \psi(x) \sin\frac{n\pi x}{l} dx, \end{cases} \quad n = 1, 2, \cdots.}$$

Step 2. 齐次化原理求解零初值问题(9)

令 $t' = t - \tau$, 则(10)可化为齐次方程齐次边界条件问题

$$\begin{cases} w_{t't'} = a^2 w_{xx}, \quad 0 < x < l, t' > 0, \\ w\big|_{t'=0} = 0, w_{t'}\big|_{t'=0} = f(x,\tau), 0 \le x \le l, \quad (11) \\ w\big|_{x=0} = w\big|_{x=l} = 0, \quad t' \ge 0. \end{cases}$$

由分离变量法可得 $w(x,t,t') = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\tau) \sin \frac{n\pi a t'}{l} \sin \frac{n\pi x}{l}$,

其中 $\boxed{f_n(\tau) = \frac{2}{n\pi a} \int_0^l f(\xi,\tau) \sin \frac{n\pi \xi}{l} d\xi, \quad n = 1, 2, \cdots.}$

由齐次化原理得

$$u_2(x,t) = \int_0^t w(x,t,\tau) d\tau = \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\tau) \sin \frac{n\pi a (t-\tau)}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} d\tau$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^t f_n(\tau)\sin\frac{n\pi a(t-\tau)}{l}d\tau\right)\sin\frac{n\pi x}{l}$$

$$\boxed{=\int_0^t\int_0^l\left(\frac{2}{\pi a}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi\xi}{l}\sin\frac{n\pi a(t-\tau)}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\right)f(\xi,\tau)d\xi d\tau}$$

Step 3. 叠加原理求解非齐次定解问题(1)

由叠加原理，定解问题(1)的解为

$$\boxed{\begin{aligned}u(x,t)&=u_1(x,t)+u_2(x,t)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi at}{l}+b_n\sin\frac{n\pi at}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l}\\&+\int_0^t\int_0^l\left(\frac{2}{\pi a}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi\xi}{l}\sin\frac{n\pi a(t-\tau)}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\right)f(\xi,\tau)d\xi d\tau\end{aligned}}$$

特征函数展开法小结

仔细分析可以看到特征函数展开法对分离变量法进行了改进，先求解特征值问题，然后在每个特征子空间内分离变量. 利用此法可将非齐次PDE初边值问题转化为非齐次ODE初值问题，求出ODE初值问题的解即可得到原问题的解.

复习:二阶常系数非齐次ODE特解的求法

$$ay''+by'+cy=f(x)$$

(1)[待定函数法]f(x)具有特殊形式时,上述方程特解的求法.这里的特殊形式是指:f(x)是指数函数、正弦函数、余弦函数、多项式,或这些函数的某种组合.

(2)[常数变易法]将齐次方程通解中的常数变为函数代入。

积分号下求导:

(1) 设$I(t)=\int_a^b f(x,t)dx, f, f_t \in C$,则$I'(t)=\int_a^b f_t(x,t)dx.$

(2)设$H(t)=\int_{a(t)}^{b(t)} f(x,t)dx, f, f_t, a', b' \in C$,则

$$H'(t)=\int_{a(t)}^{b(t)} f_t(x,t)dx+f(b(t),t)b'(t)-f(a(t),t)a'(t).$$

证明: (1) 根据导数定义可得.

(2)设$g(t,a,b)=\int_a^b f(x,t)dx$,则

$$H(t)=g(t,a(t),b(t)) \Rightarrow H'(t)=g_t+g_a a'(t)+g_b b'(t).$$

齐次化原理的思路.

$$\boxed{\begin{cases} y'+p(t)y=q(t) \\ y(0)=y_0 \end{cases}.}$$

$$\begin{cases} v'+p(t)v=0 \\ v(0)=y_0 \end{cases} \quad (\mathrm{I}) \qquad \begin{cases} u'+p(t)u=q(t) \\ u(0)=0 \end{cases} \quad (\mathrm{II})$$

$$\begin{cases} w'+p(t+s)w=0, \quad t>0 \\ w(0;s)=q(s) \end{cases} \Rightarrow w(t;s)=q(s)\cdot e^{-\int_0^t p(\tau+s)d\tau}$$

利用已有结论猜测 $\boxed{u(t)=\int_0^t w(t-s;s)ds}.$

- 证明上述猜测的结论(一阶ODE)
- 推广到二阶ODE初值问题

- 推广到热方程
- 推广到波动方程

二阶ODE齐次化原理

$$\begin{cases} u''(t)+b(t)u'(t)+c(t)u(t)=f(t), \quad t>0, \\ u(0)=0, \qquad u'(0)=0. \end{cases}$$

考虑其辅助问题

$$\begin{cases} w''(t)+b(t+s)w'(t)+c(t+s)w(t)=0, \quad t>0, \\ w(0;s)=0, \qquad w'(0;s)=f(s). \end{cases}$$

求出该问题的解$w(t;s)$，则原问题的解

$$u(t)=\int_0^t w(t-s;s)\mathrm{d}s.$$

考虑非齐次热方程

$$\begin{cases} u_t - k\Delta u = f(x,t), & x \in D,\ \ t > 0, \\ \text{齐次}\ B.C. & x \in \partial D,\ \ t \geq 0, \\ u(x,0) = 0, & x \in D, \end{cases}$$

引入辅助问题

$$\begin{cases} w_t - k\Delta w = 0, & x \in D,\ \ t > 0, \\ \text{齐次}\ B.C. & x \in \partial D,\ \ t \geq 0, \\ w(x,0;s) = f(x,s), & x \in D, \end{cases}$$

则

$$u(x,t) = \int_0^t w(x,t-s;s)\,\mathrm{d}s.$$

考虑非齐次波动方程

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 \Delta u = f(x,t), & x \in D, \ \ t > 0, \\ \text{齐次 } B.C. & x \in \partial D, \ \ t \geq 0, \\ u(x,0) = 0, \ \ u_t(x,0) = 0, & x \in D, \end{cases}$$

引入辅助问题

$$\begin{cases} w_{tt} - a^2 \Delta w = 0, & x \in D, \ \ t > 0, \\ \text{齐次 } B.C. & x \in \partial D, \ \ t \geq 0, \\ w(x,0;s) = 0, \ \ w_t(x,0;s) = f(x,s), & x \in D, \end{cases}$$

则 $$u(x,t) = \int_0^t w(x,t-s;s)\,\mathrm{d}s.$$

例. 利用齐次化原理求解

$$\begin{cases} u_t - k u_{xx} = t\sin x, & 0 < x < \pi,\ \ t > 0, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x,0) = 0, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

解 构造关于含参数s的函数$w(x,t;s)$的辅助问题

$$\begin{cases} w_t - kw_{xx} = 0, & 0 < x < \pi,\ \ t > 0, \\ w(0,t;s) = w(\pi,t;s) = 0, & t \geq 0, \\ w(x,0;s) = s\sin x, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

解得$w(x,t;s) = se^{-kt}\sin x.$

由热方程齐次化原理知

$$u(x,t) = \int_0^t w(x,t-s;s)\,\mathrm{d}s = \int_0^t se^{-k(t-s)}\sin x\,\mathrm{d}s$$

$$= \left(\frac{t}{k} + \frac{e^{-kt}-1}{k^2}\right)\sin x.$$

课堂练习

求解非齐次波动方程初边值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x)\sin\omega t, & 0 < x < l,\ \ t > 0, \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0, & 0 \leq x \leq l, \end{cases}$$

其中$\omega \neq \omega_n,\ n = 1, 2, \cdots,$

这里的$\omega_n = an\pi/l$称为固有频率.

解 考虑特征值问题

$$\begin{cases} \phi''(x)+\lambda\phi(x)=0, \quad 0<x<l, \\ \phi(0)=\phi(l)=0. \end{cases}$$

$$e.v.\ \lambda_n=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \quad e.f.\ \phi_n(x)=\sin\frac{n\pi x}{l},$$

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)\phi_n(x), \quad f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n\phi_n(x)$$

其中 $f_n=\dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x.$

将展开式代入方程得

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n''(t)\phi_n(x) - a^2 \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\phi_n''(x) = \sin\omega t \sum_{n=1}^{\infty} f_n\phi_n(x)$$

$$\begin{cases} u_n''(t) + a^2\lambda_n u_n(t) = f_n \sin\omega t, & t > 0, \\ u_n(0) = 0, \quad u_n'(0) = 0, & n = 1, 2, \cdots \end{cases}$$

该ODE的特征方程是 $\xi^2 + \omega_n^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \xi = \pm i\,\omega_n.$

因为$\omega \neq \omega_n$，故可求得该ODE的特解是

$$u_n^*(t) = \frac{f_n}{\omega_n^2 - \omega^2} \sin\omega t$$

可设ODE的通解为

$$u_n(t) = A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t + \frac{f_n}{\omega_n^2 - \omega^2} \sin \omega t$$

代入初始条件$u_n(0) = 0,\ u_n'(0) = 0$解得

$$A_n = 0, \qquad B_n = \frac{\omega}{\omega_n} \cdot \frac{f_n}{\omega^2 - \omega_n^2},$$

所以 $u_n(t) = \dfrac{f_n}{\omega^2 - \omega_n^2}\left(\dfrac{\omega}{\omega_n} \sin \omega_n t - \sin \omega t\right)$

综上所述

$$u(x,t) = \sum_{1}^{\infty} \frac{f_n}{\omega^2 - \omega_n^2}\left(\frac{\omega}{\omega_n} \sin \omega_n t - \sin \omega t\right) \sin \frac{n\pi x}{l}.$$