北京大学信息科学技术学院试题
信息学中的概率统计：期中考试

考试科目: ____________________ 姓名: ______________ 学号: _________________
考试时间: __________年_______月_______日 任课教师: ____________________

注意事项:

1. 考试时间为 120 分钟（上午 10:10 至 12:10）。
2. 共 4 个大题，总分为 100 分，试卷**双面打印**，共**正反两页**。请合理分配时间，并将所有答案**写在答题纸**上，试题纸或草稿纸上作答无效。
3. 考试结束后将回收答题纸，试卷和草稿纸。

题目一（共 20 分）

已知事件 A 和事件 B 满足 $P(A) = 3/4$，$P(B) = 1/3$。

1. (5 分) 定义事件 C 为事件 A 和事件 B 中<u>有且仅有一个</u>发生。若事件 A 与事件 B 相互独立，计算 $P(A \mid C)$。
2. (5 分) 若事件 A 与事件 B 相互独立，计算 $E\left(2^{(1_A - 1_B)}\right)$。也即，令随机变量 $X = 1_A - 1_B$，计算 $E\left(2^X\right)$。
3. (10 分) 证明 $2/3 \le P(1_A + 1_B \le 1) \le 11/12$。注意这一问中，不假设事件 A 与事件 B 相互独立。

1_A 为事件 A 的示性函数，也即 $1_A = \begin{cases} 1 & \text{事件 } A \text{ 发生} \\ 0 & \text{事件 } A \text{ 未发生} \end{cases}$。类似有 $1_B = \begin{cases} 1 & \text{事件 } B \text{ 发生} \\ 0 & \text{事件 } B \text{ 未发生} \end{cases}$。

题目二（共 20 分）

1. （10 分）令随机变量 $X \sim U(0,1)$，也即 X 服从 $(0,1)$ 上的均匀分布。对于实数 $a > 0$ 和 b，令随机变量 $Y = a\sqrt{X} + b$。计算 Y 的概率密度函数 $f_Y(y)$。
2. （10 分）对于上一问中定义的随机变量 Y，计算 $E(Y)$ 和 $\mathrm{Var}(Y)$。

题目三（共 25 分）

进行若干次重复试验，每次试验的结果有三种可能：E_0、E_1 和 E_2。E_0、E_1 和 E_2 出现的概率相等（概率均为 1/3），且不同试验的结果相互独立。结果为 E_0 时对应试验得分为 0 分，结果为 E_1 时得分为 1 分，结果为 E_2 时得分为 2 分。

1. （10 分）令随机变量 X 为首次满足总得分**至少为 1 分**时的试验次数。给出 X 的分布列，计算 $E(X)$ 和 $\mathrm{Var}(X)$。
2. （10 分）令随机变量 Y 为首次满足总得分**至少为 2 分**时的试验次数。给出 Y 的分布列。
3. （5 分）对于上一问中定义的随机变量 Y，计算 $E(Y)$。

题目四（共 35 分）

在课上，我们考虑了如下球与桶模型：有 $n \geq 1$ 个球，每个球都等概率地被放到 $m \geq 1$ 个桶中的任一个。在此基础上，将每个球**等概率**地染为红色或蓝色（概率均为 1/2）。这里，不同球之间的染色过程相互独立，且染色过程与球的放置过程相互独立。
令随机变量 B_i 为第 i 个桶中蓝色球的数量，随机变量 R_i 为第 i 个桶中红色球的数量。令随机变量 $Y_i = B_i - R_i$，也即第 i 个桶中蓝色球数量与红色球数量的差值。令随机变量 $Z = \sum_{i=1}^{m} Y_i^2$。

1. （5 分）对于任意 $1 \leq i \leq m$，计算 $E(Y_i)$。
2. （5 分）对于任意 $1 \leq i \leq m$，证明 $\mathrm{Var}(Y_i) = n/m$。
3. （5 分）计算 $E(Z)$。
4. （8 分）当 $m = 1$ 时，计算 $\mathrm{Var}(Z)$。
5. （4 分）对于 $1 \leq i \leq m$，证明 $E(Y_i^4) = \frac{n}{m} - \frac{3n}{m^2} + \frac{3n^2}{m^2}$。
6. （4 分）对于 $1 \leq i, j \leq m$，若 $i \neq j$，证明 $E(Y_i^2 Y_j^2) = \frac{n(n-1)}{m^2}$。
7. （4 分）对于任意 $0 < \epsilon < 1$，若 $m \geq 100/\epsilon^2$，证明 $P(|Z - n| \geq \epsilon \cdot n) \leq 1/5$。