

Chapter 2-3 作业1

朱金秋 1220086621

2.2 估计标准误会变小, 根据估计标准误 $Se = \sqrt{\frac{S^2}{n}}$.

这里设全部数据重复 R 次, 则设 S_R^2 为加入重复后的标准差, 则 Se_{e-R} 为加入重复后的估计标准误

$$\frac{Se}{Se_{e-R}} = \frac{\sqrt{\frac{S^2}{n}}}{\sqrt{\frac{S_R^2}{nR}}} = \sqrt{\frac{nR}{n}} \cdot \sqrt{\frac{S^2}{S_R^2}}$$

$$= \sqrt{R} \cdot \sqrt{\frac{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{\frac{1}{Rn-1} \sum_{i=1}^{nR} (Rx_i - \bar{x}_R)^2}}$$

其中 $\bar{x}_R = \frac{R \sum x_i}{nR} = \bar{x}$

$$\text{故 } \frac{Se}{Se_{e-R}} = \sqrt{R} \sqrt{\frac{Rn-1}{n-1}} \cdot \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{R \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{Rn-1}{n-1}} > 1 \text{ 故 } Se > Se_{e-R}$$

因此 Se 经历重复 R 次后会变小

2.3 变小的速率为 $\sqrt{\frac{Rn-1}{n-1}}$ 并且 \sqrt{R} , 故不符合题目假设

3.1 对于每样本被抽中概率是等可能的为 $\frac{1}{N}$

而为了保证抽样过程中无重复,只能从 N 中抽取个 n 中没有的样本

这个概率 $p = \frac{N-j}{N}$ (假设抽出样本已有 j 个不重复值)

而由于是有放回抽样,则服从 iid 独立同分布 共有 n 个概率连乘

当 $j=1$ 时,无重复概率为 1

$$\text{故概率为 } \prod_{j=0}^{n-1} (1 - \frac{j}{N})$$

3.3 83 所法学院的平均绩点为 3.13 这表示总体的均值

15 所法学院的平均绩点为 3.09 这表示样本的均值

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = 3.094$$

$$3.13 - 3.09 = 0.04$$

$$\text{而 } \frac{s}{\sqrt{n}} = 0.0607 > 0.04$$

与 2.2 相符 (在误差范围内)

3.5 由 $\hat{p}_{rob}(A) = \# \{x \in A\} / n$

$$A = \{(y, z) : 0 < y < 600, 0 < z < 3.0\}$$

(a)

$$\text{则 } \hat{p}_{rob}(A) = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

(b) 估计误差

$$\text{prob}(A) = 0.195$$

$$S_{e-\text{prob}(A)} = \sqrt{\text{prob}(A) \cdot (1 - \text{prob}(A)) / 82} = 0.044$$

$$S_{e-\hat{\text{prob}}(A)} = \sqrt{\hat{\text{prob}}(A) \cdot (1 - \hat{\text{prob}}(A)) / 15} = 0.122$$

$$S_e = \sqrt{S_{e-\text{prob}}^2 + S_{e-\hat{\text{prob}}(A)}^2} = 0.1297$$

3.11 因为计算机随机数生成器是独立的, 各个随机数并不相互依赖

因此 $F: N \rightarrow \{j_1, j_2, \dots, j_n\}$ 为独立

又因为 j_1, j_2, \dots, j_N 服从均匀分布, 所以它们同分布

$$f_j = 1/N$$