

文章编号: 0258-0926(2019)S2-0006-05; doi:10.13832/j.jnpe.2019.S2.0006

一种任意多面体网格的三维 VOF 界面重构算法

范 山¹, 王弈然², 凌 空^{3,4*}, 朱 虎²

1. 西安交通大学航天航空学院, 西安, 710049; 2. 西安交通大学电子与信息工程学院, 西安, 710049;
3. 西安交通大学热流科学与工程教育部重点实验室, 西安, 710049; 4. 西安数峰信息科技有限公司, 西安, 710054

摘要: 针对任意多面体网格的三维流体体积方法 (VOF) 提出了一种界面重构算法。算法引入了一种新的多面体数据结构, 在此基础上提出了一种针对任意凸多面体的切割算法。本文利用牛顿迭代法同时结合多面体几何特性, 实现了任意三维网格中的 VOF 界面重构。数值计算实验表明, 算法能适用于不同类型的多面体, 并具有较高的收敛效率。最终算法在非结构化网格中成功实现了球形界面的 VOF 界面重构。

关键词: 流体体积方法 (VOF); 牛顿迭代法; 多面体切割运算; 任意多面体网格

中图分类号: TL33 文献标志码: A

An VOF-Based Interface Reconstruction Algorithm for Arbitrary 3D Unstructured Grid

Fan Shan¹, Wang Yiran², Ling Kong^{3,4*}, Zhu Hu²

1. School of Aerospace, Xi'an Jiaotong University, Xi'an, 710049, China;
2. School of Electronic and Information Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an, 710049, China;
3. Key Laboratory of Thermo-Fluid Science and Engineering of MOE, Xi'an Jiaotong University, Xi'an, 710049, China;
4. Xi'an Shu Feng Technological Information Co. Ltd., Xi'an, 710054, China

Abstract: This paper presents a VOF-based interface reconstruction method for 3D unstructured grid. A new data structure for all kinds of convex polyhedrons was designed, and a body cutting algorithm was developed. On the basis of geometrical characteristics of polyhedrons, Newton iterative method, a root-finding method, was employed to solve the reconstructed polygons inside them. Numerical tests suggest that the proposed algorithm supports various types of polyhedrons with excellent efficiency. Finally, VOF-based interface reconstruction under unstructured grid was successfully conducted by the proposed method.

Key words: Volume-of-fluid (VOF), Newton iterative method, Polyhedron cutting algorithm, Unstructured grid

0 引 言

气-液两相流普遍存在于压水堆核电厂中的各个部件, 如堆芯、蒸汽发生器、气-液分离器等。计算机数值模拟在最近十多年内被越来越多地应用于两相流的机理研究^[1]。其中, 流体体积方法 (VOF)^[2]得到不断的发展完善, 是目前使用最广泛的相界面追踪算法之一。

VOF 方法通常采用几何方法进行相界面的重构并给出网格单元中相界面的位置与形状^[3-8]。但是, 现有的方法都是基于某一种或某一类的网格形状, 目前还没有一种通用的、能够适用于任意多面体网格的几何重构算法。这使得 VOF 方法的应用发展进一步受到限制。

核电热工水力设备的结构复杂性对界面追踪

收稿日期: 2019-08-23; 修回日期: 2019-10-26

基金项目: 中国博士后科学基金 (No 2018M633506)

作者简介: 范 山 (1998—), 男, 在读本科生, 现主要从事计算力学研究工作

*通讯作者: 凌 空, E-mail: lingkongcs@mail.xjtu.edu.cn

方法在各种类型的非结构网格中的适应性提出了更高的要求。本文提出了一种通用的三维 VOF 界面重构方法，能够适用于任意的凸多面体网格。为了对该方法进行验证，本文选取了几种典型多面体并在其中进行了相界面的重构，同时对算法的收敛速率进行了评估。最后，本文在三维非结构化网格中对球形相界面进行了重构，验证了所提出方法对不同类型网格的普适性。

1 用牛顿迭代法重构相界面

本文采用牛顿迭代法进行相界面的重构。对于一般的非线性方程 $g(x) = 0$ ，在给定初值的条件下，牛顿迭代法常按照如下公式进行迭代：

$$x_{i+1} = x_i - \frac{g(x_i)}{g'(x_i)} \quad (1)$$

式中， x_i 为第 i 次迭代的近似解。

如图 1 所示，三维多面体网格中的界面重构的任务是，在给定流体体积分数 (f) 和界面法向 (n) 的条件下，求解重构相界面所在的平面，并用一个多边形表示重构相界面。本文采用点法式表示平面 S ，即 $S = S(P, n)$ ，其中 P 表示平面上的 1 个点； n 表示平面的单位法向量。在给定界面法向的条件下，界面重构的具体任务为求解点 P 的坐标。如图 1 所示，牛顿迭代算法给定初始点为多面体的中心点 O ，点 P 的位置通过从点 O 出发沿相界面法向移动一段距离获得，即：

$$r_P = r_O + \alpha \cdot n \quad (2)$$

式中， r_O 为点 O 的坐标； α 为所需移动的距离，需要通过牛顿迭代法确定。

如图 1 所示，每一个 α 的取值对应一个法向为 n 且经过点 P 的平面，对应多面体中位于外侧部分的体积，记为 $V(\alpha)$ (图 1)。根据 VOF 方法的定义，本问题中 $f = V(\alpha)/V_{\text{cell}}$ ，因此，待求解的方程为：

$$V(\alpha) - f \cdot V_{\text{cell}} = 0 \quad (3)$$

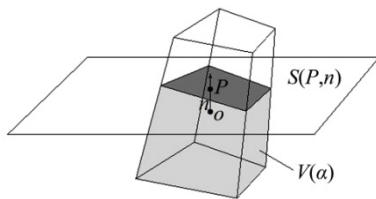


图 1 用牛顿迭代法进行三维网格的界面重构

Fig. 1 Interface Reconstruction in a 3D Cell Using Newton Iterative Method

式中， V_{cell} 为多面体的总体积。由 $V(\alpha)$ 的几何意义可得：

$$[V(\alpha) - f \cdot V_{\text{cell}}]' = A(\alpha) \quad (4)$$

式中， $A(\alpha)$ 表示切割面的面积。

对照式 (1)，本文采用牛顿迭代法进行相界面重构的迭代公式为：

$$\alpha_{i+1} = \alpha_i + \frac{V(\alpha_i) - fV_{\text{cell}}}{A(\alpha_i)} \quad (5)$$

式中， α_i 和 α_{i+1} 分别表示第 i 次和第 $i+1$ 次迭代所得 α 的值。

由式 (5) 可以看出，每次迭代都需要计算平面外侧部分的体积 $[V(\alpha_i)]$ 和切割面的面积 $[A(\alpha_i)]$ 。

2 多面体切割算法

2.1 多面体的数据结构

本文采用“顶点-面”式数据结构描述凸多面体。如图 2 所示，本文的“顶点-面”式数据结构包含一个顶点列表和一个面列表。面列表中的每一个元素对应多面体的一个多边形面，其中包含该面上顶点在顶点列表中的编号，并以右手定则排列而成。

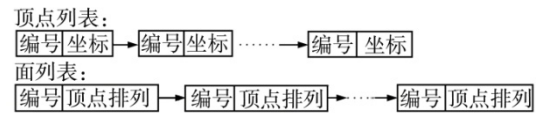


图 2 多面体的“点-面”式数据结构

Fig. 2 Vertex-Face Data Structure for Polyhedron

2.2 多面体切割算法

针对二维多边形的切割已有成熟算法^[9]，而三维多面体问题有更高的问题复杂度。下面以图 3 所示一个多面体和一个切割平面 $S(P, n)$ 为例，将平面法向量 n 所指向的区域视为外侧，相反为内侧。多面体切割运算即获得给定多面体中位于切割平面内侧的部分。为了表述方便，本文将该部分称为“结果多面体”。例如，图 3 中由顶点

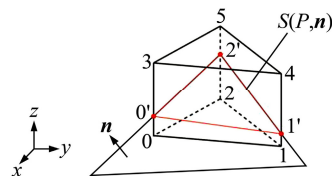


图 3 多面体切割示意图

Fig. 3 Schematic Diagram for Polyhedron-Cutting Algorithm

0、1、2、3、4、5 组成的三棱柱，经过平面 S 切割后得到由顶点 0、1、2、0'、1'、2' 组成的三棱柱，即本问题的结果多面体。本研究采用以下 3 个步骤求解切割所形成的新多面体。

(1) 遍历原有多面体的顶点列表，判断各顶点是否位于给定平面的内侧，并进行标记。

对于多面体的任一顶点 A ，如果满足 $d_{AP} \cdot n > 0$ ($d_{AP} = r_P - r_A$)，则点 A 位于平面 S 的内侧，否则位于外侧。

(2) 遍历原有多面体的每个面的每条棱，求出原有多面体每条棱与切割平面的交点。

若该棱的 2 个顶点位于平面 S 的两侧，则该棱与平面 S 有交点；反之，则没有交点。对于多面体任意一条与平面 S 有交点的棱 AB ，交点 C 的坐标由以下公式求得：

$$r_C = \frac{r_A + r_B}{\lambda + 1} \quad (6)$$

$$\lambda = |d_{AP} \cdot n| / |d_{BP} \cdot n|$$

式中， r_A 、 r_B 、 r_C 分别为点 A 、 B 、 C 的坐标。

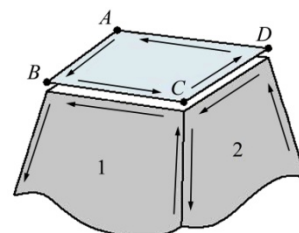
需要说明的是，由于多面体中的每条棱都由 2 个面所共有，本步骤在求得交点后保存在一个临时的列表中，并在下次需要求交点之前再列表中查询，以避免重复计算。

(3) 构造结果多面体中的面。本步骤在前 2 个步骤的基础上构造结果多面体中的面。由图 3 可看出，原多面体中位于切割面内侧的顶点及各棱与切割平面的交点构成了结果多面体的顶点列表。同时，结果多面体中的面可分为 2 类：第一类面为原多面体中的原有平面（如图 3 中的面 012 或原有平面的一部分（如图 3 中的面 022'0'）；第二类面为切割平面的一部分（如图 3 中的面 0'1'2'）。

构造结果多面体的第一类面需要在求得棱与多面体的交点的基础上遍历原多面体的每个面，并按照顶点排列的顺序依次遍历面中的顶点，并将位于切割平面内侧的顶点添加到结果多面体中（包括顶点列表及面列表中的顶点编号排列）。如遇相邻顶点分别位于切割面两侧的情形，即棱边与切割平面有交点，则将对应的交点添加到结果多面体中。

结果多面体中的第二类面的构造通过以下 2 步完成：构造交点对排列。交点求出之后，结

果多面体中带有交点的面必然包含一个由 2 个交点组成的交点对（由于多面体的 1 个几何面被切割必有 2 个交点）。将所有交点按照首尾相连的顺序进行排列组合。例如如图 4 中的结果多面体形成了交点对集 (AD 、 BA 、 CB 、 DC)，排列后得到交点对排列 $BA-AD-DC-CB$ ；构造第二类面的顶点列表。将得到的交点对排列中删去重复的点，得到切割面上点的排列顺序。由于数据结构遵循右手定则，将所得的交点对排列进行相反排列，便可从交点对排列中构造出切割面上顶点的排列顺序。此时形成的新的交点排列 $A-B-C-D$ 就构成了结果多面体中第二类面的顶点列表。



切割面顶点排列：A→B→C→D

图 4 构造结果多面体中的切割面（第二类面）

Fig. 4 Construction of New Face Coming from Cutting Plane (Second-Type Face)

步骤 (1) 与步骤 (2) 完成了结果多面体的顶点列表，而步骤 (3) 则完成了结果多面体的面列表。这样，根据本文的多面体数据结构，多面体的切割算法已完成。要说明的是，图 3 中被切割的多面体是一个三棱柱，但这种算法同样适用于其他类型的多面体。

3 数值算例

3.1 单个多面体中切割

为了验证本文的界面重构算法，选取了几种典型的多面体进行相界面重构。在这些问题中，给定的相界面 3 个法向分量 n 分别为 0.267、0.535、0.802， f 均为 0.7。图 5 表示了所选取的 5 种多面体和采用本文方法重构所得的相界面。

为了分析本文界面重构算法的收敛速率，将界面重构的相对误差 (ϵ) 定义为：

$$\epsilon = \left| \frac{V_{\text{phase}}}{V_{\text{cell}}} - f \right| \quad (7)$$

式中， V_{phase} 为多面体位于所得平面内侧的体积。

Ling 等^[7]采用了割弦法实现了六面体网格中

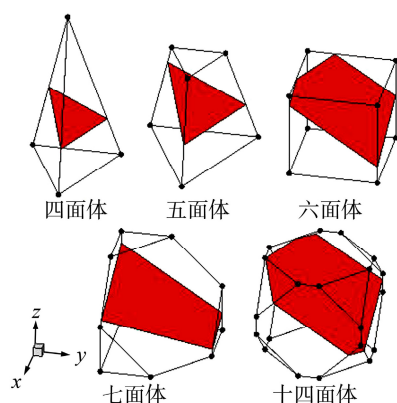


图5 各种多面体切割结果

Fig. 5 Results of Cutting Algorithm in Various Types of Polyhedrons

的相界面重构,该算法通常需要 10 次迭代才能将体积分数的相对误差下降到 10^{-9} 以下。在本问题中,牛顿迭代法的收敛准则为 $\epsilon < 10^{-10}$ 。

图 6 表示采用本文的迭代方法时,5 种多面体网格界面重构的相对误差与迭代次数的关系。从图 6 可以看出,在这 5 种不同的多面体网格中,本文的界面重构算法均能在 4 次迭代之内达到所需的收敛准则,完成相界面的重构。

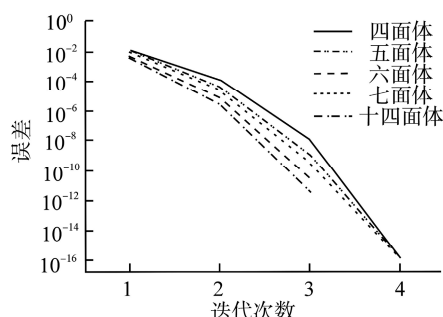


图6 各种多面体中重构误差随迭代次数的变化

Fig. 6 Reconstruction Error with Iteration in Various Types of Polyhedrons

图 7 所示为在六面体网格中,给定不同 f 下, ϵ 与迭代次数的关系。从图 7 中可看出,在给定的 5 种 f 下,均能在 5 次迭代以内满足收敛准则条件完成相界面的重构。从图 6、图 7 的结果可看出,本文的相界面重构方法与 Ling 等^[7]的方法相比,能够在更少的迭代次数达到相同的误差标准,因此具有更高的收敛速率。

另外,比较图 7 中的数值可以看出:当体积分数接近 0 或 1 时,相比体积分数接近 0.5 的情形需要更多的迭代次数。这是由于无论给定的流

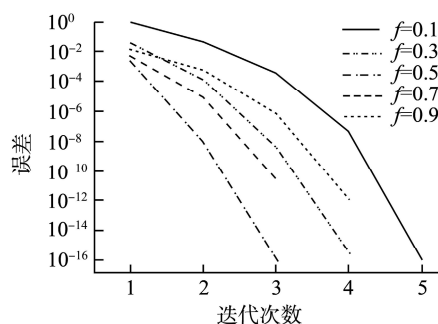
图7 六面体中不同 f 下重构误差随迭代次数的变化

Fig. 7 Reconstruction Error with Iteration under Various Volume Fraction in Hexahedron

体体积分数大小,本文均将多面体的中心点作为牛顿迭代法的初始点,相应的 f 更接近 0.5。因此,如能根据给定的 f 合理估算牛顿迭代法的初始点,本文的算法效率有望得到进一步提升。

为了定量地评估本文相界面重构算法的收敛速率,假定随着迭代的进行,体积分数的相对误差大致满足:

$$\epsilon_{k+1} = c\epsilon_k^p \quad (8)$$

式中, ϵ_k 表示第 k 次迭代后的误差; p 表示算法的收敛阶数; c 表示误差参数。

为了使用最小二乘法计算 p , 式 (8) 可以转化为:

$$\ln \epsilon_{k+1} = p \ln \epsilon_k + \ln c \quad (9)$$

根据图 7 中的数据,各种多面体下的拟合所得式 (9) 中的参数 p 与 c 的值如表 1 所示。从表中可以看出,本文的方法在各种多面体下的收敛阶数都在 1.5~2.0 之间,基本符合牛顿迭代法的二阶收敛特性。

表1 界面重构算法的收敛阶数分析

Table 1 Analysis on Convergence Rate of Proposed Interface Tracking Method

参数	四面体	五面体	六面体	七面体	十四面体
p	1.98	1.99	1.50	1.57	1.84
c	0.60	0.46	0.023	0.052	0.082

3.2 多面体网格中的界面重构

为了验证本文的数值方法在 VOF 界面重构问题上的适用性,采用本文所提出的方法对一个三维的球形相界面进行 VOF 重构。图 8 表示的是一个 $1 \times 1 \times 1$ 的三维区域的中心,其中主相流体位于区域中心、半径为 0.25 的球形区域。采用四面体网格对计算区域进行离散并对给定的两相分布

用 VOF 方法进行界面重构。

图 9 为四面体网格下的计算结果,其中左图为离散计算区域所采用的计算网格;右图为采用本文第 1 节所介绍的方法重构所得的相界面。可以看出,原来连续的相界面被重构成为一系列的多边形;同时,这些多边形近似地组成了给定的球形相界面。

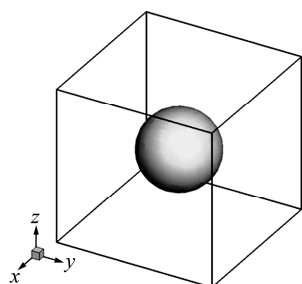


图 8 计算区域与待重构的相界面

Fig. 8 Computational Domain and the Interface to be Reconstructed

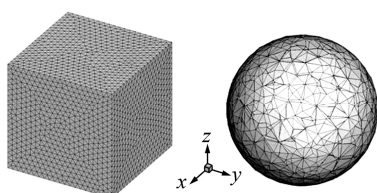


图 9 四面体网格与相界面重构

Fig. 9 Tetrahedron Grid and Reconstructed Polygon

4 结 论

本文提出了一种适用于任意的凸多面体网格的界面重构方法,为 VOF 方法在三维复杂网格中的实现提供了一种简单且高效的解决方案。本文提出了一种描述凸多面体的“顶点-面”式数据结构,并在此基础上发展了一种多面体的切割算法。为了精确重构相界面位置,该算法采用了具有二阶精度的牛顿迭代法。数值实验结果表明本文所提出的算法具有以下特性:

(1) 普遍适用性。同一算法对 5 种典型多面

体均能实现较为理想的界面重构,能够在几种不同类型的三维结构化以及非结构化网格成功地实现 VOF 相界面重构。

(2) 高效率。本文算法在对 5 种典型多面体的界面重构中,均能在 5 次以内满足条件完成相界面重构,与 Ling 等^[7]的方法相比,能够在更少的迭代次数内达到相同的误差标准。定量分析表明本文算法的收敛阶数在 1.5~2.0 之间,基本符合二阶收敛特性。

参考文献:

- [1] YADIGAROGU G. CMFD and the critical-heat-flux grand challenge in nuclear thermal-hydraulics—A letter to the Editor of this special issue[J]. International journal of multiphase flow, 2014, 67: 3-12.
- [2] HIRT C W, NICHOLS B D. Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries[J]. Journal of computational physics, 1981, 39: 201-226.
- [3] YOUNGS D L. Time-dependent multi-material flow with large fluid distortion in numerical method for fluid dynamics[M]. New York: Academic press, 1982.
- [4] SUN D L, TAO W Q. A coupled volume-of-fluid and level set (VOSET) method for computing incompressible two-phase flows[J]. International journal of heat and mass transfer, 2010, 53: 645-655.
- [5] 孙东亮. 先进的速度压力耦合算法及界面捕捉方法的构建[D]. 西安: 西安交通大学, 2009.
- [6] GUEYFFIER D, LI J, NADIM A, et al. Volume-of-fluid interface tracking with smoothed surface stress methods for three-dimensional flows[J]. Journal of computational physics, 1999, 152: 423-456.
- [7] LING K, LI Z H, SUN D L, et al. A three-dimensional volume of fluid & level set (VOSET) method for incompressible two-phase flow [J]. Computers & Fluids, 2015, 118: 293-304.
- [8] BALCÁZAR N, LEHMKUHL O, JOFRE L, et al. A coupled volume-of-fluid/level-set method for simulation of two-phase flows on unstructured meshes[J]. Computers & Fluids, 2016, 124: 12-29.
- [9] SLATER M, STEED A, CHRYSANTHOU Y. Computer graphics and virtual environments: from realism to real-time[M]. USA: New Jersey, Addison Wesley, 2002.

(责任编辑: 孙 凯)