北京大学 18/19 学年第 2 学期

高数 B 期中试题

2019.04.23

1. (13 分) 计算重积分

$$I=\iiint_{\Omega}(1+xy+yz+zx)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

其中 Ω 为 $z^2=x^2+y^2(z\geq 0)$ 与 $x^2+y^2+z^2=3$ 所围区域。

2. (13 分) 计算曲线积分

$$I=\int_l(1+y^2)\,\mathrm{d}s$$

其中 l 为摆线段：$x=a(t-\sin t)$，$y=a(1-\cos t)$，$0\leq t\leq 2\pi$。

3. (13 分) 计算曲面积分

$$I=\iint_{(S,\hat{n})}xyz\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

S 为曲面 $\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2=1,x\geq 0,y\geq 0\}$，法向量 $\hat{n}$ 为其内侧方向。

4. (13 分) 计算曲面积分

$$I=\iint_S(x+y)^2\,\mathrm{d}\sigma_{xy}$$

其中 S 代表曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与平面 $z=1$ 所围区域表面。

5. (13 分) 计算曲面积分

$$I=\iint_{(S,\hat{n})}(y^5-z^5)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z^5-x^5)\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x^5-y^5)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

S 为半球面 $\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2=1,z\geq 0\}$，法向量 $\hat{n}$ 为其内侧方向，并证明你的结论。

6. (13 分) 设 $([0,1],l)$ 是 xy 平面上的一条 C^1 简单闭曲线，不经过 xy 平面上的某一给定的点 P。令 $\hat{n}$ 为此曲线的满足条件 $\hat{n}\times\hat{t}=\hat{k}$ 的单位法向量场，这里 $\hat{t}$ 表示此曲线的切向量场。考虑曲线积分：

$$I=\oint_l\frac{\cos\alpha}{|PM|}\,\mathrm{d}s$$

其中，$|PM|$ 表示从 P 点到曲线 $([0,1],l)$ 上一点 M 的距离，而 α 表示向量 $\vec{PM}$ 和 $\hat{n}$ 的夹角。

   (a) 求曲线 $([0,1],l)$ 上一个向量场 $\vec{f}$，使得

$$I=\oint_l\vec{f}\cdot\mathrm{d}\vec{s}$$

   (b) 设 $P=(1,0)$，而 $l(t)=(2\cos 2\pi t,\sin 2\pi t)(t\in[0,1])$，求 I 的值。

7. (10 分) 设 $D=[0,1]\times[0,1]$，对 $C[0,1]$ 中任一函数定义：

$$I(f)=\iint_D 2^{f(x)-f(y)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

请证明 $\exists g \text{ s.t. } I(g) \leq I(f), \forall f \in C[0,1]$，并求出一个函数 g。