数学物理方法

2025春

教材：
《数学物理方法讲义》杨明、石佩虎编
2018.9 (2021.3 重印)
东南大学出版社

3) 格林函数及其性质

1.Green函数是什么?

$$\begin{cases} -\Delta_y G(x,y) = \delta(x-y), & x\in D, y\in D, \\ G(x,y)=0, & x\in D, y\in \partial D. \end{cases}$$

该问题的解称为*Green*函数,*Green*函数的物理意义.

有何应用?(可以给出下面问题解的积分表达式)

边值问题: $\quad (I) \begin{cases} -\Delta u = f, & in\ D, \\ u = g, & on\ \partial D. \end{cases}$

对函数$u(y)$和$G(x,y)$在区域D上应用第二格林公式得

$$\int_D u(y)\Delta_y G(x,y) - G(x,y)\Delta_y u(y)\,\mathrm{d}y$$

$$= \int_{\partial D} u(y)\frac{\partial G(x,y)}{\partial n} - G(x,y)\frac{\partial u(y)}{\partial n}\,\mathrm{d}S$$

注意到$x \in D$，所以

$$\int_D u(y)\Delta_y G(x,y)\,\mathrm{d}y = -\int_D u(y)\delta(x-y)\,\mathrm{d}y = -u(x)$$

$$\Rightarrow \quad u(x) = \int_D G(x,y)f(y)\,\mathrm{d}y - \int_{\partial D} g(y)\frac{\partial G(x,y)}{\partial n}\,\mathrm{d}S.$$

2.推广到其它类型的边界条件.

$$(II)\begin{cases} -\Delta u = f, & in\ D, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}} + \alpha u = g, & on\ \partial D. \end{cases} \quad (III)\begin{cases} -\Delta u = f, & in\ D, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}} = g, & on\ \partial D. \end{cases}$$

$$(IV)\begin{cases} -\Delta u = f, \quad in\ D, \\ u = g,\ \ on\ \Gamma_1,\ \dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}} = h,\ \ on\ \Gamma_2, \partial D = \Gamma_1 + \Gamma_2. \end{cases}$$

$$
\text{(III)} \quad \begin{cases} -\Delta u = f, & x \in D, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = g, & x \in \partial D. \end{cases}
$$

1. 如果$u(x)$是该问题的解，则$u(x)+C$也是一个解
2. $-\int_D f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\partial D} g(x)\,\mathrm{d}S$

M1. $$\begin{cases} -\Delta_y G(x,y) = \delta(x-y), & x \in D, \ \ y \in D \\ \frac{\partial G(x,y)}{\partial n(y)} = -1/|\partial D|, & x \in D, \ \ y \in \partial D. \end{cases}$$

$$u(x) = \int_D G(x,y) f(y)\,\mathrm{d}y + \int_{\partial D} G(x,y) g(y)\,\mathrm{d}S + \frac{1}{|\partial D|}\int_{\partial D} u(y)\,\mathrm{d}S$$

M2. $$\begin{cases} -\Delta_y \tilde{G}(x,y) = \delta(x-y) - 1/|D|, & x \in D, \ \ y \in D, \\ \frac{\partial \tilde{G}(x,y)}{\partial n} = 0, & x \in D, \ \ y \in \partial D. \end{cases}$$

$$u(x) = \int_D \tilde{G}(x,y) f(y)\,\mathrm{d}y + \int_{\partial D} \tilde{G}(x,y) g(y)\,\mathrm{d}S + \frac{1}{|D|}\int_D u(y)\,\mathrm{d}y$$

3.*Green*函数的对称性.

$G(x, y) = G(y, x)$ 以Dirichlet边界条件为例.

从物理意义理解该对称性.

对$G(x, z)$和$G(y, z)$利用第二*Green*公式证明.

4. $Green$函数奇异性

令$v(x,y)=G(x,y)-\phi(x-y)$,则

$$\begin{cases} -\Delta_y v(x,y)=0, & x,y\in D, \\ v(x,y)=-\phi(x-y), & x\in D, y\in\partial D. \end{cases}$$

注:

容易看到当$x,y\in D, y\to x$时, $v(x,y)$有界,

$\phi(x-y)\to\infty \Rightarrow G(x,y)\to\infty.$

课堂练习

考虑一维问题

$$\begin{cases} u''(x)+4u(x)=f(x), \quad 0<x<1, \\ u(0)=a, \quad u(1)=b. \end{cases}$$

请求出该问题对应的格林函数，并用此格林函数表示问题的解.

加州理工研究生考试题

解 记该问题的格林函数为$G(x,y)$，则格林函数满足

$$\begin{cases} G_{yy}(x,y)+4G(x,y)=\delta(x-y), & 0<x,y<1, \\ G(x,0)=0, \quad G(x,1)=0, & 0<x<1. \end{cases}$$

利用特征函数展开法求解，于是考虑特征值问题

$$\phi''(y)+\lambda\phi(y)=0, \quad \phi(0)=0, \quad \phi(1)=0.$$

解得

$$e.v.\ \ \lambda_n=(n\pi)^2, \quad e.f.\ \ \phi_n(y)=\sin n\pi y, \quad n=1,2,\cdots$$

用此特征函数系展开得

$$\delta(x-y)=\sum_{n=1}^{\infty}2\sin n\pi x\sin n\pi y,\qquad G(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n(x)\sin n\pi y,$$

代入得

$$-\lambda_n C_n(x)+4C_n(x)=2\sin n\pi x\quad\Rightarrow\quad C_n(x)=\frac{2\sin n\pi x}{4-(n\pi)^2}$$

$$\Rightarrow\qquad G(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\sin n\pi x}{4-(n\pi)^2}\sin n\pi y.$$

对$u(y)$, $G(x,y)$应用第二格林公式得

$$\int_0^1 u''(y)G(x,y)-G_{yy}(x,y)u(y)\,\mathrm{d}y$$

$$=u(0)G_y(x,0)-u(1)G_y(x,1)$$

$$\int_0^1 (f(y)-4u(y))G(x,y)-(\delta(x-y)-4G(x,y))u(y)\,\mathrm{d}y$$

$$=aG_y(x,0)-bG_y(x,1)$$

$$\Rightarrow\ u(x)=-aG_y(x,0)+bG_y(x,1)+\int_0^1 G(x,y)f(y)\,\mathrm{d}y.$$

下午7时50分

4) 特殊区域上的格林函数

1.上半空间R_+^3的Green函数

$$\begin{cases} -\Delta_y G(x,y) = \delta(x-y), & x \in R_+^3, y \in R_+^3, \\ G(x,y) = 0, & x \in R_+^3, y \in \partial R_+^3. \end{cases}$$

利用全空间中的基本解$\phi(x) = \dfrac{1}{4\pi |x|}$,镜像法.

idea:寻找$x \in R_+^3$关于∂R_+^3的镜像对称点以及电荷配置.

例.利用Green函数给出下面问题的解的表达式

$$\begin{cases} -\Delta u = 0, & x = (x_1, x_2, x_3) \in R_+^3 \\ u(x_1, x_2, 0) = h(x_1, x_2), & (x_1, x_2) \in R^2 \\ \lim\limits_{|x| \to \infty} u(x) = 0. \end{cases}$$

由格林函数法知

$$u(x) = -\iint_{\mathbb{R}^2} h(y_1, y_2) \frac{\partial G(x,y)}{\partial n}\Big|_{y_3=0} \mathrm{d}y_1 \mathrm{d}y_2$$

注意到$n=(0,0,-1)$，所以

$$
-\frac{\partial G(x,y)}{\partial n}\Big|_{y_3=0}=\frac{\partial G(x,y)}{\partial y_3}\Big|_{y_3=0}
=\frac{x_3}{2\pi[(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+x_3^2]^{3/2}}
$$

从而

$$
u(x)=\frac{x_3}{2\pi}\iint_{\mathbb{R}^2}\frac{h(y_1,y_2)}{[(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+x_3^2]^{3/2}}\,\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2.
$$

课堂练习

用镜像法构造下面问题对应的格林函数并求解.

$$\begin{cases} -\Delta u = 0, & x \in \mathbb{R}^3_+, \\ u_{x_3}(x_1,x_2,0) = h(x_1,x_2), & (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2, \\ u(x) = 0, & |x| = \infty. \end{cases}$$

$$u(x_1,x_2,x_3) = -\iint_{R^2} \frac{h(y_1,y_2)}{2\pi\sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2+x_3^2}}\,\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2$$

例. 推广到上半平面R_+^2

$$
\begin{cases}
u_{xx} + u_{yy} = 0, & x \in R, y > 0, \\
u(x,0) = \varphi(x), & x \in R, \\
\lim\limits_{x^2+y^2 \to \infty} u(x,y) = 0.
\end{cases}
$$

请给出Green函数和解的积分表达式!

解： 首先在$\mathbb{R}^2_+$中任取一点$x=(x_1,x_2)$，

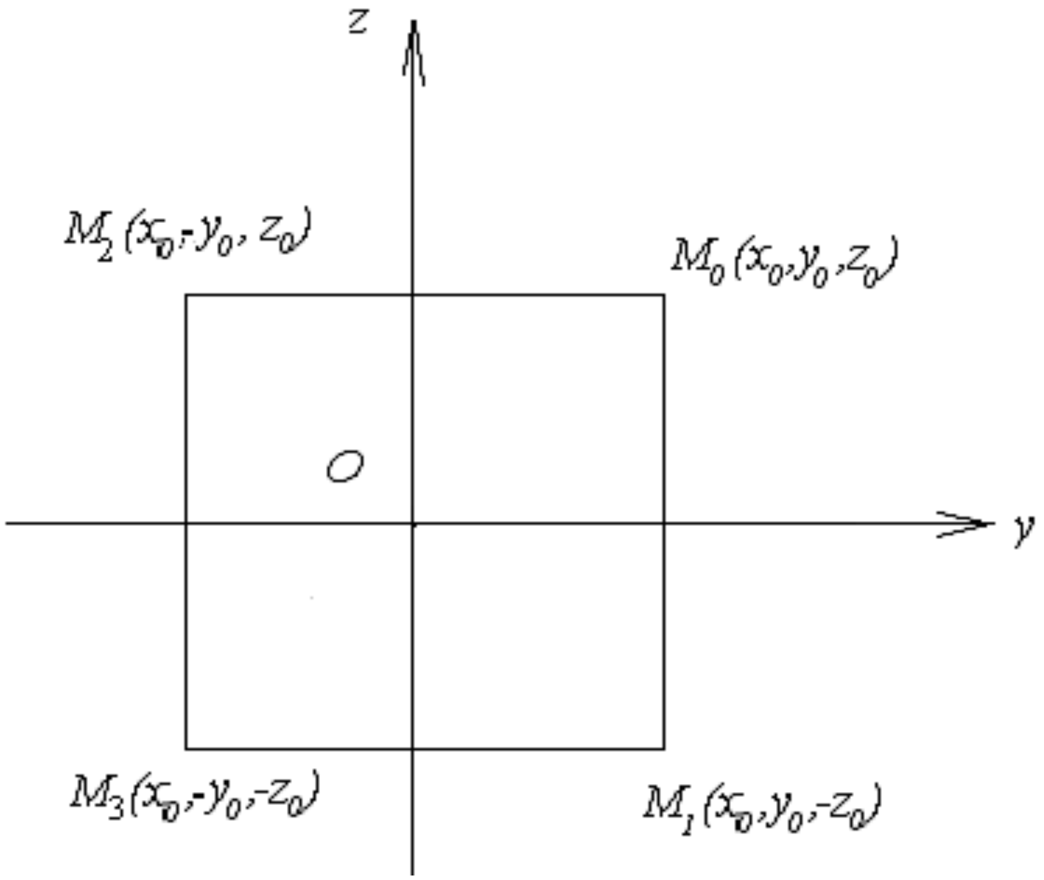
然后求出对称点$x^*=(x_1,-x_2)$，

$$G(x,y)=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|x-y|}-\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|x^*-y|}$$

再用格林函数法给出

$$u(x_1,x_2)=\frac{x_2}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{h(y_1)}{(x_1-y_1)^2+x_2^2}\,\mathrm{d}y_1.$$

4.3.3 四分之一空间的格林函数



$$G(M,M_0)=\frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{r_{MM_0}}-\frac{1}{r_{MM_1}}-\frac{1}{r_{MM_2}}+\frac{1}{r_{MM_3}}\right]$$

思考：四分之一平面

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, & x>0, y>0, \\ u(x,0)=\varphi(x), & x>0, \\ u(0,y)=\psi(y), & y>0, \\ \lim\limits_{x^2+y^2\to\infty} u(x,y)=0. & \end{cases}$$

(1)请给出Green函数！

(2)若将B.C.改为

$$u_x(x,0)=\varphi(x), \quad x>0, \quad u(0,y)=\psi(y), \quad y>0,$$

此时如何构造Green函数？

2.三维球B_R上的Green函数

$$\begin{cases} -\Delta_y G(x,y)=\delta(x-y), & x\in B_R, y\in B_R, \\ G(x,y)=0, & x\in B_R, y\in \partial B_R. \end{cases}$$

利用全空间中的基本解$\phi(x)=\dfrac{1}{4\pi|x|}$,镜像法.

idea:寻找$x\in B_R$关于∂B_R的镜像对称点以及电荷配置.

先在$B_R(0)$中任取一点x，在点x处放置一个单位正电荷，

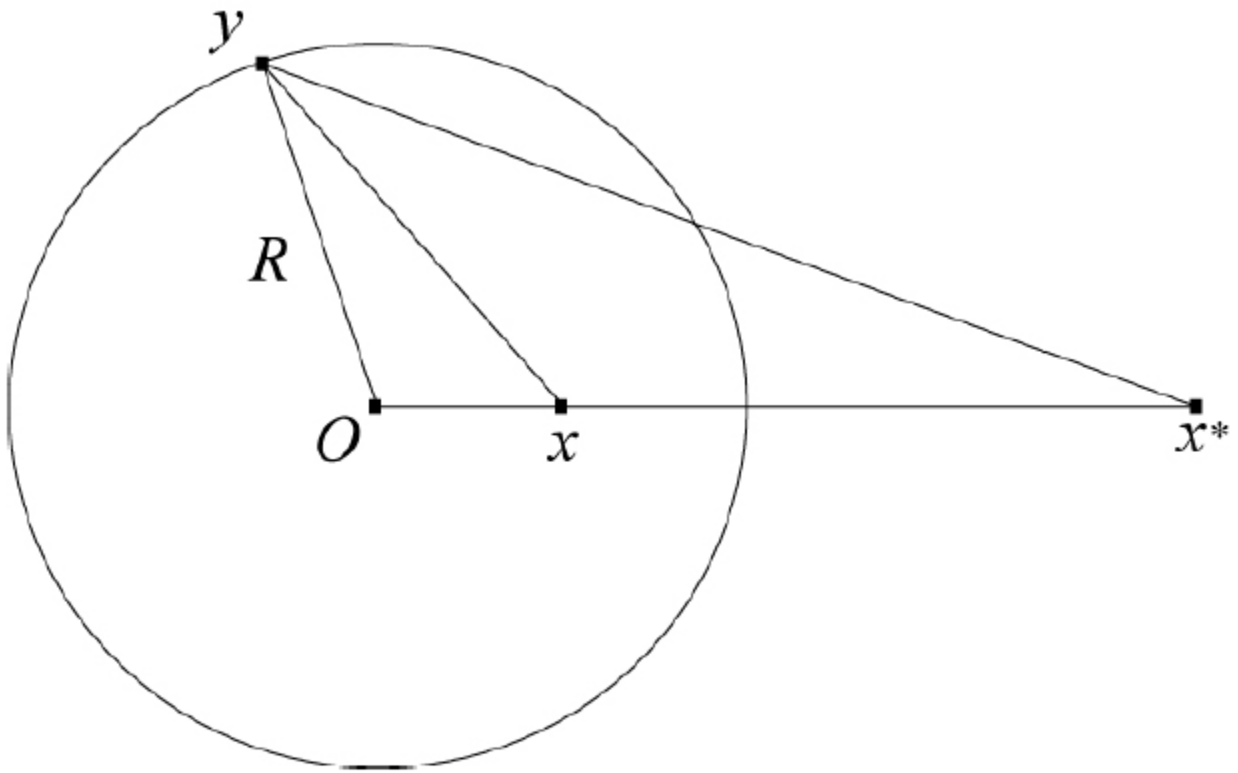
然后求出点x关于边界球面$|x| = R$的对称点x^*. $x^* = \dfrac{xR^2}{|x|^2}$

在x^*处放置一个电量为q的负电荷，q是多少呢?

$$\forall\ y \in \partial B_R(0), \quad \frac{1}{4\pi|x-y|} = \frac{q}{4\pi|x^*-y|}$$

$$\Rightarrow \quad q = \frac{|x^*-y|}{|x-y|}.$$

下午7时50分



$$\triangle Oxy \sim \triangle Oyx^*(\text{边角边})，从而 \quad q = \frac{|x^* - y|}{|x - y|} = \frac{|x^*|}{R} = \frac{R}{|x|}.$$

$$\Rightarrow \qquad G(x,y) = \frac{1}{4\pi|x-y|} - \frac{R}{4\pi|x|\cdot|x^*-y|}.$$

下午7时50分

利用Green函数给出下面问题的解的表达式:

$$\begin{cases}-\Delta u=0, & x=(x_1,x_2,x_3)\in B_R,\\ u=h, & x\in\partial B_R.\end{cases}$$

并将该表达式化为球坐标下的积分(泊松公式).

$$u(x)=\frac{R^2-|x|^2}{4\pi R}\iint\limits_{|y|=R}\frac{h(y)}{|y-x|^3}dS$$

$$u(r_0,\theta_0,\varphi_0)=\frac{R(R^2-r_0^2)}{4\pi}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\frac{h(\theta,\varphi)\sin\theta}{(R^2+r_0^2-2Rr_0\cos\psi)^{\frac{3}{2}}}d\theta,$$

其中ψ表示x和y的夹角, $x=(r_0,\theta_0,\varphi_0)$, $y=(R,\theta,\varphi)$.

由格林函数法知 $u(x)=-\iint_{|y|=R}h(y)\dfrac{\partial G(x,y)}{\partial n}\mathrm{d}S.$

因为$n=y/R$，所以

$$-\frac{\partial G(x,y)}{\partial n}\bigg|_{|y|=R}=-\nabla G\cdot\frac{y}{R}\bigg|_{|y|=R}=-\frac{1}{4\pi}\left(\frac{x-y}{|x-y|^3}-\frac{R}{|x|}\cdot\frac{x^*-y}{|x^*-y|^3}\right)\cdot\frac{y}{R}\bigg|_{|y|=R}$$

$$=-\frac{1}{4\pi R|x-y|^3}\left[x\cdot y-R^2-\frac{|x|^2}{R^2}(x^*\cdot y-R^2)\right]_{|y|=R}=\frac{R^2-|x|^2}{4\pi R|x-y|^3}$$

代入即得解的积分表达式为

$$u(x)=\frac{R^2-|x|^2}{4\pi R}\iint_{|y|=R}\frac{h(y)}{|x-y|^3}\mathrm{d}S.$$

推广到二维圆形区域上Dirichlet边界条件下的*Green*函数和泊松公式.

$$\begin{cases} -\Delta u = 0, & x = (x_1, x_2) \in B_R, \\ u = h, & x \in \partial B_R. \end{cases}$$

$$G(x,y) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|y-x|} - \frac{1}{2\pi} \ln \frac{R}{|x||y-x^*|},$$

$$u(x) = \frac{R^2 - |x|^2}{2\pi R} \int_{|y|=R} \frac{h(y)}{|y-x|^2} ds \quad \Leftarrow \quad \text{推导此式!}$$

$$u(r_0, \theta_0) = \frac{R^2 - r_0^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{h(\theta)}{R^2 + r_0^2 - 2Rr_0 \cos(\theta - \theta_0)} d\theta$$

其中 $x = (r_0, \theta_0), y = (R, \theta)$.

注：分离变量法也可得到此公式。

下午7时50分

例. 用镜像法求半圆$D=\{x^2+y^2<R^2, y>0\}$内的Laplace方程满足Dirichlet边值问题的Green函数。

解 在半圆区域中任选一点$P=(x_0,y_0)$放置一个单位正电荷，求出该点关于圆弧的对称点 $P^*=\dfrac{(x_0,y_0)R^2}{x_0^2+y_0^2}$ 放置一个单位负电荷；在点$Q=(x_0,-y_0)$放置一个单位负电荷，求出点$(x_0,-y_0)$关于圆弧的对称点 $Q^*=\dfrac{(x_0,-y_0)R^2}{x_0^2+y_0^2}$ 放置一个单位正电荷. 将这4个点电荷的电势叠加即得所需的格林函数. 记$M=(x,y)$，则

$$G(M,P)=-\frac{1}{2\pi}\ln|M-P|+\frac{1}{2\pi}\ln|M-P^*|+\frac{1}{2\pi}\ln|M-Q|-\frac{1}{2\pi}\ln|M-Q^*|.$$

课堂练习

1.

用镜像法构造半空间 $\{x=(x_1,x_2,x_3),\ x_1+x_2+x_3>0\}$

满足Dirichlet边值条件的格林函数.

解　在区域内任取一点$x=(x_1,x_2,x_3)$放置一个单位正电荷

求出该点关于边界平面的对称点x^*

$x^*=(x_1/3-2x_2/3-2x_3/3,\ x_2/3-2x_1/3-2x_3/3,\ x_3/3-2x_1/3-2x_2/3)$

并在x^*处放置一个单位负电荷.

$$G(x,y)=\frac{1}{4\pi|y-x|}-\frac{1}{4\pi|y-x^*|}.$$

2. 用镜像法构造半球区域

$$D=\{x=(x_1,x_2,x_3)|x_1^2+x_2^2+x_3^2<R^2,\ x_3>0\}$$

满足Dirichlet边值条件的拉普拉斯方程的格林函数.

并请思考如果将区域改为

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2<R^2,\ x_1>0,\ x_2>0,\ x_3>0$$

那么需要多少个点电荷来构造格林函数.

解

在区域D中任取一点$x=(x_1,x_2,x_3)$放置一个单位正电荷

对称点$x^*=\frac{xR^2}{|x|^2}$处放置一个电量为$\frac{R}{|x|}$的负电荷，

对称点$\overline{x}=(x_1,x_2,-x_3)$处放置一个单位负电荷，

再在$\overline{x}$关于球面的对称点$\overline{x}^*=\frac{\overline{x}R^2}{|x|^2}$处放置一个电量

为$\frac{R}{|x|}$的正电荷. 故格林函数为

$$G(x,y)=\frac{1}{4\pi|x-y|}-\frac{R}{4\pi|x|\cdot|x^*-y|}-\frac{1}{4\pi|\overline{x}-y|}-\frac{R}{4\pi|x|\cdot|\overline{x}^*-y|}$$