数据结构与算法I 思考题6

2019201409 于倬浩

12-4

- a.

  设b_i表示由$\mathtt{i}$个节点构成的本质不同的二叉树的数量。两棵二叉树本质不同，当且仅当两棵树根节点的左子树或右子树的结构本质不同。

  因此，假设我们当前计算b_n，只需枚举左子树的大小i，那么右子树的大小为$n-1-i$，而左右子树各自的构造方案数为b_i和b_{n-1-i}，根据乘法原理，只需两项相乘即可。

  因此有$b_n = \sum_{i=0}^{n-1} b_i b_{n-1-i}$，边界条件$b_0 = 1$。

- b.

  $xB(x)^2+1$
  $=1+x\sum_{n=0}^{\infty} x^n \sum_{i=0}^{n} b_i b_{n-i}$
  $=1+\sum_{n=1}^{\infty} b_i b_{n-1-i} x^n$
  $=B(x)$

  将这个式子视为一个二次方程：$xB(x)^2-B(x)+1=0$，则一组可行解即为$B(x)=\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$

  代入验证：

  $xB(x)^2-B(x)+1 = x\frac{(1-\sqrt{1-4x})^2}{4x^2} - \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}+1$
  $=\frac{1-2\sqrt{1-4x}+1-4x-2+2\sqrt{1-4x}+4x}{4x}$
  $=0$

  即上述结果可以使得等式成立。

- c.

  $B(x)=\frac{1}{2x}(1-\sqrt{1-4x})$

  $\sqrt{1-4x}=\sum_{i=0}^{\infty}x^i\frac{(-4)^i(\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)...(\frac{1}{2}-(i-1)))}{i!}$

  $=\sum_{i=0}^{\infty}x^i\frac{-(2(2-1*4)(2-2*4)...(2-(i-1)*4))}{i!}$

  $=1-\sum_{i=1}^{\infty}\frac{x^i}{i!}\prod_{j=0}^{i}2(2j-1)$

  $=1-\sum_{i=1}^{\infty}\frac{2^i(2(i-1))!}{2^{i-1}(i-1)!}\frac{x^i}{i!}$

  $=1-\sum_{i=1}^{\infty}\frac{2(2(i-1))!}{(i-1)!i!}x^i$

  $B(x)=\frac{1}{2x}(1-\sqrt{1-4x})=\frac{1}{2x}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{2(2(i-1))!}{(i-1)!i!}x^i$

  $=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(2i)!}{(i+1)!i!}x^i$

  $=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i+1}\frac{(2i)!}{i!i!}x^i$

  $=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i+1}\binom{2i}{i}x^i$

  $\therefore b_i=\frac{1}{i+1}\binom{2i}{i}$

- d.

  由斯特林公式：

  $b_n\approx\frac{\sqrt{4\pi n}(\frac{2n}{e})^{2n}}{2\pi n(\frac{n}{e})^{2n}}\frac{1}{n+1}$

  $=\frac{4^n}{\sqrt{\pi n}(n+1)}$

  $=\frac{4^n}{\sqrt{\pi}n^{\frac{3}{2}}}(1+O(\frac{1}{n}))$

  即得证。