数学物理方法

2025春

教材：
《数学物理方法讲义》杨明、石佩虎编
2018.9 (2021.3 重印)
东南大学出版社

4) Laplace变换

- 由Fourier变换到Laplace变换
- Laplace变换的定义与计算
- Laplace变换的性质
- Laplace逆变换的定义与计算
- Laplace反演定理
- 利用Laplace变换求解方程

设函数 $f \in L^1(\mathbb{R})$，$t < 0$ 时，$f(t) = 0$，则

$$\widehat{f}(\omega) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} \, \mathrm{d}t.$$

上式中的 ω 在一定条件下可以取为复数，于是令 $p = i\omega$

$$\widehat{f}(-ip) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} \, \mathrm{d}t.$$

记 $\widehat{f}(-ip) = L[f](p)$，此即为拉普拉斯变换.

设函数集 $E=\{f|\ f\in PC[0,+\infty),\ |f(t)|\leq Ce^{at}\}$.

规定：若 $f\in E$，则 $t<0$，$f(t)=0$.

如果 f 定义在 $(-\infty,+\infty)$, 则可用 $H(t)f(t)$ 替代 $f(t)$.

设 $f\in E$，p 为复数，$\mathrm{Re}\,p>a$，称

$$L[f](p)=\widetilde{f}(p)=\int_0^\infty f(t)e^{-pt}\,\mathrm{d}t$$

为 f 的拉普拉斯变换. 容易看到拉普拉斯变换是线性变换.

例1.计算下列函数的L变换.

(1)$H(t)$

(2)t^n, $t^\alpha\,(\alpha>-1)$

(3)e^{st}, te^{st}

(4)$\sin\omega t$, $\cos\omega t$, $\sinh\omega t$, $\cosh\omega t$.

解 $L[H(t)](p) = \int_0^\infty e^{-pt}\,\mathrm{d}t$

$$= -\tfrac{1}{p}e^{-pt}\Big|_0^\infty = 1/p, \quad \mathrm{Re}\,p > 0.$$

$$L[t](p) = \int_0^\infty t\,e^{-pt}\,\mathrm{d}t$$

$$= -\frac{1}{p}te^{-pt}\Big|_0^\infty + \frac{1}{p}\int_0^\infty e^{-pt}\,\mathrm{d}t = 1/p^2, \quad \mathrm{Re}\,p > 0.$$

$$L[t^n] = \int_0^\infty t^n e^{-pt}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{p}t^n e^{-pt}\Big|_0^\infty + \frac{n}{p}\int_0^\infty t^{n-1} e^{-pt}\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{n}{p}L[t^{n-1}] = n!/p^{n+1}, \quad \mathrm{Re}\,p > 0.$$

$$L[t^{\alpha}] = \int_0^{\infty} t^{\alpha} e^{-pt}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\infty} \frac{s^{\alpha}}{p^{\alpha+1}} e^{-s}\,\mathrm{d}s = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}, \quad \mathrm{Re}\,p > 0.$$

$$\begin{aligned} L[e^{st}] &= \int_0^{\infty} e^{st} e^{-pt}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\infty} e^{-(p-s)t}\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{p-s} e^{-(p-s)t}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{p-s}, \quad \mathrm{Re}\,p > s. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L[te^{st}] &= \int_0^{\infty} te^{st} e^{-pt}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\infty} te^{-(p-s)t}\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{p-s} te^{-(p-s)t}\Big|_0^{\infty} + \frac{1}{p-s}\int_0^{\infty} e^{-(p-s)t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{(p-s)^2} \end{aligned}$$

$$L[\sin \omega t] = L[\frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i}] = \frac{1}{2i}(\frac{1}{p - i\omega} - \frac{1}{p + i\omega}) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$$

$$L[\cos \omega t] = L[\frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2}] = \frac{1}{2}(\frac{1}{p - i\omega} + \frac{1}{p + i\omega}) = \frac{p}{p^2 + \omega^2}$$

$$L[\sinh \omega t] = ?$$

$$L[\cosh \omega t] = ?$$

引理.设$f \in E, |f(t)| \le Ce^{at}$,则

$(i) L[f](x+iy) \to 0$,当$|y| \to \infty, \forall x > a.$

$(ii) L[f](x+iy) \to 0$,当$x \to +\infty, \forall y.$

注:利用F变换的 *Riemann-Lebesgue*引理,

即$f \in L^1(R) \Rightarrow F[f](\omega) \to 0$,当$|\omega| \to \infty.$

证明 (1)

$$\forall x > a,\quad |f(t)e^{-xt}| \le Ce^{-(x-a)t} \quad \Rightarrow \quad f(t)e^{-xt} \in L^1$$

$$L[f](x+iy) = F[f(t)e^{-xt}](y) \to 0,\quad |y| \to \infty.$$

(2)

$$|L[f](x+iy)| = |\int_0^{\infty} f(t)e^{-xt}e^{-iyt}\,\mathrm{d}t|$$

$$\le C\int_0^{\infty} e^{-(x-a)t}\,\mathrm{d}t \to 0,\ \ x \to +\infty.$$

拉普拉斯变换的性质：设 $f \in E$，

(1) 平移性质：设 $a > 0$，$p_0 \in C$，则

$$L[H(t-a)f(t-a)] = e^{-ap}\widetilde{f}(p),\quad L[e^{p_0 t}f(t)] = \widetilde{f}(p-p_0);$$

(2) 伸缩性质：设 $a > 0$，则 $L[f(at)] = \dfrac{1}{a}\widetilde{f}(p/a)$;

(3) 微分性质：设 $f \in C[0,+\infty)$，$PS[0,+\infty)$，$f' \in E$，则

$$L[f'](p) = p\widetilde{f}(p) - f(0),$$

若 $f'' \in E$，则 $L[f''](p) = p^2\widetilde{f}(p) - pf(0) - f'(0)$;

(4) 积分性质：$L[\int_0^t f(s)\,\mathrm{d}s] = \widetilde{f}(p)/p$;

(5) 乘 t 性质：$L[tf(t)] = -\widetilde{f}'(p)$;

(6) 除 t 性质：设 $f(t)/t \in E$，则 $L[f(t)/t] = \int_p^{\infty} \widetilde{f}(s)\,\mathrm{d}s$;

(7) 卷积性质：设 $g \in E$，则

$$f * g(t) = \begin{cases} \int_0^t f(t-s)g(s)\,\mathrm{d}s, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases}$$

$$f * g \in E, \quad L[f * g] = L[f]\,L[g].$$

证明

(1)平移性质和(2)伸缩性质和傅立叶变换中的类似

(3)

$$L[f'] = \int_0^\infty f'(t)e^{-pt}\,\mathrm{d}t = f(t)e^{-pt}\Big|_0^\infty + p\int_0^\infty f(t)e^{-pt}\,\mathrm{d}t$$

$$= p\widetilde{f}(p) - f(0)$$

类似方法可以计算得

$$L[f''](p) = p^2\widetilde{f}(p) - pf(0) - f'(0).$$

(4)令$w(t)=\int_0^t f(s)\,ds$，则 $w'(t)=f(t)$，$w(0)=0$,

所以$L[f]=L[w']=pL[w](p)-w(0)$，从而$L[w]=\widetilde{f}(p)/p$.

(5)

$$L[tf(t)]=\int_0^{\infty} tf(t)e^{-pt}\,\mathrm{d}t=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\int_0^{\infty} f(t)e^{-pt}\,\mathrm{d}t=-\widetilde{f}'(p).$$

(6)令$h(t)=f(t)/t$，则$f(t)=t\,h(t)$

由性质(5)知，$\widetilde{f}(p)=-\widetilde{h}'(p)$，又因为$\widetilde{h}(\infty)=0$

所以 $\widetilde{h}(p)=\displaystyle\int_p^{\infty}\widetilde{f}(s)\,\mathrm{d}s.$

(7) 易知当$s\in(-\infty,0)$时，$g(s)=0$，

而$t<0,\ s\geq 0$时，$f(t-s)=0$，所以

$$t<0,\ \ f*g(t)=0;$$

当$t>0,\ s\in(t,+\infty)$时，$f(t-s)=0$，所以

$$t>0,\ \ f*g(t)=\int_0^t f(t-s)g(s)\,\mathrm{d}s.$$

$$L[f*g]=\int_0^\infty\int_0^t f(t-s)g(s)\,\mathrm{d}s\,e^{-pt}\,\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^\infty\int_0^t f(t-s)g(s)e^{-p(t-s)}e^{-ps}\,\mathrm{d}s\mathrm{d}t$$

$\tau=t-s$

$$=\int_0^\infty\int_0^\infty f(\tau)e^{-p\tau}g(s)e^{-ps}\,\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s=L[f]\,L[g].$$

注 3.4 由 (3.4.1) 和定理3.5得如下初值公式

$$f(0)=\lim_{p\to\infty} p\widetilde{f}(p).$$

另外

$$f(\infty)-f(0)=\lim_{p\to 0}\int_0^{\infty} f'(t)e^{-pt}\,\mathrm{d}t=\lim_{p\to 0} p\widetilde{f}(p)-f(0),$$

所以有如下终值公式

$$f(\infty)=\lim_{p\to 0} p\widetilde{f}(p).$$

例2.计算.

(1)利用微分性质计算$L[\cos\omega t]$

(2)$L[t\sin t]$, $L[\frac{\sin t}{t}]$, $L[\int_0^t \frac{\sin s}{s} ds]$

(3)$L[\delta(t)]$, $L[\delta(t-a)]$

拉普拉斯逆变换与反演公式

设 $f\in E$, $|f(t)|\le Ce^{at}$，取 $b>a$，令 $g(t)=e^{-bt}f(t)$，则 $g\in L^1[0,+\infty)$，故

$$\widehat{g}(\omega)=\int_0^{\infty}e^{-bt}f(t)e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t=\widetilde{f}(b+i\omega).$$

假设 $f\in PS[0,+\infty)$，由傅立叶反演定理知

$$\frac{1}{2}\left[f(t^-)+f(t^+)\right]e^{-bt}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{g}(\omega)e^{i\omega t}\,\mathrm{d}\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\widetilde{f}(b+i\omega)e^{i\omega t}\,\mathrm{d}\omega.$$

令 $p=b+i\omega$, $\mathrm{d}p=i\mathrm{d}\omega$，则

$$\frac{1}{2}\left[f(t^-)+f(t^+)\right]e^{-bt}=\frac{1}{2\pi i}\int_{b-i\infty}^{b+i\infty}\widetilde{f}(p)e^{(p-b)t}\,\mathrm{d}p,$$

所以

$$\frac{1}{2}\left[f(t^-)+f(t^+)\right]=\frac{1}{2\pi i}\int_{b-i\infty}^{b+i\infty}\widetilde{f}(p)e^{pt}\,\mathrm{d}p.$$

例3.*Laplace*逆变换的计算.

$$(1)L^{-1}[\frac{\omega}{(p+\lambda)^2+\omega^2}]$$

$$(2)L^{-1}[\frac{1}{p(p+b)}], \qquad L^{-1}[\frac{e^{-ap}}{p(p+b)}]$$

$$(3)L^{-1}[\frac{1}{\sqrt{p}}], \qquad L^{-1}[\frac{e^{-ap}}{\sqrt{p}}]$$

解 (1) $$L^{-1}[\frac{\omega}{(p+\lambda)^2+\omega^2}]=e^{-\lambda t}\sin\omega t$$

(2) $$L^{-1}[\frac{1}{p(p+b)}]=\frac{1}{b}L^{-1}[\frac{1}{p}-\frac{1}{p+b}]=\frac{1}{b}[1-e^{-bt}],$$

$$L^{-1}[\frac{e^{-ap}}{p(p+b)}]=\frac{H(t-a)}{b}[1-e^{-b(t-a)}].$$

(3) $$L[\frac{1}{\sqrt{t}}]=\frac{\Gamma(1/2)}{\sqrt{p}}=\sqrt{\frac{\pi}{p}}$$

$$\Rightarrow\ L^{-1}[\frac{1}{\sqrt{p}}]=\frac{1}{\sqrt{\pi t}},\quad L^{-1}[\frac{e^{-ap}}{\sqrt{p}}]=\frac{H(t-a)}{\sqrt{\pi(t-a)}}.$$

$$(4) L^{-1}\left[\frac{4p+5}{p^2+5p+6}\right]$$

$$(5) L^{-1}\left[\frac{p}{p+2}\right]$$

$$(6) L^{-1}\left[\frac{p^2}{(p^2+1)^2}\right]$$

例4.设$h(t)=\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{a^2}{4t}},a>0,$

(1)证 明：$h(t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-tx^2}e^{-iax}dx$并计算 $L[h]$.

(2)计算：$L^{-1}[e^{-a\sqrt{p}}]$, $L^{-1}[\frac{1}{p}e^{-a\sqrt{p}}]$.

解　利用Gauss函数的傅立叶变换得

$$F[e^{-tx^2}](a) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-tx^2} e^{-iax}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{t}} e^{-\frac{a^2}{4t}}$$

$$h(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2 t} e^{-iax}\,\mathrm{d}x.$$

$$\widetilde{h}(p) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2 t} e^{-iax}\,\mathrm{d}x\right] e^{-pt}\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iax}\,\mathrm{d}x \int_0^{\infty} e^{-(p+x^2)t}\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-iax}}{x^2+p}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{x^2+p}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\sqrt{p}} e^{-a\sqrt{p}}$$

$$L^{-1}[e^{-a\sqrt{p}}] = L^{-1}[-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}(\frac{1}{\sqrt{p}}e^{-a\sqrt{p}})]$$

$$= L^{-1}[-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\widetilde{h}(p)] = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}h(t) = \frac{a}{2\sqrt{\pi}t^{3/2}}e^{-\frac{a^2}{4t}}$$

$$L^{-1}[\frac{1}{p}e^{-a\sqrt{p}}] = \int_0^t \frac{a}{2\sqrt{\pi}s^{3/2}}e^{-\frac{a^2}{4s}}\,\mathrm{d}s$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{a}{2\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-\tau^2}\,\mathrm{d}\tau = \mathrm{erfc}(\frac{a}{2\sqrt{t}})$$

其中$\mathrm{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^{\infty} e^{-s^2}\,\mathrm{d}s$称为余误差函数.

离散傅里叶变换

-已知周期函数的一些离散点处的值

快速傅里叶变换

运算量从 $8N^2$ 减少到 $5N\log_2 N$

小波变换

-既能提供频率信息又能提供时间信息

-利用尺度函数和小波函数生成出一组函数族

积分变换的一般形式

$$I[f](\omega) = \int_D K(\omega, x) f(x)\mathrm{d}x$$

$$f(x) = \int_D K^{-1}(\omega, x) I[f](\omega)\mathrm{d}\omega$$