第六章 特殊函数及其应用

Bessel方程

考虑圆形区域 $D=\{(x,y):\ x^2+y^2<a^2\}$上的波动方程初边值问题

$$\begin{cases} u_{tt}=c^2(u_{xx}+u_{yy}), & (x,y)\in D,\ t>0,\\ u(x,y,t)=0, & (x,y)\in\partial D,\ t\geq 0,\\ u(x,y,0)=\varphi(x,y), & (x,y)\in D,\\ u_t(x,y,0)=\psi(x,y), & (x,y)\in D. \end{cases}$$

Bessel方程

考虑圆形区域 $D=\{(x,y):\ x^2+y^2<a^2\}$上的波动方程初边值问题

$$\begin{cases} u_{tt}=c^2(u_{xx}+u_{yy}), & (x,y)\in D,\ t>0,\\ u(x,y,t)=0, & (x,y)\in\partial D,\ t\geq 0,\\ u(x,y,0)=\varphi(x,y), & (x,y)\in D,\\ u_t(x,y,0)=\psi(x,y), & (x,y)\in D. \end{cases}$$

用变量分离法求解时，设$u(x,y,t)=T(t)\phi(x,y)$, 则推得常微分方程 $T''(t)+\lambda c^2T(t)=0$ 和特征值问题

$$\begin{cases} \Delta\phi(x,y)+\lambda\phi(x,y)=0, & (x,y)\in D,\\ \phi(x,y)=0, & (x,y)\in\partial D. \end{cases}$$

可以证明特征值$\lambda > 0$. 再用分离变量法来求解该特征值问题，需用极坐标变换, 记

$$\phi(x,y) = \phi(r\cos\theta, r\sin\theta) = \Phi(r,\theta),$$

则上述特征值问题化为

$$\begin{cases} \Phi_{rr} + \frac{1}{r}\Phi_r + \frac{1}{r^2}\Phi_{\theta\theta} + \lambda\Phi = 0, & 0 < r < a, 0 \le \theta < 2\pi, \\ |\Phi(0,\theta)| < \infty,\ \Phi(a,\theta) = 0, & 0 \le \theta < 2\pi, \\ \Phi(r,\theta) = \Phi(r,\theta+2\pi), & 0 < r < a, 0 \le \theta < 2\pi. \end{cases}$$

令$\Phi(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta)$，代入方程并变量分离, 得

$$\frac{r^2R'' + rR'}{R} + \lambda r^2 = -\frac{\Theta''}{\Theta} = \gamma,$$

其中γ为常数，结合周期条件得到两个子特征值问题

$$(\mathrm{I}) \quad \begin{cases} \Theta''(\theta) + \gamma\, \Theta(\theta) = 0, \\ \Theta(\theta) = \Theta(\theta + 2\pi). \end{cases}$$

$$(\mathrm{II}) \quad \begin{cases} r^2 R''(r) + r R'(r) + (\lambda r^2 - \gamma) R(r) = 0, \quad 0 < r < a, \\ |R(0)| < \infty, \quad R(a) = 0. \end{cases}$$

由第二章知，子特征值问题(I)的特征值为

$$\gamma_n = n^2, \quad n = 0, 1, 2, \cdots,$$

对应的特征函数为

$$\Theta_0 = 1, \quad \Theta_n = A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta.$$

子特征值问题(II)化为

$$\begin{cases} r^2R''(r) + rR'(r) + (\lambda r^2 - n^2)R(r) = 0, \quad 0 < r < a, \\ |R(0)| < \infty, \quad R(a) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

其中$n = 0, 1, \cdots$. 这是一列特征值问题.

子特征值问题(II)化为

$$\begin{cases} r^2R''(r) + rR'(r) + (\lambda r^2 - n^2)R(r) = 0, \quad 0 < r < a, \\ |R(0)| < \infty, \quad R(a) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

其中$n = 0, 1, \cdots$. 这是一列特征值问题.为了求解上述常微分方程，做变换$\rho = \sqrt{\lambda}r$, 则$R(r) = R(\rho/\sqrt{\lambda}) = y(\rho)$, 且$y$满足方程

$$\rho^2 y''(\rho) + \rho y'(\rho) + (\rho^2 - n^2)y = 0, \quad \rho > 0. \tag{2}$$

此方程称为n阶贝塞尔(Bessel)方程, 其解称为Bessel函数（柱函数）.

如果$y(\rho)$ 是方程(2)的解，则$y(\sqrt{\lambda}r) = R(r)$ 是方程(1)的解.

Bessel 函数

考虑ν (≥ 0) 阶 Bessel 方程

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0,$$

的求解方法.

Bessel 函数

考虑ν (≥ 0) 阶 Bessel 方程

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0,$$

的求解方法. 因为方程是变系数的，且方程在$x = 0$退化，所以方程有广义幂级数解

$$y(x) = x^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{\alpha+k}, a_0 \neq 0,$$

其中 $\alpha, a_k, k = 0, 1, \cdots$ 为待定常数.

为了把广义幂级数解代入方程，首先计算

$$
\begin{aligned}
y'(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k(\alpha+k)x^{\alpha+k-1}, \\
y''(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k(\alpha+k)(\alpha+k-1)x^{\alpha+k-2},
\end{aligned}
$$

为了把广义幂级数解代入方程，首先计算

$$
\begin{aligned}
y'(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k(\alpha+k)x^{\alpha+k-1}, \\
y''(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k(\alpha+k)(\alpha+k-1)x^{\alpha+k-2},
\end{aligned}
$$

将上述 y, y', y'' 的表达式代入方程, 得

$$
\begin{aligned}
&(\alpha^2-\nu^2)a_0x^{\alpha}+[(\alpha+1)^2-\nu^2]a_1x^{\alpha+1} \\
&+\sum_{k=2}^{\infty}\Big([(\alpha+k)^2-\nu^2]a_k+a_{k-2}\Big)x^{\alpha+k}=0.
\end{aligned}
$$

要使上式恒成立，幂级数各项系数必须为 0，即

$$\begin{cases} (\alpha^2-\nu^2)a_0=0, & (1) \\ [(\alpha+1)^2-\nu^2]a_1=0, & (2) \\ [(\alpha+k)^2-\nu^2]a_k+a_{k-2}=0, \quad k=2,3,\cdots. & (3) \end{cases}$$

要使上式恒成立，幂级数各项系数必须为 0 , 即

$$\begin{cases} (\alpha^2 - \nu^2)a_0 = 0, & (1) \\ [(\alpha+1)^2 - \nu^2]a_1 = 0, & (2) \\ [(\alpha+k)^2 - \nu^2]a_k + a_{k-2} = 0, \quad k = 2, 3, \cdots . & (3) \end{cases}$$

由上式(1)得 $\alpha = \pm\nu.$

要使上式恒成立，幂级数各项系数必须为 0 , 即

$$
\begin{cases}
(\alpha^2-\nu^2)a_0=0, & (1)\\
[(\alpha+1)^2-\nu^2]a_1=0, & (2)\\
[(\alpha+k)^2-\nu^2]a_k+a_{k-2}=0, \quad k=2,3,\cdots. & (3)
\end{cases}
$$

由上式(1)得 $\alpha=\pm\nu.$

首先考虑$\alpha=\nu$ 的情形. 此时由(2)式得$a_1=0$. 由(3)得递推公式

$$
a_k=-\frac{a_{k-2}}{(k+\nu)^2-\nu^2}=-\frac{a_{k-2}}{k(k+2\nu)},
$$

由此得$a_1=a_3=\cdots=a_{2k-1}=\cdots=0.$

要使上式恒成立，幂级数各项系数必须为 0，即

$$\begin{cases} (\alpha^2-\nu^2)a_0=0, & (1) \\ [(\alpha+1)^2-\nu^2]a_1=0, & (2) \\ [(\alpha+k)^2-\nu^2]a_k+a_{k-2}=0, \quad k=2,3,\cdots. & (3) \end{cases}$$

由上式(1)得 $\alpha=\pm\nu$.

首先考虑$\alpha=\nu$ 的情形. 此时由(2)式得$a_1=0$. 由(3)得递推公式

$$a_k=-\frac{a_{k-2}}{(k+\nu)^2-\nu^2}=-\frac{a_{k-2}}{k(k+2\nu)},$$

由此得$a_1=a_3=\cdots=a_{2k-1}=\cdots=0$.

下面考虑偶数项系数a_{2j}, 则递推公式变为

$$\begin{aligned} a_{2j} &= -\frac{a_{2j-2}}{4j(j+\nu)} = \frac{(-1)^j a_0}{2^{2j} j!(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+j)} \\ &= \frac{(-1)^j a_0 \Gamma(\nu+1)}{2^{2j} j! \Gamma(\nu+j+1)}. \end{aligned}$$

于是得到Bessel方程的一个特解

$$y(x) = \Gamma(\nu+1) a_0 \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{x^{2j+\nu}}{2^{2j} j! \Gamma(j+\nu+1)}.$$

$$a_{2j} = -\frac{a_{2j-2}}{4j(j+\nu)} = \frac{(-1)^j a_0}{2^{2j} j!(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+j)}$$
$$= \frac{(-1)^j a_0 \Gamma(\nu+1)}{2^{2j} j! \Gamma(\nu+j+1)}.$$

于是得到Bessel方程的一个特解

$$y(x) = \Gamma(\nu+1) a_0 \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{x^{2j+\nu}}{2^{2j} j! \Gamma(j+\nu+1)}.$$

选取

$$a_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu+1)},$$

并把特解记其为 $J_\nu(x)$，即

$$y(x) = J_\nu(x) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{1}{j! \Gamma(j+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2j+\nu}, \quad \nu \geq 0.$$

函数$J_\nu(x)$称为第一类ν阶贝塞尔函数.

当$\alpha=-\nu$时，可类似地推出方程的另一个特解

$$y(x)=J_{-\nu}(x)=\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\frac{1}{j!\Gamma(j-\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2j-\nu},\ \nu\geq 0.$$

当$\alpha=-\nu$时，可类似地推出方程的另一个特解

$$y(x)=J_{-\nu}(x)=\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\frac{1}{j!\Gamma(j-\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2j-\nu},\ \nu\geq 0.$$

- 当$\nu>0$不是整数时，$J_\nu(x)$与$J_{-\nu}(x)$线性无关，所以方程的通解为

$$y(x)=C_1J_\nu(x)+C_2J_{-\nu}(x).$$

当$\alpha=-\nu$时，可类似地推出方程的另一个特解

$$y(x)=J_{-\nu}(x)=\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\frac{1}{j!\Gamma(j-\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2j-\nu},\quad \nu\geq 0.$$

- 当$\nu>0$不是整数时，$J_\nu(x)$与$J_{-\nu}(x)$线性无关，所以方程的通解为

$$y(x)=C_1J_\nu(x)+C_2J_{-\nu}(x).$$

- 当$\nu=n$是整数时，$J_n(x)$与$J_{-n}(x)$线性相关，因为

$$\begin{aligned}
J_{-n}(x) &= \sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{j!\,\Gamma(j-n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2j-n}=\sum_{j=n}^{\infty}\frac{(-1)^j}{j!\,\Gamma(j-n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2j-n}\\
&= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m+n}}{(m+n)!\,\Gamma(m+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+n}\\
&= (-1)^n\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(m+n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+n}=(-1)^nJ_n(x).
\end{aligned}$$

为了得到方程的通解，引入第二类Bessel函数$Y_\nu(x)$，也称为Neumann函数. 定义

$$Y_\nu(x) = \frac{\cos \pi\nu \cdot J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)}{\sin \pi\nu}, \qquad \nu \notin \mathbb{Z},$$

$$Y_n(x) = \lim_{\nu\to n} Y_\nu(x), \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

第二类Bessel函数$Y_\nu(x)$任然是Bessel方程的一个特解.

为了得到方程的通解，引入第二类Bessel函数$Y_\nu(x)$，也称为Neumann函数. 定义

$$Y_\nu(x) = \frac{\cos \pi\nu \cdot J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)}{\sin \pi\nu}, \qquad \nu \notin \mathbb{Z},$$
$$Y_n(x) = \lim_{\nu\to n} Y_\nu(x), \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

第二类Bessel函数$Y_\nu(x)$任然是Bessel方程的一个特解.

可以证明当$x \to 0$时

$$Y_n(x) \sim -\frac{(n-1)!}{\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n}, \quad n \in \mathbb{Z}^+, \quad Y_0(x) \sim \frac{2}{\pi}\ln\frac{x}{2},$$

因此$Y_n(0) = -\infty$，$n \geq 0$. 由此构造当ν是整数时方程的通解.

为了得到方程的通解，引入第二类Bessel函数$Y_\nu(x)$，也称为Neumann函数. 定义

$$
\begin{aligned}
Y_\nu(x) &= \frac{\cos\pi\nu\cdot J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)}{\sin\pi\nu}, \qquad \nu\notin\mathbb{Z},\\
Y_n(x) &= \lim_{\nu\to n} Y_\nu(x), \qquad n\in\mathbb{Z}.
\end{aligned}
$$

第二类Bessel函数$Y_\nu(x)$任然是Bessel方程的一个特解.

可以证明当$x\to 0$时

$$
Y_n(x) \sim -\frac{(n-1)!}{\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n}, \quad n\in\mathbb{Z}^+, \quad Y_0(x) \sim \frac{2}{\pi}\ln\frac{x}{2},
$$

因此$Y_n(0) = -\infty$, $n\geq 0$. 由此构造当ν是整数时方程的通解.

因为ν不是整数时，$Y_\nu(x)$是$J_\nu(x)$与$J_{-\nu}(x)$的线性组合，所以对任意$\nu\geq 0$, 方程的通解都可表示为

$$
y(x) = C_1 J_\nu(x) + C_2 Y_\nu(x).
$$

1. 递推公式

两个基本的递推公式

$$
\text{(I)} \quad \begin{cases} (x^\nu J_\nu(x))' &= x^\nu J_{\nu-1}(x), \\ (x^{-\nu} J_\nu(x))' &= -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x). \end{cases}
$$

1. 递推公式

两个基本的递推公式

$$(\mathrm{I})\quad \begin{cases} (x^{\nu}J_{\nu}(x))' &= x^{\nu}J_{\nu-1}(x), \\ (x^{-\nu}J_{\nu}(x))' &= -x^{-\nu}J_{\nu+1}(x). \end{cases}$$

由上述两个基本公式可得

$$(\mathrm{II})\quad \begin{cases} xJ_{\nu}'(x)+\nu J_{\nu}(x) &= xJ_{\nu-1}(x), \\ xJ_{\nu}'(x)-\nu J_{\nu}(x) &= -xJ_{\nu+1}(x). \end{cases}$$

1. 递推公式

两个基本的递推公式

$$(\mathrm{I})\quad \begin{cases} (x^\nu J_\nu(x))' = x^\nu J_{\nu-1}(x), \\ (x^{-\nu} J_\nu(x))' = -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x). \end{cases}$$

由上述两个基本公式可得

$$(\mathrm{II})\quad \begin{cases} xJ_\nu'(x) + \nu J_\nu(x) = xJ_{\nu-1}(x), \\ xJ_\nu'(x) - \nu J_\nu(x) = -xJ_{\nu+1}(x). \end{cases}$$

$$(\mathrm{III})\quad \begin{cases} 2\nu J_\nu(x) = xJ_{\nu-1}(x) + xJ_{\nu+1}(x), \\ 2J_\nu'(x) = J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x), \end{cases}$$

1. 递推公式

两个基本的递推公式

$$
\text{(I)} \quad \begin{cases} (x^{\nu}J_{\nu}(x))' &= x^{\nu}J_{\nu-1}(x), \\ (x^{-\nu}J_{\nu}(x))' &= -x^{-\nu}J_{\nu+1}(x). \end{cases}
$$

由上述两个基本公式可得

$$
\text{(II)} \quad \begin{cases} xJ_{\nu}'(x) + \nu J_{\nu}(x) &= xJ_{\nu-1}(x), \\ xJ_{\nu}'(x) - \nu J_{\nu}(x) &= -xJ_{\nu+1}(x). \end{cases}
$$

$$
\text{(III)} \quad \begin{cases} 2\nu J_{\nu}(x) &= xJ_{\nu-1}(x) + xJ_{\nu+1}(x), \\ 2J_{\nu}'(x) &= J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x), \end{cases}
$$

在基本公式中取 $\nu = 0$，得

$$
J_0'(x) = J_{-1}(x) = -J_1(x).
$$

1. 递推公式

两个基本的递推公式

$$(\mathrm{I})\quad \begin{cases} (x^{\nu}J_{\nu}(x))' = x^{\nu}J_{\nu-1}(x), \\ (x^{-\nu}J_{\nu}(x))' = -x^{-\nu}J_{\nu+1}(x). \end{cases}$$

由上述两个基本公式可得

$$(\mathrm{II})\quad \begin{cases} xJ_{\nu}'(x) + \nu J_{\nu}(x) = xJ_{\nu-1}(x), \\ xJ_{\nu}'(x) - \nu J_{\nu}(x) = -xJ_{\nu+1}(x). \end{cases}$$

$$(\mathrm{III})\quad \begin{cases} 2\nu J_{\nu}(x) = xJ_{\nu-1}(x) + xJ_{\nu+1}(x), \\ 2J_{\nu}'(x) = J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x), \end{cases}$$

在基本公式中取 $\nu = 0$，得

$$J_0'(x) = J_{-1}(x) = -J_1(x).$$

第二类Bessel函数也有类似的递推公式.

例1 利用Bessel函数的递推公式,计算下列不定积分

(1) $\displaystyle\int x^3 J_{-2}(x)\,\mathrm{d}x,\qquad \int x^3 J_0(x)\,\mathrm{d}x.$

(2) $\displaystyle\int xJ_2(x)\,\mathrm{d}x,\qquad \int J_3(x)\,\mathrm{d}x.$

例1 利用Bessel函数的递推公式,计算下列不定积分

$$(1)\quad \int x^3 J_{-2}(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \int x^3 J_0(x)\,\mathrm{d}x.$$

$$(2)\quad \int x J_2(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \int J_3(x)\,\mathrm{d}x.$$

解 $\displaystyle\int x^3 J_{-2}(x)\,\mathrm{d}x = \int x^3 J_2(x)\,\mathrm{d}x = x^3 J_3(x) + C.$

$$\begin{aligned}\int x^3 J_0(x)\,\mathrm{d}x &= \int x^2\,\mathrm{d}(xJ_1(x)) = x^3 J_1(x) - 2\int x^2 J_1(x)\,\mathrm{d}x \\ &= x^3 J_1(x) - 2x^2 J_2(x) + C.\end{aligned}$$

例1 利用Bessel函数的递推公式,计算下列不定积分

$$(1)\quad \int x^3 J_{-2}(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \int x^3 J_0(x)\,\mathrm{d}x.$$

$$(2)\quad \int x J_2(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \int J_3(x)\,\mathrm{d}x.$$

解 $\int x^3 J_{-2}(x)\,\mathrm{d}x = \int x^3 J_2(x)\,\mathrm{d}x = x^3 J_3(x) + C.$

$$\begin{aligned}
\int x^3 J_0(x)\,\mathrm{d}x &= \int x^2\,\mathrm{d}(xJ_1(x)) = x^3 J_1(x) - 2\int x^2 J_1(x)\,\mathrm{d}x \\
&= x^3 J_1(x) - 2x^2 J_2(x) + C. \\
\int x J_2(x)\,\mathrm{d}x &= -\int x^2\,\mathrm{d}(x^{-1}J_1(x)) = -xJ_1(x) + 2\int J_1(x)\,\mathrm{d}x \\
&= -xJ_1(x) - 2J_0(x) + C. \\
\int J_3(x)\,\mathrm{d}x &= -\int x^2\,\mathrm{d}(x^{-2}J_2(x)) = -J_2(x) + 2\int x^{-1} J_2(x)\,\mathrm{d}x \\
&= -J_2(x) - 2x^{-1}J_1(x) + C.
\end{aligned}$$

例2 证明对任意实数$\alpha > -1,\ \omega > 0$,有

$$\int_0^1 x^{\alpha+3} J_\alpha(\omega x)\mathrm{d}x = \frac{J_{\alpha+1}(\omega)}{\omega} - \frac{2J_{\alpha+2}(\omega)}{\omega^2}.$$

例2 证明对任意实数$\alpha > -1,\ \omega > 0$,有

$$\int_0^1 x^{\alpha+3} J_\alpha(\omega x)\mathrm{d}x = \frac{J_{\alpha+1}(\omega)}{\omega} - \frac{2J_{\alpha+2}(\omega)}{\omega^2}.$$

例2 证明对任意实数$\alpha > -1,\ \omega > 0$,有

$$\int_0^1 x^{\alpha+3} J_\alpha(\omega x)\mathrm{d}x = \frac{J_{\alpha+1}(\omega)}{\omega} - \frac{2J_{\alpha+2}(\omega)}{\omega^2}.$$

证明 利用递推公式及分部积分法，得

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^{\alpha+3} J_\alpha(\omega x)\mathrm{d}x &= \frac{1}{\omega^{\alpha+4}} \int_0^\omega s^{\alpha+3} J_\alpha(s)\mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{\omega^{\alpha+4}} \int_0^\omega s^2 \cdot \mathrm{d}(s^{\alpha+1} J_{\alpha+1}(s)) \\
&= \frac{1}{\omega^{\alpha+4}} \left(s^{\alpha+3} J_{\alpha+1}(s)\Big|_0^\omega - 2\int_0^\omega s^{\alpha+2} J_{\alpha+1}(s)\mathrm{d}s \right) \\
&= \frac{1}{\omega^{\alpha+4}} \left[\omega^{\alpha+3} J_{\alpha+1}(\omega) - 2\omega^{\alpha+2} J_{\alpha+2}(\omega)\right] \\
&= \frac{J_{\alpha+1}(\omega)}{\omega} - \frac{2J_{\alpha+2}(\omega)}{\omega^2}.
\end{aligned}$$

2. Bessel 函数的零点

(1) Bessel 函数$J_\nu(x)$ 有无穷多个单重正零点，全部正零点依次记为

$$0 < \mu_1^{(\nu)} < \mu_2^{(\nu)} < \cdots < \mu_k^{(\nu)} < \cdots .$$

2. Bessel 函数的零点

(1) Bessel 函数$J_\nu(x)$ 有无穷多个单重正零点，全部正零点依次记为

$$0 < \mu_1^{(\nu)} < \mu_2^{(\nu)} < \cdots < \mu_k^{(\nu)} < \cdots .$$

(2) $J_\nu(x)$ 和 $J_{\nu+1}(x)$ 的零点之间彼此相互分隔，即 $J_\nu(x)$ 的任意两个相邻的零点之间仅有 $J_{\nu+1}(x)$ 的一个零点,$J_{\nu+1}(x)$ 的任意两个相邻的零点之间仅有 $J_\nu(x)$ 的一个零点.

2. Bessel 函数的零点

(1) Bessel 函数$J_\nu(x)$ 有无穷多个单重正零点，全部正零点依次记为

$$0 < \mu_1^{(\nu)} < \mu_2^{(\nu)} < \cdots < \mu_k^{(\nu)} < \cdots .$$

(2) $J_\nu(x)$ 和 $J_{\nu+1}(x)$ 的零点之间彼此相互分隔，即 $J_\nu(x)$ 的任意两个相邻的零点之间仅有 $J_{\nu+1}(x)$ 的一个零点,$J_{\nu+1}(x)$ 的任意两个相邻的零点之间仅有 $J_\nu(x)$ 的一个零点.

(3) 导函数$J_\nu'(x)$ 有无穷多个单重正零点，全部正零点依次记为

$$0 < \hat{\mu}_1^{(\nu)} < \hat{\mu}_2^{(\nu)} < \cdots < \hat{\mu}_k^{(\nu)} < \cdots .$$

3. Bessel 函数的渐近行为

当$x \to \infty$时，

$$\begin{aligned} J_\nu(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos(x - \frac{\pi\,\nu}{2} - \frac{\pi}{4}) + O(\frac{1}{x^{3/2}}), \\ Y_\nu(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin(x - \frac{\pi\,\nu}{2} - \frac{\pi}{4}) + O(\frac{1}{x^{3/2}}). \end{aligned}$$

即当x充分大时，$J_\nu(x)$的图形像一条衰减的余弦曲线，$Y_\nu(x)$的图形像一条衰减的正弦曲线.

4. Bessel 函数的正交完备性与模值

Bessel函数在求解数学物理方程定解问题有重要作用，因为需要求解一个与定解问题有关的 Bessel 方程的特征值问题. 首先讨论带Dirichlet边界条件的特征值问题

$$
\text{(I)} \qquad \begin{cases} x^2 y''(x) + x y'(x) + (\lambda x^2 - \nu^2) y(x) = 0, \quad 0 < x < a, \\ |y(0)| < \infty, \ \ y(a) = 0, \end{cases}
$$

其中$\nu \geq 0$.

4. Bessel 函数的正交完备性与模值

Bessel函数在求解数学物理方程定解问题有重要作用，因为需要求解一个与定解问题有关的 Bessel 方程的特征值问题. 首先讨论带Dirichlet边界条件的特征值问题

$$(\mathrm{I}) \quad \begin{cases} x^2y''(x) + xy'(x) + (\lambda x^2 - \nu^2)y(x) = 0, & 0 < x < a, \\ |y(0)| < \infty, \ y(a) = 0, \end{cases}$$

其中$\nu \geq 0$.

上述问题的解$y'(x) \neq 0$, 否则由$y(a) = 0$得$y(x) \equiv 0$. 再用y乘以方程两边并积分，得

$$\lambda \int_0^a xy^2(x)\mathrm{d}x = \int_0^a [\frac{\nu^2}{x}y^2 + xy'^2]\mathrm{d}x.$$

由此得特征值$\lambda > 0$.

利用Bessel方程通解结构及Bessel函数零点理论，可得到特征值问题(I)的特征值和对应的特征函数为

$$\lambda_k = \left(\frac{\mu_k^{(\nu)}}{a}\right)^2, \quad y_k(x) = J_\nu\left(\frac{\mu_k^{(\nu)}}{a}x\right), \quad k = 1, 2, \cdots,$$

其中$\mu_k^{(\nu)}$Bessel函数$J_\nu(x)$的第k个正零点.

利用Bessel方程通解结构及Bessel函数零点理论，可得到特征值问题(I)的特征值和对应的特征函数为

$$\lambda_k = \left(\frac{\mu_k^{(\nu)}}{a}\right)^2, \quad y_k(x) = J_\nu\left(\frac{\mu_k^{(\nu)}}{a}x\right), \quad k = 1, 2, \cdots,$$

其中$\mu_k^{(\nu)}$Bessel函数$J_\nu(x)$的第k个正零点.

定理I 上述得到的特征值问题(I)的特征函数系 $\{J_\nu(\mu_k^{(\nu)}x/a)\}_{k=1}^{\infty}$ 是区间 $[0, a]$上带权函数 x 的正交完备系，并且具有模值

$$N_k^2 = \int_0^a xJ_\nu^2\left(\frac{\mu_k^{(\nu)}}{a}x\right)\mathrm{d}x = \frac{a^2}{2}\left[J_\nu'(\mu_k^{(\nu)})\right]^2 = \frac{a^2}{2}\left[J_{\nu\pm1}(\mu_k^{(\nu)})\right]^2,$$

$k = 1,\ 2,\ \cdots.$

因为特征值问题(I)可写为自共轭算子的特征值问题

$$Ly := (xy')' - \frac{\nu^2}{x}y = \lambda xy,$$

所以定理2.6知，$\{J_\nu(\mu_k^{(\nu)}x/a)\}_{k=1}^{\infty}$是区间 $[0,a]$上带权函数 x 的正交完备系，且构成加权平方可积空间$L_x^2[0,a]$的一组基.

因为特征值问题(I)可写为自共轭算子的特征值问题

$$Ly := (xy')' - \frac{\nu^2}{x}y = \lambda xy,$$

所以定理2.6知，$\{J_\nu(\mu_k^{(\nu)}x/a)\}_{k=1}^\infty$是区间 $[0,a]$上带权函数 x 的正交完备系，且构成加权平方可积空间$L_x^2[0,a]$的一组基.

为了计算模值，需要利用如下恒等式

$$\int_0^a x\,J_\nu^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{a^2}{2}[J_\nu'(a)]^2 + \frac{1}{2}(a^2-\nu^2)J_\nu^2(a).$$

由此恒等式得

$$\int_0^a x\,J_\nu^2(\frac{\mu_k^{(\nu)}}{a}x)\,\mathrm{d}x = \frac{a^2}{(\mu_k^{(\nu)})^2}\int_0^{\mu_k^{(\nu)}} t\,J_\nu^2(t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{a^2}{(\mu_k^{(\nu)})^2}\left[\frac{(\mu_k^{(\nu)})^2}{2}[J_\nu'(\mu_k^{(\nu)})]^2 + \frac{1}{2}((\mu_k^{(\nu)})^2-\nu^2)J_\nu^2(\mu_k^{(\nu)})\right]$$

$$= \frac{a^2}{2}[J_\nu'(\mu_k^{(\nu)})]^2 = \frac{a^2}{2}J_{\nu\pm1}^2(\mu_k^{(\nu)}).$$

其次，考虑带Neumann边界条件的特征值问题

$$(\mathrm{II})\quad \begin{cases} x^2y'' + xy' + (\lambda x^2 - \nu^2)y = 0, & 0 < x < a, \\ |y(0)| < \infty, \quad y'(a) = 0. \end{cases}$$

其中$\nu \geq 0$. 此时特征值$\lambda \geq 0$.

其次，考虑带Neumann边界条件的特征值问题

$$(\mathrm{II})\quad \begin{cases} x^2y'' + xy' + (\lambda x^2 - \nu^2)y = 0, & 0 < x < a, \\ |y(0)| < \infty, \quad y'(a) = 0. \end{cases}$$

其中$\nu \geq 0$. 此时特征值$\lambda \geq 0$.

当$\lambda > 0$时，类似特征值问题(I)的情形，可得特征值问题(II)的特征值和对应的特征函数为

$$\lambda_k = \left(\frac{\hat{\mu}_k^{(\nu)}}{a}\right)^2, \quad y_k(x) = J_\nu\Big(\frac{\hat{\mu}_k^{(\nu)}}{a}x\Big), \quad k = 1, 2, \cdots,$$

其中$\hat{\mu}_k^{(\nu)}$Bessel函数$J'_\nu(x)$的第k个正零点.

其次，考虑带Neumann边界条件的特征值问题

$$
\text{(II)} \quad \begin{cases} x^2y'' + xy' + (\lambda x^2 - \nu^2)y = 0, \quad 0 < x < a, \\ |y(0)| < \infty, \quad y'(a) = 0. \end{cases}
$$

其中$\nu \geq 0$. 此时特征值$\lambda \geq 0$.

当$\lambda > 0$时，类似特征值问题(I)的情形，可得特征值问题(II)的特征值和对应的特征函数为

$$
\lambda_k = \left(\frac{\hat{\mu}_k^{(\nu)}}{a}\right)^2, \quad y_k(x) = J_\nu\left(\frac{\hat{\mu}_k^{(\nu)}}{a}x\right), \quad k = 1, 2, \cdots,
$$

其中$\hat{\mu}_k^{(\nu)}$Bessel函数$J_\nu'(x)$的第k个正零点.

当$\lambda = 0$时，方程变为欧拉方程

$$
x^2y'' + xy' - \nu^2 y = 0,
$$

方程通解为

$$
y = C_0 + D_0 \ln x, \ \nu = 0; \ y = Cx^\nu + Dx^{-\nu}, \ \nu > 0.
$$

由$|y(0)| < \infty$ 得$D = D_0 = 0$. 又由$y'(a) = 0$知

- 当$\nu > 0$时，$C = 0$,故当$\nu > 0$时$\lambda = 0$不是特征值.
- 当$\nu = 0$时，$\lambda = 0$是特征值，对应的特征函数为1.

由$|y(0)| < \infty$ 得$D = D_0 = 0$. 又由$y'(a) = 0$知

- 当$\nu > 0$时，$C = 0$,故当$\nu > 0$时$\lambda = 0$不是特征值.
- 当$\nu = 0$时，$\lambda = 0$是特征值，对应的特征函数为1.

综上所述，特征值问题(II)的结果如下：

- 当$\nu > 0$时，

$$\lambda_k = (\frac{\widehat{\mu}_k^{(\nu)}}{a})^2,\ y_k(x) = J_\nu(\frac{\widehat{\mu}_k^{(\nu)}}{a}x),\ k = 1, 2, \cdots .$$

- 当$\nu = 0$时，

$$\lambda_0 = 0,\ \lambda_k = (\frac{\widehat{\mu}_k^{(0)}}{a})^2,\ \ y_0(x) = 1,\ y_k(x) = J_0(\frac{\widehat{\mu}_k^{(0)}}{a}x), k = 1, 2, \cdots .$$

或者 $\lambda_k = (\frac{\widehat{\mu}_k^{(0)}}{a})^2,\ y_k(x) = J_0(\frac{\widehat{\mu}_k^{(0)}}{a}x),\ k = 0, 1, \cdots .$

定理II 上述得到的特征值问题(II)的特征函数系 $\{J_\nu(\hat{\mu}_k^{(\nu)}x/a)\}$ 是区间 $[0,a]$上带权函数 x 的正交完备系，并且具有模值

$$N_0^2 = \int_0^a x1^2\,\mathrm{d}x = \frac{a^2}{2}, (\text{仅对}\nu = 0, k = 0\text{的情形})$$

$$N_k^2 = \int_0^a x\,J_\nu^2(\frac{\widehat{\mu}_k^{(\nu)}}{a}x)\,\mathrm{d}x = \frac{a^2}{2}(1 - \frac{\nu^2}{(\widehat{\mu}_k^{(\nu)})^2})J_\nu^2(\widehat{\mu}_k^{(\nu)}),$$

$$k = 1, 2, \cdots.\ (\nu \geq 0)$$

Bessel级数

因为特征值问题(I)和(II)所得的特征函数系构成加权平方可积空间$L_x^2[0,a]$的一组加权正交基，所以对任意的函数$f\in L_x^2[0,a]$ 可以展开为这些特征函数系的级数形式，具体有如下三种形式：

$$f(x)=\sum_1^\infty c_k J_\nu(\mu_k^{(\nu)}x/a),\ 0<x<a\ (\nu\geq 0) \qquad \text{(A)}$$

$$f(x)=\sum_1^\infty b_k J_\nu(\hat{\mu}_k^{(\nu)}x/a),\ 0<x<a\ (\nu>0). \qquad \text{(B)}$$

$$f(x)=b_0+\sum_1^\infty b_k J_0(\hat{\mu}_k^{(0)}x/a),\ 0<x<a\ (\nu=0). \qquad \text{(C)}$$

其中$\mu_k^{(\nu)}$是$J_\nu(x)$的第k个正零点，$\hat{\mu}_k^{(\nu)}$是导函数$J_\nu'(x)$的第k个正零点.

展开式的系数为

$$c_k = \frac{1}{N_k^2}\int_0^a xf(x)J_\nu(\mu_k^{(\nu)}x/a)\,\mathrm{d}x, \quad k=1,2,\cdots.$$

$$b_k = \frac{1}{N_k^2}\int_0^a xf(x)J_\nu(\hat{\mu}_k^{(\nu)}x/a)\,\mathrm{d}x, \quad k=1,2,\cdots.(\nu \geq 0)$$

$$b_0 = \frac{1}{N_0^2}\int_0^a xf(x)\mathrm{d}x = \frac{2}{a^2}\int_0^a xf(x)\mathrm{d}x.$$

以上(A),(B),(C)三种级数都称为函数$f(x)$的Bessel级数, 相应的展开式的系数称为Bessel系数. Bessel级数在$L_x^2[0,a]$中收敛于$f(x)$.

展开式的系数为

$$c_k = \frac{1}{N_k^2}\int_0^a xf(x)J_\nu(\mu_k^{(\nu)}x/a)\,\mathrm{d}x, \quad k=1,2,\cdots.$$

$$b_k = \frac{1}{N_k^2}\int_0^a xf(x)J_\nu(\hat{\mu}_k^{(\nu)}x/a)\,\mathrm{d}x, \quad k=1,2,\cdots.(\nu\geq 0)$$

$$b_0 = \frac{1}{N_0^2}\int_0^a xf(x)\mathrm{d}x = \frac{2}{a^2}\int_0^a xf(x)\mathrm{d}x.$$

以上(A),(B),(C)三种级数都称为函数$f(x)$的Bessel级数, 相应的展开式的系数称为Bessel系数. Bessel级数在$L_x^2[0,a]$中收敛于$f(x)$.

在做函数的Bessel级数展开时，选取哪种形式，要根据需要来确定，如

- 要求满足级数在$x=a$处取值为0,则按(A)形式展开.
- 要求满足级数在$x=a$处的导数取值为0,则按(B)或(C) 形式展开.

例3 设$\{\mu_k\}$ 是$J_0(x)$ 的所有正零点, $\{\hat{\mu}_k\}$ 是$J_0'(x)$ 的所有正零点. 将将$f(x)=1$ 在区间$[0,1]$ 上按下列要求展开为Bessel级数:

(1) 按函数系$\{J_0(\mu_k x)\}_1^\infty$; (2) 按函数系$\{J_0(\hat{\mu}_k x)\}_0^\infty$.

例3 设$\{\mu_k\}$ 是$J_0(x)$ 的所有正零点, $\{\hat{\mu}_k\}$ 是$J_0'(x)$ 的所有正零点. 将将$f(x)=1$ 在区间$[0,1]$ 上按下列要求展开为Bessel级数:

(1) 按函数系$\{J_0(\mu_k x)\}_1^\infty$; (2) 按函数系$\{J_0(\hat{\mu}_k x)\}_0^\infty$.

解 (1) 设

$$f(x)=\sum_1^\infty A_k J_0(\mu_k x),$$

则Bessel系数

$$A_k=\frac{\int_0^1 xf(x)J_0(\mu_k x)\,\mathrm{d}x}{N_k^2}=\frac{\int_0^{\mu_k} tJ_0(t)\,\mathrm{d}t}{\mu_k^2\cdot\frac{1}{2}J_1^2(\mu_k)}=\frac{2}{\mu_k\,J_1(\mu_k)}.$$

所以Bessel级数为

$$f(x)=\sum_1^\infty \frac{2}{\mu_k\,J_1(\mu_k)}J_0(\mu_k x).$$

(2) 设

$$f(x) = B_0 + \sum_{1}^{\infty} B_k J_0(\hat{\mu}_k x),$$

则系数

$$B_0 = 2\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x = 1,$$

$$B_k = \frac{\int_0^1 xf(x)J_0(\hat{\mu}_k x)\,\mathrm{d}x}{N_k^2} = \frac{\int_0^{\hat{\mu}_k} tJ_0(t)\mathrm{d}t}{\hat{\mu}_k^2 \cdot \frac{1}{2}J_0^2(\hat{\mu}_k)}$$

$$= \frac{2J_1(\hat{\mu}_k)}{\hat{\mu}_k J_0^2(\hat{\mu}_k)} = 0.$$

所以$f(x)$的Bessel级数就是其本身.

半整数阶Bessel函数

由$\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$得

$$\Gamma(k+\frac{1}{2}+1) = \frac{2k+1}{2}\cdot\frac{2k-1}{2}\cdots\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{(2k+1)!!}{2^{k+1}}\sqrt{\pi}.$$

因此，

$$\begin{aligned} J_{1/2}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+\frac{1}{2}}}{k!\Gamma(k+\frac{1}{2}+1)\cdot 2^{2k+\frac{1}{2}}} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sqrt{2}(-1)^k x^{2k+1}}{k!\cdot(2k+1)!!\cdot 2^k\cdot\sqrt{\pi x}} \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x. \end{aligned}$$

同理可得

$$J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x.$$

由基本递推公式，得

$$\begin{aligned} J_{3/2}(x) &= -\sqrt{x}\big(x^{-1/2}J_{1/2}(x)\big)' = -\sqrt{x}\Big(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin x}{x}\Big)' \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\Big(\frac{\sin x}{x} - \cos x\Big). \\ J_{-3/2}(x) &= \sqrt{x}\big(x^{-1/2}J_{-1/2}(x)\big)' = \sqrt{x}\Big(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\cos x}{x}\Big)' \\ &= -\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\Big(\frac{\cos x}{x} + \sin x\Big). \end{aligned}$$

重复使用基本递推公式，得

$$\begin{aligned} J_{n+1/2}(x) &= (-1)^n\sqrt{\frac{2}{\pi}}x^{n+1/2}\Big(\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big)^n\frac{\sin x}{x}, \\ J_{-n-1/2}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}x^{n+1/2}\Big(\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big)^n\frac{\cos x}{x}. \end{aligned}$$

由此知半整数阶的第一类贝塞尔函数都是初等函数.

Bessel函数$J_n(x)$的生成函数

恒等式

$$e^{ix\sin\theta} = \sum_{-\infty}^{\infty} J_n(x) e^{in\theta}.$$

由此恒等式得

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{ix\sin\theta}\, d\theta = 2\pi J_0(x).$$

在上述恒等式中，取$z = e^{i\theta}$得

$$e^{\frac{1}{2}x(z-\frac{1}{z})} = \sum_{-\infty}^{\infty} J_n(x) z^n.$$

称等式左端的函数为$J_n(x)$的生成函数.

Bessel 函数的应用

例1

设有一个中空的半径为 1，高为 h 的圆柱，圆柱内无电荷分布. 已知上底面的电势为常数 U ，下底面和侧面的电势为零. 求圆柱内电势分布.

Bessel 函数的应用

例1

设有一个中空的半径为 1，高为 h 的圆柱，圆柱内无电荷分布. 已知上底面的电势为常数 U ，下底面和侧面的电势为零. 求圆柱内电势分布.

Bessel 函数的应用

例1

设有一个中空的半径为 1，高为 h 的圆柱，圆柱内无电荷分布. 已知上底面的电势为常数 U ，下底面和侧面的电势为零. 求圆柱内电势分布.

解 在柱坐标系下，电势分布 $u(r,\theta,z)$ 满足Laplace方程边值问题

$$\begin{cases} \Delta u = u_{rr} + \dfrac{1}{r}u_r + \dfrac{1}{r^2}u_{\theta\theta} + u_{zz} = 0, \\ u\big|_{z=0} = 0,\ u\big|_{z=h} = U, \\ u\big|_{r=1} = 0, \end{cases}$$

Bessel 函数的应用

例1

设有一个中空的半径为 1，高为 h 的圆柱，圆柱内无电荷分布. 已知上底面的电势为常数 U ，下底面和侧面的电势为零. 求圆柱内电势分布.

解 在柱坐标系下，电势分布 $u(r,\theta,z)$ 满足Laplace方程边值问题

$$\begin{cases} \Delta u = u_{rr} + \dfrac{1}{r}u_r + \dfrac{1}{r^2}u_{\theta\theta} + u_{zz} = 0, \\ u|_{z=0} = 0,\ u|_{z=h} = U, \\ u|_{r=1} = 0, \end{cases}$$

此外 $u(0,\theta,z)$ 有界，且 u 关于 θ 以 2π 为周期函数.

设 $u(r,\theta,z)=R(r)\Phi(\theta)Z(z)$ ，代入方程并分离变量，得到一个常微分方程

$$Z''(z)-\lambda Z(z)=0,\ 0<z<h;Z(0)=0,$$

和两个特征值问题

$$\text{(I)}\ \Phi''(\theta)+\nu\Phi(\theta)=0,\ \Phi(\theta)=\Phi(\theta+2\pi);$$

$$\text{(II)}\ \begin{cases} r^2R''(r)+rR'(r)+(\lambda r^2-\nu)R=0, & 0<r<1 \\ |R(0)|<\infty, R(1)=0. \end{cases}$$

设 $u(r,\theta,z)=R(r)\Phi(\theta)Z(z)$，代入方程并分离变量，得到一个常微分方程

$$Z''(z)-\lambda Z(z)=0,\ 0<z<h; Z(0)=0,$$

和两个特征值问题

$$\text{(I)}\ \Phi''(\theta)+\nu\Phi(\theta)=0,\ \Phi(\theta)=\Phi(\theta+2\pi);$$

$$\text{(II)}\ \begin{cases} r^2R''(r)+rR'(r)+(\lambda r^2-\nu)R=0, & 0<r<1 \\ |R(0)|<\infty, R(1)=0. \end{cases}$$

特征值问题(I)的解为

$$\nu_n=n^2,\ \Phi_n(\theta)=A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta,\ n=0,1,\cdots.$$

把$\nu_n = n^2$代入特征值问题(II),得

$$\begin{cases} r^2R''(r) + rR'(r) + (\lambda r^2 - n^2)R(r) = 0, \quad 0 < r < 1, \\ |R(0)| < \infty, \quad R(1) = 0. \end{cases}$$

把$\nu_n = n^2$代入特征值问题(II),得

$$\begin{cases} r^2R''(r) + rR'(r) + (\lambda r^2 - n^2)R(r) = 0, \quad 0 < r < 1, \\ |R(0)| < \infty, \quad R(1) = 0. \end{cases}$$

此特征值问题的所有特征值和特征函数为

$$\lambda_{nk} = \left(\mu_k^{(n)}\right)^2, \quad R_{nk}(r) = J_n\left(\mu_k^{(n)} r\right), k = 1, 2, \cdots,$$

其中 $\mu_k^{(n)}$ 是 Bessel 函数 $J_n(x)$ 的第 k 个正零点.

把$\nu_n = n^2$代入特征值问题(II),得

$$\begin{cases} r^2R''(r) + rR'(r) + (\lambda r^2 - n^2)R(r) = 0, \quad 0 < r < 1, \\ |R(0)| < \infty, \quad R(1) = 0. \end{cases}$$

此特征值问题的所有特征值和特征函数为

$$\lambda_{nk} = \left(\mu_k^{(n)}\right)^2, \quad R_{nk}(r) = J_n\left(\mu_k^{(n)} r\right), k = 1, 2, \cdots,$$

其中 $\mu_k^{(n)}$ 是 Bessel 函数 $J_n(x)$ 的第 k 个正零点.

将$\lambda_{nk} = \left(\mu_k^{(n)}\right)^2$ 代入 $Z(z)$ 所满足的方程，得

$$Z''_{nk}(z) - \lambda_{nk}Z_{nk}(z) = 0, \ 0 < z < h; Z_{nk}(0) = 0,$$

其解为

$$Z_{nk}(z) = D_{nk}\sinh(\mu_k^{(n)} z).$$

于是得到形式解

$$u(r,\theta,z)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}(A_{nk}\cos n\theta+B_{nk}\sin n\theta)\sinh(\mu_k^{(n)}z)J_n(\mu_k^{(n)}r).$$

由边界条件 $u|_{z=h}=U$ ，得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\sinh(\mu_k^{(n)}h)(A_{nk}\cos n\theta+B_{nk}\sin n\theta)J_n(\mu_k^{(n)}r)=U.$$

于是得到形式解

$$u(r,\theta,z)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}(A_{nk}\cos n\theta+B_{nk}\sin n\theta)\sinh(\mu_k^{(n)}z)J_n(\mu_k^{(n)}r).$$

由边界条件 $u|_{z=h}=U$ ，得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\sinh(\mu_k^{(n)}h)(A_{nk}\cos n\theta+B_{nk}\sin n\theta)J_n(\mu_k^{(n)}r)=U.$$

于是$A_{nk}=B_{nk}=0,\ n\neq 0,$ 并且A_{0k}满足

$$\sum_{k=1}^{\infty}A_{0k}\sinh(\mu_k^{(0)}h)J_0(\mu_k^{(0)}r)=U.$$

故

$$A_{0k}=\frac{\int_0^1 UrJ_0(\mu_k^{(0)}r)\mathrm{d}r}{\sinh(\mu_k^{(0)}h)N_k^2},\quad k=1,2,\cdots.$$

其中$N_k^2 = \frac{1}{2}J_1^2(\mu_k^{(0)})$,

$$\int_0^1 rJ_0(\mu_k^{(0)}r)\mathrm{d}r = \frac{1}{[\mu_k^{(0)}]^2}\int_0^{\mu_k^{(0)}} tJ_0(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{\mu_k^{(0)}}J_1(\mu_k^{(0)}),$$

其中$N_k^2 = \frac{1}{2} J_1^2(\mu_k^{(0)})$,

$$\int_0^1 r J_0(\mu_k^{(0)} r)\mathrm{d}r = \frac{1}{[\mu_k^{(0)}]^2} \int_0^{\mu_k^{(0)}} t J_0(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{\mu_k^{(0)}} J_1(\mu_k^{(0)}),$$

所以

$$A_{0k} = \frac{2U}{\mu_k^{(0)} \sinh(\mu_k^{(0)} h) J_1(\mu_k^{(0)})},$$

其中$N_k^2=\frac{1}{2}J_1^2(\mu_k^{(0)})$,

$$\int_0^1 rJ_0(\mu_k^{(0)}r)\mathrm{d}r = \frac{1}{[\mu_k^{(0)}]^2}\int_0^{\mu_k^{(0)}} tJ_0(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{\mu_k^{(0)}}J_1(\mu_k^{(0)}),$$

所以

$$A_{0k}=\frac{2U}{\mu_k^{(0)}\sinh(\mu_k^{(0)}h)J_1(\mu_k^{(0)})},$$

$$u(r,\theta,z)=2U\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sinh(\mu_k^{(0)}z)}{\mu_k^{(0)}\sinh(\mu_k^{(0)}h)J_1(\mu_k^{(0)})}J_0(\mu_k^{(0)}r).$$

简化求解方法

解法II 在柱坐标系下，电势分布 $u(r,\theta,z)$ 满足Laplace方程边值问题

$$\begin{cases} \Delta u = u_{rr} + \dfrac{1}{r}u_r + \dfrac{1}{r^2}u_{\theta\theta} + u_{zz} = 0, \\ u\big|_{z=0} = 0,\ u\big|_{z=h} = U, \\ u\big|_{r=1} = 0, \end{cases}$$

简化求解方法

解法II 在柱坐标系下，电势分布 $u(r,\theta,z)$ 满足Laplace方程边值问题

$$
\begin{cases}
\Delta u = u_{rr} + \dfrac{1}{r}u_r + \dfrac{1}{r^2}u_{\theta\theta} + u_{zz} = 0, \\
u\big|_{z=0} = 0,\ u\big|_{z=h} = U, \\
u\big|_{r=1} = 0,
\end{cases}
$$

此外 $u(0,\theta,z)$ 有界，且 u 关于 θ 以 2π 为周期函数.

因为定解条件与θ无关，所以解也与θ无关，把解记为$u(r,z)$, 于是问题化简为

$$\begin{cases} \Delta u = u_{rr} + \dfrac{1}{r}u_r + u_{zz} = 0, \\ u|_{z=0} = 0,\ u|_{z=h} = U, \\ u|_{r=1} = 0, \end{cases}$$

其中$u(0,z)$ 有界.

因为定解条件与θ无关，所以解也与θ无关，把解记为$u(r,z)$, 于是问题化简为

$$\begin{cases} \Delta u = u_{rr} + \dfrac{1}{r}u_r + u_{zz} = 0, \\ u|_{z=0} = 0,\ u|_{z=h} = U, \\ u|_{r=1} = 0, \end{cases}$$

其中$u(0,z)$ 有界.

设 $u(r,z) = R(r)Z(z)$, 代入方程并分离变量，得到一个常微分方程

$$Z''(z) - \lambda Z(z) = 0,\ 0 < z < h;\ \ Z(0) = 0$$

和特征值问题

$$r^2R''(r) + rR'(r) + \lambda r^2 R = 0,\ |R(0)| < \infty, R(1) = 0.$$

此特征值问题的所有特征值和特征函数为

$$\lambda_k = \left(\mu_k^{(0)}\right)^2, \quad R_k(r) = J_0\left(\mu_k^{(0)} r\right), k = 1, 2, \cdots,$$

其中$\mu_k^{(0)}$ 是 Bessel 函数 $J_0(x)$ 的第 k 个正零点.

此特征值问题的所有特征值和特征函数为

$$\lambda_k = \left(\mu_k^{(0)}\right)^2, \quad R_k(r) = J_0\left(\mu_k^{(0)} r\right), k = 1, 2, \cdots,$$

其中$\mu_k^{(0)}$ 是 Bessel 函数 $J_0(x)$ 的第 k 个正零点.
将$\lambda_k = \left(\mu_k^{(0)}\right)^2$ 代入 $Z(z)$ 所满足的方程，得

$$Z_k'' - \left(\mu_k^{(0)}\right)^2 Z_k = 0, \; Z_k(0) = 0,$$

求得解

$$Z_k(z) = A_k \sinh(\mu_k^{(0)} z).$$

此特征值问题的所有特征值和特征函数为

$$\lambda_k = \left(\mu_k^{(0)}\right)^2, \quad R_k(r) = J_0\left(\mu_k^{(0)} r\right), k = 1, 2, \cdots,$$

其中$\mu_k^{(0)}$ 是 Bessel 函数 $J_0(x)$ 的第 k 个正零点.
将$\lambda_k = \left(\mu_k^{(0)}\right)^2$ 代入 $Z(z)$ 所满足的方程，得

$$Z_k'' - \left(\mu_k^{(0)}\right)^2 Z_k = 0, \ Z_k(0) = 0,$$

求得解

$$Z_k(z) = A_k \sinh(\mu_k^{(0)} z).$$

于是得到形式解

$$u(r, z) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sinh(\mu_k^{(0)} z) J_0(\mu_k^{(0)} r).$$

由边界条件 $u|_{z=h} = U$ ，得

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k \sinh(\mu_k^{(0)} h) J_0(\mu_k^{(0)} r) = U.$$

由边界条件 $u|_{z=h} = U$ ，得

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k \sinh(\mu_k^{(0)} h) J_0(\mu_k^{(0)} r) = U.$$

于是

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{\int_0^1 U r J_0(\mu_k^{(0)} r)\mathrm{d}r}{\sinh(\mu_k^{(0)} h) N_k^2} \\ &= \frac{2U}{\sinh(\mu_k^{(0)} h) J_1^2(\mu_k^{(0)})} \int_0^1 r J_0(\mu_k^{(0)} r)\mathrm{d}r \\ &= \frac{2U}{\mu_k^{(0)} \sinh(\mu_k^{(0)} h) J_1(\mu_k^{(0)})}. \end{aligned}$$

所以解

$$u(r,z) = 2U \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sinh(\mu_k^{(0)} z)}{\mu_k^{(0)} \sinh(\mu_k^{(0)} h) J_1(\mu_k^{(0)})} J_0(\mu_k^{(0)} r).$$

例2

设$D: \ x^2+y^2<a^2$，求解如下波动方程初边值问题

$$\begin{cases} u_{tt}=c^2(u_{xx}+u_{yy}), & (x,y)\in D, \ t>0, \\ u(x,y,t)=0, & (x,y)\in \partial D, \ t\geq 0, \\ u(x,y,0)=1-\dfrac{x^2+y^2}{a^2}, \quad u_t(x,y,0)=0, & (x,y)\in D. \end{cases}$$

例2

设$D: \ x^2+y^2<a^2$，求解如下波动方程初边值问题

$$\begin{cases} u_{tt}=c^2(u_{xx}+u_{yy}), & (x,y)\in D,\ t>0, \\ u(x,y,t)=0, & (x,y)\in\partial D,\ t\geq 0, \\ u(x,y,0)=1-\dfrac{x^2+y^2}{a^2},\quad u_t(x,y,0)=0, & (x,y)\in D. \end{cases}$$

例2

设$D: \ x^2+y^2<a^2$，求解如下波动方程初边值问题

$$\begin{cases} u_{tt}=c^2(u_{xx}+u_{yy}), & (x,y)\in D, \ t>0, \\ u(x,y,t)=0, & (x,y)\in \partial D, \ t\geq 0, \\ u(x,y,0)=1-\dfrac{x^2+y^2}{a^2}, \quad u_t(x,y,0)=0, & (x,y)\in D. \end{cases}$$

解 将问题化为极坐标形式，任然记解为$u(r,\theta,t)$, 得

$$\begin{cases} u_{tt}=c^2(u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}), & 0<r<a, 0\leq\theta<2\pi, t>0, \\ u(a,\theta,t)=0, & 0\leq\theta<2\pi, \ t\geq 0, \\ u(r,\theta,0)=1-\dfrac{r^2}{a^2}, \quad u_t(r,\theta,0)=0, & 0\leq r\leq a, 0\leq\theta<2\pi, \end{cases}$$

其中$u(0,\theta,t)$有界，且$u(r,\theta,t)$关于θ以2π为周期.

因为初始条件与θ无关，所以解也与θ无关，把解简写为$u(r,t)$. 令$u(r,t)=R(r)T(t)$，代入方程并分离变量，得

$$T''(t)+c^2\lambda T(t)=0,\ T'(0)=0$$

和特征值问题

$$\begin{cases} r^2R''+rR'+\lambda r^2R=0, & 0<r<a, \\ |R(0)|<\infty, \quad R(a)=0. \end{cases}$$

因为初始条件与θ无关，所以解也与θ无关，把解简写为$u(r,t)$. 令$u(r,t)=R(r)T(t)$，代入方程并分离变量，得

$$T''(t)+c^2\lambda T(t)=0,\ T'(0)=0$$

和特征值问题

$$\begin{cases} r^2R''+rR'+\lambda r^2R=0, \quad 0<r<a, \\ |R(0)|<\infty, \quad R(a)=0. \end{cases}$$

此特征值问题的特征值和对应的特征函数为

$$\lambda_k=(\frac{\mu_k}{a})^2,\quad R_k(r)=J_0(\frac{\mu_k}{a}r), \qquad k=1,2,\cdots,$$

其中μ_k是$J_0(x)$的第k个正零点.

因为初始条件与θ无关，所以解也与θ无关，把解简写为$u(r,t)$. 令$u(r,t)=R(r)T(t)$，代入方程并分离变量，得

$$T''(t)+c^2\lambda T(t)=0,\ T'(0)=0$$

和特征值问题

$$\begin{cases} r^2R''+rR'+\lambda r^2R=0, & 0<r<a, \\ |R(0)|<\infty, & R(a)=0. \end{cases}$$

此特征值问题的特征值和对应的特征函数为

$$\lambda_k=(\frac{\mu_k}{a})^2,\quad R_k(r)=J_0(\frac{\mu_k}{a}r),\qquad k=1,2,\cdots,$$

其中μ_k是$J_0(x)$的第k个正零点. 把$\lambda=\lambda_k$代入t的方程,得

$$T_k''(t)+c^2\lambda_kT_k(t)=0,\quad T_k'(0)=0,$$

解得

$$T_k(t)=\cos\frac{\mu_k ct}{a}.$$

于是形式解为

$$u(r,t)=\sum_{1}^{\infty}A_k\cos\frac{\mu_k ct}{a}J_0(\frac{\mu_k}{a}r).$$

代入初值得

$$\sum_{1}^{\infty}A_kJ_0(\frac{\mu_k}{a}r)=1-\frac{r^2}{a^2},\ \ 0\le r\le a.$$

于是形式解为

$$u(r,t)=\sum_{1}^{\infty}A_k\cos\frac{\mu_k ct}{a}J_0(\frac{\mu_k}{a}r).$$

代入初值得

$$\sum_{1}^{\infty}A_kJ_0(\frac{\mu_k}{a}r)=1-\frac{r^2}{a^2},\ \ 0\le r\le a.$$

故系数

$$\begin{aligned}A_k &= \frac{\int_0^a r(1-r^2/a^2)J_0(\frac{\mu_k}{a}r)\,\mathrm{d}r}{N_k^2}\\ &= \frac{2}{\mu_k^2\ J_1^2(\mu_k)}\int_0^{\mu_k}(1-t^2/\mu_k^2)tJ_0(t)\mathrm{d}t=\frac{4J_2(\mu_k)}{\mu_k^2J_1^2(\mu_k)}.\end{aligned}$$

于是得到解

$$u(r,t)=4\sum_{1}^{\infty}\frac{J_2(\mu_k)}{\mu_k^2J_1^2(\mu_k)}\cos\frac{\mu_k ct}{a}J_0(\frac{\mu_k}{a}r).$$

例3

设有半径为 1 的薄圆盘，内部无热源. 已知圆盘边缘的温度为零，初始时刻圆盘内温度分布为 $1-r^2$ ，其中 r是圆盘上的点到圆心的距离. 求圆盘内温度分布规律.

例3

设有半径为 1 的薄圆盘，内部无热源. 已知圆盘边缘的温度为零，初始时刻圆盘内温度分布为 $1-r^2$ ，其中 r是圆盘上的点到圆心的距离. 求圆盘内温度分布规律.

例3

设有半径为 1 的薄圆盘，内部无热源. 已知圆盘边缘的温度为零，初始时刻圆盘内温度分布为 $1-r^2$ ，其中 r是圆盘上的点到圆心的距离. 求圆盘内温度分布规律.

解 用极坐标表示解u ，因为初始条件与θ无关，所以解与θ无关，故u是r,t 的函数，且 u满足初边值问题

$$\begin{cases} u_t = k(u_{rr} + \frac{1}{r}u_r), & 0 < r < 1, t > 0 \\ |u(0,t)| < \infty, \quad u|_{r=1} = 0, & t \geq 0, \\ u|_{t=0} = 1 - r^2, & 0 \leq r \leq 1. \end{cases}$$

令 $u(r,t) = R(r)T(t)$ ，代入上述方程，得

$$\begin{cases} r^2R''(r) + rR'(r) + \lambda r^2 R(r) = 0, \quad 0 < r < 1, \\ |R(0)| < \infty, \quad R(1) = 0, \end{cases}$$

$$T'(t) + k\lambda T(t) = 0.$$

令 $u(r,t)=R(r)T(t)$，代入上述方程，得

$$\begin{cases} r^2R''(r)+rR'(r)+\lambda r^2R(r)=0, & 0<r<1, \\ |R(0)|<\infty, & R(1)=0, \end{cases}$$

$$T'(t)+k\lambda T(t)=0.$$

先求解特征值问题，得所有特征值及其相应的特征函数为

$$\lambda_n=(\mu_n)^2, \quad R_n(r)=J_0(\mu_n r), n=1,2,\cdots,$$

令 $u(r,t)=R(r)T(t)$，代入上述方程，得

$$\begin{cases} r^2R''(r)+rR'(r)+\lambda r^2R(r)=0, \quad 0<r<1, \\ |R(0)|<\infty, \quad R(1)=0, \end{cases}$$

$$T'(t)+k\lambda T(t)=0.$$

先求解特征值问题，得所有特征值及其相应的特征函数为

$$\lambda_n=(\mu_n)^2, \quad R_n(r)=J_0(\mu_n r), n=1,2,\cdots,$$

其中μ_n是$J_0(x)$的第n个正零点. 再将 $\lambda=\lambda_n$ 代入 $T(t)$ 的方程，求得

$$T_n(t)=c_n\mathrm{e}^{-\mu_n^2 kt}.$$

因此，问题的解为

$$u(r,t)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\mathrm{e}^{-\mu_n^2 kt}J_0(\mu_n r).$$

因此，问题的解为

$$u(r,t)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\mathrm{e}^{-\mu_n^2kt}J_0(\mu_n r).$$

由初始条件知 c_n 满足

$$\sum_{n=1}^{\infty}c_nJ_0(\mu_n r)=1-r^2,\ 0\le r\le 1.$$

则系数

$$c_n=\frac{\displaystyle\int_0^1(1-r^2)rJ_0(\mu_n r)\mathrm{d}r}{N_n^2},\quad N_n^2=\frac{1}{2}J_1^2(\mu_n^{(0)}).$$

因为

$$\begin{aligned}\int_0^1 (1-r^2) r J_0(\mu_n r) \mathrm{d}r &= \frac{1}{\mu_n^2}\int_0^{\mu_n}(1-\frac{t^2}{\mu_n^2}) t J_0(t) \mathrm{d}t \\ &= \frac{2J_2(\mu_n)}{(\mu_n)^2}.\end{aligned}$$

因为

$$\begin{aligned}\int_0^1 (1-r^2) r J_0(\mu_n r)\mathrm{d}r &= \frac{1}{\mu_n^2}\int_0^{\mu_n}\left(1-\frac{t^2}{\mu_n^2}\right) t J_0(t)\mathrm{d}t \\ &= \frac{2J_2(\mu_n)}{(\mu_n)^2}.\end{aligned}$$

所以

$$c_n = \frac{\displaystyle\int_0^1 (1-r^2) r J_0(\mu_n r)\mathrm{d}r}{N_n^2} = \frac{4J_2(\mu_n)}{\mu_n^2 J_1^2(\mu_n)}.$$

故，圆盘内的温度分布为

$$u(r,t) = 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_2(\mu_n)}{\mu_n^2 J_1^2(\mu_n)}\mathrm{e}^{-\mu_n^2 kt} J_0(\mu_n r).$$

例4

设区域$D=\{(r,\theta,z)|\ 0\le r<a, 0\le\theta<2\pi, 0<z<l\}$, 求解$D$上的Laplace 方程边值问题

$$\begin{cases} u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}+u_{zz}=0, & (r,\theta,z)\in D, r\neq 0, \\ u(r,\theta,0)=0, \quad u(r,\theta,l)=g(r)\sin\theta, & 0\le r\le a, 0\le\theta<2\pi, \\ |u(0,\theta,z)|<\infty, \ u(a,\theta,z)=0, & 0\le\theta<2\pi, 0\le z\le l. \end{cases}$$

例4

设区域$D=\{(r,\theta,z)|\ 0\le r<a, 0\le\theta<2\pi, 0<z<l\}$, 求解$D$上的Laplace 方程边值问题

$$\begin{cases} u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}+u_{zz}=0, & (r,\theta,z)\in D, r\neq 0, \\ u(r,\theta,0)=0, \quad u(r,\theta,l)=g(r)\sin\theta, & 0\le r\le a, 0\le\theta<2\pi, \\ |u(0,\theta,z)|<\infty, \ u(a,\theta,z)=0, & 0\le\theta<2\pi, 0\le z\le l. \end{cases}$$

例4

设区域$D=\{(r,\theta,z)|\ 0\le r<a, 0\le\theta<2\pi, 0<z<l\}$，求解$D$上的Laplace 方程边值问题

$$\begin{cases} u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}+u_{zz}=0, & (r,\theta,z)\in D, r\neq 0,\\ u(r,\theta,0)=0,\quad u(r,\theta,l)=g(r)\sin\theta, & 0\le r\le a, 0\le\theta<2\pi,\\ |u(0,\theta,z)|<\infty,\ u(a,\theta,z)=0, & 0\le\theta<2\pi, 0\le z\le l. \end{cases}$$

解 令$u(r,\theta,z)=R(r)\Theta(\theta)Z(z)$，代入方程并分离变量，得

$$\frac{r^2R''(r)+rR'(r)}{R(r)}+\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)}+r^2\frac{Z''(z)}{Z(z)}=0,$$

令

$$\frac{Z''(z)}{Z(z)}=\lambda,\ \frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)}=-\gamma,$$

结合边界条件得一个常微分方程

$$Z''-\lambda Z=0,\ Z(0)=0$$

两个特征值问题

$$\text{(I)}\quad \Theta''(\theta)+\gamma\,\Theta(\theta)=0,\Theta(\theta)=\Theta(2\pi+\theta),$$

$$\text{(II)}\quad \begin{cases} r^2R''+rR'+(\lambda r^2-\gamma)R=0, & 0<r<a, \\ |R(0)|<\infty,\ R(a)=0. \end{cases}$$

解第一个特征值问题(I),得

$$\gamma_n=n^2,\quad \Theta_n(\theta)=A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta,\quad n=0,1,\cdots.$$

将$\gamma = \gamma_n$代入特征值问题(II),得

$$\begin{cases} r^2R''(r) + rR'(r) + (\lambda r^2 - n^2)R(r) = 0, & 0 < r < a, \\ |R(0)| < \infty, \quad R(a) = 0. \end{cases}$$

求出此特征值问题的特征值和对应的特征函数

$$\lambda_{kn} = \left(\frac{\mu_k^{(n)}}{a}\right)^2, \quad R_{kn}(r) = J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{a}r\right), \quad k = 1, 2, \cdots .$$

将$\gamma = \gamma_n$代入特征值问题(II),得

$$\begin{cases} r^2R''(r) + rR'(r) + (\lambda r^2 - n^2)R(r) = 0, \quad 0 < r < a, \\ |R(0)| < \infty, \quad R(a) = 0. \end{cases}$$

求出此特征值问题的特征值和对应的特征函数

$$\lambda_{kn} = \left(\frac{\mu_k^{(n)}}{a}\right)^2, \quad R_{kn}(r) = J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{a} r\right), \quad k = 1, 2, \cdots.$$

将$\lambda = \lambda_{kn}$代入z的方程得

$$Z''_{kn}(z) - \lambda_{kn} Z_{kn}(z) = 0, \quad Z_{kn}(0) = 0 \Longrightarrow Z_{kn}(z) = D_{kn} \sinh \frac{\mu_k^{(n)} z}{a}$$

将$\gamma=\gamma_n$代入特征值问题(II),得

$$\begin{cases} r^2R''(r)+rR'(r)+(\lambda r^2-n^2)R(r)=0, \quad 0<r<a, \\ |R(0)|<\infty, \quad R(a)=0. \end{cases}$$

求出此特征值问题的特征值和对应的特征函数

$$\lambda_{kn}=\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{a}\right)^2, \quad R_{kn}(r)=J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{a}r\right), \quad k=1,2,\cdots.$$

将$\lambda=\lambda_{kn}$代入z的方程得

$$Z_{kn}''(z)-\lambda_{kn}Z_{kn}(z)=0, \quad Z_{kn}(0)=0 \implies Z_{kn}(z)=D_{kn}\sinh\frac{\mu_k^{(n)}z}{a}$$

于是得到一般解

$$u(r,\theta,z)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}(A_{kn}\cos n\theta+B_{kn}\sin n\theta)J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{a}r\right)\sinh\frac{\mu_k^{(n)}z}{a}.$$

由边界条件(即令$z=l$)，得

$$g(r)\sin\theta=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\sinh\frac{\mu_k^{(n)}l}{a}(A_{kn}\cos n\theta+B_{kn}\sin n\theta)J_n(\frac{\mu_k^{(n)}}{a}r),$$

比较此等式两边函数系$\{\cos n\theta,\sin n\theta\}$对应项系数，得

$$A_{kn}=0,\ \forall n,k;\qquad B_{kn}=0,\quad n\neq 1,$$

$$g(r)=\sum_{k=1}^{\infty}\sinh\frac{\mu_k^{(1)}l}{a}B_{k1}\,J_1(\frac{\mu_k^{(1)}}{a}r),$$

由边界条件(即令$z=l$)，得

$$g(r)\sin\theta=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\sinh\frac{\mu_k^{(n)}l}{a}(A_{kn}\cos n\theta+B_{kn}\sin n\theta)J_n(\frac{\mu_k^{(n)}}{a}r),$$

比较此等式两边函数系$\{\cos n\theta,\sin n\theta\}$对应项系数，得

$$A_{kn}=0,\ \forall n,k;\qquad B_{kn}=0,\quad n\neq 1,$$

$$g(r)=\sum_{k=1}^{\infty}\sinh\frac{\mu_k^{(1)}l}{a}B_{k1}\,J_1(\frac{\mu_k^{(1)}}{a}r),$$

其中

$$B_{k1}=\frac{\int_0^a rg(r)J_1(\frac{\mu_k^{(1)}}{a}r)\,\mathrm{d}r}{\sinh\frac{\mu_k^{(1)}l}{a}\cdot N_k^2}=\frac{2\int_0^a rg(r)J_1(\frac{\mu_k^{(1)}}{a}r)\,\mathrm{d}r}{a^2\sinh\frac{\mu_k^{(1)}l}{a}\cdot J_2^2(\mu_k^{(1)})},\quad k=1,2,\cdots.$$

最后，求得解

$$u(r,\theta,z)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2\int_0^a rg(r)J_1(\frac{\mu_k^{(1)}}{a}r)\,\mathrm{d}r}{a^2\sinh\frac{\mu_k^{(1)}l}{a}\cdot J_2^2(\mu_k^{(1)})}\right)\sin\theta\,J_1(\frac{\mu_k^{(1)}}{a}r)\sinh\frac{\mu_k^{(1)}z}{a}.$$

解法II(简化方法)

令$u(r,\theta,z)=R(r)\Theta(\theta)Z(z)$，代入方程并分离变量，并结合边界条件得一个常微分方程

$$Z''(z)-\lambda Z(z)=0,\ \ Z(0)=0$$

两个特征值问题

$$\text{(I)}\quad \Theta''(\theta)+\gamma\ \Theta(\theta)=0, \Theta(\theta)=\Theta(2\pi+\theta),$$

$$\text{(II)}\quad \begin{cases} r^2R''+rR'+(\lambda r^2-\gamma)R=0, & 0<r<a,\\ |R(0)|<\infty,\ \ R(a)=0. \end{cases}$$

解第一个特征值问题(I),得

$$\gamma_n=n^2,\quad \Theta_n(\theta)=A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta,\quad n=0,1,\cdots.$$

由于边界条件$u|_{z=l} = g(r)\sin\theta$ 在特征函数$\sin\theta$ 所在的特征子空间中，所以解也在此特征子空间中，故取

$$n = 1, \gamma_1 = 1,\ \Theta_1(\theta) = \sin\theta.$$

将$\gamma_1 = 1$代入特征值问题(II),得

$$\begin{cases} r^2R''(r) + rR'(r) + (\lambda r^2 - 1)R(r) = 0, & 0 < r < a, \\ |R(0)| < \infty, \quad R(a) = 0. \end{cases}$$

求出此特征值问题的特征值和对应的特征函数

$$\lambda_k = \left(\frac{\mu_k^{(1)}}{a}\right)^2, \quad R_k(r) = J_1\left(\frac{\mu_k^{(1)}}{a}r\right), \quad k = 1, 2, \cdots.$$

由于边界条件$u|_{z=l} = g(r)\sin\theta$ 在特征函数$\sin\theta$ 所在的特征子空间中，所以解也在此特征子空间中，故取

$$n = 1, \gamma_1 = 1,\ \Theta_1(\theta) = \sin\theta.$$

将$\gamma_1 = 1$代入特征值问题(II),得

$$\begin{cases} r^2R''(r) + rR'(r) + (\lambda r^2 - 1)R(r) = 0, & 0 < r < a, \\ |R(0)| < \infty, \quad R(a) = 0. \end{cases}$$

求出此特征值问题的特征值和对应的特征函数

$$\lambda_k = \left(\frac{\mu_k^{(1)}}{a}\right)^2, \quad R_k(r) = J_1\left(\frac{\mu_k^{(1)}}{a} r\right), \quad k = 1, 2, \cdots.$$

将$\lambda = \lambda_k$代入z的方程得

$$Z_k''(z) - \lambda_k Z_k(z) = 0, \quad Z_k(0) = 0 \quad \Longrightarrow \quad Z_k(z) = \sinh\frac{\mu_k^{(1)} z}{a}.$$

于是得到一般解

$$u(r,\theta,z)=\sum_{k=1}^{\infty}B_kJ_1(\frac{\mu_k^{(1)}}{a}r)\sinh\frac{\mu_k^{(1)}z}{a}\sin\theta.$$

由边界条件(即令$z=l$)，得

$$g(r)\sin\theta=\sum_{k=1}^{\infty}B_k\sinh\frac{\mu_k^{(1)}l}{a}J_1(\frac{\mu_k^{(1)}}{a}r)\sin\theta,$$

于是得到一般解

$$u(r,\theta,z)=\sum_{k=1}^{\infty}B_kJ_1(\frac{\mu_k^{(1)}}{a}r)\sinh\frac{\mu_k^{(1)}z}{a}\sin\theta.$$

由边界条件(即令$z=l$)，得

$$g(r)\sin\theta=\sum_{k=1}^{\infty}B_k\sinh\frac{\mu_k^{(1)}l}{a}J_1(\frac{\mu_k^{(1)}}{a}r)\sin\theta,$$

其中

$$B_k=\frac{\int_0^a rg(r)J_1(\frac{\mu_k^{(1)}}{a}r)\,\mathrm{d}r}{\sinh\frac{\mu_k^{(1)}l}{a}\cdot N_k^2}=\frac{2\int_0^a rg(r)J_1(\frac{\mu_k^{(1)}}{a}r)\,\mathrm{d}r}{a^2\sinh\frac{\mu_k^{(1)}l}{a}\cdot J_2^2(\mu_k^{(1)})},\quad k=1,2,\cdots.$$

因此解

$$u(r,\theta,z)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2\int_0^a rg(r)J_1(\frac{\mu_k^{(1)}}{a}r)\,\mathrm{d}r}{a^2\sinh\frac{\mu_k^{(1)}l}{a}\cdot J_2^2(\mu_k^{(1)})}\right)J_1(\frac{\mu_k^{(1)}}{a}r)\sinh\frac{\mu_k^{(1)}z}{a}\sin\theta.$$

勒让德函数的定义及性质

勒让德函数就是勒让德多项式，其定义为

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n.$$

此公式称为Rodrigues 公式. 前几个 Legendre 多项式如下

$$P_0(x)=1,\quad P_1(x)=x,\quad P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1),$$

$$P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x),\quad P_4(x)=\frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3).$$

$P_n(x)$是一个n次多项式，其中x^n的系数为$\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}$，即

$$P_n(x) = \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}x^n + Q_{n-1}(x).$$

勒让德函数的定义及性质

勒让德函数就是勒让德多项式，其定义为

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n.$$

此公式称为Rodrigues 公式. 前几个 Legendre 多项式如下

$$P_0(x)=1,\quad P_1(x)=x,\quad P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1),$$

$$P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x),\quad P_4(x)=\frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3).$$

$P_n(x)$是一个n次多项式，其中x^n的系数为$\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}$，即

$$P_n(x)=\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}x^n+Q_{n-1}(x).$$

1. 奇偶性 $P_n(-x)=(-1)^n P_n(x)$.

Legendre 多项式的性质

2. 特殊点处的函数值

$$P_n(1) = 1, \quad P_n(-1) = (-1)^n,$$
$$P_{2n-1}(0) = 0, \quad P_{2n}(0) = (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}.$$

3. Legendre 多项式的正交性与模值

定理1 $\{P_n(x)\}$ 在$L^2[-1,1]$上正交，且

$$\int_{-1}^{1} P_n^2(x)\mathrm{d}x = \|P_n\|^2 = \frac{2}{2n+1}.$$

因此$P_0(x), P_1(x), \cdots, P_n(x)$线性无关，任意一个$n$次多项式$g(x)$都可以由这$n+1$个Legendre多项式线性表示.

例1 求常数$a_0, a_1, \cdots, a_4$ 使得下列等式成立

$$x^4 = a_0P_0(x) + a_1P_1(x) + a_2P_2(x) + a_3P_3(x) + a_4P_4(x).$$

解 对$i = 0, 1, \cdots, 4$, 由正交性得

$$a_i = \frac{1}{\|P_i\|^2}\int_{-1}^{1} x^4P_i(x)\mathrm{d}x = \frac{2i+1}{2}\int_{-1}^{1} x^4P_i(x)\mathrm{d}x.$$

因此$a_0 = \frac{1}{5}, a_1 = a_3 = 0,$

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{5}{2}\int_0^1 (3x^6 - x^4)\mathrm{d}x = \frac{4}{7}, \\ a_4 &= \frac{9}{2}\int_{-1}^{1}\Big(\frac{2^4(4!)^2}{8!}P_4(x) + Q_3(x)\Big)P_4(x)\mathrm{d}x \\ &= \frac{9}{2}\cdot\Big(\frac{2^4(4!)^2}{8!}\|P_4\|^2\Big) = \frac{8}{35}. \end{aligned}$$

或者比较等式两边x^4的系数,得

$1 = a_4\cdot\frac{8!}{2^4(4!)^2} \Longrightarrow a_4 = 8/35.$

Legendre 多项式的性质

4. Legendre 多项式的级数展开式

称如下常微分方程

$$[(1-x^2)y']' + n(n+1)y = (1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$$

为n阶Legendre方程.

定理2

n次Legendre 多项式$P_n(x)$ 满足n阶Legendre方程，即

$$[(1-x^2)P_n'(x)]' + n(n+1)P_n(x) = 0.$$

定理3

Legendre 多项式序列$\{P_n(x)\}$ 构成$L^2[-1,1]$ 的一组正交基.

考虑特征值问题

$$\begin{cases} [(1-x^2)y']' + \lambda y = 0, \quad -1 < x < 1, \\ |y(\pm 1)| < \infty. \end{cases}$$

由自共轭算子的特征值理论及定理2和定理3知，此特征值问题的全部特征值及对应的特征函数为

$$\lambda_n = n(n+1), \quad y_n(x) = P_n(x), \ n = 0, 1, \cdots .$$

由$L^2[-1,1]$理论，对任意$f \in L^2[-1,1]$, 函数f都展开成广义Fourier级数

$$f(x) = \sum_0^{\infty} C_n P_n(x),$$

此级数也称为$f(x)$的Legendre 级数，其中系数

$$C_n = \frac{(f, P_n)}{\|P_n\|^2} = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)\mathrm{d}x, \ n = 0, 1, \cdots .$$

Legendre 多项式的性质

5. 生成函数与递推公式

定理4

$$\sum_{0}^{\infty} P_n(x) z^n = (1 - 2xz + z^2)^{-1/2}, \ -1 \le x \le 1, |z| < 1.$$

记$F(x,z) = (1 - 2xz + z^2)^{-1/2}$, 称$F(x,z)$为$P_n(x)$的生成函数. 因为

$$(1 - 2xz + z^2) F_z = (x - z) F,$$

将$F = \sum_{0}^{\infty} P_n(x) z^n$代入上式,比较$z^n$的系数,得如下递推公式

$$(n+1) P_{n+1}(x) - (2n+1) x P_n(x) + n P_{n-1}(x) = 0.$$

连带勒让德方程及连带勒让德函数

下列方程

$$[(1-x^2)y']' + (\gamma - \frac{m^2}{1-x^2})y = 0$$

称为n阶连带m次Legendre方程，其中$\gamma = n(n+1), n \geq m, m, n$是非负整数. 此方程的解称为$n$阶连带$m$次Legendre函数，记为$P_n^m(x)$.

如果$v(x)$ 是n 阶Legendre方程的一个解, 则 $y(x) = (1-x^2)^{m/2}v^{(m)}(x)$ 就是n阶连带m次Legendre方程的一个解，因此

$$P_n^m(x) = (1-x^2)^{m/2}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}P_n(x) = \frac{(1-x^2)^{m/2}}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^{n+m}}{\mathrm{d}x^{n+m}}(1-x^2)^n.$$

由此得

$$P_n^m(1) = P_n^m(-1) = 0 \quad m > 0.$$

连带勒让德方程及连带勒让德函数

$n=0,1,2,3$时的连带勒让德函数：

$$
\begin{aligned}
n=0:\ & P_0^0(x)=P_0(x)=1,\\
n=1:\ & P_1^0(x)=P_1(x)=x,\ P_1^1(x)=\sqrt{1-x^2},\\
n=2:\ & P_2^0(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1),\ P_2^1(x)=3x\sqrt{1-x^2},\\
& P_2^2(x)=3(1-x^2),\\
n=3:\ & P_3^0(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x),\ P_3^1(x)=\frac{3}{2}(5x^2-1)\sqrt{1-x^2},\\
& P_3^2(x)=15x(1-x^2),\ P_3^3(x)=15\sqrt{(1-x^2)^3}.
\end{aligned}
$$

连带勒让德方程及连带勒让德函数

考虑连带Legendre 方程的特征值问题

$$\begin{cases} [(1-x^2)y']' + \left(\gamma - \dfrac{m^2}{1-x^2}\right) y = 0, \quad -1 < x < 1, \\ |y(\pm 1)| < \infty, \end{cases}$$

由Legendre 方程和连带Legendre 方程解的对应关系，上述特征值问题的解为

$$\gamma_n = n(n+1),\ y_n = P_n^m(x),\ n = m, m+1, \ \cdots,$$

并且由自共轭算子的特征值问题的理论，特征函数系$\{P_n^m(x) : n \geq m\}$构成$L^2[-1,1]$的一组正交基，求

$$\|P_n^m\|^2 = \int_{-1}^{1} (P_n^m(x))^2 \mathrm{d}x = \frac{2}{2n+1} \cdot \frac{(n+m)!}{(n-m)!}.$$

Legendre 函数的应用

例2 用分离变量法求解单位球上Laplace方程的边值问题

$$\begin{cases} -\Delta u = 0, & x \in B_1(0), \\ u = f, & x \in \partial B_1(0), \end{cases}$$

其中边值函数f用球坐标变量(r, θ, φ)表示为$f = f(\theta)$.

解 利用球坐标(r, θ, φ)，问题化为

$$\begin{cases} u_{rr} + \frac{2}{r}u_r + \frac{1}{r^2 \sin\theta}[(\sin\theta)u_\theta]_\theta + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}u_{\varphi\varphi} = 0, \ 0 < r < 1, \\ \qquad\qquad 0 \le \theta \le \pi, 0 \le \varphi \le 2\pi, \\ |u(0,\theta,\varphi)| < \infty, \ u(1,\theta,\varphi) = f(\theta), \quad 0 \le \theta \le \pi, 0 \le \varphi \le 2\pi. \end{cases}$$

因为边值函数与φ无关，所以解也与φ无关，记$u = u(r,\theta)$，它满足方程

$$u_{rr} + \frac{2}{r}u_r + \frac{1}{r^2\sin\theta}[(\sin\theta)u_\theta]_\theta = 0.$$

令$u(r,\theta)=R(r)T(\theta)$, 代入方程并分离变量得

$$-\frac{r^2R''(r)+2rR'(r)}{R(r)}=\frac{[(\sin\theta)T'(\theta)]'}{(\sin\theta)T(\theta)}=-\lambda,$$

于是得到常微分方程

$$r^2R''(r)+2rR'(r)-\lambda R(r)=0,\ \ |R(0)|<\infty,$$

及特征值问题

$$\begin{cases}\frac{1}{\sin\theta}[(\sin\theta)T'(\theta)]'+\lambda T(\theta)=0,\ \ 0<\theta<\pi,\\ |T(0)|<\infty,\ \ |T(\pi)|<\infty.\end{cases}$$

令$s=\cos\theta, T(\theta)=T(\arccos s)=y(s)$, 则$y$满足

$$\begin{cases}[(1-s^2)y']'+\lambda y=0,\ \ -1<s<1,\\ |y(\pm 1)|<\infty.\end{cases}$$

特征值问题的所有特征值和对应的特征函数是

$$\lambda_n = n(n+1),\ \ T_n(\theta) = y_n(s) = P_n(s) = P_n(\cos\theta),\ \ n = 0, 1, \cdots .$$

特征值问题的所有特征值和对应的特征函数是

$$\lambda_n = n(n+1), \; T_n(\theta) = y_n(s) = P_n(s) = P_n(\cos\theta), \; n = 0, 1, \cdots.$$

将$\lambda = \lambda_n$ 代入欧拉方程，得

$$r^2 R_n''(r) + 2rR_n'(r) - n(n+1)R_n(r) = 0, \; |R_n(0)| < \infty,$$

求得其有界解

$$R_n(r) = A_n r^n, \quad n = 0, 1, \cdots.$$

于是得到一般解

$$u(r,\theta) = \sum_{0}^{\infty} A_n P_n(\cos\theta) r^n.$$

$$A_n = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} f(\arccos t) P_n(t) \mathrm{d}t = \frac{2n+1}{2}\int_{0}^{\pi} f(\theta) P_n(\cos\theta) \sin\theta \mathrm{d}\theta.$$

- 取 $f(\theta)=\cos^2\theta$，则算出

$$A_0=1/3,\ A_2=2/3,\ A_n=0\,(n\neq 0,2),$$

因此解为

$$u(r,\theta)=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}P_2(\cos\theta)r^2=\frac{1}{3}+\left(\cos^2\theta-\frac{1}{3}\right)r^2.$$

- 取 $f(\theta)=\cos^3\theta$，可以算出

$$A_1=\frac{3}{5},A_3=\frac{2}{5},\ A_n=0\,(n\neq 1,3),$$

求得此时解

$$\begin{aligned}u(r,\theta)&=\frac{3}{5}P_1(\cos\theta)r+\frac{2}{5}P_3(\cos\theta)r^3\\&=\frac{3r}{5}\cos\theta+\left(\cos^3\theta-\frac{3}{5}\cos\theta\right)r^3.\end{aligned}$$