北京大学 25/26 学年第 1 学期
高数 B 期中试题答案

by Gemini 2.5 Pro / Arthals 校验。

1. (10 分) 求序列极限。

(a)
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3^{2n}+4^n}$$

利用夹逼定理，有不等式：

$$\sqrt[n]{9^n}<\sqrt[n]{9^n+4^n}<\sqrt[n]{2\cdot 9^n}$$

即：

$$9<\sqrt[n]{9^n+4^n}<9\cdot\sqrt[n]{2}$$

当 $n\to\infty$ 时，$\lim_{n\to\infty}9=9$，且 $\lim_{n\to\infty}9\cdot\sqrt[n]{2}=9\cdot 1=9$。根据夹逼定理，原序列的极限为 9。

(b)
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(n+k)^2}{n^3}$$

将和式进行变形，使其符合黎曼和的形式：

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(n+k)^2}{n^3}&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n^2(1+k/n)^2}{n^3}\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)^2\frac{1}{n}\end{aligned}$$

这个表达式可以看作函数 $f(x)=(1+x)^2$ 在区间 $[0,1]$ 上的黎曼和，其中分割点为 $x_k=k/n$，小区间宽度为 $\Delta x=1/n$。因此，该极限等于对应的定积分：

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)^2\frac{1}{n}&=\int_0^1(1+x)^2\,\mathrm{d}x\\&=\left[\frac{(1+x)^3}{3}\right]_0^1\\&=\frac{(1+1)^3}{3}-\frac{(1+0)^3}{3}\\&=\frac{8}{3}-\frac{1}{3}=\frac{7}{3}\end{aligned}$$

2. (10 分) 求函数极限。

(a)
$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$$

当 $x\to 4$ 时，分子和分母都趋于 0，这是一个 $\frac{0}{0}$ 型未定式。通过分子和分母分别乘以其共轭表达式来消除不定性：

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to4}\frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}} &= \lim_{x\to4}\frac{(\sqrt{2x+1}-3)(\sqrt{2x+1}+3)}{(\sqrt{x-2}-\sqrt{2})(\sqrt{x-2}+\sqrt{2})}\cdot\frac{\sqrt{x-2}+\sqrt{2}}{\sqrt{2x+1}+3}\\
&= \lim_{x\to4}\frac{(2x+1)-9}{(x-2)-2}\cdot\frac{\sqrt{x-2}+\sqrt{2}}{\sqrt{2x+1}+3}\\
&= \lim_{x\to4}\frac{2x-8}{x-4}\cdot\frac{\sqrt{x-2}+\sqrt{2}}{\sqrt{2x+1}+3}\\
&= \lim_{x\to4}2\cdot\frac{\sqrt{x-2}+\sqrt{2}}{\sqrt{2x+1}+3}\\
&= 2\cdot\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}}{\sqrt{9}+3} = 2\cdot\frac{2\sqrt{2}}{6} = \frac{2\sqrt{2}}{3}
\end{aligned}
$$

(b)
$$\lim_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})$$

运用三角函数的和差化积公式：

$$\sin A-\sin B = 2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

令 $A=\sqrt{x+1}$，$B=\sqrt{x}$，则有：

$$\lim_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}) = \lim_{x\to+\infty}2\cos\left(\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\right)\sin\left(\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\right)$$

现在分析 $\sin$ 函数内部的自变量。通过乘以共轭表达式，得到：

$$\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2} = \frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})} = \frac{(x+1)-x}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})} = \frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}$$

当 $x\to+\infty$ 时，$\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}\to 0$。因此，$\lim_{x\to+\infty}\sin\left(\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\right)=\sin(0)=0$。

同时，$\cos\left(\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\right)$ 是一个有界函数，其取值范围在 $[-1,1]$ 之间。

根据有界函数与无穷小量的乘积仍为无穷小量的性质，原极限为 0。

3. (10 分) 求导数。

(a) 求 $(x^{x^a})'$，$x>0$，其中 $a>0$ 是常数。

设 $y=x^{x^a}$，对两边取自然对数，得到：

$$\ln y = \ln(x^{x^a}) = x^a\ln x$$

对等式两边关于 x 求导：

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^a\ln x)\\
&= (ax^{a-1})\ln x + x^a\cdot\frac{1}{x}\\
&= ax^{a-1}\ln x + x^{a-1}\\
&= x^{a-1}(a\ln x+1)
\end{aligned}
$$

将 y 乘回右侧，并代入 $y=x^{x^a}$：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y\cdot x^{a-1}(a\ln x+1) = x^{x^a}x^{a-1}(a\ln x+1)$$

(b) 求

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{\sin x}^{\tan x}\sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

根据莱布尼茨公式，如果 $F(x)=\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$，那么 $F'(x)=f(b(x))b'(x)-f(a(x))a'(x)$。

在本题中，$f(t)=\sqrt{1+t^2}$，$b(x)=\tan x$，其导数 $b'(x)=\sec^2 x$；$a(x)=\sin x$，其导数 $a'(x)=\cos x$。

直接代入公式可得：

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{\sin x}^{\tan x}\sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t &= \sqrt{1+\tan^2 x}\cdot(\tan x)'-\sqrt{1+\sin^2 x}\cdot(\sin x)' \\ &= \sqrt{\sec^2 x}\cdot\sec^2 x-\sqrt{1+\sin^2 x}\cdot\cos x\end{aligned}$$

考虑到 $\sqrt{1+\tan^2 x}=\sqrt{\sec^2 x}$。在通常情况下，假设 x 在使得 $\tan x$ 有意义且 $\sec x>0$ 的区间内（例如 $x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$），此时 $\sqrt{\sec^2 x}=\sec x$。

因此，最终结果为：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{\sin x}^{\tan x}\sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t=\sec x\cdot\sec^2 x-\cos x\sqrt{1+\sin^2 x}=\sec^3 x-\cos x\sqrt{1+\sin^2 x}$$

4. (10 分) 求多阶导数。

(a) 设函数 $y=y(x)$ 由参数方程

$$\begin{cases}x=R(t-\sin t)\\ y=R(1-\cos t)\end{cases},\quad t\in(0,2\pi)$$

确定，其中 $R>0$ 是常数。求 $y'(x)$，$y''(x)$。

对于由参数方程确定的函数，其一阶导数 $y'(x)$ 可通过链式法则求得，即 $y'(x)=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}$。首先计算 x 和 y 对参数 t 的导数：

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=R(1-\cos t),\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=R\sin t$$

因此，一阶导数为：

$$y'(x)=\frac{R\sin t}{R(1-\cos t)}=\frac{\sin t}{1-\cos t}$$

利用三角函数的半角公式 $\sin t=2\sin(t/2)\cos(t/2)$ 和 $1-\cos t=2\sin^2(t/2)$，上式可以化简为：

$$y'(x)=\frac{2\sin(t/2)\cos(t/2)}{2\sin^2(t/2)}=\cot\left(\frac{t}{2}\right)$$

二阶导数 $y''(x)$ 是对 $y'(x)$ 关于 x 求导，仍需使用链式法则：$y''(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y'(x))=\frac{\mathrm{d}(y'(x))/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}$。

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(y'(x))=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\cot\left(\frac{t}{2}\right)\right)=-\csc^2\left(\frac{t}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}$$

所以，二阶导数为：

$$y''(x)=\frac{-\frac{1}{2}\csc^2(t/2)}{R(1-\cos t)}=\frac{-\frac{1}{2}\csc^2(t/2)}{R(2\sin^2(t/2))}=\frac{-1}{4R\sin^4(t/2)}$$

(b) 设 $f(x)=x^2e^{-x^2}$。求 $f^{(n)}(x)$，$n=1,2,3$。

对于 $f'(x)$：

$$f'(x)=(x^2)'e^{-x^2}+x^2(e^{-x^2})'=2xe^{-x^2}+x^2e^{-x^2}(-2x)=(2x-2x^3)e^{-x^2}$$

在 $f'(x)$ 的基础上求 $f''(x)$：

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= (2x-2x^3)'e^{-x^2} + (2x-2x^3)(e^{-x^2})' \\
&= (2-6x^2)e^{-x^2} + (2x-2x^3)e^{-x^2}(-2x) \\
&= (2-6x^2-4x^2+4x^4)e^{-x^2} \\
&= (4x^4-10x^2+2)e^{-x^2}
\end{aligned}
$$

在 $f''(x)$ 的基础上求 $f'''(x)$：

$$
\begin{aligned}
f'''(x) &= (4x^4-10x^2+2)'e^{-x^2} + (4x^4-10x^2+2)(e^{-x^2})' \\
&= (16x^3-20x)e^{-x^2} + (4x^4-10x^2+2)e^{-x^2}(-2x) \\
&= (16x^3-20x-8x^5+20x^3-4x)e^{-x^2} \\
&= (-8x^5+36x^3-24x)e^{-x^2}
\end{aligned}
$$

5. (18 分) 求不定积分。

(a)
$$\int x\ln\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

先利用对数性质简化被积函数，$\ln\sqrt{1+x^2} = \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$。

$$\int x\ln\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int x\ln(1+x^2)\,\mathrm{d}x$$

利用换元法，令 $u = 1+x^2$，则 $\mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x$，即 $x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{d}u$。

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int \ln(u)\cdot\frac{1}{2}\mathrm{d}u &= \frac{1}{4}\int \ln u\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{4}(u\ln u - u) + C
\end{aligned}
$$

将 $u = 1+x^2$ 代回，得到最终结果：

$$\frac{1}{4}((1+x^2)\ln(1+x^2) - (1+x^2)) + C$$

(b)
$$\int \frac{x^2+2x+3}{(x+2)^2(x+3)^2}\,\mathrm{d}x$$

被积函数是真分式，采用部分分式分解法。设：

$$\frac{x^2+2x+3}{(x+2)^2(x+3)^2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2} + \frac{C}{x+3} + \frac{D}{(x+3)^2}$$

通分后，分子应恒等于 x^2+2x+3。通过比较系数或代入特殊值，解得

$$A=-8, B=3, C=8, D=6$$

因此，原积分可拆分为：

$$
\begin{aligned}
\int\left(\frac{-8}{x+2} + \frac{3}{(x+2)^2} + \frac{8}{x+3} + \frac{6}{(x+3)^2}\right)\mathrm{d}x &= -8\ln|x+2| - \frac{3}{x+2} + 8\ln|x+3| - \frac{6}{x+3} + C \\
&= 8\ln\left|\frac{x+3}{x+2}\right| - \frac{3}{x+2} - \frac{6}{x+3} + C
\end{aligned}
$$

(c)
$$\int x^2\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$$

令 $x = \sin\theta$，其中 $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$。则 $\mathrm{d}x = \cos\theta\,\mathrm{d}\theta$，$\sqrt{1-x^2} = \cos\theta$。

$$
\begin{aligned}
\int x^2\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x &= \int \sin^2\theta\cos\theta\cdot\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = \int \sin^2\theta\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta \\
&= \int \left(\frac{1}{2}\sin(2\theta)\right)^2\mathrm{d}\theta = \frac{1}{4}\int \sin^2(2\theta)\,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{4}\int \frac{1-\cos(4\theta)}{2}\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{8}\left(\theta - \frac{1}{4}\sin(4\theta)\right) + C
\end{aligned}
$$

现在需要将结果换回 x，由 $x=\sin\theta$ 得 $\theta=\arcsin x$。

又因为：

$$
\sin(4\theta) = 2\sin(2\theta)\cos(2\theta) = 4\sin\theta\cos\theta(1-2\sin^2\theta) = 4x\sqrt{1-x^2}(1-2x^2)
$$

代入可得：

$$
\frac{1}{8}\arcsin x - \frac{1}{32}\cdot 4x(1-2x^2)\sqrt{1-x^2} + C = \frac{1}{8}\arcsin x - \frac{1}{8}x(1-2x^2)\sqrt{1-x^2} + C
$$

6. (12 分) 求定积分。

(a)

$$
\int_{\frac{1}{2}}^{1} \sqrt{x(1-x)}\,\mathrm{d}x
$$

法 1（几何法）：

令 $y=\sqrt{x(1-x)}$，则 $y^2=x-x^2$，配方得 $(x-\frac{1}{2})^2+y^2=(\frac{1}{2})^2$。

这是一个以 $(\frac{1}{2},0)$ 为圆心，半径为 $\frac{1}{2}$ 的圆。积分区间 $[\frac{1}{2},1]$ 对应于该圆在 x 轴上方的右半部分，即四分之一圆。

因此，该定积分的值就是此四分之一圆的面积：

$$
\text{面积} = \frac{1}{4}\pi r^2 = \frac{1}{4}\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{16}
$$

法 2（正常积分）：

对根号内的二次三项式进行配方：

$$
x(1-x) = x-x^2 = -(x^2-x) = -\left(x^2-x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2
$$

于是，原积分变为：

$$
\int_{\frac{1}{2}}^{1} \sqrt{\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}x
$$

令 $x-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\sin\theta$，则 $\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$。

同时需要更新积分上下限：

当 $x=\frac{1}{2}$ 时，$\frac{1}{2}\sin\theta=0$，所以 $\theta=0$。

当 $x=1$ 时，$\frac{1}{2}\sin\theta=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$，所以 $\sin\theta=1$，$\theta=\frac{\pi}{2}$。

将换元结果代入积分式：

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}\sin\theta\right)^2}\cdot\frac{1}{2}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{1}{4}(1-\sin^2\theta)}\cdot\frac{1}{2}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\cos\theta\cdot\frac{1}{2}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$$
$$= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta$$
$$= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos(2\theta)}{2}\mathrm{d}\theta$$
$$= \frac{1}{8}\left[\theta+\frac{1}{2}\sin(2\theta)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= \frac{1}{8}\left(\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\sin\pi\right)-\left(0+\frac{1}{2}\sin 0\right)\right)$$
$$= \frac{1}{8}\left(\frac{\pi}{2}+0-0\right)=\frac{\pi}{16}$$

(b)
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{\sin x+\cos x}\,\mathrm{d}x$$

利用定积分对称性。令 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{\sin x+\cos x}\,\mathrm{d}x$。

根据性质 $\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^a f(a-x)\,\mathrm{d}x$，令 $x=\frac{\pi}{2}-t$，则：

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(\frac{\pi}{2}-t)}{\sin(\frac{\pi}{2}-t)+\cos(\frac{\pi}{2}-t)}\,\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 t}{\cos t+\sin t}\,\mathrm{d}t$$

将两个 I 的表达式相加：

$$2I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x+\cos x}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x+\cos x}\,\mathrm{d}x$$

利用辅助角公式 $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})$：

$$2I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \csc(x+\frac{\pi}{4})\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\ln\left|\csc\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\cot\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\ln|\csc(\frac{3\pi}{4})-\cot(\frac{3\pi}{4})|-\ln|\csc(\frac{\pi}{4})-\cot(\frac{\pi}{4})|\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(\ln|\sqrt{2}-(-1)|-\ln|\sqrt{2}-1|)=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left((\sqrt{2}+1)^2\right)=\frac{2}{\sqrt{2}}\ln(\sqrt{2}+1)=\sqrt{2}\ln(\sqrt{2}+1)$$

因此，$I=\frac{\sqrt{2}}{2}\ln(\sqrt{2}+1)$。

7. (20 分) 设 D 是由抛物线 $y=2x^2$ 与直线 $y=8$ 所围成的有界区域，B 是由区域 D 绕 y 轴旋转一周所形成的旋转体。

首先，需要确定区域 D 的边界。通过联立方程 $y=2x^2$ 和 $y=8$，得到交点的横坐标：$x=\pm2$。因此，区域 D 由 $y=2x^2$ (下界) 和 $y=8$ (上界) 在 $x\in[-2,2]$ 的范围内围成。

(a) 求区域 D 的面积 A。

区域的面积可以通过对上下边界函数之差进行定积分来求得。

$$A=\int_{-2}^{2}(8-2x^2)\,\mathrm{d}x$$

由于被积函数 $8-2x^2$ 是一个偶函数，积分区间关于原点对称，可以简化计算：

$$\begin{aligned}A &= 2\int_0^2 (8-2x^2)\,\mathrm{d}x \\ &= 2\left[8x-\frac{2}{3}x^3\right]_0^2 \\ &= 2\left((16-\frac{2}{3}\cdot 8)-0\right) \\ &= 2\left(16-\frac{16}{3}\right) = 2\cdot\frac{32}{3} = \frac{64}{3}\end{aligned}$$

(b) 求旋转体 B 的体积 V。

由于是绕 y 轴旋转，将 x 表示为 y 的函数：$x^2=y/2$。旋转体的 y 值范围是从抛物线顶点 $y=0$ 到上界 $y=8$。在任意高度 y 处，旋转得到的圆盘半径为 $x=\sqrt{y/2}$。

$$\begin{aligned}V &= \int_0^8 \pi x^2\,\mathrm{d}y \\ &= \pi\int_0^8 \frac{y}{2}\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{\pi}{2}\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^8 \\ &= \frac{\pi}{4}(8^2-0^2) = \frac{64\pi}{4} = 16\pi\end{aligned}$$

(c) 求 B 的表面积 S。

旋转体 B 的表面由两部分构成：顶部的圆面和侧面的曲面。

顶面是在 $y=8$ 处的一个圆，其半径为 $x=2$。面积为 $S_{顶}=\pi(2^2)=4\pi$。

侧面是由抛物线 $y=2x^2$ 绕 y 轴旋转形成的曲面。其面积可由公式 $S_{侧}=\int 2\pi x\,\mathrm{d}s$ 计算，其中 $\mathrm{d}s=\sqrt{1+(y')^2}\,\mathrm{d}x$ 是弧长微元。

我们有 $y'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=4x$。由于对称性，我们计算右半边（$x\in[0,2]$）旋转形成的曲面面积即可。

$$\begin{aligned}S_{侧} &= \int_0^2 2\pi x\sqrt{1+(4x)^2}\,\mathrm{d}x \\ &= 2\pi\int_0^2 x\sqrt{1+16x^2}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

令 $u=1+16x^2$，则 $\mathrm{d}u=32x\,\mathrm{d}x$，所以 $x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{32}\mathrm{d}u$。积分限从 $x=0\to u=1$ 变为 $x=2\to u=65$ 。

$$\begin{aligned}S_{侧} &= 2\pi\int_1^{65}\sqrt{u}\cdot\frac{1}{32}\mathrm{d}u \\ &= \frac{\pi}{16}\left[\frac{2}{3}u^{3/2}\right]_1^{65} \\ &= \frac{\pi}{24}(65^{3/2}-1^{3/2}) = \frac{\pi}{24}(65\sqrt{65}-1)\end{aligned}$$

旋转体的总表面积是两部分之和：

$$S = S_{顶}+S_{侧} = 4\pi+\frac{\pi}{24}(65\sqrt{65}-1)$$

8. (10 分) 设函数 $f(x)=x^8-x^4-\cos x$，$x\in\mathbb{R}$。判断 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有多少个零点，给出证明。

首先，考察函数的奇偶性。

$$f(-x)=(-x)^8-(-x)^4-\cos(-x)=x^8-x^4-\cos x=f(x)$$

函数 $f(x)$ 是一个偶函数，其图像关于 y 轴对称。因此，我们只需研究 $x\ge 0$ 的情况，正半轴的零点个数将与负半轴的相同。

其次，考察几个特殊点的函数值。

当 $x=0$ 时，$f(0)=0-0-\cos(0)=-1$。

当 $x\to+\infty$ 时，x^8 项占主导地位，所以 $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$。

接着，我们分析函数在 $x\in[0,1]$ 区间内的符号。

对于任意 $x\in(0,1]$，有 $x^8<x^4$，所以 $x^8-x^4<0$。

同时，对于 $x\in[0,1]$，有 $x\in[0,1]\subset[0,\pi/2]$，所以 $\cos x>0$，即 $-\cos x<0$。

因此，对于所有 $x\in(0,1]$，我们有：

$$f(x)=(x^8-x^4)-\cos x<0$$

结合 $f(0)=-1$，可知函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上没有零点。

然后，我们分析函数在 $x\in(1,+\infty)$ 区间上的单调性。其导数为：

$$f'(x)=8x^7-4x^3+\sin x$$

当 $x>1$ 时，我们可以对 $f'(x)$ 进行放缩：

$$f'(x)=4x^3(2x^4-1)+\sin x$$

因为 $x>1$，所以 $x^3>1$ 且 $2x^4-1>2(1)^4-1=1$。同时，$\sin x\ge -1$。

所以，$f'(x)>4(1)(1)+(-1)=3>0$。

这意味着函数 $f(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上是严格单调递增的。

最后，综合以上分析：

(a) 在区间 $[0,1]$ 上，$f(x)\le -\cos(1)<0$，没有零点。

(b) 在区间 $(1,+\infty)$ 上，$f(x)$ 严格单调递增。又因为 $f(1)=1-1-\cos(1)=-\cos(1)<0$ 且 $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$，根据介值定理，函数 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上必有且仅有一个零点。

综上所述，函数 $f(x)$ 在 $x\ge 0$ 的范围内有唯一一个零点。由于 $f(x)$ 是偶函数，它在 $x<0$ 的范围内也相应地有唯一一个零点。

因此，$f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上总共有 2 个零点。