Точкові групи

Андрій Жугаєвич (zhugayevych@iop.kiev.ua)

19 вересня 2011 р.

§1. Група обертань

Відомо, що будь-яке власне ортогональне перетворення тривимірного простору $\boldsymbol{r} \to R\boldsymbol{r}$ є обертанням навколо деякої осі (теорема Ейлера). Конкретніше, поворот на кут α навколо осі, напрямленої вздовж (θ, ϕ) у сферичних координатах, дається матрицею:

$$R(\alpha,\theta,\phi) = R_z(\phi)R_y(\theta)R_z(\alpha)R_y(-\theta)R_z(-\phi),$$

де

$$R_z(\alpha) = R(\alpha,[001]) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad R_y(\theta) = R(\theta,[010]) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Також використовують представлення обертань через кути Ейлера, які в так званій "y-convention" дають таке:

$$R_{\mathrm{E}}(\alpha,\beta,\gamma) = R_z(\gamma)R_y(\beta)R_z(\alpha).$$

Оскільки інверсія комутує з обертаннями, то будь-яке ортогональне перетворення взагалі задається матрицею виду $\pm R(\alpha,\theta,\phi)$, де плюс відповідає власним перетворенням, а мінус — невласним. Ортогональні перетворення утворюють групу, яка позначається $SO(3)$ у випадку власних обертань і $O(3) = SO(3) \times I$ в загальному випадку.

Інфінітезимальні оператори групи — це оператори "кутового моменту"

$$L_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad L_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_z = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

які генерують поворот

$$R(\alpha,\boldsymbol{n}) = \exp\left[-i\alpha\left(n_xL_x + n_yL_y + n_zL_z\right)\right],$$
$$R_x(\alpha_x)R_y(\alpha_y)R_z(\alpha_z) = \exp(-i\alpha_xL_x)\exp(-i\alpha_yL_y)\exp(-i\alpha_zL_z)$$

і задовольняють комутаційні співвідношення $[L_i, L_j] = ie_{ijk}L_k$.

§2. Представлення групи обертань

Скінченновимірні незвідні представлення власної групи обертань нумеруються орбітальним (квантовим) числом $l \in \mathbb{Z}_+$ і позначаються D^l. Розмірність кожного такого представлення $2l+1$. Майже завжди представлення групи обертань розглядаються у просторі функцій на сфері. Базисом представлення l служать сферичні функції Y_{lm}, $m = -l, \ldots, l$. Інфінітезимальні оператори представляються відомими у квантовій