



# 秩 和 检 验

郝元涛

2022年11月4日

2022/11/10 7-秩和检验 7-秩和检验 1

## 主要内容

- 1. 参数检验与非参数检验(秩和检验)
- 2. 配对样本的比较(Wilcoxon符号秩和检验)
- 3. 两组独立样本的比较(Wilcoxon秩和检验)
- 4. 多组独立样本的比较(Kruskal-Wallis检验)
- 5. 随机区组设计资料的比较(Friedman检验)

# 参数检验与非参数检验

# (秩和检验)

## 1、回顾

1	绪论、正态分布及其应用
2	资料的统计描述、率的标化
3	二项分布、泊松分布
4	抽样分布、总体参数估计
5	t 检验
6	方差分析
7	基于秩的非参数检验
8	卡方检验

- 统计描述
- 统计推断
- 假设检验的理论基础
- 参数估计
- 假设检验的基本思想
- 基础的假设检验方法

## t 检验

• 单样本资料的 t 检验、配对设计资料的 t 检验

• 
$$H_0$$
:  $\mu = \mu_0$  ;  $H_0$ :  $\mu_d = 0$ 

- 两组独立样本资料的 t 检验
  - $H_0$ :  $\mu_1 = \mu_2$
- 使用条件
  - ✓正态性
  - ✓方差齐性

## 方差分析(ANOVA)

- 完全随机设计资料两组或多组均数的比较
- 随机区组设计资料多组均数的比较
  - $H_0$ :  $\mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_g$
- 应用条件
  - ✓正态性
  - ✓方差齐性

## 参数检验

- $H_0$ :  $\mu = \mu_0$  ;  $H_0$ :  $\mu_d = 0$
- $H_0$ :  $\mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_g$
- 假定总体服从某种分布(如正态分布),针对总体参数( $\mu$ )的检验方法 --- 参数检验(parametric test)
- 如果不满足应用条件? (大样本的z检验、t' 检验、变量变换等)
- 变换后不满足、等级资料、开口资料等情况又怎么办?

### 非参数检验

- 非参数检验(nonparametric test): 对总体的分布类型不作任何要求、不针对具体的分布参数进行检验的统计方法,
- •由于其对总体分布不作严格假定,所以又称任意分布检验 (distribution-free test)
- 秩和检验 (rank sum test)

```
A组: -、±、+、+、+、++
```

B组: +、++、++、++、+++、+++

持平 (tie)

$$T_A = 25$$

$$T_B = 53$$

秩(rank)和(sum)检验

# 西己对样本的比较

# (Wilcoxon符号秩和检验)

### 一、基本思想

•  $H_0$ :  $\mu_d = 0$ 

差值服从正态分布

t检验

(推断差值的总体均数是否为0)

配对设计定量资料

差值不服从正态分布; 或差值的总体分布无法确定

Wilcoxon符号秩和检验 (推断差值的总体中位数是否为0)

### 基本思想

- Wilcoxon符号秩和检验 (Wilcoxon signed-rank test)
- 当  $H_0$  成立时,差值的总体分布是对称的(即差值的总体中位数为0),此时正差值的 和 $R_+$ 与负差值的 和 $R_-$ 理论上应相等,等于n(n+1)/4,由于存在抽样误差,两者会有差别,但差别不应太大
- 若 $R_+$ 与 $R_-$ 相差悬殊,则 $H_0$ 成立的可能性很小,即有理由拒绝 $H_0$ ,接受 $H_1$ ; 反之,尚没有足够的理由拒绝 $H_0$

### 二、配对设计资料的符号秩和检验

•例1 采集10名正常成年男性志愿者的血清,分别用放射免疫法和 酶联免疫法测量甲胎蛋白的含量(μg/L),结果见表。两种方法测量结果有无差异?

表1 两种方法测量血清中甲胎蛋白含量结果( $\mu g / L$ )

患者编号	放射免疫法	酶联免疫法	差值
1	15	16	-1
2	14	12	2
3	8	5	3
4	17	19	-2
5	20	16	4
6	10	13	-3
7	22	9	13
8	15	15	0
9	3	7	-4
10	13	46	-33
秩和			

### 经正态性检验,差值不服从正态分布

## 检验步骤

- 推断差值是否来自中位数为0的总体
- 1. 建立检验假设,确定检验水准
  - $H_0: M_d = 0$
  - $H_1: M_d \neq 0$
  - $\alpha = 0.05$
- 2. 求差值、编秩、求秩和

### 表1 两种方法测量血清中甲胎蛋白含量结果( $\mu g / L$ )

患者编号	放射免疫 法	酶联免疫 法	差值	正差值的 秩	负差值的 秩
1	15	16	-1	-	1
2	14	12	2	2.5	-
3	8	5	3	4.5	-
4	17	19	-2	-	2.5
5	20	16	4	6.5	-
6	10	13	-3	-	4.5
7	22	9	13	8	-
8	15	15	0	-	-
9	3	7	-4	_	6.5
10	13	46	-33	-	9
秩和				21.5	23.5

## 检验步骤

### 3. 计算检验统计量

• 本例的检验统计量为 $R_+ = 21.5$ 或 $R_- = 23.5$ 

### 4. 确定P值,作出推断

• 本例P = 0.880。在 $\alpha = 0.05$ 水准下不拒绝 $H_0$ , 差值的总体中位数与0的 差异无统计学意义,尚不能认为放射免疫法与酶联免疫法测量正常成年 男性血清甲胎蛋白的结果有差异

附表 W界值表 (配对比较的秩和检验用)

N	单侧;0.05	0.025	0.01	0.005
	双侧:0.10	0.05	0.02	0.010
5	0-13			
6	2-19	0-21	275	-
7	3-25	2-26	0-28	775
8	5-31	3-33	1-35	0-36
9	8-37	5-40	3-42	1-44
10	10-45	8-47	5-50	3-52
11	13-53	10-56	7-59	5-61
12	1761	13-65	9-69	7-71
13	21-70	17-74	12-79	9-82
14	25-80	21-84	15-90	12-93
15	30-90	25-95	19-101	15-105
16	35-101	29-107	23-113	19-117
17	41-112	34-119	27-126	23-130
18	47-124	40-131	32-139	27-144
19	53-137	46-144	37-153	32-158
20	60-150	52-158	43-167	37-173
21	67-164	58-173	49-182	42-189
22	75-178	65-188	55-198	48-205
23	83-193	73-203	62-214	54-222
24	91-209	81-219	69-231	61-239
25	100-225	89-236	76-249	68-257
26	110-241	98-253	84-267	75-276
27	119-259	107-271	92-286	83-295
28	130-276	116-290	101-305	91-315
29	140-295	126-309	110-325	100-335
30	151-314	137-328	120-345	109-356
31	163-333	147-349	130-366	118-378
32	175-353	159-369	140-388	128-400
33	187-374	170-391	151-410	138-423
34	200-395	182-413	162-433	148-447
35	213-417	195-435	173-457	159-471
36	227-439	208-458	185-481	171-495
37	241-462	221-482	198-505	182-521
38	256-485	235-506	211-530	194 547
39	271-509	249-531	224-556	207-573
40	286-534	264-556	238-582	220-600
41	302-559	279-582	252-609	233-628
42	319-584	294-609	266-637	247-656
43	336610	310-636	281-665	261-685
44	353-637	327-663	296-694	276-714
45	371664	343-692	312-723	291-744
46	389-692	361-720	328-753	307-774
47	407-721	378750	345-783	322-806
48	426-750	396—780	362-814	339—837
49	446—779	415—810	379—846	355-870
50	466-809	434—841	397—878	373-902

• 双侧检验,  $\alpha = 0.05$ ,  $\alpha = 0.10$ 

• 界值范围: 5-40; 8-37

• 检验统计量: 23.5 或 21.5

• <mark>"内大外小"</mark>

• P > 0.05; P > 0.10

### 临界值表构造原理

- 现假定有n = 4对观察值,若其差数的绝对值  $d_i$  不存在零也不存在相同值,则有秩1,2,3,4
- $H_0$ 成立时,如果各 $d_i$ 符号完全随机,则共有 $2^4 = 16$ 种机会均等的可能组合,每一种组合出现的概率为1/16 = 0.0625

#### n=4时所有可能秩和情况和 $T^*$ 的分布

正差数	负差值	正秩和	负秩和	检验统计量	概率
的秩次	的秩次	$T_{\scriptscriptstyle +}$	$T_{-}$	$T^*$	P
1,2,3,4		10	0	0	0.0625
2,3,4	1	9	1	1	0.0625
1,3,4	2	8	2	2	0.0625
1,2,4	3	7	3	3	0.1250
3,4	1,2	7	3	3	0.1230
1,2,3	4	6	4	4	0.1250
2,4	1,3	6	4	4	0.1230
1,4	2,3	5	5	5	0.1250
2,3	1,4	5	5	5	0.1230
1,3	2,4	4	6	4	0.1250
4	1,2,3	4	6	4	0.1230
1,2	3,4	3	7	3	0.1250
3	1,2,4	3	7	3	0.1230
2	1,3,4	2	8	2	0.0625
1	2,3,4	1	9	1	0.0625
-	1,2,3,4	0	10	0	0.0625

- 选较小的秩和作 为检验统计量
- $T^* = 0$
- ➤ 单侧P = 0.0625
- > 双侧P = 0.125
- 选<mark>较小的秩和或</mark>者较大的秩和作为检验统计量
- ▶ 范围 (0~10)
- ➤ 单侧P = 0.0625
- ➤ 双侧P = 0.125
- ▶ 范围(1,9)
- ▶ 单侧P = 0.125
- > 双侧P = 0.250

	刚衣》VV 响	界值表(配对比较的符	5 亿个日至3里7日7	
37	单侧:0.05	0. 025	0.01	0. 005
N	双侧:0.10	0. 05	0.02	0.010
5	0—15	- en on v	STATE AND	
6	2—19	0—21	0.0=9二月十	
7	3—25	2-26	0-28	
8	5—31	3—33	1—35	0—36
9	8—37	5—140— 40	3-142 - 42	1—44
10	10—45	8—47	5—50	3—52
11 45-4	13—53	10-56	7—59	5—61
12	17—61	13—65	9—69	7—71
13	21—70	17—74	12—79	9—82
14	25—80	21—84	15—90	12—93
15	30—90	25—95	19—101	15—105
16 01	35—101.	29—107	23—113	19—117
17	41-112	34—119	27—126	23—130
18	47—124	40—131	32—139	27—144
19	53—137	46—144	37—153	32—158
20	60—150	52—158	43—167	37—173
21	67—164	58—173	49—182	42—189
22	75—178	65—188	55—198	48—205
23	83—193	73—203	62—214	54—222
24	91—209	81—219	69—231	61—239
25	100—225	89—236	76—249	68—257
26	110—241	98—253	84—267	75—276
27	119—259	107—271	92—286	83—295
28	130—276	116—290	101—305	91—315
20	140—295	126—309	110—325	100—335
30	151—314	137—328	120—345	109—356
31	163—333	147—349	130—366	118—378
32	175—353	159—369	140—388	128-400
	187—374	170—391	151-410	138—423
24	200—395	182—413	162—433	148—447
35	213—417	195—435	173—457	159—471
36	227—439	208—458	185—481	171—495
37	241—462	221—482	198—505	182—521
38	256—485	235—506	211—530	194—547
39	271—509	249—531	224—556	207—573
40	286—534	264—556	238—582	220—600
41	302—559	279—582	252-609	233—628
42	319—584	294—609	266—637	247—656
42	336—610	310—636	281—665	261—685
		327—663	296—694	276—714
44	353—637 371—664	343—692	312—723	291—744
45	371—664	361—720	328—753	307—774
46	389—692	378—750	345—783	322—806
47	407—721		362-814	339—837
48	426—750	396—780	379—846	355—870
49 50	446—779 466—809	415—810 434—841	397—878	373—902

### 三、单样本数据的符号秩和检验

- 例2 动物实验发现DON可导致家兔膝关节软骨和滑膜损伤,为研究大骨节病是否与粮食中DON含量有关,采集大骨节病高发地区面粉20份,测量面粉中DON含量,结果(μg/L)如下:0,0,0,0,0,12.4,34.1,69.0,98.4,129.5,156.1,163.5,170.9,177.6,172.4,180.3,189.2,192.2,196.8,205.3,中位数为142.8 (μg/L)。
- 根据前期研究发现,非大骨节病区面粉中DON含量平均水平(中位数)为  $18.9 (\mu g/L)$ 。是否可以认为大骨节病区与非大骨节病区面粉中DON含量不同?

## 检验步骤

- 正态分布检验结果认为该数据不服从正态分布,采用非参数检验方法
- 1. 建立检验假设,确定检验水准
  - $H_0$ :  $M_1 = M_0 = 18.9$
  - $H_1: M_1 \neq M_0$
  - $\alpha = 0.05$

## 检验步骤

### 2. 求差值、编秩、求秩和

- 求所有样本数值与已知中位数的差值
- 将差值的绝对值从小到大排序编秩, 0不参与编秩
- 差值绝对值相等, 称为相持(tie), 取平均秩次
- 将差值的正负号标在秩次之前
- 分别求正负秩次之和,记 $R_+$ 和 $R_-$

24

### 表3 数据的编秩结果

序号	原始 值	与中位数的差值	差值的绝对值	正差值的秩	负差值的 秩
1	0.00	-18.9	18.9	-	5
2	0.00	-18.9	18.9	-	5
• • •	• • •	•••	•••	• • •	• • •
6	12.4	-6.5	6.5	-	1
7	34.1	15.2	15.2	2	-
• • •	• • •	•••	•••	• • •	• • •
19	196.8	177.9	177.9	19	-
_20	205.3	186.4	186.4	20	_
秩和	-	-	-	$R_{+}=184$	$R_{-}=26$

## 检验步骤

### 3. 计算检验统计量

•  $W = R_{+} = 184$  或  $W = R_{-} = 26$ 

### 4. 确定P值,作出推断

- 查表法: W 界值表, 小样本 (n ≤50)
- **正态近似法**: 样本量较大(n > 50)则检验统计量近似服从正态分布,标准 化变换获得 Z 值

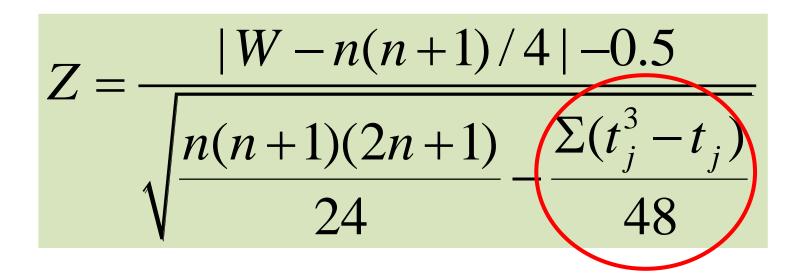
	单侧:0.05	0. 025	0.01	0.005
N	双侧:0.10	0.05	0.02	0. 010
5	0—15	\$ \$0.0= \t \ \$5	0.0 <u>= 3</u> 1 = 20/L	
6	2—19	0-21	1,0=9_1	.—.
7	3—25	2-26	0—28	. —.
8	5—31	3—33	1-35	0—36
9	8—37	5—140—40	3-142 - 42	1—44
10	10—45	8-47	5—50	3—52
11	13—53	10—56	7—59	5—61
12	17—61	13—65	9—69	7—71
13	21—70	17—74	12—79	9—82
14	25—80	21—84	15—90	12—93
15	30—90	25—95	19—101	15—105
16	35—101.	29—107	23—113	19—117
17	41-112	34—119	27—126	23—130
18	47—124	40—131	32—139	27—144
19	53—137	46—144	37—153	32—158
20	60—150	52—158	43—167	37—173
21	67—164	58—173	49—182	42—189
22	75—178	65—188	55—198	48—205
23	83—193	73—203	62-214	54—222
24	91—209	81—219	69—231	61—239
25	100—225	89—236	76—249	68—257
26	110—241	98—253	84—267	75—276
27	119—259	107—271	92—286	83—295
28	130—276	116—290	101-305	91-315
20	140—295	126—309	110—325	100—335
30	151—314	137—328	120—345	109—356
31	163—333	147—349	130—366	118—378
32	175—353	159—369	140—388	128-400
33	187—374	170—391	151-410	138—423
34	200—395	182—413	162—433	148-447
35	213—417-	195—435	173—457	159—471
36	227—439	208—458	185—481	171—495
37	241—462	221—482	198—505	182—521
38	256—485	235—506	211—530	194—547
39	271—509	249—531	224—556	207—573
40	286—534	264—556	238—582	220—600
41	302—559	279—582	252609	233—628
42	319—584	294—609	266—637	247—656
43	336—610	310—636	281—665	261—685
44	353—637	327—663	296—694	276—714
45	371—664	343—692	312—723	291—744
46	389—692	361—720	328—753	307—774
47		378—750	345—783	322—806
48	426—750	396—780	362-814	339—837
49	446—779	415—810	379—846	355—870
50	466—809	434—841	397—878	373—902

### 查表法

- 查表法: W 界值表, 小样本  $(n \le 50)$
- n = 20,  $\mathbb{R} = R_{-} = 26$
- $\alpha = 0.01$ , n = 20, W (37, 173)
- P < 0.01,拒绝 $H_0$ ,接受 $H_1$ ,样本与总体中位数的差异有统计学意义,可认为大骨节病病区面粉中DON含量高于非大骨节病地区

## 正态近似法

• 样本量较大 (n > 50) 时检验统计量近似服从正态分布,标准化变换获得 Z 值

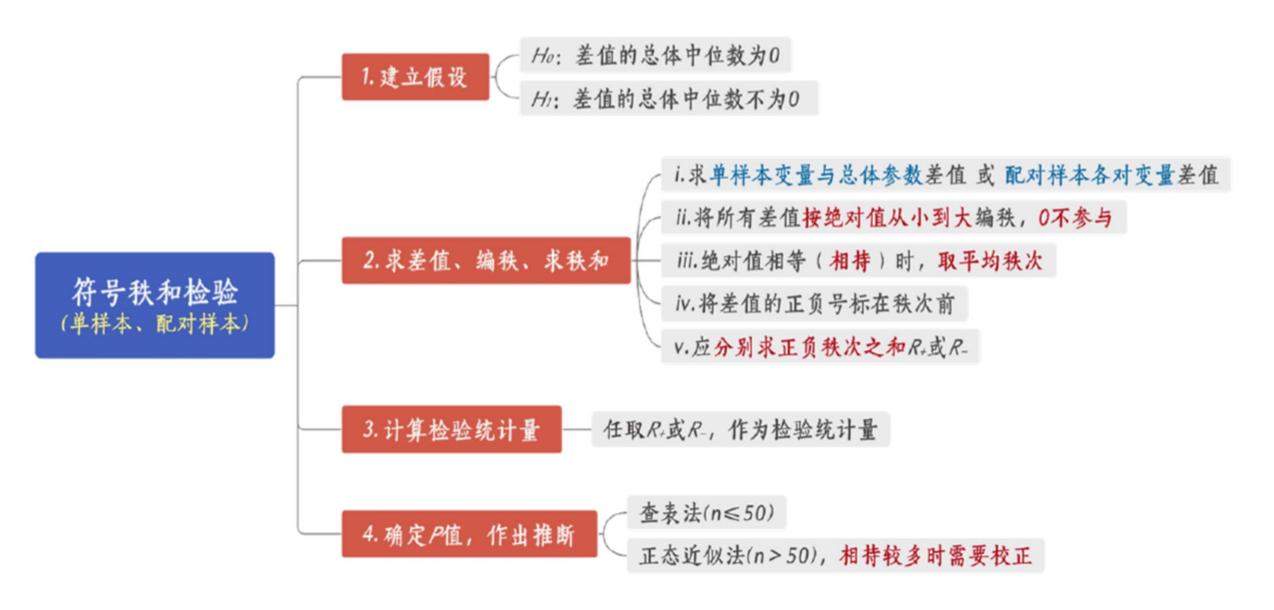


当相持个数较多时(>25%) 需进行校正

 $t_j$ : 第j 个相同秩次 (含正、负秩次)的个数

• P =0.004,拒绝 $H_0$ ,接受 $H_1$ ,样本与总体中位数的差异有统计学意义,可认为大骨节病病区面粉中DON含量高于非大骨节病地区

### 小结:



# 两组独立样本的比较

# (Wilcoxon秩和检验)

### 一、基本思想

$$H_0$$
:  $\mu_1 = \mu_2$ 

完全随机设计 两组独立样本 独立、正态、方差齐  $\longrightarrow t$  检验或方差分析 (推断两个总体均数是否相同)

不满足参数检验的条件 → Wilcoxon秩和检验

(推断两个总体分布形状(位置:中位数)是否 相同)

### Wilcoxon秩和检验 (Wilcoxon rank sum test)

- •如果 $H_0$ 成立,两样本可认为是从同一总体中抽取的随机样本
- 将二者混合后由小到大编秩,然后分别计算两组的秩和 $R_1$ 与 $R_2$ ,以<mark>样本例数较少的样本秩和</mark>为检验统计量W,此时W与其理论秩和 $n_1(N+1)/2$  ( $n_1$ 为样本例数,N为两样本例数之和) 应相差不大,其差别是由抽样误差引起;反之,若W与 $n_1(N+1)/2$ 相差较大,则有理由拒绝 $H_0$

### 二、两组定量数据的比较

- •例3 在某小学随机采集12岁男童和女童各10名的头发样品,检测发样中钙(Ca)含量(μg/g),数据见下表。男童与女童头发中Ca含量有无差异?
- \*正态分布拟合优度检验结果认为, 男童组与女童组的数据均不服 从正态分布

### 表3 12岁男、女童发样中Ca含量(µg/g)比较

男	童	女	童
Ca含量		Ca含量	
1843		842	
383		336	
406		742	
334		1367	
443		1623	
676		597	
771		1976	
358		1818	
607		643	
484		4534	
$n_1 = 10$		n <sub>2</sub> =10	

## 检验步骤

- 1. 建立检验假设,确定检验水准
  - $H_0$ : 男童与女童头发中Ca含量的总体分布相同
  - $H_1$ : 男童与女童头发中Ca含量的总体分布不同
  - $\alpha = 0.05$

- 2. 编秩、求秩和、计算检验统计量
  - 将两样本混合编秩次。若有相同值,处于不同组,取平均秩次;处于同一组,不必取平均秩次
  - •记样本量少的组为"1"组,其样本量为 $n_1$ ,其秩和 $R_1$ 为W。(如果样本量相同,则任取一个为W)。本例 $n_1=n_2=10$ ,则 $W=R_1$ 或者 $R_2$

表4 12岁男、女童发样中Ca含量(µg/g)比较

男	童	女童			
Ca含量	秩次	Ca含量	秩次		
1843	18	842	14		
383	4	336	2		
406	5	742	12		
334	1	1367	15		
443	6	1623	16		
676	11	597	8		
771	13	1976	19		
358	3	1818	17		
607	9	643	10		
484	7	4534	20		
$n_1 = 10$	R <sub>1</sub> =77	$n_2 = 10$	$R_2 = 133$		

## 3. 确定检验统计量

• 本例取*W*=77, **Z**=-2.117

## 4. 确定P值,作出推断结论

- 查表法: 小样本时, 可用查表法
- 正态近似法: 大样本时,  $n_1>10$  或  $n_2-n_1>10$

## 查表法

- 若: 下限<W<上限,则P值>表中概率值
- 若: W < 下限或 W > 上限,则 P 值 < 表中概率值
- "内大外小"
- 0.05 (78-132); 0.02 (74-136)
- 0.02< *P* < 0.05

2022/11/10 7-秩和检验

#### 



n,						n <sub>2</sub> -	n <sub>t</sub>				
(较小 n)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2				3-13	3-15	3-17	4-18	4-20	4-22	4-24	5-25
							3-19	3-21	3-23	3-25	4-26
3	6-15	6-18	7-20	8-22	8-25	9-27	10-29	10-32	11-34	11-37	12-39
			6-21	7-23	7-26	8-28	8-31	9-33	9-36	10-38	10-41
					6-27	6 - 30	7-32	7-35	7-38	8-40	8-43
							6-33	6-36	6-39	7-41	7-44
4	11-25	12-28	13-31	14-34	15-37	16-40	17-43	18-46	19-49	20-52	21-55
	10-26	11-29	12-32	13-35	14-38	14-42	15-45	16-48	17-51	18-54	19—57
		10-30	11-33	11-37	12-40	13-43	13-47	14-50	15-53	15-57	16-60
			10-34	10-38	11-41	11-45	12-48	12-52	13-55	1359	14-62
5	19-36	20-40	21-44	23-47	24-51	26-54	27—58	28-62	3065	31-69	33-72
	17-38	18-42	20-45	21-49	22-53	23-57	24-61	26-64	2768	28-72	29-76
	16 - 39	17-43	18-47	19-51	20-55	21-59	22-63	23-67	2471	25-75	26-79
	15-40	16-44	16-49	17-53	18-57	19-61	20-65	21-69	22-73	22-78	23-82
6	28-50	29-55	31-59	33-63	35-67	37-71	38-75	4080	42-84	44 - 38	45-92
	26-52	27-57	29-61	31-65	32-70	34—74	35-79	37-83	38-88	40-92	42-96
	24-54	25-59	27-63	28-68	29-73	30-78	32-82	33-87	34-92	36-96	37-101
	23-55	24-60	25-65	26-70	27-75	28-80	30-84	31-89	32-94	33-99	34-104
7	39-66	41-71	43-76	45-81	47-86	49—91	52-95	54-100	56-105	58-110	61-114
	36-69	38-74	40-79	42-84	44-89	46-94	48-99	50-104	52-109	54-114	56-119
	34-71	35-77	37-82	39-87	40-93	42-98	44-103	45-109	47-114	49-119	51-124
	32-73	34-78	35-84	37-89	38-95	40-100	41-106	43-111	44-117	45-122	47-128
8	51-85	54-90	56-96	59-101	62-106	64—112	67—117	69-123	72-128	75-133	77-139
	49-87	51-93	53-99	55-105	58-110	60-116	62-122	65-127	67-133	70-138	72-144
	45-91	47-97	49-103	51-109	53—115	56-120	58-126	60-132	62-138	64_144	66-150
	43-93	45-99	47-105	49-111	51-117	53-123	54-130	56-136	58-142	60-148	62-154
9	66-105	69-111	72-117	75-123	78-129	81-135	84-141	87-147	90-153	93-159	96-165
	62-109	65-115	68-121	71-127	73—134	76-140	79—146	82-152	84-159	87-165	90-171
	59—112	61-119	63—126	66 - 132	68 - 139	71—145	73—152	76-158	78—165	81-171	83-178
	36-115	58-122	6l—128	63-135	65-142	67—149	69—156	72-162	74-169	76-176	78-183
10	82-128	6-134	89-141	92-148	96-154	99-161	103—167	106-174	110—180	113-187	117-193
15	78-132	8 —139	84-146	88-152	91-159	94—166	97—173	300-180	103-187	107-193	110-200
\	74—136	1—143	79—151	82-158	85—165	88-172	91—179	93—187	96-194	99-201	102-208
1	71-139	73-147	76-154	79-161	81-169	84-176	86-184	89-191	92-198	94-206	97-213

# 临界值表的构造原理

- 在给定 $n_1$ ,  $n_2$ 下,根据 $R_1$ 的所有可能组合情况来构造的
- 例如,当 $n_1$  = 3, $n_2$  = 3时,在 $H_0$ 成立的条件下6个秩次1,2,3,4,5,6中有3个秩次属于第1样本的情形共有 $C_6^3$  = 20种,连同它们相应的秩和 $R_1$ 列于下表中

• 
$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

 秩号 1,2,3 1,2,4 1,2,5 1,2,6 1,3,4 1,3,5 1,3,6 1,4,5 1,4,6 1,5,6

 R1 6 7 8 9 8 9 10 10 10 11 12

 秩号 2,3,4 2,3,5 2,3,6 2,4,5 2,4,6 2,5,6 3,4,5 3,4,6 3,5,6 4,5,6

 R1 9 10 11 11 11 12 13 12 13 12 13 14 15

 $1/C_6^3 = 1/20 = 0.05$ 

## $H_0$ 成立时第1组秩和 $R_1$ 的分布(n=6, $n_1=3$ )

 $R_1$  6 7 8 9 10 11 12 13 14 15

单侧0.05或双侧0.10 所对应的界值区间 正是(6, 15)

 $P(R_1)$  0.05 0.05 0.10 0.15 0.15 0.15 0.15 0.10 0.05

#### 附表 10 / 似 临界值表(两独立样本比较的秩和检验用)

			附表 10	W临界	直表(网络	四工样本	比较的相	大和检验	用)		
				单侧	双位	则			T=15		
			1行	P = 0.05	P = 0	. 10		Jor of	115	\	
			2行	P = 0.023	P=0	. 05		1	2 3 4	5 6	7 0
			3行	P = 0.01	P = 0	. 02		-0-	000	0	- <b>-</b>
			4行	P = 0.003	P=0	. 01				- Lan	
$n_1$	-080-		- 66-			$n_2 - n_1$			ł		
(较小n	0	1	2	3	4	- 5	6	7	8	9	10
2	19-15		100	3—13	3—15	3—17	4—18	4-20	4-22	4-24	5—25
				-0 (18		BASE I	3—19		3-23		4-26
-	0-482	( 10	7 00	101	0.58	Tarra				9,21	erseite
3	6—15	6—18		8—22		9—27				11-37	
4				7—23		8—28	8-31			10—38	
	THUMBI						7—32				8-43
							6-33	6-36	6—39	7-41	7—44
4	11—25	12-28	13-31	14-34	15—37	16-40	17-43	18-46	19-49	20-52	21-55
	10-26	11-29	12-32	13-35	14-38	14-42	15-45	16-48	17-51	18-54	19—57
		10-30	11-33	11-37	12-40	13-43	13-47	14-50	15-53	15-57	16-60
			10-34	10-38	11-41	11-45	12-48	12-52	13—55	13—59	14—62
5	19—36	20-40	21-44	23-47	24—51	26-54	27—58	28-62	30-65	3169	33—72
	17—38	18-42	20-45	21-49	22-53	23-57	24-61	26-64	27-68	28-72	29—76
	16-39	17-43	18-47	19-51	20-55	21-59	22-63	23-67	24-71	25-75	26-79
	15-40	16-44	16-49	17—53	18—57	19—61	20-65	21-69	22-73	22-78	23-82
6	28-50	29—55	31—59	33—63	35—67	37—71	38—76	40—80	42-84	44—88	46—92
				31-65							
				28-68							
	23—55	24—60	25—65	26-70	27—75	28-80	30-84	31-89	32-94	33—99	34—104
7	39—66	41-71	43—76	45-81	47—86	49—91	52—95	54—100	56—105	58—110	61—114
				42-84							
74	34-71			39—87							
	32-73			37—89							
8	51—85			59—101							123
				55—105							
	45—91										
	8 43—93										
9	66—105	69—111	72—117	75—123	78—129	81—135	84—141	87—147	90-153	03—150	06—165
				71—127							
				66—132							
				63—135							
10	82—128										
10				92—148 88—152							
				82—158							
				79—161							
			107	101	107	3, 170	50 104	- 171	-2 170	7 200	21 413

# 正态近似法

• 正态近似法: 大样本,  $n_1 > 10$  或  $n_2 - n_1 > 10$ 

$$Z = \frac{|W - n_1(N+1)/2| - 0.5}{\sqrt{n_1 n_2(N+1)/12}}$$
$$= 2.078$$

- P=0.034,按 $\alpha=0.05$  水准拒绝 $H_0$ ,接受 $H_1$ ,差异有统计学意义
- 男童组平均秩为77/10=7.7,女童组平均秩为133/10=13.3,可认为女童的头发中Ca含量高于男童

# 正态近似法

• 当数据包含相同秩时,秩和检验统计量W的精确分布会改变,同时,W的标准差必须进行如下调整:

$$\sigma_{W} = \sqrt{\frac{n_{1}n_{2}}{12N(N-1)} \left[ N^{3} - N - \sum_{i=1}^{j} (t_{i}^{3} - t_{i}) \right]}$$

• j 为出现相同秩的总次数, t 为第 i 次相同秩的个数

45

## 三、两组等级资料的比较

- •例4 为了研究某种药物对两种老年慢性支气管炎的治疗效果,用 该药分别治疗单纯型患者100例、单纯型合并肺气肿患者80例, 治疗结果见下表。
- 试分析该药治疗两种类型老年慢性支气管炎的疗效是否不同?

## 表5 某药治疗两种类型老年慢性支气管炎的疗效

疗效	A组	B组	合计
控制1	58	41	99
显效2	12	7	19
有效3	21	22	43
无效4	9	10	19
合计	100	80	180

## 1. 建立检验假设

- $H_0$ : 该药治疗两种类型老年慢性支气管炎疗效的总体分布相同
- $H_1$ : 该药治疗两种类型老年慢性支气管炎疗效的总体分布不同
- $\alpha = 0.05$

## 2. 排序、编秩、求秩和

- 求各级别合计数
- 确定秩次范围
- 计算各级别平均秩次
- 求秩和

## 表6 某药治疗两种类型老年慢性支气管炎的疗效

<b>→</b>			<b>新光</b> 类国	世国 · 亚松科为 ·	秩和		
疗效	A组 	B组	百月	秩次范围 	平均秩次	A组	B组
控制1	58	41	99	1~99	50	2900	2050
显效2	12	7	19	100~118	109	1308	763
有效3	21	22	43	119~161	140	2940	3080
无效4	9	10	19	162~180	171	1539	1710
合计	100	80	180	-	-	8687	7603

# $C = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{J} (t_i^3 - t_i)}{N^3 - N}$

## 3. 计算检验统计量

• 正态近似法

$$Z = \frac{\left|7603 - 80 \times (180 + 1)/2\right| - 0.5}{\sqrt{80 \times 100 \times (180 + 1)/12}} = 1.0450$$

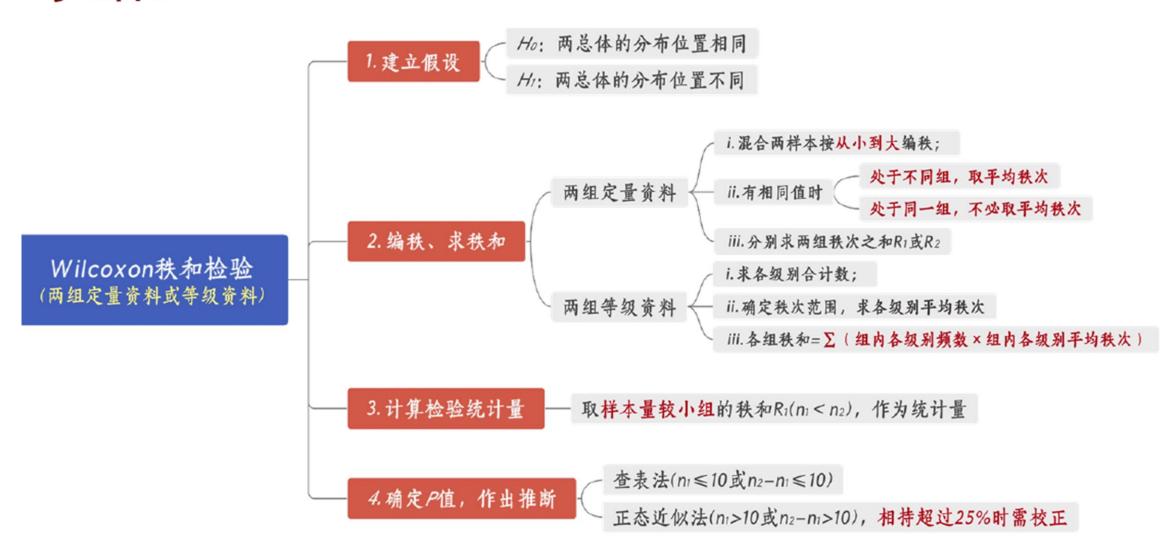
校正后检验 统计量变大。 如何理解?

$$Z_c = \frac{1.0450}{\sqrt{0.8177}} = 1.1540$$

## 2. 确定P值,给出推断结论

- 本例 Zc=1.1540, 故 P>0.05, 按  $\alpha=0.05$  水准, 不拒绝 $H_0$
- 尚不能认为该药治疗两组类型老年慢性支气管炎疗效的总体分布不同

## 小结:



## 从化学家到统计学家---好奇、热爱、坚持

- 青年时代做过商船水手、工人、树医等
- 1917年毕业于宾夕法尼亚军事学院,获得理学士学位
- 1921年毕业于拉特格斯大学,获得理科(化学)硕士学位
- 1924年毕业于康奈尔大学,获物理化学博士学位
- Wilcoxon在博伊斯·汤普森研究所担任农作物保护高级研究员时,认真学习《Statistical Methods for Research Workers》
- 1945年, Wilcoxon在工作中提出了一种统计方法, 同年刊登在《生物统计学》 杂志上。"Wilcoxon秩和统计量"与"Wilcoxon符号秩和统计量"
- Wilcoxon兴趣广阔,才华横溢,充满热情。音乐家,吉他和弦乐器;语言学家,精通英文、荷兰文、俄文、盲文;喜欢骑自行车、爬树。。。



Frank Wilcoxon
1892.09~1975.11.18
Irish American
Fields: Chemistry, Statistics

# 多组独立样本的比较

# (Kruskal-Wallis检验)

# 一、基本思想

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_g$$

完全随机设计 多组独立样本 |独立、正态、方差齐 | 方差分析

(推断多个总体均数是否相同)

不满足方差分析的条件→ Kruskal-Wallis秩和检验 (推断多个总体分布的位置是否相同)

## Kruskal-Wallis 秩和检验 (K-W检验 或 H检验)

• **基本思想**: 用所有**观测值的秩**代替原始观测值进行单因素方差分析。检验统计量为:

$$H = \frac{12}{N(N+1)} \sum \frac{R_i^2}{n_i} - 3(N+1)$$

• 其实质是用秩计算组间变异,当组间变异较大时,有理由认为组间存在差异。具体通过H分布计算P值获得推断结论

# 二、多组定量数据的比较

- •例5 为了解不同剂量的DON对新西兰家兔膝关节软骨和滑膜的损伤情况,将15只新西兰家兔按体重随机分为对照组、低剂量组和高剂量组,分别注射无菌生理盐水、0.05μg/g和0.10μg/g剂量DON毒素进行实验处理,实验期满后测定关节冲洗液中肿瘤坏死因子(TNF-α)的水平(μg/L),获得数据见下表。
- ·比较3组家兔关节冲洗液TNF-α测定结果是否具有统计学差异?

## 表7 3组家兔关节冲洗液 $TNF-\alpha$ ( $\mu g/L$ )测定结果

对照组	低剂量组	高剂量组
0.218	0.253	0.695
0.051	0.558	0.530
0.186	0.352	0.645
0.198	0.284	0.621
0.036	0.487	0.384

## 1. 建立检验假设,确定检验水准

- $H_0$ : 3组家兔关节冲洗液TNF- $\alpha$ 测定结果的总体分布相同
- $H_1$ : 3组家兔关节冲洗液TNF- $\alpha$ 测定结果的总体分布不全相同
- $\alpha = 0.05$

## 2. 编秩、求秩和

- 编秩方法与两组定量数据比较相同(混合编秩、不同组存在相持,取平均秩次)
- 先将三组TNF- $\alpha$ 的数值由小到大统一编秩,将各组秩分别相加得每组秩和 $R_i$ ,见下表

## 表8 3组家兔关节冲洗液 $TNF-\alpha$ ( $\mu g/L$ )测定结果

对照组		低剂	量组	高剂量组		
TNF-α	秩次	TNF-α	秩次	TNF-α	秩次	
0.218	5	0.253	6	0.695	15	
0.051	2	0.558	12	0.530	11	
0.186	3	0.352	8	0.645	14	
0.198	4	0.284	7	0.621	13	
0.036	1	0.487	10	0.384	9	
$R_i$	15		43		62	
$n_i$	5		5		5	

## 3. 计算检验统计量

$$H = \frac{12}{N(N+1)} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{R_i^2}{n_i} - 3(N+1)$$

• 本例*H* =11.18

# 检验统计量的构造原理

• 当 $H_0$ 成立时,可以证明

• 
$$\mu_{R_i} = \frac{n_i(N+1)}{2}$$
;  $\sigma_{R_i}^2 = \frac{n_iN(N+1)}{12}$ 

• 检验统计量为

• 
$$H = \sum_{i=1}^{k} \frac{\left(R_i - \mu_{R_i}\right)^2}{\sigma_{R_i}^2} = \sum_{i=1}^{k} \frac{\left(R_i - n_i(N+1)/2\right)^2}{n_i N(N+1)/12}$$

# 检验统计量的构造原理

#### • 检验统计量

• 
$$H = \sum_{i=1}^{k} \frac{\left(R_i - \mu_{R_i}\right)^2}{\sigma_{R_i}^2} = \sum_{i=1}^{k} \frac{\left(R_i - n_i(N+1)/2\right)^2}{n_i N(N+1)/12}$$

• = 
$$\frac{12}{N(N+1)} \left( \sum_{i=1}^{k} \frac{R_i^2}{n_i} \right) - 3(N+1)$$

## 4. 确定P值,作出推断

- 当组数 k > 3,或有  $n_i > 5$  时,H 近似服从自由度为v = k 1的 $\chi^2$ 分布,可查  $\chi^2$  界值表
- P < 0.005,拒绝  $H_0$ ,接受  $H_1$
- 可认为三组家兔关节冲洗液TNF-α测定结果的差异有统计学意义

# 三、多组等级变量数据的比较

- •例6 为了研究果酸的抗角化作用,将24只纯种新西兰实验用大白兔右耳制成痤疮模型,随机分为三组,采用不同的治疗方案进行治疗,观察治疗后的病理变化情况,结果见下表
- 试分析三组治疗方案的疗效有无差异?

## 表9 三组动物治疗后痤疮的病理变化情况

病理变化	例数					
<b>州连文化</b>	A	В	C			
-	7	6	6			
+	1	2	2			
++	1	2	0			
+++	1	0	2			
+++	10	10	10			

1. 建立检验假设,确定检验水准

•  $H_0$ : 三组治疗方案疗效的总体分布位置相同

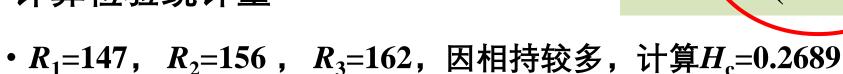
•  $H_1$ : 三组治疗方案疗效的总体分布位置不全相同

•  $\alpha = 0.05$ 

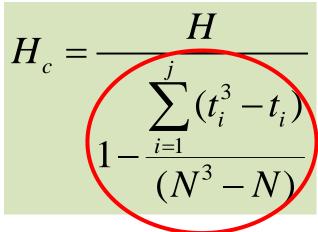
## 表9 三组动物治疗后痤疮的病理变化情况

病理变		例数		. <u> </u>	<b>人</b> 」 秩次	平均	秩和		
化	A	В	C	合计	范围	秩次	A	В	C
-	7	6	6	19	1~19	10	70	60	60
+	1	2	2	5	20~24	22	22	44	44
++	1	2	0	3	25~27	26	26	52	0
+++	1	0	2	3	28~30	29	29	0	58
合计	10	10	10	30	-	=	147	156	162

- 2. 编秩、求秩和
- 3. 计算检验统计量



- 以 v=2查 $\chi^2$ 界值表,得 0.9 > P > 0.75
- 4. 不拒绝 $H_0$ ,尚不能认为三种治疗方案的疗效不同



# 四、多组样本间的多重比较

- 多个样本比较的秩和检验其结论认为各总体分布的中心位置不同时,常需进一步作两两比较的秩和检验
- 多组独立样本间多重比较的秩和检验方法较多,常用的有Nemenyi 法、扩展的 t 检验等

## Nemenyi 法

• 
$$C = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{j} (t_i^3 - t_i)}{(N^3 - N)}$$

### 表8 3组家兔关节冲洗液 $TNF-\alpha$ ( $\mu g/L$ )测定结果

对照组		低剂量组		高剂量组	
TNF-α	秩次	TNF-α	秩次	TNF-α	秩次
0.218	5	0.253	6	0.695	15
0.051	2	0.558	12	0.530	11
0.186	3	0.352	8	0.645	14
0.198	4	0.284	7	0.621	13
0.036	1	0.487	10	0.384	9
$R_i$	15		43		62
$n_i$	5		5		5

### • 多重比较

1. 低剂量-对照

$$> \chi^2 = 3.92$$

2. 高剂量-对照

$$> \chi^2 = 11.05$$

3. 高剂量-低剂量

$$> \chi^2 = 1.80$$

• 界值:  $\chi^2_{0.05,2} = 5.99$ 

## 小结:



2022/11/10 7-秩和检验 75

# 随机化区组设计资料的秩和检验

(Friedman检验)

## 一、随机区组设计资料的秩和检验

- Friedman秩和检验,也称为M检验
- •例7 为了研究给药方式与血药浓度的关系,将12只大鼠按窝别相同、体重相近组成4个区组,每个区组内的3只大鼠随机分配至A、B、C三个不同给药方式的处理组中,检测给药后同一时间大鼠的血药浓度,结果见下表
- 请分析不同给药方式的血药浓度是否不同?

### 表8-6不同给药方式时大鼠的血药浓度 (µg/ml)

区组号	$\mathbf{A}$		В		$\mathbf{C}$	
	血药浓度	秩次	血药浓度	秩次	血药浓度	秩次
1	31.6	3	28.9	2	25.4	1
2	29.9	1	30.4	2	32.2	3
3	28.4	3	26.6	1	27.8	2
4	30.8	3	27.0	1	29.7	2
$R_j$		10		6		8

- 1. 建立检验假设,确定检验水准
  - $H_0$ : 不同给药方式血药浓度的总体分布位置相同
  - $H_1$ : 不同给药方式血药浓度的总体分布位置不全相同
  - $\alpha = 0.05$

- 2. 编秩、求秩和
- 分别在各区组内将数据从小到大编秩,如遇相同数值,则取其平均秩次
- •分别将各处理组的秩次相加,得到相应各处理组的秩和 $R_{\rm j}$

### 3. 计算检验统计量

• 
$$M = \sum_{j=1}^{k} (R_j - \overline{R})^2$$
 ;  $M = (10 - 8)^2 + (6 - 8)^2 + (8 - 8)^2$ 

• 当区组数 b <=15、处理组数k <=15时,查M临界值表(随机区组比较的Friedman秩和检验用),得出P值作出推断结论

- 3. 计算检验统计量
- 当 k 或 b 超出 M 界值表的范围时

• 
$$\chi^2 = \frac{12}{bk(k+1)} \sum_{j=1}^k R_j^2 - 3b(k+1)$$
 ,  $\nu = k-1$ 

4. 本例: M=8,  $M_{0.05}=6.5$ , 接 $\alpha=0.05$  水准, 拒绝  $H_0$ , 接受 $H_1$ 

• 认为三种不同给药方式血药浓度的总体分布位置不同

## 二、多重比较

### • 正态近似法

• 
$$Z = \frac{\overline{R_i} - \overline{R_j}}{\sigma_{\overline{R_i}} - \overline{R_j}} = \frac{\overline{R_i} - \overline{R_j}}{\sqrt{\frac{k(k+1)}{6b}}}$$

## 三、关于多重比较

- 检验水准校正
- •针对不同目的的、专门的多重比较的方法

#### • 主要贡献:

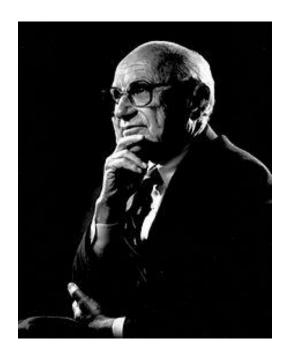
- ▶ 芝加哥经济学派、货币主义、对菲利普斯曲线的批评
- ▶ 主张: 自由市场经济、小政府

#### • 主要获奖

- ▶ 约翰·贝茨·克拉克奖 (1951)
- ▶ 诺贝尔经济学奖(1976年)
- ▶ 总统自由勋章 (1988)
- ▶ 美国国家科学奖章 (1988)

## The Friedman test is a non-parametric statistical test developed by Milton Friedman

- 1. "The use of ranks to avoid the assumption of normality implicit in the analysis of variance". Journal of the American Statistical Association. 32 (200): 675–701. 1937
- 2. "A correction: The use of ranks to avoid the assumption of normality implicit in the analysis of variance". Journal of the American Statistical Association. 34 (205): 109, 1939
- 3. "A comparison of alternative tests of significance for the problem of m rankings". The Annals of Mathematical Statistics. 11 (1): 86–92. 1940



- Milton Friedman
- 1912.7.31-2006.11.16
- 美国
- Rutgers University (BA),1932
- University of Chicago (MA),1933
- Columbia University
   (PhD), 1946

## 总结

- 1. 配对设计资料的比较: Wilcoxon符号秩和检验
- 2. 两组独立样本的比较: Wilcoxon秩和检验
- 3. 多组独立样本的比较: Kruskal-Wallis检验
- 4. 随机区组设计资料的比较: Friedman检验
- 5. 多重比较

## 总结

### 1. 非参数检验的优点

- 不受总体分布的限制,适用范围广
- 适宜不服从正态分布的定量变量、等级变量、开口资料等

### 2. 非参数检验的不足

对于符合参数检验条件的资料,进行秩和检验时将精确测量值变成顺序的秩,将丢失部分信息,造成检验功效下降

### 文献实例:

### POCT血气分析仪的性能验证及质量控制

薛荣亮 许凤 西安交通大学附属第二医院麻醉科 (西安 710004)

文章编号: 1006-6586(2017)03-0074-05 中图分类号: TH776 文献标识码: A

收稿日期:

2016-12-12

内容提要:目的:采用不同仪器不同方法测定血气、电解质、红细胞压积,并对结果进行比较验证

分析 讨论 POCT 血气分析仪与传统血气分析仪相比在临床上的先进性、易用性及其质量控制。方法:在 4 台不同仪器上检测 46 例住院病人的血气、电解质、红细胞压积。结果:① POCT 的 EDAN i15 血气分析仪的测量结果 pH、PO<sub>2</sub>、PCO<sub>2</sub>、K<sup>+</sup>、Na<sup>+</sup>、Cl<sup>-</sup>、Ca<sup>++</sup>、Hct 与传统的 Nova-CCX 血气分析仪测量结果较一致,在医学允许误差范围内无显著性差异。② POCT 的 EDAN i15 血气分析仪的测量结果 K<sup>+</sup>、Na<sup>+</sup> 与 Olympus Au2700 全自动生化分析仪测量结果较一致,在医学允许误差范围内无显著性差异。③ POCT 的 EDAN i15 血气分析仪的测量结果 Hct 与 Sysmex2100 全自动血球计数仪测量结果较一致,在医学允许误差范围内无显著性差异。

关键词: 血气分析 质量控制 POCT

• 研究设计: 自身配对设计

• 统计分析: 配对符号秩和检验

### 结果

配对样本的差值服从正态分布的参数有 pH、

PCO<sub>2</sub>、Na+、K+、Ca++、Cl-, 不服从正态的参

数有 PO2、Hct, 对配对样本的差值服从正态分

布的参数进行配对样本 T 检验(表 4), 其原假

设为配对样本的差值均值为零。

#### 假设检验

表 4. 配对样本 T 检验						
项目	pН	PCO <sub>2</sub>	Na+	K+	Ca++	Cl
T 统计量	-1.058	1.900	8.031	14.619	5.440	-1.269
P值	0.296	0.064	0.000	0.000	0.000	0.211
拒绝原假设	否	否	是	是	是	否

对配对样本的差值不服从正态的参数进行秩 和检验,其原假设为配对样本的差值中位数为零 (表 5)。

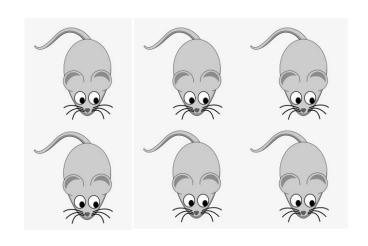
表 5. 秩和检验		
项目	PO <sub>2</sub>	Hct
秩和统计量	2170	2501
P 值	0.812	0.005
拒绝原假设	否	是

## 思考题

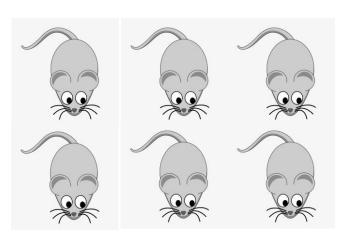








比较心肌梗死面积



### A组 (n=30, mean=1.1)

### B组 (n=30, mean=3.6)

• 0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1.1,1.7,2.5....9.5,12.9,35.6

• 数据有何特点?如何进行两组间的比较?

### 数据特点:

定量资料,偏态分布,0很多,数据变换效果不理想

### A方法:

- 将数据根据取值变换成二分类变量(0=无梗死,>0=梗死)
- 采用卡方检验,比较两组的心肌梗死率
- 损失数据信息,检验效能低 (P=0.29)

### B方法:

- 采用 t 检验, 比较两组的平均心肌梗死面积
- 数据不满足t检验的前提条件,检验效能低 (P=0.08)

### C方法:

- 采用秩和检验,比较两组心肌梗死面积的程度
- 适宜的方法, P = 0.03









Peking University Center for Public Health and Epidemic Preparedness & Response





2022/11/10 7-秩和检验 7-秩和检验 94