信息学中的概率统计：作业五

截止日期：2024 年 11 月 29 日（周五）下课前。**如无特殊情况，请不要提交电子版！**

第一题

给定二维随机变量 X, Y。证明 $\mathrm{Corr}(X, Y) = \pm 1$ 当且仅当存在实数 $a \neq 0, b$，使得 $P(Y = aX + b) = 1$。

提示：利用结论（无需证明），若随机变量 Z 满足 $\mathrm{Var}(Z) = 0$，则 $P(Z = E(Z)) = 1$。

第二题

对于 $\sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0, -1 < \rho < 1$，二维随机变量 $U, V \sim N(0, 0, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$。本题中，我们将计算 $E(\mathrm{ReLU}(U) \cdot \mathrm{ReLU}(V))$。这里，$\mathrm{ReLU}(x) = \max\{x, 0\}$。

设二维随机变量 $(X, Y) \sim N(0, 0, 1, 1, \rho)$，令二维随机变量 (R, Θ) 满足 $R \geq 0, \Theta \in [0, 2\pi]$，且

$$\begin{cases} X = R \cdot (\sqrt{1-\rho^2} \cdot \cos\Theta + \rho \cdot \sin\Theta) = R \cdot \sin(\arccos\rho + \Theta) \\ Y = R \sin\Theta \end{cases}。$$

(1) 令 $x = r \cdot (\sqrt{1-\rho^2} \cdot \cos\theta + \rho \cdot \sin\theta), y = r \sin\theta$。验证 $x^2 + y^2 - 2\rho xy = r^2(1-\rho^2)$。

(2) 计算 R, Θ 的联合密度函数，R 和 Θ 的各自的边际密度函数，并判断 R 和 Θ 的独立性。

(3) 计算 $E(\mathrm{ReLU}(X) \cdot \mathrm{ReLU}(Y))$。提示：利用结论（无需证明）

$$\int_0^{+\infty} x^3 e^{-x^2/2} dx = 2,$$

$$\int_0^{\pi - \arccos\rho} (\rho \cdot \sin^2\theta + \sqrt{1-\rho^2} \sin\theta\cos\theta) d\theta = \frac{1}{2}\left(\rho(\pi - \arccos\rho) + \sqrt{1-\rho^2}\right)。$$

(4) 验证 $(\sigma_1 X, \sigma_2 Y)$ 与 (U, V) 服从相同的分布。

(5) 计算 $E(\mathrm{ReLU}(U) \cdot \mathrm{ReLU}(V))$。

第三题

在课上我们考虑了如下矩阵 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$：对于任意 $1 \leq i, j \leq n$，$A_{i,j} \sim N(0, 1)$，且不同元素相互独立。计算 $E(\mathrm{trace}(A^3))$ 和 $E(\mathrm{trace}(A^4))$。提示：首先考虑 $n = 1$ 的情况，并参考作业三第六题。

第四题

(1) 令 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 为独立同分布随机变量，且 $X_i \sim N(0,1)$。令 $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$。对于任意实数 $t \in [0, 1/4)$，证明

$$E(e^{t(Y-n)}) \leq e^{2t^2 n}。$$

提示：首先考虑 $n = 1$ 的情况，并参考作业三第六题，以及作业一第三题的提示。

(2) 对于任意 $0 \leq \Delta < 1$，证明

$$P(Y \geq (1+\Delta)n) \leq e^{-n\Delta^2/8}。$$

提示：根据 $0 \leq \Delta < 1$，选择合适的 t 使得 $t \in [0, 1/4)$，并使用马尔可夫不等式。

(3) 对于任意 $0 \leq \Delta < 1$，证明

$$P(Y \leq (1-\Delta)n) \leq e^{-n\Delta^2/8}。$$