信息学中的概率统计：作业三

截止日期：2024 年 11 月 1 日（周五）下课前。**如无特殊情况，请不要提交电子版！**

第一题

(1) X 为离散随机变量，且 X 仅取非负整数值。证明 $E(X) = \sum_{x=0}^{+\infty} P(X > x)$。

(2) X 为连续随机变量，且 X 仅取非负实数值。证明 $E(X) = \int_0^{+\infty} P(X > x)dx$。

第二题

在 Unix 操作系统中，用随机变量 X 表示一个随机的任务所需的内存。历史数据表明，对于任意实数 $x \geq 1$，$P(X > x) = 1/x^{\alpha}$。这里 $\alpha \in (0, 2)$ 是固定常数。

(1) 计算随机变量 X 的概率分布函数和概率密度函数。

(2) 计算 $E(X)$ 和 $E(X^2)$

第三题

(1) 对于任意实数 $x > 0$，证明

$$\int_x^{+\infty} \frac{t}{x} e^{-t^2/2} dt = \frac{e^{-x^2/2}}{x}。$$

(2) 令 $X \sim N(0, 1)$，也即连续随机变量 X 服从标准高斯分布，证明对于任意实数 $x > 0$,

$$P(X \geq x) \leq \frac{e^{-x^2/2}}{x\sqrt{2\pi}}。$$

(3) 令 $Y \sim N(\mu, \sigma)$，证明对于任意实数 $k > 0$,

$$P(|Y - \mu| \leq k\sigma) \geq 1 - \frac{e^{-k^2/2}}{k} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}}。$$

第四题

随机变量 X 的分布函数 $F(x)$ 为严格单调增的连续函数，其反函数存在。证明 $Y = F(X)$ 服从 $(0, 1)$ 上的均匀分布 $U(0, 1)$。

第五题

对于实数参数 μ 和 $b > 0$，已知连续随机变量 X 的概率密度函数 $f(x)$ 满足对于任意实数 x，

$$f(x) = c \cdot e^{-|x-\mu|/b}。$$

这里 c 为某个与参数 μ 和 b 有关的常数。

(1) 计算常数 c 以及 X 的分布函数

(2) 计算 $E(X)$ 和 $\mathrm{Var}(X)$

第六题

(1) 若 $X \sim N(0,1)$，对于任意实数 t，计算 $E(e^{tX^2})$

(2) 对于正整数 n，若 $Y_n \sim \chi^2(n)$，也即 $Y_n \sim \Gamma(n/2, 1/2)$。对于任意实数 t，计算 $E(e^{tY_n})$

(3) 若 $X \sim N(0,1)$，计算 $Y = X^2$ 的概率密度函数