

北京大学 25/26 学年第 1 学期

高数 B 期中试题

1. (10 分) 求序列极限。

(a)
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3^{2n} + 4^n}$$

(b)
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{(n+k)^2}{n^3}$$

2. (10 分) 求函数极限。

(a)
$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - 3}{\sqrt{x-2} - \sqrt{2}}$$

(b)
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x})$$

3. (10 分) 求导数。

(a) 求 $(x^{x^a})'$, $x > 0$, 其中 $a > 0$ 是常数。

(b) 求

$$\frac{d}{dx} \int_{\sin x}^{\tan x} \sqrt{1+t^2} dt$$

4. (10 分) 求多阶导数。

(a) 设函数 $y = y(x)$ 由参数方程

$$\begin{cases} x = R(t - \sin t) \\ y = R(1 - \cos t) \end{cases}, \quad t \in (0, 2\pi)$$

确定, 其中 $R > 0$ 是常数。求 $y'(x)$, $y''(x)$ 。

(b) 设 $f(x) = x^2 e^{-x^2}$ 。求 $f^{(n)}(x)$, $n = 1, 2, 3$ 。

5. (18 分) 求不定积分。

(a)
$$\int x \ln \sqrt{1+x^2} dx$$

(b)
$$\int \frac{x^2 + 2x + 3}{(x+2)^2(x+3)^2} dx$$

(c)
$$\int x^2 \sqrt{1-x^2} dx$$

6. (12 分) 求定积分。

(a)
$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{x(1-x)} dx$$

(b)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{\sin x + \cos x} dx$$

7. (20 分) 设 D 是由抛物线 $y = 2x^2$ 与直线 $y = 8$ 所围成的有界区域, B 是由区域 D 绕 y 轴旋转一周所形成的旋转体。

(a) 求区域 D 的面积 A 。

(b) 求旋转体 B 的体积 V 。

(c) 求 B 的表面积 S 。

8. (10 分) 设函数 $f(x) = x^8 - x^4 - \cos x$, $x \in \mathbb{R}$ 。判断 $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上有多少个零点, 给出证明。