



分离变量法“小结 + 习题”

2025 年 3 月 4 日

目录

- ① 初始条件的作用
- ② 区域的特点
- ③ 方程的变形
- ④ 边界条件的不同组合
- ⑤ 关于 Laplace 方程求解的一些说明



初始条件的作用

1. 初始条件的作用
2. 区域的特点
3. 方程的变形
4. 边界条件的不同组合
5. 关于 Laplace 方程求解的一些说明

在分离变量法求解初边值问题的过程中，方程和边界条件的齐次性，使得分离变量法得以实施。

思考：初始条件在该方法中起到什么作用呢？



初始条件的作用

1. 初始条件的作用
2. 区域的特点
3. 方程的变形
4. 边界条件的不同组合
5. 关于 Laplace 方程求解的一些说明

齐次方程和齐次边界条件, 给出了方程做傅里叶 (Fourier) 展开的**基** (空间方向上的基、时间方向上的基) .

初始条件定出了初始函数 (只与空间变量有关) 在空间方向基的**系数**.



初始条件的作用

1. 初始条件的作
用

2. 区域的特点

3. 方程的变形

4. 边界条件的不
同组合

5. 关于 Laplace
方程求解的一些
说明

例：齐次波动方程、齐次 Dirichlet 边界条件下，考虑初始位移、和初始速度均为 0 的定解问题. 由于初值为 0, 则求出的系数全部为 0, 则只有零解.

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, & 0 < x < l, t > 0, \\ u(0, t) = u(l, t) = 0, & t > 0. \\ u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0, & 0 \leq x \leq l. \end{cases}$$



区域的特点

1. 初始条件的作用

2. 区域的特点

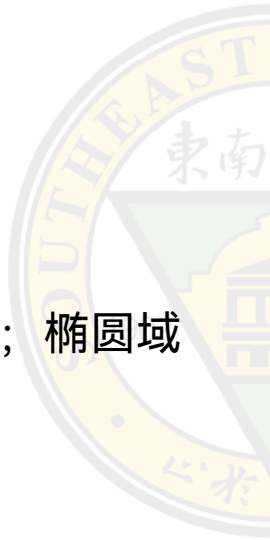
3. 方程的变形

4. 边界条件的不同组合

5. 关于 Laplace
方程求解的一些
说明

空间一维问题:
有界区间

空间二维问题:
矩形区域、圆域、圆外; 半圆域; 扇形; 椭圆域
(不作要求)



方程的变形

1. 初始条件的作用
2. 区域的特点
3. 方程的变形
4. 边界条件的不同组合
5. 关于 Laplace 方程求解的一些说明

三类典型方程: 波方程、热方程、Laplace 方程

三类典型方程带低阶项的形式:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + bu_x + du_t + eu, \quad x \in (0, l), t > 0.$$

其他方程(如高阶方程等, 见习题)



边界条件的不同组合

特征值问题常用的边界条件有:

$$X(0) = X(l) = 0; \quad X'(0) = X'(l) = 0;$$

$$X(0) = X'(l) = 0; \quad X'(0) = X(l) = 0;$$

$$X(0) = 0, \quad X'(l) + hX(l) = 0;$$

$$X(x) = X(x + 2\pi).$$

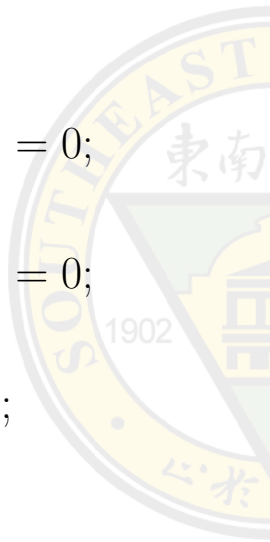
1. 初始条件的作用

2. 区域的特点

3. 方程的变形

4. 边界条件的不同组合

5. 关于 Laplace 方程求解的一些说明



不同方程与不同的边界条件有更多的组合

1. 初始条件的作用

2. 区域的特点

3. 方程的变形

4. 边界条件的不同组合

5. 关于 Laplace 方程求解的一些说明

如含低阶项的三类典型方程可与上面常用的边界条件作组合;

还有欧拉方程、贝塞尔 (Bessel) 方程、勒让德 (Legendre) 方程等可以与上面常用的边界条件进行组合.



关于 Laplace 方程求解的一些说明

1. 初始条件的作用
2. 区域的特点
3. 方程的变形
4. 边界条件的不同组合

5. 关于 Laplace
方程求解的一些
说明

- 圆域上的泊松 (Poisson) 公式;
- 矩形域上非齐次边界条件的处理: 线性拆分.

