电动力学

zhufeng

目录

1 准备知识 **3**

1.1 散度和旋度 3

1.2 格林定理 3

1.3 亥姆霍兹定理 3

1.4 电磁场的基本规律 3

1.5 电磁场的边界条件 4

2 势能 **5**

2.1 镜像法 5

3 静磁场及其边值问题的解 **6**

4 时变电磁场 **6**

4.1 磁矢势和规范不变性 6

4.2 达朗贝尔方程 6

4.3 坡印廷矢量 6

4.4 时谐电磁波 6

4.5 复矢量的麦克斯韦方程组 7

4.6 复电容率和复磁导率 7

4.7 亥姆霍兹方程 7

5 均匀平面波在无界空间中的传播 **7**

5.1 理想介质中的传播 7

5.2 真空中的平面单色波 8

5.3 导电媒介中的传播 8

5.4 良导体中的传播 8

5.5 弱导电媒介中传播 8

5.6 电磁波的极化 8

5.7 色散与群速 9

6 均匀平面的波的反射与透射 **9**

6.1 电磁波在介质面上的反射与折射 9

7 狭义相对论 **11**

7.1 洛伦兹变换 11

1 准备知识

1.1 散度和旋度

散度定理(1)和旋度定理(2)：

$$\oiint FdS = \int_V \nabla \cdot FdV \tag{1}$$

$$\oint Fdl = \int_S \nabla \times FdS \tag{2}$$

1.2 格林定理

由散度定理导出，设矢量函数由两个标量函数组成$F = \varphi\nabla\psi$,将这个式子代入（1）得到：

$$\int_V (\varphi\nabla^2\psi + \nabla\varphi \cdot \nabla\psi)dV = \oint \varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}dS \tag{3}$$

公式（3）为格林第一恒等式，继续假设$F = \psi\nabla\varphi$,代入（1）：

$$\int_V (\psi\nabla^2\varphi + \nabla\psi \cdot \nabla\varphi)dV = \oint \psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}dS \tag{4}$$

方程（4）-方程（3）：

$$\int (\psi\nabla^2\varphi - \varphi\nabla^2\psi)dV = \oint (\psi\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi\frac{\partial\psi}{\partial n})dS \tag{5}$$

方程（5）为格林第二恒等式。

1.3 亥姆霍兹定理

在有限区域V内，任意矢量场可以由其散度，旋度以及边界条件表示：

$$F(r) = \nabla\mu(r) + \nabla \times A \tag{6}$$

1.4 电磁场的基本规律

麦克斯韦方程组的积分形式(3)和微分形式(4)：

$$\begin{cases} \oiint DdS = \iiint \rho dV \\ \oiint BdS = 0 \\ \oint Edl = \iint -\frac{\partial B}{\partial t}dS \\ \oint Hdl = \iint JdS + \iint \frac{\partial D}{\partial t}dS \end{cases} \tag{7}$$

$$\begin{cases} \nabla \cdot D = \rho \\ \nabla \cdot B = 0 \\ \nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} \\ \nabla \times H = J + \frac{\partial D}{\partial t} \end{cases} \tag{8}$$

当有媒介存在时，上述方程组还是不够完备的，对于各向同性和线性的媒介，还需要满足：

$$J = \sigma E, D = \varepsilon E, H = \frac{B}{\mu} \tag{9}$$

1.5 电磁场的边界条件

在不同媒介的分界面上，某些场的分量发生突变，微分形式的麦克斯韦方程组反应的是某一点的场的特征，因此此时需要用到积分形式的麦克斯韦方程组来确定边界条件(如图2.7.1)：

$$\oint Hdl = \int_S JdS \Rightarrow \int_{ab} H_1(e_S \times e_n)dl + \int_{cd} H_2(e_S \times e_n)dl = \int_S J \cdot e_S dS \tag{10}$$

$$\oint e_n \times (H_2 - H_1) \cdot e_S dl = \int_S J \cdot e_S dS \Rightarrow e_n \times (H_2 - H_1) = J \tag{11}$$

类似的求法我们可以得到这样一组边界条件：

$$e_n \times (H_2 - H_1) = J \tag{12}$$

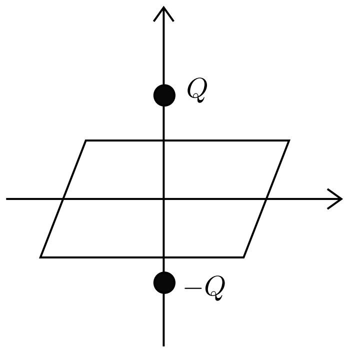
$$e_n \cdot (B_2 - B_1) = 0 \tag{13}$$

$$e_n \times (E_2 - E_1) = 0 \tag{14}$$

$$e_n \cdot (D_2 - D_1) = \rho \tag{15}$$

2 势能

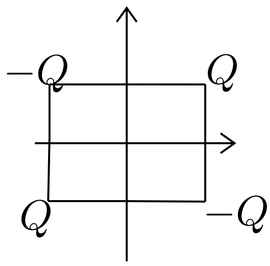
2.1 镜像法



如图所示的平板是接地的，$V=0$，并且在无穷远处，$V=0$，如果要求出任意点的电势，除了考虑点电荷还需要考虑平板产生的感应电荷，这两个电荷产生的电势叠加就是上半部分任意点的电势，根据唯一性原理，在平板下面放置一个-Q的电荷然后去掉平板可以产生一样的效果，下半区虽然不一样，但是我们并不关心这块地方的电势究竟是怎么样的。因此，可以得到上半平面的电势为：

$$V=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{Q}{r}+\frac{-Q}{r'})$$

另外一个例子： 在第一象限存在一个电荷Q，x和y平板的电势为0，那么利用这个条件，去掉平板，



加入电荷以得到相同的边界条件，可以求出第一象限的任一点的电势为：

$$(-a,b),(-a,-b),(a,b),(a,-b)$$

$$V=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{-Q}{\sqrt{(x+a)^2+(y-b)^2}}+\frac{Q}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}+\frac{-Q}{\sqrt{(x-a)^2+(y+b)^2}}+\frac{Q}{\sqrt{(x+a)^2+(y+b)^2}})$$

3 静磁场及其边值问题的解

4 时变电磁场

4.1 磁矢势和规范不变性

前面我们使用标量函数来表示电场，由于此时电场的旋度不为零，不能只是使用标量函数的额梯度来表示，这里我们使用矢量位A和标量位φ来表示：

$$B = \nabla \times A \tag{16}$$

$$\nabla \times E = -\nabla \times \frac{\partial A}{\partial t} \tag{17}$$

$$\nabla \times (E + \frac{\partial A}{\partial t}) = 0 \Rightarrow E + \frac{\partial A}{\partial t} = -\nabla \varphi \tag{18}$$

E可以使用A和一个标量函数来表示，B可以用A来表示，由于规范不变性：

$$\begin{cases} A' = A + \nabla \psi \\ \varphi' = \varphi - \frac{\partial \psi}{\partial t} \end{cases} \tag{19}$$

这样的A和ψ有无数组，为了确定它，使用洛伦兹规范：

$$\nabla \cdot A = \mu \varepsilon \frac{\partial \psi}{\partial t} \tag{20}$$

4.2 达朗贝尔方程

波动方程：

$$\begin{cases} \nabla^2 H - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = 0 \\ \nabla^2 E - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0 \end{cases} \tag{21}$$

结合方程（8）和（18），得到达朗贝尔方程：

$$\nabla^2 A - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = -\mu J \tag{22}$$

$$\nabla^2 \varphi - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon} \tag{23}$$

4.3 坡印廷矢量

4.4 时谐电磁波

时谐波的数学形式：

$$\begin{cases} E\left(x,t\right) = E\left(x\right) e^{-i(\omega t + \phi(x))} \\ H\left(x,t\right) = H\left(x\right) e^{-i(\omega t + \phi(x))} \end{cases} \tag{24}$$

4.5 复矢量的麦克斯韦方程组

如果时谐电磁场的解可以使用$u(r) = u_{m(r)}e^{i(\omega t+\phi(r))}$表示,则此时的麦克斯韦方程组可以简化为：

$$\begin{cases} \nabla \cdot D = \rho \\ \nabla \cdot B = 0 \\ \nabla \times E = -i\omega B \\ \nabla \times H = J + i\omega D \end{cases} \tag{25}$$

4.6 复电容率和复磁导率

首先推导复电容率，然后根据类比得到复磁导率：

$$\nabla \times H = J + \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} \tag{26}$$

$$\nabla \times H = \sigma E + i\varepsilon\omega E \tag{27}$$

$$\nabla \times H = i\omega(\varepsilon - i\frac{\sigma}{\omega})E \tag{28}$$

则根据式（26）可以得到复电容率（电介质常数）（类似的有复磁导率）：

$$\varepsilon' = \varepsilon - i(\frac{\sigma}{\omega} + \varepsilon'') \tag{29}$$

$$\mu' = \mu - i\mu'' \tag{30}$$

导电媒介的损耗均以复虚数的形式表示出来，例如在式（27）中，σ/ω表示的是欧姆损耗，ε''表示的是电极化损耗，式（27）中μ''表示的是磁化损耗。

4.7 亥姆霍兹方程

我们将时谐场解的形式代入（21）可以得到亥姆霍兹方程：

$$\begin{cases} \nabla^2 B + \mu\varepsilon\omega^2 B = 0 \\ \nabla^2 E + \mu\varepsilon\omega^2 E = 0 \end{cases} \tag{31}$$

5 均匀平面波在无界空间中的传播

5.1 理想介质中的传播

理想介质中没有损耗存在，$E_Z = H_Z = 0$，这个东西需要思考一下，延着Z轴传播的的电场X轴上的分量为$E_x(z,t)$,这个分量可以写成时谐波的形式：

$$E_x(z,t) = E_{xm}e^{i(\omega t - kz + \phi)} \tag{32}$$

波阻抗反映了E和H是否同相位，如果波阻抗是复数，那么磁场将会附加一段相位，导致两者的相位是不相同的。

5.2 真空中的平面单色波

由于真空中的电磁波没有电流源和电荷源，因此根据麦克斯韦方程组：

$$\begin{aligned}
&\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\
&\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\
&\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\
&\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t})
\end{aligned}$$

前面已经知道平面单色波的波函数的形式：

$$\begin{aligned}
E &= E_m e^{i(\omega t - ky)} \\
B &= B_m e^{i(\omega t - ky)}
\end{aligned}$$

假设E和B的传播方向都是延着y轴，将上述波函数代入麦克斯韦方程组的前两个可以得到：

$$\begin{gathered}
E_y = 0 \qquad B_y = 0 \\
\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial B_x}{\partial t} \\
\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}
\end{gathered}$$

解上面这个方程组可以得到E和B的关系：

$$\begin{aligned}
&E_{zm} = \frac{\omega}{k} B_{xm} \qquad E_{xm} = -\frac{\omega}{k} B_{zm} \\
&\mathbf{B} = \frac{\omega}{k} \mathbf{y} \times \mathbf{E}
\end{aligned}$$

5.3 导电媒介中的传播

在导电媒介中传播时，是存在损耗的，在（）节时，三种损耗所引起的变为复数的电介质常数和磁介质常数，会导致原本的时谐波中会多出一个表示衰减的e指数项，因此会产生趋肤效应，关于趋肤效应的具体解释：

5.4 良导体中的传播

良导体所满足的条件：$\frac{\sigma}{\mu\varepsilon} >> 1$,根据近似，得出电磁波在良导体中的传播特性：

5.5 弱导电媒介中传播

弱导电媒介所满足的条件：$\frac{\sigma}{\mu\varepsilon} << 1$，根据近似，得出电磁波在弱导电媒介中的传播特性：

5.6 电磁波的极化

极化：由于E_x, E_y的相位的振幅不一定相同，这就导致了叠加后的电场大小和方向都有可能随时间

变化，这种现象被称为电磁波的极化。假设：

$$E_x = E_{xm}\cos(\omega t + \phi_1) \tag{33}$$

$$E_y = E_{ym}\cos(\omega t + \phi_2) \tag{34}$$

三种极化波分别是：线极化波($\Delta\phi = 0, \pm\pi$)，圆极化波($\Delta\phi = \pm\frac{\pi}{2}$)且振幅相同，椭圆极化波（振幅和相位均不相等）。

线极化波：

$$E = \sqrt{(E_{xm})^2 + (E_{ym})^2}\cos(\omega t + \phi_1) \tag{35}$$

应用:信号发射的电场方向应该与信号接收者天线的方向平行。垂直极化波和平行极化波（垂直于地面的为垂直极化波，平行于地面的为平行极化波）

圆极化波：

$$(E_x)^2 + (E_y)^2 = E_m^2 \tag{36}$$

应用：在火箭上发射的信号为圆极化波，在各个方向上的电场均有振幅，如果改为线极化波，则有可能导致火箭无法收到信号而导致失控。（左旋圆极化波和右旋圆极化波，传播方向和矢量旋转方向满足右手法则，则为右旋，否则则为左旋）

椭圆极化波：

$$\frac{E_x^2}{E_{xm}^2} + \frac{E_y^2}{E_{ym}^2} - \frac{2E_xE_y}{E_{xm}E_{ym}}\cos\phi = \sin\phi \tag{37}$$

应用：关于左旋椭圆极化波和右旋椭圆极化波的判断和圆极化波类似（当观察者朝向电磁波的方向时，如果电场向量按逆时针方向旋转，则为左旋圆极化波；如果电场向量按顺时针方向旋转，则为右旋圆极化波，这是从另外一种角度判断）。线和圆极化波是椭圆极化波的特例。

5.7 色散与群速

首先需要了解什么是色散介质：相速度的定义：

$$v_p = \frac{\omega}{k}$$

当ω和k不在构成线性关系，电磁波的相速随频率改变，产生色散现象。

信号是由许许多多的频率的电磁波组成的，稳定的单一频率的波不携带任何信息，因此用相速度并不能描述信号在媒介中的传播速度，此时需要使用群速的概念：包络波上任意一点的相位的推进速度。例如：

$$E = 2E_m\cos(\Delta\omega t - \Delta kz)e^{-i(\omega t - kz)} \tag{38}$$

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} \tag{39}$$

6 均匀平面的波的反射与透射

6.1 电磁波在介质面上的反射与折射

经过我看书之梳理一遍之后，发现数理方法真的好重要，现在没事就要看看数理方法的书，才行!!!

一般情况下的电磁场的边值关系：

$$\begin{aligned}
e_n \times (E_2 - E_1) = 0 \\
e_n \times (H_2 - H_1) = \alpha \\
e_n \cdot (D_2 - D_1) = \sigma \\
e_n \cdot (B_2 - B_1) = 0
\end{aligned}$$

由于之前我们推导的时谐波的麦克斯韦方程组四个不是独立的，可以由其中的两个推得另外的两个，因此在介质的情况下我们仅需

$$e_n \times (E_2 - E_1) = 0$$

$$e_n \times (H_2 - H_1) = 0$$

k, k', k''为波矢量，平面波的表达式分别为：

$$\begin{aligned}
E = E_0 e^{i(k\cdot x - \omega t)} \\
E' = E_0' e^{i\left(k'\cdot x - \omega t\right)} \\
E'' = E_0'' e^{i\left(K'\cdot x - \omega t\right)}
\end{aligned}$$

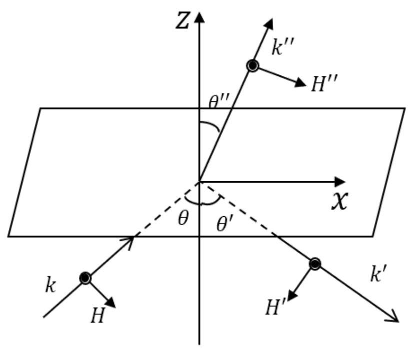
入射前的场强叠加和入射后的场强叠加应该是一样的：

$$e_n \times = (E + E') = e_n \times E''$$

代入前面的时谐波形式，可以得到：

$$k \cdot x = k' \cdot x = k'' \cdot x$$

因为k是矢量，则对应的分量应该是相等的。



如图所示，对相应的分量进行分析：

$$k_x = k \sin\theta$$

$$k_x' = k' \sin\theta'$$

$$k_x'' = k'' \sin\theta''$$

又$k = k' = \frac{\omega}{v_1}, k'' = \frac{\omega}{v_2}$,可以得到反射定律和折射定律，

$$\theta = \theta', \frac{\sin\theta}{\sin\theta''} = \frac{v_1}{v_2}$$

还可以得到折射率和反射角与入射角的关系：

$$\frac{\sin\theta}{\sin\theta''}=\frac{n_2}{n_1}=\frac{\sqrt{\mu_2\varepsilon_2}}{\sqrt{\mu_1\varepsilon_1}}=\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$$

接下来根据第二个方程推得菲涅尔公式，根据如图所示的情况：既第一种情况E和入射面垂直

$$H\cos\theta-H'\cos\theta'=H''\cos\theta''$$

$$\sqrt{\varepsilon_1}\,(E-E')\cos\theta=\sqrt{\varepsilon_2}E''\cos\theta''$$

并由折射定律得：

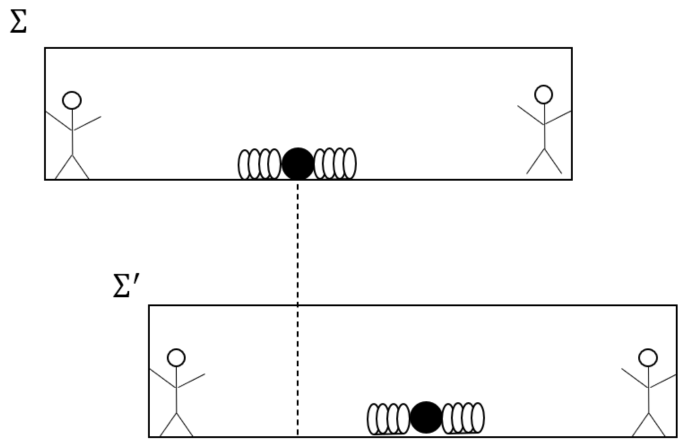
$$\frac{E'}{E}=\frac{\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta-\sqrt{\varepsilon_2}\cos\theta''}{\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta+\sqrt{\varepsilon_2}\cos\theta''}=-\frac{\sin(\theta-\theta'')}{\sin(\theta+\theta'')}$$

$$\frac{E''}{E}=\frac{2\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta}{\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta+\sqrt{\varepsilon_2}\cos\theta''}=\frac{2\cos\theta\sin\theta''}{\sin(\theta+\theta'')}$$

另外一种情况E与入射面平行的情况，和上图类似，就是H和E换一个位置：

7 狭义相对论

迈克耳孙-莫雷实验证明了光速不变理论



对于站在外面的人来看，光波到达两边的时间是不一致的

伽利略变换仅适用于宏观低速的情况，但是在电磁理论当中，c是不变量，不符合伽利略变换。狭义相对论的两大研究问题：1，相对论原理，2，光速不变理论

7.1 洛伦兹变换

事件间隔不变性，r是物体走过的距离：以光信号连接时$r^2=c^2t^2$,不是以光信号连接时：$r^2<c^2t^2$。两个事件间隔：时间坐标和空间坐标联系到一起：

$$S'=c^2(t_1'-t_2')^2-[(x_2'-x_1')^2+(y_2'-y_1')^2+(z_2'-z_1')^2]$$
$$S=c^2(t_1-t_2)^2-[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2]$$

其中S和S'是表示的事件间隔，我们类比于空间坐标的间隔：

$$r^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$$

但是对于为什么多了时间项，原因肯定是多了一个时间坐标，又时间坐标的平方和空间坐标相差一个符号，原因就是时间项含有虚数。因此对于四维矢量，我们可以写成如下形式：

$$(x_1, x_2, x_3, ict)$$