数学物理方法

2025春

教材：

《数学物理方法讲义》杨明、石佩虎编

2018.9 (2021.3 重印)

东南大学出版社

Ch4　波方程初值问题

1) 一维波方程之行波法
   达朗贝尔公式的物理意义
2) 三维波方程之球面平均法
   惠更斯原理
3) 二维波方程之降维法

1)一维波方程之行波法

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & x \in R, t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in R, \\ u_t(x,0) = \psi(x), & x \in R. \end{cases}$$

$idea:$寻找适当的变换$\xi = \xi(x,t), \eta = \eta(x,t)$

将方程化为$u_{\xi\eta} = 0$,积分后得到通解,

然后利用初值条件得到问题的解.

分析：将方程写为算子形式并做分解得

$$(\partial_t^2 - a^2\partial_x^2)u = (\partial_t - a\partial_x)(\partial_t + a\partial_x)u = 0,$$

引入新的变量(ξ, η)，使得

$$\partial_\xi = \partial_t - a\partial_x, \quad \partial_\eta = \partial_t + a\partial_x,$$

解之得 $x = -a\xi + a\eta, \quad t = \xi + \eta,$

$$-2a\xi = x - at, \quad 2a\eta = x + at,$$

此时方程化为 $u_{\xi\eta} = 0, \quad \Rightarrow \quad u = f(\xi) + g(\eta),$

通解为 $u(x,t) = f(-\dfrac{1}{2a}(x - at)) + g(\dfrac{1}{2a}(x + at)).$

一般为了表示方便，直接取 $\xi' = x - at$, $\eta' = x + at$,

$\Rightarrow$ $-4a^2 u_{\xi'\eta'} = 0$, 通解可写为

$$u(x,t) = f(x - at) + g(x + at).$$

将初值条件代入得

$$f(x) + g(x) = \varphi(x), \quad -af'(x) + ag'(x) = \psi(x),$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x} \psi(y)\,\mathrm{d}y + C, \\ g(x) &= \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x} \psi(y)\,\mathrm{d}y - C, \end{aligned}$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \frac{1}{2}[\varphi(x+at) + \varphi(x-at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(y)\,\mathrm{d}y,$$

推广到一般双曲型方程.

$$a_{11}u_{xx}+2a_{12}u_{xy}+a_{22}u_{yy}+a_1u_x+a_2u_y+a_0u=0,$$

其中 $a_{12}^2-a_{11}a_{22}>0.$

特征方程,特征线:

$$a_{11}(dy)^2-2a_{12}dxdy+a_{22}(dx)^2=0\Rightarrow\begin{cases}\varphi_1(x,y)=C_1\\ \varphi_2(x,y)=C_2\end{cases}.$$

特征变换: $\begin{cases}\xi=\varphi_1(x,y)\\ \eta=\varphi_2(x,y)\end{cases}.$

思考：
用算子分解法和特征方程法求出的特征变换一样吗？为什么？

为了简化计算，不妨设双曲型方程为

$$u_{xx}+(a+b)u_{xy}+ab\,u_{yy}=0.$$

$$(\partial_x+a\partial_y)(\partial_x+b\partial_y)u=0,$$

引入新的变量$(\xi,\ \eta)$，使得

$$\partial_\xi=\partial_x+a\partial_y,\quad \partial_\eta=\partial_x+b\partial_y,$$

解之得 $x=\xi+\eta,\quad y=a\xi+b\eta$，所以

$$(b-a)\xi=bx-y,\quad (b-a)\eta=-ax+y,$$

$$\Rightarrow\quad (b-a)^2\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta=(b\mathrm{d}x-\mathrm{d}y)(-a\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)$$

$$=-\left[(\mathrm{d}y)^2-(a+b)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+ab\,(\mathrm{d}x)^2\right].$$

例1.行波法求解PDE.

$$\begin{cases} u_{xx}+2u_{xy}-3u_{yy}=0, \quad -\infty<x<\infty, y>0, \\ u(x,0)=3x^2, u_y(x,0)=0, \quad -\infty<x<\infty. \end{cases}$$

解　该PDE对应的特征方程为

$$(\mathrm{d}y)^2 - 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y - 3(\mathrm{d}x)^2 = 0,$$

解得两条特征线为

$$3x - y = C_1, \quad x + y = C_2.$$

做变换　$\xi = 3x - y, \quad \eta = x + y,$

则原方程化为$u_{\xi\eta} = 0$，它的通解为$u = f(\xi) + g(\eta)$

代入得原方程的通解为

$$u(x,y)=f(3x-y)+g(x+y).$$

利用定解条件得

$$f(3x)+g(x)=3x^2, \quad -f'(3x)+g'(x)=0,$$

解得 $f(x)=\dfrac{1}{4}x^2-C, \quad g(x)=\dfrac{3}{4}x^2+C,$

将其代入通解得出特解为

$$u(x,y)=\frac{1}{4}(3x-y)^2+\frac{3}{4}(x+y)^2=3x^2+y^2.$$

例2.行波法求解半无界问题(波方程).

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & 0 < x < +\infty, t > 0, \\ u(0,t) = h(t), & t \geq 0, \\ u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0, & 0 < x < +\infty. \end{cases}$$

解 用行波法得到方程的通解为

$$u(x,t) = f(x-at) + g(x+at).$$

由边值条件得

$$t \geq 0, \quad f(-at) + g(at) = h(t),$$

由初值条件得

$$x \geq 0, \quad f(x) + g(x) = 0, \quad -af'(x) + ag'(x) = 0.$$

解得

$$f(x) = h(-x/a) + C,\ \ x \le 0, \quad f(x) = C,\ \ x > 0,$$

$g(x) = -C,\ \ x > 0,$ 其中C是一个常数.

代入即得问题的解为

$$u(x,t) = 0,\ \ x > at, \quad u(x,t) = h(t - x/a),\ \ 0 < x \le at.$$

练习：用行波法求解半无界问题

$$
\begin{cases}
u_{tt} = a^2 u_{xx}, & 0 < x < +\infty, t > 0, \\
u(0,t) = t^2, & t \ge 0, \\
u(x,0) = \sin x, \quad u_t(x,0) = x, & 0 < x < +\infty.
\end{cases}
$$

参考答案:

$$u(x,t)=\begin{cases}\sin x\cos at+xt, & x\geq at,\\ (t-\dfrac{x}{a})^2+\sin x\cos at+xt, & 0<x<at.\end{cases}$$

考虑一维非齐次波方程初值问题:

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t), & x \in R, t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in R, \\ u_t(x,0) = \psi(x), & x \in R. \end{cases}$$

应用波方程的齐次化原理

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(y)dy$$

$$+\frac{1}{2a}\int_0^t\int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)}f(y,s)dyds$$

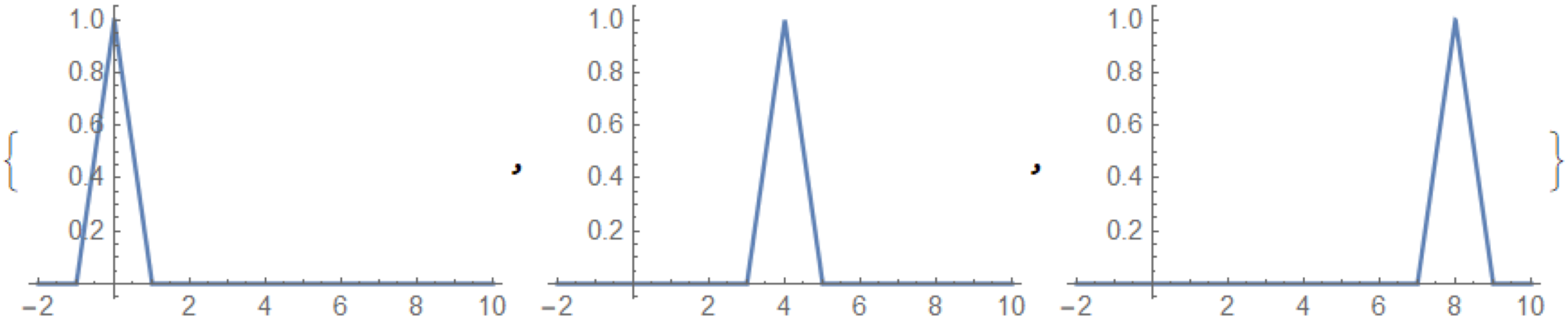
- 行波，左行波，右行波，波速
- 达朗贝尔公式的物理意义

（依赖区间，决定区域，影响区域）

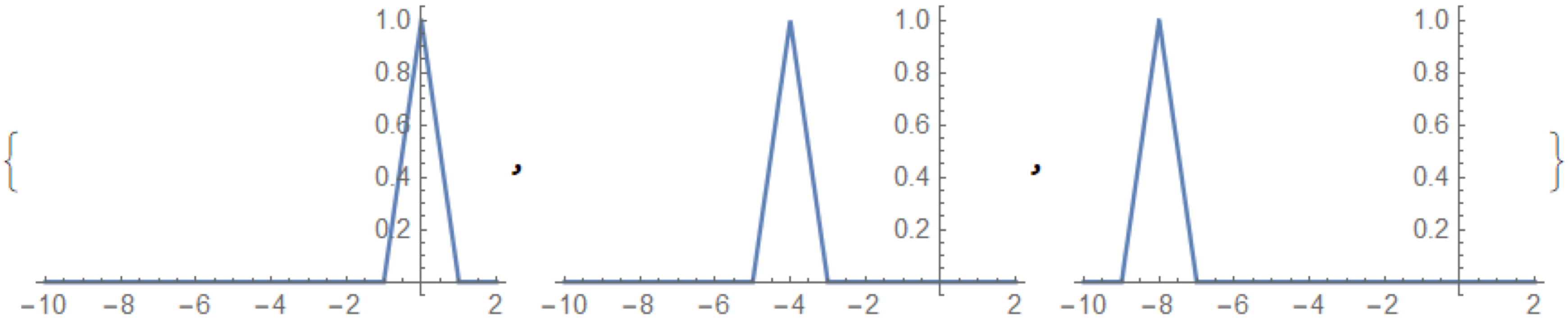
区间$[x-at,x+at]$称为解在点(x,t)的依赖区间.

In[•]:=
```
f[x_] := If[Abs[x] < 1, 1 - Abs[x], 0];
```
|··· |绝对值 |绝对值

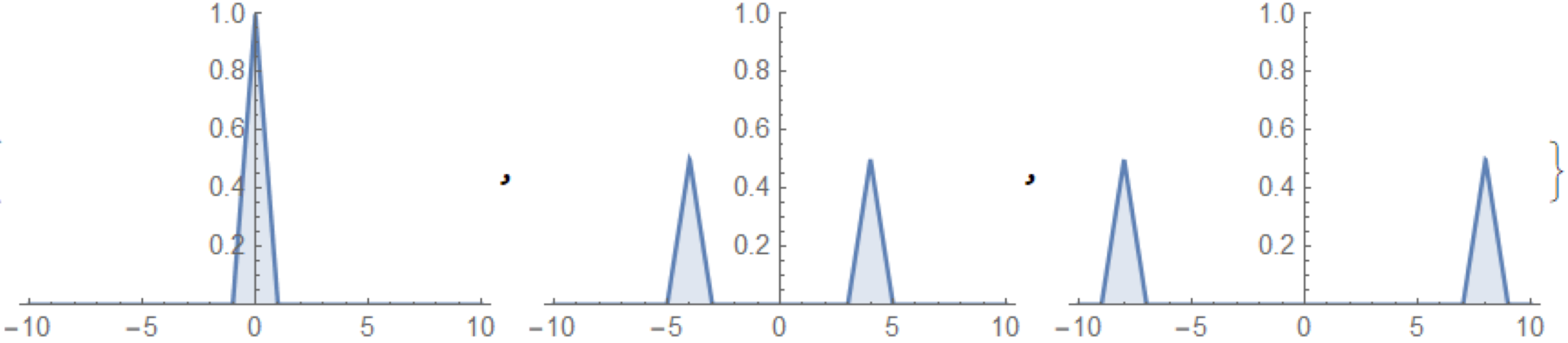
```
Table[Plot[f[x - t], {x, -2, 10}], {t, 0, 10, 4}]
```
|表格 |绘图

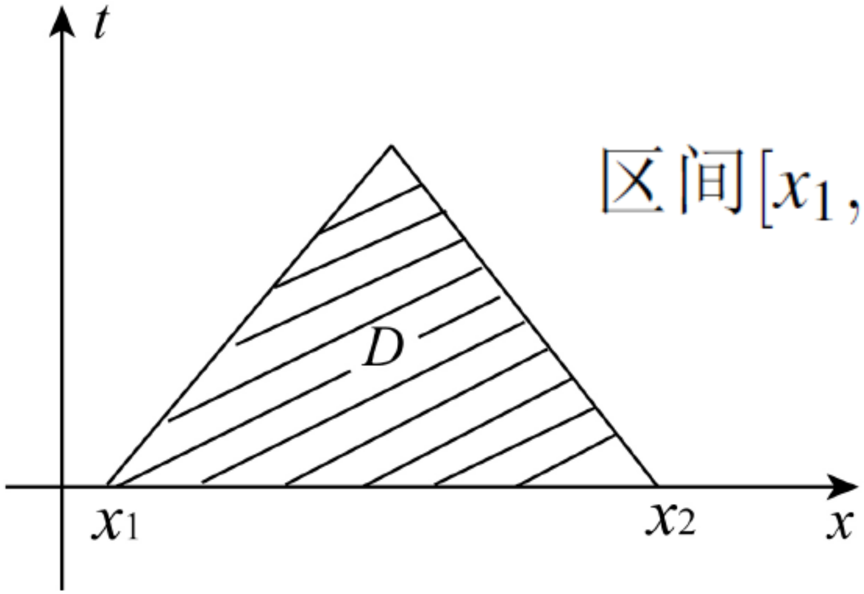
Out[•]= 

In[•]:=
```
Table[Plot[f[x + t], {x, -10, 2}], {t, 0, 10, 4}]
```
|表格 |绘图

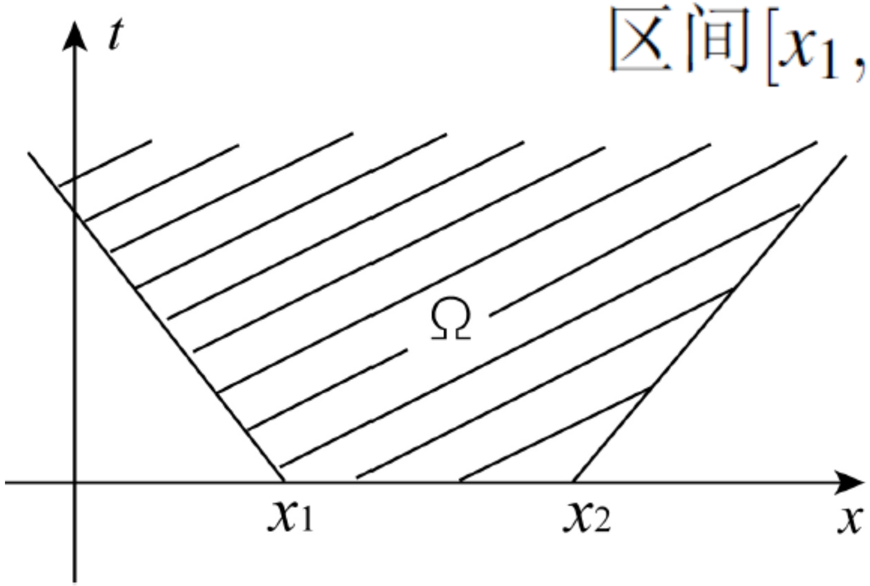
Out[•]= 

In[∘]:=
```
Table[Plot[1/2 f[x + t] + 1/2 f[x - t], {x, -10, 10}, PlotRange → {0, 1}, Filling → Bottom],
  {t, 0, 10, 4}]
```
表格　绘图　绘制范围　填补　底部

Out[∘]= {  }



区间$[x_1, x_2]$对应的决定区域.



区间$[x_1, x_2]$对应的影响区域.

课堂练习

1. 用达朗贝尔公式求解问题

$$\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = 0, & x \in \mathbb{R}, \ t > 0, \\ u(x,0) = x^2, & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x,0) = 3\cos x, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

2. 用行波法求解问题

$$\begin{cases} u_{xx} - 3u_{xt} - 4u_{tt} = 0, & x \in \mathbb{R}, \ t > 0, \\ u(x,0) = x^2, & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x,0) = e^x, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

3. 用行波法求解问题(Coursat problem)

$$
\begin{cases}
u_{tt} - u_{xx} = 0, & |x| < t,\ \ t > 0, \\
u(x, -x) = \varphi(x), & x \le 0, \\
u(x, x) = \psi(x), & x \ge 0,\ \ \varphi(0) = \psi(0).
\end{cases}
$$

1.

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left((x-2t)^2 + (x+2t)^2\right) + \frac{1}{4}\int_{x-2t}^{x+2t} 3\cos y \, \mathrm{dy}$$

$$= x^2 + 4t^2 + \frac{3}{2}\cos x \sin 2t.$$

2. $$u(x,t) = x^2 + \frac{1}{4}t^2 + \frac{4}{5}(e^{x+t/4} - e^{x-t}).$$

3. $$u(x,t) = \varphi(\frac{x-t}{2}) + \psi(\frac{x+t}{2}) - \varphi(0).$$

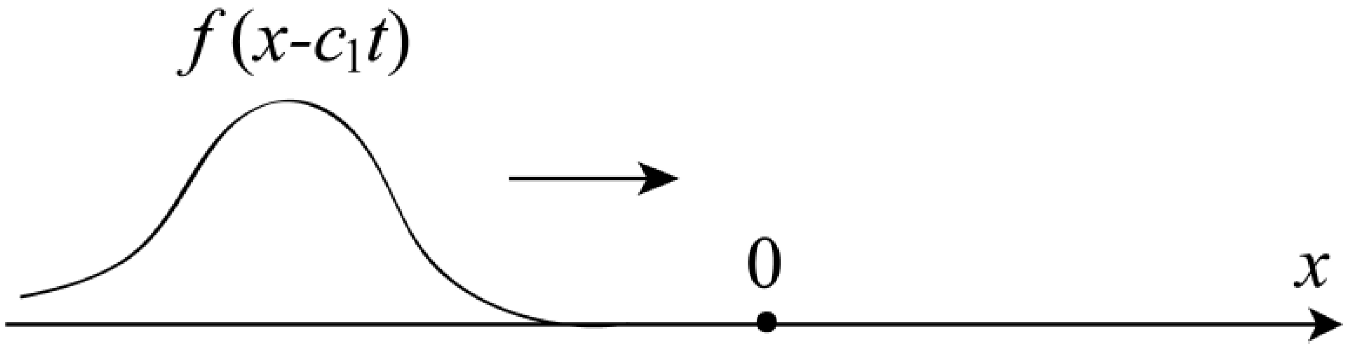
小研究 (非均匀介质中波的反射与透射)

一根柔韧细弦，$x<0$时弦的密度为常数ρ_1，$x>0$时弦的密度为常数ρ_2，波在这根弦上的传播速度为$c(x)$，则

$$c(x)=\sqrt{T/\rho_1}=c_1,\ x<0;\ c(x)=\sqrt{T/\rho_2}=c_2,\ x>0$$

现在有一个右行波$f(x-c_1t)$沿着弦从左向右传播，

设$f(x) = 0,\ x > 0.$

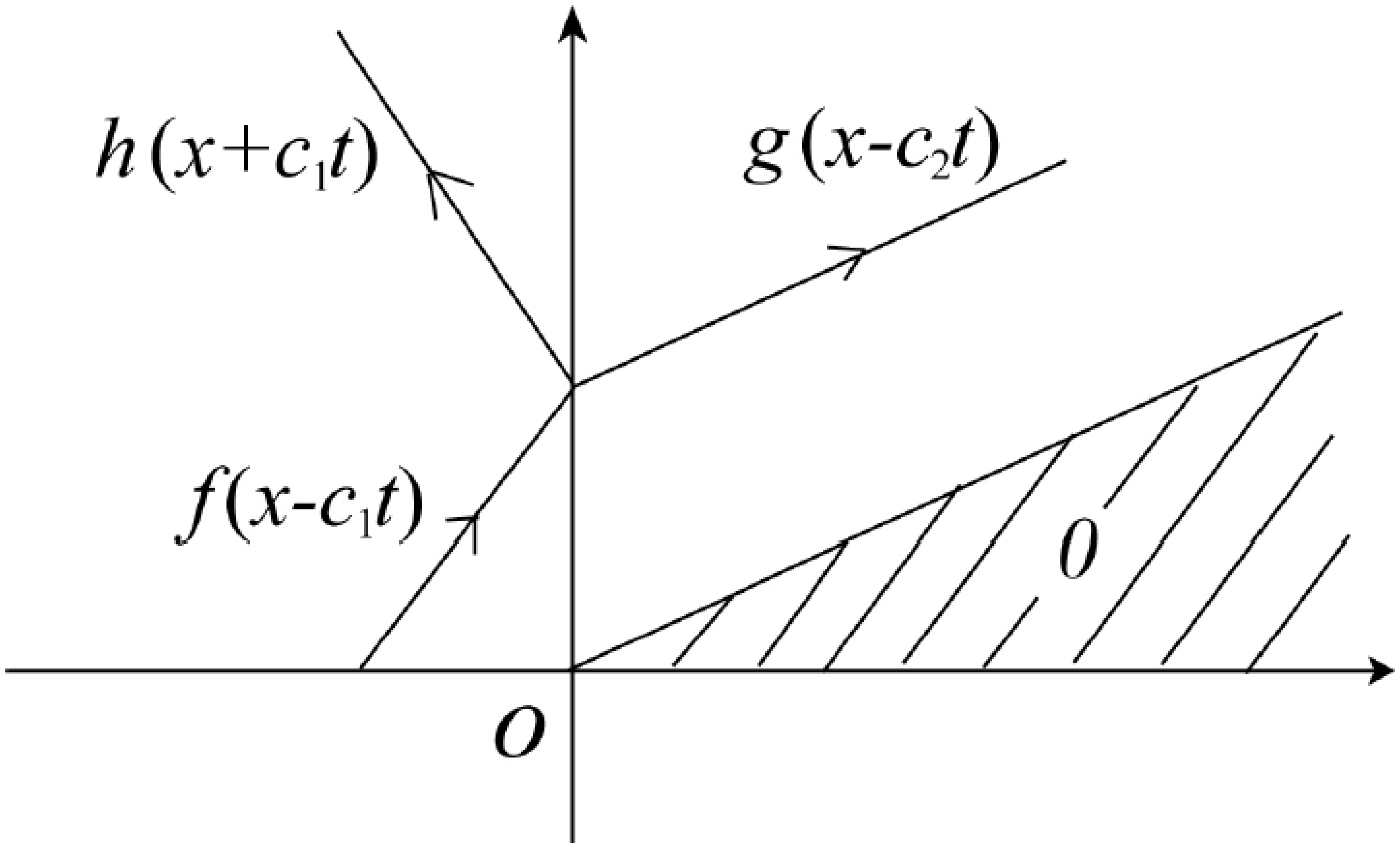


设弦的位移为$u(x,t)$，请给出$u(x,t)$满足的方程和条件

$u(x,t)$, $u_x(x,t)$在$x = 0$处的连续性(连接条件)

求出$u(x,t)$ 的表达式,

用解的表达式解释波的反射与透射现象.



$h(x+c_1t)$
$g(x-c_2t)$
$f(x-c_1t)$
0
O

In[30]:=
```
f[x_] := If[Abs[x + 1] < 1, 1 - Abs[x + 1], 0];
         |…  |绝对值             |绝对值

w[x_, t_] := If[t < 0, f[x - t], If[x < 0, f[x - t] + 1/3 f[-x - t], 4/3 f[1/2 (x - 2 t)]]];
             |如果                |如果

Manipulate[Plot[w[x, t], {x, -6, 10}, PlotRange → {0, 1.5}, Filling → Bottom],
|交互式操作  |绘图                      |绘制范围              |填补       |底部
 {t, -3, 3}]
```

Out[32]=