# 思考题 2

2019201409 于伟浩

投b个球到b个盒子，证明：以1-1/b的概率，最大的盒子里包含的球数不超过O(log b/loglog b)?

设$X_i$表示第i个盒子中的球数。

则原命题 $\Leftrightarrow \exists c \quad P[\max_{i=1}^{b}\{X_i\} \le \frac{c\lg b}{\lg\lg b}] = 1-\frac{1}{b}$

$\Leftrightarrow P[\max_{i=1}^{b}\{X_i\} > \frac{c\lg b}{\lg\lg b}] = \frac{1}{b}$

$P[\max_{i=1}^{b}\{X_i\} > \frac{c\lg b}{\lg\lg b}] = P[\exists i, X_i > \frac{c\lg b}{\lg\lg b}]$

$= P[X_1 > \frac{c\lg b}{\lg\lg b} \cup \cdots \cup X_b > \frac{c\lg b}{\lg\lg b}]$

根据合集不等式，上式 $\le \sum_{i=1}^{b} P[X_i > \frac{c\lg b}{\lg\lg b}]$

而 $P[X_i > t] = \sum_{j=t+1}^{b} P[X_i = j]$

$= \sum_{j=t+1}^{b} \binom{b}{j}\left(\frac{1}{b}\right)^j\left(1-\frac{1}{b}\right)^{b-j} \le \sum_{j=t+1}^{b} \binom{b}{j}\left(\frac{1}{b}\right)^j = \sum_{j=t+1}^{b} \frac{b!}{j!(b-j)!} \cdot \frac{1}{b^j}$

$\le \sum_{j=t+1}^{b} \frac{b^j}{j!}\left(\frac{1}{b}\right)^j \le \sum_{j=t+1}^{b}\left(\frac{e}{j}\right)^j \le \left(\frac{e}{t}\right)^t$

为使 $\sum P[X_i > t] \le \frac{1}{b}$，则 $\forall i, P[X_i > t] \le \frac{1}{b^2}$

令 $P[X_i > t] \le \left(\frac{e}{t}\right)^t \le \frac{1}{b^2}$，即 $\left(\frac{t}{e}\right)^t \ge b^2$

代入 $t = \frac{2e\lg b}{\lg\lg b}$，可验证上式恒成立。

即原命题的等价命题得证，原命题得证