作业9

2019201409 于伟浩

n个球独立随机的扔到n个盒子里，证明：球最多的盒子中的球数以1-1/n的概率不少于Ω(logn/loglogn)

设 X_i：第i个盒子中的球数

原命题 $\Leftrightarrow \exists c, P[\max_{i=1}^{n}\{X_i\} \geq \frac{c\lg n}{\lg\lg n}] = 1-\frac{1}{n}$

$\Leftrightarrow \exists c, P[\max_{i=1}^{n}\{X_i\} < \frac{c\lg n}{\lg\lg n}] = \frac{1}{n}$

$\Leftrightarrow \exists c, P[\forall X_i < \frac{c\lg n}{\lg\lg n}] = \frac{1}{n}$

而 $P[\forall X_i < \frac{c\lg n}{\lg\lg n}] \leq \prod_{i=1}^{n} P[X_i < \frac{c\lg n}{\lg\lg n}]$

$n\to\infty$时，$P[X_i=k]$近似服从$\lambda = n\cdot\frac{1}{n}=1$的泊松分布。

$P[X_i=k] = \frac{e^{-1}\cdot 1^k}{k!} = \frac{1}{e}\cdot\frac{1}{k!}$

$\therefore P[X_i<k] = \frac{1}{e}\sum_{j=0}^{k-1}\frac{1}{j!}$

设 $f(x)=e^x$，在 $x_0=0$，$x=1$处的展开式为：

$f(1) = e = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+R_n(1)$

$\therefore \sum_{j=0}^{k-1}\frac{1}{j!} = e-R_{k-1}(1) = e-\frac{e^\theta}{k!} \quad (0<\theta<1)$

$\therefore \frac{1}{e}\sum_{j=0}^{k-1}\frac{1}{j!} \leq 1-\frac{1}{e\cdot k!}$

即 $P[\forall i\ X_i<k] \leq (1-\frac{1}{e\cdot k!})^n$

要证原结论，只需证 $\exists k, (1-\frac{1}{ek!})^n \leq \frac{1}{n}$

根据二项式定理，$(1-\frac{1}{ek!})^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}1^i(-\frac{1}{ek!})^{n-i} = \sum_{i=0}^{n}(-\frac{1}{ek!})^i\binom{n}{i}$

同取lg，只需 $n\lg(1-\frac{1}{ek!}) \leq -\lg n$.

代入 $k=\frac{e\lg n}{\lg\lg n}$，$n\to\infty$时，有上式成立。

$\therefore$ 原命题成立。