数学物理方法

2025春

教材：
《数学物理方法讲义》杨明、石佩虎编
2018.9 (2021.3 重印)
东南大学出版社

Ch3　积分变换方法

1) Fourier变换及其性质
2) 利用Fourier变换求解方程
3) 利用Fourier变换求解高维问题
4) Laplace变换及其应用

1) Fourier变换及其性质

- 复形式的Fourier级数
- Fourier变换的定义
- Fourier逆变换的定义,Fourier反演定理
- 绝对可积空间,平方可积空间,卷积
- Fourier变换的性质
- 狄拉克函数与Fourier变换

从傅里叶级数到傅里叶变换

周期函数的傅里叶级数

对 $2l$ 周期函数：

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{n\pi}{l}x}$$

系数：

$$c_n = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\, e^{-i\frac{n\pi}{l}x} dx$$

非周期函数推广

当 $l \to \infty$ 时：

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\, e^{i\omega x} d\omega$$

其中：

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\omega x} dx$$

物理意义

信号分解为连续频率的叠加

严格数学定义

函数空间定义

- $L^1(\mathbb{R})$：绝对可积函数空间
- $L^2(\mathbb{R})$：平方可积函数空间

例 (典型例子)

$$f(x) = \begin{cases} x^{-2/3}, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \in L^1 \setminus L^2$$

傅里叶变换对

$$\mathcal{F}[f](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\omega x}\, dx$$

$$\mathcal{F}^{-1}[g](x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega)\, e^{i\omega x}\, d\omega$$

核心定理与示例

定理 (反演定理)

若 $f \in L^1 \cap PS(\mathbb{R})$，则:

$$\frac{f(x^-) + f(x^+)}{2} = \mathcal{F}^{-1}[\hat{f}](x)$$

Riemann-Lebesgue 引理

对 $f \in L^1(\mathbb{R})$:

$$\lim_{|\omega|\to\infty} \hat{f}(\omega) = 0$$

例 (矩形波变换)

$$f(x) = \chi_{[-\pi,\pi]}(x) \Rightarrow \hat{f}(\omega) = \frac{2\sin \pi\omega}{\omega}$$

卷积运算

定义与物理意义

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)\,dy$$

- 信号叠加的数学描述
- 权重为 $g(y)$ 的移位信号组合

定理 (卷积定理)

$$\mathcal{F}[f * g] = \hat{f} \cdot \hat{g}$$

例 (微分性质)

$$(f * g)' = f' * g = f * g'$$

设$f(x)$以$2l$为周期,考虑$(-l,l)$上的正交函数系:

$$\{\cos\frac{n\pi x}{l},\sin\frac{n\pi x}{l},n=0,1,2,\cdots\}\Rightarrow\{e^{i\frac{n\pi x}{l}},n=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$$

$$f(x)=\sum_{-\infty}^{\infty}c_n e^{i\frac{n\pi x}{l}}=\sum_{-\infty}^{\infty}c_n e^{i\omega_n x},$$

表示将信号f分解为离散频率ω_n的正余弦信号的叠加。

$$c_n=\frac{(f(x),e^{i\frac{n\pi x}{l}})}{(e^{i\frac{n\pi x}{l}},e^{i\frac{n\pi x}{l}})}=\frac{\int_{-l}^{l}f(x)e^{-i\frac{n\pi x}{l}}dx}{2l}$$

推广到非周期函数,i.e. 令$l \to \infty$.

记$\omega_n = \dfrac{n\pi}{l}, \Delta\omega_n = \omega_n - \omega_{n-1} = \dfrac{\pi}{l} \to 0.$

$$f(x) = \lim_{l\to\infty} \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{i\omega_n x} = \lim_{l\to\infty} \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2l} \boxed{\int_{-l}^{l} f(x) e^{-i\omega_n x} dx} \ e^{i\omega_n x}$$

$$= \lim_{\Delta\omega_n \to 0} \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} \boxed{\int_{-l}^{l} f(x) e^{-i\omega_n x} dx} \ e^{i\omega_n x} \Delta\omega_n$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx] \ e^{i\omega x} d\omega}$$

$\boxed{L^1(R)\text{与}L^2(R)}$

如果$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\,dx<\infty$，则称$f\in L^1(R)$.

如果$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2\,dx<\infty$，则称$f\in L^2(R)$.

(1)设$f(x)=\begin{cases}x^{-\frac{2}{3}}, & 0<x<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}x^{-\frac{2}{3}}, & x>1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$,

则$f\in L^1(R), f\notin L^2(R)$,而$g\in L^2(R), g\notin L^1(R)$.

(2)如果$f\in L^1(R)$且f有界,则$f\in L^2(R)$.

(3)如果$f\in L^2(R)$且$\operatorname{supp} f\subset[a,b]$,则$f\in L^1(R)$.

定义 3.2 设 $f \in L^1(\mathbb{R})$，称

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} \mathrm{d}x$$

为 f 的傅立叶变换，也可记为 $F[f](\omega)$.

设 $g \in L^1(\mathbb{R})$，称

$$F^{-1}[g](x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) e^{i\omega x} \mathrm{d}\omega$$

为 g 的傅立叶逆变换.

常见规定	设置	傅立叶变换	傅立叶反变换
Mathematica 缺省值	{0, 1}	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{i\omega t}\, dt$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{-i\omega t}\, d\omega$
纯粹数学	{1, -1}	$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt$	$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega$
古典物理	{-1, 1}	$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{i\omega t}\, dt$	$\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{-i\omega t}\, d\omega$
现代物理	{0, 1}	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{i\omega t}\, dt$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{-i\omega t}\, d\omega$
系统工程	{1, -1}	$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt$	$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega$
信号处理	{0, -2 Pi}	$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-2\pi i\omega t}\, dt$	$\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{2\pi i\omega t}\, d\omega$
一般情形	{*a*, *b*}	$\sqrt{(\mid b \mid)/(2\pi)^{1-a}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{ib\omega t}\, dt$	$\sqrt{\frac{\lvert b\rvert}{(2\pi)^{1+a}}}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{-ib\omega t}\, d\omega$

注：

(1)算子F与F^{-1}都是线性的,

(2)傅里叶变换和逆变换可以相互表示：(相似性)

$$F[f(x)](\omega)=2\pi F^{-1}[f(x)](-\omega)=2\pi F^{-1}[f(-x)](\omega);$$

$$F^{-1}[f(\omega)](x)=\frac{1}{2\pi}F[f(\omega)](-x)=\frac{1}{2\pi}F[f(-\omega)](x).$$

结论: $$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{f}(\omega)\,e^{i\omega x}\,\mathrm{d}\omega,$$

称为Fourier反演公式,也可简记为: $f=F^{-1}[F[f]]$.

一般将ω称为频率,所以*Fourier*反演公式的物理意义是将信号f分解为连续频率的正弦余弦信号的叠加,其中

$\widehat{f}$表示对应于频率ω的分量.

定理 3.1 设$f\in L^1(\mathbb{R})\cap PS(\mathbb{R})$(*Piecewise Smooth*), 则

$$\frac{1}{2}\left[f(x^-)+f(x^+)\right]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{f}(\omega)\,e^{i\omega x}\,\mathrm{d}\omega.$$

例1.计算下列函数的F变换.

(1)矩形波$f(x)=\begin{cases}1, & -\pi \le x \le \pi \\ 0, & 其它\end{cases}$;

(利用$Fourier$反演公式和(1)的结果求$\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx$.)

利用相似性公式求辛格函数$\frac{\sin \pi x}{\pi x}$的傅里叶变换;

(2) $f(x)=\begin{cases}\cos 3x, & -\pi \le x \le \pi \\ 0, & 其它\end{cases}$;

解 (1) $$\widehat{f}(\omega)=\int_{-\pi}^{\pi}e^{-i\omega x}\,\mathrm{d}x=2\int_{0}^{\pi}\cos\omega x\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{\omega}\sin\omega x\Big|_{0}^{\pi}=\frac{2\sin\pi\omega}{\omega}$$

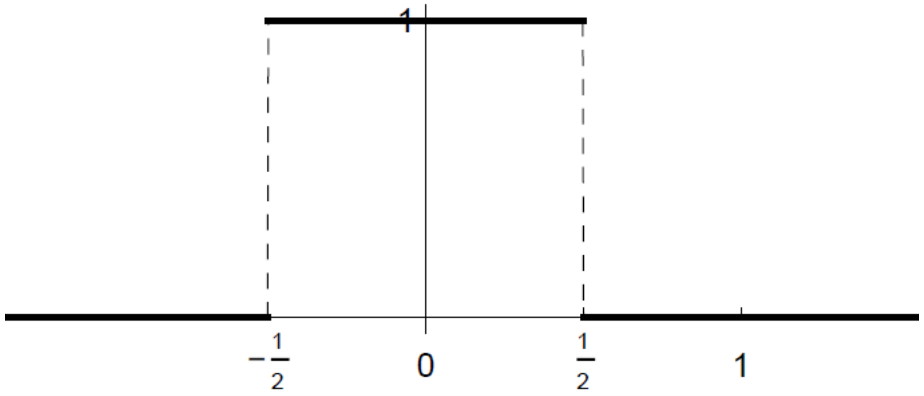
由反演公式知 $$1=f(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2\sin\pi\omega}{\omega}\,\mathrm{d}\omega$$

$$\Rightarrow\int_{0}^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2},$$

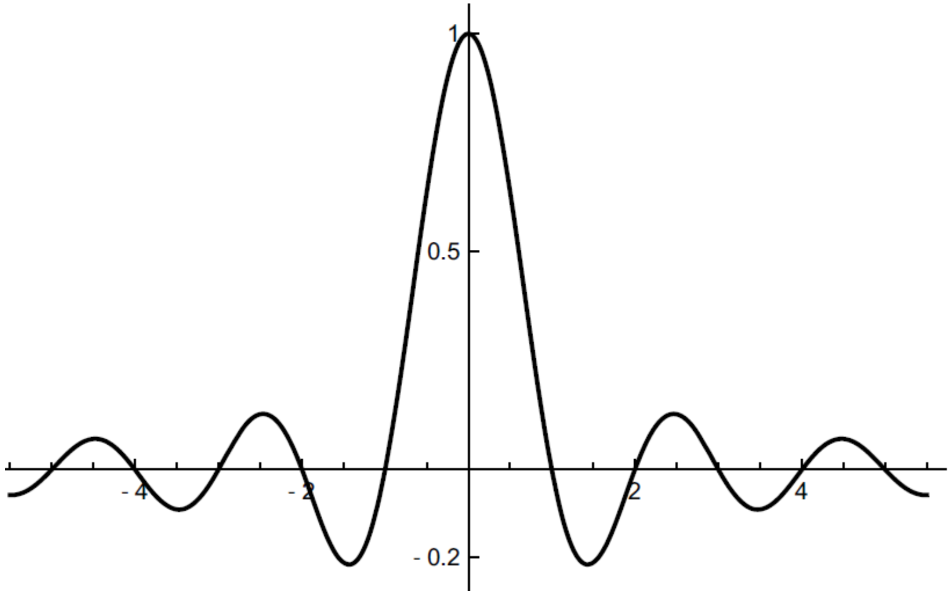
由相似性公式

$$F[\frac{\sin\pi x}{\pi x}]=2\pi F^{-1}[\frac{\sin\pi x}{\pi x}]=\begin{cases}1, & -\pi\le\omega\le\pi,\\ 0, & \omega\notin[-\pi,\pi].\end{cases}$$

门函数 $\Pi(t)=\begin{cases}1, & |t|<1/2,\\ 0, & |t|\geq 1/2.\end{cases}$



辛格函数 $\operatorname{sinc} x=\dfrac{\sin \pi x}{\pi x}$




ELECTRONICS
Fry's

(2)

$$\widehat{f}(\omega)=\int_{-\pi}^{\pi}\cos 3x e^{-i\omega x}\,\mathrm{d}x=2\int_{0}^{\pi}\cos 3x\cos\omega x\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_{0}^{\pi}\cos(\omega-3)x+\cos(\omega+3)x\,\mathrm{d}x=\frac{2\omega\sin\pi\omega}{9-\omega^2}.$$

(3)三角波$f(x)=\begin{cases}\pi-|x|, & -\pi\le x\le\pi\\ 0, & 其它\end{cases}$.

(4)$f(x)=e^{-\beta|x|},\beta>0.$

(5)利用(4)的结果和F与F^{-1}的相似性,求$F[\dfrac{1}{x^2+a^2}]$.

(3)

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\pi}^{\pi} (\pi - |x|) e^{-i\omega x}\, \mathrm{d}x = 2\int_0^{\pi} (\pi - x)\cos \omega x\, \mathrm{d}x$$

$$= 2(\pi - x)\frac{\sin \omega x}{\omega}\Big|_0^{\pi} + \frac{2}{\omega}\int_0^{\pi} \sin \omega x\, \mathrm{d}x = \frac{2(1-\cos \pi\omega)}{\omega^2}.$$

(4) $$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta|x|} e^{-i\omega x}\, \mathrm{d}x$$

$$= \int_{-\infty}^{0} e^{(\beta - i\omega)x}\, \mathrm{d}x + \int_0^{\infty} e^{-(\beta + i\omega)x}\, \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\beta - i\omega} + \frac{1}{\beta + i\omega} = \frac{2\beta}{\omega^2 + \beta^2}.$$

(5)

$$\widehat{f}(\omega) = 2\pi F^{-1}[f(-x)](\omega) = 2\pi F^{-1}[\frac{1}{x^2+a^2}](\omega)$$

$$= 2\pi \cdot \frac{e^{-a|\omega|}}{2a} = \frac{\pi}{a} e^{-a|\omega|}.$$

从这几个例子可以看到 f 越光滑，则 $\widehat{f}$ 在 ∞ 处衰减得越快.

定理 3.2 (Riemann-Lebesgue引理)

设 $f \in L^1(\mathbb{R})$，则 $\widehat{f}$ 有界连续，$\widehat{f}(\pm\infty) = 0$.

Riemann-Lebesgue 引理

定理 (Riemann-Lebesgue 引理)

设 $f \in L^1(\mathbb{R})$，则其傅里叶变换满足：

1. 有界性：$\|\hat{f}\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^1}$
2. 连续性：$\hat{f} \in C(\mathbb{R})$
3. 衰减性：$\lim\limits_{|\omega| \to \infty} \hat{f}(\omega) = 0$

物理意义

高频分量衰减：信号中的剧烈振荡部分对积分的贡献相互抵消

证明解析

有界性证明.

直接估计：

$$|\hat{f}(\omega)| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x) e^{-i\omega x}| dx = \|f\|_{L^1}$$

□

连续性证明.

对任意 $\omega, \eta \in \mathbb{R}$：

$$|\hat{f}(\omega) - \hat{f}(\eta)| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)||e^{-i\omega x} - e^{-i\eta x}| dx$$

由 Lebesgue 控制收敛定理，当 $\eta \to \omega$ 时极限为 0 □

衰减性证明

步骤 1：紧支光滑函数.

设 $g \in C_c^\infty(\mathbb{R})$，分部积分：

$$\hat{g}(\omega) = \frac{1}{i\omega}\int_{\mathbb{R}} g'(x)e^{-i\omega x}dx$$

故有估计：

$$|\hat{g}(\omega)| \leq \frac{1}{|\omega|}\|g'\|_{L^1} \to 0 \quad (|\omega| \to \infty)$$

□

步骤 2：一般函数逼近.

对任意 $f \in L^1$，取 $g_n \in C_c^\infty$ 使得：

$$\|f - g_n\|_{L^1} < \epsilon$$

分裂估计：

$$|\hat{f}(\omega)| \leq |\hat{f}(\omega) - \hat{g}_n(\omega)| + |\hat{g}_n(\omega)| \leq \epsilon + o(1)$$

卷积:

设f,g都是R上的函数,则称下式为f与g的卷积.

$$f*g(x):=\int_R f(x-y)g(y)dy$$

卷积的性质:

(i)$f*(\alpha g+\beta h)=\alpha(f*g)+\beta(f*h)$;

$(ii)f*g=g*f$;

$(iii)f*(g*h)=(f*g)*h$.

$$(ii) f*g(x)=\int f(x-y)g(y)dy=\int f(z)g(x-z)dz=g*f(x);$$

$$\begin{aligned}(iii)(f*g)*h(x)&=\int f*g(x-y)h(y)dy\\&=\iint f(z)g(x-y-z)h(y)dzdy\\&=\int f(z)g*h(x-z)dz=f*(g*h)(x).\end{aligned}$$

卷积求导:

设f可导且$f*g$和$f'*g$存在,则$f*g$也可导且

$(f*g)'=f'*g$.类似的,若g可导则$(f*g)'=f*g'$.

卷积的意义:

$$\int_R f(x-y)g(y)dy \approx \sum f(x-y_i)g(y_i)\Delta y_i$$

由此式知:

$f*g$可看成若干个$f(x-y_i)$的线性叠加,

而$g(y_i)\Delta y_i$可看成$f(x-y_i)$的系数.

定理 3.3 设 $f\in L^1(\mathbb{R})$，则

(1) 平移性质 $\forall a\in\mathbb{R},\quad F[f(x-a)](\omega)=e^{-ia\omega}\widehat{f}(\omega),\quad F[e^{iax}f(x)]=\widehat{f}(\omega-a);$

(2) 伸缩性质 $\forall a\neq 0,\quad F[f(ax)](\omega)=\frac{1}{|a|}\widehat{f}(\frac{\omega}{a});$

(3) 微分性质 设 $f\in C(\mathbb{R}),PS(\mathbb{R})$，$f'\in L^1(\mathbb{R})$，则 $F[f'(x)](\omega)=i\omega\widehat{f}(\omega)$，若 $xf(x)\in L^1(\mathbb{R})$，则 $F[xf(x)](\omega)=i\widehat{f}'(\omega);$

(4) 卷积性质 设 $g,\ \widehat{f},\ \widehat{g}\in L^1(\mathbb{R})$，则$F[f*g]=\widehat{f}\,\widehat{g}$，$F^{-1}[\widehat{f}*\widehat{g}]=2\pi fg.$

(c)注:

$$f' \in L^1(R) \Rightarrow f(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = f(0) + \int_0^{+\infty} f'(x)dx$$存在.

类似可得$f(-\infty)$也存在.又因为$f \in L^1(R)$,所以$f(\pm\infty) = 0$.

证明性质(4)

$$F[f*g](\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega x}f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega(x-y)}f(x-y)e^{-i\omega y}g(y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega z}f(z)e^{-i\omega y}g(y)\,\mathrm{d}z\mathrm{d}y=\widehat{f}(\omega)\,\widehat{g}(\omega).$$

例2.计算

(1) $F[\cos x \cdot f(2x)] = ?$

(2) $F[(x-2) \cdot f(x)] = ?$

(3) $Gauss$函数的$Fourier$变换:

$f(x) = e^{-\alpha x^2}, \alpha > 0.$

解 (1) $$F[f(2x)] = \frac{1}{2}\widehat{f}(\frac{\omega}{2})$$

$$F[\cos x \cdot f(2x)] = F[\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}f(2x)]$$

$$= \frac{1}{4}[\widehat{f}(\frac{\omega-1}{2}) + \widehat{f}(\frac{\omega+1}{2})].$$

(2)

$$F[(x-2)\cdot f(x)] = F[xf(x)] - 2F[f]$$

$$= i\widehat{f}'(\omega) - 2\widehat{f}(\omega).$$

(3) 记$f(x)=e^{-\alpha x^2}$

则$f'(x)=-2\alpha x f(x)$

在等式两边做傅立叶变换

$$i\omega\widehat{f}(\omega)=-2\alpha i\widehat{f}'(\omega) \ \Rightarrow \ \widehat{f}'(\omega)+\frac{\omega}{2\alpha}\widehat{f}(\omega)=0$$

$$\widehat{f}(0)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha x^2}\,\mathrm{d}x=\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

$$\Rightarrow \ \widehat{f}(\omega)=\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}}.$$

课堂练习

计算下列函数的傅立叶变换:

(1) $f(x)=\sin x,\quad |x|\le\pi,\qquad f(x)=0,\quad |x|>\pi;$

(2) $f(x)=e^{-2x^2+2x};$

(3) $f(x)=xe^{-3|x|};$

(4) $f(x)=\dfrac{x}{2+x^2}.$

解 (1) $\dfrac{2i\sin\pi\omega}{\omega^2-1}$

(2) $\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}e^{-\frac{\omega^2}{8}-i\frac{\omega}{2}+\frac{1}{2}}=\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}e^{-\frac{(\omega+2i)^2}{8}}$

(3) $-\dfrac{12i\omega}{(\omega^2+9)^2}$

(4) $-i\pi\mathrm{sgn}\omega\, e^{-\sqrt{2}|\omega|}$