北京大学 22/23 学年第 1 学期
高数 B 期末试题答案

by Lg_Cat / Arthals

1. 求极限

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to0}\frac{\sin(x-\int_0^x\sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t)}{x^3} \\
=&\lim_{x\to0}\frac{x-\int_0^x\sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t}{x^3} && (\text{当 } u\to0\text{ 时, }\sin u\sim u) \\
=&\lim_{x\to0}\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x-\int_0^x\sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t)}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^3)} && (\text{洛必达法则, }\frac{0}{0}\text{ 型}) \\
=&\lim_{x\to0}\frac{1-\sqrt{1+x^2}}{3x^2} && (\text{应用牛顿-莱布尼茨公式}) \\
=&\lim_{x\to0}\frac{(1-\sqrt{1+x^2})(1+\sqrt{1+x^2})}{3x^2(1+\sqrt{1+x^2})} && (\text{分子有理化}) \\
=&\lim_{x\to0}\frac{1-(1+x^2)}{3x^2(1+\sqrt{1+x^2})} \\
=&\lim_{x\to0}\frac{-x^2}{3x^2(1+\sqrt{1+x^2})} \\
=&\lim_{x\to0}\frac{-1}{3(1+\sqrt{1+x^2})} && (\text{消去公因子 } x^2) \\
=&\frac{-1}{3(1+\sqrt{1+0^2})} \\
=&-\frac{1}{6}
\end{aligned}
$$

2. 求函数的最长严格单调区间

   对于函数 $f(x)=x^3-6x^2+9x-1$，$x\in[0,7]$。

   其导数为：

$$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$$

   令 $f'(x)=0$ 得驻点 $x=1,x=3$。

   在定义域 $[0,7]$ 内的严格单调区间为：

   - $[0,1]$：$f'(x)>0$，递增，长度为 1。
   - $[1,3]$：$f'(x)<0$，递减，长度为 2。
   - $[3,7]$：$f'(x)>0$，递增，长度为 4。

   因此，长度为最大的严格单调区间是 $[3,7]$。

3. 解析几何

(a) 求三角形 $\triangle ABC$ 的面积

首先，求平面 $2x - y + 3z = 6$ 与坐标轴的交点：

i. x 轴（$y = 0, z = 0$）：$2x = 6 \implies x = 3$。交点 $A(3, 0, 0)$。

ii. y 轴（$x = 0, z = 0$）：$-y = 6 \implies y = -6$。交点 $B(0, -6, 0)$。

iii. z 轴（$x = 0, y = 0$）：$3z = 6 \implies z = 2$。交点 $C(0, 0, 2)$。

构造向量 $\vec{AB}$ 和 $\vec{AC}$：

$$\vec{AB} = B - A = (-3, -6, 0)$$
$$\vec{AC} = C - A = (-3, 0, 2)$$

三角形面积 $S_{\triangle ABC}$ 是由这两个向量构成的平行四边形面积的一半（叉乘自带一个 $\sin$）：

$$\begin{aligned}
S_{\triangle ABC} &= \frac{1}{2}|\vec{AB} \times \vec{AC}| \\
&= \frac{1}{2}|(-3, -6, 0) \times (-3, 0, 2)| \\
&= \frac{1}{2}|(-12, 6, -18)| \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{(-12)^2 + 6^2 + (-18)^2} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{504} = \frac{1}{2}\sqrt{36 \times 14} = 3\sqrt{14}
\end{aligned}$$

(b) 求切点坐标

以原点为中心的球面与平面 T 相切，切点 $P(x_0, y_0, z_0)$ 到原点的连线 $\vec{OP}$ 必垂直于平面 T。

因此，向量 $\vec{OP}$ 与平面 T 的法向量 $\vec{n} = (2, -1, 3)$ 共线。

设 $\vec{OP} = t\vec{n}$，即 $(x_0, y_0, z_0) = (2t, -t, 3t)$。

因为切点 P 在平面 T 上，所以其坐标满足平面方程：

$$2(2t) - (-t) + 3(3t) = 6$$
$$14t = 6 \implies t = \frac{3}{7}$$

将 t 代回，得到切点坐标：

$$P\left(\frac{6}{7}, -\frac{3}{7}, \frac{9}{7}\right)$$

4. 多元函数微分

函数 $z(x, y)$ 在某点下降最快的方向是其负梯度方向 $-\nabla z$。

首先，确定在点 $(x, y) = (0, 2)$ 处的 z 值。将 $x = 0, y = 2$ 代入方程 $z^3 + ze^x + y = 0$：

$$z^3 + ze^0 + 2 = 0 \implies z^3 + z + 2 = 0 \implies (z + 1)(z^2 - z + 2) = 0$$

由此可知 $z = -1$ 是唯一一个实根。

接下来，对隐函数方程两边分别关于 x 和 y 求偏导：

对 x 求导:

$$3z^2\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial x}e^x+ze^x=0 \implies \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{ze^x}{3z^2+e^x}$$

对 y 求导:

$$3z^2\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial y}e^x+1=0 \implies \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{1}{3z^2+e^x}$$

将点 $(x,y,z)=(0,2,-1)$ 的值代入，计算偏导数:

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,2)}&=-\frac{(-1)e^0}{3(-1)^2+e^0}=\frac{1}{4}\\ \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,2)}&=-\frac{1}{3(-1)^2+e^0}=-\frac{1}{4}\end{aligned}$$

在点 $(0,2)$ 处的梯度为 $\nabla z(0,2)=\left(\frac{1}{4},-\frac{1}{4}\right)$。

下降最快的方向为负梯度方向:

$$\vec{v}=-\nabla z(0,2)=\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$$

该方向上的单位向量为:

$$\vec{u}=\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}=\frac{\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)}{\sqrt{(-\frac{1}{4})^2+(\frac{1}{4})^2}}=\frac{\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)}{\frac{\sqrt{2}}{4}}=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

5. 求二元函数 $f(x,y)=x^y$ 在点 $(1,1)$ 的二阶泰勒多项式。

   计算函数至二阶的各偏导数:

$$\begin{aligned}f_x&=yx^{y-1} & f_y&=x^y\ln x\\ f_{xx}&=y(y-1)x^{y-2} & f_{yy}&=x^y(\ln x)^2\\ f_{xy}&=x^{y-1}+yx^{y-1}\ln x\end{aligned}$$

   计算这些导数在点 $(1,1)$ 的值:

$$\begin{aligned}f(1,1)&=1\\ f_x(1,1)&=1 & f_y(1,1)&=0\\ f_{xx}(1,1)&=0 & f_{yy}(1,1)&=0\\ f_{xy}(1,1)&=1\end{aligned}$$

   二阶泰勒多项式 $P_2(x,y)$ 的公式为:

$$\begin{aligned}P_2(x,y)=&f(1,1)+f_x(1,1)(x-1)+f_y(1,1)(y-1)\\ &+\frac{1}{2!}\left[f_{xx}(1,1)(x-1)^2+2f_{xy}(1,1)(x-1)(y-1)+f_{yy}(1,1)(y-1)^2\right]\end{aligned}$$

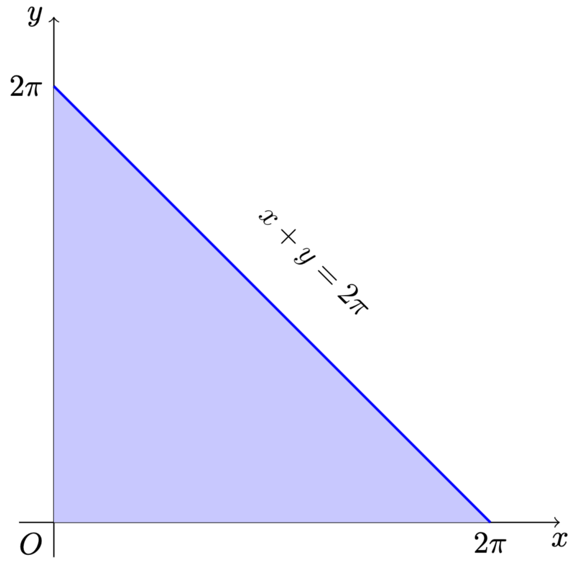
   代入计算出的值:

$$
\begin{aligned}
P_2(x,y) &= 1 + 1(x-1) + 0(y-1) + \frac{1}{2}\left[0\cdot(x-1)^2 + 2\cdot 1\cdot(x-1)(y-1) + 0\cdot(y-1)^2\right] \\
&= 1 + (x-1) + (x-1)(y-1) \\
&= 1 + x - 1 + xy - x - y + 1 \\
&= xy - y + 1
\end{aligned}
$$

所以，所求的二阶泰勒多项式为 $P_2(x,y) = xy - y + 1$。

6. 设 D 是由直线 $x+y=2\pi$、x 轴和 y 轴所围成的有界闭区域。求 D 上的二元函数 $f(x,y) = \sin x + \sin y - \sin(x+y)$ 达到最大值的 D 中所有点。

区域 D 形如：



首先，我们分析函数在区域 D 的边界上的值。

- 当 $x=0$ 时，$f(0,y) = \sin 0 + \sin y - \sin y = 0$。
- 当 $y=0$ 时，$f(x,0) = \sin x + \sin 0 - \sin x = 0$。
- 当 $x+y=2\pi$ 时，$f(x,2\pi-x) = \sin x + \sin(2\pi - x) - \sin(2\pi) = \sin x - \sin x - 0 = 0$。

所以，函数在整个边界上恒为 0。

接着，我们寻找 D 内部可能的极值点，即驻点。为此，我们需要计算 $f(x,y)$ 的偏导数，并令它们等于零。

$$
\frac{\partial f}{\partial x} = \cos x - \cos(x+y)
$$

$$
\frac{\partial f}{\partial y} = \cos y - \cos(x+y)
$$

令偏导数等于零，我们得到方程组：

$$
\begin{cases}
\cos x - \cos(x+y) = 0 \\
\cos y - \cos(x+y) = 0
\end{cases}
$$

从这个方程组，我们可以立即得出 $\cos x = \cos y = \cos(x+y)$。

我们先来解 $\cos x = \cos y$。在区域 D 的内部，我们有 $x>0, y>0, x+y<2\pi$。
在区间 $(0,2\pi)$ 内，$\cos x = \cos y$ 意味着 $x=y$ 或者 $x = 2\pi - y$。

(a) $x = y$

将 $x = y$ 代入方程 $\cos x = \cos(x+y)$ 中，得到：

$$\cos x = \cos(2x)$$
$$\cos x = 2\cos^2 x - 1$$
$$2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$$
$$(2\cos x + 1)(\cos x - 1) = 0$$

这给出了两种可能：

i. $\cos x = 1$。在 $(0, 2\pi)$ 区间内，没有解。如果考虑 $x = 0$，则 $y = 0$，这是边界点 $(0,0)$，不属于内部。

ii. $\cos x = -\frac{1}{2}$。在 $(0, 2\pi)$ 区间内，解为 $x = \frac{2\pi}{3}$ 或 $x = \frac{4\pi}{3}$。

   i. 如果 $x = \frac{2\pi}{3}$，因为 $x = y$，所以 $y = \frac{2\pi}{3}$。我们检查这个点 $(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3})$ 是否在 D 的内部。显然 $x > 0, y > 0$，并且 $x + y = \frac{2\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} < 2\pi$。所以，$(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3})$ 是一个内部驻点。

   ii. 如果 $x = \frac{4\pi}{3}$，则 $y = \frac{4\pi}{3}$。此时 $x + y = \frac{8\pi}{3} > 2\pi$，这个点不在区域 D 内。

因此，我们在 D 的内部找到了唯一一个驻点：$(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3})$。

(b) $x = 2\pi - y$

这种情况即 $x + y = 2\pi$，这正好是区域 D 的一条边界，前文已经讨论。

现在，我们计算内部驻点处的函数值：

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right) &= \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) \\
&= \sqrt{3} - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\
&= \frac{3\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}$$

由于 $\frac{3\sqrt{3}}{2} > 0$，且边界值均为 0，所以该点为最大值点。

综上，函数 $f(x,y) = \sin x + \sin y - \sin(x+y)$ 在区域 D 上的最大值为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$，并且这个最大值仅在一点达到。

达到最大值的点是：

$$\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$$

7. (a) 偏导数的记号 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 不仅表示对第一个变量求导，还隐含了“保持其他变量不变”这一条件。当自变量集合改变时，即使新旧第一个变量相同（如 $x = t$），但需要“保持不变”的“其他变量”却不同了（y vs. u），因此求导结果通常也不同。

   设 $z(x,y) = x + \frac{x}{y}$。

   作变量代换 $t = x, u = \frac{x}{y}$，则 z 也可表示为 $z(t,u) = t + u$。

在 (x,y) 坐标系下，保持 y 不变对 x 求导：

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x + \frac{x}{y}\right) = 1 + \frac{1}{y}$$

在 (t,u) 坐标系下，保持 u 不变对 t 求导：

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(t+u) = 1$$

显然，$1 + \frac{1}{y} \neq 1$ (除非 $y \to \infty$)，故 $\frac{\partial z}{\partial x} \neq \frac{\partial z}{\partial t}$。

(b) 我们的目标是证明 $\frac{\partial W}{\partial t} = 0$。

首先，由 $z = \frac{t}{1+tW}$，可反解出 W：

$$1 + tW = \frac{t}{z} \implies W = \frac{1}{z} - \frac{1}{t}$$

将 W 对 t 求偏导：

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{t}\right) = -\frac{1}{z^2}\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{1}{t^2} = \frac{t^2 - z^2\frac{\partial z}{\partial t}}{t^2 z^2}$$

接下来，我们利用链式法则计算 $\frac{\partial z}{\partial t}$。

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

根据变量代换关系 $x = t$ 和 $y = \frac{t}{1+tu}$，我们有：

$$\frac{\partial x}{\partial t} = 1, \quad \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{(1+tu) - t(u)}{(1+tu)^2} = \frac{1}{(1+tu)^2}$$

代入链式法则表达式：

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{(1+tu)^2}\frac{\partial z}{\partial y}$$

现在，将原方程 $x^2\frac{\partial z}{\partial x} + y^2\frac{\partial z}{\partial y} = z^2$ 用新变量 t, u 表示：

$$t^2\frac{\partial z}{\partial x} + \left(\frac{t}{1+tu}\right)^2\frac{\partial z}{\partial y} = z^2$$

$$t^2\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{t^2}{(1+tu)^2}\frac{\partial z}{\partial y} = z^2$$

提取公因式 t^2：

$$t^2\left(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{(1+tu)^2}\frac{\partial z}{\partial y}\right) = z^2$$

注意到括号内的表达式正是我们求出的 $\frac{\partial z}{\partial t}$，所以：

$$t^2\frac{\partial z}{\partial t} = z^2$$

最后，将此结果代入我们最初得到的 $\frac{\partial W}{\partial t}$ 的表达式中：

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\frac{1}{z^2}\left(\frac{z^2}{t^2}\right) + \frac{1}{t^2} = -\frac{1}{t^2} + \frac{1}{t^2} = 0$$

证明完毕。

8. (a) 因为

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t + C$$

所以，原式等价于证明：

$$2\arcsin x = \arcsin(2x\sqrt{1-x^2})$$

令 $\theta = \arcsin x$，则 $x = \sin\theta$。由于 $x \in \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$，我们有 $\theta \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$。
代入上式右边：

$$\arcsin(2\sin\theta\sqrt{1-\sin^2\theta}) = \arcsin(2\sin\theta\cos\theta) = \arcsin(\sin(2\theta))$$

因为 $\theta \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$，所以 $2\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$。在此区间内，$\arcsin(\sin(2\theta)) = 2\theta$。
而 $2\theta = 2\arcsin x$，所以等式成立。

(b) 注意到等式两边都是关于 x 的奇函数，由对称性，只需证明 $x \in [0, \frac{1}{\sqrt[4]{6}})$ 时等式成立。

对右侧积分进行变量代换。令

$$t = \frac{2u\sqrt{1-u^4}}{1+u^4}$$

当 $u = 0$ 时，$t = 0$。当 $u = x$ 时，$t = \frac{2x\sqrt{1-x^4}}{1+x^4}$。
对 t 求微分（此步计算较为繁琐）：

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u} = \frac{2(1-6u^4+u^8)}{(1+u^4)^2\sqrt{1-u^4}}$$

处理被积函数中的根式：

$$\begin{aligned}
\sqrt{1-t^4} &= \sqrt{1-\left(\frac{2u\sqrt{1-u^4}}{1+u^4}\right)^4} = \sqrt{\frac{(1+u^4)^4 - 16u^4(1-u^4)^2}{(1+u^4)^4}} \\
&= \frac{\sqrt{(1+4u^4+6u^8+4u^{12}+u^{16}) - 16u^4(1-2u^4+u^8)}}{(1+u^4)^2} \\
&= \frac{\sqrt{1-12u^4+38u^8-12u^{12}+u^{16}}}{(1+u^4)^2} \\
&= \frac{\sqrt{(1-6u^4+u^8)^2}}{(1+u^4)^2}
\end{aligned}$$

因为 $u \in [0, x)$ 且 $x < \frac{1}{\sqrt[4]{6}}$，所以 $u^4 < \frac{1}{6}$。
令 $y = u^4$，则 $y^2 - 6y + 1$ 在 $y < 3 - 2\sqrt{2}$ 时为正，而 $\frac{1}{6} < 3 - 2\sqrt{2}$，故 $1 - 6u^4 + u^8 > 0$

。

因此，$\sqrt{1-t^4} = \frac{1-6u^4+u^8}{(1+u^4)^2}$。

将结果代入右侧积分：

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{2x\sqrt{1-x^4}}{1+x^4}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^4}} &= \int_0^x \frac{(1+u^4)^2}{1-6u^4+u^8} \cdot \frac{2(1-6u^4+u^8)}{(1+u^4)^2\sqrt{1-u^4}}\,\mathrm{d}u \\ &= \int_0^x \frac{2}{\sqrt{1-u^4}}\,\mathrm{d}u \\ &= 2\int_0^x \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^4}}\end{aligned}$$

将右式中 u 换成 t，即原式左侧，得证。

9. 首先，我们将待证明的等式两边同时除以 $(A+B)^n$。由于 A, B 均为正数，$(A+B)^n \neq 0$。原等式等价于：

$$1 = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{P'(\theta_k)} \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{A^{n-k}B^k}{(A+B)^n}$$

我们定义一组权重 W_k：

$$W_k = \binom{n}{k} \left(\frac{A}{A+B}\right)^{n-k} \left(\frac{B}{A+B}\right)^k, \quad k = 0, 1, \ldots, n$$

根据二项式定理，这组权重的和为：

$$\sum_{k=0}^{n} W_k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{A}{A+B}\right)^{n-k} \left(\frac{B}{A+B}\right)^k = \left(\frac{A}{A+B} + \frac{B}{A+B}\right)^n = 1^n = 1$$

由于 $A, B > 0$，显然每个 $W_k > 0$。

现在，问题转化为证明存在 $0 < \theta_0 < \theta_1 < \cdots < \theta_n < 1$，使得：

$$1 = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{P'(\theta_k)} W_k$$

这里的关键一步是构造一个辅助点列。我们定义 $n+2$ 个值：

$$y_0 = 0, \quad y_j = \sum_{k=0}^{j-1} W_k \quad (j = 1, 2, \ldots, n+1)$$

这样我们得到 $y_0 = 0$，$y_1 = W_0$，$y_2 = W_0 + W_1$，…，$y_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} W_k = 1$。

由于每个 W_k 都为正，我们有严格递增的序列：

$$0 = y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_{n+1} = 1$$

根据题设，$P(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续且 $P'(x) > 0$，这意味着 $P(x)$ 是从 $P(0) = 0$到 $P(1) = 1$ 的严格递增函数。根据连续函数介值定理，对于上述序列中的每一个 $y_j \in [0,1]$，都存在唯一一个 $x_j \in [0,1]$ 使得 $P(x_j) = y_j$。

由于 y_j 序列严格递增且 $P(x)$ 函数严格递增，对应的 x_j 序列也必然严格递增：

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n+1} = 1$$

现在，我们考虑一个恒等式：

$$1 = x_{n+1} - x_0 = \sum_{k=0}^{n} (x_{k+1} - x_k)$$

我们将每一项进行改写：

$$1 = \sum_{k=0}^{n} \frac{x_{k+1} - x_k}{P(x_{k+1}) - P(x_k)} \cdot (P(x_{k+1}) - P(x_k))$$

根据我们的构造，$P(x_{k+1}) - P(x_k) = y_{k+1} - y_k = W_k$。代入上式得：

$$1 = \sum_{k=0}^{n} \frac{x_{k+1} - x_k}{P(x_{k+1}) - P(x_k)} \cdot W_k$$

对于上式中的每一项 $\frac{x_{k+1}-x_k}{P(x_{k+1})-P(x_k)}$，我们可以在区间 $[x_k, x_{k+1}]$ 上应用拉格朗日中值定理。因为 $P(x)$ 在 $(0,1)$ 内可导，所以它在每个子区间 $[x_k, x_{k+1}]$ 上连续，在 (x_k, x_{k+1}) 内可导。

因此，存在一点 $\theta_k \in (x_k, x_{k+1})$ 使得：

$$P'(\theta_k) = \frac{P(x_{k+1}) - P(x_k)}{x_{k+1} - x_k}$$

取其倒数，我们得到：

$$\frac{1}{P'(\theta_k)} = \frac{x_{k+1} - x_k}{P(x_{k+1}) - P(x_k)}$$

将此结果代入求和式中，即得：

$$1 = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{P'(\theta_k)} W_k$$

这就证明了原等式。

最后，我们验证 θ_k 的位置关系。由于 $\theta_k \in (x_k, x_{k+1})$ 且 $x_0 < x_1 < \cdots < x_{n+1}$，我们有：

$$0 = x_0 < \theta_0 < x_1 < \theta_1 < x_2 < \cdots < x_n < \theta_n < x_{n+1} = 1$$

这直接导出了 $0 < \theta_0 < \theta_1 < \cdots < \theta_n < 1$。

证明完毕。