信息学中的概率统计

王若松

前沿计算研究中心
北京大学

连续随机变量

1. 随机变量的概率分布函数
2. 连续随机变量的概率密度函数
3. 连续随机变量的数学期望和方差
4. 常用连续分布
5. 连续随机变量函数的分布

1. 随机变量的概率分布函数

- 给定随机变量X和实数x，定义$F(x) = P(X \le x)$为随机变量X的**分布函数**
- 例1：在半径为r的圆内随机抛一点。用随机变量X表示此点到圆心的距离。求分布函数?
  - $F(x) = \frac{\pi x^2}{\pi r^2} = \left(\frac{x}{r}\right)^2$
- 例2：随机变量X在[0, 1]中均匀取值。求分布函数?
  - $F(x) = 0$ 当 $x \le 0$
  - $F(x) = x$ 当 $0 \le x \le 1$
  - $F(x) = 1$ 当 $x \ge 1$
- 例3：随机变量X服从参数为p的伯努利分布。求分布函数?
  - $F(x) = 0$ 当 $x < 0$
  - $F(x) = 1 - p$ 当 $0 \le x < 1$
  - $F(x) = 1$ 当 $x \ge 1$

1. 随机变量的概率分布函数

- 分布函数的性质
- 性质1（**有界性**）： $0 \le F(x) \le 1$， $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$， $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$
- 性质2（**单调性**）： $F(x)$单调不减
- 性质3（**右连续**）： 对于任意x_0， $F(x_0 + 0) = F(x_0)$
  - 分布函数是否左连续?

- $F(x)$满足上述三条性质**等价于**$F(x)$是某个随机变量 X的分布函数

- 例：判断$F(x) = \dfrac{\arctan(x)}{\pi} + \dfrac{1}{2}$是否是分布函数

1. 随机变量的概率分布函数

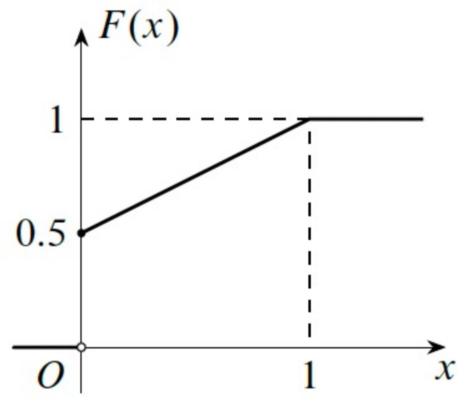
- 利用分布函数求概率

- $P(a < X \leq b)$
  - $F(b) - F(a)$
- $P(a \leq X \leq b)$
  - $F(b) - F(a-0)$
- $P(X = a)$
  - $F(a) - F(a-0)$
- $P(X \geq a)$
  - $1 - F(a-0)$

2. 连续随机变量的概率密度函数

- 例1：在半径为r的圆内随机抛一点。用随机变量X表示此点到圆心的距离。
- 例2：随机变量X在[0, 1]中均匀取值。

- X是否为离散随机变量?
- 对于随机变量X，若存在$f(x)$使得$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$，则$X$为**连续随机变量**，$f(x)$为**概率密度函数**
- 例1：$F(x)=\frac{\pi x^2}{\pi r^2}=\left(\frac{x}{r}\right)^2$
  - $f(x)=\frac{2x}{r^2}$
- 例2： 随机变量X在[0, 1]中均匀取值
  - $f(x)=1$ 如果$x\in[0,1]$，否则$f(x)=0$
- 例3：



2. 连续随机变量的概率密度函数

- 概率密度函数的性质
- 性质1（**非负性**）：$f(x) \geq 0$
- 性质2（**正则性**）：$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$

- 在$F(x)$导数存在的点，有$F'(x) = f(x)$

- 例：已知 $f(x) = c \cdot \frac{1}{1+x^2}$为概率密度函数，求常数$c$和分布函数 $F(X)$?
  - $c = 1/\pi$， $F(x) = \frac{\arctan(x)}{\pi} + \frac{1}{2}$

2. 连续随机变量的概率密度函数

- 对于随机变量X，若存在$f(x)$使得$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt$，则$X$为**连续随机变量**，$f(x)$为**概率密度函数**

- 连续随机变量的分布函数$F(x)$一定是连续函数
  - $F(x+\Delta x)-F(x)=\int_{x}^{x+\Delta x}f(t)dt\to 0$
- 连续随机变量取任一点的概率均为0
- $P(a<X\le b)=P(a\le X\le b)=P(a\le X<b)=P(a<X<b)=\int_{a}^{b}f(t)dt$
- 概率密度函数是否和分布函数一一对应？
  - 可以随意改变概率密度函数在有限个点的值而不影响对应的分布函数

3. 连续随机变量的数学期望和方差

- 回顾：对于离散随机变量X，若$\sum_i |x_i p_i| < \infty$，则$X$的数学期望为 $E(X) = \sum_i x_i p_i$
- 对于连续随机变量X，若$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)|x|dx < +\infty$，则$X$的数学期望为 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot x \cdot dx$
- 例1： 随机变量X在[0, 1]中均匀取值，求数学期望？
  - $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot x \cdot dx = \int_0^1 x \cdot dx = \frac{1}{2}$
- 例2： $f(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^2}$，求数学期望？
  - $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot |x| \cdot dx = +\infty$，数学期望不存在

PEKING UNIVERSITY 北京大学

3. 连续随机变量的数学期望和方差

- 给定随机变量X和函数g，求$Y = g(X)$的数学期望

- 例： 随机变量X在[0, 1]中均匀取值，求$E(X^2)$
  - 方法1： X^2的概率密度函数为$\frac{1}{2\sqrt{x}}$当$x \in [0,1]$，数学期望为$\int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot x \cdot dx = \frac{1}{3}$
  - 方法2：$\int_0^1 f(x) \cdot x^2 \cdot dx = \frac{1}{3}$

- 一般结论：$E\big(g(X)\big) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot g(x) \cdot dx$

连续随机变量的数学期望和方差

- 回顾：数学期望的性质

- 对于常数a和b，$E(aX+b)=a\cdot E(X)+b$
- 对于两个函数g_1和g_2，$E(g_1(X)\pm g_2(X))=E(g_1(X))\pm E(g_2(X))$

- $P\big(X\le E(X)\big)>0$
  - 若$P\big(X\le E(X)\big)=0$
  - 根据分布函数的连续性，存在$\epsilon>0$，$P(X\le E(X)+\epsilon)\le 1/2$
  - $E(X)\ge P(X\ge E(X)+\epsilon)\cdot(E(X)+\epsilon)+P(X\le E(X)+\epsilon)\cdot E(X)>E(X)$

3. 连续随机变量的数学期望和方差

- **马尔可夫不等式**：若X为**非负**随机变量，若$E(X) > 0$，对于$a > 0$，有

$$P(X \geq a \cdot E(X)) \leq \frac{1}{a}$$

- 证明

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot x \cdot dx \geq \int_{a \cdot E(X)}^{+\infty} f(x) \cdot x \cdot dx \geq \int_{a \cdot E(X)}^{+\infty} f(x) \cdot a \cdot E(X) \cdot dx$$

$$= a \cdot E(X) \cdot \int_{a \cdot E(X)}^{+\infty} f(x) \cdot dx = a \cdot E(X) \cdot P(X \geq a \cdot E(X))$$

3. 连续随机变量的数学期望和方差

- 给定随机变量X，若$E\left[\left(X-E(X)\right)^2\right]$存在，定义$\mathrm{Var}(X)=E\left[\left(X-E(X)\right)^2\right]$为$X$的**方差**
- 给定随机变量X，定义$\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{Var}(X)}$为$X$的**标准差**

- 例： 随机变量X在[0, 1]中均匀取值，求方差和标准差?
  - $\mathrm{Var}(X)=\int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)^2dx=\frac{1}{12}$
  - $\sigma(X)=\frac{1}{\sqrt{12}}$

3. 连续随机变量的数学期望和方差

- 回顾：方差的性质

- 对于常数a和b，$\mathrm{Var}(aX+b)=a^2\,\mathrm{Var}(X)$，$\sigma(aX+b)=|a|\cdot\sigma(X)$
- $\mathrm{Var}(X)=E(X^2)-(E(X))^2$

- 例： 随机变量X在[0, 1]中均匀取值， $\mathrm{Var}(X)=E(X^2)-\left(E(X)\right)^2=\frac{1}{3}-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{12}$

- **切比雪夫不等式**：若 $\sigma(X)>0$，对于任意$c>0$，

$$P(|X-E(X)|\geq c\cdot\sigma(X))\leq 1/c^2$$

4. 常用连续分布

- 令随机变量X取值范围为(a,b)，且当$x\in(a,b)$，概率密度函数$f(x)=1/(b-a)$。称X服从区间 (a,b)上的**均匀分布**，记为$X\sim U(a,b)$
- 数学期望：$E(X)=\int_a^b t\cdot\frac{1}{b-a}dt=\frac{b+a}{2}$
- 方差
  - $E(X^2)=\int_a^b t^2\cdot\frac{1}{b-a}dt=\frac{b^3-a^3}{3(b-a)}$
  - $\mathrm{Var}(X)=E(X^2)-\left(E(X)\right)^2=\frac{(b-a)^2}{12}$

北京大学 PEKING UNIVERSITY

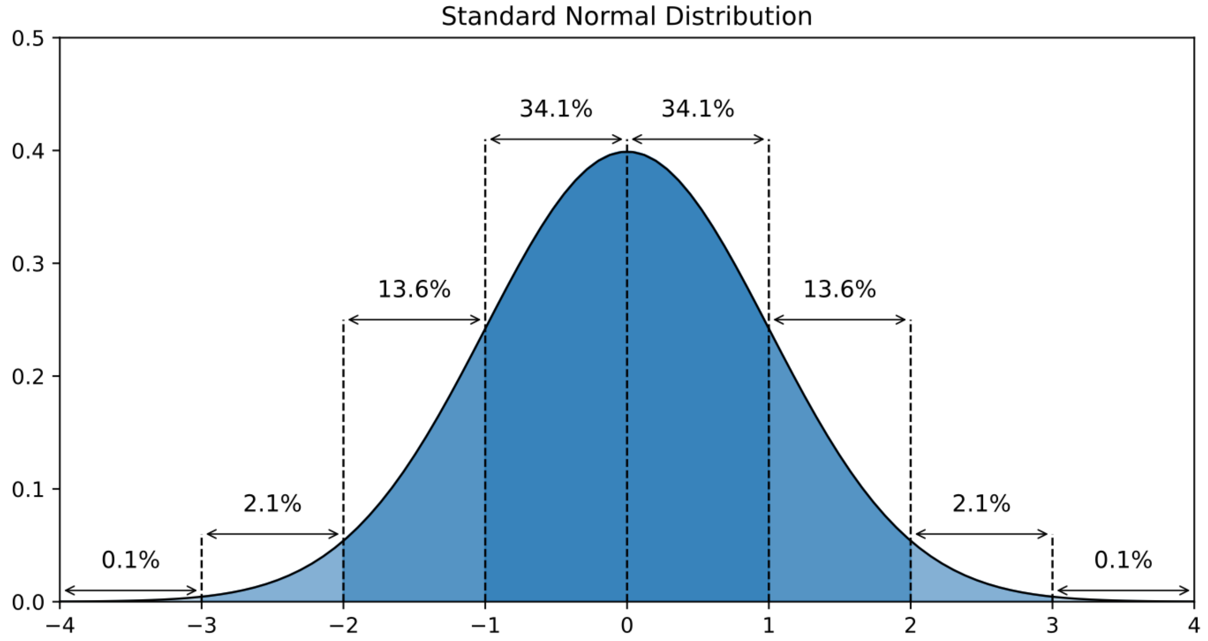
4. 常用连续分布

- 定义概率密度函数$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$。称$X$服从**标准正态（高斯）分布。**
  - 正则性：$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$
  - 对称性：$f(x) = f(-x)$
  - 最大值：$x = 0$
  - $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0$

- 数学期望：$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot x \cdot dx = 0$
- 方差：$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot x^2 \cdot dx = 1$
  - $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot x^2 \cdot dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot (-x) \cdot de^{-\frac{x^2}{2}} = (-x) \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1$

4. 常用连续分布

- 分布函数$F(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$
  - $F(x)+F(-x)=F(x)+P(X\geq x)=1$
  - $F(2)-F(-2)=0.9545$
  - $F(3)-F(-3)=0.9973$

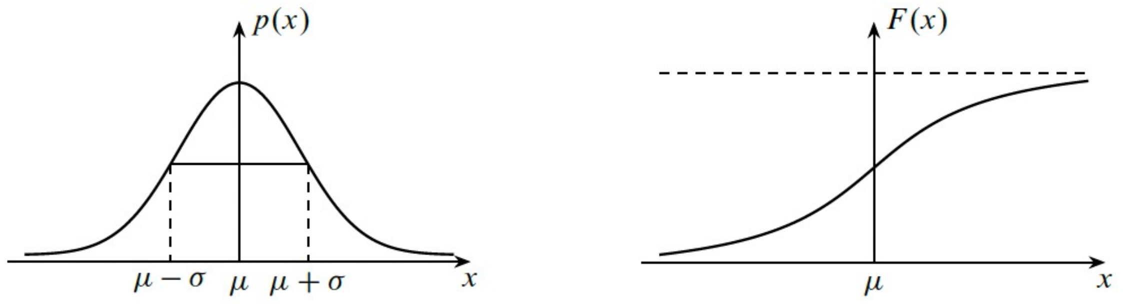


- 和切比雪夫不等式的比较?

北京大学 PEKING UNIVERSITY

4. 常用连续分布

- 对于实数 μ和 $\sigma > 0$，定义概率密度函数$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$。称随机变量$X$服从**正态（高斯）分布**，记为$X \sim N(\mu, \sigma)$。
  - 正则性： $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$
  - 对称性： $f(x)$关于$x = \mu$对称
  - 最大值： $x = \mu$
  - $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0$



(a) 密度函数 $p(x)$ (b) 分布函数 $F(x)$

- 验证正则性
- 令$y = \frac{x-\mu}{\sigma}$， $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} \cdot dy = 1$

4. 常用连续分布

- 一般正态分布与标准正态分布的联系

- 若随机变量 $X \sim N(\mu,\sigma)$，则$U = (X-\mu)/\sigma \sim N(0,1)$

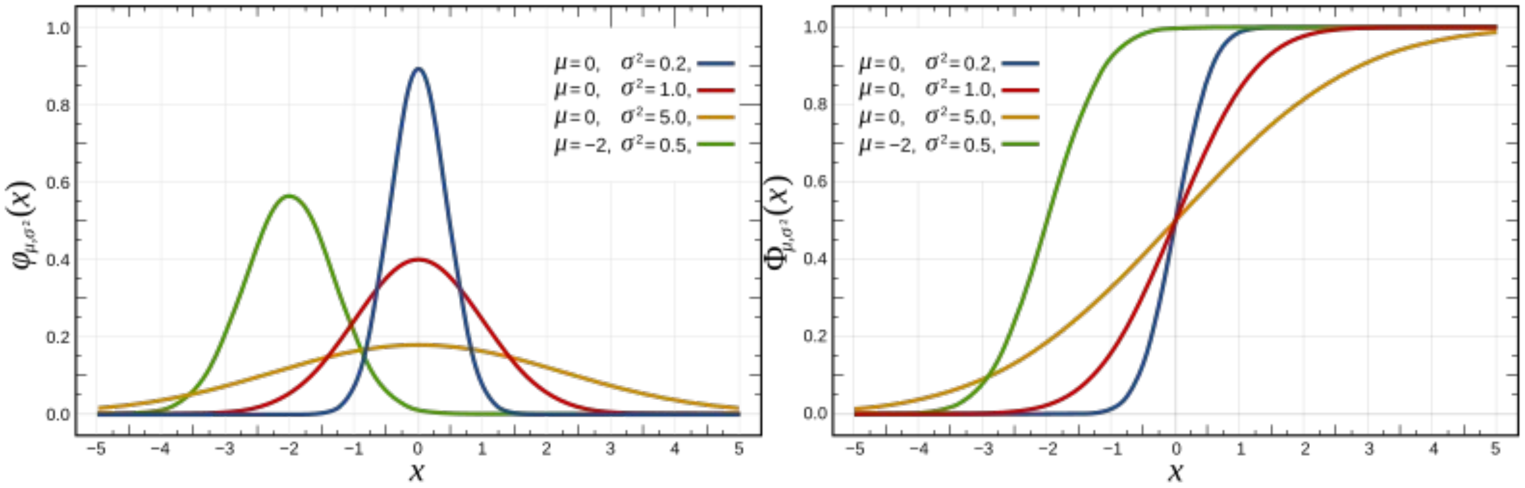
- 证明：
- 设X和U和分布函数分别为$F_X(x)$和 $F_U(u)$，概率密度函数分别为$f_X(x)$和 $f_U(u)$
- $F_U(u) = P(U \le u) = P(X \le \sigma u + \mu) = F_X(\sigma u + \mu)$
- $f_U(u) = \frac{\mathrm{d}F_U(u)}{\mathrm{d}u} = \frac{\mathrm{d}F_X(\sigma u+\mu)}{\mathrm{d}u} = f_X(\sigma u + \mu) \cdot \sigma = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}$

4. 常用连续分布

- 一般正态分布与标准正态分布的联系

- 若随机变量 $X \sim N(\mu,\sigma)$，则$U = (X-\mu)/\sigma \sim N(0,1)$

- 推论：若$X \sim N(\mu,\sigma)$
  - $E(X) = \mu$
  - $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$， $\sigma(X) = \sigma$
  - $P(|X-\mu| \leq 2\sigma) = 95.45\%$
  - $P(|X-\mu| \leq 3\sigma) = 99.73\%$



4. 常用连续分布

- 随机变量的标准化
- 若随机变量X期望为μ，标准差为σ，$Y=(X-\mu)/\sigma$为X的标准化随机变量
- $E(Y)=0$， $\mathrm{Var}(Y)=E(Y^2)=\sigma(Y)=1$
- 例子：X服从参数为1/2的伯努利分布，求标准化随机变量
  - $P(Y=+1)=1/2$， $P(Y=-1)=1/2$
  - 拉德马赫（Rademacher）分布，随机符号（random sign）

4. 常用连续分布

- 对于$\lambda > 0$，定义概率密度函数
  - $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$，当$x \geq 0$
  - $f(x) = 0$，当$x < 0$
- 称X服从指数分布，记为$X \sim \text{Exp}(\lambda)$

- 分布函数
  - $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$，当 $x \geq 0$
  - $F(x) = 0$，当$x < 0$

- 数学期望及方差?

4. 常用连续分布

- 指数分布无记忆性：若$X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$，对于$s,t > 0$，有$P(X > s + t|X > s) = P(X > t)$

- 证明：注意到$P(X > x) = 1 - P(X \leq x) = e^{-\lambda x}$

- 用 $N(t)$表示 t时间内设备故障次数，假设$N(t)$服从参数为λt的泊松分布，也即$P(N(t) = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$
- 第一次发生故障的时间 X 服从何种分布?
  - $P(X \leq t) = P(N(t) \geq 1) = 1 - e^{-\lambda t}$

4. 常用连续分布

- 用 $N(t)$表示 t时间内设备故障次数，假设$N(t)$服从参数为λt的泊松分布，也即$P(N(t)=k)=\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}$

- 第n次发生故障的时间X服从何种分布?
  - $P(X\le t)=P(N(t)\ge n)=1-P(N(t)<n)=1-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!}$
  - X的分布函数$F(x)=1-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{e^{-\lambda x}(\lambda x)^k}{k!}$
  - 概率密度函数$f(x)=\lambda e^{-\lambda x}-\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{\lambda e^{-\lambda x}(\lambda x)^{k-1}}{(k-1)!}-\frac{\lambda e^{-\lambda x}(\lambda x)^k}{k!}\right)=\frac{x^{n-1}\lambda^n e^{-\lambda x}}{(n-1)!}$

4. 常用连续分布

- 对于$\alpha > 0$，伽玛函数$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx$
- $\Gamma(1) = 1$，$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$，$\Gamma(\alpha+1) = \alpha \cdot \Gamma(\alpha)$
- 对非负整数n，$\Gamma(n+1) = n!$，$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{4^n \cdot n!} \cdot \sqrt{\pi}$

- 对于$\alpha, \lambda > 0$，定义概率密度函数
  - $f(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}$，当$x \geq 0$
  - $f(x) = 0$，当$x < 0$
- 称X服从**伽玛分布**，记为$X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$

- 验证正则性：$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

4. 常用连续分布

- 伽玛函数$\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty}x^{\alpha-1}e^{-x}dx$
- 对于$\alpha,\lambda>0$，定义概率密度函数
  - $f(x)=\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}$，当$x\geq 0$
  - $f(x)=0$，当$x<0$
- 称X服从**伽玛分布**，记为$X\sim\Gamma(\alpha,\lambda)$

- 验证正则性
- 令$y=\lambda x$，$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_0^{+\infty}\frac{x^{\alpha-1}\lambda^\alpha e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha)}dx=\int_0^{+\infty}\frac{y^{\alpha-1}e^{-y}}{\Gamma(\alpha)}dy=1$

4. 常用连续分布

- 伽玛函数$\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx$
  - 伽玛函数性质：$\Gamma(\alpha+1)=\alpha\cdot\Gamma(\alpha)$
- 对于$\alpha,\lambda>0$，定义概率密度函数
  - $f(x)=\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}$，当$x\geq 0$
  - $f(x)=0$，当$x<0$
- 数学期望
  - 令$y=\lambda x$，$\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f(x)dx=\int_0^{+\infty}\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^\alpha e^{-\lambda x}dx=\frac{1}{\lambda}\int_0^{+\infty}\frac{y^\alpha e^{-y}}{\Gamma(\alpha)}dy=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)\cdot\lambda}=\frac{\alpha}{\lambda}$

PEKING UNIVERSITY

4. 常用连续分布

- 伽玛函数$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$
  - 伽玛函数性质：$\Gamma(\alpha+1) = \alpha \cdot \Gamma(\alpha)$

- 对于$\alpha, \lambda > 0$，定义概率密度函数
  - $f(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}$，当$x \geq 0$
  - $f(x) = 0$，当$x < 0$

- $E(X^2)$
  - 令$y = \lambda x$，$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = \int_0^{+\infty} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha+1} e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda^2} \int_0^{+\infty} \frac{y^{\alpha+1} e^{-y}}{\Gamma(\alpha)} dy = \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(\alpha) \cdot \lambda^2} = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2}$
- $\mathrm{Var}(X) = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2} - \left(\frac{\alpha}{\lambda}\right)^2 = \frac{\alpha}{\lambda^2}$

4. 常用连续分布

- 对于$\alpha, \lambda > 0$，定义概率密度函数
  - $f(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}$，当$x \geq 0$
  - $f(x) = 0$，当$x < 0$
- 称X服从**伽玛分布**，记为$X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$
- 对非负整数n，$\Gamma(n+1) = n!$，$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{4^n \cdot n!} \cdot \sqrt{\pi}$

- 伽玛分布的常用特例：$\alpha = 1$
- 概率密度函数
  - $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$，当$x \geq 0$
  - $f(x) = 0$，当$x < 0$
- 指数分布。数学期望：$1/\lambda$，方差：$1/\lambda^2$

4. 常用连续分布

- 对于$\alpha, \lambda > 0$，定义概率密度函数
  - $f(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}$，当$x \geq 0$
  - $f(x) = 0$，当$x < 0$
- 称X服从**伽玛分布**，记为$X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$
- 对非负整数n，$\Gamma(n+1) = n!$，$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{4^n \cdot n!} \cdot \sqrt{\pi}$

- 伽玛分布的常用特例：$\alpha = n/2$，$\lambda = 1/2$，n为正整数
- 自由度为n的χ^2**（卡方）分布**，记为$\chi^2(n)$
- 数学期望：n，方差：$2n$
- 当$n = 1$，$f(x) = \sqrt{\frac{1}{2\pi x}} \cdot e^{-\frac{x}{2}}$

5. 连续随机变量函数的分布

- 给定连续随机变量X和函数g，求$Y = g(X)$的概率密度函数

- 回顾：离散情况
  - 若 $P(X = x_i) = p_i$，则对于$Y = g(X)$，有$P(Y = g(x_i)) = p_i$
  - 若某些$g(x_i)$相等，将概率相加

- 例1：X服从$(-4, 4)$上的均匀分布。求$Y = |X|$的概率密度函数
  - Y在 $y \in [0, 4)$上取值。$f_Y(y) = f_X(y) + f_X(-y) = \frac{1}{4}$

- 是否有 $f_Y(y) = \sum_{g(x)=y} f_X(x)$?

5. 连续随机变量函数的分布

- 给定连续随机变量X和函数g，求$Y = g(X)$的概率分布函数和概率密度函数
- 是否有 $f_Y(y) = \sum_{g(x)=y} f_X(x)$?
- 例2：X服从$(-4, 4)$上的均匀分布。求$Y = 2X$的概率密度函数
  - Y在 $y \in (-8, 8)$上取值。$f_Y(y) = f_X(y/2) = 1/8$?
- **概率可以相加，密度不能直接相加**

5. 连续随机变量函数的分布

- 例2：X服从$(0,1)$上的均匀分布。求$Y = X^2$的概率密度函数
  - $y \in (0,1)$，$P(Y \le y) = P(X^2 \le y) = \sqrt{y}$
  - $y \in (0,1)$，$f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}$

- 一般结论：设X为连续随机变量，若函数$y = g(x)$严格单调，其反函数$h(y)$有连续导数，则$Y = g(X)$的概率密度函数为
  - $f_Y(y) = f_X\big(h(y)\big) \cdot |h'(y)|$ 当 $y \in (\alpha, \beta)$
  - $f_Y(y) = 0$当 $y \notin (\alpha, \beta)$
  - 这里 $\alpha = \min\{g(-\infty), g(+\infty)\}$，$\beta = \max\{g(-\infty), g(+\infty)\}$

5. 连续随机变量函数的分布

- 一般结论：设X为连续随机变量，若函数$y=g(x)$严格单调，其反函数$h(y)$有连续导数，则$Y=g(X)$的概率密度函数为
  - $f_Y(y)=f_X\big(h(y)\big)\cdot|h'(y)|$ 当 $y\in(\alpha,\beta)$
  - $f_Y(y)=0$当 $y\notin(\alpha,\beta)$
  - 这里 $\alpha=\min\{g(-\infty),g(+\infty)\}$， $\beta=\max\{g(-\infty),g(+\infty)\}$

- 证明
  - 假设$g(x)$严格单调增，则$h(y)$也严格单调增
  - $Y=g(X)$仅在 (α,β) 取值
  - $F_Y(y)=P(Y\le y)=P(g(X)\le y)=P\big(X\le h(y)\big)=F_X(h(y))$
  - $f_Y(y)=f_X\big(h(y)\big)\cdot h'(y)$

5. 连续随机变量函数的分布

- 一般结论：设X为连续随机变量，若函数$y=g(x)$严格单调，其反函数$h(y)$有连续导数，则$Y=g(X)$的概率密度函数为
  - $f_Y(y)=f_X\big(h(y)\big)\cdot|h'(y)|$ 当 $y\in(\alpha,\beta)$
  - $f_Y(y)=0$当 $y\notin(\alpha,\beta)$
  - 这里 $\alpha=\min\{g(-\infty),g(+\infty)\}$， $\beta=\max\{g(-\infty),g(+\infty)\}$

- 例：$X\sim N(\mu,\sigma)$，若$a\neq 0$，求$Y=aX+b$的概率密度函数
  - $f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$， $g(x)=ax+b$， $h(y)=(y-b)/a$， $|h'(y)|=1/|a|$
  - $f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{((y-b)/a-\mu)^2}{2\sigma^2}}\cdot\frac{1}{|a|}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}|a|\sigma}e^{-\frac{(y-(a\mu+b))^2}{2a^2\sigma^2}}$
  - 也即$Y\sim N(a\mu+b,|a|\sigma)$

5. 连续随机变量函数的分布

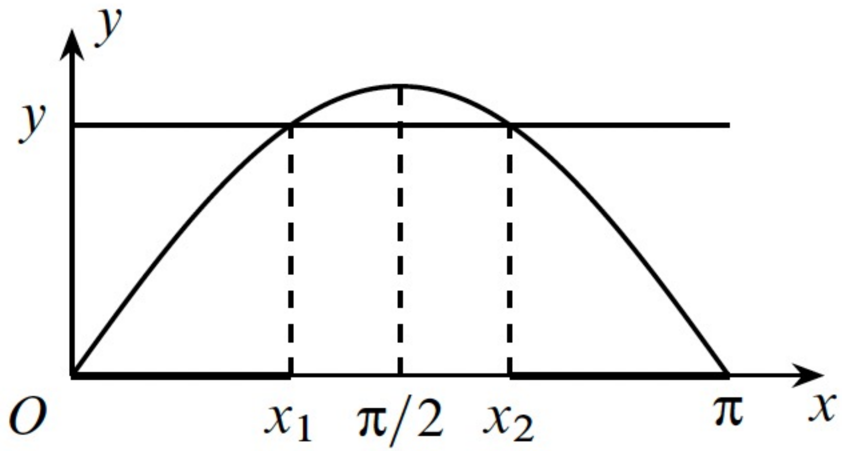
- 一般结论：设X为连续随机变量，若函数$y=g(x)$严格单调，其反函数$h(y)$有连续导数，则$Y=g(X)$的概率密度函数为
  - $f_Y(y)=f_X\big(h(y)\big)\cdot|h'(y)|$ 当 $y\in(\alpha,\beta)$
  - $f_Y(y)=0$当 $y\notin(\alpha,\beta)$
  - 这里 $\alpha=\min\{g(-\infty),g(+\infty)\}$， $\beta=\max\{g(-\infty),g(+\infty)\}$

- 例：$X\sim\Gamma(\alpha,\lambda)$，若$k>0$，求$Y=kX$的概率密度函数
  - $f_X(x)=\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}$， $g(x)=kx$， $h(y)=\frac{y}{k}$， $|h'(y)|=1/k$
  - $f_Y(y)=\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}(y/k)^{\alpha-1}e^{-\lambda y/k}\cdot\frac{1}{k}=\frac{(\lambda/k)^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\cdot y^{\alpha-1}\cdot e^{-\lambda y/k}$
  - 也即$Y\sim\Gamma(\alpha,\lambda/k)$

北京大学 PEKING UNIVERSITY

5. 连续随机变量函数的分布

- X为连续随机变量，且其概率密度函数满足
  - $f_X(x) = \frac{2x}{\pi^2}$ 当 $x \in (0, \pi)$
  - $f_X(x) = 0$ 当 $x \notin (0, \pi)$
- 求$Y = \sin(X)$的概率密度函数



- 对于$y \in (0, 1)$，$\sin(x) \le y$等价于 $x \in [0, \arcsin(y)] \cup [\pi - \arcsin(y), \pi]$
- $P(Y \le y) = \int_0^{\arcsin(y)} \frac{2x}{\pi^2} dx + \int_{\pi - \arcsin(y)}^{\pi} \frac{2x}{\pi^2} dx$
- $f_Y(y) = \frac{2\arcsin(y)}{\pi^2\sqrt{1-y^2}} + \frac{2\left(\pi - \arcsin(y)\right)}{\pi^2\sqrt{1-y^2}} = \frac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}$