数学物理方法

2025春

教材：
《数学物理方法讲义》杨明、石佩虎编
2018.9 (2021.3 重印)
东南大学出版社

CH6 特殊函数

1) BESSEL函数及其应用

2) LEGENDRE函数及其应用

1) Bessel函数及其应用

1.分离变量法求解鼓面振动问题$\Rightarrow Bessel$方程

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2(u_{xx} + u_{yy}), & x^2 + y^2 < a^2, t > 0, \\ u(x, y, t) = 0, & x^2 + y^2 = a^2, t \geq 0, \\ u(x, y, 0) = \varphi(x, y), u_t(x, y, 0) = \psi(x, y), x^2 + y^2 < a^2. & \end{cases}$$

特征值问题：

$$\begin{cases}\Delta\phi(x,y)+\lambda\phi(x,y)=0, & in\ D: x^2+y^2<a^2,\\ \phi(x,y)=0, & on\ \partial D.\end{cases}$$

证明：特征值$\lambda>0.$

采用极坐标,继续分离变量$\phi(r,\theta)=R(r)\Theta(\theta)$,

子特征值问题1:

$$\begin{cases}\Theta''(\theta)+\gamma\,\Theta(\theta)=0,\\ \Theta(\theta)=\Theta(\theta+2\pi).\end{cases}$$

$e.v.\gamma_n=n^2, e.f.\Theta_0=1, \Theta_n=A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta.$

子特征值问题2:

$$\begin{cases} r^2R''+rR'+(\lambda r^2-n^2)R=0, 0<r<a, \\ |R(0)|<\infty, \qquad R(a)=0. \end{cases}$$

令$\rho=\sqrt{\lambda}r$,则

$\rho^2R_{\rho\rho}+\rho R_{\rho}+(\rho^2-n^2)R=0$, n阶$Bessel$方程.

如果能解出$Bessel$方程的通解,结合边界条件就可解出子特征值问题2.

2.ν阶$Bessel$方程的解－$Bessel$函数

$$x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y=0,\quad \nu\geq 0.$$

idea: 设$y=\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^{k+\alpha}, a_0\neq 0,$带入方程求出$\alpha$和$a_k$.

计算得 $$y'(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(k+\alpha)x^{k+\alpha-1},$$

$$y''(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(k+\alpha)(k+\alpha-1)x^{k+\alpha-2},$$

$$(\alpha^2-\nu^2)a_0x^{\alpha}+[(\alpha+1)^2-\nu^2]a_1x^{\alpha+1}$$

$$+\sum_{k=2}^{\infty}\left([(k+\alpha)^2-\nu^2]a_k+a_{k-2}\right)x^{k+\alpha}=0.$$

所以

$$(1)\quad (\alpha^2-\nu^2)a_0=0,\qquad (2)\quad [(\alpha+1)^2-\nu^2]a_1=0,$$

$$(3)\quad [(k+\alpha)^2-\nu^2]a_k+a_{k-2}=0,\ \ k=2,3,\cdots.$$

由(1)知，$\alpha=\pm\nu$. 先考虑$\alpha=\nu$的情况，代入(2)得$a_1=0$.

由(3)得递推公式 $a_k=-\dfrac{a_{k-2}}{(k+\nu)^2-\nu^2}$,

所以当k是奇数时，$a_k=0$. 当$k=2j$是偶数时，

$$a_{2j}=-\frac{a_{2(j-1)}}{4j(j+\nu)}=\cdots=\frac{(-1)^j a_0}{4^j\, j!\,(1+\nu)\cdots(j+\nu)},$$

为了方便，不妨取 $a_0 = \dfrac{1}{2^{\alpha}\Gamma(1+\nu)}$,

则 $a_{2j} = \dfrac{(-1)^j}{2^{2j+\nu} j!\Gamma(j+\nu+1)}$.

这样得到方程的一个解

$$J_\nu(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!\Gamma(j+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2j+\nu}, \quad \nu \geq 0.$$

我们将函数$J_\nu(x)$称为第一类ν阶贝塞尔函数.

当ν不是整数时,$J_\nu(x)$与$J_{-\nu}(x)$线性无关,这是因为

$x\to 0$时,$J_\nu(x)\sim\dfrac{x^\nu}{2^\nu\Gamma(\nu+1)}$,$J_{-\nu}(x)\sim\dfrac{x^{-\nu}}{2^{-\nu}\Gamma(-\nu+1)}$.

当$\nu=n$是整数时,可以证明$J_n(x)=(-1)^n J_{-n}(x)$,

此时需要引入第二类$Bessel$ 函数.

定义:$Y_\nu(x)=\dfrac{\cos\nu\pi J_\nu(x)-J_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi},\quad \nu\notin Z,$

$$Y_n(x)=\lim_{\nu\to n}Y_\nu(x),\quad n\in Z.$$

$Y_n(x)$的性质:

$x \to 0$时, $Y_n(x) \sim \dfrac{(n-1)!}{\pi}(\dfrac{x}{2})^{-n}, n \in Z^+, Y_0(x) \sim \dfrac{2}{\pi}\ln\dfrac{x}{2}.$

因为$Y_{-n}(x) = (-1)^n Y_n(x) \quad \Rightarrow \quad \forall n \in Z, \; Y_n(0) = \infty.$

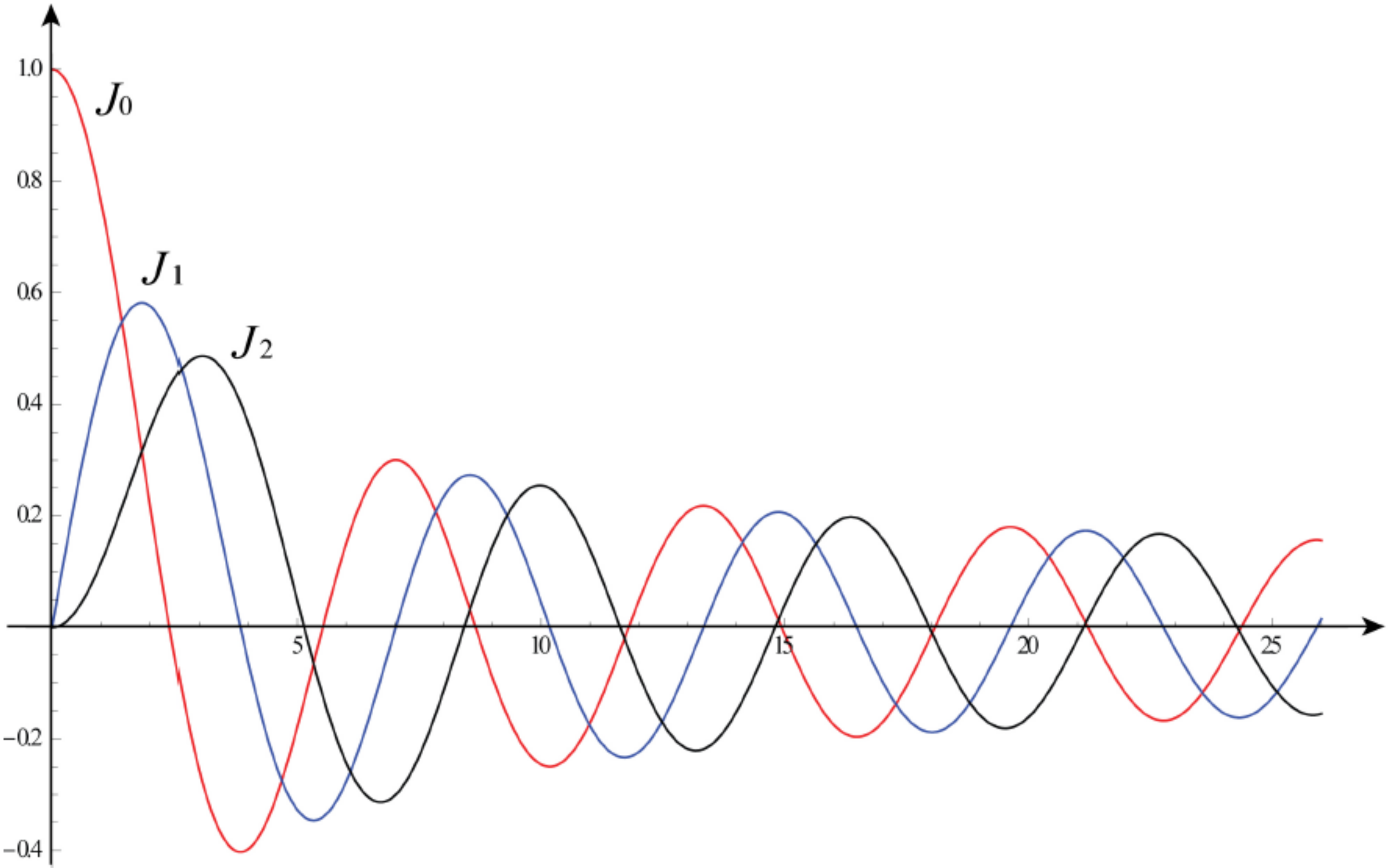
又因为$J_0(0) = 1, J_n(0) = 0, n \in Z^+$,所以$J_n$与$Y_n$线性无关.

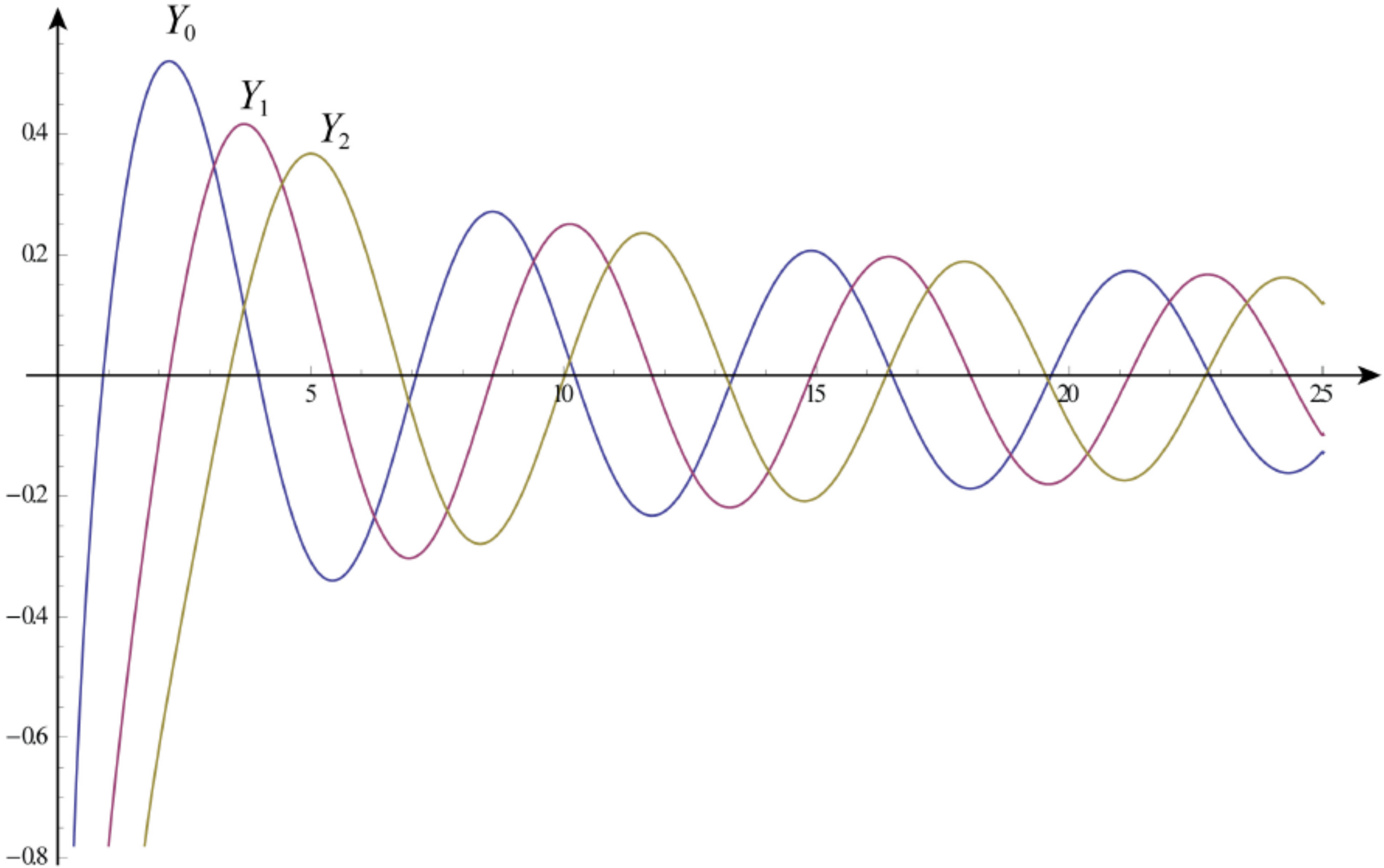
考虑: $x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2) y = 0, \quad \nu \ge 0.$

方程通解是: $y(x) = AJ_\nu(x) + BY_\nu(x)$,

其中$J_\nu(x), Y_\nu(x)$是第一类和第二类$Bessel$函数,

它们线性无关($J_\nu(0)$有界, $Y_\nu(0) = \infty$).


1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
−0.2
−0.4
5
10
15
20
25
J_0
J_1
J_2



Y_0
Y_1
Y_2
0.4
0.2
−0.2
−0.4
−0.6
−0.8
5
10
15
20
25

3.第一类*Bessel*函数$J_\nu(x)$的性质

(a)零点分布：$J_\nu(x)$有无穷多个单重正零点,记为

$$0<\mu_1^{(\nu)}<\mu_2^{(\nu)}<\cdots<\mu_m^{(\nu)}<\cdots$$

(b)渐进性质(示意图)

$$x\to+\infty, J_\nu(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$$

$$x\to+\infty, Y_\nu(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$$

$(c)J_\nu(x)$的递推公式

$$I.\begin{cases}(x^\nu J_\nu)' = x^\nu J_{\nu-1} \\ (x^{-\nu} J_\nu)' = -x^{-\nu} J_{\nu+1}\end{cases}$$

$$II.\begin{cases}xJ_{\nu-1} = \nu J_\nu + xJ_\nu' \\ xJ_{\nu+1} = \nu J_\nu - xJ_\nu'\end{cases}$$

$$III.\begin{cases}xJ_{\nu-1} + xJ_{\nu+1} = 2\nu J_\nu \\ J_{\nu-1} - J_{\nu+1} = 2J_\nu'\end{cases}$$

例.

利用递推公式，用$J_0(x)$和$J_1(x)$将$J_2(x)$, $J_3(x)$表示出来.

解 利用递推公式：$J_{n+1}=\frac{2n}{x}J_n-J_{n-1}$，取$n=1$得

$$J_2=\frac{2}{x}J_1-J_0,$$

取$n=2$得

$$J_3=\frac{4}{x}J_2-J_1=\frac{4}{x}(\frac{2}{x}J_1-J_0)-J_1=(\frac{8}{x^2}-1)J_1-\frac{4}{x}J_0.$$

例.计算积分

$\int x^3 J_{-2}(x)dx$ $\int x^3 J_0(x)dx$

$\int x^4 J_1(x)dx$

$\int xJ_2(x)dx$ $\int J_3(x)dx$

根据$m-n=$正(负)奇数,总结规律$\int x^m J_n(x)dx.$

例. 汉克尔函数(Hankel functions)定义如下

$$H_\nu^{\pm}(x) = J_\nu(x) \pm iY_\nu(x), \quad x > 0.$$

请推导

(1) $H_{1/2}^{\pm}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{\pm i(x-\pi/2)}$.

(2) $H_\nu^{\pm}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{\pm i(x-\frac{\pi\nu}{2}-\frac{\pi}{4})} + O(\frac{1}{x^{3/2}})$.

(3) 三维发散波满足三维Sommerfield辐射条件

$$\lim_{r\to+\infty} r(\phi_r - ik\phi) = 0, \quad r = |x|, \quad x \in \mathbb{R}^3.$$

分析$\frac{1}{\sqrt{r}}H_\nu^\pm(kr)$中哪个是发散波?

(4) 可以证明 $Y_\nu(x)$也具有和$J_\nu(x)$相同的递推公式.

请由此结论推导

$$\frac{\mathrm{d}H_0^+}{\mathrm{d}x}(x) = -H_1^+(x), \qquad \int xH_0^+(x)\,\mathrm{d}x = xH_1^+(x) + C.$$

(5) 利用习题五第3题的方法求解二维

Helmholtz方程的基本解，即求解

$$
\begin{cases}
\Delta\phi + k^2\phi = -\delta(x), & x \in \mathbb{R}^2,\ \ k > 0, \\
\lim\limits_{r\to+\infty} \sqrt{r}(\phi_r - ik\phi) = 0, & r = |x|,
\end{cases}
$$

其中$r = +\infty$处满足的条件称为二维

Sommerfield辐射条件，表示波向外传播.

解　(1) $J_{1/2}=\sqrt{\dfrac{2}{\pi x}}\sin x,\quad Y_{1/2}=-J_{-1/2}=-\sqrt{\dfrac{2}{\pi x}}\cos x,$

$$H^{\pm}_{1/2}(x)=J_{1/2}\pm iY_{1/2}=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}(\sin x\mp i\cos x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}e^{\pm i(x-\pi/2)}.$$

(2) 利用J_ν和Y_ν在∞处的渐进表达式

$$J_\nu(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos(x-\frac{\pi\nu}{2}-\frac{\pi}{4})+O(\frac{1}{x^{3/2}}),$$
$$Y_\nu(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin(x-\frac{\pi\nu}{2}-\frac{\pi}{4})+O(\frac{1}{x^{3/2}}),$$

$$H^{\pm}_\nu(x)=J_\nu(x)\pm iY_\nu(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}e^{\pm i(x-\frac{\pi\nu}{2}-\frac{\pi}{4})}+O(\frac{1}{x^{3/2}}).$$

(3) 对r求导数得

$$\left(\frac{1}{\sqrt{r}}H_\nu^+(kr)\right)' = -\frac{1}{2r^{3/2}}H_\nu^+(kr) + \frac{1}{\sqrt{r}}kH_\nu^{+\prime}(kr),$$

$$\begin{aligned}
&\lim_{r\to+\infty} r\left(\frac{1}{\sqrt{r}}H_\nu^+(kr)\right)' - ik\sqrt{r}H_\nu^+(kr)\\
=&\lim_{r\to+\infty} -\frac{1}{2r^{1/2}}H_\nu^+(kr) + k\sqrt{r}\left(H_\nu^{+\prime}(kr) - iH_\nu^+(kr)\right)\\
=&\lim_{r\to+\infty} k\sqrt{r}\left(H_\nu^{+\prime}(kr) - iH_\nu^+(kr)\right)\\
=&\lim_{r\to+\infty} k\sqrt{r}\left(\frac{1}{2}(H_{\nu-1}^+(kr) - H_{\nu+1}^+(kr)) - iH_\nu^+(kr)\right) = 0.
\end{aligned}$$

(4) 因为$Y_\nu(x)$具有和$J_\nu(x)$相同的递推公式,

所以$H_\nu^\pm(x)$也具有同样的递推公式.

$$(x^\nu H_\nu^+)' = x^\nu H_{\nu-1}^+,$$

$$H_0^{+\prime}(x) = H_{-1}^+(x) = -H_1^+(x),$$

$$(xH_1^+(x))' = xH_0^+(x) \quad \Rightarrow \quad \int xH_0^+(x)\,\mathrm{d}x = xH_1^+(x) + C.$$

(5) 基本解具有球对称性，记基本解为$\phi(r)$，将方程化为

$$\phi'' + \frac{1}{r}\phi' + k^2\phi = 0, \quad r > 0.$$

解得 $$\phi(r) = AH_0^+(kr) + BH_0^-(kr),$$

由$r = +\infty$处的辐射条件知$B = 0$. 下面利用通量法求系数A.

$$-1 = \int_{\mathbb{R}^2} \Delta\phi + k^2\phi \, \mathrm{d}x = \int_{|x|<\varepsilon} \Delta\phi + k^2\phi \, \mathrm{d}x = \int_{|x|=\varepsilon} \frac{\partial\phi}{\partial n} \mathrm{d}S + k^2 \int_{|x|<\varepsilon} \phi \, \mathrm{d}x$$
$$= Ak \int_{|x|=\varepsilon} (H_0^+)'(k\varepsilon) \, \mathrm{d}S + 2\pi Ak^2 \int_0^\varepsilon rH_0^+(kr) \, \mathrm{d}r = -2\pi Ai \lim_{r\to 0+} krY_1(kr).$$

利用 $Y_1(x)$ 的渐近性质 $x \to 0,\ Y_1(x) \sim -\dfrac{2}{\pi x}$ 得

$$-1 = 4Ai \ \Rightarrow \ A = \frac{i}{4},$$

从而二维Helmholtz方程的基本解是

$$\phi(x) = \frac{i}{4} H_0^{+}(k|x|).$$

例. 求解Helmholtz方程边值问题

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = 0, & x^2 + y^2 < a^2, \\ u(x,y) = 1, & x^2 + y^2 = a^2. \end{cases}$$

解 分析知u只与极坐标中的变量r有关，记为$u(r)$

$$r^2 u'' + r u' + k^2 r^2 u = 0,$$

解得通解为 $u(r) = AJ_0(kr) + BY_0(kr),$

加上自然边界条件 $|u(0)| < \infty$ 得 $B = 0,$

又因为 $u(a) = 1$，所以 $AJ_0(ka) = 1 \Rightarrow u(r) = \dfrac{J_0(kr)}{J_0(ka)}.$

例. 求解Helmholtz方程边值问题

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = 0, & x^2+y^2>a^2, \\ u(x,y)=1, & x^2+y^2=a^2, \\ \lim\limits_{r\to\infty} \sqrt{r}(u_r - iku) = 0, & r=\sqrt{x^2+y^2}. \end{cases}$$

解 分析知u只与极坐标中的变量r有关，记为$u(r)$

$$r^2u''+ru'+k^2r^2u=0,$$

解得通解为 $u(r)=AH_0^+(kr)+BH_0^-(kr)$,

代入 $r=+\infty$ 处的辐射条件得 $B=0$,

又因为 $u(a)=1$，所以 $AH_0^+(ka)=1$，从而

$A=\dfrac{1}{H_0^+(ka)}$，所以 $u(r)=\dfrac{H_0^+(kr)}{H_0^+(ka)}$.