信概统-2024 期中

by Arthals

1 题目一 (共 20 分)

投掷两枚均匀的六面骰子，两枚骰子的结果独立。记两枚骰子的点数为 X 和 Y。计算以下结果：

1. (5 分) $P(X > 3 \mid X + Y > 7)$
2. (5 分) $E(X \mid X + Y = a)$，其中 $a \in \{2, 3, \ldots, 12\}$
3. (5 分) $E(e^{X+Y})$
4. (5 分) $\mathrm{Var}(X - Y)$

2 题目二 (共 15 分)

在第一次作业中，我们证明了一般形式的加法公式

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = &\sum_{i=1}^{n} P(A_i) \\ &- \sum_{1 \le i < j \le n} P(A_i \cap A_j) \\ &+ \sum_{1 \le i < j < k \le n} P(A_i \cap A_j \cap A_k) \\ &- \ldots \\ &+ (-1)^{n-1} P\left(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n\right). \end{aligned} \tag{1}$$

我们将证明对数学期望有类似的结论。本题中，假设所有考虑的数学期望均存在。

对于 k 个实数 $x_1, x_2, \ldots, x_k$，引入定义

$$\begin{aligned} \bigwedge_{i=1}^{k} x_i = x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_k = \min\{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \\ \bigvee_{i=1}^{k} x_i = x_1 \vee x_2 \vee \cdots \vee x_k = \max\{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \end{aligned} \tag{2}$$

1. (5 分) 对于随机变量 X 和 Y，证明 $E(X \vee Y) = E(X) + E(Y) - E(X \wedge Y)$。提示：首先考虑 X 和 Y 服从单点分布，也即 X 和 Y 取固定值的情况。
2. (5 分) 证明对于任意 $k + 1$ 个实数 $x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1}$，有
$$(x_1 \vee x_2 \vee \cdots \vee x_k) \wedge x_{k+1} = (x_1 \wedge x_{k+1}) \vee (x_2 \wedge x_{k+1}) \vee \cdots \vee (x_k \wedge x_{k+1}) \tag{3}$$
3. (5 分) 证明

$$
\begin{aligned}
E\left(\bigvee_{i=1}^{n} X_i\right) = &\sum_{i=1}^{n} E(X_i) \\
&- \sum_{1\le i<j\le n} E(X_i \wedge X_j) \\
&+ \sum_{1\le i<j<k\le n} E(X_i \wedge X_j \wedge X_k) \\
&- \dots \\
&+ (-1)^{n-1} E\left(\bigwedge_{i=1}^{n} X_i\right).
\end{aligned} \tag{4}
$$

3 题目三 (共 15 分)

本题中提到的所有事件 A, B, C 均满足 $0 < P(A), P(B), P(C) < 1$。

称事件 A 和 B 在事件 C 发生时是条件独立的，当且仅当

$$P(AB \mid C) = P(A \mid C)P(B \mid C) \tag{5}$$

证明以下命题：

1. (6 分) 若 $P(ABC) = P(A)P(C \mid A)P(B \mid C)$，则事件 A 和 B 在事件 C 发生时是条件独立的。
2. (5 分) 事件 A 与 B 相互独立的充要条件为 $P(A \mid B) = P(A \mid \overline{B})$。
3. (4 分) 若 $P(C \mid A) > P(C \mid B)$，且 $P(A \mid \overline{C}) > P(B \mid \overline{C})$，则 $P(A) > P(B)$。

4 题目四 (共 15 分)

对于实数 a 和 $b > 0$，随机变量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 服从正态分布， 也即 X 的概率密度函数满足

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \tag{6}$$

随机变量 $Y = e^X$，回答以下问题：

1. (4 分) 对于 $y > 0$，验证 Y 的概率密度函数满足

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma y} \exp\left(-\frac{(\ln y - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) \tag{7}$$

2. (6 分) 当 $\mu = 0$ 和 $\sigma = 1$ 时， 也即 X 服从标准正态分布，计算 $E(Y)$ 和 $\mathrm{Var}(Y)$。
3. (5 分) 当 $\mu = 0$ 和 $\sigma = 1$ 时，证明对于任意 $t > 0$， $E(e^{tY})$ 不存在。

5 题目五 (共 20 分)

在球与桶模型中，有 $n \ge 1$ 个球，每个球被独立等可能地放到 $m \ge 1$ 个桶中的一个。对于 $1 \le i \le m$，随机变量 X_i 表示第 i 个桶中球的数量。随机变量 Y 表示全部 m 个桶中，至少有一个球的桶的数量。

1. （5 分）对于 $1 \le i \le m$，计算 $E(X_i)$。
2. （10 分）计算 $E(Y)$ 和 $\mathrm{Var}(Y)$，并将结果表示为仅与 m 和 n 相关的量。
3. （5 分）对于任意 $1 \le i, j \le m$，计算 $\mathrm{Cov}(X_i, X_j)$。

6 题目六（共 15 分）

给定离散随机变量 X，假设其数学期望 $E(X)$ 和标准差 $\sigma(X)$ 均存在。

1. （5 分）证明对于任意实数 b，$E((X-E(X)+b)^2)=(\sigma(X))^2+b^2$。
2. （5 分）对于任意实数 $t>\sigma(X)$，证明 $P(X\geq E(X)+t)<\frac{1}{2}$。
3. （5 分）给定实数 m，若 $P(X\geq m)\geq\frac{1}{2}$ 且 $P(X\leq m)\geq\frac{1}{2}$，证明 $|E(X)-m|\leq\sigma(X)$。