线性代数的考试基本情况

- 一、满分34分；2个选择+1个填空+2个解答；
- 二、数一数二数三考试内容基本统一
  （数一：向量空间）
- 三、一个核心——秩，一个方法——初等变换.

第1章 行列式

- 主要内容
- 1.行列式的定义及性质；
- 2.行列式的展开公式

一、行列式的定义

1.排列和逆序

排列 由n个数$1,2,\cdots,n$组成的一个有序数组称为一个n级排列，n级排列共有$n!$个.

逆序 在一个排列中，如果一个大的数排在了一个小的数前面，就称这两个数构成了一个逆序.

逆序数 在一个排列$i_1i_2\cdots i_n$中，逆序的总数称为该排列的逆序数，记为$\tau(i_1i_2\cdots i_n)$.

如$\tau(32514)=$____

2.行列式的定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21};$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}.$$

注：对于行列式的定义把握以下两点

1.n阶行列式每一项是取自不同行、不同列的n个元素的乘积，共有$n!$项

2.当行下标顺排时，每一项的正负号由列下标$j_1 j_2 \cdots j_n$的逆序数$\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)$决定.

如：写出四阶行列式中含有$a_{11}a_{23}$的项

二、行列式的性质

性质1 行列互换, 其值不变.

性质2 两行(列)互换,行列式的值变号.

特别地: 两行(列)相同,行列式的值为0.

性质3 某行(列)有公因子k,则可把k提到行列式外面.

特别地:（1）某行(列)全为0,行列式的值为0;

（2）某行(列)元素对应成比例,行列式的值为0.

性质4 某行(列)是两个元素之和,则可拆成两个行列式之和.

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_1 & a_{12}+b_2 & a_{13}+b_3 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

性质5 某行(列)元素的k倍加到外一行(列)对应元素上,行列式的值不变.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{11}+a_{21} & ka_{12}+a_{22} & ka_{13}+a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

三、行列式的展开公式

1.余子式

在行列式中,去掉元素a_{ij}所在的第i行,第j列元素,由剩余的元素按照原来的位置与顺序组成的$n-1$阶行列式称为元素a_{ij}的余子式,记为M_{ij}.

如$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

2.代数余子式

称$(-1)^{i+j}M_{ij}$为元素a_{ij}的代数余子式,记为A_{ij};于是$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$,

显然也有$M_{ij}=(-1)^{i+j}A_{ij}$.

3.行列式按行（列）展开公式

行列式的值等于等于它的任一行(列)元素与其对应的代数余子式乘积之和.

$$|A|=\begin{cases} a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in} & (i=1,2,\cdots,n) \\ a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj} & (j=1,2,\cdots,n) \end{cases}$$

注：行列式“串行（列）展开”值为0

$$0=\begin{cases} a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn} & (i\neq j) \\ a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj} & (i\neq j) \end{cases}$$

四、几个重要的行列式

1.上(下)三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

2.关于副对角线行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

3.两个特殊的拉普拉斯展开式

如果A和B分别是m阶和n阶方阵,则

$$\begin{vmatrix} A & * \\ 0 & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & O \\ * & B \end{vmatrix} = |A||B|,$$

$$\begin{vmatrix} 0 & A \\ B & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & A \\ B & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{mn}|A||B|.$$

4.范德蒙行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n} \left(x_j - x_i\right).$$

第2章　矩阵及其运算

主要内容:

- 1.矩阵的基本运算
- 2.幂、转置、伴随、逆
- 3.初等变换与初等矩阵
- 4.秩

一、矩阵的定义及其基本运算

1.矩阵的定义

由$m \times n$个数，排成的m行n列的表格

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$称为一个$m \times n$的矩阵，记为A.

若$m = n$，则称为n阶方阵；

若A与B都是$m \times n$的矩阵，则称A与B是同型矩阵；

若A与B是同型矩阵且对应元素$a_{ij} = b_{ij}$，则$A = B$.

特殊的几个矩阵

- （1）零矩阵　每个元素都是0的矩阵；记为0
- （2）行向量　只有一行的矩阵称为行矩阵，也叫行向量

  列向量　只有一列的矩阵称为列矩阵，也叫列向量
- （3）单位阵　主对角元素均为1，其余元素全为0的n阶方阵
- （4）数量阵　主对角元素均为k，其余元素全为0的n阶方阵
- （5）对角阵　主对角以外的元素全为0
- （6）上（下）三角阵　主对角以下（以上）元素全为0

2.矩阵的基本运算

（1）加法运算【同型且对应运算相加】

（2）数乘运算【数k乘每一个元素】

（3）乘法运算【A的列等于B的行且对应元素相乘再相加】

【例1】设$A=\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{bmatrix}$,求$AB$与$BA$.

【例2】设$A=[1,2,3]^T$，$B=[3,2,1]^T$，计算AB^T和B^TA.

[例3]设$A=\begin{bmatrix} a_1 & & \\ & a_2 & \\ & & a_3 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} b_1 & & \\ & b_2 & \\ & & b_3 \end{bmatrix}$,计算$AB$和$BA$.

（4）方阵的幂

（5）转置运算

将$m\times n$的矩阵$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$的行列互换

得到的$n\times m$矩阵$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$称为$A$的转置矩阵，记为$A^T$.

称满足$A^T=A$的矩阵A为对称矩阵；满足$A^T=-A$的矩阵A为反对称矩阵.

性质：

1.$\left(A^T\right)^T=A$;

2.$(kA)^T=kA^T$;

3.$(AB)^T=B^TA^T$;

4.$(A+B)^T=A^T+B^T$.

[例4] 设$X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$满足$X^TX=1,H=E-2XX^T$,证明H是对称矩阵,且$HH^T=E$.

（6）方阵的行列式

n阶矩阵A的元素构成的行列式称为方阵A的行列式，记为$|A|$.

性质：

1.$\left|A^T\right| = |A|$;

2.$|kA| = k^n\,|A|$;

3.$|AB| = |A||B|$.

特别注意:$|A+B|$没有公式,常利用单位阵E作恒等变形.

二、伴随矩阵

1.定义

用$|A|$的代数余子式按如下形式拼成的矩阵称为A的伴随矩阵，记为A^*

$$A^*=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & & A_{nn} \end{bmatrix}$$

且有$AA^*=A^*A=|A|E$.

注：对于A^*注意以下两点

1. A^*的元素是A的代数余子式，故在计算代数余子式A_{ij}时，不要丢掉"+"、"−"号；

2. 拼成A^*时，不要把A_{ij}排错队.

2.性质：$AA^* = A^*A = |A|E$.

1.$(A^*)^* = |A|^{n-2}A;(n \geq 2)$

2.$(kA)^* = k^{n-1}A^*$;

3.$(AB)^* = B^*A^*;(A,B\text{可逆})$

4.$|A^*| = |A|^{n-1}$.

特别注意：$(A+B)^* \neq A^* + B^*$.

3.求法：

方法一：定义法

先求A_{ij}，然后拼成A^*.

方法二：公式法

若$|A| \neq 0$（即A可逆），则$A^* = |A| A^{-1}$.

【例5】(1) 设$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, 则伴随矩阵$A^*=$_____;

(2) 设$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix}$, 则伴随矩阵$A^*=$_____.

三、逆矩阵

1.定义

A、B是n阶方阵，E是n阶单位阵，

若$AB = BA = E$，则称A可逆，且B是A的逆矩阵，记为$A^{-1} = B$.

定理：

1.若A可逆，则A的逆矩阵唯一；

2.A可逆$\Leftrightarrow |A| \neq 0$.

推论：

A、B是n阶方阵，E是n阶单位阵，

若$AB = E\left(\text{或} BA = E\right)$，则$A^{-1} = B$.

2.性质：

1.$\left(A^{-1}\right)^{-1}=A$;

2.$(kA)^{-1}=\frac{1}{k}A^{-1}(k\neq 0)$;

3.$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$;

4.$\left|A^{-1}\right|=|A|^{-1}$;

特别注意:$(A+B)^{-1}\neq A^{-1}+B^{-1}$.

最后,$\left(A^{T}\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^{T}$,$\left(A^{*}\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^{*}$,$\left(A^{T}\right)^{*}=\left(A^{*}\right)^{T}$.

3.求法

方法一：用定义

A,B都是n阶矩阵，$AB=E$，则$A^{-1}=B$.

方法二：用伴随 $AA^*=A^*A=|A|E$

若$|A|\neq 0$，则$A^{-1}=\dfrac{A^*}{|A|}$，$\left(A^*\right)^{-1}=\dfrac{A}{|A|}$.

方法三：用初等变换

$$\left(A|E\right)\rightarrow\left(E|A^{-1}\right)$$

【例6】（1）设$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，则逆矩阵$A^{-1}=$_____；

（2）设$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix}$，则逆矩阵$A^{-1}=$_____.

［例7］设方阵A满足$A^2 - A - 2E = 0$，证明A和$A + 2E$都可逆，并求出其逆矩阵.

[例8] 设$\alpha=\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}$, $\beta=\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$, $A=\alpha\beta^T$, 则$A^{100}=$______.

[例9]设$A=\begin{bmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{bmatrix}$,则$A^4=$______.

【例10】设$P=\begin{bmatrix}1&2\\2&4\end{bmatrix}$，$\Lambda=\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}$，$AP=P\Lambda$，则$A^n=$______.

【例11】设$A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ \lambda & 1\end{bmatrix}$，则$A^k=$______.

四、分块矩阵

1.矩阵的分块

2.分块矩阵的运算

(1)加法

$$\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 + B_1 & A_2 + B_2 \\ A_3 + B_3 & A_4 + B_4 \end{bmatrix}$$

(2)数乘

$$k\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kA & kB \\ kC & kD \end{bmatrix}$$

(3)乘法

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X & Y \\ Z & W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AX + BZ & AY + BW \\ CX + DZ & CY + DW \end{bmatrix}$$

(4)分块矩阵的性质

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} A^n & 0 \\ 0 & B^n \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & B^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{bmatrix}.$$

五、初等变换与初等矩阵

1.初等变换

1）用一个非零常数k乘矩阵A的某一行（列）；

2）互换矩阵A的某两行（列）；

3）将A的某行（列）k倍加到另一行（列）.

2.初等矩阵

由单位阵E经过一次初等变换得到的矩阵，称为初等矩阵.

3.初等矩阵的性质

1）初等矩阵都是可逆矩阵，且其逆矩阵仍是同一类型的初等矩阵；

2）A左乘（右乘）初等矩阵，相当于对A作一次同类型的初等行(列）变换；

[例12]已知3阶矩阵A可逆,将A的第1列与第2列交换得B,再把B的第3列的-3倍加到第2列得C,则满足$PA^{-1}=C^{-1}$的P是____

$(A)\begin{bmatrix}1&0&3\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$ $(B)\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\3&0&1\end{bmatrix}$ $(C)\begin{bmatrix}1&0&-3\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$ $(D)\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&3&1\end{bmatrix}$

3.用初等变换求逆

六、矩阵等价

1.矩阵等价的定义

A经过有限次初等变换变到B,称A与B等价,记为$A \cong B$.

2.矩阵等价的充要条件

$A \cong B \Leftrightarrow \exists$可逆矩阵$P,Q$使得$PAQ = B \Leftrightarrow r(A) = r(B)$.

七、矩阵的秩

1.矩阵秩的定义

$A_{m\times n}$中非零子式的最高阶数称为A的秩，记为$r\left(A\right)$.

定理1: 矩阵A的秩等于它对应的行阶梯形矩阵非零行的行数.

注:零行元素（若有）在最下行，且每行左起第一个非零元素所在的列下方元素全是0，这种矩阵称为行阶梯形矩阵.

[例13]设$A=\begin{bmatrix}1&2&-1&1\\3&2&\lambda&-1\\5&6&3&\mu\end{bmatrix}$,已知$r(A)=2$,则$\lambda=$_____,$\mu=$_____.

2.秩的性质

1）$r(A)=r(A^T)$;

2）$r(kA)=r(A)(k\neq 0)$;

3）$r(A_{m\times n})\leq \min\{m,n\}$;

4）A可逆,则$r(AB)=r(B)$, B可逆,则$r(AB)=r(A)$;

5）$r(AB)\leq \min\{r(A),r(B)\}$;

6）$r(A+B)\leq r(A)+r(B)$;

7）$A_{m\times n}B_{n\times s}=0$,则$r(A)+r(B)\leq n$;

8）$r(A)=r(A^TA)=r(AA^T)=r(A^T)$.

【例14】设$A=\begin{bmatrix}1&2&1\\2&a&3\\2&4&5\end{bmatrix}$,$B$是$3\times 4$的非零矩阵,且$AB=0$,则$r(B)$_____.

第3章 线性方程组

- 主要内容
- 1.齐次方程组
- 2.非齐次方程组；
- 3.公共解、同解.

一、齐次线性方程组

1.齐次线性方程组的三种表示

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

$$A_{m\times n}x = 0 \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad x = \left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right)^T$$

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = 0 \qquad \alpha_i = \left(a_{1i}, a_{2i}, \cdots, a_{mi}\right)^T$$

2.有解的条件

$A_{m\times n}x=0$只有零解 $\Leftrightarrow r\left(A_{m\times n}\right)=n$;

$A_{m\times n}x=0$有非零解 $\Leftrightarrow r\left(A_{m\times n}\right)<n$;

特别地　若$m<n$（方程少未知数多），则$A_{m\times n}x=0$有非零解.

若$A_{m\times n}x=0$有非零解，则其线性无关的解有$n-r\left(A\right)$个.

3.解的性质

若$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_t$都是$Ax=0$的解，则$k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_t\xi_t$仍是$Ax=0$的解.

4.基础解系

$Ax=0$的基础解系

1）$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_t$是$Ax=0$的解；

2）$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_t$线性无关；

3）$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_t$可以表示$Ax=0$的任一解或$n-r\left(A\right)=t$.

称$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_t$是$Ax=0$的基础解系.

[例1]求齐次线性方程组$\begin{cases} x_1+2x_2+2x_3+x_4=0 \\ 2x_1+x_2-2x_3-2x_4=0 \\ x_1-x_2-4x_3-3x_4=0 \end{cases}$的通解.

[例2]求齐次线性方程组$nx_1+(n-1)x_2+\cdots+2x_{n-1}+x_n=0$的通解.

$\left[\text{例}3\right]$写出一个以$x=c_1\left(2,-3,1,0\right)^T+c_2\left(-2,4,0,1\right)^T$为通解的齐次线性方程组.

二、非齐次线性方程组

1.非齐次线性方程组的三种表示

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$A_{m\times n}x = 0 \quad (A|b) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix} \quad x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$$

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = b \quad \alpha_i = (a_{1i}, a_{2i}, \cdots, a_{mi})^T \quad b = (b_1, b_2, \cdots, b_m)^T$$

2.有解的条件

$A_{m\times n}x=b$无解 $\Leftrightarrow r(A)\neq r(A|b)$;

$A_{m\times n}x=b$有唯一解 $\Leftrightarrow r(A)=r(A|b)=n$;

$A_{m\times n}x=b$有无穷多解 $\Leftrightarrow r(A)=r(A|b)<n$

3.解的性质

设η_1,η_2,η是$A_{m\times n}x=b$的解, ξ是$A_{m\times n}x=0$的解, 则

1） $\eta_1-\eta_2$是$A_{m\times n}x=0$的解；

2） $\eta+\xi$是$A_{m\times n}x=b$的解.

4.解的结构

$A_{m\times n}x=b$，当$r(A)=r(A|b)=r<n$有无穷多解

通解: $\alpha+k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}$.

[例4]求非齐次线性方程组$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 4 \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 - 8x_4 = 0 \end{cases}$的通解.

[例5]设设4元非齐次方程组的系数矩阵的秩为3, 已知η_1,η_2,η_3是它的三个解, 且$\eta_1=(2,3,4,5)^T$,$\eta_2+\eta_3=(1,2,3,4)^T$,求它的通解.

三、克拉默法则

n个方程n个未知数的方程组$Ax=0$

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \qquad\qquad\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$$

的系数矩阵的行列式$|A|\neq 0$,则方程组有唯一解,且$x_i=\dfrac{|A_i|}{|A|}, i=1,2,\cdots,n.$

其中$|A_i|$是$|A|$中第i列元素替换为$\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix}^T$.

推论:对n个方程n个未知数的齐次方程组$Ax=0$,

若$|A|\neq 0$,则齐次方程组只有零解;若齐次方程组有非零解,则$|A|=0$.

[例6]设有线性方程组$\begin{cases}(1+\lambda)x_1+x_2+x_3=0\\x_1+(1+\lambda)x_2+x_3=3\\x_1+x_2+(1+\lambda)x_3=\lambda\end{cases}$

问λ取何值时, 此方程组有唯一解；无解；有无穷多解, 并求此时的通解.

四、公共解、同解

1.公共解

若α是$Ax=0$的解,也是$Bx=0$的解,称α是$Ax=0$与$Bx=0$公共解.

‖[例7](I)$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \end{cases}$;(II)$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

(1)分别求方程组(I)和(II)的基础解系;

(2)求方程组(I)和(II)的公共解.

2.同解

$Ax=0$的解是$Bx=0$的解, 且$Bx=0$的解也是$Ax=0$的解；称$Ax=0$与$Bx=0$是同解.

$Ax=0$与$Bx=0$同解$\Rightarrow r(A)=r(B)$.

[例8] 证明$Ax=0$与$A^T Ax=0$是同解方程组.

第4章 向量

- 主要内容
- 1.相关、无关；
- 2.线性标出；
- 3.秩、极大无关组.

一、向量的概念及其运算

1.向量的概

n维行向量 $\alpha=\left(a_1,a_2,\cdots,a_n\right)$

n维列向量 $\alpha=\left(a_1,a_2,\cdots,a_n\right)^T$

2.向量的运算

相等 $\alpha=\beta \Leftrightarrow a_i=b_i, i=1,2,\cdots,n.$

加法 $\alpha+\beta=\left(a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n\right)$

数乘 $k\alpha=\left(ka_1,ka_2,\cdots,ka_n\right)$

设$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$，$\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^T$

内积 $(\alpha,\beta)=\alpha^T\beta=\beta^T\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}=a_1b_1+\cdots a_nb_n$

正交 $\alpha^T\beta=0$，称α与β正交；

$\alpha^T\alpha=0\Leftrightarrow\alpha=0$

模 $\|\alpha\|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}$

单位向量 $\|\alpha\|=1$，称α为单位向量

二、线性表出

定义1: 对m个n维向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$及一组数$k_1,k_2,\cdots,k_m$,称$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m$为向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$的**线性组合**.

定义2: 若β能表示为向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$的线性组合的形式,即存在一组数$k_1,k_2,\cdots,k_m$, 使得$\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m$,则称$\beta$能被向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$**线性表出**.

定义3：若向量组I: $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$种的每个向量都可由向量组II : $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$线性表出，则称**向量组I可由向量组II线性表出.**

定理1：若向量组I可由向量组II线性表出，则$r(\mathrm{I})\le r(\mathrm{II})$.

定理2：向量组I可由向量组II线性表出 $\Leftrightarrow r(\mathrm{I})=r(\mathrm{I},\mathrm{II})$.

定义4：若向量组I可由向量组II线性表出且向量组II也可由向量组I线性表出，则称**向量组I与向量组II等价**.

定理3：若向量组I与向量组II等价，则$r(\mathrm{I})=r(\mathrm{II})$.

定理4：向量组I与向量组II等价 $\Leftrightarrow r(\mathrm{I})=r(\mathrm{II})=r(\mathrm{I},\mathrm{II})$.

β能被向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性表出

$\Leftrightarrow$ 存在一组数$k_1,k_2,\cdots,k_m$，使得$\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m$

$$\Leftrightarrow \text{存在一组数}k_1,k_2,\cdots,k_m\text{，使得}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_m\end{pmatrix}=\beta$$

$$\Leftrightarrow \text{存在一组数}x_1,x_2,\cdots,x_m\text{，使得}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_m\end{pmatrix}=\beta$$

$\Leftrightarrow$ 非齐次方程$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)x=\beta$有解

$\Leftrightarrow r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)=r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta)$

[例1] 设 $\alpha_1=(1,1,2,2)^T,\alpha_2=(1,2,1,3)^T,\alpha_3=(1,-1,4,0)^T,\beta=(1,0,3,1)^T$

证明 β 可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出,并求出表示式.

[例2]设$\alpha_1=(a,2,10)^T$，$\alpha_2=(-2,1,5)^T$，$\alpha_3=(-1,1,4)^T$，$\beta=(1,b,-1)^T$.问a,b取何值

（1）β不可由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出；

（2）β可由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出，且表达式唯一；

（2）β可由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出，且表达式不唯一，并求出一般表达式.

[例3] 设向量组$\alpha_1=(1,1,a)^T,\alpha_2=(1,a,1)^T,\alpha_3=(a,1,1)^T$可由向量组$\beta_1=(1,1,a)^T,\beta_2=(-2,a,4)^T,\beta_3=(-2,a,a)^T$线性表出,向量组$\beta_1,\beta_2,\beta_3$不可有向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出, 求$a$的值.

三、相关、无关

定义5： 对m个n维向量组：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$；若存在一组不全为0的数$k_1,k_2,\cdots,k_m$，使得$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$，则称$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$**线性相关；否则称线性无关**.

线性无关： 不存在一组不全为0的数$k_1,k_2,\cdots,k_m$，使得$k_2\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$；

只要有一个$k_i\neq 0$，就有$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m\neq 0$；

当且仅当$k_1=k_2=\cdots=k_m=0$，才有$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$.

特别地 含有零向量的向量组必相关；

含有成比例的向量的向量组必相关.

一个向量不为0，则无关；

两个向量不成比例，则无关；

三个向量不共面，则无关.

[例4]向量组$\alpha_1=(a,1,1)^T,\alpha_2=(1,a,-1)^T,\alpha_3=(1,-1,a)^T$线性相关,则$a=$______.

定理5：向量组：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性相关

$\Leftrightarrow$ 存在一组不全为0的数$k_1,k_2,\cdots,k_m$，使得$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$

$\Leftrightarrow$ 存在一组不全为0的数$k_1,k_2,\cdots,k_m$，使得$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_m\end{pmatrix}=0$

$\Leftrightarrow$ 存在一组不全为0的数$x_1,x_2,\cdots,x_m$，使得$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_m\end{pmatrix}=0$

$\Leftrightarrow$ 齐次方程组$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)x=0$有非零解

$\Leftrightarrow r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)<m.$

推论

（1）对n个n维向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性相关$\Leftrightarrow|\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n|=0.$

（2）$n+1$个n维向量必相关.

定理5′：

向量组：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性无关

$\Leftrightarrow$ 齐次方程组$\left(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\right)x=0$只有零解

$\Leftrightarrow r\left(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\right)=m.$

定理6：

向量组：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性相关$\Rightarrow$增加向量个数后的向量组：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\alpha_{m+1},\cdots,\alpha_s$仍相关；

向量组：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性相关$\Rightarrow$对应减少向量维数后的向量组：$\alpha_1',\alpha_2',\cdots,\alpha_m'$仍相关.

向量组：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性无关$\Rightarrow$减少向量个数后的向量组：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{m-r}$仍相关；

向量组：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性无关$\Rightarrow$对应增加向量维数后的向量组：$\alpha_1',\alpha_2',\cdots,\alpha_m'$仍无关.

定理7： 向量组：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性无关，且$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta$相关，则$\beta$可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性表出，且表出系数唯一.

定理8：（以少表多,则多必相关）

若向量组I：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$可由向量组II：$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$线性表出，且$s>t$，则向量组I：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性相关.

推论：若向量组I：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$可由向量组II：$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$线性表出，且向量组I：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关，则且$s\le t$.

[向量组：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性无关的证明]

1.定义法：设$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$

2.用秩：$r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)=m.$

[例5]设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$无关,$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2,\beta_2=\alpha_2+\alpha_3,\beta_3=\alpha_1+\alpha_3$,证明:$\beta_1,\beta_2,\beta_3$无关.

[例6]设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$无关,判断向量组$\beta_1,\beta_2,\beta_3$的线性相关性:

(1) $\beta_1=\alpha_1+\alpha_2,\beta_2=2\alpha_2+3\alpha_3,\beta_3=5\alpha_1+3\alpha_2$;

(2) $\beta_1=\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3,\beta_2=2\alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3,\beta_3=3\alpha_1+\alpha_2+3\alpha_3$;

(3) $\beta_1=\alpha_1-\alpha_2,\beta_2=2\alpha_2+\alpha_3,\beta_3=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$.

[例7]设矩阵$A=\alpha\alpha^T+\beta\beta^T$,其中$\alpha,\beta$是$n$维列向量,证明:

（1）$r(A)\le 2$; （2）当α,β相关时,$r(A)\le 1$.

［例8］设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$相关,向量组$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$无关,证明:

（1）α_1能由α_2,α_{3_s}线性表出;

（2）α_4不能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出.

[例9]设A是n阶矩阵,若存在正整数k,使得$A^k x = 0$有解向量α,且$A^{k-1}\alpha \neq 0$,证明:$\alpha, A\alpha, \cdots, A^{k-1}\alpha$无关.

三、秩、极大无关组

定义6：在向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$中，若存在部分组$\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$满足：

（1）线性无关；（2）可以表示向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$中的任一向量$\alpha_i$；

则称$\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$是向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$的极大线性无关组；

向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$的极大线性无关组所含的向量个数$r$称为

向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$的秩，记为$r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)=r$.

特别地

只有一个零向量的向量组不存在极大无关组；

一个线性无关向量组的极大无关组就是其本身；

一个向量组的极大无关组一般不唯一，但每个极大无关组所含的

向量个数是相同的（就是秩）且他们都是等价向量组.

定理9：$r(A)=A$的列秩$=A$的行秩.

[例10]设向量组$\begin{pmatrix} a \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ b \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$的秩为2,则$a=$_____,b=_____.

$\left[\text{例}11\right]$求向量组$\alpha_1=(2,1,4,3)$, $\alpha_2=(-1,1,-6,6)$, $\alpha_3=(-1,-2,2,-9)$, $\alpha_4=(1,1,-2,7)$, $\alpha_5=(2,4,4,9)$的秩及一个极大无关组并用极大无关组表示其余的向量.

第5章 相似

主要内容

- 1.特征值与特征向量
- 2.相似对角化
- 3.实对称矩阵

一、特征值、特征向量

1.特征值、特征向量定义及求法

$A-n$阶矩阵, λ是一个数, α是n维非零列向量，若

$$A\alpha=\lambda\alpha \quad (\alpha\neq 0),$$

则称λ是A的特征值,α是A的对应于特征值λ的特征向量.

$$A\alpha=\lambda\alpha \quad \alpha\neq 0 \Leftrightarrow (\lambda E-A)\alpha=0 \quad \alpha\neq 0$$

$\Leftrightarrow (\lambda E-A)x=0$有非零解$\alpha$

由$|\lambda E-A|=0$，得特征值λ;

由$(\lambda E-A)x=0$，得特征向量α.

2.特征值、特征向量的性质

(1) $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$;

(2) $\prod\lambda_i=|A|$;

(3) i重特征值λ_i至多只有i个无关的特征向量;

(4)若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$是$A$的属于同一特征值$\lambda$的特征向量,

则$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r$(非0)仍是$A$的属于特征值$\lambda$的特征向量;

若α_1,α_2是A的属于不同特征值λ_1,λ_2的特征向量,

则$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2$不再是A的特征向量;

(5) α_1,α_2是A的属于不同特征值λ_1,λ_2的特征向量,则α_1,α_2线性无关.

[例1] 求$A=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&2&2\\0&0&3\end{bmatrix}$的特征值和特征向量

[例2]求$A=\begin{bmatrix}0 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$的特征值和特征向量

与A有关的矩阵的特征值与特征向量

【例3】设$A^2-3A+2E=0$,证明A的特征值只能取1或2.

二、相似及相似对角化

1.定义

A、$B-n$阶矩阵，若存在可逆矩阵P，使得$P^{-1}AP=B$，则称A相似于B，记为$A\sim B$.

2.性质

$A\sim B$

$\Rightarrow |A|=|B|$;

$\Rightarrow r(A)=r(B)$;

$\Rightarrow |\lambda E-A|=|\lambda E-B|$，即$\lambda_A=\lambda_B$;

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n}a_{ii}=\sum_{i=1}^{n}b_{ii}$.

3.相似对角化

$A \sim \Lambda$

$\Leftrightarrow A$有n个线性无关的特征向量;

$\Leftrightarrow A$的i重特征值λ_i由i个无关的特征向量, 即$n - r(\lambda_i E - A) = i$?

$\Leftarrow A$有n个无关的特征值;

$\Leftarrow A$是对称阵.

[例4]下列矩阵中不能相似对角化的是

$$A=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&2&2\\0&0&3\end{bmatrix}\quad C=\begin{bmatrix}1&-2&1\\2&-4&2\\1&-2&1\end{bmatrix}\quad D=\begin{bmatrix}2&-1&2\\5&-3&3\\-1&0&-2\end{bmatrix}$$

二、求相似对角化时的可逆矩阵P

$P^{-1}AP=\Lambda$，这里的可逆P就是A的特征向量拼成的，Λ就是的特征值.

注意，Λ与P在写的时候要对应.

【例5】设$A=\begin{bmatrix}2&0&1\\3&1&x\\4&0&5\end{bmatrix}$能对角化,求$x$.

【例6】设$\lambda=0$是$A=\begin{bmatrix}3 & 2 & -2\\ -k & 1 & k\\ 4 & k & 3\end{bmatrix}$的特征值，求$k$.

[例7] 设$\alpha=[1,1,-1]^T$是$A=\begin{bmatrix}2&-1&2\\5&a&3\\-1&b&-2\end{bmatrix}$的一个特征向量，求$a,b$的值.

[例8] 设$A=\begin{bmatrix}1&-2&-4\\-2&x&-2\\-4&-2&1\end{bmatrix}$与$\Lambda=\begin{bmatrix}5&&\\&-4&\\&&y\end{bmatrix}$相似,求$x$, y的值.

【例9】设$A=\begin{bmatrix}0 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$,求可逆矩阵$P$,使得$P^{-1}AP=\Lambda$.

四、实对称

(1) 特征值都是实数；

(2) 不同特征值对应的特征向量相互正交；

(3) 必能相似对角化且能正交对角化，

即存在正交矩阵Q，使得$Q^T AQ = Q^{-1} AQ = \Lambda$.

这里的正交矩阵Q是由A的单位正交特征向量拼成的，同样注意Q与Λ要对应.

正交矩阵Q

(1) 定义:$QQ^T=Q^TQ=E$

(2) 几何意义:每一列(行)长度为1,任两列(行)相互正交.

施密特正交化

设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$无关但不正交, 令

$$\beta_1=\alpha_1;$$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_1,\alpha_2)}{(\alpha_1,\alpha_1)}\alpha_1;$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_1,\alpha_3)}{(\alpha_1,\alpha_1)}\alpha_1-\frac{(\alpha_2,\alpha_3)}{(\alpha_2,\alpha_2)}\alpha_2.$$

【例10】设$A=\begin{bmatrix}0 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$,求正交矩阵$Q$,使得$Q^{-1}AQ=\Lambda$.

五、相似的应用

一、反求矩阵A

$$P^{-1}AP=\Lambda \Rightarrow A=P\Lambda P^{-1}$$

需要知道A的全部特征值,全部特征向量.

[例11] 设3阶矩阵A的特征值为$\lambda_1=2,\lambda_2=-2,\lambda_3=1$,对应的特征向量依次为 $\alpha_1=[0,1,1]^T,\alpha_2=[1,1,1]^T,\alpha_3=[1,1,0]^T$ 求A.

二、求A^n、$A^n\beta$

$\left[A^n\right]$1.$P^{-1}AP=\Lambda \Rightarrow A^n=P\Lambda^n P^{-1}$;

$\left[A^n\beta\right]$2. 先处理β,将β表示成A的特征向量的线性组合形式,再求$A^n\beta$.

【例12】设$A=\begin{bmatrix}1 & 4 & 2\\ 0 & -3 & 4\\ 0 & 4 & 3\end{bmatrix}$，求$A^{100}$.

$\left[例13\right]$设$A-3$阶,$\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=3$是$A$的特征值,对应的特征向量分别是

$\xi_1=\left[2,2,-1\right]^T,\xi_2=\left[-1,2,2\right]^T,\xi_3=\left[2,-1,2\right]^T,\beta=\left[1,2,3\right]^T$,求$A^n\beta$.

第6章 二次型

主要内容

1. 正交变化法化二次型为标准型；

2.合同；

3.正定.

一、二次型及其矩阵表示

n元二次型$f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)=x^TAx$.

其中A是二次型的矩阵, $A^T=A, x=\left[x_1,x_2,\cdots,x_n\right]^T$, 二次型$f$与$A$是一一对应的.

对称阵A的秩$r\left(A\right)$称为二次型$f=x^TAx$的秩.

若二次型中只有平方项, 没有交叉项,

即形如$d_1x_1^2+d_2x_2^2+\cdots+d_nx_n^2$的二次型称为标准形;

若二次型的标准形中平方项的系数只是1, -1, 0, 则称为规范性.

[例1]（1）二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2-2x_1x_2+6x_2x_3$的矩阵$A=$_____.

（2）二次型$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,x_3)^T\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$的矩阵$A=$_____.

二、合同变换

1.坐标变换

若令$\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \cdots + c_{1n}y_n, \\ x_2 = c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \cdots + c_{2n}y_n, \\ \cdots \\ x_n = c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + \cdots + c_{nn}y_n, \end{cases}$，即$x = Cy$，其中$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}$可逆，

则称$x = Cy$称为坐标变换，若C是正交矩阵，则称为正交变换.

2.合同

若存在可逆矩阵C，使得$C^TAC=B$,称A合同于B,记为$A\simeq B$.

二次型x^TAx经坐标变换$x=Cy$有,$x^TAx=\left(Cy\right)^TA\left(Cy\right)=y^TC^TACy=y^TBy$,

其中$B=C^TAC$,且$B^T=\left(C^TAC\right)^T=C^TAC=B$.

以x为变量的二次型x^TAx经坐标变换$x=Cy$变成了以y为变量的二次型y^TBy.

二次型x^TAx合同于二次型y^TBy

特别地,若$x=Cy$是正交变换,则此时$C^TAC=C^{-1}AC=B$,即经正交变换

二次型矩阵不但合同,而且相似.

三、用正交变换化二次型为标准形

定理1：任何二次型$x^T Ax$都可以通过（配方法）坐标变换$x = Cy$化为标准形

$$d_1 y_1^2 + d_2 y_2^2 + \cdots + d_n y_n^2$$

用矩阵语言描述是:任何实对称矩阵A一定存在可逆矩阵C,使得$C^T AC = \Lambda$.

定理2：任何二次型$x^T Ax$都可以正交变换$x = Qy$化为标准形

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$$

用矩阵语言描述是:任何实对称矩阵A一定存在正交矩阵Q,

使得$Q^T AQ = Q^{-1} AQ = \Lambda$.

定理3［惯性定理］：用坐标变换化二次型为标准形,所作的坐标变换不唯一,

对应的标准形也不唯一,但标准形中正平方项的个数p,

负平方项的个数q都是不变的.p称为正惯性指数,q称为负惯性指数.

［例2］求一个正交变换$x=Qy$，化二次型$f=-2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$为标准形.

四、正定

1.定义

n元二次型$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x^TAx$,若对任意的$x=[x_1,x_2,\cdots,x_n]\neq 0$,均有$x^TAx>0$,则称$f$为正定二次型,对应的矩阵$A$称为正定矩阵.

2.正定的充要条件

n元二次型$f=x^TAx$正定

$\Leftrightarrow$ 对任意的$x\neq 0$,均有$x^TAx>0 \Leftrightarrow f$的正惯性指数$p=n$

$\Leftrightarrow A\simeq E$,即存在可逆$C$,使得$C^TAC=E \Leftrightarrow$ 存在可逆D,使得$A=D^TD$

$\Leftrightarrow A$的特征值λ_i全大于0 $\Leftrightarrow A$的全部顺序主子式大于0

3.正定的必要条件

(1) $a_{ii}>0$; (2) $|A|>0$

[例3] 下列矩阵中,正定的是

$$A=\begin{bmatrix}4 & 2 & 3\\ 2 & 2 & 1\\ 3 & 1 & -1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 4\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 2\end{bmatrix},\quad D=\begin{bmatrix}3 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

[例4] 设$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1-ax_2)^2+(x_2-bx_3)^2+(x_3-cx_2)^2$，

其中$abc\neq 1$，证明f是正定二次型.

$[$例5$]$ A正定 $\Rightarrow A^T, A^*, A^{-1}, A^k, kA(k>0)$,及他们之间的正系数线性组合仍正定.

[例6]设B是n阶反对称阵,E是n阶单位阵, $\lambda>0$, 证明:$\lambda E-B$是正定矩阵.

五、等价、相似、合同

【例7】设$A=\begin{bmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&t\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\3&3&3\end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&3&5\\0&0&5\end{bmatrix}$，$D=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&1\\0&1&0\end{bmatrix}$.问：$t$取何值

（1）A正定；（2）A与B等价；（3）A与C相似；（4）A与D合同.

可行列变换混用的情形：

求行列式，求秩.

只能用行变换的情形：

$\left(A|E\right) \to \left(E\left|A^{-1}\right.\right)$求逆，线性表出，解方程，求特征向量.