



第7章 小波和多分辨率处理

- 小波变换的基函数是小型波，它具有变化的频率和有限的持续时间
- 小波是多分辨率理论这种信号处理和分析方法的基础，多分辨率理论涉及多个分辨率下的信号（或图像）表示与分析。
 - 这种方法的优势是：某种分辨率下无法检测的特性，在另一种分辨率下容易检测
- 本章从多分辨率的角度来审视基于小波的变换。
 - 主要内容集中于离散小波变换的开发和利用



第7章 小波和多分辨率处理

7.1 背景

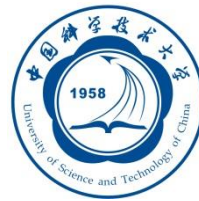
7.2 多分辨率展开

7.3 一维小波变换

7.4 快速小波变换

7.5 二维小波变换

7.6 小波包



第7章 小波和多分辨率处理

7.1 背景

7.2 多分辨率展开

7.3 一维小波变换

7.4 快速小波变换

7.5 二维小波变换

7.6 小波包

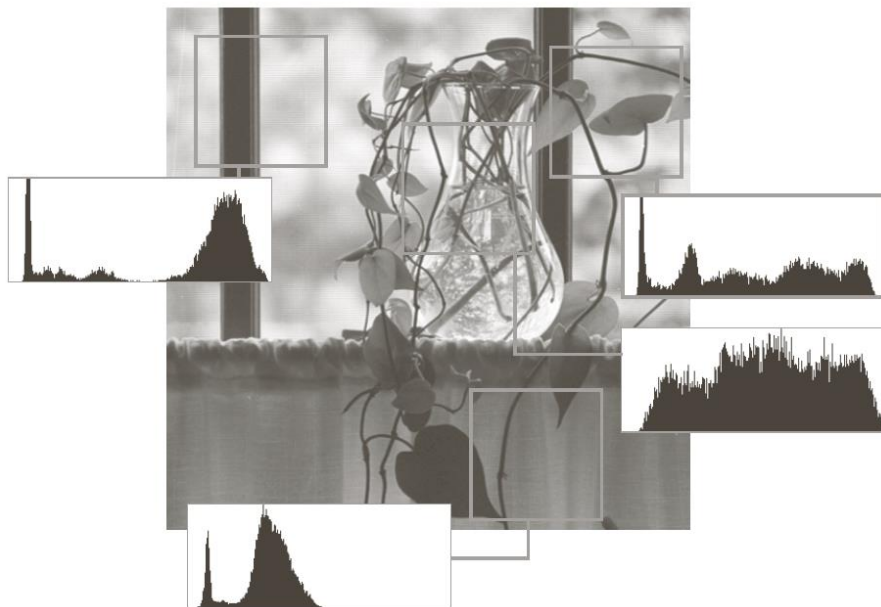
7.1 背景：多分辨率分析（MRA）

□ 动机

- 图像中，区域由相似纹理和灰度级组成，不同区域结合形成物体
- 较小物体适合用较高分辨率分析
- 对于较大物体，用低分辨率分析即可

□ 三个与MRA相关的图像操作：

- 图像金字塔，子带编码，哈尔变换



图像不同区域的局部
直方图差异很大

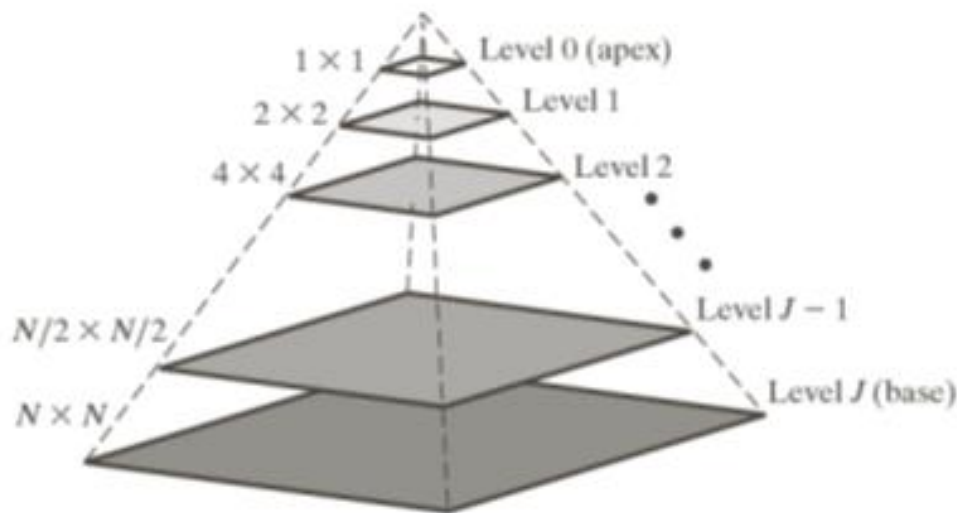
图像金字塔

□ 图像金字塔：

- 一系列以金字塔形状排列的、分辨率逐渐降低的图像集合
- 底部：高分辨率表示；顶部：低分辨率近似
- 最初用机器视觉和图像压缩

□ $P + 1$ 级图像金字塔像素总数是

$$N^2 \left(1 + \frac{1}{4^1} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{4^P} \right) \leq \frac{4}{3} N^2$$



两个问题：

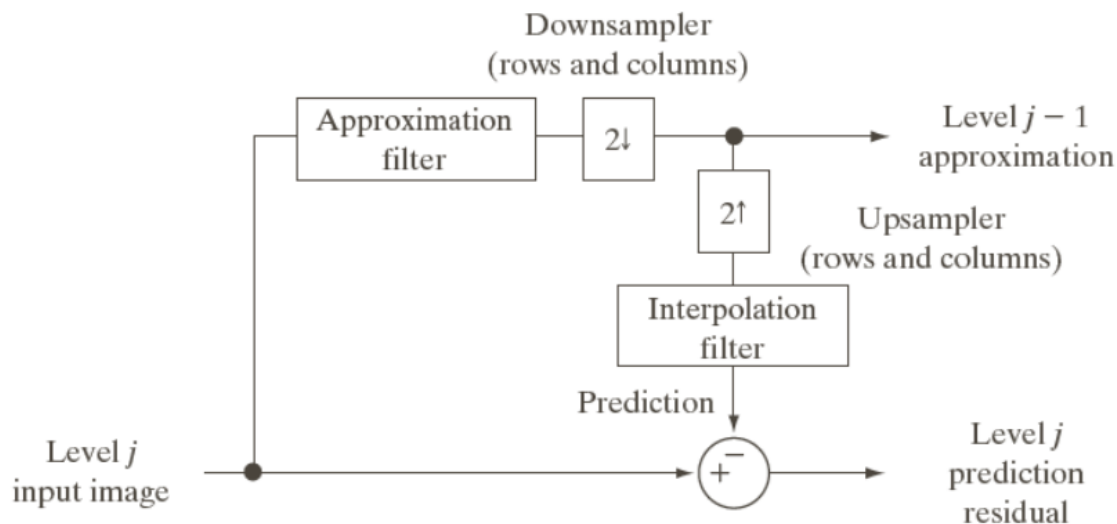
第一，如何构建该金字塔？

第二，金字塔相邻两级差别是什么？

图像金字塔

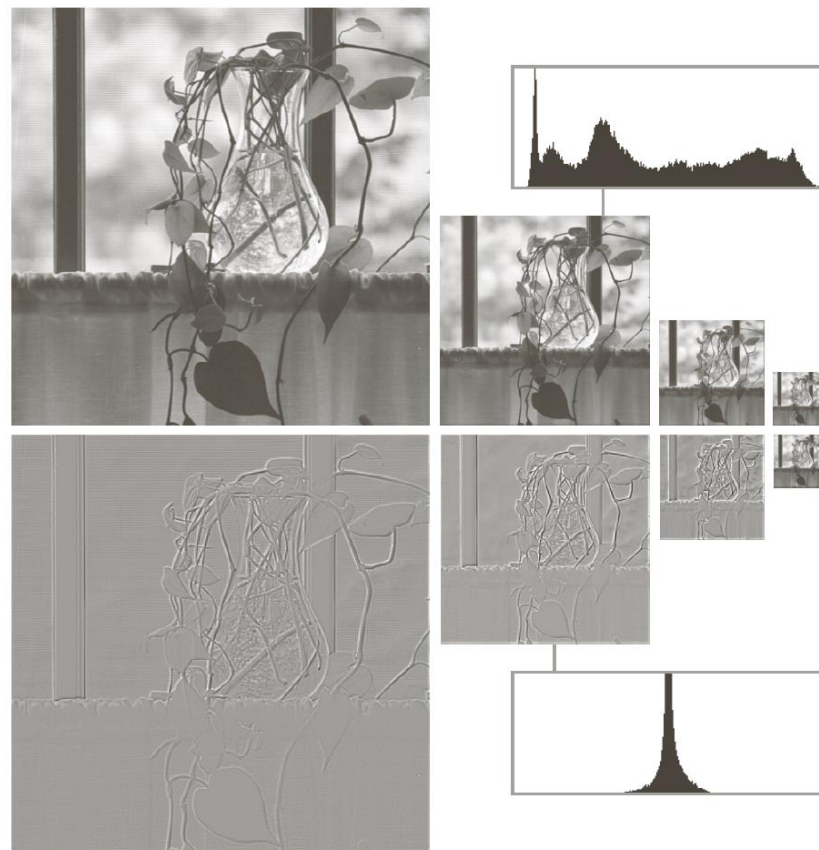
□ 创建近似和残差金字塔

- 步骤一：通过近似滤波器后，2倍下采样，得到第 $j-1$ 级近似
 - ✓ 近似滤波器：邻域平均、高斯低通滤波、无滤波
- 步骤二：由步骤一产生的分辨率降低的近似，创建第 j 级输入图像的一个估计
 - ✓ 插值方法：最近邻、双线性、双三次内插
- 步骤三：计算步骤二的预测图像和步骤一的输入之间的差，即预测残差



图像金字塔

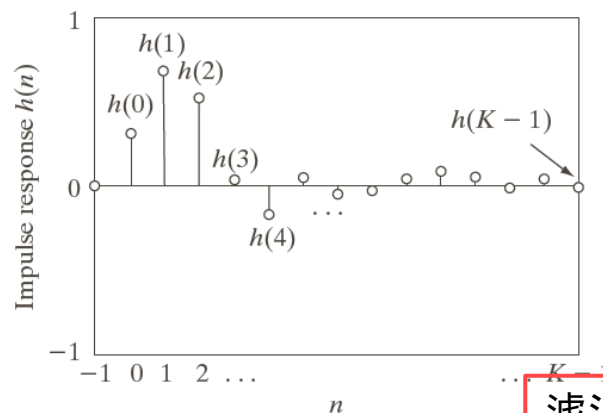
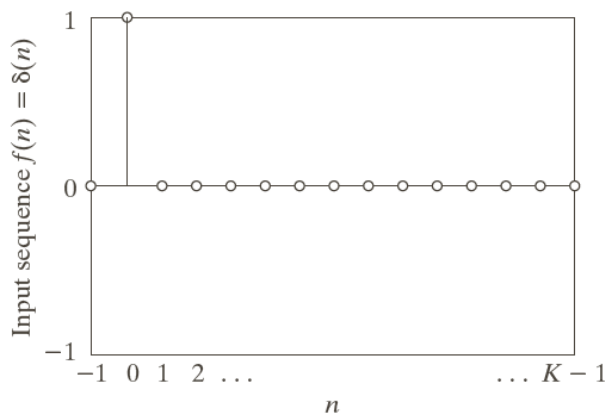
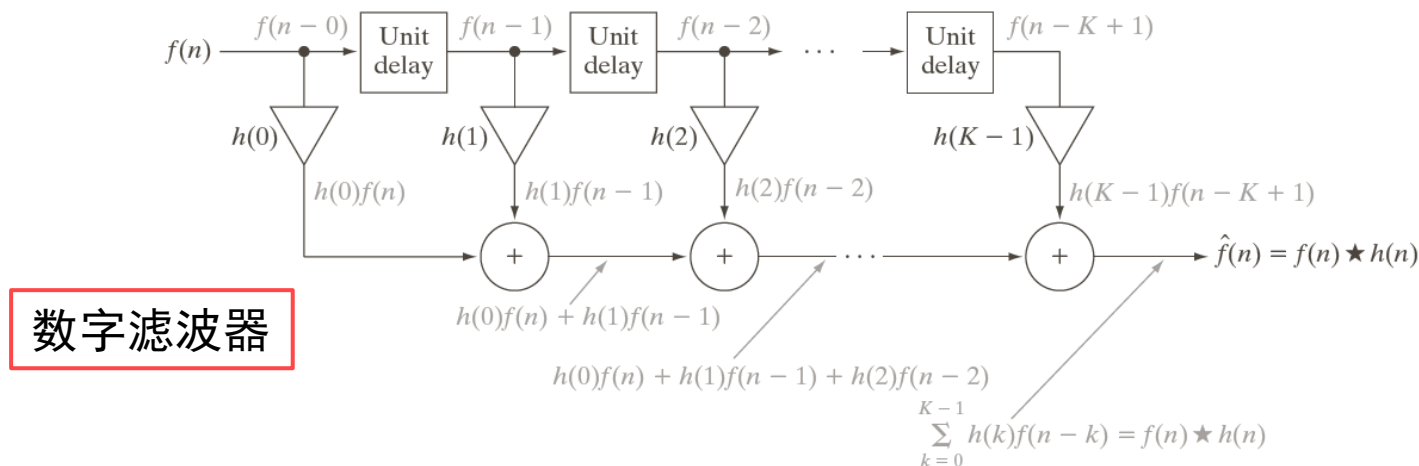
- 上图：近似金字塔，称为高斯金字塔
 - 因为构建金字塔时使用了高斯滤波器
- 分辨率越低，细节越少
 - 低分辨率适合分析大结构或图像整体内容
 - 高分辨率适合分析单个物体特性
- 下图：预测残差金字塔，通常称为拉普拉斯金字塔



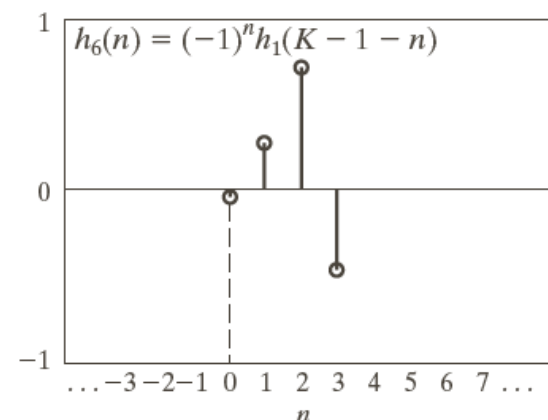
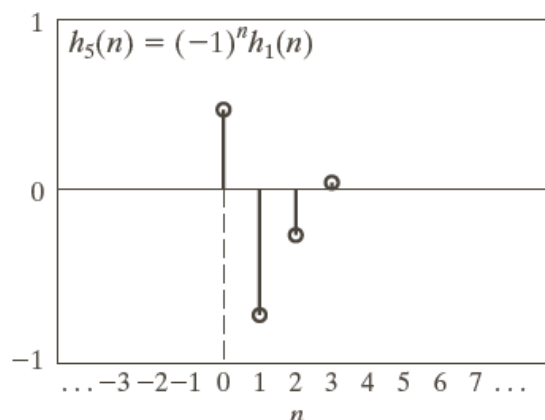
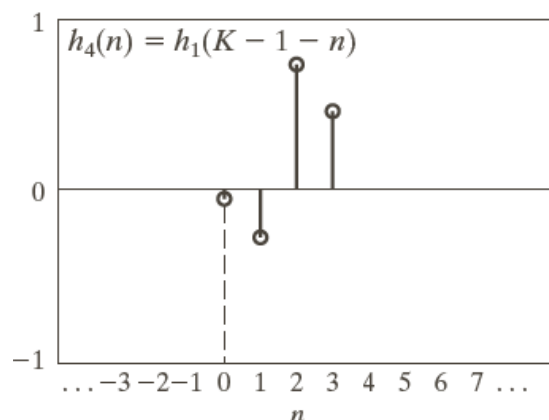
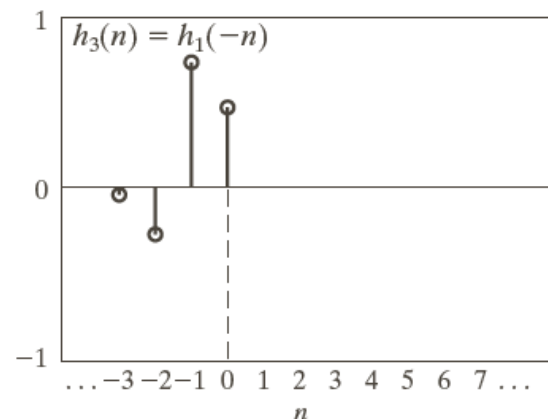
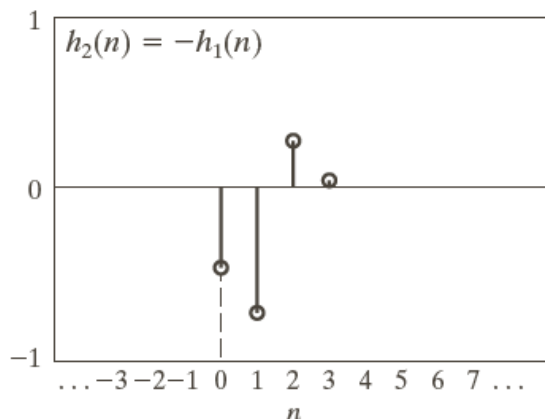
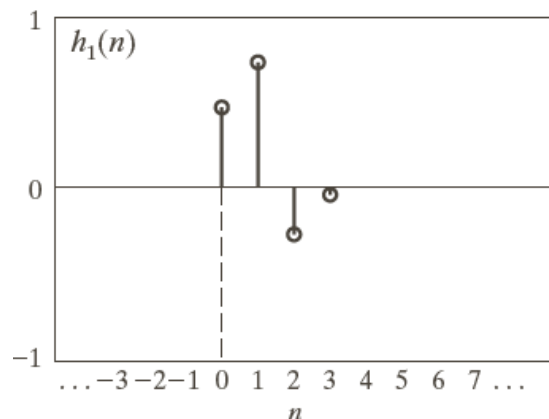
两种图像金字塔及它们的直方图

子带编码

- 在子带编码中，一副图像可分解为一组频带受限的分量，称为子带；子带可以重组在一起，无误差重建原始图像



子带编码



6个功能相关的滤波器的冲击响应：

(a) 参考响应 (b) 符号反转 (c, d) 顺序反转（与延迟有关）

(e) 调制 (e) 顺序反转和调制

子带编码：两波段子带编码和解码

□ 分析滤波器组和综合滤波器组串联

- 选择合适滤波器，实现完美重构

二带子带编码和解码系统

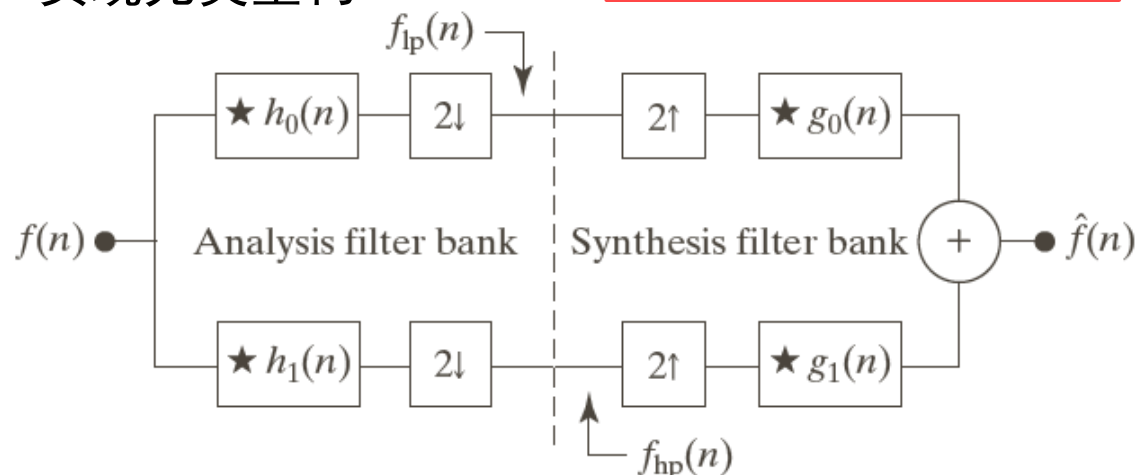
$$g_0(n) = (-1)^n h_1(n)$$

$$g_1(n) = (-1)^{n+1} h_0(n)$$

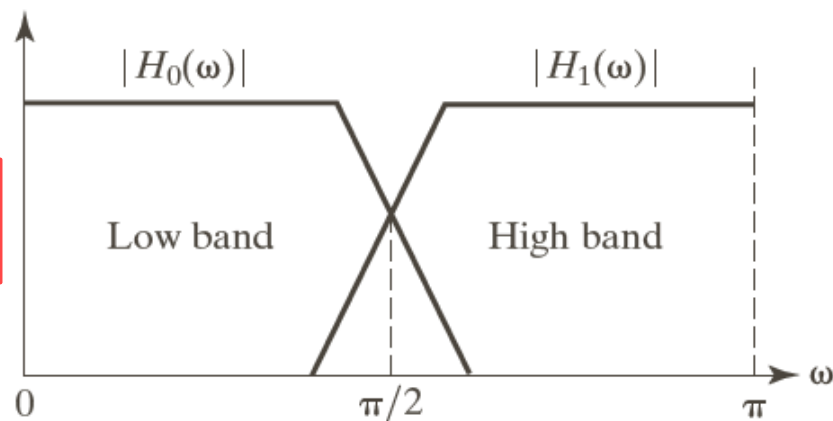
或

$$g_0(n) = (-1)^{n+1} h_1(n)$$

$$g_1(n) = (-1)^n h_0(n)$$

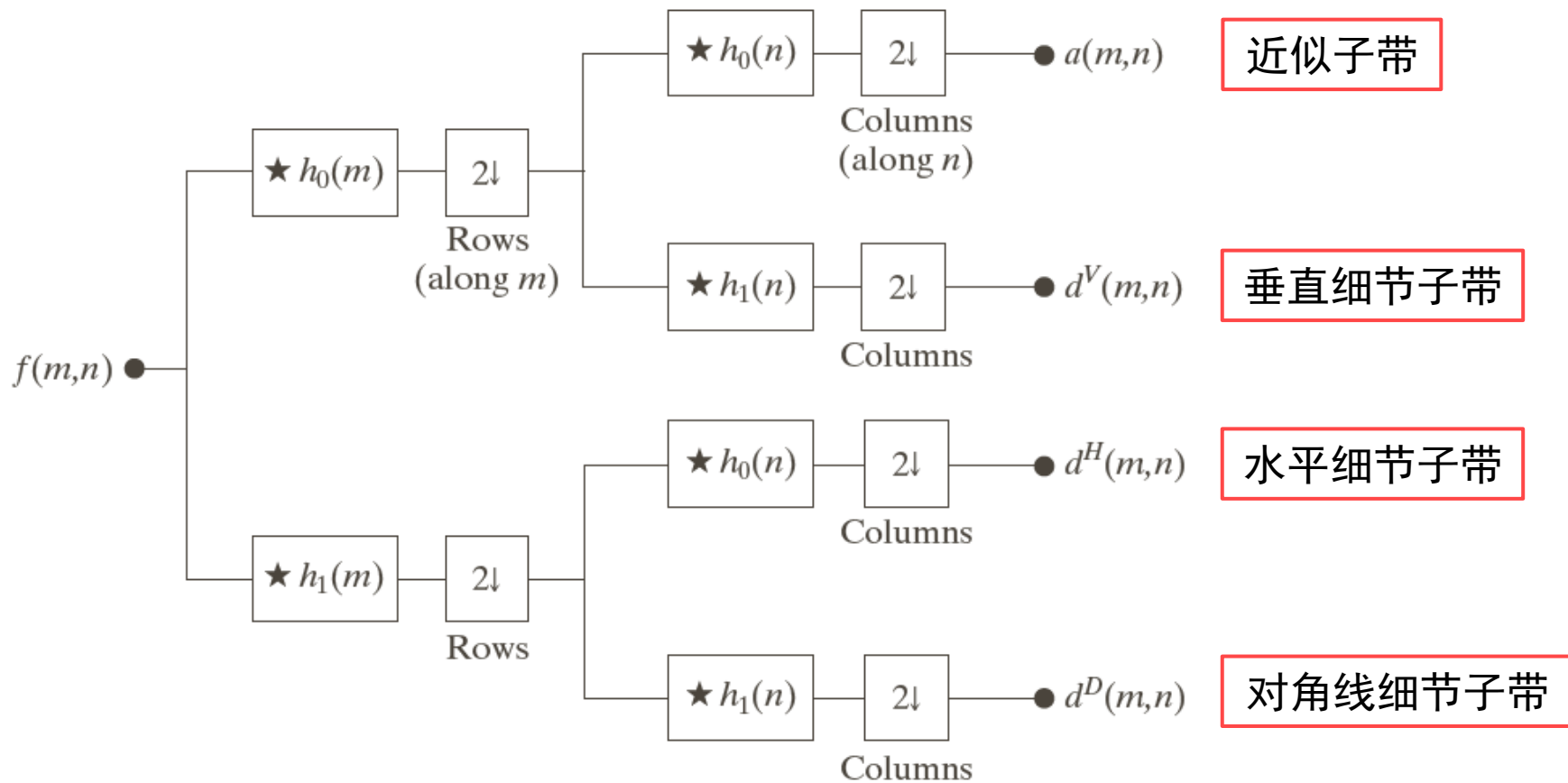


半波段滤波器，
频谱可分



子带编码：二维子带编码

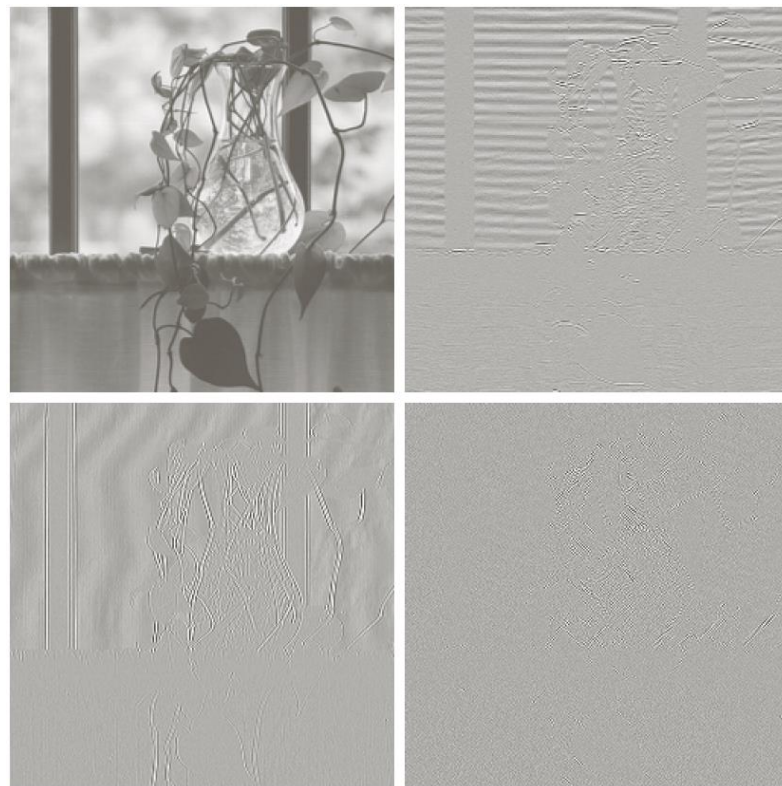
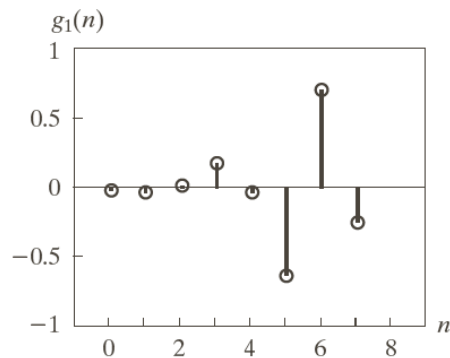
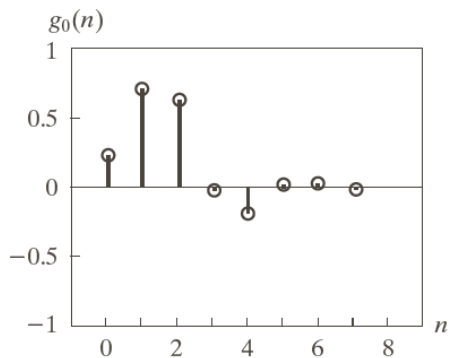
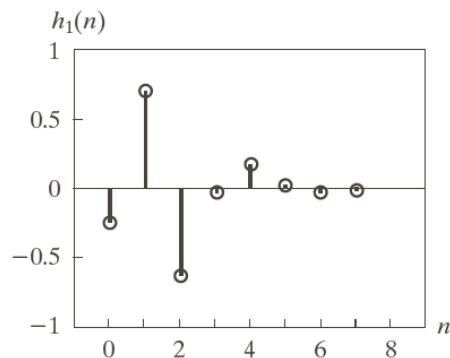
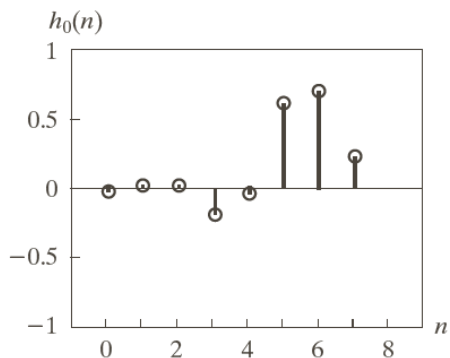
□ 将输入图像分解为四个子带图像



子带编码示例

n	$g_0(n)$
0	0.23037781
1	0.71484657
2	0.63088076
3	-0.02798376
4	-0.18703481
5	0.03084138
6	0.03288301
7	-0.01059740

4个8抽头Daubechies归一化
正交滤波器的冲击响应
(见公式7.1-14)



子带分离结果，4个子带分别是：
(a) 近似子带 (b) 水平细节子带
(c) 垂直细节子带 (d) 对角线细节子带

哈尔变换

□ 哈尔 (Haar) 变换的矩阵表示

$$\mathbf{T} = \mathbf{H}\mathbf{F}\mathbf{H}^T$$

\mathbf{H} : $N \times N$ 哈尔变换矩阵, \mathbf{F} : $N \times N$ 图像矩阵, \mathbf{T} : $N \times N$ 变换结果

□ 哈尔基函数 ($k = 2^p + q - 1$)

$$h_0(z) = h_{00}(z) = \frac{1}{\sqrt{N}}, z \in [0,1]$$

$$h_k(z) = h_{pq}(z) = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{cases} z^{p/2}, & (q-1)/2^p \leq z < (q-0.5)/2^p \\ -z^{\frac{p}{2}}, & (q-0.5)/2^p \leq z < q/2^p \\ 0, & \text{其他}, z \in [0,1] \end{cases}$$

□ 哈尔矩阵

$$H_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

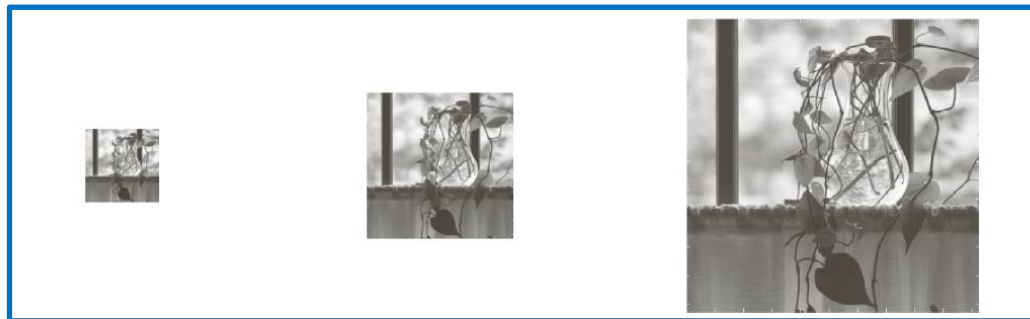
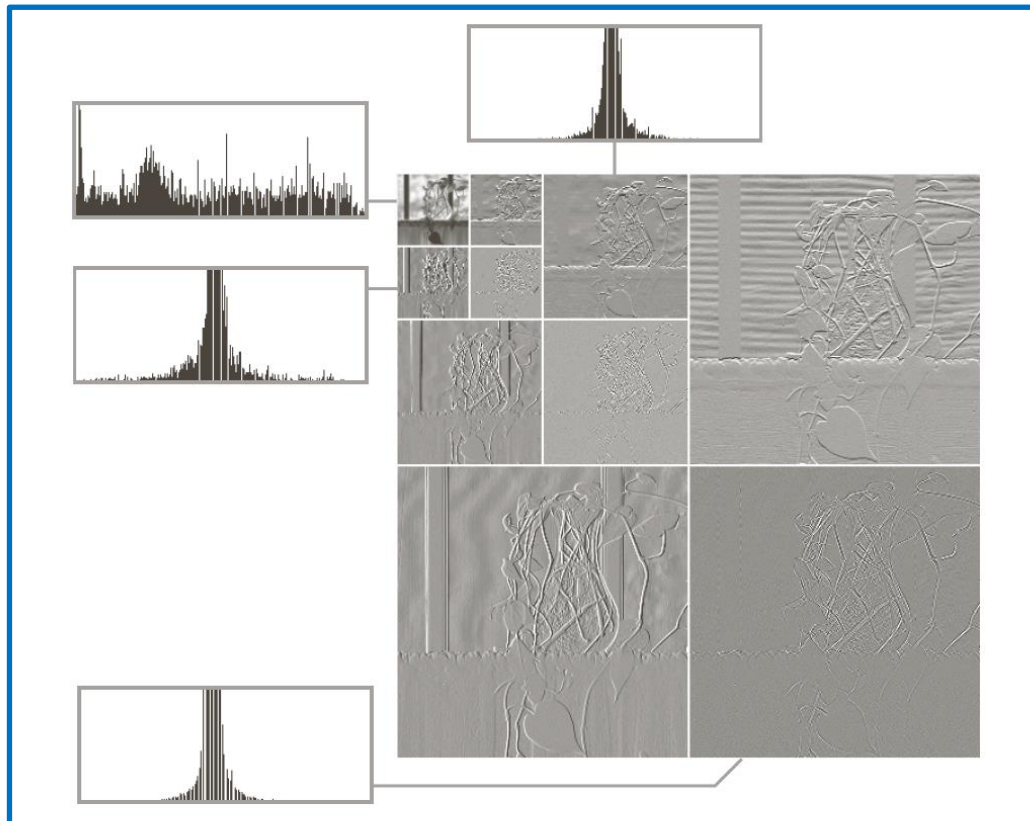
$$H_4 = \frac{1}{\sqrt{4}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

哈尔变换

$$H_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

H_2 的行可用于定义一个2抽头完美重建滤波器组的分析滤波器 $h_0(n)$ 和 $h_1(n)$

每幅子图像描绘了原始图像中空间频率的一个特定频带



由 H_2 哈尔基函数的离散小波变换得到三种不同分辨率的近似图像 (64×64 , 128×128 , 256×256)



第7章 小波和多分辨率处理

7.1 背景

7.2 多分辨率展开

7.3 一维小波变换

7.4 快速小波变换

7.5 二维小波变换

7.6 小波包



7.2 多分辨率展开

- 在多分辨率分析中，**尺度函数**被用于建立一个函数或一幅图像的一系列近似，每个近似与其最近邻近似在分辨率方面都用基2来区分
- 使用称为**小波**的附加函数对相邻近似之间的差进行编码
- 基础概念
 - 级数展开
 - 尺度函数
 - 小波函数

级数展开

- 信号或函数 $f(x)$ 通常能分解为一系列展开函数的线性组合

$$f(x) = \sum_k \alpha_k \varphi_k(x)$$

- 如果展开唯一，则称 $\varphi_k(x)$ 为基函数
- 可展开的函数形成了一个函数空间，成为展开集合的闭合跨度：

$$V = \overline{\text{Span}\{\varphi_k(x)\}_k}$$

- 展开系数：

$$\alpha_k = \langle \tilde{\varphi}_k(x), f(x) \rangle = \int \tilde{\varphi}_k^*(x) f(x) dx$$

尺度函数

- 考虑由整数平移和实数二值尺度、平方可积函数 $\varphi(x)$ 组成的展开函数集合，即 $\{\varphi_{j,k}(x)\}$ ，其中

$$\varphi_{j,k}(x) = 2^{\frac{j}{2}} \varphi(2^j x - k)$$

$\varphi(x)$ 被称为尺度函数

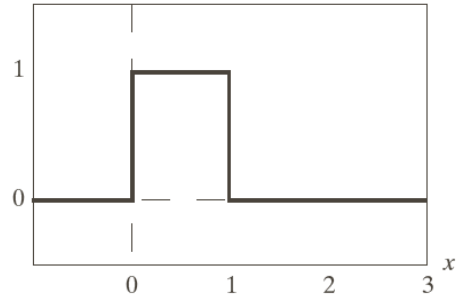
- 选择合适的 $\varphi(x)$ ，可使 $\varphi_{j,k}(x)$ 跨越 $L^2(\mathbf{R})$ ，即所有可度量的、平方可积函数的集合：

$$V_j = \overline{\text{Span}\{\varphi_{j,k}(x)\}_k}$$

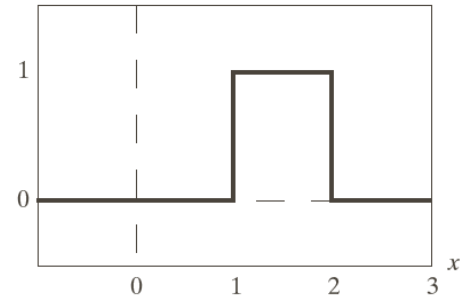
- 增大 j 会增大 V_j 的大小，进而允许子空间中包含具有较小变换的变量或较细的细节函数
 - 随着 j 的增大，用于表示子空间函数的 $\varphi_{j,k}(x)$ 会变窄， x 有较小变化即可分开

尺度函数：哈尔尺度函数

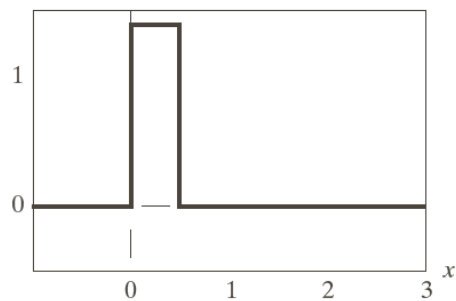
$$\varphi_{0,0}(x) = \varphi(x)$$



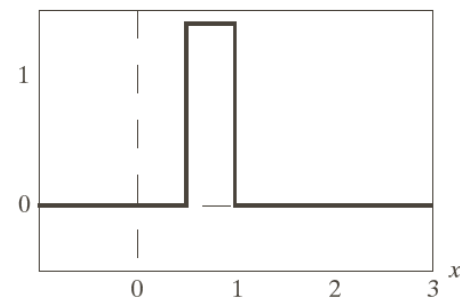
$$\varphi_{0,1}(x) = \varphi(x-1)$$



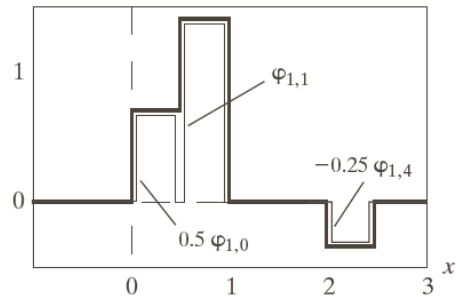
$$\varphi_{1,0}(x) = \sqrt{2} \varphi(2x)$$



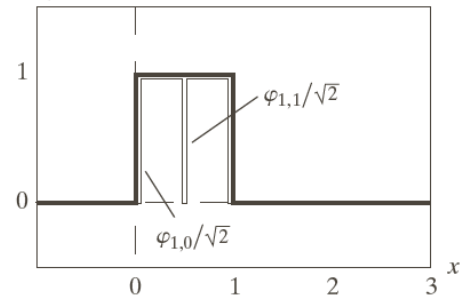
$$\varphi_{1,1}(x) = \sqrt{2} \varphi(2x-1)$$



$$f(x) \in V_1$$



$$\varphi_{0,0}(x) \in V_1$$

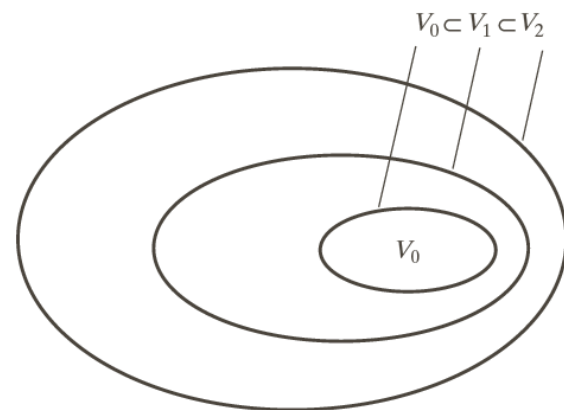


尺度函数

□ 简单尺度函数满足多分辨率分析（MRA）4个基本要求

- MRA要求1：尺度函数对其整数平移是正交的
- MRA要求2：低尺度的尺度函数跨越的子空间，嵌套在高尺度跨越的尺度空间内，即

$$V_{-\infty} \subset \cdots \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_{\infty}$$



- MRA要求3：唯一对所有的 V_j 通用的函数是 $f(x) = 0$
 - ✓ 没有信息的函数 $V_{-\infty} = \{0\}$
- MRA要求4：任何函数都可以按任意精度表示
 - ✓ 任意空间的展开函数，都可以由其本身的双倍分辨率副本建立

小波函数

- 定义小波集合 $\{\psi_{j,k}(x)\}$: $\psi_{j,k}(x) = 2^{\frac{j}{2}}\psi(2^j x - k)$
- 小波函数跨越的空间:

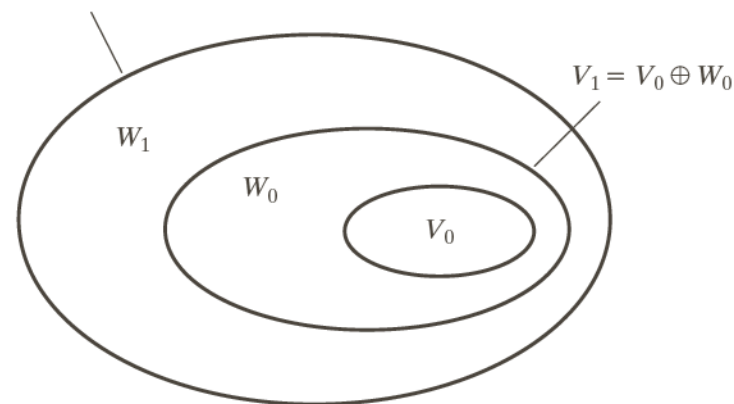
$$W_j = \overline{\text{Span}_k\{\psi_{j,k}(x)\}}$$

- 如果函数 $f(x) \in W_j$, 则有:

$$f(x) = \sum_k \alpha_k \psi_{j,k}(x)$$

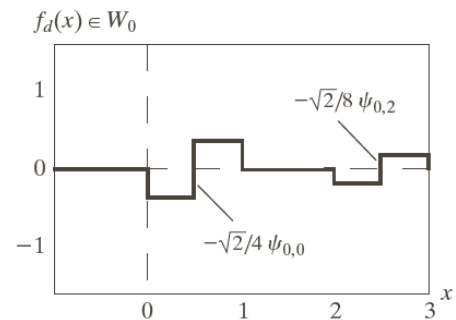
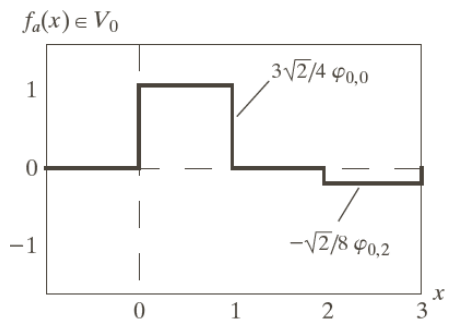
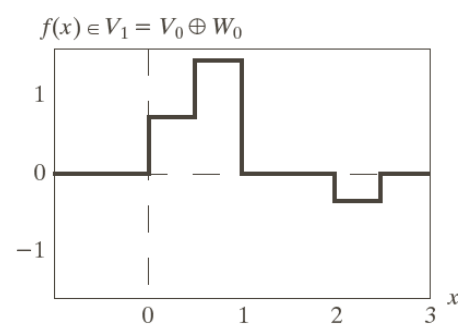
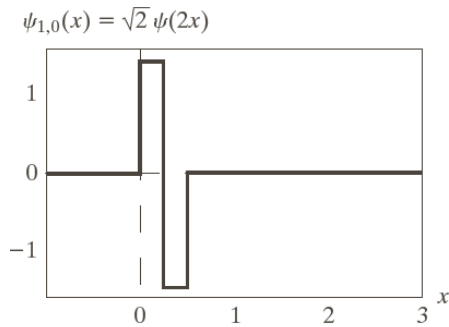
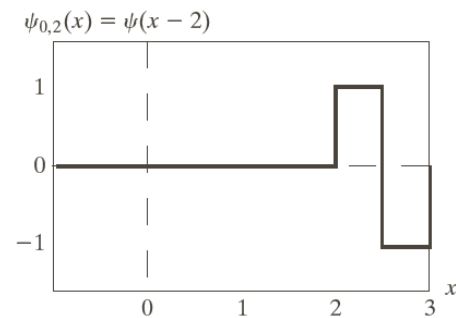
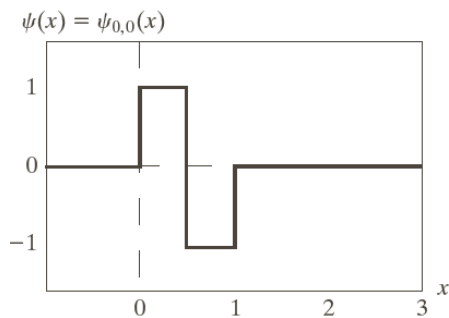
- 尺度函数和小波函数子空间关系

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j \quad V_2 = V_1 \oplus W_1 = V_0 \oplus W_0 \oplus W_1$$



小波函数

□ 哈尔小波函数系数





第7章 小波和多分辨率处理

7.1 背景

7.2 多分辨率展开

7.3 一维小波变换

7.4 快速小波变换

7.5 二维小波变换

7.6 小波包

7.3 一维小波变换

□ 三种小波变换

- 一般的小波级数展开 \longleftrightarrow 傅里叶级数展开
- 离散小波变换 \longleftrightarrow 离散傅里叶变换
- 连续小波变换 \longleftrightarrow 积分傅里叶变换

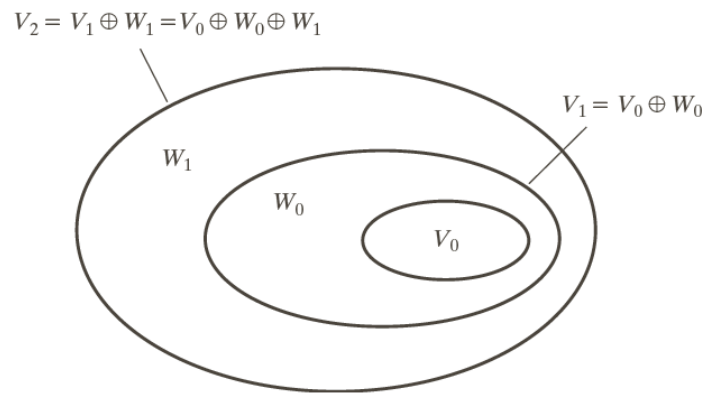
□ 小波级数展开

$$f(x) = \sum_k c_{j_0}(k) \varphi_{j_0,k}(x) + \sum_{j=j_0}^{\infty} \sum_k d_j(k) \psi_{j,k}(x)$$

$c_{j_0}(k)$: 近似或尺度系数; $d_j(k)$: 细节或小波系数

$$c_{j_0}(k) = \langle f(x), \varphi_{j_0,k}(x) \rangle = \int f(x) \varphi_{j_0,k}(x) dx$$

$$d_j(k) = \langle f(x), \psi_{j,k}(x) \rangle = \int f(x) \psi_{j,k}(x) dx$$



小波级数展开

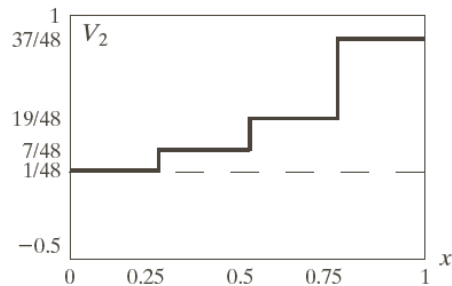
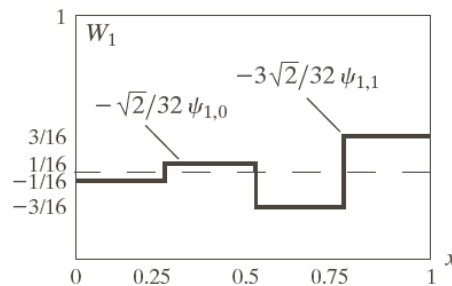
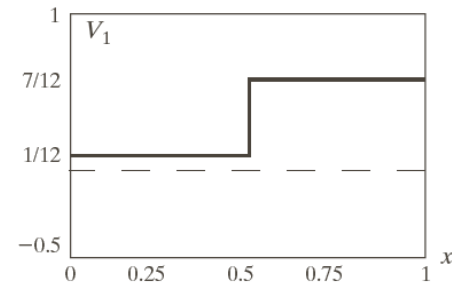
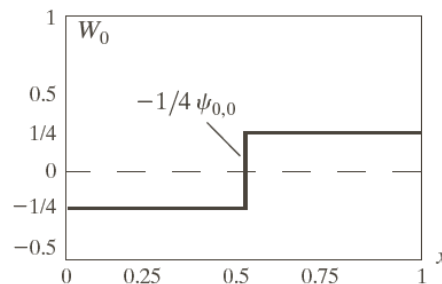
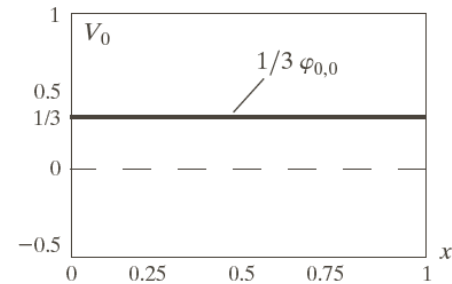
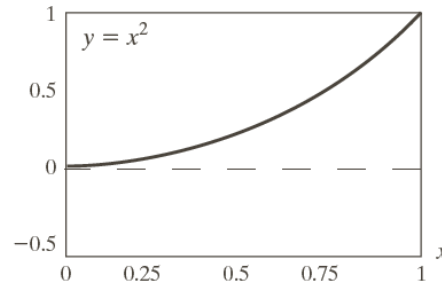
- 随着更高尺度的叠加，近似变得更接近测试函数的精确表示。
- 当 $j \rightarrow \infty$ 时，可实现精确重构表示

$$y = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$c_0(0) = \int_0^1 x^2 \varphi_{0,0}(x) dx = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

$$d_0(0) = \int_0^1 x^2 \psi_{0,0}(x) dx = -\frac{1}{4}$$

....



使用哈尔小波的 $y = x^2$ 的小波级数展开

离散小波变换

- 如果待展开的函数是离散的（即数字序列），得到的系数就称之为离散小波变换（DWT）

- 正向DTW系数

$$\text{近似系数: } W_{\varphi}(j_0, k) = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_n f(n) \varphi_{j_0, k}(n)$$

$$\text{细节系数: } W_{\psi}(j, k) = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_n f(n) \psi_{j, k}(n), j \geq j_0$$

- 反向DWT:

$$f(n) = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_k W_{\varphi}(j_0, k) \varphi_{j_0, k}(n) + \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{j=j_0}^{\infty} \sum_k W_{\psi}(j, k) \psi_{j, k}(n)$$

连续小波变换

- 连续小波变换 (CWT) 将一个连续函数变换为两个变量（**平移**和**尺度**）的高冗余度函数
- 连续平方可积函数 $f(x)$ 的连续小波变换与实数值小波 $\psi(x)$ 的关系定义为

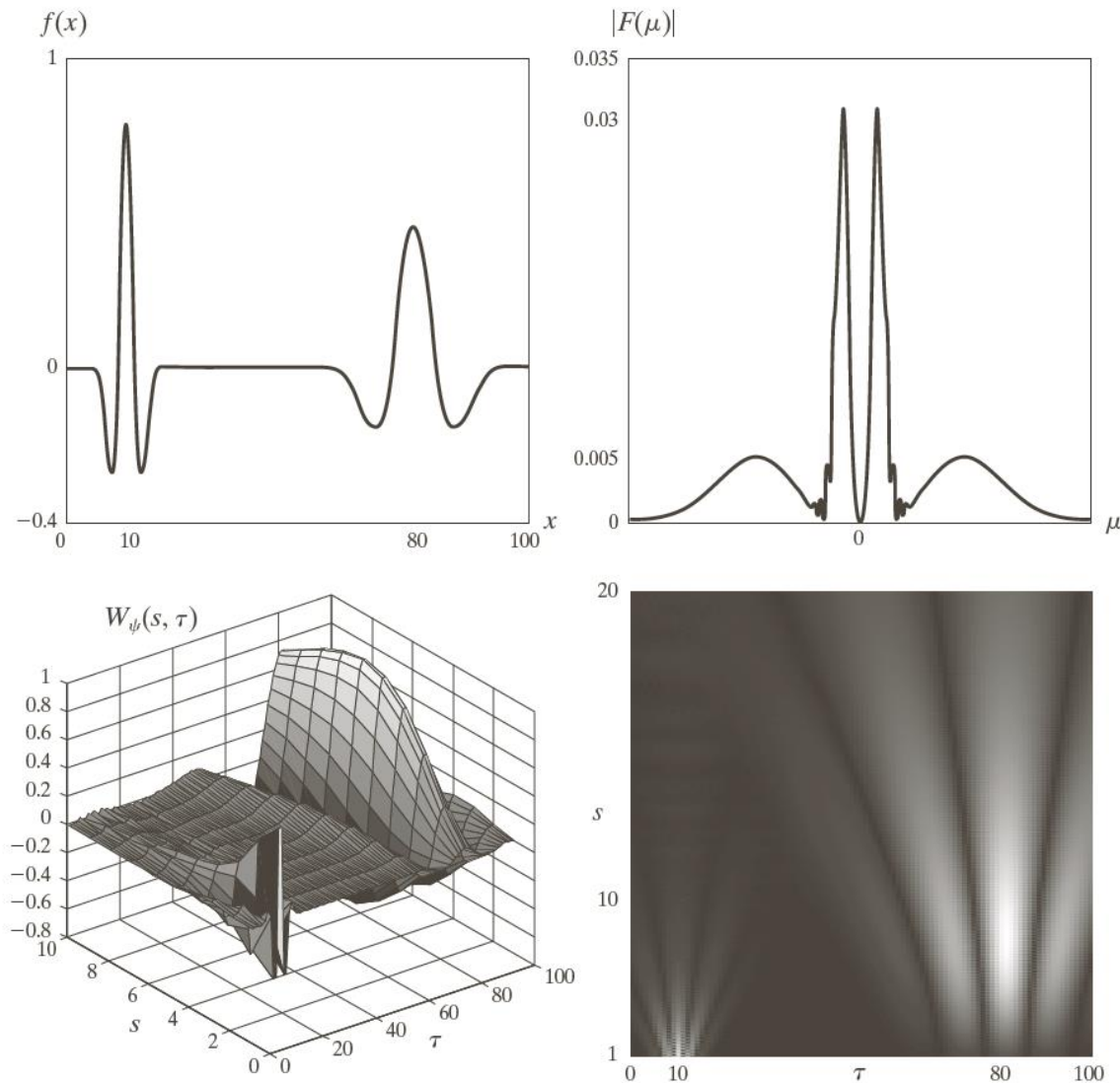
$$W_{\psi}(s, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \psi_{s, \tau}(x) dx$$
$$\psi_{s, \tau}(x) = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{x - \tau}{s}\right)$$

s : 尺度参数
 τ : 平移参数

- 给定 $W_{\psi}(s, \tau)$, 连续小波反变换为

$$f(x) = \frac{1}{C_{\psi}} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_{\psi}(s, \tau) \frac{\psi_{s, \tau}(x)}{s^2} d\tau ds$$
$$C_{\psi} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\psi(\mu)|^2}{|\mu|} d\mu$$

连续小波变换

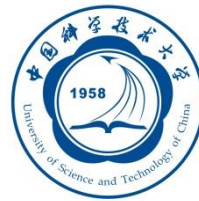


a b
c d

FIGURE 7.16
The continuous wavelet transform (c and d) and Fourier spectrum (b) of a continuous 1-D function (a).

连续小波变换[(c)和(d)]和连续一维函数(a)的傅里叶谱(b)

$$f(x) = \psi_{1,10}(x) + \psi_{6,80}(x)$$



第7章 小波和多分辨率处理

7.1 背景

7.2 多分辨率展开

7.3 一维小波变换

7.4 快速小波变换

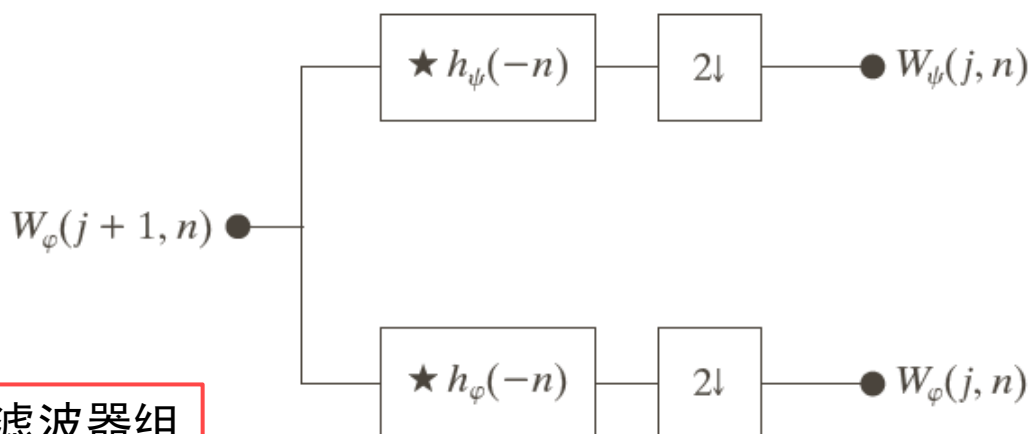
7.5 二维小波变换

7.6 小波包

7.4 快速小波变换

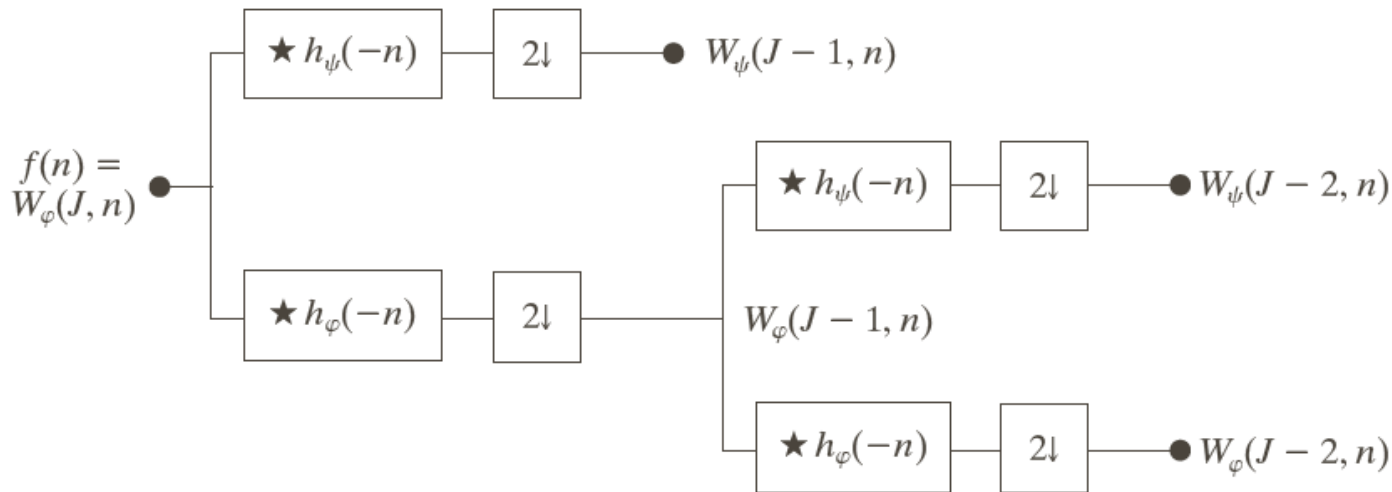
- 快速小波变换（FWT）是实现离散小波变换（DWT）的高效计算，也称Mallat人字形算法
 - 类似于2子带的子带编码

$$W_\psi(j, k) = h_\psi(-n) \star W_\varphi(j+1, n) \Big|_{n=2k, k \geq 0}$$
$$W_\varphi(j, k) = h_\varphi(-n) \star W_\varphi(j+1, n) \Big|_{n=2k, k \geq 0}$$



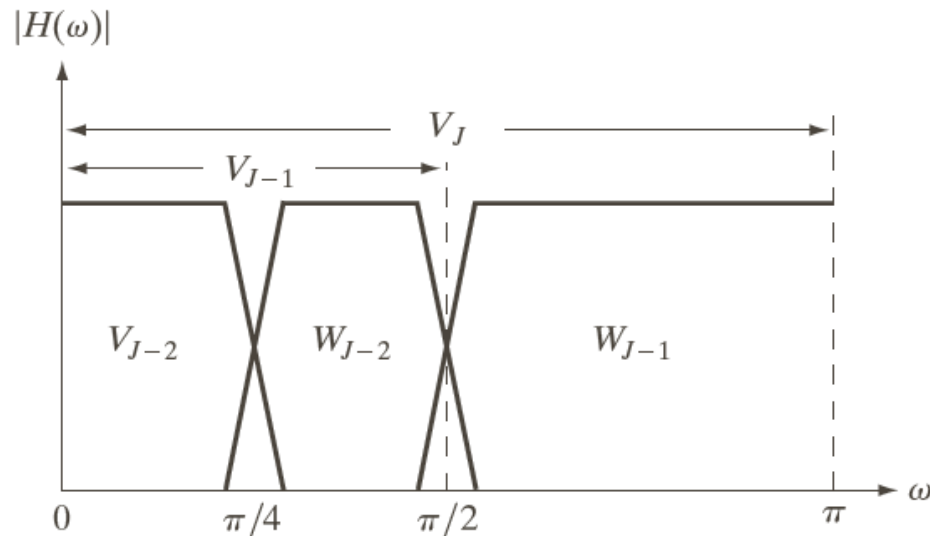
一个FWT分析滤波器组

7.4 快速小波变换



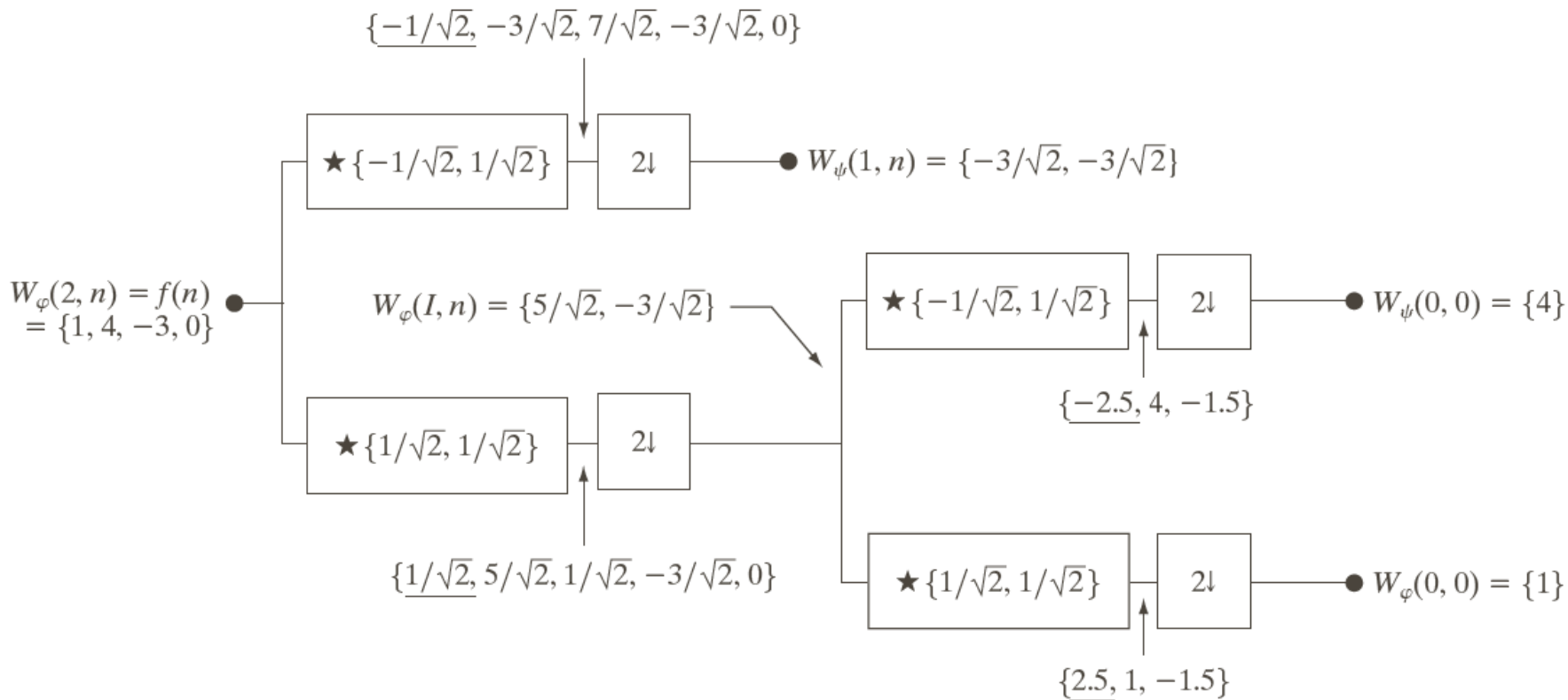
a
b

FIGURE 7.18
(a) A two-stage or two-scale FWT analysis bank and (b) its frequency splitting characteristics.



(a) 一个二级或二尺度
FWT分析滤波器组
(b) 其频谱分离特性

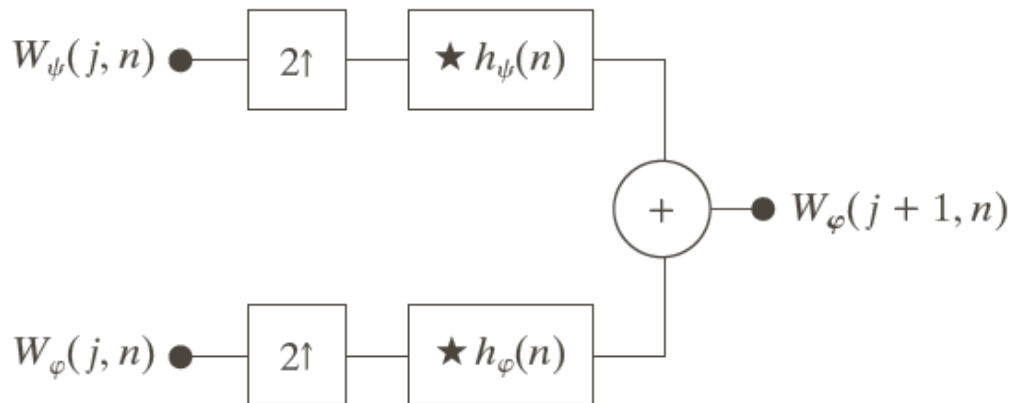
7.4 快速小波变换



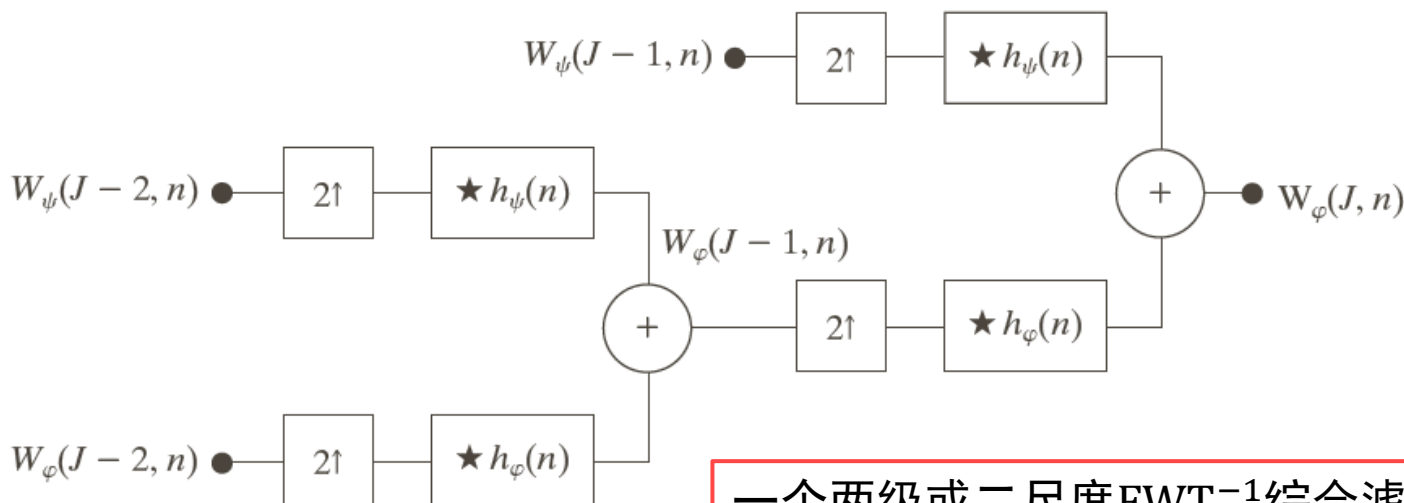
使用哈尔尺度和小波向量计算序列 $\{1, 4, -3, 0\}$ 的一个二尺度快速小波变换

7.4 快速小波变换：反变换

FWT⁻¹综合滤波器组



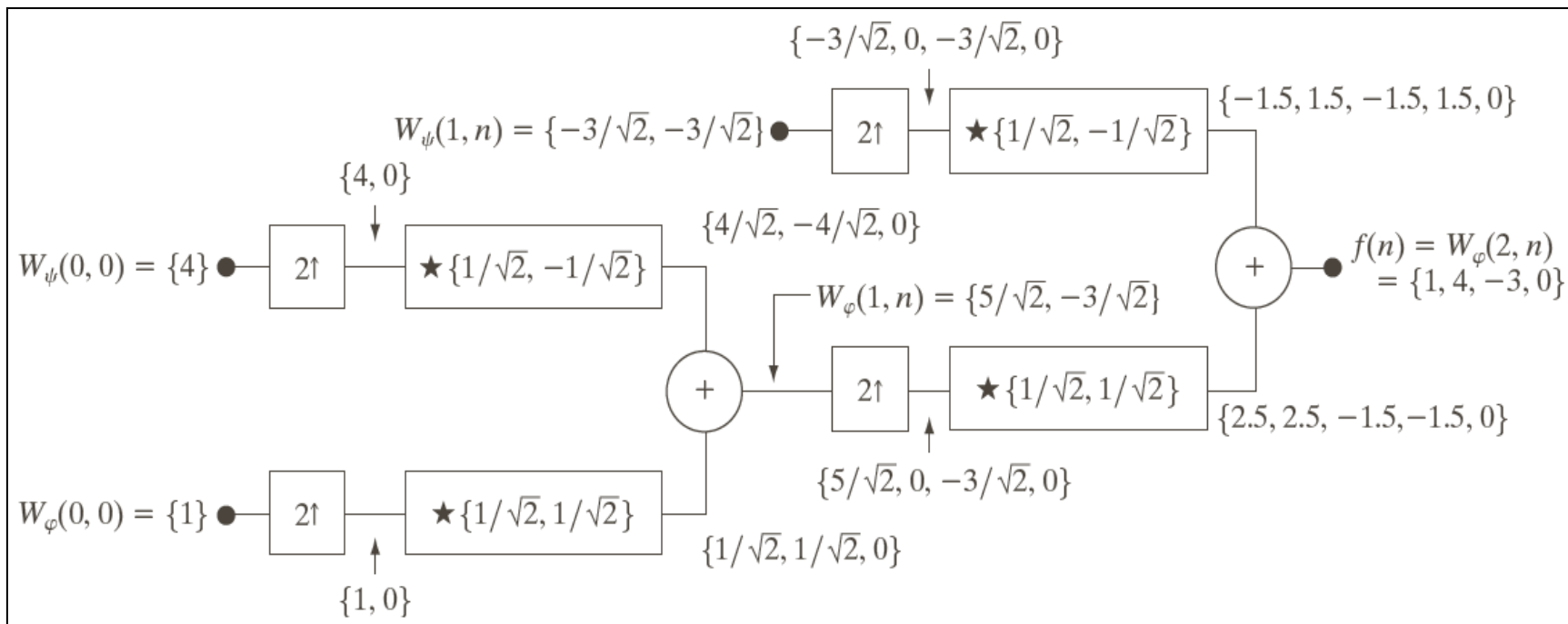
$$W_{\varphi}(j+1, k) = h_{\varphi}(k) \star W_{\varphi}^{2\uparrow}(j, k) + h_{\psi}(k) \star W_{\psi}^{2\uparrow}(j, k) \Big|_{k \geq 0}$$



一个两级或二尺度FWT⁻¹综合滤波器组

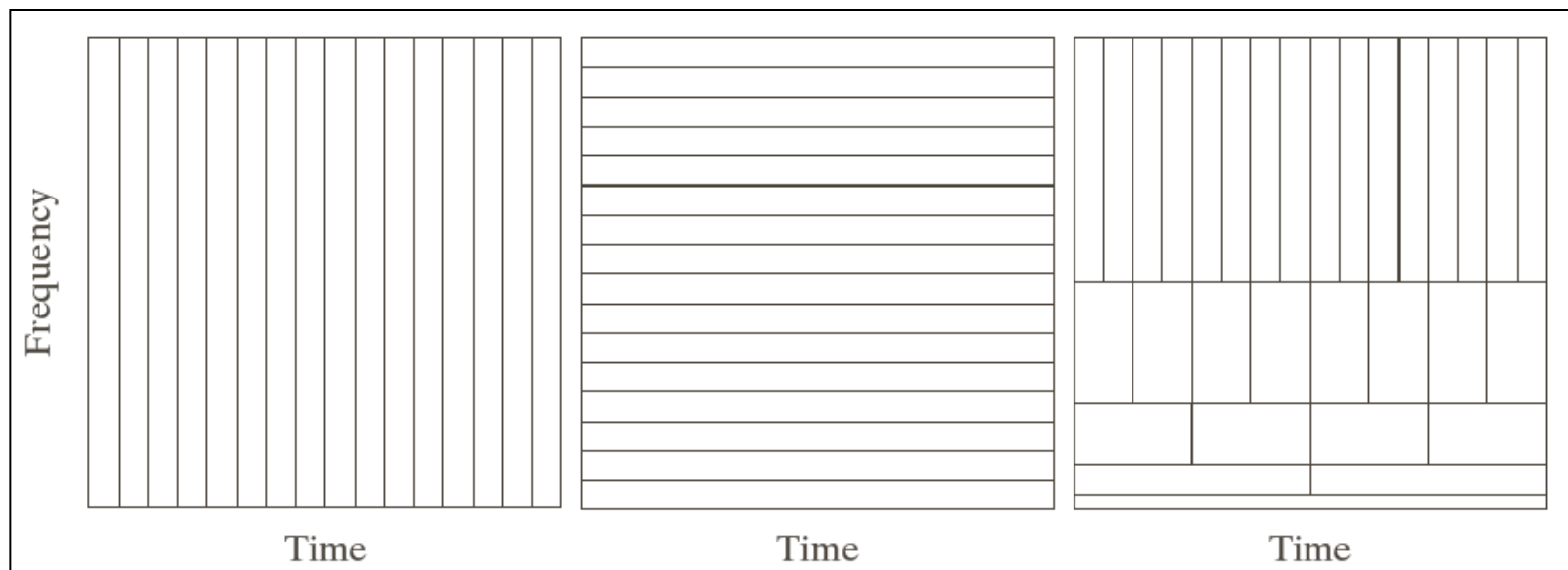
7.4 快速小波变换：反变换

- 使用哈尔尺度和小波函数计算序列 $\{1, 4, -1.5, \sqrt{2}, -1, -1.52\sqrt{2}\}$ 的二尺度快速小波反变换



7.4 快速小波变换

- 标准时域基指明了事件发生的时刻，但不提供频率信息
- 正弦基指出了发生较长时间的事件中出现的频率，但没有提供时间分辨率
- FWT的时间-频率片中时间和频率分辨率是变化的，但每个片的面积相同



(a) 冲激函数基

(a) 正弦函数(FFT)基

(c) FWT基



第7章 小波和多分辨率处理

7.1 背景

7.2 多分辨率展开

7.3 一维小波变换

7.4 快速小波变换

7.5 二维小波变换

7.6 小波包

7.5 二维小波变换

- 在二维情况下，需要1个二维尺度函数 $\varphi(x, y)$ 和3个二维小波 $\psi^H(x, y)$, $\psi^V(x, y)$ 和 $\psi^D(x, y)$ 。每个二维小波都是两个一维函数的乘积

可分离尺度函数

$$\varphi(x, y) = \varphi(x)\varphi(y)$$

列方向变化（水平边缘）

$$\psi^H(x, y) = \psi(x)\varphi(y)$$

行方向变化（垂直边缘）

$$\psi^V(x, y) = \varphi(x)\psi(y)$$

对角线方向变化

$$\psi^D(x, y) = \psi(x)\psi(y)$$

7.5 二维小波变换

□ 大小为 $M \times N$ 的图像 $f(x, y)$ 的离散小波变换是

$$W_{\varphi}(j_0, m, n) = \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \varphi_{j_0, m, n}(x, y)$$

$$W_{\psi}^i(j, m, n) = \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \psi_{j, m, n}^i(x, y), i = \{H, V, D\}$$

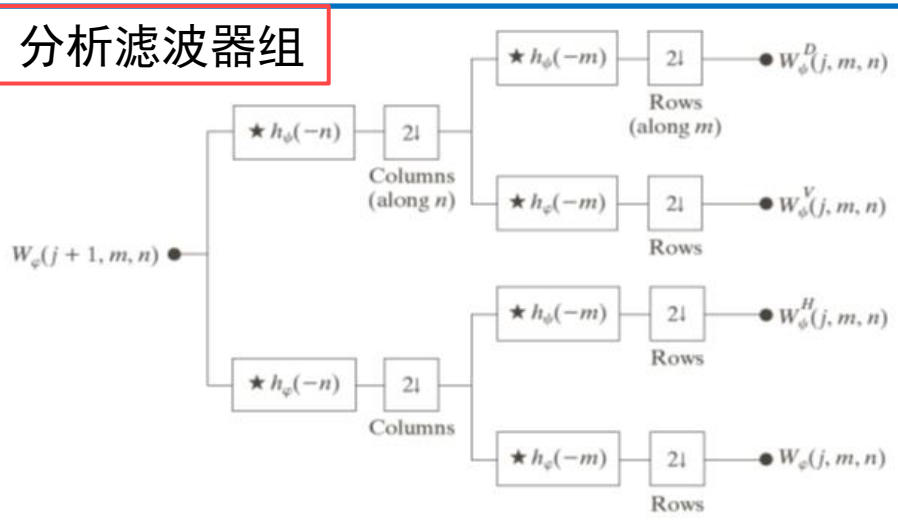
□ $f(x, y)$ 离散小波反变换

$$\begin{aligned} f(x, y) = & \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_m \sum_n W_{\varphi}(j_0, m, n) \varphi_{j_0, m, n}(x, y) \\ & + \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{i=H, V, D} \sum_{j=j_0}^{\infty} \sum_m \sum_n W_{\psi}^i(j, m, n) \psi_{j, m, n}^i(x, y) \end{aligned}$$

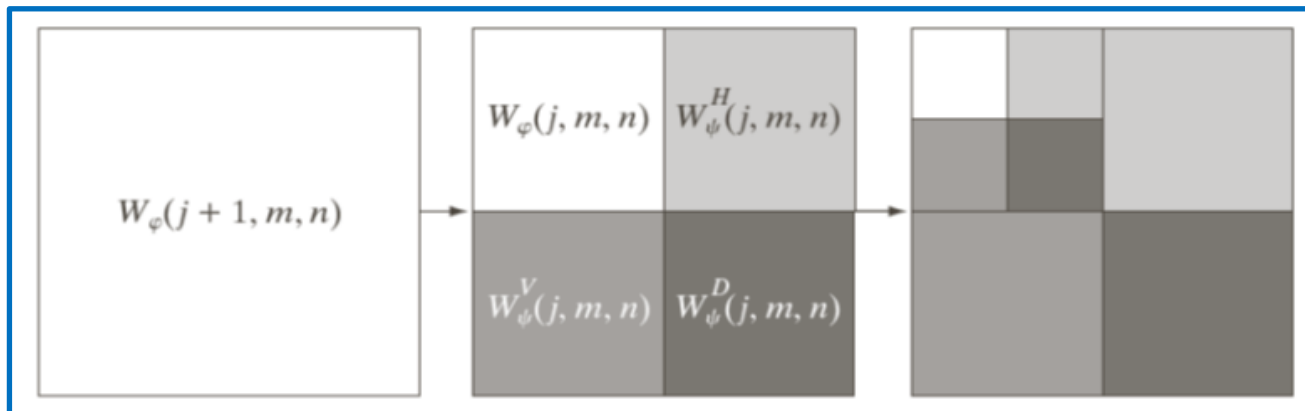
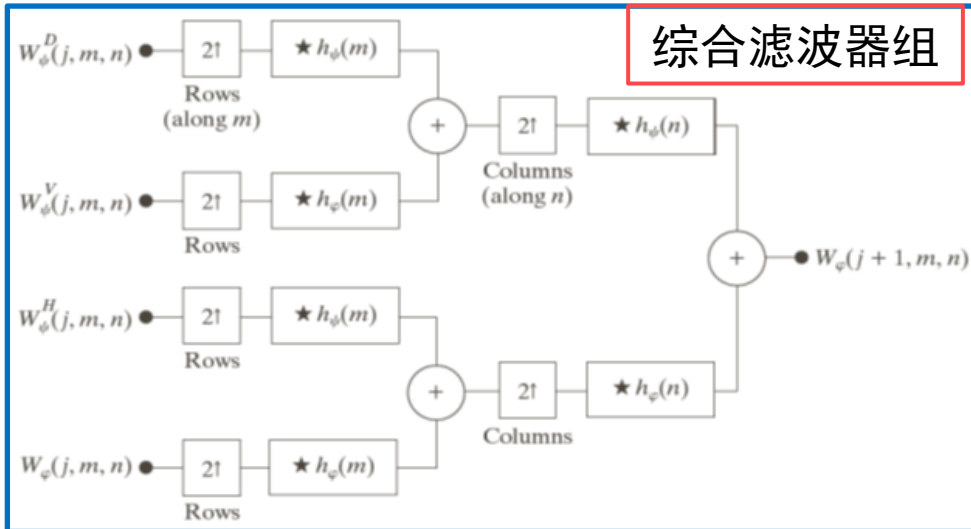
7.6 二维小波变换

二维快速小波变换

分析滤波器组

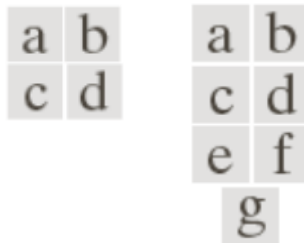
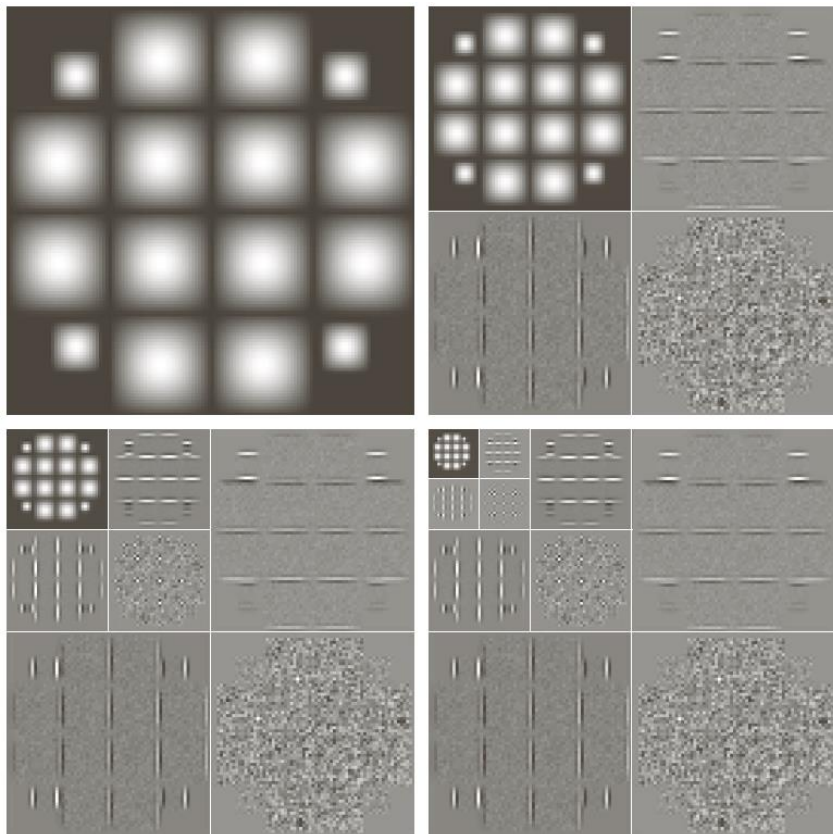


综合滤波器组

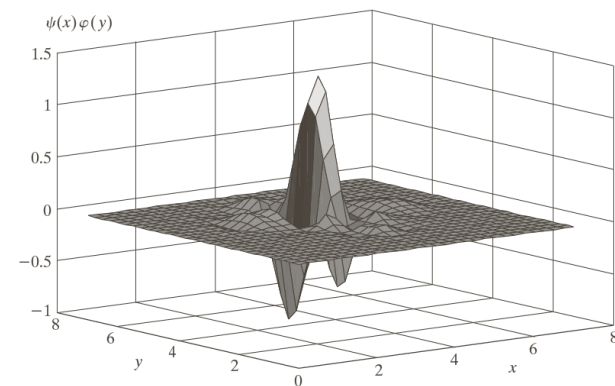
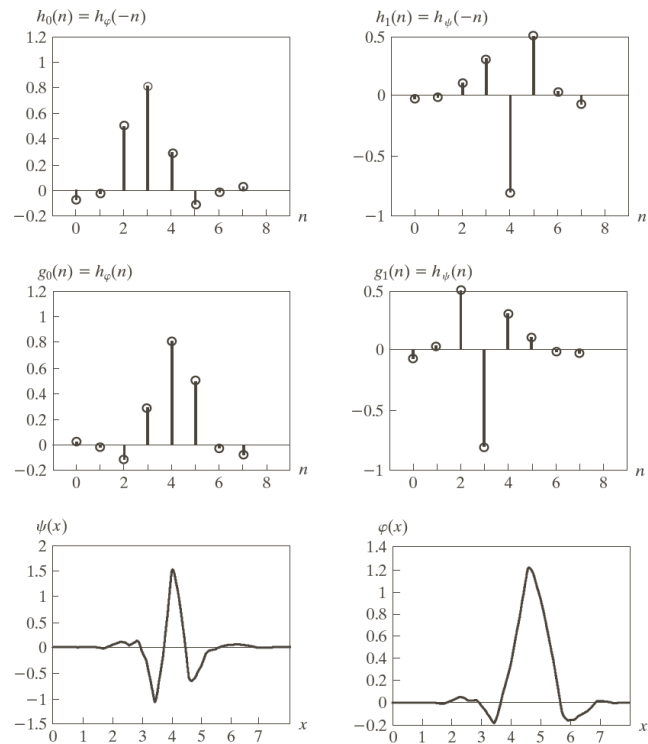


分解结果

7.6 二维小波变换

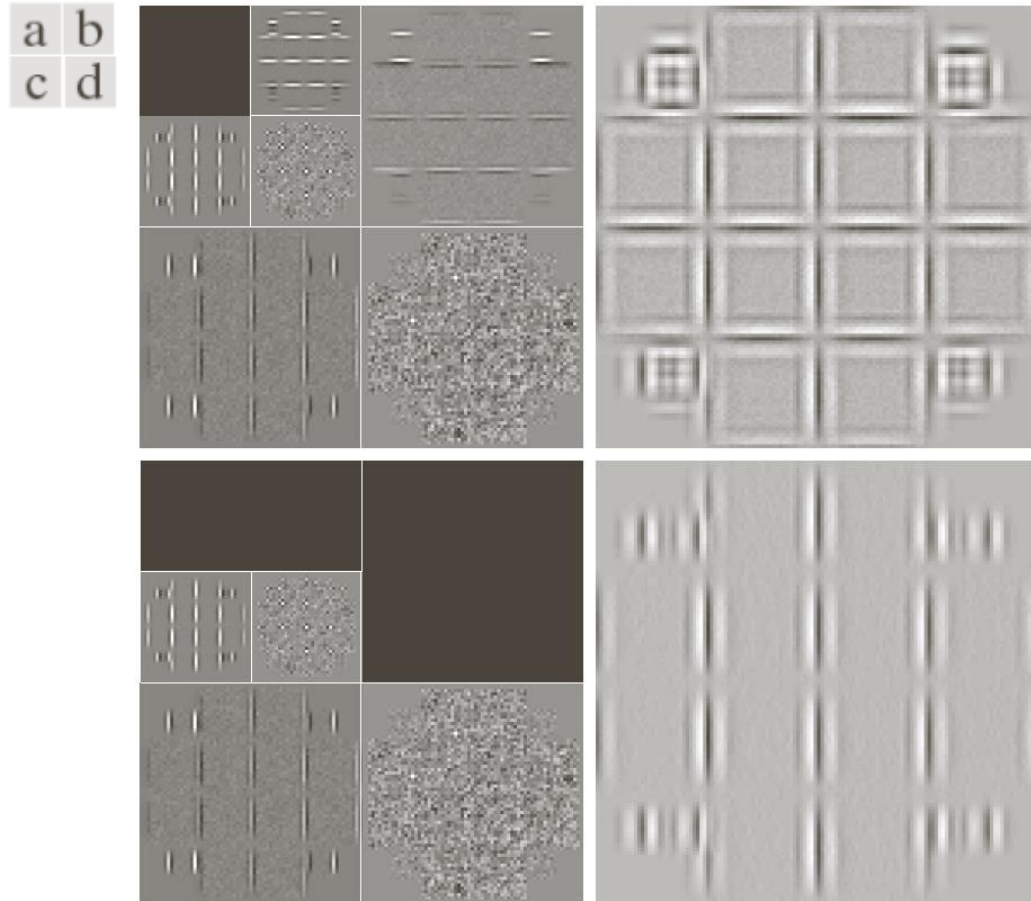


四阶对称小波：
(a)~(b) 重建滤波器；
(c) 一维小波；
(d) 一维尺度函数；
(e) 三个二维小波之一



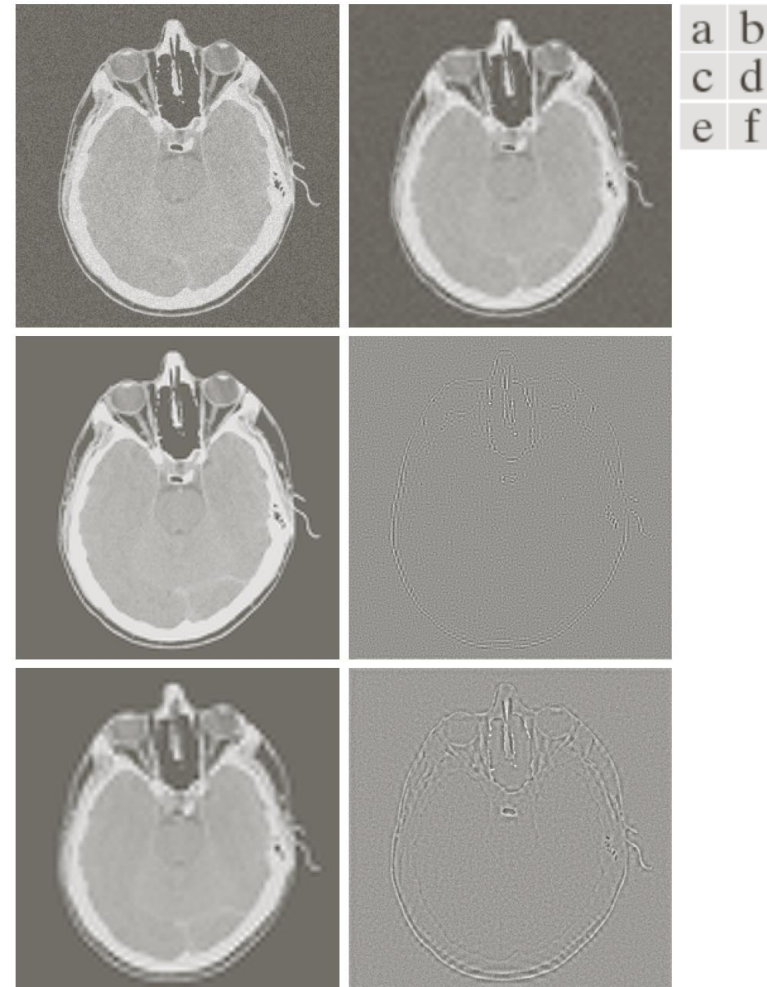
计算二维的三尺度FWT
(a) 原图像；(b) 一尺度FWT；
(c) 二尺度FWT；(d) 三尺度FWT

7.6 二维小波变换



针对**边缘检测**改进的DWT

(a) ~ (c) 删除所选系数的二尺度分解
(b) ~ (d) 相应的重建



为**噪声去除**修改DWT: (a) 人的头部噪声CT图像;
(b), (c)和(e)对细节系数进行阈值处理后的各种重建;
(d)和(f)在(c)和(e)重建过程中所删除的信息



第7章 小波和多分辨率处理

7.1 背景

7.2 多分辨率展开

7.3 一维小波变换

7.4 快速小波变换

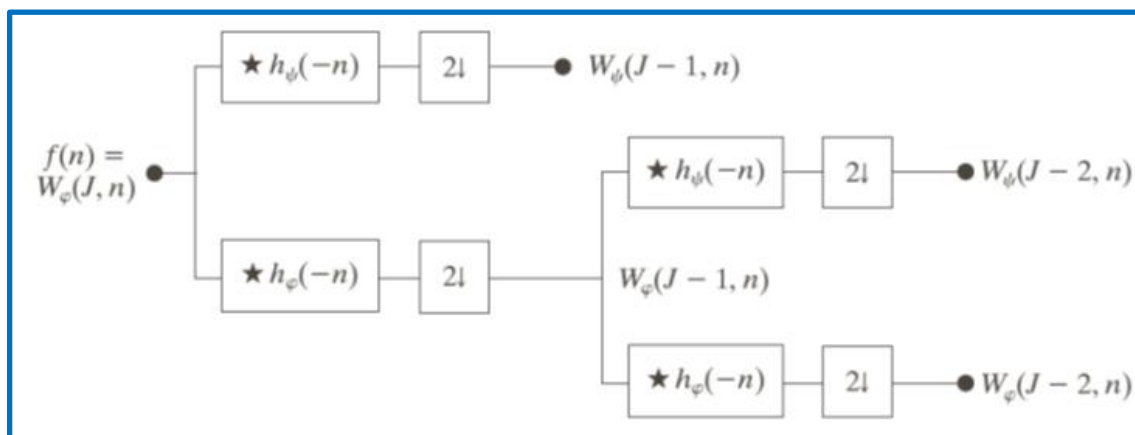
7.5 二维小波变换

7.6 小波包

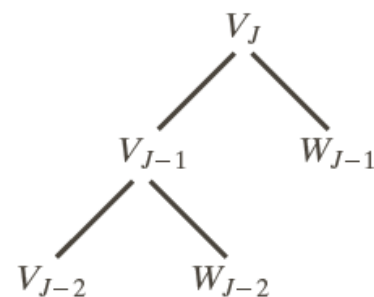
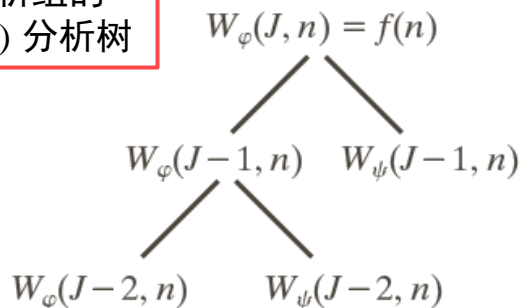
7.6 小波包

□ 将小波分解想象为一个二叉树

- 根节点被赋予最高尺度的近似，叶节点继承变换的近似和细节

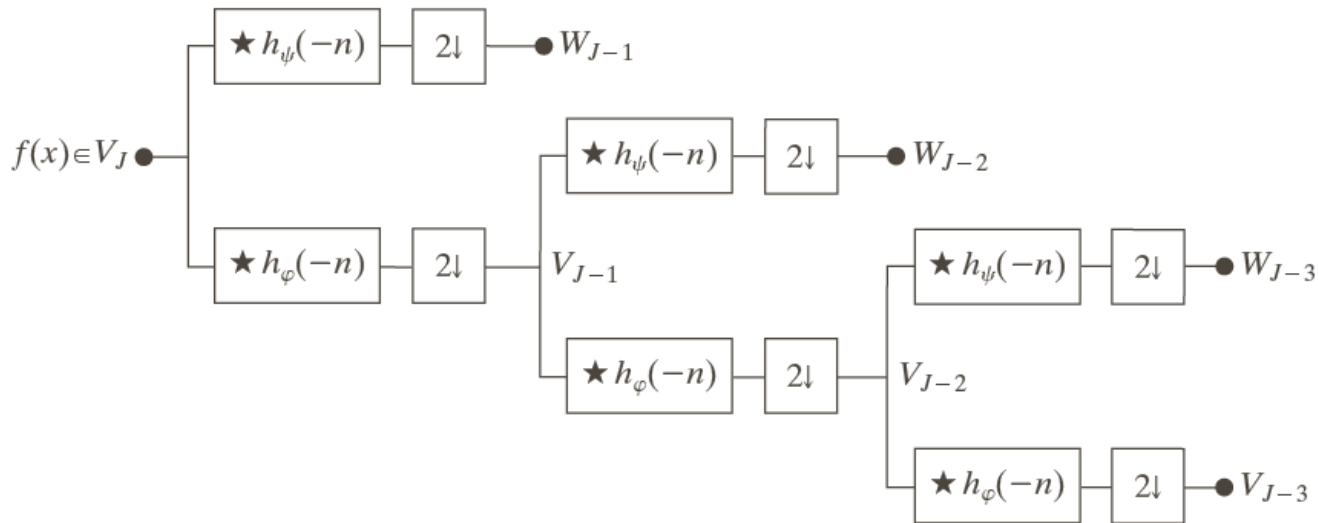


二尺度FWT分析组的
(a) 系数树和(b) 分析树



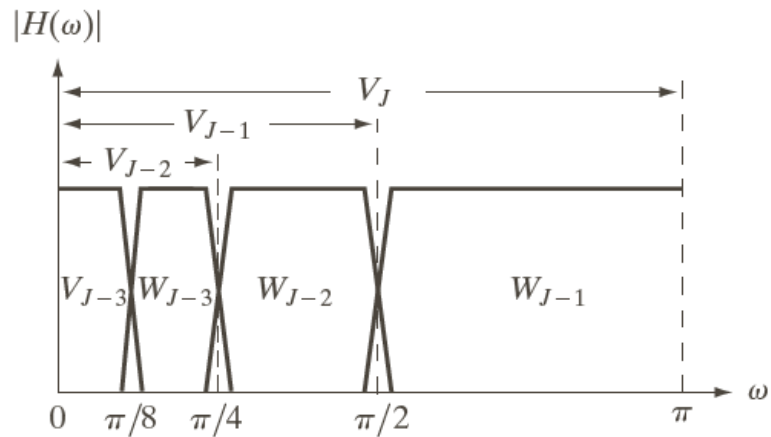
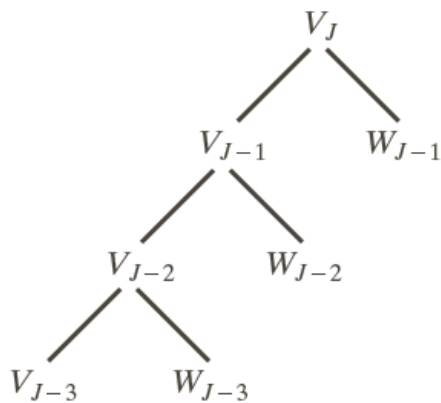
a b

7.6 小波包



a
b c

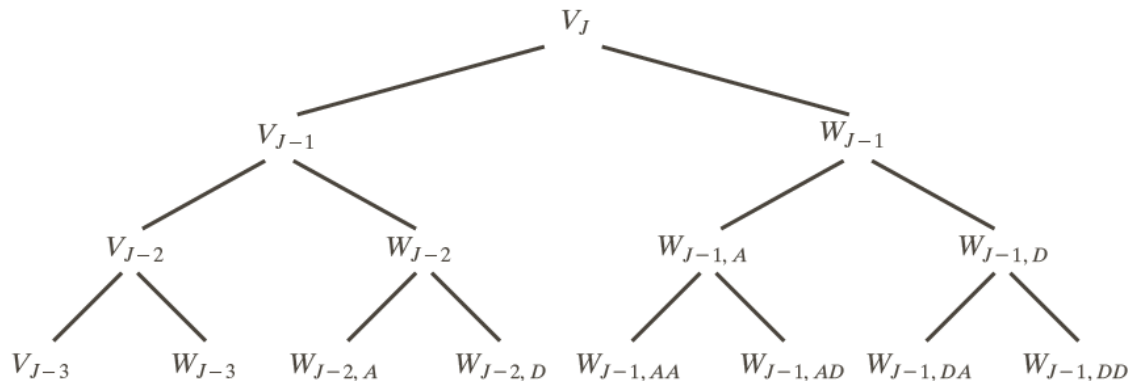
FIGURE 7.30
A three-scale
FWT filter bank:
(a) block diagram;
(b) decomposition
space tree; and
(c) spectrum
splitting
characteristics.



三尺度FWT分析组：
(a) 方框图
(b) 分解空间树
(c) 频谱分离特性

7.6 小波包

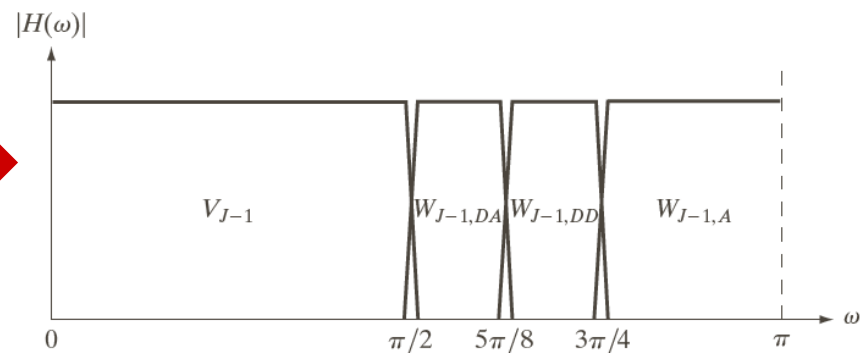
□ 在 W_{J-1} 上附加近似滤波和细节滤波



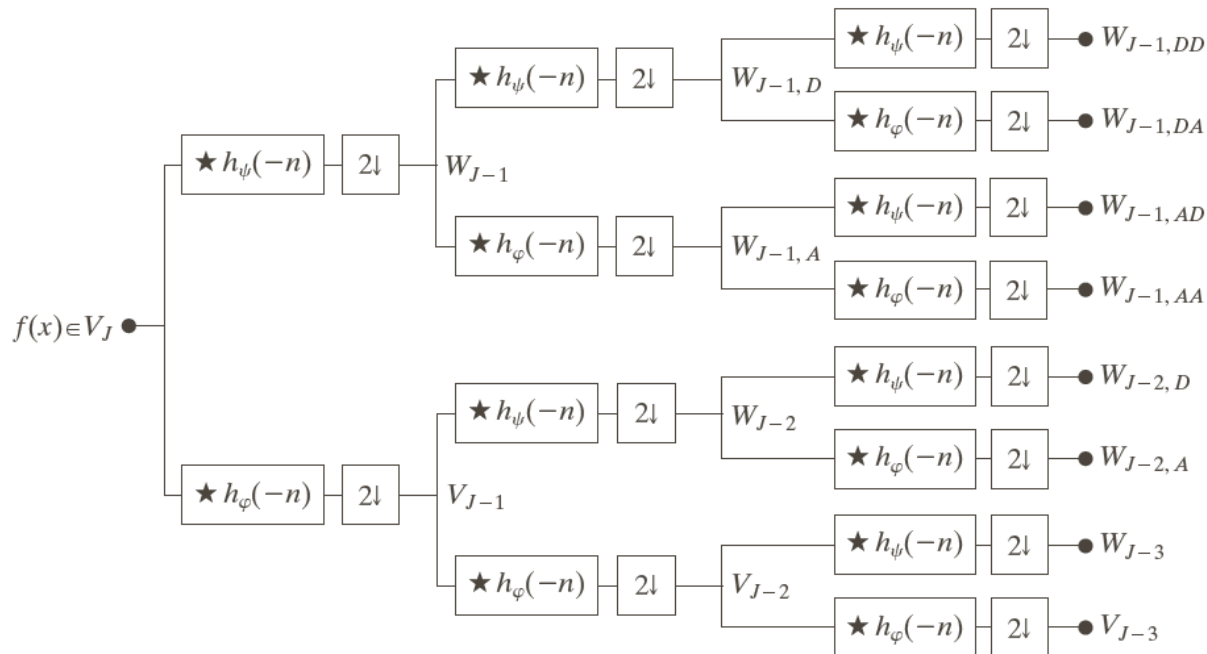
□ 上图中的小波包支持26中不同的分解，例如

$$V_J = V_{J-3} \oplus W_{J-3} \oplus W_{J-2,A} \oplus W_{J-2,D} \oplus W_{J-1,AA} \oplus W_{J-1,AD} \oplus W_{J-1,DA} \oplus W_{J-1,DD}$$

$$V_J = V_{J-1} \oplus W_{J-1,A} \oplus W_{J-1,DA} \oplus W_{J-1,DD} \rightarrow$$

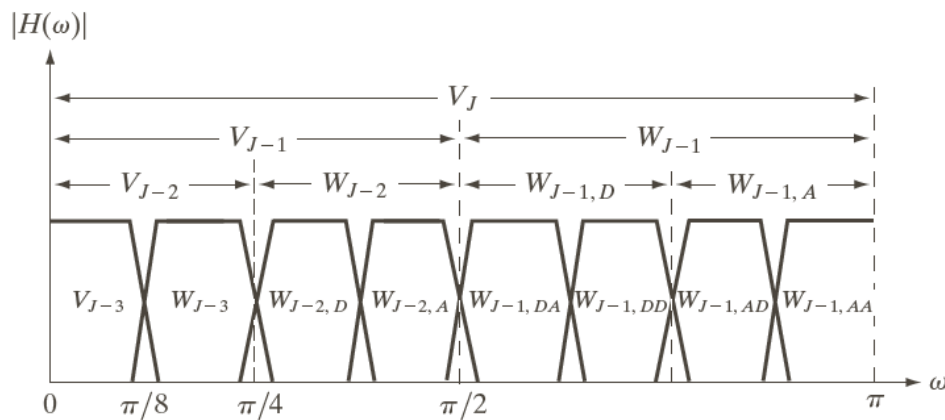


7.6 小波包



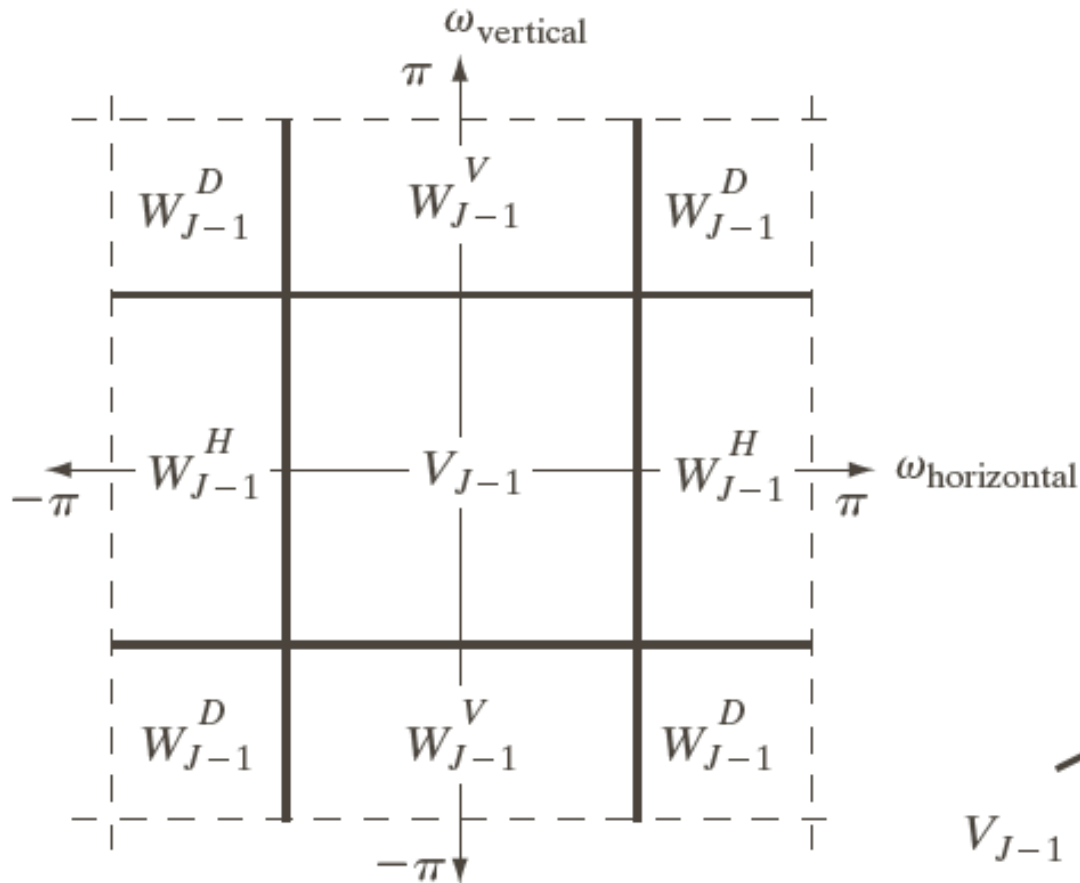
a
b

FIGURE 7.32
The (a) filter bank and (b) spectrum splitting characteristics of a three-scale full wavelet packet analysis tree.



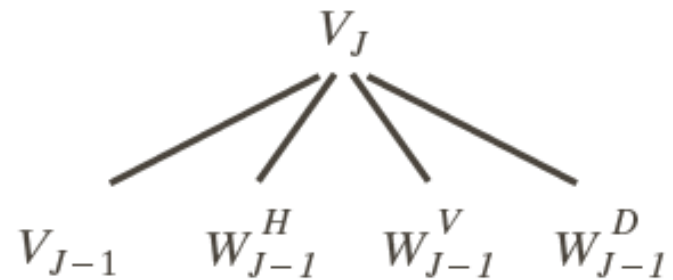
三尺度完全小波包分析树
(a) 滤波器组
(b) 频谱分离特性

7.6 小波包



a b

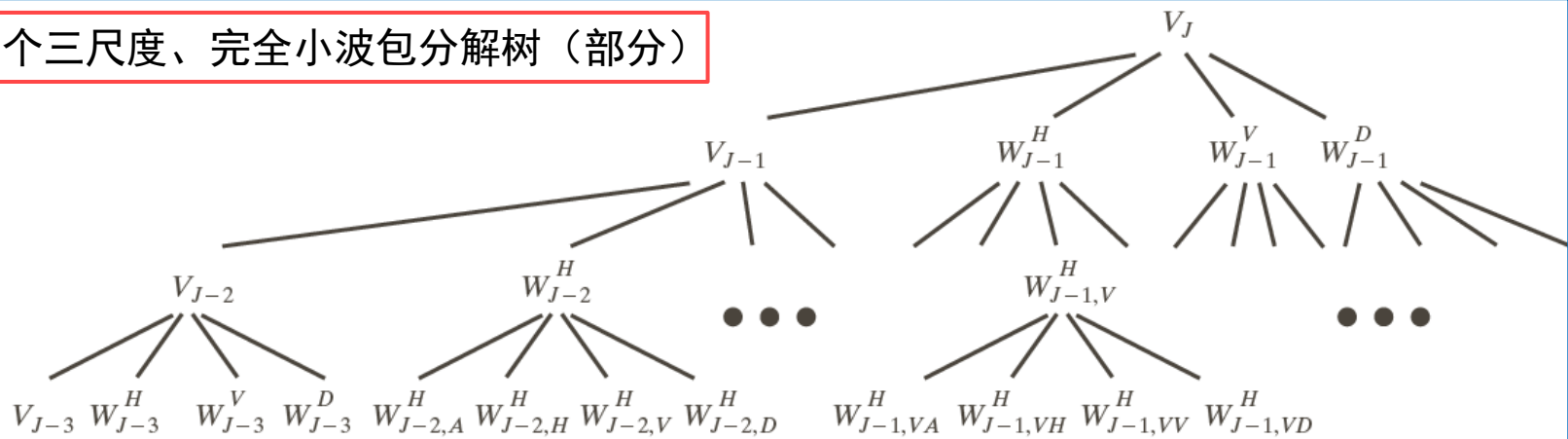
FIGURE 7.34
The first decomposition of a two-dimensional FWT: (a) the spectrum and (b) the subspace analysis tree.



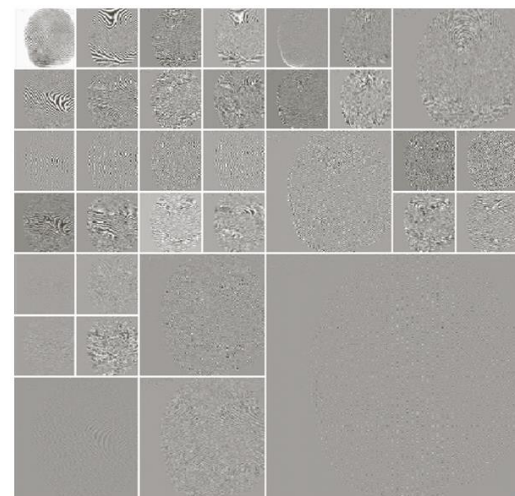
一个二维FWT的第一次分解 (a) 频谱 (b) 子空间分析树

7.6 小波包

一个三尺度、完全小波包分解树（部分）



(a) 一副扫描的指纹图像
(b) 该图像的三尺度、全小波包分解



指纹的一种最佳小波分解

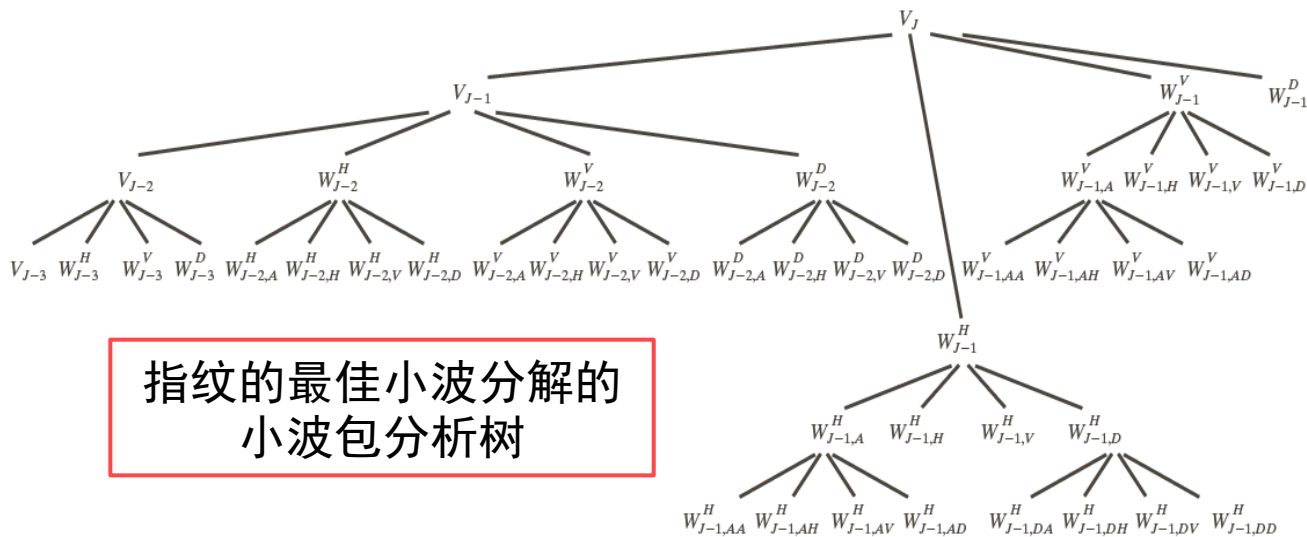
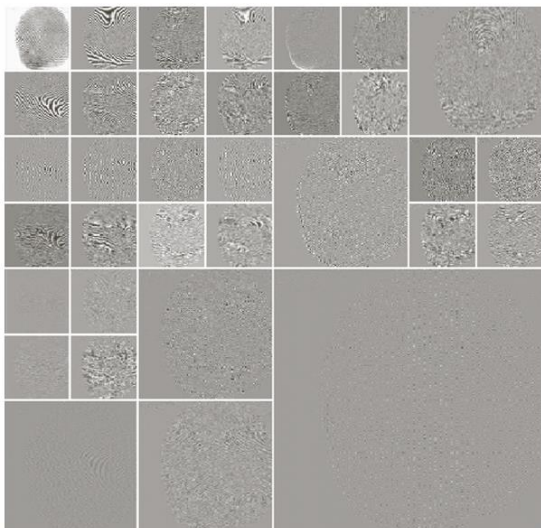
7.6 小波包：指纹图像压缩

- 面向指纹图像压缩，定义代价函数，即

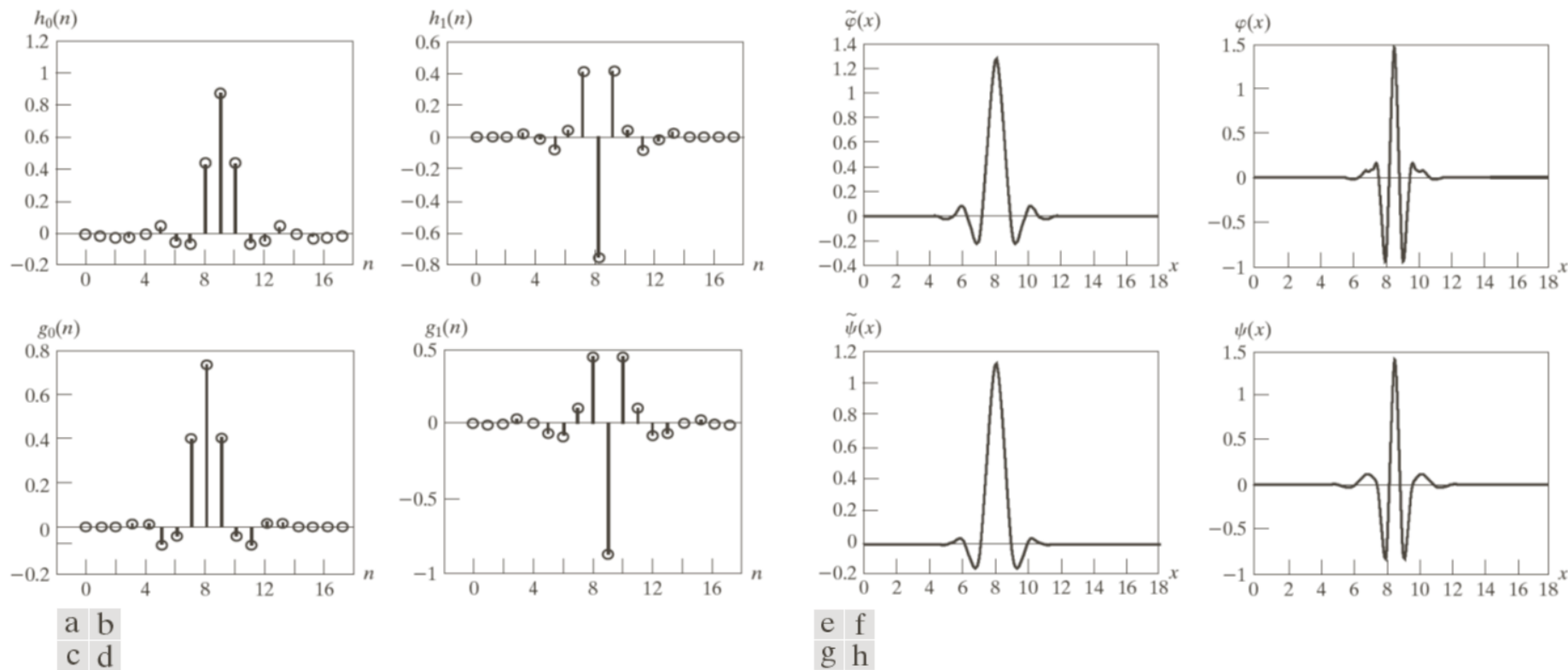
$$E(f) = \sum_{m,n} |f(m,n)|$$

- 父节点分解条件：子节点联合能量小于父节点能量，即

$$E_A + E_A + E_A + E_A < E_P$$



7.6 小波包



Cohen Daubechies Feauveau 双正交小波族成员：
 (a)和(b)分解滤波器系数；(c)和(d)重建滤波器系数；
 (e)~(h)双小波和尺度函数。