北京大学 20/21 学年第 1 学期

高数 B 期中试题答案

by 佚名 / Arthals。

1. 求极限。

(a)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right) &= \lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+x+1}-x)(\sqrt{x^2+x+1}+x)}{\sqrt{x^2+x+1}+x} \\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x+1-x^2}{\sqrt{x^2+x+1}+x} \\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x} \\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1} \\
&= \frac{1+0}{\sqrt{1+0+0}+1} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

(b) 此为黎曼和求极限，可转化为定积分求解。

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2} &= \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2(1+\frac{k^2}{n^2})} \\
&= \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\frac{1}{1+(\frac{k}{n})^2} \\
&= \int_0^1\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \arctan x\big|_0^1 \\
&= \arctan 1-\arctan 0 \\
&= \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

(c) 利用等价无穷小 $e^u-1\sim u\ (u\to 0)$ 来求解。

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n^2]{n}-1) &= \lim_{n\to\infty} n(n^{\frac{1}{n^2}}-1) \\
&= \lim_{n\to\infty} n(e^{\frac{1}{n^2}\ln n}-1)
\end{aligned}$$

令 $u=\frac{\ln n}{n^2}$，当 $n\to\infty$ 时，$u\to 0$。因此，我们可以使用等价无穷小替换：

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n\to\infty} n\cdot\frac{\ln n}{n^2} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n} \\
&= 0
\end{aligned}$$

(d) 利用重要极限 $\lim_{u\to\infty}(1+\frac{1}{u})^u=e$ 进行求解。

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{(x+1)^2}{x}}&=\lim_{x\to 0}\left[(1+2x)^{\frac{1}{2x}}\right]^{2x\cdot\frac{(x+1)^2}{x}}\\&=\lim_{x\to 0}e^{2(x+1)^2}\\&=e^{2(0+1)^2}\\&=e^2\end{aligned}$$

2. (a) 使用分部积分法，令 $u=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$，则 $\mathrm{d}u=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x$

$$\begin{aligned}\int_0^1\ln(x+\sqrt{x^2+1})\,\mathrm{d}x&=\left[x\ln(x+\sqrt{x^2+1})\right]_0^1-\int_0^1\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x\\&=\ln(1+\sqrt{2})-\left[\sqrt{x^2+1}\right]_0^1\\&=\ln(1+\sqrt{2})-(\sqrt{2}-1)\\&=\ln(1+\sqrt{2})-\sqrt{2}+1\end{aligned}$$

（或者也可以直接用双曲三角函数换元立得）

(b) 将被积函数进行部分分式分解，设

$$\frac{4x^3+2x^2+3x+1}{x(x+1)(x^2+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+1}$$

通分后比较分子系数可得方程组：

$$\begin{cases}A+B+C=4\\A+C+D=2\\A+B+D=3\\A=1\end{cases}$$

解得：

$$A=1,\quad B=2,\quad C=1,\quad D=0$$

因此原积分为：

$$\int_0^1\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{x+1}+\frac{x}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x$$

由于 $\ln|x|$ 在 $x=0$ 处是瑕点（下册广义积分内容），我们取极限：

$$\begin{aligned}&=\lim_{a\to 0^+}\left[\ln x+2\ln(x+1)+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right]_a^1\\&=\left(\ln 1+2\ln 2+\frac{1}{2}\ln 2\right)-\lim_{a\to 0^+}\left(\ln a+2\ln(a+1)+\frac{1}{2}\ln(a^2+1)\right)\\&=\left(\frac{5}{2}\ln 2\right)-(-\infty)\\&=\infty\end{aligned}$$

故原式积分不存在（积分发散）。

(c) 令 $x=\sin\theta$，则 $\mathrm{d}x=\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$。

当 $x=0$ 时，$\theta=0$；当 $x=1$ 时，$\theta=\frac{\pi}{2}$。

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^4\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\pi/2}\sin^4\theta\sqrt{1-\sin^2\theta}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{\pi/2}\sin^4\theta\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta\end{aligned}$$

利用 Wallis 公式，即对于正整数 n：

$$\int_0^{\pi/2}\sin^n x\,\mathrm{d}x=\int_0^{\pi/2}\cos^n x\,\mathrm{d}x=\begin{cases}\frac{(n-1)!!}{n!!}\cdot\frac{\pi}{2} & \text{当 } n \text{ 为正偶数}\\ \frac{(n-1)!!}{n!!} & \text{当 } n \text{ 为正奇数}\end{cases}$$

所以：

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2}\sin^4\theta\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta &= \int_0^{\pi/2}\sin^4\theta(1-\sin^2\theta)\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{\pi/2}\sin^4\theta\,\mathrm{d}\theta-\int_0^{\pi/2}\sin^6\theta\,\mathrm{d}\theta \\ &= \left(\frac{3!!}{4!!}\cdot\frac{\pi}{2}\right)-\left(\frac{5!!}{6!!}\cdot\frac{\pi}{2}\right) \\ &= \left(\frac{3}{8}\cdot\frac{\pi}{2}\right)-\left(\frac{15}{48}\cdot\frac{\pi}{2}\right) \\ &= \frac{\pi}{32}\end{aligned}$$

(d) 考察被积函数的奇偶性。

令 $g(x)=x^4+2x^2+1=(x^2+1)^2$。这是一个偶函数，因为

$$g(-x)=((-x)^2+1)^2=(x^2+1)^2=g(x)$$

令 $h(x)=\sin^3 x$。这是一个奇函数，因为

$$h(-x)=(\sin(-x))^3=(-\sin x)^3=-\sin^3 x=-h(x)$$

被积函数 $f(x)=g(x)h(x)$ 是一个偶函数与一个奇函数的乘积，因此是奇函数。

对于定义在对称区间 $[-a,a]$ 上的任何奇函数 $f(x)$，其定积分为零。

所以：

$$\int_{-1}^{1}(x^4+2x^2+1)\sin^3 x\,\mathrm{d}x=0$$

3. 我们需要证明由 $x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+f(x_n))$ 定义的序列 $\{x_n\}$ 收敛。我们将使用“单调有界数列必收敛”这一定理（这一定理的证明是高等数学 A / 数学分析的内容，不需要掌握）。

(a) 有界性证明

我们用数学归纳法证明对任意 $n\in\mathbb{N}^+$, $x_n\in[a,b]$。

基础步骤：根据题意，$x_1\in[a,b]$。

归纳步骤：假设 $x_n\in[a,b]$。因为函数 f 的值域是 $[a,b]$，所以 $f(x_n)\in[a,b]$。故显然

$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + f(x_n))$ 也必然在该区间内。即 $a \le x_{n+1} \le b$。

因此，序列 $\{x_n\}$ 有界。

(b) 单调性分析

考察序列相邻两项的差：

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2}(x_n + f(x_n)) - x_n = \frac{1}{2}(f(x_n) - x_n)$$

序列的单调性取决于 $f(x_n) - x_n$ 的符号。

我们分情况讨论：

i. 如果存在某一项 x_k 使得 $f(x_k) = x_k$（即 x_k 是 f 的不动点），则 $x_{k+1} = \frac{1}{2}(x_k + f(x_k)) = x_k$。依此类推，$x_n = x_k$ 对所有 $n \ge k$ 成立。此时序列为常数列，显然收敛于 x_k。

ii. 假设对任意 n, $f(x_n) \neq x_n$。

不妨设 $f(x_1) > x_1$，对于 $f(x_1) < x_1$ 的情况，类似可证。

在这种情况下，$x_2 - x_1 = \frac{1}{2}(f(x_1) - x_1) > 0$，所以 $x_2 > x_1$。

我们将证明整个序列是非递减的，即对于所有 $n \ge 1$，都有 $x_{n+1} \ge x_n$。

我们使用数学归纳法：

i. 基础情况：$n = 1$ 时，$x_2 > x_1$ 已知。

ii. 归纳假设：假设对于某个 $k \ge 1$，$x_{k+1} \ge x_k$ 成立。

iii. 归纳步骤：我们需要证明 $x_{k+2} \ge x_{k+1}$。

这等价于证明 $f(x_{k+1}) - x_{k+1} \ge 0$。

我们利用函数的非扩张性条件 $|f(x) - f(y)| \le |x - y|$。令 $x = x_{k+1}, y = x_k$。

因为 $x_{k+1} \ge x_k$，所以 $|x_{k+1} - x_k| = x_{k+1} - x_k$。

于是我们有：

$$|f(x_{k+1}) - f(x_k)| \le x_{k+1} - x_k$$

这可以写成：

$$-(x_{k+1} - x_k) \le f(x_{k+1}) - f(x_k) \le x_{k+1} - x_k$$

我们关注左边的不等式：

$$f(x_{k+1}) \ge f(x_k) - (x_{k+1} - x_k)$$

现在我们来考察 $f(x_{k+1}) - x_{k+1}$：

$$\begin{aligned} f(x_{k+1}) - x_{k+1} &\ge [f(x_k) - (x_{k+1} - x_k)] - x_{k+1} \\ &= f(x_k) + x_k - 2x_{k+1} \end{aligned}$$

将递推公式 $x_{k+1} = \frac{1}{2}(x_k + f(x_k))$ 代入上式，我们得到：

$$
\begin{aligned}
f(x_{k+1})-x_{k+1} &\geq f(x_k)+x_k-2\left(\frac{1}{2}(x_k+f(x_k))\right) \\
&= f(x_k)+x_k-(x_k+f(x_k)) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

这就证明了 $f(x_{k+1})-x_{k+1} \geq 0$。因此，$x_{k+2}-x_{k+1}=\frac{1}{2}(f(x_{k+1})-x_{k+1}) \geq 0$ ，即 $x_{k+2} \geq x_{k+1}$。

所以，如果 $f(x_1)>x_1$，序列 $\{x_n\}$ 是一个非递减序列。

综上所述，如果对于任意 n, $f(x_n) \neq x_n$，那么序列 $\{x_n\}$ 总是单调的。

我们在第一步证明了序列 $\{x_n\}$ 是有界的（总是在 $[a,b]$ 区间内）。

我们在第二步证明了序列 $\{x_n\}$ 是单调的（非递增、非递减或常数）。

根据单调有界数列必收敛定理，我们得出结论：序列 $\{x_n\}$ 存在极限。

证明完毕。

4. (a) 这是一个通过建立微分方程和使用莱布尼茨公式求解高阶导数的问题。

首先求一阶、二阶导数：

$$
y'=2(\arcsin x)\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}
$$

$$
y''=2\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\arcsin x\cdot\frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}\right)=\frac{2}{1-x^2}+\frac{x}{1-x^2}y'
$$

整理得：

$$
(1-x^2)y''=2+xy'
$$

即

$$
(1-x^2)y''-xy'-2=0
$$

在 $x=0$ 处，我们有：

$$
\begin{cases}
y(0)=(\arcsin 0)^2=0 \\
y'(0)=2(\arcsin 0)\cdot 1=0
\end{cases}
$$

将 $x=0$ 代入微分方程：

$$
(1-0)y''(0)-0\cdot y'(0)-2=0 \implies y''(0)=2
$$

对微分方程 $(1-x^2)y''-xy'-2=0$ 两边求 n 阶导数（$n \geq 1$），使用莱布尼茨公式：

$$
\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}[(1-x^2)y'']-\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}[xy']-\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}[2]=0
$$

$$
[(1-x^2)y^{(n+2)}+C_n^1(-2x)y^{(n+1)}+C_n^2(-2)y^{(n)}]-[xy^{(n+1)}+C_n^1(1)y^{(n)}]-0=0
$$

$$
(1-x^2)y^{(n+2)}-2nxy^{(n+1)}-n(n-1)y^{(n)}-xy^{(n+1)}-ny^{(n)}=0
$$

整理得：

$$
(1-x^2)y^{(n+2)}-(2n+1)xy^{(n+1)}-(n^2)y^{(n)}=0
$$

将 $x=0$ 代入上式，得到关于 $y^{(n)}(0)$ 的递推关系：

$$y^{(n+2)}(0)-n^2y^{(n)}(0)=0 \implies y^{(n+2)}(0)=n^2y^{(n)}(0)$$

利用此递推关系：

i. 当 n 为奇数时：$y^{(3)}(0)=1^2y^{(1)}(0)=1^2\cdot 0=0$。由此可知，所有奇数阶导数在 $x=0$ 处均为 0。

$$y^{(2k+1)}(0)=0$$

ii. 当 n 为偶数时（令 $n=2k$）：

$$\begin{aligned}
y^{(2)}(0)&=2\\
y^{(4)}(0)&=2^2y^{(2)}(0)=2^2\cdot 2\\
y^{(6)}(0)&=4^2y^{(4)}(0)=4^2\cdot 2^2\cdot 2\\
&\cdots\\
y^{(2k)}(0)&=(2k-2)^2y^{(2k-2)}(0)=(2k-2)^2(2k-4)^2\cdots 4^2\cdot 2^2\cdot y^{(2)}(0)\\
y^{(2k)}(0)&=[(2k-2)!!]^2\cdot 2
\end{aligned}$$

综上，

$$y^{(n)}(0)=\begin{cases}0 & n\text{为奇数}\\ 2\cdot((n-2)!!)^2 & n\text{为偶数且 } n\geq 2\end{cases}$$

(b) 根据变限积分求导法则（牛顿-莱布尼茨公式的推广）：

如果 $F(x)=\int_{a(x)}^{b(x)}f(t)\,\mathrm{d}t$，则 $F'(x)=f(b(x))b'(x)-f(a(x))a'(x)$。

令 $f(t)=\frac{\sin t}{t^4+2}$，积分上限 $b(x)=2^x$，积分下限 $a(x)=x^3+1$。

我们有 $b'(x)=2^x\ln 2$ 和 $a'(x)=3x^2$。

因此，

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{x^3+1}^{2^x}\frac{\sin t}{t^4+2}\,\mathrm{d}t&=f(2^x)\cdot(2^x)'-f(x^3+1)\cdot(x^3+1)'\\
&=\frac{\sin(2^x)}{(2^x)^4+2}\cdot(2^x\ln 2)-\frac{\sin(x^3+1)}{(x^3+1)^4+2}\cdot(3x^2)\\
&=\frac{2^x\ln 2\sin(2^x)}{2^{4x}+2}-\frac{3x^2\sin(x^3+1)}{(x^3+1)^4+2}
\end{aligned}$$

5. 构造一个辅助函数 $g(x)$，定义为：

$$g(x)=f(x)-f\left(x+\frac{1}{3}\right)$$

我们的目标是证明存在一点 c，使得 $g(c)=0$。要使 $g(x)$ 有定义，其变量 x 和 $x+\frac{1}{3}$ 都必须在 $f(x)$ 的定义域 $[0,1]$ 内。由此可得 x 的取值范围为 $[0,\frac{2}{3}]$。因为 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上是连续的，所以 $g(x)$ 作为两个连续函数的差，在其定义域 $[0,\frac{2}{3}]$ 上也必然是连续的。

接下来，我们考察 $g(x)$ 在几个特殊点的值。我们选取点 $0,\frac{1}{3},\frac{2}{3}$ 进行计算，并加和他们的结果

$$g(0)+g\left(\frac{1}{3}\right)+g\left(\frac{2}{3}\right)=\left(f(0)-f\left(\frac{1}{3}\right)\right)+\left(f\left(\frac{1}{3}\right)-f\left(\frac{2}{3}\right)\right)+\left(f\left(\frac{2}{3}\right)-f(1)\right)$$
$$=f(0)-f(1)$$

根据题目给出的条件 $f(0)=f(1)$，上述和为零。

$$g(0)+g\left(\frac{1}{3}\right)+g\left(\frac{2}{3}\right)=0$$

如果 $g(0), g(\frac{1}{3}), g(\frac{2}{3})$ 这三个值中有一个恰好为零，例如 $g(0)=0$，那么取 $c=0$ 即可满足 $g(c)=0$，命题得证。

如果这三个值都不为零，那么因为它们的和为零，所以它们不可能全部为正数，也不可能全部为负数。这意味着，其中必然至少存在一个正值和一个负值。不妨设存在 $a, b\in\{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\}$，使得 $g(a)>0$ 且 $g(b)<0$。由于 $g(x)$ 在区间 $[0, \frac{2}{3}]$ 上是连续的，它在包含 a 和 b 的子区间上自然也连续。根据介值定理，在 a 和 b 之间必定存在一点 c，使得 $g(c)=0$。

综上所述，无论哪种情况，我们都能断定存在一点 $c\in[0, \frac{2}{3}]$ 使得 $g(c)=0$。将 $g(c)$ 的定义代回，即 $f(c)-f(c+\frac{1}{3})=0$，也就是 $f(c)=f(c+\frac{1}{3})$。由于 $[0, \frac{2}{3}]$ 是 $[0,1]$ 的子集，这个 c 也位于 $[0,1]$ 内。

证明完毕。

6. 对于定义在 $[0,1]$ 上有连续导函数的 $f(x)$，对任意的 $x, y\in[0,1]$，我们有：

$$f(x)-f(y)=\int_y^x f'(t)\,\mathrm{d}t$$

对上式两边取绝对值，并利用积分不等式 $|\int g|\le\int|g|$，可得：

$$|f(x)-f(y)|=\left|\int_y^x f'(t)\,\mathrm{d}t\right|\le\left|\int_y^x |f'(t)|\,\mathrm{d}t\right|$$

由于 $|f'(t)|$ 是一个非负函数，上式右端的积分值不会超过它在整个区间 $[0,1]$ 上的积分。因此，我们可以将积分区间放大到 $[0,1]$，得到一个更强的界：

$$|f(x)-f(y)|\le\int_0^1 |f'(t)|\,\mathrm{d}t$$

接下来，利用三角不等式 $|a|-|b|\le|a-b|$，我们有 $|f(x)|-|f(y)|\le|f(x)-f(y)|$。结合上式，可得：

$$|f(x)|\le|f(y)|+\int_0^1 |f'(t)|\,\mathrm{d}t$$

这个不等式对任意的 $y\in[0,1]$ 都成立。

由于 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续，其绝对值 $|f(x)|$ 也是连续的。根据极值定理， $|f(x)|$ 在 $[0,1]$ 上必然存在一个最小值。我们设这个最小值为 $|f(y_0)|$，其中 $y_0\in[0,1]$。这意味着对任意 $t\in[0,1]$，都有 $|f(y_0)|\le|f(t)|$。

将这个不等式在 $[0,1]$ 上积分，我们得到：

$$\int_0^1 |f(y_0)|\,\mathrm{d}t\le\int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t$$

由于 $|f(y_0)|$ 是一个常数，上式左边等于 $|f(y_0)|(1-0)=|f(y_0)|$。所以，$|f(y_0)| \le \int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t$。

现在，我们将 y 替换为这个特定的 y_0，并把上述结果代入我们之前推导出的不等式中，便可完成证明：

$$|f(x)| \le |f(y_0)| + \int_0^1 |f'(t)|\,\mathrm{d}t \le \int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t + \int_0^1 |f'(t)|\,\mathrm{d}t$$

不等式得证。

现在我们来探讨使得等号对所有 $x \in [0,1]$ 均成立的函数 $f(x)$。

等式为：

$$|f(x)| = \int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t + \int_0^1 |f'(t)|\,\mathrm{d}t$$

观察此式，右侧是一个不依赖于 x 的常数。因此，要使等号对所有 $x \in [0,1]$ 成立，左侧的 $|f(x)|$ 也必须是一个常数。我们设 $|f(x)| = M$，其中 $M \ge 0$ 是一个常数。

将 $|f(x)| = M$ 代入等式中，我们得到：

$$M = \int_0^1 M\,\mathrm{d}t + \int_0^1 |f'(t)|\,\mathrm{d}t$$

计算右侧的第一个积分，$\int_0^1 M\,\mathrm{d}t = M$。于是等式变为：

$$M = M + \int_0^1 |f'(t)|\,\mathrm{d}t$$

这立即导出：

$$\int_0^1 |f'(t)|\,\mathrm{d}t = 0$$

由于 $f'(t)$ 是连续函数，那么 $|f'(t)|$ 是一个非负的连续函数。对于一个非负连续函数，其在某个区间上的积分为零的充分必要条件是该函数在此区间上恒为零。

因此，我们必须有 $|f'(t)| = 0$ 对所有 $t \in [0,1]$ 成立，这等价于 $f'(t) = 0$ 对所有 $t \in [0,1]$ 成立。

一个函数在整个区间上的导数恒为零，意味着这个函数在该区间上必然是一个常函数。所以，$f(x) = C$，其中 C 为任意实常数。

我们可以验证，当 $f(x) = C$ 时，$f'(x) = 0$。代入原不等式：

$$|C| \le \int_0^1 |C|\,\mathrm{d}t + \int_0^1 |0|\,\mathrm{d}t$$

$$|C| \le |C| \cdot (1-0) + 0 \implies |C| \le |C|$$

这显然是一个等式。因此，等号确实对所有 $x \in [0,1]$ 恒成立。

综上所述，使得等号对所有 $x \in [0,1]$ 均成立的函数是所有常函数 $f(x) = C$，其中 C 为任意实数。

7. 我们首先求函数在 $x \neq 0$ 处的导数。

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^m \sin\frac{1}{x}\right) \\
&= mx^{m-1}\sin\frac{1}{x} - x^{m-2}\cos\frac{1}{x}
\end{aligned}
$$

再次求导：

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(mx^{m-1}\sin\frac{1}{x} - x^{m-2}\cos\frac{1}{x}\right) \\
&= \left(m(m-1)x^{m-2} - x^{m-4}\right)\sin\frac{1}{x} - (2m-2)x^{m-3}\cos\frac{1}{x}
\end{aligned}
$$

要使 $f(x)$ 具有连续的二阶导函数，我们需要分析 $f(x), f'(x), f''(x)$ 在 $x=0$ 点的行为。核心在于处理形如 $x^k g(1/x)$ 的项在 $x \to 0$ 时的极限，其中 g 是有界函数（如 $\sin$ 或 $\cos$）。该极限为 0 的充要条件是 $k>0$。

首先，为了使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，我们需要 $f'(0)$ 存在。根据导数定义：

$$
f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^m \sin\frac{1}{h}}{h} = \lim_{h\to 0} h^{m-1}\sin\frac{1}{h}
$$

该极限存在的条件是 $m-1>0$，即 $m>1$。由于 m 是整数，这要求 $m \geq 2$。此时，$f'(0)=0$。

接下来，为了使 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续，必须满足 $\lim_{x\to 0} f'(x) = f'(0) = 0$。考察 $f'(x)$ 的表达式：

$$
\lim_{x\to 0}\left(mx^{m-1}\sin\frac{1}{x} - x^{m-2}\cos\frac{1}{x}\right)
$$

为使极限为零，两项的极限都必须为零。这要求 x 的指数均为正，即 $m-1>0$ 和 $m-2>0$。更严格的条件是 $m>2$，即 $m \geq 3$。

然后，为了使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处二阶可导，我们需要 $f''(0)$ 存在。根据定义：

$$
f''(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f'(h)-f'(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{mh^{m-1}\sin\frac{1}{h} - h^{m-2}\cos\frac{1}{h}}{h}
$$

$$
f''(0) = \lim_{h\to 0}\left(mh^{m-2}\sin\frac{1}{h} - h^{m-3}\cos\frac{1}{h}\right)
$$

该极限存在的条件是 $m-2>0$ 和 $m-3>0$。更严格的条件是 $m>3$，即 $m \geq 4$。此时，$f''(0)=0$
。

最后，为了使 $f''(x)$ 在 $x=0$ 处连续，必须满足 $\lim_{x\to 0} f''(x) = f''(0) = 0$。考察 $f''(x)$ 的表达式：

$$
\lim_{x\to 0}\left[\left(m(m-1)x^{m-2} - x^{m-4}\right)\sin\frac{1}{x} - (2m-2)x^{m-3}\cos\frac{1}{x}\right]
$$

为使整个极限为零，所有项的极限都必须为零。这意味着所有 x 的指数都必须为正：
$m-2>0, m-4>0$，以及 $m-3>0$。
其中最严格的条件是 $m-4>0$，即 $m>4$。

综上所述，为了保证 $f(x)$ 具有连续的二阶导函数，必须满足所有推导出的条件。最严格的条件是 $m>4$。因为 m 是正整数，所以 m 必须满足 $m \geq 5$。