1 02 Robotics-I

1.1 基础概念

连杆（Link）：按照顺序连接的刚体。

关节（Joint）：连接连杆的部件，决定了相邻连杆之间的运动自由度（DoF，Degree of Freedom）。

自由度（DoF，Degree of Freedom）：机械臂的自由度是指机械臂能够自由运动的维度。

1.2 刚性变换（Rigid Transformation）

点的表示与坐标系

约定：

- 任意点 p 的位置由一个参考系 $\mathcal{F}_s$ 记录。
- 点的坐标记为普通字母（如 p），向量用粗体字母表示（如 $\mathbf{v}$）。
- s 代表 space，b 代表 body。

记录公式包含参考系的上标，例如：

$$o_b^s = o_s^s + \mathbf{t}_{s\to b}^s$$

这个公式表示：在坐标系 $\mathcal{F}_s$ 中，点 o_b 的位置是 o_s 的位置加上平移向量 $\mathbf{t}_{s\to b}^s$。

刚体的位姿变换

刚体自身会绑定一个坐标系 $\mathcal{F}_b$，当刚体移动时，此坐标系也会移动。

所以，刚体的 **位姿（位置与姿态，pose）** 变化，就是通过 **坐标系变换** 来对齐两个坐标系。也即将 $\mathcal{F}_s$ 通过旋转和平移变换，使其与 $\mathcal{F}_b$ 重合。

- 转动矩阵（rotation）：$R_{s\to b}$，用于对齐坐标轴 $\{x_i, y_i, z_i\}$，代表“朝向”
- 平动向量（translation）：$\mathbf{t}_{s\to b}$，用于对齐原点 o_s 和 o_b，代表“位置”

$(R_{s\to b}^s, \mathbf{t}_{s\to b}^s)$ 合在一起，就描述了一个刚体的位姿，其拥有 6 个自由度，转动和平动各自拥有 3 个自由度。

- 原点变换：
$$o_b^s = o_s^s + \mathbf{t}_{s\to b}^s$$
- 坐标轴变换：
$$[\mathbf{x}_b^s, \mathbf{y}_b^s, \mathbf{z}_b^s] = R_{s\to b}[\mathbf{x}_s^s, \mathbf{y}_s^s, \mathbf{z}_s^s]$$

如果观察者使用 $\mathcal{F}_s$：

$$o_s^s = 0, \quad [\mathbf{x}_s^s, \mathbf{y}_s^s, \mathbf{z}_s^s] = I_{3\times 3}$$

则：

$$\mathbf{t}_{s\to b}^s = o_b^s, \quad R_{s\to b} = [\mathbf{x}_b^s, \mathbf{y}_b^s, \mathbf{z}_b^s] \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

相对的，如果观察者使用 $\mathcal{F}_b$：

假设刚体上的点 p 在 $\mathcal{F}_b$ 中的坐标为 p^b（随刚体运动，所以相对于坐标系 $\mathcal{F}_b$ 固定不变），其在 $\mathcal{F}_s$ 中的坐标为 p^s，则有：

1. 初始时，$\mathcal{F}_s = \mathcal{F}_b$，$p^s = p^b$。
2. 刚体发生运动，相对于参考系 $\mathcal{F}_s$，此运动可以描述为 $(R_{s\to b}^s, \mathbf{t}_{s\to b}^s)$，则：
$$p^s = R_{s\to b}^s p^b + \mathbf{t}_{s\to b}^s$$
3. 同理，对于任意点 x^s，变换后的点 x'^s 表示为：
$$x'^s = R_{s\to b} x^s + \mathbf{t}_{s\to b}$$

值得注意的是，当 $\mathbf{t}_{s\to b}^s \neq 0$ 时，$(R_{s\to b}^s, \mathbf{t}_{s\to b}^s)$ 这个变换并不是线性的。反之，当 $\mathbf{t}_{s\to b}^s = 0$ 时，变换是线性的。

齐次坐标

在三维空间中，齐次坐标系将一个点 $x \in \mathbb{R}^3$ 表示为：

$$\tilde{x} := \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

对应的，齐次变换矩阵具有以下形式：

$$T_{s\to b}^s = \begin{bmatrix} R_{s\to b}^s & t_{s\to b}^s \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

其中 $R_{s\to b}^s$ 是旋转矩阵，$t_{s\to b}^s$ 是平移向量。

这么做的原因是，在传统的笛卡尔坐标系中，平移和旋转是两种不同性质的变换：

- 旋转是线性变换：$x' = Rx$
- 平移是仿射变换：$x' = x + t$

这导致无法用单一矩阵乘法表示同时包含旋转和平移的变换。而在齐次坐标系中，两种变换统一为：

$$\begin{bmatrix} x' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Rx + t \\ 1 \end{bmatrix}$$

注意，这种变换保持刚体的形状和大小不变，只改变其位置和方向。

通过引入齐次坐标，我们恢复了线性，此时多个变换的组合可以通过矩阵乘法简洁表示，且满足传递性、可逆性：

$$T_3 = T_2 \cdot T_1 T_{2\to 1}^2 = \left(T_{1\to 2}^1\right)^{-1}$$

这极大地简化了计算复杂变换序列的过程，现在，坐标变换遵循一般规则：

$$x^1 = T_{1\to 2}^1 x^2$$

直观上容易记混淆这个公式。请记住，这个 x 是随着刚体变动的，x^2 是其在变换后坐标系下的坐标，亦是变换前的坐标，经过固定坐标系下的变换矩阵 $T_{1\to 2}^1$，就得到了变换后的、在原始固定坐标系下的坐标 x^1。

同时，我们显然有：

$$x^2 = (T_{1\to 2}^1)^{-1} x^1 = T_{2\to 1}^2 x^1$$

在后文中，我们忽略 $\tilde{}$，默认在齐次坐标系下写公式。

1.3 多连杆刚体几何

基本关节类型

1. **Revolute Joint（旋转关节 / 铰链关节）**
   - 允许绕单一轴线的旋转运动。
   - 1 DoF
2. **Prismatic Joint（滑动关节 / 平移关节）**
   - 允许沿单一方向的平移运动。
   - 1 DoF
3. **Helical Joint（螺旋关节）**
   - 螺旋运动，即旋转与平移的组合运动，旋转和平移之间存在固定比率。
   - 1 DoF
4. **Spherical Joint（球形关节 / 球窝关节）**
   - 允许绕球心进行任意方向的旋转。
   - 3 DoF

总结：

关节类型 | 英文名称 | 自由度（DoF）| 运动描述 |
—— -| ———- | ———- | ——————— -|
旋转关节 | Revolute (R) | 1 | 绕单一轴线旋转 |
滑动关节 | Prismatic (P) | 1 | 沿单一方向平移 |
螺旋关节 | Helical (H) | 1 | 螺旋运动（旋转 + 平移）|
球形关节 | Spherical (S) | 3 | 任意方向旋转 |

基座连杆和末端执行器

基座连杆（Base link / Root link）

- **定义**：第 0 号连杆。
- **特点**：
  - 被视为“固定”参考。
  - 空间坐标系 $\mathcal{F}_s$ 附着于此。

末端执行器连杆（End-effector link）

- **定义**：最后一个连杆。
- **特点**：
  - 通常为抓手（gripper）。
  - 末端坐标系 $\mathcal{F}_e$ 附着于此。

如何看坐标系：

- x 是红
- y 是绿
- z 是蓝

变换矩阵

$$T_{0\to 1}^0 = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 & -l_2\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 & l_2\cos\theta_1 \\ 0 & 0 & 1 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

要点：旋转矩阵没影响 z 轴；平动向量在平面上也有变动，因为绕着 l_2 左端点转了一下。

$$T_{1\to 2}^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & l_3 \\ 0 & 0 & 1 & \theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

要点：转动矩阵为 I；平动向量只改了 y, z。

$$T_{2\to3}^{2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -l_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

要点：转动矩阵为 I；平动向量只改了 z。

$$T_{0\to3}^{0} = T_{0\to1}^{0} T_{1\to2}^{1} T_{2\to3}^{2} = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 & -\sin\theta_1(l_2+l_3) \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 & \cos\theta_1(l_2+l_3) \\ 0 & 0 & 1 & l_1 - l_4 + \theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

旋转的参数化

参数化: 用一组简单的数值参数来完整描述一个复杂系统或对象的过程。

假设我们已经为 Robot 的每个连杆（Link）分配了坐标系，那么我们可以使用相邻（adjacent）坐标系之间的 **相对角度**和 **平移**来参数化每个关节。

而对于末端执行器（End-Effector），我们又有如下两种方式来表征其位姿：

关节空间表示（Joint space）

- 这是一个向量空间，其中每个坐标是关节位姿的向量
- 具体来说，是关节围绕关节轴的 **角度**向量
- 例如，一个 6 自由度机器人会有 6 个关节角度值 $(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6)$

笛卡尔空间表示（Cartesian space）

- 这是末端执行器刚体变换的空间
- 用数学符号表示为：$(R_{s\to e}, t_{s\to e})$
  - 其中 $R_{s\to e}$ 表示从基座坐标系到末端执行器坐标系的旋转矩阵
  - $t_{s\to e}$ 表示从基座坐标系到末端执行器坐标系的平移向量
- $\mathcal{F}_e$ 表示末端执行器的坐标系

对比

- **关节空间** 直观地反映了机器人各关节的实际物理状态，强调关节。
- **笛卡尔空间** 则描述了机器人末端在三维空间中的实际位置和方向，更符合人类思考方式，容易进行判断目标是否达成，强调末态。

联系

正向运动学（Forward Kinematics，FK） 正向运动学将关节空间坐标 $\theta \in \mathbb{R}^n$ 映射到变换矩阵 T：

$$T_{s\to e} = f(\theta)$$

也即，给定关节角度，计算末端执行器的位置和姿态。

这一映射可以简单地通过沿着运动链组合各个变换矩阵计算得出。

逆向运动学（Inverse Kinematics，IK） 逆向运动学解决的问题：给定正向运动学 $T_{s\to e}(\theta)$ 和目标姿态 $T_{target} = \begin{bmatrix} R_{s\to e}^{s} & \mathbf{t}_{s\to e}^{s} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{SE}(3)$，求解满足以下条件的关节角度 θ：

$$T_{s\to e}(\theta) = T_{target}$$

过程：给定末端执行器的目标位置和姿态，计算需要的关节角度

逆向运动学比正向运动学更复杂，因为 T^{-1} 可能很难计算，所以 **通常可能有多个解或无解**。

根据前文所述，三维空间中，任何刚体的完整位姿可以用 6 个独立参数完全描述，即 (R, t)。

因此，6 自由度是机械臂实现空间中任意位置和姿态所需的最小自由度数量。这也称为“完全自由度”配置。

至少 6 个自由度可以保证覆盖此空间，从而 IK 的方程有解（但有时候可能得不到解析解，只能得到数值解）。

> 引理：如果机械臂构型满足 Pieper Criterion，则有解析解（闭式解）。
>
> 实例：UR5 机械臂。

虽然 6 自由度保证了有解，但是这个解可能超出了可行空间（如碰撞解），所以额外增加 1 个冗余自由度形成 7 自由度，可以扩大解空间，更有可能找到可行解（非碰撞解）。

但我们不能一味增加自由度，因为这会带来工程复杂性并延长反应时间，所以目前工业界一般是 6 或者 7 DoF。

一个 IK 求解方式（cuRobo）：

1. 选定一个初始值 θ_0
2. 目标：最小化能量函数（Energy Function）

$$\arg\min_{\theta} ||T_{s\to e}(\theta) - T_{target}||_2$$

3. 迭代直到收敛
4. 可以使用 GPU 并行迭代多个随机选定的初始值，加快速度，并尝试找到最优解

应用 假设我们已知机械臂现在状态，我们想要略微移动一点到达新的状态，我们该选择何种表征进行预测？

1. 使用笛卡尔空间，优点是 $(\Delta R, \Delta t)$ 直观，容易预测，缺点是执行操作所需的 $\Delta\theta$ 难以计算（需要 IK），RT-2 选用的是这种。
2. 使用关节空间，优点是预测得到 $\Delta\theta$ 后很容易操作，并计算移动后的 (R, t) 以及 $(\Delta R, \Delta t)$ 易于计算（FK），缺点是 $\Delta\theta$ 难以求解，$\pi 0$ 选用的是这种。

SE (3) 群与空间变换的表示方法

SE (3) 是 Special Euclidean group in 3 dimensions 的缩写，代表三维特殊欧几里得群。**它描述了三维空间中所有的刚体变换（rigid transformations）**，包括旋转和平移，但不包括缩放、切变等变形。

SE (3) 群可以数学表示为：

$$\mathbb{SE}(3) := \left\{ T = \begin{bmatrix} R & \mathbf{t} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, R \in \mathbb{SO}(3), \mathbf{t} \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

其中：

- $\mathbb{SO}(3)$ 是三维特殊正交群，表示所有的三维旋转
- t 是三维空间中的平移向量

注意这里：

- 所有三维正交矩阵是 $\mathbb{O}(3)$
- 旋转矩阵是 $\mathbb{SO}(3) \subset \mathbb{O}(3)$，其满足行列式是 1，因为这样可以保证应用后手性不变，如果行列式是 -1，那么实际上是一个旋转加镜像的操作。

延伸：

- $\mathbb{SO}(2)$ 是二维旋转矩阵，有 1 个自由度
- $\mathbb{SO}(3)$ 是三维旋转矩阵，有 3 个自由度

欧拉角 **欧拉角（Euler Angles）**：描述三维旋转的一种方法，通过三个连续的旋转来表示任意旋转。

- 绕 X 轴旋转 ϕ（roll）
- 绕 Y 轴旋转 θ（pitch）
- 绕 Z 轴旋转 ψ（yaw）

应用：相较于旋转矩阵 R，所需数值表示从 9 个降低到了 3 个。

$$R_x(\alpha) := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

$$R_y(\beta) := \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix}$$

$$R_z(\gamma) := \begin{bmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

任意旋转均可拆为 $R = R_z(\alpha) R_y(\beta) R_x(\gamma)$。这个顺序可以变，但一般默认是这个顺序。

问题：

1. 对于一个旋转矩阵，**其欧拉角可能不唯一**。

$$R_z(45°) R_y(90°) R_x(45°) = R_z(90°) R_y(90°) R_x(90°)$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2. **Gimbal Lock**：如果三次旋转中第二次旋转 β 的角度为 $\pi/2$，那么剩下 2 个自由度会变成 1 个。

$$R_z(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} R_y(\beta) = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 \\ 0 & 1 \\ -\sin\beta & 0 \end{bmatrix}$$

带入、合并计算：

$$R_y(\pi/2) R_x(\gamma) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma & -\sin\gamma \\ 0 & \sin\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix} =$$

$$
\begin{aligned}
R = R_z(\alpha)[R_y(\pi/2)R_x(\gamma)] &= \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \sin\gamma & \cos\gamma \\ 0 & \cos\gamma & -\sin\gamma \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & \cos\alpha\sin\gamma - \sin\alpha\cos\gamma & \cos\alpha\cos\gamma + \sin\alpha\sin\gamma \\ 0 & \sin\alpha\sin\gamma + \cos\alpha\cos\gamma & \sin\alpha\cos\gamma - \cos\alpha\sin\gamma \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -\sin(\alpha-\gamma) & \cos(\alpha-\gamma) \\ 0 & \cos(\alpha-\gamma) & \sin(\alpha-\gamma) \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

轴角表示法　欧拉定理: 任意三维空间中的旋转都可以表示为绕一个固定轴 $\hat{\omega} \in \mathbb{R}^3$（单位向量，满足 $\|\hat{\omega}\| = 1$）旋转一个正角度 θ 的结果。

其中：

- $\hat{\omega}$：旋转轴的单位向量。
- θ：旋转角度（正方向遵循右手定则）。
- $R \in \mathbb{SO}(3) := \mathrm{Rot}(\hat{\omega}, \theta)$：三维旋转矩阵，必然可以表示为绕 $\hat{\omega}$ 旋转角度 θ 的变换。

轴角表示法的问题：

- **不唯一性**：$(\hat{\omega}, \theta)$ 和 $(-\hat{\omega}, -\theta)$ 代表同一个旋转
- 当旋转是单位矩阵 $R = I$ 时（即没有旋转），$\theta = 0$，此时旋转轴 $\hat{\omega}$ 可以是任意方向。
- 当旋转角度 $\theta = \pi$ 时，绕轴 $\hat{\omega}$ 和绕轴 $-\hat{\omega}$ 旋转 π 得到的结果是相同的。这种情况对应 $\mathrm{tr}(R) = -1$。

如果我们将旋转角 θ 限制在 $(0, \pi)$ 这个开区间内，那么对于大部分旋转，其轴角表示就是唯一的（不考虑不旋转、旋转 π）。

轴角表示到旋转矩阵　对于一个单位轴向量（axis）$\mathbf{u} = [x, y, z]^\top$，其对应的叉乘矩阵（cross product matrix）K 定义为：

$$
K = \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix}
$$

其具有性质：当 K 与任意向量 $\mathbf{v}$ 相乘时，运算结果等同于 $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{v}$ 的叉乘：

$$
K\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -zv_2 + yv_3 \\ zv_1 - xv_3 \\ -xv_2 + yv_1 \end{bmatrix} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}
$$

那么，绕单位轴 $\mathbf{u}$ 旋转 θ 的旋转矩阵 R_θ 可以表示为：

$$
\begin{aligned}
R_\theta &= \cos\theta \cdot I + (1 - \cos\theta)(\mathbf{u}\mathbf{u}^\top) + \sin\theta \cdot K \\
&= I + (1 - \cos\theta)(\mathbf{u}\mathbf{u}^\top - I) + \sin\theta \cdot K \\
&= I + (1 - \cos\theta)K^2 + \sin\theta \cdot K
\end{aligned}
$$

这就是 **Rodrigues 旋转公式（矩阵形式）**。

为了证明它，我们先证明向量形式：

Rodrigues 旋转公式 (向量形式): 在 3D 空间中，任意一个向量 $\mathbf{v}$ 沿着单位向量 $\mathbf{u}$ 旋转 θ 角度之后的向量 $\mathbf{v}'$ 为：

$$
\mathbf{v}' = \cos(\theta)\mathbf{v} + (1 - \cos(\theta))(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{u} + \sin(\theta)(\mathbf{u} \times \mathbf{v})
$$

其详细证明参见 Krasjet / Quaternion 第 2 节☐三维空间中的旋转（第 11 页）。

从向量形式稍加变形，我们就能得到矩阵形式：

$$
\begin{aligned}
\mathbf{v}' &= \cos(\theta)\mathbf{v} + (1 - \cos(\theta))(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{u} + \sin(\theta)(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \\
&= \cos(\theta)\mathbf{v} + (1 - \cos(\theta))(\mathbf{u}^\top\mathbf{v})\mathbf{u} + \sin(\theta)(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \\
&= \cos(\theta)\mathbf{v} + (1 - \cos(\theta))\mathbf{u}(\mathbf{u}^\top\mathbf{v}) + \sin(\theta)(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \\
&= \left[\cos(\theta)I + (1 - \cos(\theta))(\mathbf{u}\mathbf{u}^\top) + \sin(\theta)K\right]\mathbf{v} \\
&= R_\theta\mathbf{v}
\end{aligned}
$$

旋转矩阵 R_θ 也可以写成：

$$
R_\theta = e^{\theta K}
$$

我们可以证明后者和前者是等价的：

$$
e^{\theta K} = I + \theta K + \frac{(\theta K)^2}{2!} + \frac{(\theta K)^3}{3!} + \cdots
$$

而我们又有：

$$
K^2 = \begin{bmatrix} -z^2 - y^2 & xy & xz \\ xy & -x^2 - z^2 & yz \\ xz & yz & -x^2 - y^2 \end{bmatrix}
$$

利用 $\mathbf{u}$ 是单位向量的性质（$x^2 + y^2 + z^2 = 1$），可简化为：

$$
K^2 = \mathbf{u}\mathbf{u}^\top - I
$$

所以：

$$
K^3 = K \cdot K^2 = K(\mathbf{u}\mathbf{u}^\top - I) = K\mathbf{u}\mathbf{u}^\top - K = -K
$$

这里利用了叉乘性质 $K\mathbf{u} = \mathbf{u} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$。

所以：

$$
K^3 = -K, \quad K^4 = -K^2, \quad K^5 = K, \quad \ldots
$$

带回展开形式，合并同类项：

$$
\begin{aligned}
e^{\theta K} &= I + \left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots\right)K + \left(\frac{\theta^2}{2!} - \frac{\theta^4}{4!} + \cdots\right)K^2 \\
&= I + \sin\theta K + (1 - \cos\theta)K^2 \\
&= I + \sin\theta K + (1 - \cos\theta)(\mathbf{u}\mathbf{u}^\top - I) \\
&= \cos\theta I + (1 - \cos\theta)\mathbf{u}\mathbf{u}^\top + \sin\theta K \\
&= R_\theta
\end{aligned}
$$

从旋转矩阵 R 反求 $(\hat{\omega}, \theta)$　当 $\theta \in (0, \pi)$ 时，可以通过以下公式从旋转矩阵 R 计算出 θ 和 $\hat{\omega}$：

- $\theta = \arccos\frac{1}{2}[\mathrm{tr}(R) - 1]$
- $[\hat{\omega}] = \frac{1}{2\sin\theta}(R - R^\top)$

  注意：$[\hat{\omega}]$ 表示与向量 $\hat{\omega}$ 相关联的反对称矩阵（skew-symmetric matrix）/ 叉乘矩阵

  证明：$\theta = \arccos\frac{1}{2}[\mathbf{tr}(R) - 1]$

  对罗德里格公式两边取迹 (trace)：

$$
\mathrm{tr}(R) = \mathrm{tr}(I + \sin\theta[\hat{\omega}] + (1 - \cos\theta)[\hat{\omega}]^2)
$$

  利用迹的线性性质 $\mathrm{tr}(A + B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$ 和 $\mathrm{tr}(cA) = c \cdot \mathrm{tr}(A)$:

$$
\mathrm{tr}(R) = \mathrm{tr}(I) + \sin\theta \cdot \mathrm{tr}([\hat{\omega}]) + (1 - \cos\theta) \cdot \mathrm{tr}([\hat{\omega}]^2)
$$

  代入已知的迹的值：$\mathrm{tr}(I) = 3$，$\mathrm{tr}([\hat{\omega}]) = 0$，$\mathrm{tr}([\hat{\omega}]^2) = -2$。

$$
\begin{aligned}
\mathrm{tr}(R) &= 3 + \sin\theta \cdot 0 + (1 - \cos\theta) \cdot (-2) \\
&= 3 - 2(1 - \cos\theta) = 3 - 2 + 2\cos\theta \\
&= 1 + 2\cos\theta
\end{aligned}
$$

  整理得到 $\cos\theta$:

$$
2\cos\theta = \mathrm{tr}(R) - 1 \cos\theta = \frac{1}{2}[\mathrm{tr}(R) - 1]\theta = \arccos\left(\frac{1}{2}[\mathrm{tr}(R) - 1]\right)
$$

  证明：$[\hat{\omega}] = \frac{1}{2\sin\theta}(R - R^\top)$

  首先计算 R 的转置 $R^\top$。

  利用性质：

  - $[\hat{\omega}]^\top = -[\hat{\omega}]$
  - $([\hat{\omega}]^2)^\top = ([\hat{\omega}][\hat{\omega}])^\top = [\hat{\omega}]^\top[\hat{\omega}]^\top = (-[\hat{\omega}])(-[\hat{\omega}]) = [\hat{\omega}]^2$

    即 $[\hat{\omega}]^2$ 是对称矩阵。

$$
\begin{aligned}
R^\top &= (I + \sin\theta[\hat{\omega}] + (1 - \cos\theta)[\hat{\omega}]^2)^\top \\
&= I^\top + (\sin\theta[\hat{\omega}])^\top + ((1 - \cos\theta)[\hat{\omega}]^2)^\top \\
&= I + \sin\theta[\hat{\omega}]^\top + (1 - \cos\theta)[\hat{\omega}]^2 \\
&= I - \sin\theta[\hat{\omega}] + (1 - \cos\theta)[\hat{\omega}]^2
\end{aligned}
$$

  现在计算 $R - R^\top$:

$$
\begin{aligned}
R - R^\top &= (I + \sin\theta[\hat{\omega}] + (1 - \cos\theta)[\hat{\omega}]^2) - (I - \sin\theta[\hat{\omega} \\
&= (I - I) + (\sin\theta - (-\sin\theta))[\hat{\omega}] + ((1 - \cos\theta) \\
&= 0 + (2\sin\theta)[\hat{\omega}] + 0 \\
&= 2\sin\theta[\hat{\omega}]
\end{aligned}
$$

  当 $\theta \in (0, \pi)$ 时，$\sin\theta \neq 0$，所以我们可以两边同除以 $2\sin\theta$:

$$
[\hat{\omega}] = \frac{1}{2\sin\theta}(R - R^\top)
$$

由此，我们可以定义两个旋转矩阵之间的 **旋转距离**。

旋转距离：从姿态 R_1 转到姿态 R_2 所需的最小旋转角度。

易知，两个旋转的关系是：

$$
(R_2 R_1^\top)R_1 = R_2
$$

那么，旋转距离 $\mathrm{dist}(R_1, R_2)$ 由以下公式给出（注意 $\theta(\cdot)$ 是上述欧拉定理中的函数）：

$$
\mathrm{dist}(R_1, R_2) = \theta(R_2 R_1^\top) = \arccos\left(\frac{1}{2}[\mathrm{tr}(R_2 R_1^\top) - 1]\right)
$$

四元数（Quaternion）　扩展内容，下节课详细推导。

参考：

1. Krasjet / Quaternion
2. Wiki / Quaternion