数学物理方法

2025春

教材：
《数学物理方法讲义》杨明、石佩虎编
2018.9 (2021.3 重印)
东南大学出版社

5. 非齐次边界条件

- 构造满足非齐次边界条件的辅助函数
- 特殊情况下,可将PDE和B.C.同时齐次化

例1. 非齐次方程+非齐次边界条件问题

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=f(x,t), & 0<x<l, t>0, \\ u(0,t)=u_1(t), u(l,t)=u_2(t), & t\geq 0, \\ u(x,0)=\varphi(x), u_t(x,0)=\psi(x), & 0\leq x\leq l. \end{cases}$$

推广到其它类型的边界条件.

基本的想法：令$u(x,t)=v(x,t)+w(x,t)$，其中

$$w(x,t)=u_1(t)+\frac{u_2(t)-u_1(t)}{l}x,$$

计算$v(x,t)$满足的条件

$$\begin{cases} v_{tt}-a^2v_{xx}=\widetilde{f}(x,t), & 0<x<l,\ \ t>0, \\ v(0,t)=0,\ \ v(l,t)=0, & t\geq 0, \\ v(x,0)=\widetilde{\varphi}(x),\ \ v_t(x,0)=\widetilde{\psi}(x), & 0\leq x\leq l, \end{cases}$$

$$\widetilde{f}(x,t)=f(x,t)-w_{tt},\quad \widetilde{\varphi}(x)=\varphi(x)-w(x,0),$$

$$\widetilde{\psi}(x)=\psi(x)-w_t(x,0).$$

- $w(0,t)=u_1(t)$, $w_x(l,t)=u_2(t)$,

  则取$w(x,t)=u_1(t)+u_2(t)x$;

- $w_x(0,t)=u_1(t)$, $w_x(l,t)=u_2(t)$,

  则取$w(x,t)=u_1(t)x+\frac{u_2(t)-u_1(t)}{2l}x^2$;

- $w(0,t)=u_1(t)$, $(w_x+\sigma w)(l,t)=u_2(t)$,

  则取$w(x,t)=u_1(t)+\frac{u_2(t)-\sigma u_1(t)}{1+\sigma l}x$.

课堂练习

求解非齐次波动方程初边值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = -\dfrac{\omega^2 x}{l}\sin\omega t, & 0 < x < l,\ \ t > 0, \\ u(0,t) = \omega t, \quad u(l,t) = \sin\omega t, & t \geq 0, \\ u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = \omega, & 0 \leq x \leq l. \end{cases}$$

例2.考虑如何求解下面的问题？

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=A, & 0<x<l,t>0, \\ u(0,t)=0,u(l,t)=B, & t\geq 0, \\ u(x,0)=u_t(x,0)=0, & 0\leq x\leq l. \end{cases}$$

其中A,B都是常数.

解 令$u(x,t)=v(x,t)+w(x)$，此时构造$w(x)$使其满足

$$-a^2w_{xx}=A,\quad w(0)=0,\ w(l)=B.$$

解之得 $$w(x)=-\frac{A}{2a^2}x^2+(\frac{Al}{2a^2}+\frac{B}{l})x,$$

则$v(x,t)$满足

$$\begin{cases} v_{tt}-a^2v_{xx}=0, & 0<x<l,\ t>0,\\ v(0,t)=0,\ v(l,t)=0, & t\geq 0,\\ v(x,0)=-w(x),\ v_t(x,0)=0, & 0\leq x\leq l. \end{cases}$$

思考：用多种方法求解问题

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=f(x,y), & 0<x<a, 0<y<b, \\ u(0,y)=g(y), \quad u(a,y)=h(y), & 0\le y\le b, \\ u(x,0)=\varphi(x), \quad u(x,b)=\psi(x), & 0\le x\le a. \end{cases}$$

解 方法1. 边界条件齐次化结合特征函数展开法.

构造函数$w(x,y)=g(y)+\frac{x}{a}(h(y)-g(y))$

令$v(x,y)=u(x,y)-w(x,y)$，则

$$\begin{cases} v_{xx}+v_{yy}=\widetilde{f}(x,y), & 0<x<a,\ 0<y<b, \\ v(0,y)=0, \quad u(a,y)=0, & 0\leq y\leq b, \\ v(x,0)=\widetilde{\varphi}(x), \quad v(x,b)=\widetilde{\psi}(x), & 0\leq x\leq a, \end{cases}$$

其中 $\widetilde{f}(x,y)=f(x,y)-w_{yy}(x,y)$,

$$\widetilde{\varphi}(x)=\varphi(x)-w(x,0),\ \widetilde{\psi}(x)=\psi(x)-w(x,b).$$

方法2. 线性拆分法.

令$u = v + w$，其中v, w分别满足边值问题

$$
\begin{cases}
v_{xx} + v_{yy} = 0, & 0 < x < a,\ 0 < y < b \\
v(0,y) = g(y), \quad v(a,y) = h(y), & 0 \le y \le b, \\
v(x,0) = 0, \quad v(x,b) = 0, & 0 \le x \le a.
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
w_{xx} + w_{yy} = f(x,y), & 0 < x < a,\ 0 < y < b \\
w(0,y) = 0, \quad w(a,y) = 0, & 0 \le y \le b, \\
w(x,0) = \varphi(x), \quad w(x,b) = \psi(x), & 0 \le x \le a.
\end{cases}
$$

两个问题都可以用特征函数展开法求出.

6. 高维问题

- 二重傅里叶级数
- 高维问题

$$D=[0,a]\times[0,b],\ L^2(D):=\{f|\iint_D|f(x,y)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y<\infty\},$$

设$\{\phi_n(x)\}_1^\infty$是$L^2[0,a]$的一组标准正交基，

$\{\psi_m(y)\}_1^\infty$是$L^2[0,b]$的一组标准正交基，

则$\{\phi_n(x)\psi_m(y)\}_{n,m=1}^\infty$构成$L^2(D)$的标准正交基.

设函数$f\in L^2(D)$，$f(x,y)=\sum_{m=1}^\infty\sum_{n=1}^\infty A_{nm}\phi_n(x)\psi_m(y)$,

A_{nm}为二重傅立叶系数，该级数称为二重傅立叶级数.

$$A_{nm}=\iint_D f(x,y)\phi_n(x)\psi_m(y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\quad n,m=1,2,\cdots.$$

如何求系数A_{nm}呢?

方法1.利用单重傅里叶级数的结论

$$f(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}A_{nm}\phi_n(x)\psi_m(y)$$

$f(x,y)$看成y的函数 $$\sum_{n=1}^{\infty}A_{nm}\phi_n(x)=\int_0^b f(x,y)\psi_m(y)\,\mathrm{d}y$$

右端是x的函数，记为$h(x)$

$$A_{nm}=\int_0^a h(x)\phi_n(x)\,\mathrm{d}x=\iint_D f(x,y)\phi_n(x)\psi_m(y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

方法2.利用正交基的正交性

例1.考虑正方形区域上的二维热方程

设$D: 0 < x < \pi, 0 < y < \pi$,

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + u_{yy}, & in\ D, t > 0, \\ u = 0, & on\ \partial D,\ \ t \geq 0, \\ u(x, y, 0) = \varphi(x, y), & in\ \ D. \end{cases}$$

解　令$u(x,y,t)=\phi(x,y)T(t)$，代入方程得

$$T'(t)\phi(x,y)=kT(t)\Delta\phi(x,y)$$

变量分离得　$$\frac{T'(t)}{kT(t)}=\frac{\Delta\phi(x,y)}{\phi(x,y)}=-\lambda$$

结合边界条件得到特征值问题

$$\begin{cases}\Delta\phi(x,y)+\lambda\phi(x,y)=0, & (x,y)\in D,\\ \phi(x,y)=0, & (x,y)\in\partial D,\end{cases}$$

继续用分离变量法，令$\phi(x,y)=X(x)Y(y)$，代入

$$X''(x)Y(y)+X(x)Y''(y)+\lambda X(x)Y(y)=0,$$

变量分离得
$$\frac{X''(x)}{X(x)}+\frac{Y''(y)}{Y(y)}+\lambda=0.$$

上式中，第一项是x的函数，第二项是y的函数，

所以这两项必为常数.

设$X''(x)/X(x)=-\mu$，μ为常数，

结合边界条件得到子特征值问题(I)

$$X''(x)+\mu X(x)=0,\ \ 0<x<\pi,\ \ X(0)=X(\pi)=0.$$

该问题的特征值$\mu_n=n^2$，

对应的特征函数$X_n(x)=\sin nx,\ n=1,2,\cdots.$

类似设$Y''(y)/Y(y) = -\nu$，ν为常数，

结合边界条件得到子特征值问题(II)

$$Y''(y) + \nu Y(y) = 0,\ \ 0 < y < \pi,\ \ Y(0) = Y(\pi) = 0.$$

该问题的特征值$\nu_m = m^2$，

对应的特征函数$Y_m(y) = \sin my,\ m = 1, 2, \cdots.$

综合这两个子特征值问题的结果，可得

- 特征值 $\lambda_{nm} = n^2 + m^2,\ \ n, m = 1, 2, \cdots,$
- 特征函数 $\phi_{nm}(x, y) = \sin nx \sin my,\ \ n, m = 1, 2, \cdots.$

将特征值代入t的方程　$T'(t)+k\lambda_{nm}T(t)=0$,

解得$T_{nm}(t)=e^{-k\lambda_{nm}t}$.

令　$u(x,y,t)=\sum\limits_{m=1}^{\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_{nm}e^{-k\lambda_{nm}t}\sin nx\sin my$;

代入初始条件得

$$g(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}A_{nm}\sin nx\sin my$$

其中　$A_{nm}=\dfrac{4}{\pi^2}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}g(x,y)\sin nx\sin my\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

例2.设$D: 0 < x < \pi, 0 < y < \pi, 0 < z < \pi$,

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0, & in\ D, \\ B.C. \quad u(\pi, y, z) = g(y, z), \\ u(0, y, z) = u(x, 0, z) = u(x, \pi, z) = u(x, y, 0) = u(x, y, \pi) = 0. \end{cases}$$

解 令$u(x,y,z)=X(x)\phi(y,z)$，代入方程得

$$X''(x)\phi(y,z)+X(x)\Delta\phi(y,z)=0$$

分离变量得 $$-\frac{X''(x)}{X(x)}=\frac{\Delta\phi(y,z)}{\phi(y,z)}=-\lambda$$

结合边界条件得特征值问题

$$\begin{cases} \Delta\phi(y,z)+\lambda\phi(y,z)=0, & (y,z)\in(0,\pi)^2, \\ \phi(y,z)=0, & (y,z)\in\partial(0,\pi)^2 \end{cases}$$

- 特征值 $\lambda_{nm} = n^2 + m^2$, $n, m = 1, 2, \cdots$,
- 特征函数 $\phi_{nm}(y, z) = \sin ny \sin mz$, $n, m = 1, 2, \cdots$.

将特征值代入x的方程得

$$X''(x) - \lambda_{nm} X(x) = 0, \ 0 < x < \pi, \quad X(0) = 0,$$

解得 $$X_{nm}(x) = \sinh(\sqrt{n^2 + m^2} x).$$

令

$$u(x,y,z)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}A_{nm}\sinh(\sqrt{n^2+m^2}x)\sin ny\sin mz$$

则

$$g(y,z)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}A_{nm}\sinh(\sqrt{n^2+m^2}\pi)\sin ny\sin mz$$

其中

$$A_{nm}=\frac{4}{\pi^2\sinh(\sqrt{n^2+m^2}\pi)}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}g(y,z)\sin ny\sin mz\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

课堂练习

设$D: 0 < x < 1,\ 0 < y < 1,\ 0 < z < 1$, 求解

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0, & (x, y, z) \in D, \\ u_x(0, y, z) = u_x(1, y, z) = 0, & (y, z) \in [0, 1]^2, \\ u_y(x, 0, z) = u_y(x, 1, z) = 0, & (x, z) \in [0, 1]^2, \\ u_z(x, y, 0) = 0, \quad u_z(x, y, 1) = g(x, y), & (x, y) \in [0, 1]^2, \end{cases}$$

其中$g(x, y) = 5\cos 3\pi x \cdot \cos 4\pi y$.

思考题

考虑热方程逆时问题

$$\begin{cases} u_t - k u_{xx} = 0, & 0 < x < l,\ \ 0 \le t < T, \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, & 0 \le t \le T, \\ u(x,T) = \varphi(x), & 0 \le x \le l. \end{cases}$$

(1)求出该逆时问题的解并分析解的稳定性，

(2)思考如何得到近似的稳定解?