数学物理方法

2025春

教材：
《数学物理方法讲义》杨明、石佩虎编
2018.9 (2021.3 重印)
东南大学出版社

如何定义$L^2(R)$上的$Fourier$变换?

如果$f \in L^2$, $f \notin L^1$，积分$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}\,\mathrm{d}x$未必存在.

解决这一问题的关键是Parseval等式.

如果$f, g \in L^1$使得$\widehat{f}, \widehat{g} \in L^1$，那么由定

理3.2知，$\widehat{f}, \widehat{g} \in L^1$有界，从而$\widehat{f}, \widehat{g} \in L^2$，

类似可以证明$f, g \in L^2$. 于是计算L^2内积

$$(F[f],g)_{L^2}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\omega x}\overline{g(\omega)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}\omega$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\overline{\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega x}g(\omega)\,\mathrm{d}\omega}\,\mathrm{d}x=(f,2\pi F^{-1}[g])_{L^2}$$

即F的共轭算子 $F^*=2\pi F^{-1}$

特别地取$g=f$得 $\|\hat{f}\|_{L^2}^2=2\pi\|f\|_{L^2}^2$

傅立叶变换的Parseval等式.

假设f是L^2中任意的函数，利用磨光算子

构造函数列$\{f_n\}_1^\infty$

使得$f_n \in L^1$, $\widehat{f_n} \in L^1$，且$\|f_n - f\|_{L^2} \to 0.$

$$\|\widehat{f_n} - \widehat{f_m}\|_{L^2}^2 = 2\pi\|f_n - f_m\|_{L^2}^2 \to 0,\quad n,m \to \infty,$$

因为L^2是完备空间，所以$\{\widehat{f_n}\}_1^\infty$在$L^2$中收敛，

故可以定义 $\widehat{f} = \lim_{n\to\infty} \widehat{f_n}.$

定理 3.4　定义在$L^1 \cap L^2$上的傅立叶变换，可以唯一地延拓为$L^2 \to L^2$的变换.

海森堡不确定性原理

设 $f, f' \in L^2(\mathbb{R})$，且 $f(\pm\infty)=0$，定义分辨率

$$\sigma_t^2 = \frac{\int_{\mathbb{R}} t^2|f(t)|^2 \mathrm{d}t}{\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 \mathrm{d}t}, \qquad \sigma_\omega^2 = \frac{\int_{\mathbb{R}} \omega^2|\widehat{f}(\omega)|^2 \mathrm{d}\omega}{\int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(\omega)|^2 \mathrm{d}\omega},$$

那么 $\sigma_t^2 \cdot \sigma_\omega^2 \geq 1/4.$

将函数 $f(t)$ 看成一个随时间 t 变化的信号，$\widehat{f}(\omega)$ 中的变量 ω 表示信号的频率，那么不确定性原理表明一个函数不可能同时在时域和频域具有任意小(高)的分辨率，即 σ_t^2 和 σ_ω^2 不可能同时都很小.

$\boxed{\text{广义函数}}$ 狄拉克函数$\delta(x)$与$Fourier$变换

定义:

$$\delta(x)=\begin{cases}+\infty, & x=0,\\ 0, & x\neq 0.\end{cases} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)dx=1$$

物理上表示单位点源.(单位质点,单位点电荷)

容易看到:

(1) $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)f(x)dx=f(0)$,

(2)$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x-y)f(y)dy=f(x)$ 即 $\delta * f=f$,

(3)$\delta(x-y)=\dfrac{2}{\pi}\sum_{1}^{\infty}\sin nx\sin ny.$ $x,y\in(0,\pi)$.

(4)$H(x)=\int_{-\infty}^{x}\delta(y)dy,$ $H'(x)=\delta(x)$.

例3.计算

(1)$F[\delta(x)]=?$

(2)$F[1]=?$

(3)$F[\delta(x-x_0)]=?$

(4)$F[\sin ax]=?$

注:函数1和$\sin ax \notin L^1 \cup L^2$,这里的

F变换是形式运算.

$$F[1] = 2\pi F^{-1}[1] = 2\pi\delta(\omega),$$

$$F[e^{iax}] = 2\pi\delta(\omega - a),$$

$$\begin{aligned} F[\sin ax] &= \frac{1}{2i}(F[e^{iax}] - F[e^{-iax}]) \\ &= \frac{\pi}{i}[\delta(\omega - a) - \delta(\omega + a)]. \end{aligned}$$

验算:

$$(5)F[H(x)] = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{i\omega},$$

$$(6)F[\mathrm{sgn}(x)] = \frac{2}{i\omega},$$

注 : $\mathrm{sgn}(x) = 2H(x) - 1 = H(x) - H(-x).$

$$(7)F[\frac{1}{x}] = ?$$

$$F^{-1}[\pi\delta(\omega)+\frac{1}{i\omega}]=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{i\omega}e^{i\omega x}\,\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\pi}\cdot 2\int_{0}^{\infty}\frac{\sin\omega x}{\omega}\,\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\pi}\cdot\pi\,\mathrm{sgn}(x)=H(x).$$

$$F[\frac{1}{x}]=2\pi F^{-1}[-\frac{1}{x}](\omega)=2\pi\cdot(-\frac{i}{2}\mathrm{sgn}\omega)$$

2) 利用Fourier变换求解方程

- 运输方程初值问题
- 热方程初值问题,基本解
- 弦振动方程初值问题,基本解
- 半平面中的Laplace方程
- 半无界问题:对称延拓法
- 卷积结构的积分方程的求解

例1.

$$\begin{cases} u_t + bu_x = 0, & x \in R, t > 0, \\ u(x,0) = g(x), & x \in R. \end{cases}$$

其中b是常数。

例2.求解热方程初值问题:

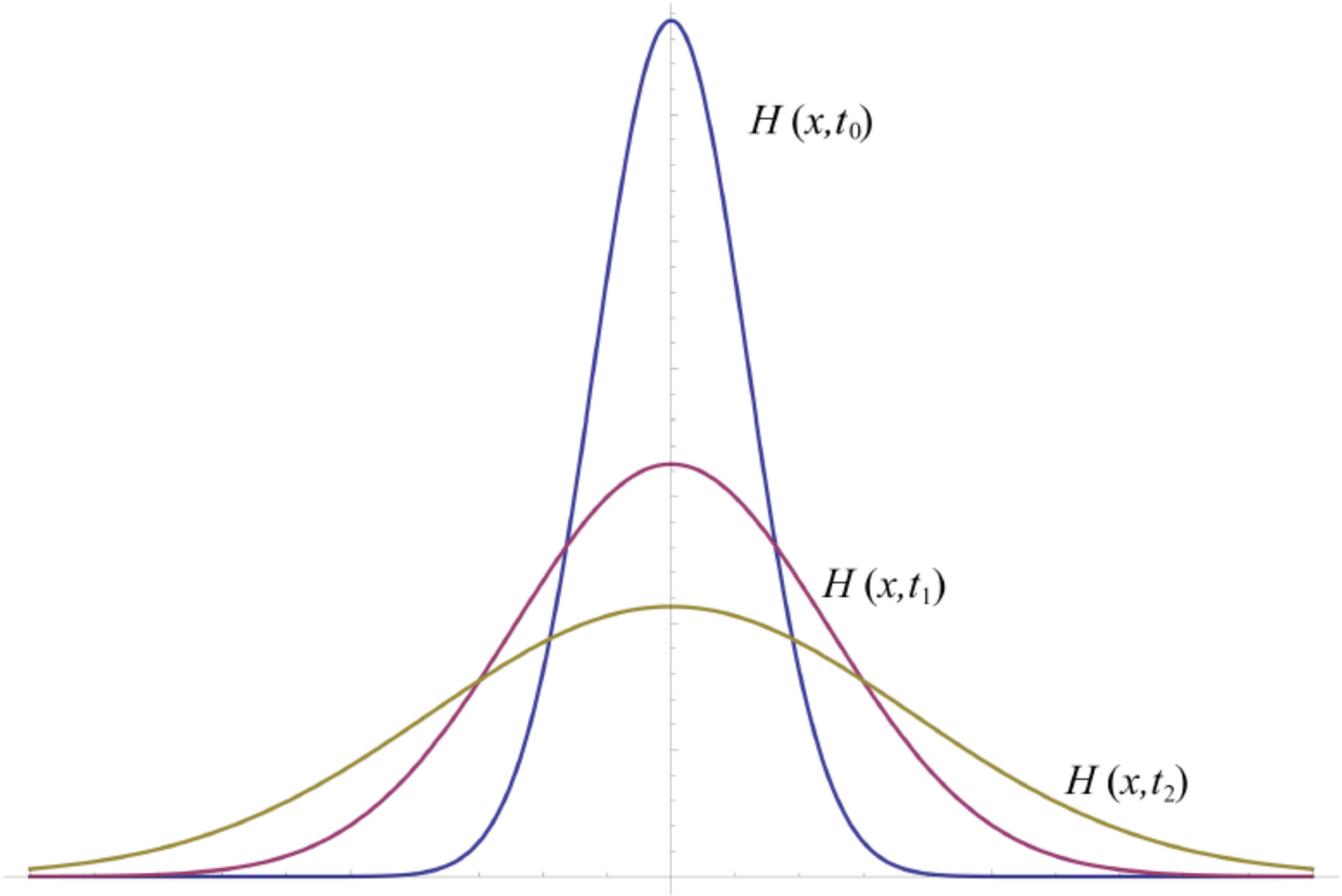
$$\begin{cases} u_t = k u_{xx}, & -\infty < x < \infty, t > 0, \\ u(x,0) = \delta(x), & -\infty < x < \infty. \end{cases}$$

解 $\widehat{u}_t(\omega,t) - k(i\omega)^2 \widehat{u}(\omega,t) = 0, \quad \widehat{u}(\omega,0) = 1,$

$$\Rightarrow \quad \widehat{u}(\omega,t) = e^{-k\omega^2 t}$$

$$\Rightarrow \quad u(x,t) = F^{-1}[e^{-kt\omega^2}] = \frac{1}{\sqrt{4k\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4kt}}$$

认识基本解$H(x,t)$,也称之为热核，从热核函数图像认识热扩散的过程.



齐次方程初值问题:

$$\begin{cases} u_t = ku_{xx}, & -\infty < x < \infty, t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), & -\infty < x < \infty. \end{cases}$$

(由此问题和微元法认识卷积的含义.)

非齐次方程初值问题:

$$\begin{cases} u_t = ku_{xx} + f(x,t), & -\infty < x < \infty, t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), & -\infty < x < \infty. \end{cases}$$

例3.求解弦振动方程的基本解$W(x,t)$.

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & -\infty < x < \infty, t > 0, \\ u(x,0) = 0, u_t(x,0) = \delta(x), & -\infty < x < \infty. \end{cases}$$

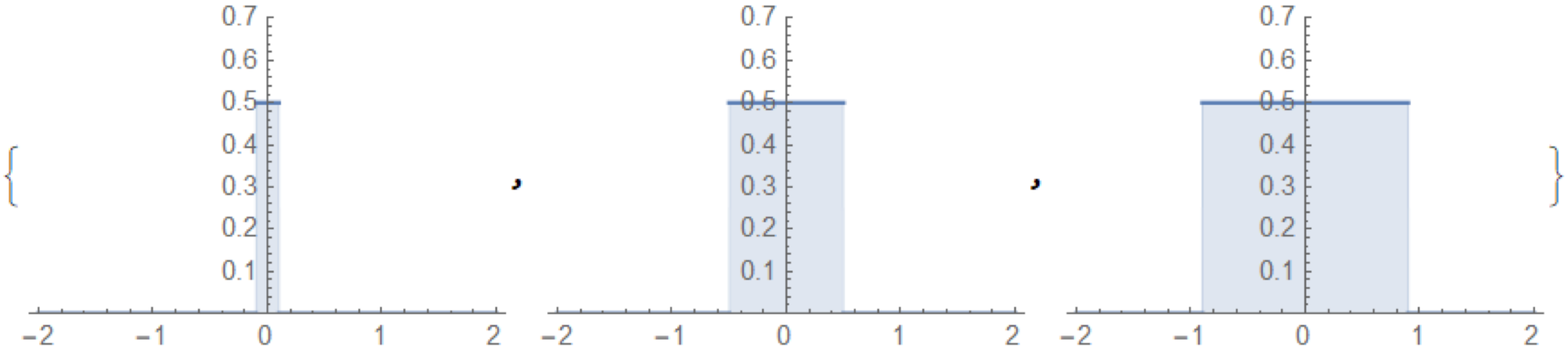
$$W(\omega,t) = \frac{\sin at\omega}{a\omega} = \frac{e^{iat\omega} - e^{-iat\omega}}{2ai\omega},$$

$$W(x,t) = \frac{\operatorname{sgn}(x+at) - \operatorname{sgn}(x-at)}{4a} = \frac{H(a^2t^2 - x^2)}{2a}.$$

```
In[∘]:= w1[x_, t_] := If[Abs[x] < t, 1 / 2, 0];
                        ⌊···  ⌊绝对值

        Table[Plot[w1[x, t], {x, -2, 2}, PlotRange → {0, 0.7}, Filling → Bottom], {t, 0.1, 1, 0.4}]
        ⌊表格   ⌊绘图                      ⌊绘制范围                ⌊填补      ⌊底部
```

Out[∘]=



齐次波动方程初值问题：

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & -\infty < x < \infty, t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = \psi(x), & -\infty < x < \infty. \end{cases}$$

$\boxed{\text{达朗贝尔公式}}$

由该公式观察φ，ψ的奇偶性与解的奇偶性的关系。

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\varphi(x+at) + \varphi(x-at)] + W(x,t) * \psi(x)$$

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\varphi(x+at) + \varphi(x-at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(y)\,\mathrm{d}y.$$

非齐次波动方程初值问题:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t), & -\infty < x < \infty, t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = \psi(x), & -\infty < x < \infty. \end{cases}$$

$\boxed{\text{推广的达朗贝尔公式}}$

注意公式中各项的关系，利用公式分析解!

例4.求解上半平面的Laplace方程:

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, & -\infty<x<\infty, y>0, \\ u(x,0)=\delta(x), & -\infty<x<\infty, \\ u(x,+\infty)=0, & -\infty<x<\infty. \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, & -\infty<x<\infty, y>0, \\ u(x,0)=\varphi(x), & -\infty<x<\infty, \\ u(x,+\infty)=0, & -\infty<x<\infty. \end{cases}$$

解　等式两边关于x做傅立叶变换得

$$\Rightarrow \quad (i\omega)^2\widehat{u}(\omega,y)+\widehat{u}_{yy}(\omega,y)=0,$$

$$\widehat{u}(\omega,0)=\widehat{\varphi}(\omega), \quad \widehat{u}(\omega,+\infty)=0,$$

$$\Rightarrow \quad \widehat{u}(\omega,y)=\widehat{\varphi}(\omega)e^{-y|\omega|},$$

$$u(x,y)=\varphi(x)*\frac{y}{\pi(x^2+y^2)}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y\varphi(x-\xi)}{\pi(\xi^2+y^2)}\mathrm{d}\xi.$$

例5.半无界问题:对称延拓法.

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & x > 0, t > 0, \\ u(0,t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = \psi(x), x \geq 0. \end{cases}$$

注:初边值条件的相容性,

边界条件的物理意义:波的反射.

我们采用奇延拓的方法将函数$\varphi(x)$, $\psi(x)$延拓为$\mathbb{R}$上的

奇函数$\Phi(x)$, $\Psi(x)$. 考虑以$\Phi(x)$, $\Psi(x)$为初值的波动方程

$$\begin{cases} U_{tt} - a^2 U_{xx} = 0, & -\infty < x < \infty,\ t > 0, \\ U(x,0) = \Phi(x),\quad U_t(x,0) = \Psi(x), & -\infty < x < \infty. \end{cases}$$

容易看到$U(x,t)$关于x也是奇函数，因而$U(0,t) = 0$.

在$x > 0$, $t > 0$上比较$u(x,t)$和$U(x,t)$，

可以看到它们满足相同的PDE，相同的边界条件，

相同的初始条件，因而

$x>0,\ t>0$时

$$u(x,t)=U(x,t)=\frac{1}{2}[\Phi(x+at)+\Phi(x-at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\Psi(y)\,\mathrm{d}y,$$

所以当$x\geq at$时

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(y)\,\mathrm{d}y$$

当$0<x<at$时

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[\varphi(x+at)-\varphi(at-x)]+\frac{1}{2a}\int_{at-x}^{x+at}\psi(y)\,\mathrm{d}y.$$

例6.练习

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & x > 0, t > 0, \\ u_x(0,t) = 0, & t \ge 0, \\ u(x,0) = \sin x, u_t(x,0) = 1 - \cos x, & x \ge 0. \end{cases}$$

解 由边界条件知，需要采用偶延拓.

$$\Phi(x)=\sin|x|,\quad \Psi(x)=1-\cos x,$$

$$\begin{cases} U_{tt}=a^2U_{xx}, & x\in\mathbb{R},\ t>0,\\ U(x,0)=\Phi(x),\ U_t(x,0)=\Psi(x), & x\in\mathbb{R}.\end{cases}$$

在$x>0$, $t>0$上，$u(x,t$与$U(x,t)$满足相同的方程

相同的边界条件和相同的初始条件，因而

$$u(x,t)=U(x,t)=\frac{1}{2}[\Phi(x+at)+\Phi(x-at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\Psi(y)\,\mathrm{d}y$$

所以当$x \geq at$时

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[\sin(x+at)+\sin(x-at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}1-\cos y\,\mathrm{d}y$$

$$=t+\sin x\cos at-\frac{1}{a}\cos x\sin at$$

当$0<x<at$时

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[\sin(x+at)+\sin(at-x)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}1-\cos y\,\mathrm{d}y$$

$$=t+(1-\frac{1}{a})\cos x\sin at.$$

例7.

试用傅里叶变换求解薛定谔稳态方程的特征值问题

$$H\phi+\lambda\phi=0,\quad -\infty<x<\infty,$$

其中 $H=-\dfrac{\hbar^2}{2m}\dfrac{d^2}{dx^2}+V(x)$ 被称为哈密顿算子，

λ是其特征值，粒子的能量$E=-\lambda$，ϕ是其特征函数

m是微观粒子的质量，$\hbar$是约化普朗克常数，$V(x)$是粒子所在力场的势函数.

假设粒子处于束缚状态即$\lambda > 0$，并且粒子

所在力场的势函数是δ势阱即

$$V(x) = -\alpha\delta(x), \quad \text{常数 } \alpha > 0.$$

另外此问题的边界在无穷远处，所以还需要

加上特殊的定解条件，即归一化条件

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\phi(x)|^2 \, \mathrm{d}x = 1.$$

解 将特征值方程写为

$$\phi''(x) - k^2\phi(x) = -A\delta(x)\phi(x),$$

其中 $k = \sqrt{\dfrac{2m\lambda}{\hbar^2}}, \quad A = \dfrac{2m\alpha}{\hbar^2}.$

在方程两边做傅里叶变换得

$$-\omega^2\widehat{\phi} - k^2\widehat{\phi} = -A\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\phi(x)e^{-i\omega x}\,\mathrm{d}x = -A\phi(0),$$

计算得 $\quad \widehat{\phi} = \dfrac{A\phi(0)}{k^2+\omega^2},$

求傅里叶逆变换得 $\quad \phi(x) = \dfrac{A\phi(0)}{2k} e^{-k|x|}.$

在等式两边取$x=0$得 $A=2k$，所以

$$\phi(x) = \phi(0)e^{-k|x|}, \quad k = \frac{A}{2} = \frac{m\alpha}{\hbar^2},$$

从而特征值为 $\quad \lambda = \dfrac{m\alpha^2}{2\hbar^2},$

再将$\phi(x)$代入归一化条件得

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\phi(x)|^2 \mathrm{d}x = |\phi(0)|^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2k|x|} \mathrm{d}x = \frac{|\phi(0)|^2}{k} = 1,$$

所以 $\phi(0) = \sqrt{k}$，于是特征函数为

$$\phi(x) = \frac{\sqrt{m\alpha}}{\hbar} e^{-\frac{m\alpha}{\hbar^2}|x|}$$

习题选讲-采样原理

设 $f \in C(\mathbb{R})$，当 $|\omega| > a$ 时，$\hat{f}(\omega) = 0$. 证明：

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{n\pi}{a}\right) \frac{\sin(ax - n\pi)}{ax - n\pi}.$$

采样定理解释：人类能听到的最大频率大约为20kHz,所以语音信号就是典型的带限信号。对于带限信号可以通过采样点处的采样值来重构信号。

因为 $|\omega|>a$, $\widehat{f}(\omega)=0$，所以令 $\widehat{f}(\omega)=\sum_{-\infty}^{\infty} c_{-n} e^{-i\frac{n\pi}{a}\omega}$

$$c_{-n}=\frac{1}{2a}\int_{-a}^{a}\widehat{f}(\omega)e^{i\frac{n\pi}{a}\omega}\,\mathrm{d}\omega=\frac{\pi}{a}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{f}(\omega)e^{i\frac{n\pi}{a}\omega}\,\mathrm{d}\omega=\frac{\pi}{a}f(\frac{n\pi}{a})$$

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{f}(\omega)e^{ix\omega}\,\mathrm{d}\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{a}\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{\pi}{a}f(\frac{n\pi}{a})e^{-i\frac{n\pi}{a}\omega}e^{ix\omega}\,\mathrm{d}\omega$$

$$=\sum_{-\infty}^{\infty}f(\frac{n\pi}{a})\Big[\frac{1}{2a}\int_{-a}^{a}e^{i(x-\frac{n\pi}{a})\omega}\,\mathrm{d}\omega\Big]=\sum_{-\infty}^{\infty}f(\frac{n\pi}{a})\frac{\sin(ax-n\pi)}{ax-n\pi}.$$