

# Markov chains for physicists

Andriy Zhugayevych, Andriy Yurachkivsky

24 вересня 2011 р.

## Зміст

<b>1 Вступ</b>	<b>1</b>
<b>2 Постановка задачі і загальні властивості</b>	<b>2</b>
2.1 Базове рівняння . . . . .	2
2.2 Операторне подання. Спектр оператора $A$ . . . . .	3
2.3 Функція Гріна . . . . .	4
<b>3 Локальність функції Гріна</b>	<b>5</b>
<b>4 Теорія збурень кінетичного рівняння</b>	<b>7</b>
<b>5 Залежність функції Гріна від коефіцієнтів</b>	<b>8</b>
<b>6 Наближення скінченної ґратки</b>	<b>9</b>
<b>7 Узагальнені марковські ланцюги</b>	<b>11</b>
<b>8 Квазісиметричні ланцюги. Класифікація рівнянь</b>	<b>14</b>
<b>9 Дискретний час. Напівмарковські процеси</b>	<b>16</b>
<b>10 Чисельні методи</b>	<b>17</b>
10.1 Part 1 . . . . .	17
10.2 Part 2 . . . . .	18
10.3 Time discretization of kinetic equation: “blind ant” vs. “myopic ant” . . . . .	19
10.4 Series expansion at zero . . . . .	20
<b>11 Підсумок (неготовий)</b>	<b>20</b>
<b>A Формули для випадку дискретного часу</b>	<b>21</b>
<b>B Винесені доведення</b>	<b>21</b>

## 1 Вступ

Кінетичні рівняння з дискретним простором станів зустрічаються надзвичайно часто у фізиці, описуючи, наприклад, розподіл квантової системи по станах (кінетичне рівняння Паулі), стрибкове транспортування частинок (випадкове блукання), релаксацію системи до рівноважного стану, поширення шуму в біологічних системах чи інформаційних мережах тощо. В своїй основі вони базуються на гіпотезі про відсутність післядії (марковість), хоча прості модифікації їх дозволяють урахувати й ефекти пам’яті (узагальнене кінетичне рівняння зі згортою по часу, що еквівалентно складнішому розподілу часу між стрибками (напівмарковські ланцюги, STRW)) і кореляцію стрибків (через розширення простору станів) [1, 2]. Ми зупинимося на кінетичному рівнянні з дискретними станами  $n$  і неперервним часом  $t$  в наступній загальній формі

$$\dot{c}_n = -c_n \nu_n + \sum_m (c_m w_{mn} - c_n w_{nm}) + f_n(t), \quad (1)$$

яке зручно інтерпретувати таким чином:  $c_n(t)$  – середнє число частинок у стані  $n$  (це може бути квантовий стан, просторове положення частинки тощо),  $w_{nm}$  – інтенсивність (обернений середній час переходу) переходів частинки зі стану  $n$  у стан  $m$  (природно,  $w_{nm}$  невід’ємні),  $\nu_n$  – інтенсивність затухання (зникання) (якщо  $\nu_n > 0$ ) чи розмноження (якщо  $\nu_n < 0$ ) частинок у стані  $n$ ,  $f_n(t)$  – інтенсивність народжування (якщо  $f_n > 0$ ) чи поглинання (якщо  $f_n < 0$ ) частинок у стані  $n$ . Рівняння з дискретним часом (разом із узагальненим кінетичним рівнянням) розглянемо в