数学物理方法

2025春

教材：
《数学物理方法讲义》杨明、石佩虎编
2018.9 (2021.3 重印)
东南大学出版社

数学物理方法
(Mathematical Physics Methods)

数学物理方程
(Mathematical Physics Equations)

偏微分方程
(Partial Differential Equations)

这三种叫法的联系与区别

- 什么是数学物理方法(求解数理方程的方法)

常见的数理方程举例：

$u_t + u_x = 0$ 传输方程

$u_t + uu_x = 0$ 激波方程

$u_{xx} + u_{yy} = f$ 位势方程

$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$ 耗散波方程

$u_t - iu_{xx} = 0$ 量子力学方程

- 需要的知识:微积分,ODE,复变,线代
- 学习方法(理解思想,重视技巧,多做练习)

偏微分方程指在物理学、力学、工程技术以及其他自然科学、技术科学、管理科学、甚至社会科学等的研究中归纳出来的一些含有未知函数及其偏导数的方程。具有悠久的历史和广泛的应用。

悠久的历史:

特殊的偏微分方程最早出现在1734年欧拉的著作中，并于1743年出现在达朗贝尔的《论动力学》中。

广泛的应用：

传统学科

流体力学：Navier-Stokes方程组(粘性流体)、Euler方程组(无粘流体)

弹性力学：Saint-Venant方程组

电动力学：Maxwell方程组(电磁场)

量子力学：Schrödinger方程　Dirac方程(微观粒子)

广义相对论：Einstein方程(引力场)

规范场：Yang-Mills方程

几何分析：Monge-Ampere方程

磁流体力学、反应流体力学、热弹性力学……

交叉学科

生物数学：生物种群动力学

传染病动力学

DNA分子动力学

金融数学：随机微分方程

经济学

社会科学

……

本课程知识框架

- **微积分方法** 特征线法 (第一、四章) $\rightarrow$ 球面平均法，降维法 (第四章);
- **级数方法** 傅里叶级数 (第二章) $\rightarrow$ 贝塞尔级数，勒让德级数 (第六章);
- **积分变换法** 傅里叶变换 (第三章) $\rightarrow$ 拉普拉斯变换 (第三章);
- **格林函数法** 格林函数 (第五章)。

见附录F 课程教学要求与知识框架（教材第140-141页）

参考书目：

季孝达等，数学物理方程. 科学出版社，2009.

梁昆淼等，数学物理方法. 高等教育出版社，2003.

W.A.Strauss，Partial Differential Equations，世界图书出版公司，2011.

刘文军等，数学物理方程：模型、方法与应用（第二版），科学出版社，2021.

第一章 典型方程的定解问题

- 数学模型的建立
- 定解问题
- 线性PDE

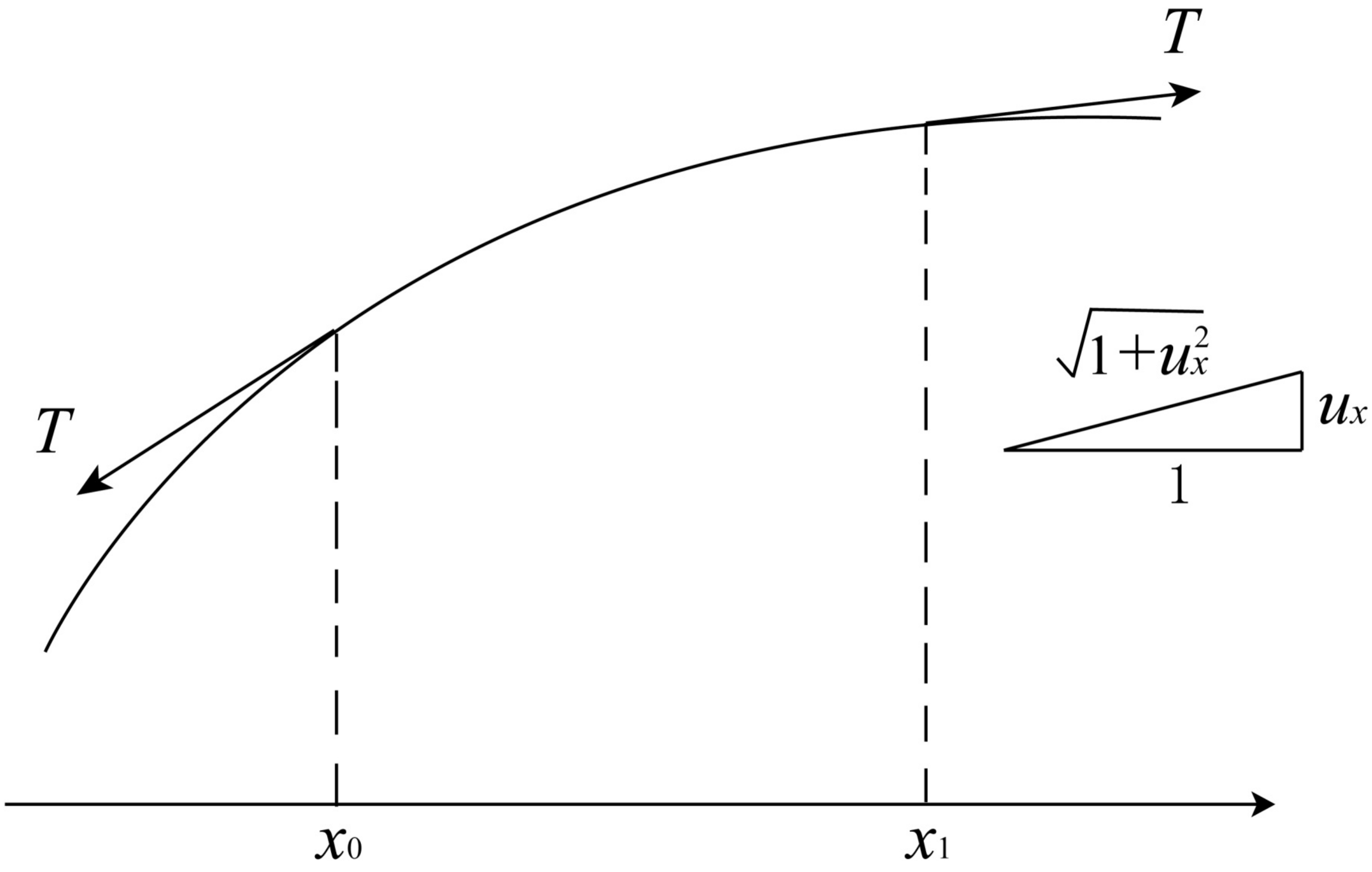
1）数学模型的建立

- 波动方程
- 热传导方程
- 稳态方程（位势方程）

- 设一根均匀柔软细弦,平衡时沿直线拉紧,在外力作用下让其做微小的横振动,研究其振动规律. (微局部受力分析)

- 方程的推广(空气阻力,弹性阻力,外力)
- 高维情形(鼓振动,声波,电磁波)

- 散度定理 (Green公式,Gauss公式统一形式)


T
T
$\sqrt{1+u_x^2}$
u_x
1
x_0
x_1

水平方向 $\left.\dfrac{T}{\sqrt{1+u_x^2}}\right|_{x_0}^{x_1}=0$

竖直方向 $\left.\dfrac{Tu_x}{\sqrt{1+u_x^2}}\right|_{x_0}^{x_1}=\displaystyle\int_{x_0}^{x_1}\rho u_{tt}\,\mathrm{d}x$

因为振动微小，即$|u_x|$很小，所以

$$\sqrt{1+u_x^2}=1+\frac{1}{2}u_x^2+\cdots\approx 1 \quad \mathrm{d}s=\sqrt{1+u_x^2}\,\mathrm{d}x\approx\mathrm{d}x,$$

由第一个方程知T与x无关. 胡克定律知张力T也与t无关

$$\int_{x_0}^{x_1}(Tu_x)_x\,\mathrm{d}x=\int_{x_0}^{x_1}\rho u_{tt}\,\mathrm{d}x \;\Rightarrow\; (Tu_x)_x=\rho u_{tt},$$

$$\Rightarrow \quad u_{tt}=c^2u_{xx}, \quad 其中c=\sqrt{T/\rho}$$

用上面的分析方法还可以将此方程做如下推广：

1. 存在空气阻力ru_t的情况：$u_{tt}-c^2u_{xx}+ru_t=0,\ \ r>0;$

2. 存在弹性阻力ku的情况：$u_{tt}-c^2u_{xx}+ku=0,\ \ k>0;$

3. 存在外力$f(x,t)$的情况：$u_{tt}-c^2u_{xx}=f(x,t).$

格林公式与高斯公式回顾

$$\int_{\partial D} Pdx + Qdy = \iint_D Q_x - P_y dxdy.$$

$$\iint_{\partial\Omega} Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy$$

$$= \iiint_\Omega P_x + Q_y + R_z dxdydz.$$

散度定理回顾 $\int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot n \, dS = \int_D div\mathbf{F} \, dx.$

$$\int_{\partial D} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \iint_D (Q_x - P_y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

∂D的单位切向量为$(\mathrm{d}x/\mathrm{d}s, \mathrm{d}y/\mathrm{d}s)$，

$$\Rightarrow \quad \text{外法向量为 } n = (\mathrm{d}y/\mathrm{d}s, -\mathrm{d}x/\mathrm{d}s).$$

记向量场$\mathbf{F} = (Q, -P)$，则 $\nabla \cdot \mathbf{F} = Q_x - P_y$,

$$\mathbf{F} \cdot n\,\mathrm{d}s = (Q, -P) \cdot (\mathrm{d}y/\mathrm{d}s, -\mathrm{d}x/\mathrm{d}s)\,\mathrm{d}s = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y,$$

$$\Rightarrow \quad \int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot n\,\mathrm{d}s = \iint_D \nabla \cdot \mathbf{F}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

此即为二维情况下的散度定理.

2维拉普拉斯算子

$$\nabla = (\partial_x, \partial_y)$$

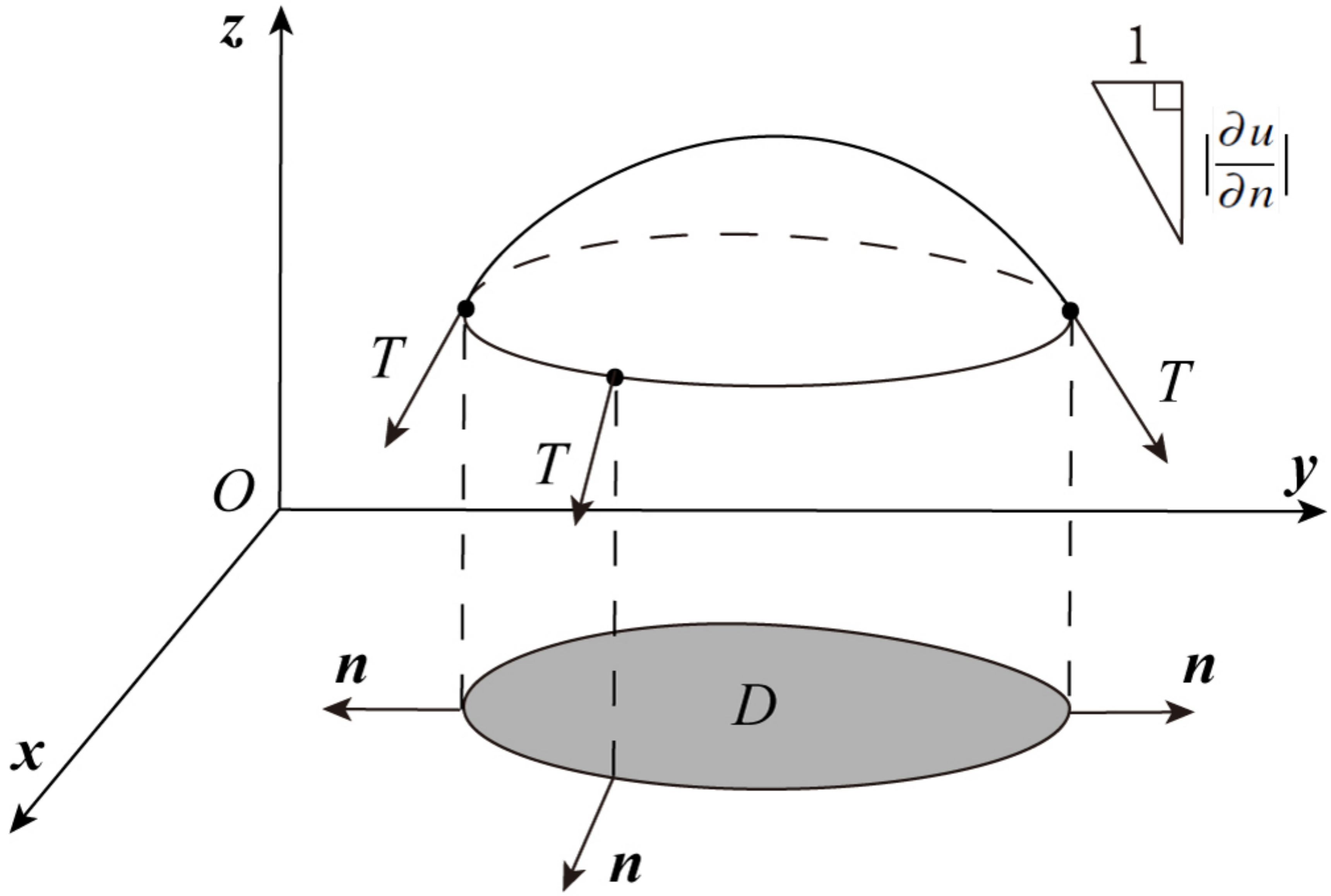
$$\nabla \cdot \nabla u = (\partial_x, \partial_y) \cdot (\partial_x, \partial_y) u = \partial_{xx} u + \partial_{yy} u = \Delta u.$$

3维拉普拉斯算子

$$\nabla = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)$$

$$\nabla \cdot \nabla u = (\partial_x, \partial_y, \partial_z) \cdot (\partial_x, \partial_y, \partial_z) u$$

$$= \partial_{xx} u + \partial_{yy} u + \partial_{zz} u = \Delta u.$$



z
1
$\left|\frac{\partial u}{\partial n}\right|$
T
T
T
O
y
n
n
D
x
n

任意选取鼓面上一块区域D，分析可得

鼓面张力T与位置和时间均无关，

在竖直方向上分析可得 $\int_{\partial D} T\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s = \iint_D \rho u_{tt}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$

利用曲线积分中的Green公式将上式改写为

$$\iint_D \nabla\cdot(T\nabla u)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D \rho u_{tt}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

因为D是任意取的，所以可得 $\rho u_{tt} = \nabla\cdot(T\nabla u)$，

$$\Rightarrow \quad u_{tt} = c^2(u_{xx}+u_{yy}),$$

其中$c = \sqrt{T/\rho}$是波速，$\nabla\cdot\nabla = \partial_x^2+\partial_y^2 = \Delta$

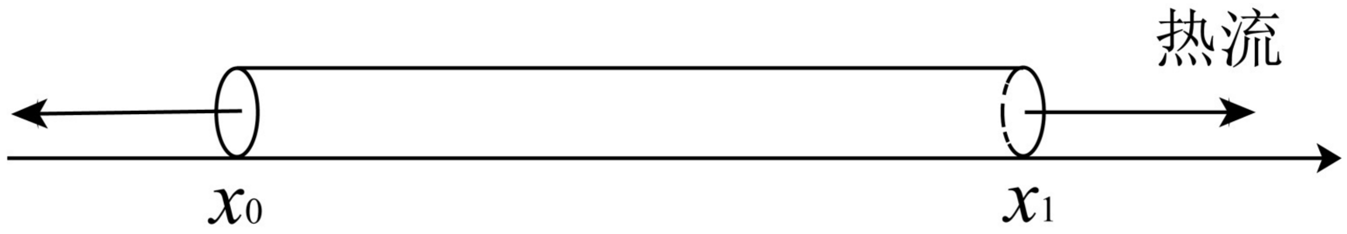
对于三维波动方程，利用曲面积分中的Gauss公式

可推导出来 $$u_{tt} = c^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}),$$

三维波动方程可以用来刻画弹性体中的固态振动，

空气中声波的传播，电磁波的传播等物理现象.

- 设绝热管中充满不流动的液体,考虑液体的温度关于空间和时间的变化规律.



- 方程的推广(热源,热汇)
- 高维情形(导热体-Gauss公式)
- 推广到化学物质浓度问题

$$H(t)=\int_{x_0}^{x_1} C\rho\, u(x,t)\,\mathrm{d}x,\quad H'(t)=\int_{x_0}^{x_1} C\rho\, u_t(x,t)\,\mathrm{d}x.$$

热能的变化产生的原因是端点处热能的流入和流出(热流)，

$$H'(t)=\tilde{k}u_x(x_1,t)-\tilde{k}u_x(x_0,t),$$

其中常数$\tilde{k}>0$. 因而

$$\int_{x_0}^{x_1} C\rho\, u_t(x,t)\,\mathrm{d}x=\tilde{k}u_x(x_1,t)-\tilde{k}u_x(x_0,t)=\int_{x_0}^{x_1}\tilde{k}\,u_{xx}\,\mathrm{d}x,$$

$$\Rightarrow\quad u_t=k\,u_{xx},$$

其中 $k=\tilde{k}/C\rho$称为热传导系数或热扩散系数.

如果管中存在热源(热汇)，则方程变为

$$u_t - k u_{xx} = f(x,t).$$

管中的热传导方程也可以推广到二维和三维的情况.

三维导热体的热传导方程

$$u_t = k(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) = k\Delta u,$$

热传导(扩散)方程也可以用来刻画其他扩散现象，

比如化学物质的扩散、生物种群的扩散等等.

- 稳态方程 (平衡态,与时间无关)
- 拉普拉斯方程 (调和函数)
- 方程的推广(泊松方程-位势方程)

$u_t = u_{tt} = 0$，从而波动方程和扩散方程变为

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0,$$

在一维情况下，拉普拉斯方程简化为$u_{xx} = 0$，

所以其解为$u = c_1 x + c_2$. 至于二维和三维的情况

会有很大不同，后面各章中会具体研究.

拉普拉斯方程可以推广为非齐次方程 $-\Delta u = f$.

静电场$\vec{E}$满足：$\nabla\cdot\vec{E}=\dfrac{4\pi}{\varepsilon}\rho$, ρ是电荷分布密度.

因为静电场是有势场, 所以存在u, 使得$\vec{E}=-\nabla u$.

故 $$\nabla\cdot\vec{E}=\nabla\cdot(-\nabla u)=-\Delta u=\frac{4\pi}{\varepsilon}\rho.$$

- Helmholtz方程

$$u_{tt}=c^2\Delta u,\quad u(x,t)=e^{i\omega t}v(x)$$

$$\Rightarrow \Delta v+k^2v=0,\quad k=\omega/c.$$