自觉遵守考场纪律 如考试作弊 此答卷无效

姓名______ 学号______

线 封 密

东 南 大 学 考 试 卷 (B)

课程名称 数学物理方法 考试学期 17-18-3 得分________

适用专业 面上 考试形式 闭卷 考试时间长度 120分钟

题目	一	二	三	四	五
得分					

注意：本份试卷可能会用到以下公式：

1、$\mathscr{L}[\sin\alpha t](p)=\dfrac{\alpha}{p^2+\alpha^2}$，$\mathscr{L}[\cos\alpha t](p)=\dfrac{p}{p^2+\alpha^2}$，$\mathscr{L}[t^n\mathrm{e}^{at}](p)=\dfrac{n!}{(p-a)^{n+1}}$;

2、$\mathscr{L}[f(t-t_0)H(t-t_0)](p)=\tilde{f}(p)\mathrm{e}^{-t_0p},\ t_0\geq 0$;

3、$\mathscr{L}[\delta(t-t_0)](p)=\mathrm{e}^{-t_0p},\ t_0\geq 0$; $\mathscr{F}[f(x-b)](\lambda)=\mathrm{e}^{-i\lambda b}\hat{f}(\lambda)$;

4、$\mathscr{F}\left[\dfrac{\sin\omega}{2\pi(\cosh x+\cos\omega)}\right]=\dfrac{\sinh\omega\lambda}{\sinh\pi\lambda},\quad |\omega|<\pi$;

5、$(x^\nu J_\nu(x))'=x^\nu J_{\nu-1}(x),\ (x^{-\nu}J_\nu(x))'=-x^{-\nu}J_{\nu+1}(x)$.

一 填空题 (每题5分，共30分)

1. 平面薄板内无热源，薄板用区域Ω表示，当此薄板内温度达到稳恒状态时，稳恒温度满足的方程可表示为 $\underline{u_{xx}+u_{yy}=0}$.

2. 与初边值问题对应

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=0, & 0<x<l, t>0,\\ u(0,t)=0,\ u(l,t)=0, & t>0,\\ u(x,0)=\varphi(x),\ u_t(x,0)=\psi(x), & 0\leq x\leq l,\end{cases}$$

的特征函数系是 $\underline{\sin\frac{n\pi x}{l},\ n=1,2,\cdots}$.

3. 给定初边值问题

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=\sin x, & 0<x<\pi, t>0,\\ u(0,t)=0,\ u(\pi,t)=A, & t>0,\\ u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=0, & 0\leq x\leq\pi,\end{cases}$$

其中$A\neq 0$为常数，则当$w(x)=\underline{\frac{\sin x}{a^2}+\frac{Ax}{\pi}}$时, 利用变换$u(x,t)=v(x,t)+w(x)$, 可把问题化为齐次方程齐次边界条件的初边值问题.

4. 已知$f(x)$的Fourier变换为$\hat{f}(\lambda)$, 则函数$\hat{f}(\lambda)\cos\lambda$的Fourier逆变换为 $\underline{\frac{1}{2}[f(x+1)+f(x-1)]}$.

5. 用降维法和d'Alembert公式，下列波动方程初值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) = 0, & (x, y, z) \in R^3, t > 0, \\ u(x, y, z, 0) = x^2, u_t(x, y, z, 0) = y, & (x, y, z) \in R^3 \end{cases}$$

的解为 $\underline{x^2 + a^2t^2 + yt}$.

6. 用$J_0(x)$及其导数或高阶导数来表示$J_2(x)$, 得$J_2(x) = \underline{J_0''(x) - \frac{1}{x}J_0'(x)}$.

二 简单计算(32分)

1. 求解特征值问题

$$\begin{cases} u'' + 2u' + \lambda u = 0, & 0 < x < 1, \\ u(0) = 0,\ u(1) = 0. \end{cases}$$

解：由特征方程$r^2 + 2r + \lambda = 0$，得$r_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1 - \lambda}$.

(1) 因为当$\lambda \le 1$时，定解问题只有零解，所以$\lambda \le 1$不是特征值.

(2) 当$\lambda > 1$时, 方程的通解为

$$u(x) = \mathrm{e}^{-x}[A \cos \sqrt{\lambda - 1}x + B \sin \sqrt{\lambda - 1}x].$$

再由边界条件$u(0) = u(1) = 0$, 得$A = 0$及$B \sin \sqrt{\lambda - 1} = 0$. 因为$B \ne 0$, 所以$\sqrt{\lambda - 1} = n\pi$.于是求得所有特征值及对应的特征函数

$$\lambda_n = 1 + (n\pi)^2,\ u_n(x) = \mathrm{e}^{-x} \sin n\pi x,\ n = 1, 2, \cdots.$$

2. 求函数$f(t) = t\mathrm{e}^{-at} \cos t$的Laplace变换.

解：因为$L[\cos t](p) = \frac{p}{p^2+1}$, 所以

$$L[\mathrm{e}^{-at} \cos t](p) = \frac{p + a}{(p + a)^2 + 1},$$

$$\begin{aligned} L[t\mathrm{e}^{-at} \cos t](p) &= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p} L[\mathrm{e}^{-at} \cos t](p) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p} \frac{p + a}{(p + a)^2 + 1} \\ &= \frac{(p + a)^2 - 1}{[(p + a)^2 + 1]^2}. \end{aligned}$$

密 封 线

3. 用特征线法求解问题

$$\begin{cases} 2u_{xx} - 3u_{xy} + u_{yy} = 0, & x \in R, y > 0, \\ u|_{y=0} = 0,\ u_y|_{y=0} = \cos x, & x \in R. \end{cases}$$

解：由特征方程为$2\mathrm{d}^2 y + 3\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \mathrm{d}^2 x = 0$ 得特征线$x + y = C_1$, $x + 2y = C_2$. 做特征变换

$$\xi = x + y,\ \eta = x + 2y.$$

方程化为$u_{\xi\eta} = 0$, 因此求得通解

$$u(x, y) = f(x + y) + g(x + 2y).$$

利用定解条件，得

$$f(x) + g(x) = 0,\ f'(x) + 2g'(x) = \cos x.$$

因此

$$f(x) = -\sin x - C, \Longrightarrow f(x + y) = -\sin(x + y) - C.$$

$$g(x) = \sin x + C, \Longrightarrow g(x + 2y) = \sin(x + 2y) + C.$$

最后，求得定解问题的解

$$u(x, y) = \sin(x + 2y) - \sin(x + y).$$

4. 设u是三维区域Ω上的调和函数，对于$0 < r \le R$球$B_r = \{(x, y, z)\ : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 \le r^2\} \subset \Omega$，利用球体平均值公式

$$u(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi r^3/3} \int\int\int_{B_r} u(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

证明：球面平均值公式

$$u(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi r^2} \oint_{\partial B_r} u(x, y, z)\mathrm{d}S.$$

证明：因为

$$\int\int\int_{B_r} u(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^r \Big(\oint_{\partial B_\rho} u(x, y, z)\mathrm{d}S \Big) \mathrm{d}\rho,$$

所以由已知的等式，得

$$u(x_0, y_0, z_0)\frac{4\pi r^3}{3} = \int_0^r \Big(\oint_{\partial B_\rho} u(x, y, z)\mathrm{d}S \Big) \mathrm{d}\rho.$$

上式两边关于r求导，得

$$4\pi r^2 u(x_0, y_0, z_0) = \oint_{\partial B_r} u(x, y, z)\mathrm{d}S$$

即

$$u(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi r^2} \oint_{\partial B_r} u(x, y, z)\mathrm{d}S.$$

三 (13分) 用分离变量法求解问题

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=0, & 0<x<l,\ t>0, \\ u_x(0,t)=u_x(l,t)=0, & t>0, \\ u(x,0)=\varphi(x),\ u_t(x,0)=\psi(x), & 0\le x\le l. \end{cases}$$

解：令$U(x,t)=X(x)T(t)$为非零特解，代入方程做分离变量，得

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda$$

代入边界条件，得$X'(0)=X'(l)=0$.于是得到方程$T''(t)+\lambda a^2T(t)=0$, 及特征值问题

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0,\ 0<x<l, \\ X'(0)=X'(l)=0. \end{cases}$$

求解此特征值问题，得

$$\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2,\ X_n=\cos\frac{n\pi x}{l},\ n=0,1,\cdots.$$

再把$\lambda=\lambda_n$代入$T(t)$的方程，得

$$T_n''(t)+\lambda_n a^2T_n(t)=0,$$

求得通解

$$T_0(t)=C_0+D_0t,\ T_n(t)=C_n\cos\frac{n\pi at}{l}+D_n\sin\frac{n\pi at}{l}, n\ge 1.$$

于是得到一般解

$$u(x,t)=C_0+D_0t+\sum_1^\infty[C_n\cos\frac{n\pi at}{l}+D_n\sin\frac{n\pi at}{l}]\cos\frac{n\pi x}{l}.$$

利用初始条件，得

$$C_0+\sum_1^\infty C_n\cos\frac{n\pi x}{l}=\varphi(x),\quad D_0+\sum_1^\infty D_n\frac{n\pi a}{l}]\cos\frac{n\pi x}{l}=\psi(x).$$

因此

$$C_0=\frac{1}{l}\int_0^l\varphi(x)\mathrm{d}x,\ C_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x,\ n=1,2,\cdots,$$
$$D_0=\frac{1}{l}\int_0^l\psi(x)\mathrm{d}x, D_n=\frac{2}{n\pi a}\int_0^l\psi(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x,\ n=1,2,\cdots.$$

四 (12分) 用Fourier变换法推导下列定解问题的求解公式

$$
\begin{cases}
u_{xx} + u_{yy} = 0, & -\infty < x < \infty,\ 0 < y < \pi, \\
u(x,0) = 0,\ u(x,\pi) = g(x), & -\infty < x < \infty,
\end{cases}
$$

其中$g(x)$的Fourier变换存在.

解：定解问题关于x做Fourier变换，记$\hat{u}(\lambda, y) = F[u(x,y)], \hat{g}(\lambda) = F[g(x)]$, 得

$$
\begin{cases}
-\lambda^2 \hat{u} + \hat{u}_{yy} = 0, & 0 < y < \pi, \\
\hat{u}(\lambda, 0) = 0, \hat{u}(\lambda, \pi) = \hat{g}(\lambda).
\end{cases}
$$

上述问题是以λ为参数，y为变量的常微分方程两点边值问题，其解为

$$
\hat{u}(\lambda, y) = \hat{g}(\lambda) \frac{\sinh(\lambda y)}{\sinh(\lambda \pi)}.
$$

做Fourier逆变换，得

$$
\begin{aligned}
u(x,y) &= F^{-1}\big[\hat{g}(\lambda)\frac{\sinh(\lambda y)}{\sinh(\lambda\pi)}\big] = g(x) * F^{-1}\big[\frac{\sinh(\lambda y)}{\sinh(\lambda\pi)}\big] \\
&= g(x) * \frac{\sin y}{2\pi(\cosh x + \cos y)} \\
&= \frac{\sin y}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(x-\xi)}{\cosh \xi + \cos y} \mathrm{d}\xi.
\end{aligned}
$$

五（13分）利用Bessel级数及用分离变量法理论求解下列圆柱体上热传导方程初边值问题

$$\begin{cases} u_t - a^2(u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + u_{zz}) = 0, & 0 < r < 1,\ 0 < z < \pi, t > 0, \\ |u(0,z,t)| < \infty,\ u(1,z,t) = 0, & 0 \le z \le \pi, t > 0, \\ u(r,0,t) = u(r,\pi,t) = 0, & 0 \le r \le 1, t > 0, \\ u(r,z,0) = r\sin z, & 0 \le r \le 1, 0 \le z \le \pi. \end{cases}$$

注：$N_{mk}^2 = \int_0^b xJ_m^2(\alpha_k^{(m)}x/b)\mathrm{d}x = \frac{b^2}{2}J_{m+1}^2(\alpha_k^{(m)})$, 其中$\alpha_k^{(m)}$是 $J_m(x)$的第k个正零点.

解：令$U(r,z,t) = R(r)Z(z)T(t)$是非零特解，代入方程并做分离变量，得

$$\frac{T'(t)}{a^2T(t)} - \frac{R''(r) + \frac{1}{r}R'(r)}{R(r)} - \frac{Z''(z)}{Z(z)} = 0.$$

代入边界条件，得$Z(0) = Z(\pi) = 0$, $|R(0)| < \infty$, $R(1) = 0$. 令$\frac{Z''(z)}{Z(z)} = -\mu$, $\frac{r^2R''(r)+rR'(r)}{r^2R(r)} = -\lambda$, 于是得方程$T'(t) + a^2(\mu+\lambda)T(t) = 0$,及特征值问题

$$\text{(I)} \qquad Z''(z) + \mu Z(z) = 0,\ Z(0) = Z(\pi) = 0,$$
$$\text{(II)} \qquad r^2R''(r) + rR'(r) + \lambda r^2R(r) = 0,\ |R(0)| < \infty,\ R(1) = 0.$$

特征值问题(I)及(II)的特征值及对应的特征函数分别为

$$\mu_n = n^2,\ Z_n(z) = \sin nz,\ n = 1, 2, \cdots.$$
$$\lambda_k = (\alpha_k^{(0)})^2,\ R_k(r) = J_0(\alpha_k^{(0)}r),\ k = 1, 2, \cdots.$$

其中$\alpha_k^{(0)}$是 $J_0(x)$的第k个正零点. 因此$T(t)$的方程化为

$$T_{nk}'(t) + a^2(\mu_n + \lambda_k)T_{nk}(t) = 0,$$

它的解为$T_{nk}(t) = C_{nk}\mathrm{e}^{-a^2(\mu_n+\lambda_k)t}$. 叠加得到一般解

$$u(r,z,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} C_{nk}\mathrm{e}^{-a^2(\mu_n+\lambda_k)t}J_0(\alpha_k^{(0)}r)\sin nz.$$

利用初始条件，得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} C_{nk}J_0(\alpha_k^{(0)}r)\sin nz = r\sin z.$$

比较上述正交函数系$\{\sin nz\}$展开式中$\sin nz$的系数，得$C_{nk} = 0, n \ne 1$, 且系数C_{1k}满足

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_{1k}J_0(\alpha_k^{(0)}r)\sin z = r\sin z \Longleftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} C_{1k}J_0(\alpha_k^{(0)}r) = r.$$

故

$$C_{1k} = \frac{1}{N_k^2}\int_0^1 r^2J_0(\alpha_k^{(0)}r)\mathrm{d}r = \frac{2}{[\alpha_k^{(0)}]^3J_1^2(\alpha_k^{(0)})}\int_0^{\alpha_k^{(0)}} s^2J_0(s)\mathrm{d}s.$$

密……封……线