第1期
2017年03月

电 光 系 统
Electronic and Electro-optical Systems

No. 1
Mar. 2017

地球椭球面上两点间椭球面距离的准确计算

王存良[1],辛明洋[2]

1. 中国电子科技集团公司第二十七研究所,郑州 450047;
2. 国家电网漯河供电公司,河南 漯河 462000

摘 要: 国军标中,地球椭球面上两点间球面距离计算方法适用范围有限,文章论述了一种具有普适性的准确计算方法,给出了计算过程和一些计算结果。在国军标中的算法适用范围内,本文的算法计算结果与国军标中仅有的4个椭球面距离计算结果进行了比对,结果表明,地球上南北半球相距很远的两点,本文的算法优于国军标的算法,并通过实例说明地球椭球面上两点间球面距离准确计算的应用和意义。

关键词: 地球椭球;椭球面距离;坐标系旋转;弧长计算公式

中图分类号: V557　　　　**文献标识码:** A

Accurate Calculation of Ellipsoidal Surface Distance between Two Points on Earth Ellipsoid Surface

WANG Cun-liang[1], XIN Ming-yang[2]

(*1. The 27th Research Institute of China Electronics Technology Group Corporation, Zhengzhou 450047, China ;*
2. State Grid Luohe Electric Power Company, Luohe Henan 462000, China)

Abstract: Based on the limitation of application scope of calculation method of ellipsoidal surface distance between two points on earth ellipsoid surface in GJB, this paper discusses the accurate algorithm which has a wide application, and gives computational process and results. The paper compares the calculation results with the only 4 ellipsoidal surface distance results in application scopes of algorithm in GJB. The result obtained shows that the algorithm in the paper is superior to the algorithm in GJB. The application and significance of the accurate algorithm are verified with a case study.

Key words: Earth Ellipsoid; Ellipsoidal Surface Distance; Coordinate Frame Rotation; Calculate Formula of Arc Length

1 引言

在高中数学里,定义地球上两点间的距离为通过这两点的大圆弧长,是将地球看成球体了。地球实为椭球,因此地球上两点间的距离应为通过这两点的大椭圆弧长。在某项目开发中,用到了地面位置距海面目标的距离,由于有上千公里的距离,所以用两个位置的平均地心距作为大圆半径,此大圆半径乘以两点的地心夹角(弧度)得到地面上两点的距离,这是一种近似算法,需要知道与准确计算有多大误差,然而在《中华人民共和国国家军用标准2000中国大地测量系统》(GJB 6304-2008)中,介绍了3种地球椭球面上两点间球面距离的计算方法,都有各自的适用范围,当距离大于20 000 km时,国军标中的算法不能用[1]。此国军标中适用范围最大的算法,采用了等效方法,不是绝对准确,算法复杂,而且在公开发表的文献上找不到更准确的算法,因此笔者经过反复思考与计算,应用微积分计算弧长,教科书上有应

作者简介: 王存良(1968—),男,高工,毕业于湖南大学,研究方向:数据处理与分析,导航定位、定轨、目标探测定位等算法与精度计算分析。

用[2]，计算方法准确，数学概念明确，易于理解和掌握，不存在近似计算方法误差，适用于地球上任意两点间球面距离的计算，尤其适于南北半球远距离高精度应用场合，因为此时国军标的方法误差较大，难以满足应用[1]。地球椭球面上两点间球面距离的准确计算，可用于远跨南北半球的岛屿距离准确计算，可作为远距离平飞空中航线长度及地球表面上较远距离两位置间距准确计算的基础。

2 GJB 6304-2008 中地球椭球面上两点间球面距离的计算

在《中华人民共和国国家军用标准 2000 中国大地测量系统》中的 6.8 大地问题解算，给出了地球上两点间椭球面距离（GJB 6304-2008 中称为两点之间的大地线长）的计算，用了韦森特公式，适用于线长从数厘米到近 20 000 km，大地线长的精度为毫米级[1]，算法如下：

$$\tan u_1 = \sqrt{1-e^2}\tan\beta_1 \tag{1}$$

$$\tan u_2 = \sqrt{1-e^2}\tan\beta_2 \tag{2}$$

取近似：

$$\lambda = \Delta L = L_2 - L_1 \tag{3}$$

开始迭代计算如下诸式：

$$\sin^2\sigma = (\sin\lambda\cos u_2)^2 + (\cos u_1\sin u_2 - \sin u_1\cos u_2\cos\lambda)^2 \tag{4}$$

$$\cos\sigma = \sin u_1\sin u_2 + \cos u_1\cos u_2\cos\lambda,\ \sigma\epsilon(0,\pi) \tag{5}$$

$$\tan\sigma = \frac{\sin\sigma}{\cos\sigma} \tag{6}$$

$$\sin\alpha = \frac{\cos u_1\cos u_2\sin\lambda}{\sin\sigma} \tag{7}$$

$$\cos 2\sigma_m = \cos\sigma - \frac{2\sin u_1\sin u_2}{\cos^2\alpha} \tag{8}$$

$$C = \frac{f}{16}\cos^2\alpha[4 + f(4 - 3\cos^2\alpha)] \tag{9}$$

$$\lambda = \Delta L + (1-C)f\sin\alpha\{\sigma + C\sin\sigma[\cos 2\sigma_m + C\cos\sigma(-1 + 2\cos^2 2\sigma_m)]\} \tag{10}$$

直至 λ 无显著变化之后，计算：

$$k^2 = e'^2\cos^2\alpha \tag{11}$$

$$A = 1 + \frac{k^2}{16384}\{4096 + k^2[-768 + k^2(320 - 175k^2)]\} \tag{12}$$

$$B = \frac{k^2}{1024}\{256 + k^2[-128 + k^2(74 - 47k^2)]\} \tag{13}$$

$$\Delta\sigma = B\sin\sigma\{\cos 2\sigma_m + \frac{B}{4}[\cos\sigma(-1 + 2\cos^2 2\sigma_m) - \frac{B}{6}\cos 2\sigma_m(-3 + 4\sin^2\sigma)(-3 + 4\cos^2 2\sigma_m)]\} \tag{14}$$

$$s = bA(\sigma - \Delta\sigma) \tag{15}$$

上述算法中，σ 为球上的角距，从点 1 到点 2，点 1 的大地经纬度为 L_1, B_1，点 2 的大地经纬度为 L_2, B_2；α 为在赤道处大地线的方位角；λ 为在辅助球上的经差。

以上是国军标中完整的算法，该算法太复杂，中间变量 λ 需循环迭代，直到"无显著变化"，不够量化，而且有适用范围要求；所以笔者提供一种新的能普遍应用的准确算法。

3 地球椭球面上两点间球面距离的准确计算

3.1 两点大地经度相同的球面距离的准确计算

3.1.1 两点同在北半球或南半球时球面距离的准确计算

大地经度相同，同在一个半球上的两点 A，B，其大地经度为 L，大地纬度分别为 B_1，B_2，球面距离 AB 为过 A，B 两点和球心的平面截地球椭球所得交线椭圆的椭圆弧 AB 的长度。弧长的计算可通过积分得到，利用数学工具软件 Mathcad 积分很容易，关键是找到该椭圆的表达式和积分的上下限。容易知道该椭圆的中心为地球球心，长半轴为地球椭球长半轴 a，该椭圆面与地球赤道面垂直，所以椭圆的短半轴为地球椭球短半轴 b；椭圆的长轴与地心空间直角坐标系 X 轴正向的夹角即为大地经度[3] L，所以地心空间直角坐标系（以地球椭球中心 O 为空间直角坐标系的原点，Z 轴与椭球的旋转轴一致，X 轴位于起始大地子午面与赤道面的交线上，Y 轴按右手定则确定）。绕其 Z 轴逆时针旋转角度 L，就得到椭圆的 x 轴，椭圆的 z 轴同地心空间直角坐标系的 Z 轴；因此椭圆的方程为

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 \tag{16}$$

旋转后的坐标系记为（O－xyz），地心空间直

角坐标系记为（$O-X_DY_DZ_D$），有

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos L & \sin L & 0 \\ -\sin L & \cos L & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_D \\ Y_D \\ Z_D \end{bmatrix}$$

所以，$x_i = X_{Di}\cos L + Y_{Di}\sin L$　　(17)

$$X_{Di} = [\alpha/(1-e^2\sin^2 B_i)^{0.5}]\cos B_i \cos L \quad (18)$$

$$Y_{Di} = [\alpha/(1-e^2\sin^2 B_i)^{0.5}]\cos B_i \cos L \quad (19)$$

在2000中国大地坐标系（China Geodetic Coordinate System 2000，缩写为CGCS2000）中，

$$a = 6\ 378.137\ \text{km},$$

$$b = 6\ 356.7523141,$$

$$e^2 = 0.0066943800229$$

弧长的计算公式为[2]

$$\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\,dx \quad (20)$$

式中，x_1，x_2由式(18)，(19)（注意$i=1,2$）代入式(17)分别得到。

由式(16)得$\frac{dz}{dx} = -\frac{b^2x}{a^2z}$　　(21)

将式(22)代入式(20)得

$$\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\,dx = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+\frac{b^2x^2}{a^2(a^2-x^2)}}\,dx \quad (22)$$

为了验证式(22)的正确性，可用具体位置数据验证。如L=108°50′15.216″，B_1=34°32′0.0132″，B_2=31°32′14.66803″，利用Mathcad算得式(22)即AB弧长为332.264 103 km。用两个位置的平均地心距作为大圆半径，大圆半径乘以两点的地心角（弧度）得到地面上两点的距离，其结果为332.262 337 km。可见算法正确，在300多公里远的两点，球面距离近似算法误差在米级。

3.1.2　两点分别在南北半球时球面距离的准确计算

A，B两点分别在南北半球时，式(22)仍能用，只不过$[x_1,x_2]$不是单调区间，所以需要将$[x_1,x_2]$分为两个单调区间$[x_1,a]$，$[x_2,a]$，所以此时球面距离计算公式为

$$\int_{x_1}^{a} \sqrt{1+\frac{b^2x^2}{a^2(a^2-x^2)}}\,dx + \int_{x_2}^{a} \sqrt{1+\frac{b^2x^2}{a^2(a^2-x^2)}}\,dx \quad (23)$$

为了验证式(23)的正确性，可用具体位置数据验证。如L=108°50′15.216″，B_1=34°32′0.0132″，B_2=−31°32′14.66803″，利用Mathcad算得式(23)即AB弧长为7 313.381 957 km。用两个位置的平均地心距作为大圆半径，大圆半径乘以两点的地心角（弧度）得到地面上两点的距离，其结果为7 308.655 709 km。可见算法正确。在7 300多公里远的两点，球面距离近似算法误差达km量级。

3.2　两点大地经度不同的球面距离的准确计算

3.2.1　两点同在北半球或南半球时球面距离的准确计算

同在一个半球上的两点A，B，其大地经度分别为L_1，L_2，大地纬度分别为B_1，B_2，过A，B两点和球心的平面截地球椭球所得交线为椭圆，该椭圆面与地球赤道面不垂直，其二面角需要得到。地心空间直角坐标系中，过A，B两点和球心的平面α的方程为

$$X + b_1Y + c_1Z = 0$$

式中：$b_1 = \frac{X_{D2}Z_{D1} - X_{D1}Z_{D2}}{Y_{D1}Z_{D2} - Y_{D2}Z_{D1}}$，

$$c_1 = \frac{X_{D2}Y_{D1} - X_{D1}Y_{D2}}{Y_{D2}Z_{D1} - Y_{D1}Z_{D2}}$$

X_{Di}按式(18)计算，Y_{Di}按式(19)计算；

$$Z_{Di} = [\alpha(1-e^2)/(1-e^2\sin^2 B_i)^{0.5}]\sin B_i$$

平面α与平面XOY（地球赤道面）的交角为β，这两平面的交线为l，平面α截地球椭球所得椭圆，其长轴在直线l上，l的方程为

$$\begin{cases} X + b_1Y = 0 \\ Z = 0 \end{cases}$$

交线的斜率为k，$k = -\frac{1}{b_1}$

交线与X轴的夹角θ，$\mathrm{tg}\theta = k$

当$k \geq 0$时，$\theta = \mathrm{arctg}(k)$；

当$k < 0$时，$\theta = \pi + \mathrm{arctg}(k)$；

点A在平面XOY上的投影点A_1为$(X_{D1}, Y_{D1}, 0)$，A_1到直线l的距离为d，

$$d = \frac{|X_{D1} + b_1Y_{D1}|}{\sqrt{1+b_1^2}}$$

$$\mathrm{tg}\beta = \frac{Z_{D1}}{d}\ \text{所以}\ \beta = \mathrm{arctg}\left(\frac{Z_{D1}}{d}\right)$$

地心空间直角坐标系先绕其Z轴逆时针旋转角度θ，再绕X轴逆时针旋转角度β，就得到以直线l为X轴，以平面α为坐标平面$X'OY'$，Z'轴与X'轴、Y'轴构成右手系的坐标系$OX'Y'Z'$，则有

$$\begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{bmatrix} = \boldsymbol{R}_X(\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{R}_z(\boldsymbol{\theta}) \begin{bmatrix} X_D \\ Y_D \\ Z_D \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$R_X(\beta)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\beta & \sin\beta\\ 0 & -\sin\beta & \cos\beta\end{bmatrix}$$

$$R_Z(\theta)=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta & 0\\ -\sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

由式(24),得

$$\begin{bmatrix}X_D\\ Y_D\\ Z_D\end{bmatrix}=R_Z(-\theta)R_X(-\beta)\begin{bmatrix}X'\\ Y'\\ Z'\end{bmatrix} \tag{25}$$

平面 α 截地球椭球所得椭圆在平面 $X'OY'$ 上,故 $Z'=0$,所以有

$$X_D = X'\cos\theta - \theta Y'\sin\theta\cos\beta \tag{26}$$

$$\begin{aligned}Y_D &= X'\sin\theta + Y'\cos\theta\cos\beta\\ Z_D &= Y'\sin\beta\end{aligned} \tag{27}$$

将式(26)式(27)代入地球椭球方程(地心空间直角坐标系中)

$$\frac{X_D{}^2}{\alpha^2}+\frac{Y_D{}^2}{\alpha^2}+\frac{Z_D{}^2}{b^2}=1$$

得 $\frac{X^2}{a^2}+Y^2(\frac{\cos^2\beta}{a^2}+(\frac{\sin^2\beta}{b^2})=1$ (28)

式(28)两边对 X' 求导数,得

$$\frac{dY'}{dX'}=-\frac{X'}{a^2Y'(\frac{\cos^2\beta}{a^2}+\frac{\sin^2\beta}{b^2})} \tag{29}$$

由式(24)得 $X'_i=X_{Di}\cos\theta+Y_{Di}\sin\theta$ (30)

弧长的计算式(20)仍然可用,只不过积分的上下限需按式(30)计算,由式(28)得到

$$Y^2(\frac{\cos^2\beta}{a^2}+\frac{\sin^2\beta}{b^2})a^2=a^2-X^2 \tag{31}$$

弧长的计算公式具体表达式为

$$\int_{X1}^{X2}\sqrt{1+\frac{x^2}{(a^2-x^2)(\cos^2\beta+a^2\frac{\sin^2\beta}{b^2})}}\,dx \tag{32}$$

3.2.2 两点分别在南北半球时球面距离的准确计算

A,B 两点分别在南北半球时,式(32)仍能用,只不过 $[X'_1,X'_2]$ 不是单调区间,所以需要将 $[X'_1,X'_2]$ 分为两个单调区间 $[X'_1,a]$,$[X'_2,a]$,所以此时球面距离计算公式为

$$\int_{X'_1}^{a}\sqrt{1+\frac{x^2}{(a^2-x^2)(\cos^2\beta+a^2\frac{\sin^2\beta}{b^2})}}\,dx+\int_{X'_2}^{a}\sqrt{1+\frac{x^2}{(a^2-x^2)(\cos^2\beta+a^2\frac{\sin^2\beta}{b^2})}}\,dx \tag{33}$$

4 本算法计算结果与国军标中给出的计算结果比较及应用

4.1 本算法计算结果与国军标中给出的计算结果比较

为了使比较结果更具有说服力,两种算法中的参数都取2000中国大地坐标系;本算法的计算结果与国军标中仅有的4个球面距离计算结果比较如表1所示。

表1 本算法的计算结果与国军标中计算结果比较

序号	地球球面上两点位置	国军标中给出的计算结果(m)	本算法的计算结果(m)	两种算法计算结果的比较(m)
1	$B_1=34°32'00.01320''$ $L_1=108°50'15.21600''$ $B_2=33°37'37.64216''$ $L_2=110°03'53.85850''$	151 451.146 8	151 451.1468 6	0.000 1
2	$B_1=34°32'00.01320''$ $L_1=108°50'15.21600''$ $B_2=64°12'34.65600''$ $L_2=167°13'08.15929''$	5 091 451.146 7	509 145 1.878 21	0.731 5
3	$B_1=34°32'00.01320''$ $L_1=108°50'15.21600''$ $B_2=28°44'04.55436''$ $L_2=287°34'21.12370''$	13 000 000.000 0	13 000 000.046 51	0.0456
4	$B_1=34°32'00.01320''$ $L_1=108°50'15.21600''$ $B_2=-31°32'14.66803''$ $L_2=297°28'41.69419''$	19 151 451.146 6	19 151 613.698 3	162.55

由表1可知，两点在两个半球上时，国军标的计算结果误差较大，因为国军标中的算法是一种等效方法，等效不是恒等，必然存在误差；本文的算法没有近似，不存在算法误差。

4.2　准确计算椭球面上两点间球面距离的应用

地球椭球是地球的适用数学模型，但地球表面陆地上大都不在地球椭球上，可利用精确计算椭球上两点的球面距离，计算出地球上两点的等效地球半径，进而较为准确计算出地球上两点的距离。如表1中的第2行，球面距离已计算出5 091.451 878 km，可算出两点的地心夹角为45.830 798 398 081°，等效地球半径为6 365.123 77 km；如果位置1,2的大地高分别为300 m,200 m，则此时位置1,2的等效地球半径为(6 365.123 77 +0.5(0.3 +0.2))km，位置1,2距离(弧长)为5 091.652 km。

两点的平均半径（算术平均值）6 366.315 94 km，几何平均半径值为6 366.213 66 km，用算术平均半径按圆弧计算两点之间的弧长为5 092.689 km，用几何平均半径按圆弧计算两点之间的弧长为5 092.607 km，可见与精确计算结果相比多了1 km左右。所以通过准确计算椭球面上两点之间的弧长，进而准确计算出地球上两点的距离是很必要的。

5　结束语

本文算法的最特殊情况就是用来计算地球的子午线长，此种情况不需要坐标系旋转，只是微积分计算半椭圆弧长，其计算结果与国军标[1]中第15页的准确计算公式(12)的计算结果相比，有不到0.2 mm的差别，尽管子午线长度达到两万多公里，这说明本文算法特殊情况下也是准确的。本文的算法，是空间解析几何、平面解析几何、坐标系旋转与微积分的综合应用，通过数据计算结果验证表明算法正确，适用性强，是对国军标中相应算法的补充和拓展。两点在两个半球上距离较远或者要求计算精度高时，其球面距离计算需用本文的算法；国军标中已说明算法适用于距离不大于2×10^5 km的计算，因此距离大于2×10^5 km时，需用本文的算法。地球椭球面上两点间球面距离的准确计算，是一个基本计算，地面远距离通信光缆铺设长度及高压输电距离等准确计算，都以准确计算为基础。

参考文献

[1] 中华人民解放军总装备部. GJB 6304-2008 2000 中国大地测量系统[S]. 北京：总装备部军标出版发行部，2008.

[2] 吉林大学数学系编. 数学分析(上)[M]. 北京：高等教育出版社，1978:218.

[3] 张守信. 外弹道测量与卫星轨道测量基础[M]. 北京：国防工业出版社，1992:17,25.

德国科学家竟用3D打印机打印出了玻璃制品

德国科学家已经利用3D打印技术用玻璃打印出一些非常精细复杂的物品，其中包括一个椒盐脆饼。这项技术未来有可能被用于3D打印更有用的东西，比如复合镜头、滤镜甚至通常需要高度熟练的工匠才能制作出来的装饰物。

据《自然》杂志今日发表的一份研究报告称，研究员们使用了一种"液体玻璃"来制造光滑、透明和具有极高分辨率的复杂外形。

麻省理工学院的科学家用一种能将温度提高到1900华氏度(约合1038摄氏度)的特殊3D打印机制造过透明玻璃物品。其他一些地方的科学家也做过这方面的尝试，结果制造出来的玻璃物品强度不高，透明度也比较差。莱普称，今日《自然》杂志发表的研究报告提到的技术却有些不同，因为它使用的3D打印技术是已经非常普及的技术。

这让我们能够用具有最令人惊叹的光学、机械和物理特性的一种最古老的材料在现代3D打印设备的处理下具有艺术的外形。我们的目标是填补材料上的差距，这项技术未来有可能被用来3D打印智能手机摄像头中的复合镜头、下一代微处理器的组件，但是它的应用潜力真是无限的，从玻璃装饰品到建筑物上使用的各种复杂外形的玻璃板都能制造。

——中国光电网