信息学中的概率统计：作业四

截止日期：2024 年 11 月 15 日（周五）下课前。**如无特殊情况，请不要提交电子版！**

第一题

一个盒子中有 n 个小球，编号分别为 $1, 2, \ldots, n$。从盒子中取出 $k \le n$ 个小球，每次等概率从盒子中剩余的小球中取出一个，且每次取完后均不放回。也即，第一次取小球时，每个小球被取出的概率均为 $\frac{1}{n}$。第二次取小球时，剩余的 $n-1$ 个小球各自被取出的概率均为 $\frac{1}{n-1}$。以此类推，直至一共取出 k 个小球。

定义随机变量 $X_1, X_2, \ldots, X_k$，其中 X_i（$1 \le i \le k$）表示第 i 次取出小球的编号。

(1) 对于 $1 \le i < j \le k$，判断 X_i 是否与 X_j 相互独立。

(2) 计算 $X_1, X_2, \ldots, X_k$ 的联合分布列。

(3) 对于 $1 \le i \le k$，计算 X_i 的边际分布列。

(4) 对于任意 $1 \le i < j \le k$ 和 $1 \le a_i, a_j \le n$，计算 $P(X_i = a_i \cap X_j = a_j)$。

(5) 利用恒等式 $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$，对于 $1 \le i \le k$，计算 $E(X_i)$ 和 $\mathrm{Var}(X_i)$。

(6) 对于 $1 \le i < j \le k$，计算 $\mathrm{Cov}(X_i, X_j)$。

第二题

将 n 个编号为 $1, 2, \ldots, n$ 的小球随机打乱，每一种排列等概率出现。用 $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n$ 表示随机打乱后每个位置上小球的编号，也即 π_i 表示随机打乱后，位置为 i 的小球的原始编号。对于 $1 < i < n$，我们称 i 是一个*局部极大值*，当且仅当 $\pi_i > \pi_{i-1}$ 且 $\pi_i > \pi_{i+1}$。令随机变量 X 表示所有 $1 < i < n$ 中局部极大值的总数量。计算 $E(X)$。

第三题

令随机变量 $X \sim G(p)$，也即随机变量 X 服从参数为 p 的几何分布。证明

$$E(X^2) = p + E((X+1)^2)(1-p),$$

$$E(X^3) = p + E((X+1)^3)(1-p),$$

并计算 $E(X^2)$ 和 $E(X^3)$。

第四题

令 $X_1, X_2, \ldots$ 为一列同分布的离散随机变量。离散随机变量 N 取正整数值，且 $N, X_1, X_2, \ldots,$ 相互独立。在课上，我们证明了 $E\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right) = E(N) \cdot E(X_1)$。

(1) 给出例子使得

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right) \neq E(N) \cdot \mathrm{Var}(X_1)。$$

(2) 证明

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right) = E(N) \cdot \mathrm{Var}(X_1) + \mathrm{Var}(N)(E(X_1))^2。$$

第五题

(1) 对于正整数 r 和实数 $0 < p < 1$，给定 $X \sim NB(1,p)$，$Y \sim NB(r,p)$，也即随机变量 X 服从参数为 $1,p$ 的负二项分布，随机变量 Y 服从参数为 r,p 的负二项分布。若 X 和 Y 相互独立，证明 $X+Y \sim NB(r+1,p)$，也即 $X+Y$ 服从参数为 $r+1,p$ 的负二项分布。提示：使用恒等式

$$\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m-1} + \binom{n-1}{m}。$$

(2) 对于正整数 r，$X_1, X_2, \ldots, X_r$ 为独立同分布的随机变量，且均服从 $G(p)$，也即参数为 p 的几何分布。证明 $X_1 + X_2 + \cdots + X_r \sim NB(r,p)$。