数学物理方法

2025春

教材：

《数学物理方法讲义》杨明、石佩虎编

2018.9 (2021.3 重印)

东南大学出版社

2. 齐次方程,齐次边界条件的解法(分离变量法)

本章讨论有界问题，介绍解决有界问题的有效方法——**分离变量法**。

它是求解数学物理定解问题的一种最普遍最基本的方法之一，适用于解一些常见区域(如有限区间、矩形域、圆域、长方体、球面、圆柱体等)上的混合问题和边值问题。

用分离变量法求解偏微分方程定解问题的求解步骤：

◆第一步：分离变量

◆第二步：解特征值问题

◆第三步：求解其他常微分方程，得特解$u_n(x,t)$

◆第四步：特解$u_n(x,t)$的叠加

◆第五步：确定系数

◆第六步：解的存在唯一性（可省略）

例1.考虑弦振动方程初边值问题

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & 0 < x < l, t > 0, \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x), & 0 \leq x \leq l. \end{cases}$$

分离变量法的基本思想:

寻找变量分离形式的解

令$u(x,t)=X(x)T(t)$,代入方程做变量分离.

$$X(x)T''(t)-a^2X''(x)T(t)=0$$

做变量分离

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda$$

$$
\begin{cases}
X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad 0 < x < l, \\
X(0) = X(l) = 0.
\end{cases}
$$

该问题称为特征值问题

λ称为特征值(Eigenvalue)

对应的解称为特征函数(Eigenfunction)，

全体特征函数构成特征函数系.

利用二阶ODE的通解求解该特征值问题.

特征值 $\lambda_n = (\frac{n\pi}{l})^2,\ n = 1, 2, \cdots,$

对应的特征函数为 $X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{l},\ n = 1, 2, \cdots.$

将特征值代入t的方程得

$$T''(t) + a^2\lambda_n T(t) = 0,$$

求出解为

$$T_n(t) = C_n \cos\frac{an\pi t}{l} + D_n \sin\frac{an\pi t}{l}.$$

令 $u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t)$

容易看到$u_n(x,t)$, $n = 1, 2, \cdots$均满足PDE和B.C.

但不满足I.C.. 怎么办呢?

做线性组合(傅立叶级数) 让该组合去满足I.C.

$$u(x,t) = \sum_{1}^{\infty}(C_n \cos\frac{an\pi t}{l} + D_n \sin\frac{an\pi t}{l}) \sin\frac{n\pi x}{l}$$

代入初始条件得

$$\varphi(x)=\sum_{1}^{\infty}C_n\sin\frac{n\pi x}{l},\quad \psi(x)=\sum_{1}^{\infty}D_n\frac{an\pi}{l}\sin\frac{n\pi x}{l},$$

利用正弦级数系数公式得

$$C_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x,$$

$$D_n=\frac{2}{an\pi}\int_0^l\psi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x,\ \ n=1,2,\cdots.$$

注 2.1 可以证明[10]，解表达式(2.2.5)中，初始条件$\varphi(x)$, $\psi(x)$充分光滑(比如$\phi\in C^3[0,l]$, $\psi\in C^2[0,l]$)，且$\phi(x)$, $\psi(x)$满足相容性条件

$$\varphi(0)=\varphi(l)=\varphi''(0)=\varphi''(l)=\psi(0)=\psi(l)=0,$$

则解的级数表达式点点收敛，且可以逐项求导两次，从而保证解(2.2.5)是初边值问题(2.2.1)的古典解。这里的古典解是指解$u(x,t)$满足

$$u(\cdot,t)\in C^2(0,l)\cap C[0,l],\quad u(x,\cdot)\in C^2(0,+\infty)\cap C[0,+\infty).$$

另外，还可以利用能量积分法证明，解(2.2.5)是唯一的、稳定的。

如果初始数据$\varphi(x)$, $\psi(x)$的光滑性不够，比如仅是连续函数，或者不满足相容性条件，则不能保证解(2.2.5)是问题(2.2.1)的古典解，但从物理上来理解，该解是有意义的，一般称之为问题(2.2.1)的广义解。如何理解该广义解呢?

一般来说，可以根据问题的物理意义和数学上的规定来定义不同函数空间中的各种广义解。不同函数空间中的广义解，可以理解为近似古典解序列在相应函数空间中的极限。值得注意的是，广义解作为古典解的推广必须满足：古典解必是广义解；当广义解具有适当光滑性时，它也是古典解。通过广义解来研究古典解是现代偏微分方程研究的重要方法。

补充例题. 考虑长为l的两端自由的均匀细杆，由初始位移$\varphi(x)$和初始速度$\psi(x)$引起的自由纵振动问题

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}, \quad 0<x<l, t>0, \\ u(x,0)=\varphi(x), u_t(x,0)=\psi(x), 0\le x\le l, \\ u_x(0,t)=u_x(l,t)=0, \quad t\ge 0. \end{cases}$$

解：与例1不同的是，这里的边界条件是第二类的。

令$u(x,t)=X(x)T(t)$，代入泛定方程得

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}.$$

上式左端仅是t的函数，右端仅是 x 的函数，要使等号对所有$0<x<l,\ t>0$成立，两端必为常数，记作

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda.$$

于是 $\quad T''(t)+\lambda a^2T(t)=0, t>0,$

$$X''(x)+\lambda X(x)=0, 0<x<l.$$

结合边界条件, 得特征值问题 $\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0, \quad 0<x<l, \\ X'(0)=X'(l)=0. \end{cases}$

其特征值和对应的特征函数为

$$\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2>0,\ X_n(x)=A_n\cos\frac{n\pi x}{l},\quad n=0,1,2,\cdots.$$

对于每一个$\lambda=\lambda_n$，求解 $T=T_n(t)$：

$$T''(t)+\lambda_n a^2T(t)=0,\ n=1,2,\cdots,$$

其通解为 $T_n(t)=\begin{cases}C_0+D_0t, & n=0,\\ C_n\cos\dfrac{n\pi at}{l}+D_n\sin\dfrac{n\pi at}{l}, & n=1,2,\cdots,\end{cases}$

其中 $C_n,D_n(n=0,1,2,\cdots)$ 都是任意常数。

因此得到满足定解问题中的泛定方程和边界条件的变量分离形式的特解

$$
\boxed{\begin{aligned}
&u_n(x,t)=X_n(x)T_n(t)\\
&\qquad=\begin{cases}(C_0+D_0t)A_0, & n=0,\\ \left(C_n\cos\dfrac{n\pi at}{l}+D_n\sin\dfrac{n\pi at}{l}\right)A_n\cos\dfrac{n\pi x}{l}, & n=1,2,\cdots,\end{cases}
\end{aligned}}
$$

利用叠加原理，设所求的形式解为

$$
\boxed{u(x,t)=a_0+b_0t+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi at}{l}+b_n\sin\frac{n\pi at}{l}\right)\cos\frac{n\pi x}{l}}
$$

其中系数由初始条件确定，即

$$
\begin{cases}\varphi(x)=u(x,0)=a_0+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l}\\ \psi(x)=u_t(x,0)=b_0+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}b_n\frac{n\pi a}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\end{cases}
$$

从而得 $$\begin{cases} a_0 = \dfrac{1}{l}\displaystyle\int_0^l \varphi(x)dx, \quad a_n = \dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l \varphi(x)\cos\dfrac{n\pi x}{l}dx, \\ b_0 = \dfrac{1}{l}\displaystyle\int_0^l \psi(x)dx, \quad b_n = \dfrac{2}{n\pi a}\displaystyle\int_0^l \psi(x)\cos\dfrac{n\pi x}{l}dx, \end{cases} \quad n = 1, 2, \cdots.$$

例2.耗散系统

$$\begin{cases} u_t = k u_{xx}, & 0 < x < l, t > 0, \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), & 0 \leq x \leq l. \end{cases}$$

解 令$u(x,t)=X(x)T(t)$，将其代入PDE中可得

$$X(x)T'(t)-kX''(x)T(t)=0,$$

做变量分离

$$\frac{T'(t)}{kT(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda.$$

上式左边是t的函数，中间是x的函数，所以右端的λ必为常数.

求解特征值问题

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0, \quad 0<x<l, \\ X(0)=X(l)=0. \end{cases}$$

解得，特征值为

$$\lambda_n=(\frac{n\pi}{l})^2,\ n=1,2,\cdots,$$

对应的特征函数为

$$X_n(x)=\sin\frac{n\pi x}{l},\ n=1,2,\cdots.$$

将特征值代入t的方程得

$$T'(t)+k\lambda_n T(t)=0,$$

求出解为$T_n(t)=e^{-k\lambda_n t}$，令

$$u(x,t)=\sum_{1}^{\infty}A_n e^{-k\lambda_n t}\sin\frac{n\pi x}{l},$$

代入初始条件得

$$\phi(x)=\sum_{1}^{\infty}A_n\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

将函数$\phi(x)$在$[0,l]$上做正弦展开即可得到组合系数

$$A_n=\frac{2}{l}\int_0^l\phi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x,\ \ n=1,2,\cdots.$$

例3.绝热系统

$$\begin{cases} u_t = k u_{xx}, & 0 < x < l, t > 0, \\ u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), & 0 \leq x \leq l. \end{cases}$$

思考：如果B. C. 改为绝热+热交换

$u_x(0,t) = 0, u_x(l,t) + \sigma u(l,t) = 0,$ 如何求解？

解 本例与上例的区别在于边界条件是齐次Neumann条件. 与上例一样，用分离变量法，设$u(x,t)=X(x)T(t)$，将其代入PDE中可得

$$X(x)T'(t)-kX''(x)T(t)=0,$$

做变量分离

$$\frac{T'(t)}{kT(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda,$$

其中λ为常数.

考虑变量x的方程，结合B.C.知$X'(0)=X'(l)=0$，得到如下问题

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0, & 0<x<l, \\ X'(0)=X'(l)=0. \end{cases}$$

与前面的讨论方法类似可得该特征值问题的解如下

$$e.v.\ \lambda_n=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2,\quad e.f.\ X_n=\cos\frac{n\pi x}{l},\quad n=0,1,2,\cdots.$$

注意，在齐次Neumann条件下，$\lambda_0=0$也是一个特征值，对应的特征函数是$X_0=1$.

将特征值代入t的方程得

$$T'(t)+k\lambda_n T(t)=0,$$

求出解为

$$T_0(t)=1,\quad T_n(t)=e^{-k\lambda_n t},\ n=1,2,\cdots.$$

令

$$u(x,t)=\frac{A_0}{2}+\sum_{1}^{\infty}A_n e^{-k\lambda_n t}\cos\frac{n\pi x}{l},$$

代入初始条件得

$$\phi(x)=\frac{A_0}{2}+\sum_{1}^{\infty}A_n\cos\frac{n\pi x}{l}.$$

将函数$\phi(x)$在$[0,l]$上做余弦展开即可得到组合系数

$$A_n=\frac{2}{l}\int_0^l\phi(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x,\ n=0,1,2,\cdots.$$

练习：求下列问题的级数形式的解，

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & 0 < x < \pi, t > 0; \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0, & t \geq 0; \\ u(x,0) = x, u_t(x,0) = \cos x, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

参考答案：

$$u(x,t) = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{a}\sin at \cos x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2[(-1)^n - 1]}{n^2 \pi} \cos nat \cos nx.$$

尝试绘制解的动态图形来认识解的波动变化！

例4.矩形区域上的拉普拉斯方程边值问题

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & 0 < x < a, 0 < y < b, \\ u(0, y) = u(a, y) = 0, & 0 \le y \le b, \\ u(x, 0) = \varphi(x),\ u(x, b) = \psi(x), & 0 \le x \le a. \end{cases}$$

解 设$u(x,y)=X(x)Y(y)$，代入PDE变量分离后可得

$$\frac{X''(x)}{X(x)}=-\frac{Y''(y)}{Y(y)}=-\lambda,$$

结合边界条件$u(0,y)=u(a,y)=0$可得特征值问题

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0, & 0<x<a, \\ X(0)=X(a)=0. \end{cases}$$

解得特征值为

$$\lambda_n=(\frac{n\pi}{a})^2,\ n=1,2,\cdots,$$

对应的特征函数为

$$X_n(x)=\sin\frac{n\pi x}{a},\ n=1,2,\cdots.$$

将特征值代入y的方程得

$$Y''(y) - \lambda_n Y(y) = 0,$$

解之得

$$Y(y) = C_n \cosh \frac{n\pi y}{a} + D_n \sinh \frac{n\pi y}{a},$$

做线性组合

$$u(x,y) = \sum_{1}^{\infty} \left(C_n \cosh \frac{n\pi y}{a} + D_n \sinh \frac{n\pi y}{a}\right) \sin \frac{n\pi x}{a},$$

使之满足边界条件$u(x,0)=\varphi(x)$, $u(x,b)=\psi(x)$，于是

$$\varphi(x)=\sum_{1}^{\infty} C_n \sin\frac{n\pi x}{a},$$

$$\psi(x)=\sum_{1}^{\infty}\left(C_n \cosh\frac{n\pi b}{a}+D_n \sinh\frac{n\pi b}{a}\right)\sin\frac{n\pi x}{a},$$

由傅立叶系数公式知

$$C_n=\frac{2}{a}\int_0^a \varphi(x)\sin\frac{n\pi x}{a}\mathrm{d}x,$$

$$D_n=\frac{1}{\sinh\frac{n\pi b}{a}}\left(\frac{2}{a}\int_0^a \psi(x)\sin\frac{n\pi x}{a}\mathrm{d}x-C_n\cosh\frac{n\pi b}{a}\right).$$

练习：

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, & 0<x<a, y>0, \\ u(0,y)=u(a,y)=0, & y\geq 0, \\ u(x,0)=1-\dfrac{x}{a},\ u(x,+\infty)=0, & 0\leq x\leq a. \end{cases}$$

例5.(圆上的Laplace方程)

设$D: x^2 + y^2 < a^2$,

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & in\ D, \\ u = h(\theta), & on\ \partial D. \end{cases}$$

分析运用分离变量法的所需的条件以及该问题的特点.

先将问题用极坐标表示出来，即

$$
\begin{cases}
\Delta u = u_{rr} + \dfrac{1}{r}u_r + \dfrac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0, & (r,\theta) \in D, \\
u(a,\theta) = h(\theta), & 0 \le \theta < 2\pi.
\end{cases}
$$

令$u(r,\theta) = R(r)T(\theta)$，代入PDE可得

$$
R''(r)T(\theta) + \frac{1}{r}R'(r)T(\theta) + \frac{1}{r^2}R(r)T''(\theta) = 0,
$$

做变量分离得

$$
-\frac{r^2R''(r) + rR'(r)}{R(r)} = \frac{T''(\theta)}{T(\theta)} = -\lambda.
$$

考虑周期条件下的特征值问题

$$\begin{cases} T''(\theta)+\lambda T(\theta)=0, \\ T(\theta)=T(\theta+2\pi). \end{cases}$$

特征值为$\lambda_n=n^2$，对应的特征函数为$\cos n\theta$和$\sin n\theta$

将特征值代入$R(r)$的方程得

$$r^2R''(r)+rR'(r)-n^2R(r)=0,\ \ 0<r<a,$$

$$r^2R''(r)+rR'(r)-n^2R(r)=0,\ \ 0<r<a,$$

此为欧拉方程，其通解为：

- $n=0$时，$R(r)=C_0+D_0\ln r,$
- $n\geq 1$时，$R(r)=C_nr^n+D_nr^{-n}.$

需加入自然边界条件 $|R(0)|<\infty,$

代入通解知 $D_n=0$

令 $$u(r,\theta)=\frac{A_0}{2}+\sum_{1}^{\infty}(A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta)r^n$$

代入边界条件得

$$h(\theta)=\frac{A_0}{2}+\sum_{1}^{\infty}(A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta)a^n$$

由傅立叶系数公式知

$$A_n=\frac{1}{\pi a^n}\int_0^{2\pi}h(\theta)\cos n\theta\mathrm{d}\theta,\ \ n=0,1,2,\cdots,$$

$$B_n=\frac{1}{\pi a^n}\int_0^{2\pi}h(\theta)\sin n\theta\mathrm{d}\theta,\ \ n=1,2,\cdots.$$

注

$$u(r_0,\theta_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[1+2\sum_1^{\infty}(\frac{r_0}{a})^n\cos n(\theta_0-\theta)\right]h(\theta)\,\mathrm{d}\theta,$$

再利用欧拉公式和等比级数求和公式可得

$$1+2\sum_1^{\infty}(\frac{r_0}{a})^n\cos n(\theta_0-\theta)=1+\sum_1^{\infty}(\frac{r_0}{a})^n e^{in(\theta_0-\theta)}+\sum_1^{\infty}(\frac{r_0}{a})^n e^{-in(\theta_0-\theta)}$$

$$=1+\frac{r_0e^{i(\theta_0-\theta)}}{a-r_0e^{i(\theta_0-\theta)}}+\frac{r_0e^{-i(\theta_0-\theta)}}{a-r_0e^{-i(\theta_0-\theta)}}=\frac{a^2-r_0^2}{a^2+r_0^2-2ar_0\cos(\theta-\theta_0)},$$

得到解的积分表达式 (泊松公式)

$$u(r_0,\theta_0)=\frac{a^2-r_0^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{h(\theta)}{a^2+r_0^2-2ar_0\cos(\theta-\theta_0)}\mathrm{d}\theta.$$

课堂练习

1. 圆外区域的Laplace方程

设$D: x^2 + y^2 > a^2$,

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & in\ D, \\ u = h(\theta), & on\ \partial D, \\ 当x^2 + y^2 \to \infty时, u有界. \end{cases}$$

2. 扇形域上的拉普拉斯方程

设$D: 0 < r < a,\ 0 < \theta < \beta.$

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & in\ D, \\ u = 0, & on\ \theta = 0, \beta, \\ u_r = h(\theta), & on\ r = a. \end{cases}$$

3. 求解拉普拉斯方程边值问题

$$
\begin{cases}
u_{xx} + u_{yy} = 0, & 0 < x < a,\ 0 < y < b \\
u(0, y) = \sin \frac{\pi y}{b}, \quad u(a, y) = 0, & 0 \le y \le b, \\
u(x, 0) = \sin \frac{\pi x}{a}, \quad u(x, b) = 0, & 0 \le x \le a.
\end{cases}
$$

解 将问题做线性拆分.

令$u = v + w$，其中v, w分别满足边值问题

$$
\begin{cases}
v_{xx} + v_{yy} = 0, & 0 < x < a,\ 0 < y < b \\
v(0, y) = \sin\frac{\pi y}{b}, \quad v(a, y) = 0, & 0 \leq y \leq b, \\
v(x, 0) = 0, \quad v(x, b) = 0, & 0 \leq x \leq a.
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
w_{xx} + w_{yy} = 0, & 0 < x < a,\ 0 < y < b \\
w(0, y) = 0, \quad w(a, y) = 0, & 0 \leq y \leq b, \\
w(x, 0) = \sin\frac{\pi x}{a}, \quad w(x, b) = 0, & 0 \leq x \leq a.
\end{cases}
$$

利用分离变量法求解. 令$v(x,y) = X(x)Y(y)$

$$-\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda$$

求解特征值问题

$$\begin{cases} Y''(y) + \lambda Y(y) = 0, \quad 0 < y < b, \\ Y(0) = Y(b) = 0, \end{cases}$$

$$e.v.\ \ \lambda_n = (\frac{n\pi}{b})^2, \quad e.f.\ \ Y_n(y) = \sin\frac{n\pi y}{b}, \quad n = 1, 2, \cdots$$

将特征值代入x的方程得

$$X''(x)-\lambda_n X(x)=0,\quad X(a)=0,$$

解得 $X_n(x)=\sinh\dfrac{n\pi(a-x)}{b}$

$$v(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sinh\frac{n\pi(a-x)}{b}\sin\frac{n\pi y}{b}$$

代入边界条件 $v(0,y)=\sin\frac{\pi y}{b}$ 得

$$C_1=\frac{1}{\sinh\pi a/b},\quad C_n=0\ \ (n\neq 1),$$

$$\Rightarrow\quad v(x,y)=\frac{\sinh\pi(a-x)/b}{\sinh\pi a/b}\sin\frac{\pi y}{b}.$$

类似方法可解得

$$w(x,y) = \frac{\sinh \pi(b-y)/a}{\sinh \pi b/a} \sin \frac{\pi x}{a},$$

所以

$$u(x,y) = \frac{\sinh \pi(a-x)/b}{\sinh \pi a/b} \sin \frac{\pi y}{b} + \frac{\sinh \pi(b-y)/a}{\sinh \pi b/a} \sin \frac{\pi x}{a}.$$