三维波动方程初值问题的球面平均法

考虑如下初值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 \Delta u = 0, & x \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0, \\ u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = \psi(x), & x \in \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

三维波动方程初值问题的球面平均法

考虑如下初值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 \Delta u = 0, & x \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0, \\ u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = \psi(x), & x \in \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

定义解$u(x,t)$在球面$\partial B_r(0) := \{x|\ |x| = r\}$上的球面平均值

$$\begin{aligned} \overline{u}(r,t) &= \frac{1}{4\pi r^2} \iint_{|x|=r} u(x,t)\,\mathrm{d}S \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} u(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta, t)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi, \end{aligned}$$

由此知

$$\lim_{r\to 0+} \overline{u}(r,t) = u(0,t).$$

类似地，定义初始速度$\psi(x)$的球面平均值

$$\overline{\psi}(r) = \frac{1}{4\pi r^2} \iint_{|x|=r} \psi(x)\,\mathrm{d}S.$$

类似地，定义初始速度$\psi(x)$的球面平均值

$$\overline{\psi}(r) = \frac{1}{4\pi r^2} \iint_{|x|=r} \psi(x)\,\mathrm{d}S.$$

可以证明$\overline{u}(r,t)$满足方程

$$\overline{u}_{tt} = a^2(\overline{u}_{rr} + \frac{2}{r}\overline{u}_r), \quad r > 0, t > 0,$$

及初值条件

$$\overline{u}(r,0) = 0, \quad \overline{u}_t(r,0) = \overline{\psi}(r).$$

类似地，定义初始速度$\psi(x)$的球面平均值

$$\overline{\psi}(r) = \frac{1}{4\pi r^2} \iint_{|x|=r} \psi(x)\,\mathrm{d}S.$$

可以证明$\overline{u}(r,t)$满足方程

$$\overline{u}_{tt} = a^2(\overline{u}_{rr} + \frac{2}{r}\overline{u}_r), \quad r > 0, t > 0,$$

及初值条件

$$\overline{u}(r,0) = 0, \quad \overline{u}_t(r,0) = \overline{\psi}(r).$$

令$v(r,t) = r\,\overline{u}(r,t)$，则$v$满足半无界初边值问题

$$\begin{cases} v_{tt} = a^2 v_{rr}, & r > 0, \quad t > 0, \\ v(0,t) = 0, & t \geq 0, \\ v(r,0) = 0, \quad v_t(r,0) = r\,\overline{\psi}(r), & r \geq 0. \end{cases}$$

当$0 < r \leq at$时,即r很小时

$$v(r,t) = \frac{1}{2a}\int_{at-r}^{r+at} y\overline{\psi}(y)\mathrm{d}y.$$

当$0 < r \leq at$时,即r很小时

$$v(r,t) = \frac{1}{2a}\int_{at-r}^{r+at} y\overline{\psi}(y)\mathrm{d}y.$$

于是

$$\begin{aligned} u(0,t) &= \lim_{r\to 0+} \overline{u}(r,t) = \lim_{r\to 0+} \frac{v(r,t)}{r} \\ &= \lim_{r\to 0+} \frac{1}{2ar}\int_{at-r}^{r+at} y\overline{\psi}(y)\,\mathrm{d}y \\ &= t\overline{\psi}(at) \\ &= \frac{1}{4\pi a^2 t}\iint_{|y|=at} \psi(y)\,\mathrm{d}S. \end{aligned}$$

令$w(x,t)=u(x+x_0,t)$，则w满足

$$\begin{cases} w_{tt}-a^2\Delta w=0, & x\in\mathbb{R}^3,\quad t>0,\\ w(x,0)=0,\quad w_t(x,0)=\psi(x+x_0), & x\in\mathbb{R}^3. \end{cases}$$

令$w(x,t)=u(x+x_0,t)$，则w满足

$$\begin{cases} w_{tt}-a^2\Delta w=0, & x\in\mathbb{R}^3,\quad t>0, \\ w(x,0)=0,\quad w_t(x,0)=\psi(x+x_0), & x\in\mathbb{R}^3. \end{cases}$$

于是

$$u(x_0,t)=w(0,t)=\frac{1}{4\pi a^2 t}\iint_{|y|=at}\psi(y+x_0)\,\mathrm{d}S,$$

再将变量x_0换回x得

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{4\pi a^2 t}\iint_{|y|=at}\psi(y+x)\,\mathrm{d}S_y \\ &= \frac{1}{4\pi a^2 t}\iint_{|y-x|=at}\psi(y)\,\mathrm{d}S_y. \end{aligned}$$

对于一般的三维波动方程

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2\Delta u = f(x,t), & x \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), & x \in \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

利用初始位移与初始速度对应解的关系和齐次化原理知，得此问题的解为

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \partial_t\left[\frac{1}{4\pi a^2 t}\iint_{|y-x|=at}\varphi(y)\,\mathrm{d}S_y\right] + \frac{1}{4\pi a^2 t}\iint_{|y-x|=at}\psi(y)\,\mathrm{d}S_y \\ &\quad + \int_0^t \iint_{|y-x|=a(t-s)} \frac{1}{4\pi a^2(t-s)} f(y,s)\,\mathrm{d}S_y\mathrm{d}s, \end{aligned}$$

此求解公式称为泊松公式(Poisson) 或基尔霍夫(Kirchhoff)公式.

三维波传播特点

为了简便，考察齐次方程的情形，即$f(x,t)\equiv 0$. 此时Poisson公式变为

$$u(x,t)=\partial_t\left[\frac{1}{4\pi a^2 t}\iint_{|y-x|=at}\varphi(y)\,\mathrm{d}S_y\right]+\frac{1}{4\pi a^2 t}\iint_{|y-x|=at}\psi(y)\,\mathrm{d}S_y.$$

由此求解公式知，三维波u在点(x_0,t_0)的值只依赖于初始函数$\varphi(x)$和$\psi(x)$在球面

$$S_{x_0}^{at_0}=\{x\mid |x-x_0|=at_0\}$$

上的值，故此球面称为三维波方程的解在点(x_0,t_0)的依赖区域.

三维波传播特点

当初始函数φ和ψ在点x_1的值发生改变时，在t时刻只能影响到解在球面$S_{x_1}^{at}$上的值，故把四维时空区域

$$\{(x,t)|\,|x-x_1|=at, t>0\}.$$

称为点x_1的影响区域.

三维波传播特点

当初始函数φ和ψ在点x_1的值发生改变时，在t时刻只能影响到解在球面$S_{x_1}^{at}$上的值，故把四维时空区域

$$\{(x,t)|\,|x-x_1|=at,t>0\}.$$

称为点x_1的影响区域.

设三维波是由初始时刻在有界区域Ω的一个扰动所产生. 则在时刻t受到Ω中初始扰动影响的区域是由前阵面和后阵面围成，前阵面以外的区域是扰动还未传播到的区域，而后阵面以内的区域是已受过影响但已恢复原来状态的区域.

三维波的传播具有清晰的前阵面和后阵面，这个传播特点称为惠更斯原理(Huygens's Principle). 三维波称为球面波.

例 求解初值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) = 0, \ X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \ t > 0, \\ u(x, y, z, 0) = y, \quad u_t(x, y, z, 0) = x^2, \quad X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

例 求解初值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) = 0, \ X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \ t > 0, \\ u(x, y, z, 0) = y, \quad u_t(x, y, z, 0) = x^2, \quad X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

例 求解初值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) = 0, \ \ X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \ \ t > 0, \\ u(x, y, z, 0) = y, \quad u_t(x, y, z, 0) = x^2, \quad X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

解 作球坐标变

换$Y = (x + at\sin\theta\cos\phi, y + at\sin\theta\sin\phi, z + at\cos\theta)$，得

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= \partial_t \iint_{S_X^{at}} \frac{\varphi(Y)}{4\pi a^2 t}\,\mathrm{d}S_Y + \iint_{S_X^{at}} \frac{\psi(Y)}{4\pi a^2 t}\,\mathrm{d}S_Y \\ &= \frac{1}{4\pi}\partial_t \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} t(y + at\sin\theta\cos\phi)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi \\ &\quad + \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} t(x + at\sin\theta\cos\phi)^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi \end{aligned}$$

例 求解初值问题

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz})=0,\ X=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ t>0, \\ u(x,y,z,0)=y,\quad u_t(x,y,z,0)=x^2,\quad X=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3. \end{cases}$$

解 作球坐标变换$Y=(x+at\sin\theta\cos\phi, y+at\sin\theta\sin\phi, z+at\cos\theta)$，得

$$\begin{aligned} u(x,y,z,t) &= \partial_t\iint_{S_X^{at}}\frac{\varphi(Y)}{4\pi a^2t}\,\mathrm{d}S_Y+\iint_{S_X^{at}}\frac{\psi(Y)}{4\pi a^2t}\,\mathrm{d}S_Y \\ &= \frac{1}{4\pi}\partial_t\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}t(y+at\sin\theta\cos\phi)\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi \\ &\quad+\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}t(x+at\sin\theta\cos\phi)^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi \\ &= y+x^2t+\frac{1}{3}a^2t^3. \end{aligned}$$