

# Застосування теорії симетрії у фізиці

Андрій Жугаєвич (zhugayevych@iop.kiev.ua)

19 вересня 2011 р.

1	Симетрія фізичних тензорів . . . . .	1
1.1	Приклад: симетричний тензор другого рангу . . . . .	3
1.2	Приклад: тензор пружних модулів . . . . .	3
2	Просторова симетрія у класичній механіці . . . . .	5
2.1	Малі коливання . . . . .	5
3	Симетрія у квантовій механіці . . . . .	5
3.1	Теорія збурень . . . . .	6
3.2	Правила відбору . . . . .	6
3.3	Метод ЛКАО . . . . .	7
4	Симетрія багаточастинкових систем . . . . .	7
4.1	Симетрія молекул . . . . .	7

## §1. Симетрія фізичних тензорів

Нагадаємо, що (псевдо)тензором рангу  $k$  називається такий об'єкт  $A$ , що  $\sum_{i_1 \dots i_k} A_{i_1 \dots i_k} x_{i_1} \dots x_{i_k}$  – (псевдо)скаляр. При перетворенні системи координат  $x_i = \sum_j T_{ij} x'_j$ , тензор перетворюється за формулою  $A'_{i_1 \dots i_k} = \sum_{j_1 \dots j_k} T_{i_1 j_1} \dots T_{i_k j_k} A_{j_1 \dots j_k}$ , а для псевдотензора правий вираз слід домножити на  $\text{sgn}(\det T)$ . Отож, якщо координати перетворюються по представленню  $V$  групи симетрії, то тензор  $k$ -го рангу перетворюється по прямому добутку представлень  $V \times \dots \times V = V^k$ .

Всі фізичні величини є тензорами або псевдотензорами по відношенню до групи  $O(3)$ . Приклади:

- скаляри: маса, заряд, температура, тощо;
- псевдоскаляри: хіральність, обертання площини поляризації світла;
- вектори: координата, швидкість і імпульс, напруженість електричного поля;
- псевдовектори: кутова швидкість і момент імпульсу, момент сили, напруженість магнітного поля;
- тензори 2-го порядку: момент інерції, тензори діелектричної і магнітної проникності;
- тензори 3-го порядку: п'єзоелектричний тензор, тензор електрооптичних коефіцієнтів;
- тензори 4-го порядку: тензор пружних модулів/сталей, тензор електрострикції/фотопружності.

Додаткова симетрія фізичних тензорів при перестановці індексів з'являється за рахунок загальнофізичного варіаційного принципу, який полягає в тому, що всі рівняння можна одержати варіюванням певної скалярної форми, побудованої на цьому тензорі. Наприклад, термодинамічний потенціал Гібса для деформованої речовини в електричному полі має вигляд

$$\Phi = - \sum_i P_i^0 E_i - \frac{1}{8\pi} \sum_{ij} \left( \varepsilon_{ij} + \sum_k r_{ijk}^{(1)} E_k + \sum_{kl} r_{ijkl}^{(2)} E_k E_l \right) E_i E_j - \sum_{ikl} \gamma_{i,kl} E_i \sigma_{kl} - \frac{1}{2} \sum_{ijkl} \beta_{ij,kl} E_i E_j \sigma_{kl} - \frac{1}{2} \sum_{ijkl} \mu_{ij,kl} \sigma_{ij} \sigma_{kl} + \dots$$

де  $E$  – напруженість поля,  $\sigma$  – симетричний тензор механічних напружень,  $\varepsilon$  – діелектричний тензор,  $\mu$  – тензор пружних сталей. В цій формулі наявність спонтанної поляризації  $P^0$  описує піроелектричний ефект, тензори  $r^{(1,2)}$  описують, відповідно, лінійний (ефект Покельса) і квадратичний (ефект Керра) електрооптичні ефекти, тензор  $\gamma$  описує п'єзоелектричні ефекти, тензор  $\beta$  – явища електрострикції і фотопружності.