自觉遵守考场纪律 如考试作弊 此答卷无效

姓名________ 学号________ 密……封……线

# 东 南 大 学 考 试 卷 (B)

课程名称 数学物理方法 考试学期 17-18-3 得分________

适用专业 面上 考试形式 闭卷 考试时间长度 120分钟

| 题目 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 |
|---|---|---|---|---|---|
| 得分 | | | | | |

注意：本份试卷可能会用到以下公式：

1、$\mathscr{L}[\sin\alpha t](p)=\dfrac{\alpha}{p^2+\alpha^2}$，$\mathscr{L}[\cos\alpha t](p)=\dfrac{p}{p^2+\alpha^2}$，$\mathscr{L}[t^n\mathrm{e}^{at}](p)=\dfrac{n!}{(p-a)^{n+1}}$；

2、$\mathscr{L}[f(t-t_0)H(t-t_0)](p)=\tilde{f}(p)\mathrm{e}^{-t_0p},\ t_0\geq 0$;

3、$\mathscr{L}[\delta(t-t_0)](p)=\mathrm{e}^{-t_0p},\ t_0\geq 0$; $\mathscr{F}[f(x-b)](\lambda)=\mathrm{e}^{-i\lambda b}\hat{f}(\lambda)$;

4、$\mathscr{F}\left[\dfrac{\sin\omega}{2\pi(\cosh x+\cos\omega)}\right]=\dfrac{\sinh\omega\lambda}{\sinh\pi\lambda},\quad |\omega|<\pi$;

5、$(x^\nu J_\nu(x))'=x^\nu J_{\nu-1}(x),\ (x^{-\nu}J_\nu(x))'=-x^{-\nu}J_{\nu+1}(x)$.

## 一 填空题 (每题5分，共30分)

1. 平面薄板内无热源，薄板用区域Ω表示，当此薄板内温度达到稳恒状态时，稳恒温度满足的方程可表示为________.

2. 与初边值问题对应

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=0, & 0<x<l, t>0,\\ u(0,t)=0,\ u(l,t)=0, & t>0,\\ u(x,0)=\varphi(x),\ u_t(x,0)=\psi(x), & 0\leq x\leq l,\end{cases}$$

的特征函数系是____________.

3. 给定初边值问题

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=\sin x, & 0<x<\pi, t>0,\\ u(0,t)=0,\ u(\pi,t)=A, & t>0,\\ u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=0, & 0\leq x\leq \pi,\end{cases}$$

其中$A\neq 0$为常数，则当$w(x)=$________时，利用变换$u(x,t)=v(x,t)+w(x)$，可把问题化为齐次方程齐次边界条件的初边值问题.

4. 已知$f(x)$的Fourier变换为$\hat{f}(\lambda)$，则函数$\hat{f}(\lambda)\cos\lambda$的Fourier逆变换为________.

5. 用降维法和d'Alembert公式，下列波动方程初值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) = 0, & (x,y,z) \in R^3, t > 0, \\ u(x,y,z,0) = x^2, u_t(x,y,z,0) = y, & (x,y,z) \in R^3 \end{cases}$$

的解为________________.

6. 用$J_0(x)$及其导数或高阶导数来表示$J_2(x)$, 得$J_2(x) =$ ________________.

二 简单计算(32分)

1. 求解特征值问题

$$\begin{cases} u'' + 2u' + \lambda u = 0, & 0 < x < 1, \\ u(0) = 0,\ u(1) = 0. \end{cases}$$

2. 求函数$f(t) = t\mathrm{e}^{-at}\cos t$的laplace变换.

密 封 线

3. 用特征线法求解问题

$$\begin{cases} 2u_{xx}-3u_{xy}+u_{yy}=0, & x\in R, y>0, \\ u|_{y=0}=0,\ u_y|_{y=0}=\cos x, & x\in R. \end{cases}$$

4. 设$u$是三维区域$\Omega$上的调和函数，对于$0<r\leq R$球$B_r=\{(x,y,z)\ :(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\leq r^2\}\subset\Omega$，利用球体平均值公式

$$u(x_0,y_0,z_0)=\frac{1}{4\pi r^3/3}\int\int\int_{B_r}u(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

证明：球面平均值公式

$$u(x_0,y_0,z_0)=\frac{1}{4\pi r^2}\oint_{\partial B_r}u(x,y,z)\mathrm{d}S.$$

三 (13分) 用分离变量法求解问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & 0 < x < l,\ t > 0, \\ u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x), & 0 \le x \le l. \end{cases}$$

线

封

密

四 (12分) 用Fourier变换法推导下列定解问题的求解公式

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, & -\infty<x<\infty,\, 0<y<\pi, \\ u(x,0)=0,\, u(x,\pi)=g(x), & -\infty<x<\infty, \end{cases}$$

其中$g(x)$的Fourier变换存在.

五（13分）利用Bessel级数及用分离变量法理论求解下列圆柱体上热传导方程初边值问题

$$
\begin{cases}
u_t - a^2(u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + u_{zz}) = 0, & 0 < r < 1,\ 0 < z < \pi, t > 0, \\
|u(0,z,t)| < \infty,\ u(1,z,t) = 0, & 0 \le z \le \pi, t > 0, \\
u(r,0,t) = u(r,\pi,t) = 0, & 0 \le r \le 1, t > 0, \\
u(r,z,0) = r\sin z, & 0 \le r \le 1, 0 \le z \le \pi.
\end{cases}
$$

注：$N_{mk}^2 = \int_0^b x J_m^2(\alpha_k^{(m)} x/b)\mathrm{d}x = \frac{b^2}{2} J_{m+1}^2(\alpha_k^{(m)})$, 其中$\alpha_k^{(m)}$是 $J_m(x)$的第$k$个正零点.

线

封

密