Some math problem

1 微积分

1.1 多元函数

下面给出$f(x,y)$在(a,b)处的泰勒展开：

$$\begin{aligned}f(x,y) =& f(a,b)+f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)+\\ &\frac{1}{2!}(f_{xx}(a,b)(x-a)^2+f_{xy}(a,b)(x-a)(y-b)\\ &+f_{yy}(a,b)(y-b)+\cdots)\end{aligned}$$

接下来是关于隐函数求导的内容，这个非常容易出错：例如，给出如下方程：

$$\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}\Rightarrow \theta=\arctan\frac{y}{x}$$

分析$\frac{\partial x}{\partial\theta}$和$\frac{\partial\theta}{\partial x}$两者是否互为倒数，以前我的第一印象会告诉我这两个互为倒数，但是，根据偏导理论：

$$\frac{\partial x}{\partial\theta}\mid_r=-y\quad \frac{\partial\theta}{\partial x}|_y=\frac{-y}{r^2}$$

可以看到两者并不是倒数的关系，**因为求导时，视为常数的变量不一致**，要想使其成为导数，则将视为常数的变量变为一致，这里，改变第一个公式：

$$x=y\cot\theta\Rightarrow\frac{\partial x}{\partial\theta}|_y=\frac{-y}{\sin^2\theta}$$

可以看到：

$$\frac{\partial x}{\partial\theta}\mid_y\cdot\frac{\partial\theta}{\partial x}\mid_y=1$$

在进行坐标变换时，

$$\begin{cases}dx=\frac{\partial x}{\partial r}\mid_\theta dr-\frac{\partial x}{\partial\theta}\mid_r d\theta\\ dy=\frac{\partial y}{\partial r}\mid_\theta dr-\frac{\partial y}{\partial\theta}\mid_r d\theta\end{cases}\Rightarrow\begin{bmatrix}dx\\ dy\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}dr\\ d\theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial r}\mid_\theta & \frac{\partial x}{\partial\theta}\mid_r\\ \frac{\partial y}{\partial r}\mid_\theta & \frac{\partial y}{\partial\theta}\mid_r\end{bmatrix}\begin{bmatrix}dr\\ d\theta\end{bmatrix}$$

相应的坐标逆变换为：

$$\begin{bmatrix}dr\\ d\theta\end{bmatrix}=A^{-1}\begin{bmatrix}dx\\ dy\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\partial r}{\partial x}\mid_y & \frac{\partial r}{\partial y}\mid_x\\ \frac{\partial\theta}{\partial x}\mid_y & \frac{\partial\theta}{\partial y}\mid_x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}dx\\ dy\end{bmatrix}$$

变换矩阵A和A^{-1}的对应矩阵元并不是互为倒数，但是$AA^{-1}=1$

1.2 莱布尼兹求导法

二项式展开公式(以9次为例，n次类似)：$(a+b)^9=C_9^0a^0b^9+C_9^1a^1b^8+\cdots+C_9^9a^9b^0$, 由此受到启发，对于$(ab)^{(9)}=C_9^0a^{(0)}b^{(9)}+C_9^1a^{(1)}b^{(8)}+\cdots+C_9^9a^{(9)}b^{(0)}$,以 $(x\sin x)^{(9)}$为例：

$$\begin{aligned}(x\sin x)^{(9)}&=x^{(0)}(\sin x)^{(9)}+C_9^1x^{(1)}(\sin x)^{(8)}+\cdots\quad (x^{(s)}=0,s\geq 2)\\ &=9\cos x+9\sin x\end{aligned}$$

1.3 递推关系求积分

$$\begin{aligned}\int x^n\cos xdx=\int x^nd\sin x&=x^n\sin x-n\int x^{n-1}\cdot\sin xdx\\ &=x^n\sin x+n\int x^{n-1}d\cos x\\ &=x^n\sin x+nx^{n-1}\cos x-n(n-1)\int x^{n-2}\cdot\cos xdx\end{aligned}$$

则 $I_n = x^n \sin x + nx^{n-1} \cos x - n(n-1)I_{n-2}$ (一般情况我只需要续得这个就行),然后可以根据递推关系式求解I_n。

2 微分方程

2.1 齐次N阶线性微分方程(HNOLDE)

基本形式：

$$L[y] = y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots a_1 y' + a_0 = 0$$

代入$y = e^{\lambda x}$得：

$$\lambda^n + a_n\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

这个关于λ得方程被称为特征方程，解这个特征方程得到特征根：

$$(\lambda - \lambda_1)^{k_1}(\lambda - \lambda_2)^{k_2}\cdots(\lambda - \lambda_n)^{k_n} = 0$$

其中$\lambda = \lambda_1$被称为λ得k_1重根，其他$lambda$得表示方法类似，那么我们可以得到关于该微分方程解得一组basis，他们可以这样表示：

$$\{\{r^{k_j-1}e^{\lambda_j}\}_{j=1}^{n}\} = \{e^{\lambda_j}, xe^{\lambda_j}, \cdots\}_{j=1}^{n}$$

以二阶线性微分方程为例子：

$$y'' + ay' + by = 0$$
$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

$$\begin{aligned}
&1.\Delta > 0, \quad \lambda_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \quad \lambda_2 = \frac{-b - \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \\
&\{e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}\} \quad y = Ae^{\lambda_1 t} + e^{\lambda_2 t} \\
&2.\Delta = 0, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \frac{-a}{2} \\
&\{e^{-at/2}, te^{-at/2}\} \quad y = Ae^{-at/2} + Bte^{-at/2} \\
&3.\Delta < 0, \quad \lambda_1 = \frac{-a + i\sqrt{4b - a^2}}{2} \quad \lambda_2 = \frac{-a - i\sqrt{4b - a^2}}{2} \\
&\{e^{i\omega}, e^{-i\omega}\} \quad y = e^{-a/2}(Ae^{i\omega} + Be^{-i\omega})
\end{aligned}$$

2.2 非齐次N阶线性微分方程(IHNOLDE)

对于非齐次情况，补充以下定理，即可方便得求出特解，齐次通解和非齐次特解相加即为非齐次方程得通解：HNOLDE右边得0变为$r(x)$就是IHNOLDE。

当$r(x) = e^{\lambda x}S(x)$时，其中$S(x)$为任意多项式，，则非齐次方程有如下特解 $y = e^{\lambda x}q(x)$，$\lambda \neq \lambda_j$时，$q(x)$ 的次数和$S(x)$相同，$\lambda = \lambda_j$时，$q(x)$的次数为$S(x)$的次数加上n，其中n表示n重根。

example:$y'' - y = xe^x$

$$\begin{aligned}
&\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1 \\
&y = C_1e^x + C_2e^{-x} + f(x) \\
&q(x)e^{\lambda x} = (ax^2 + bx + c)e^x \quad (\lambda = \lambda_1, n = 1) \\
&y = C_1e^x + C_2e^{-x} + \frac{1}{4}(x^2 - x)e^x
\end{aligned}$$

2.3 WKB方法

当方程$y'' + q(x)y = 0$中的$q(x)$变化十分缓慢时，可以视为const，然后解这个方程，这就是WKB方法。