二维波动方程的初值问题的降维法

考虑二维波动方程初值问题

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}), & (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad t > 0, \\ u(x,y,0) = 0, \quad u_t(x,y,0) = \psi(x,y), & (x,y) \in \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

二维波动方程的初值问题的降维法

考虑二维波动方程初值问题

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}), & (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad t > 0, \\ u(x,y,0) = 0, \quad u_t(x,y,0) = \psi(x,y), & (x,y) \in \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

将上述方程当作三维波动方程，利用上面的三维波动方程初值问题解的Poisson公式推导该二维问题解的表达式.

对于点(x_0, y_0, z_0)及$t_0 > 0$, 记球面

$$S = \{x : \ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = a^2 t_0^2\},$$

由Poisson公式得

$$\begin{aligned} u(x_0, y_0, z_0, t_0) &= \frac{1}{4\pi a^2 t_0} \iint_S \psi(x,y)\,\mathrm{d}S \\ &= \frac{1}{4\pi a^2 t_0} \Big(\iint_{S^+} + \iint_{S^-} \Big). \end{aligned}$$

将球面S分为上半球面和下半球面，它们在xoy平面上的投影区域都是区域

$$D:\ (x-x_0)^2+(y-y_0)^2\le a^2t_0^2,$$

并且上下球面的面积元素

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{at_0\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{a^2t_0^2-(x-x_0)^2-(y-y_0)^2}}.$$

于是,上面的曲面积分化为二重积分

$$u(x_0,y_0,z_0,t_0)=\frac{1}{2\pi a}\iint_D\frac{\psi(x,y)}{\sqrt{a^2t_0^2-(x-x_0)^2-(y-y_0)^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

它与z_0无关.

将球面S分为上半球面和下半球面，它们在xoy平面上的投影区域都是区域

$$D:\ (x-x_0)^2+(y-y_0)^2\leq a^2t_0^2,$$

并且上下球面的面积元素

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{at_0\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{a^2t_0^2-(x-x_0)^2-(y-y_0)^2}}.$$

于是,上面的曲面积分化为二重积分

$$u(x_0,y_0,z_0,t_0)=\frac{1}{2\pi a}\iint_D\frac{\psi(x,y)}{\sqrt{a^2t_0^2-(x-x_0)^2-(y-y_0)^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

它与z_0无关.习惯上，记

$$u(x,y,t)=\frac{1}{2\pi a}\iint_D\frac{\psi(\xi,\eta)}{\sqrt{a^2t^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta,$$

它是上述二维波动方程初值问题的解.

考虑一般的二维波动方程初值问题

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}), & (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad t > 0 \\ u(x,y,0) = \varphi(x,y), \quad u_t(x,y,0) = \psi(x,y), & (x,y) \in \mathbb{R}^2, \end{cases}$$

考虑一般的二维波动方程初值问题

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}), & (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad t > 0 \\ u(x,y,0) = \varphi(x,y), \quad u_t(x,y,0) = \psi(x,y), & (x,y) \in \mathbb{R}^2, \end{cases}$$

类似三维思想，该问题的解为

$$\begin{aligned} u(x,y,t) &= \partial_t\Big[\frac{1}{2\pi a}\iint_D \frac{\varphi(\xi,\eta)}{\sqrt{a^2t^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\Big] \\ &\quad + \frac{1}{2\pi a}\iint_D \frac{\psi(\xi,\eta)}{\sqrt{a^2t^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta. \end{aligned}$$

考虑一般的二维波动方程初值问题

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}), & (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad t > 0 \\ u(x,y,0) = \varphi(x,y), \quad u_t(x,y,0) = \psi(x,y), & (x,y) \in \mathbb{R}^2, \end{cases}$$

类似三维思想，该问题的解为

$$\begin{aligned} u(x,y,t) &= \partial_t \left[\frac{1}{2\pi a} \iint_D \frac{\varphi(\xi,\eta)}{\sqrt{a^2t^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2}} \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta \right] \\ &\quad + \frac{1}{2\pi a} \iint_D \frac{\psi(\xi,\eta)}{\sqrt{a^2t^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2}} \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta. \end{aligned}$$

以上推导二维问题求解公式的方法称为降维法，其基本思想是用高维问题的求解公式推导出低维问题的求解公式，按这一方法，如果初始函数是低维变量的函数，那么用降维法可推出解也是低维变量的函数.

从公式知，解$u(x,y,t)$的值依赖于初值函数φ，ψ在圆域

$$D = \{(\xi,\eta)\ |(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 \le a^2t^2\}$$

上的值，故此圆域称为解在点(x,y,t)的依赖区域.

从公式知，解$u(x,y,t)$的值依赖于初值函数φ，ψ在圆域

$$D=\{(\xi,\eta)\ |(\xi-x)^2+(\eta-y)^2\leq a^2t^2\}$$

上的值，故此圆域称为解在点(x,y,t)的依赖区域.

如果初值函数在点(x,y)发生改变，考虑三维时空锥形区域

$$K=\{(\xi,\eta,t)|\ (\xi-x)^2+(\eta-y)^2\leq a^2t^2,\ \ t>0\}.$$

因为区域K内任意一点的依赖区域都包含点(x,y)，因此初始函数在点(x,y)的值发生改变，只影响解在区域K 上的值，故区域K称为点(x,y)的影响区域.

从公式知，解$u(x,y,t)$的值依赖于初值函数φ，ψ在圆域

$$D=\{(\xi,\eta)\ |(\xi-x)^2+(\eta-y)^2\le a^2t^2\}$$

上的值，故此圆域称为解在点(x,y,t)的依赖区域.

如果初值函数在点(x,y)发生改变，考虑三维时空锥形区域

$$K=\{(\xi,\eta,t)|\ (\xi-x)^2+(\eta-y)^2\le a^2t^2,\ t>0\}.$$

因为区域K内任意一点的依赖区域都包含点(x,y)，因此初始函数在点(x,y)的值发生改变，只影响解在区域K 上的值，故区域K称为点(x,y)的影响区域.

如果二维波是由局部范围内的初始扰动所产生，则这个二维波的传播只有前阵面没有后阵面，即初始扰动所产生影响具有长期连续的后效特性，不满足惠更斯原理. 这一现象被称为二维波的弥散, 如水波现象.

例1

求解初值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2(u_{xx} + u_{yy}) = 0, & (x, y) \in \mathbb{R}^2, t > 0, \\ u|_{t=0} = x^2, \quad u_t|_{t=0} = 0, & (x, y) \in \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

例1

求解初值问题

$$
\begin{cases}
u_{tt} - a^2(u_{xx} + u_{yy}) = 0, & (x, y) \in \mathbb{R}^2, t > 0, \\
u|_{t=0} = x^2, \quad u_t|_{t=0} = 0, & (x, y) \in \mathbb{R}^2.
\end{cases}
$$

例1

求解初值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2(u_{xx} + u_{yy}) = 0, & (x,y) \in \mathbb{R}^2, t > 0, \\ u|_{t=0} = x^2, \quad u_t|_{t=0} = 0, & (x,y) \in \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

解 利用二维波动方程初值问题的Poisson 公式得

$$u(x,y,t) = \frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{at}\int_0^{2\pi}\frac{x^2 + 2x\rho\cos\theta + \rho^2\cos^2\theta}{\sqrt{a^2t^2 - \rho^2}}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\rho$$

例1

求解初值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2(u_{xx} + u_{yy}) = 0, & (x, y) \in \mathbb{R}^2, t > 0, \\ u|_{t=0} = x^2, \quad u_t|_{t=0} = 0, & (x, y) \in \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

解 利用二维波动方程初值问题的Poisson 公式得

$$\begin{aligned} u(x,y,t) &= \frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{at}\int_0^{2\pi}\frac{x^2 + 2x\rho\cos\theta + \rho^2\cos^2\theta}{\sqrt{a^2t^2 - \rho^2}}\rho \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\rho \\ &= \frac{1}{2a}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{at}\frac{(2x^2 + \rho^2)\rho}{\sqrt{a^2t^2 - \rho^2}}\mathrm{d}\rho \end{aligned}$$

例1

求解初值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2(u_{xx} + u_{yy}) = 0, & (x,y) \in \mathbb{R}^2, t > 0, \\ u|_{t=0} = x^2, \quad u_t|_{t=0} = 0, & (x,y) \in \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

解　利用二维波动方程初值问题的Poisson 公式得

$$\begin{aligned} u(x,y,t) &= \frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{at}\int_0^{2\pi}\frac{x^2+2x\rho\cos\theta+\rho^2\cos^2\theta}{\sqrt{a^2t^2-\rho^2}}\rho \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\rho \\ &= \frac{1}{2a}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{at}\frac{(2x^2+\rho^2)\rho}{\sqrt{a^2t^2-\rho^2}}\mathrm{d}\rho \\ &= \frac{1}{2a}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{\pi/2}(2x^2+a^2t^2\sin^2\varphi)at\sin\varphi \mathrm{d}\varphi \\ &= x^2+a^2t^2. \end{aligned}$$

例2

用降维法求解下列问题

$$(1)\begin{cases} u_{tt}-a^2(u_{xx}+u_{yy})=0, & (x,y)\in\mathbb{R}^2, t>0,\\ u|_{t=0}=\sin x,\quad u_t|_{t=0}=y, & (x,y)\in\mathbb{R}^2.\end{cases}$$

$$(2)\begin{cases} u_{tt}-a^2(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz})=0, (x,y,z)\in\mathbb{R}^3, t>0,\\ u|_{t=0}=0,\quad u_t|_{t=0}=xy^2z,\ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3.\end{cases}$$

例2

用降维法求解下列问题

$$(1)\begin{cases} u_{tt}-a^2(u_{xx}+u_{yy})=0, & (x,y)\in\mathbb{R}^2, t>0, \\ u|_{t=0}=\sin x,\quad u_t|_{t=0}=y, & (x,y)\in\mathbb{R}^2. \end{cases}$$

$$(2)\begin{cases} u_{tt}-a^2(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz})=0, (x,y,z)\in\mathbb{R}^3, t>0, \\ u|_{t=0}=0,\quad u_t|_{t=0}=xy^2z,\ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3. \end{cases}$$

例2

用降维法求解下列问题

$$(1)\begin{cases} u_{tt}-a^2(u_{xx}+u_{yy})=0, & (x,y)\in\mathbb{R}^2, t>0,\\ u|_{t=0}=\sin x,\quad u_t|_{t=0}=y, & (x,y)\in\mathbb{R}^2.\end{cases}$$

$$(2)\begin{cases} u_{tt}-a^2(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz})=0, (x,y,z)\in\mathbb{R}^3, t>0,\\ u|_{t=0}=0,\quad u_t|_{t=0}=xy^2z,\ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3.\end{cases}$$

解 (1) 利用叠加原理，问题的解是下列两个问题的解的叠加：

$$\begin{cases} v_{tt}-a^2(v_{xx}+v_{yy})=0, & (x,y)\in\mathbb{R}^2, t>0, \\ v|_{t=0}=\sin x, \quad v_t|_{t=0}=0, & (x,y)\in\mathbb{R}^2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} w_{tt}-a^2(w_{xx}+w_{yy})=0, & (x,y)\in\mathbb{R}^2, t>0, \\ w|_{t=0}=0, \quad w_t|_{t=0}=y, & (x,y)\in\mathbb{R}^2. \end{cases}$$

利用降维法，上述第一个问题的解为

$$v(x,y,t)=\frac{1}{2}[\sin(x+at)+\sin(x-at)]=\sin x\cos at.$$

同样地，利用降维法，上述第二个问题的解为

$$w(x,y,t)=\frac{1}{2a}\int_{y-at}^{y+at}\xi\mathrm{d}\xi=yt.$$

所以所求的解是

$$u(x,y,t)=v+w=\sin x\cos at+yt.$$

(2)　利用降维法知，如果$w(x,y,z,t)$是问题

$$\begin{cases} w_{tt}-a^2(w_{xx}+w_{yy}+w_{zz})=0, & (x,y,z)\in\mathbb{R}^3, t>0,\\ w|_{t=0}=0,\quad w_t|_{t=0}=y^2, & (x,y,z)\in\mathbb{R}^3. \end{cases}$$

的解,则$u(x,y,z,t)=xzw(x,y,z,t)$为原问题的解. 因为

$$w(x,y,z,t) \;=\; \frac{1}{2a}\int_{y-at}^{y+at}\xi^2\mathrm{d}\xi=y^2t+\frac{1}{3}a^2t^3.$$

所以, 所求的解是

$$u(x,y,z,t)=xzw=xzy^2t+\frac{1}{3}a^2xzt^3.$$