信息学中的概率统计

王若松

前沿计算研究中心
北京大学

多维连续随机变量

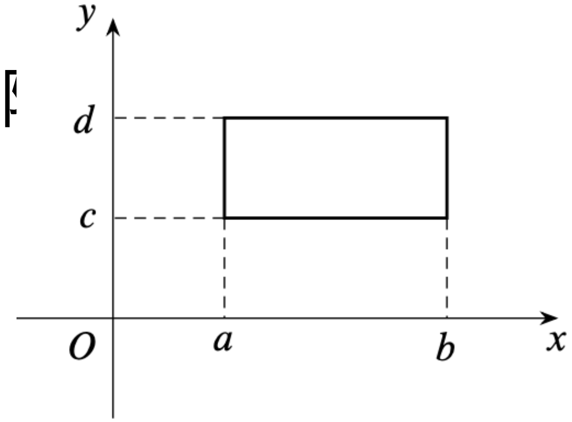
1. 多维连续随机变量的分布函数和密度函数
2. 多维连续随机变量的独立性
3. 多维连续随机变量的特征数
4. 多维连续随机变量函数的分布
5. 多维高斯分布

1. 多维连续随机变量的分布函数和密度函数

- 给定二维随机变量X,Y和实数x,y，定义$F(x,y)=P(X\leq x,Y\leq y)$为二维随机变量$X,Y$的**联合分布函数**

- 性质1(**有界性**): $0\leq F(x,y)\leq 1, F(-\infty,y)=0, F(x,-\infty)=0, F(+\infty,+\infty)=1$
- 性质2(**单调性**): $x_1<x_2\Rightarrow F(x_1,y)\leq F(x_2,y)$，$y_1<y_2\Rightarrow F(x,y_1)\leq F(x,y_2)$
- 性质3(**右连续**): $F(x+0,y)=F(x,y), F(x,y+0)=F(x,y)$
- 性质4(**非负性**): $P(a<X\leq b,c<Y\leq d)=F(b,d)-F(a,d)-F(b,c)+F(a,c)\geq 0$

- $F(x,y)$满足上述四条性质**等价于**$F(x,y)$是某个二维



- 性质4是否被性质1-3蕴含?
  - $F(x,y)=1$ 当$x+y\geq 0$，否则$F(x,y)=0$

PEKING UNIVERSITY

1. 多维连续随机变量的分布函数和密度函数

- 给定二维随机变量X,Y，若存在$f(x,y) \geq 0$使得分布函数 $F(x,y)$可表示为 $F(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(u,v)dudv$，则称二维随机变量$X,Y$为**二维连续随机变量**，称$f(x,y)$为$X,Y$的**联合密度函数**

- 联合密度函数的性质
- 性质1(**非负性**): $f(x,y) \geq 0$
- 性质2(**正则性**): $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u,v)dudv = 1$

- 在$F(x,y)$ 偏导数存在的点，$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = f(x,y)$
- 对于区域G，$P\big((X,Y) \in G\big) = \iint_G f(x,y)\, dxdy$

1. 多维连续随机变量的分布函数和密度函数

- 例1：X,Y的联合密度函数满足
  - $f(x,y)=c\cdot e^{-2x-3y}$ 若 $x>0,y>0$
  - 否则$f(x,y)=0$
- 这里c是某个常数
- 计算常数c，并计算$P(X<1,Y>1),P(X>Y)$

- 由正则性$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=c\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=1\Rightarrow c=6$
- $P(X<1,Y>1)=\int_0^1\int_1^{+\infty}6\cdot e^{-2x-3y}dxdy=(1-e^{-2})e^{-3}$
- $P(X>Y)=\int_0^{+\infty}\int_0^{x}6\cdot e^{-2x-3y}dydx=\int_0^{+\infty}6\cdot e^{-2x}\cdot\frac{1}{3}\cdot(1-e^{-3x})dx=\frac{4}{5}$

1. 多维连续随机变量的分布函数和密度函数

- 例2：给定$\mathbb{R}^2$中的一个有界区域 D。 随机变量(X,Y)表示从 D中均匀取一点的坐标。写出X,Y的联合密度函数。
  - $f(x,y) = 1/S_D$若 $(x,y) \in D$
  - 否则$f(x,y) = 0$

- 称(X,Y)服从D上的**二维均匀分布**，记为$(X,Y) \sim U(D)$

1. 多维连续随机变量的分布函数和密度函数

- 给定二维随机变量X,Y的**联合分布函数**$F(x,y)$，如何计算X的分布函数?
  - $P(X \le x) = P(X \le x, Y < +\infty) = F(x, +\infty)$
- 定义$F_X(x) = F(x,+\infty) = \lim\limits_{y\to+\infty} F(x,y)$为 X的**边际分布函数**
- 类似有 $F_Y(y) = F(+\infty, y) = \lim\limits_{x\to+\infty} F(x,y)$为 Y的**边际分布函数**
- 例： X,Y的联合分布函数满足
  - $F(x,y) = 1 - e^{-x} - e^{-y} + e^{-x-y-\lambda xy}$ 当 $x > 0, y > 0$,
  - 否则$F(x,y) = 0$
- 计算$F_X(x)$和 $F_Y(y)$
  - $F_X(x) = 1 - e^{-x}$ 当 $x > 0$
  - $F_Y(y) = 1 - e^{-y}$ 当 $y > 0$

1. 多维连续随机变量的分布函数和密度函数

- 给定二维连续随机变量X,Y，$f(x,y)$为X,Y的联合密度函数
- 如何计算X的密度函数$f_X(x)$?
  - $P(X \le x) = F(x,+\infty) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u,v)\, dvdu = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)du$
- $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$为$X$的**边际密度函数**
- 类似$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$为$Y$的**边际密度函数**
- 例1： X,Y的联合密度函数满足
  - $f(x,y) = 6 \cdot e^{-2x-3y}$ 若 $x > 0, y > 0$
  - 否则$f(x,y) = 0$
- 计算X,Y的边际密度函数
  - $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = 2 \cdot e^{-2x}$
  - $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = 3 \cdot e^{-3y}$

1. 多维连续随机变量的分布函数和密度函数

- $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$为$X$的边际密度函数
- $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$为$Y$的边际密度函数

- 例2： X,Y的联合密度函数满足
  - $f(x,y) = 1$ 若 $0 < x < 1, |y| < x$
  - 否则$f(x,y) = 0$
- 计算Y的边际密度函数
  - 当$|y| > 1$， $f_Y(y) = 0$
  - 当$-1 < y < 0$， $-y < x < 1$，$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = \int_{-y}^{1} f(x,y)dx = 1 + y$
  - 当$0 < y < 1$， $y < x < 1$，$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = \int_{y}^{1} f(x,y)dx = 1 - y$

1. 多维连续随机变量的分布函数和密度函数

- 回顾：若$P(Y=y_j)>0$，则称$p_{i|j}=P(X=x_i\mid Y=y_j)=P(X=x_i,Y=y_j)/P(Y=y_j)$为给定 $Y=y_j$条件下 X的**条件分布列**

- 对于连续随机变量，如何定义条件分布函数和条件密度函数?
- $P(X\le x|Y=y)$可定义为 $\lim\limits_{\Delta\to 0}P(X\le x|y\le Y\le y+\Delta)$
- $P(X\le x|Y=y)=\lim\limits_{\Delta\to 0}P(X\le x|y\le Y\le y+\Delta)=\lim\limits_{\Delta\to 0}\frac{P(X\le x,y\le Y\le y+\Delta)}{P(y\le Y\le y+\Delta)}$
- $\lim\limits_{\Delta\to 0}\frac{P(X\le x,y\le Y\le y+\Delta)}{P(y\le Y\le y+\Delta)}=\lim\limits_{\Delta\to 0}\frac{\int_{-\infty}^{x}\left(\frac{1}{\Delta}\int_{y}^{y+\Delta}f(u,v)dv\right)du}{\frac{1}{\Delta}\int_{y}^{y+\Delta}f_Y(v)dv}$

1. 多维连续随机变量的分布函数和密度函数

- 当密度函数连续
  - $\lim\limits_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}\int_y^{y+\Delta} f(u,v)dv = f(u,y)$
  - $\lim\limits_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}\int_y^{y+\Delta} f_Y(v)dv = f_Y(y)$
- $P(X \le x|Y=y) = \lim\limits_{\Delta\to 0}\frac{\int_{-\infty}^{x}\left(\frac{1}{\Delta}\int_y^{y+\Delta} f(u,v)dv\right)du}{\frac{1}{\Delta}\int_y^{y+\Delta} f_Y(v)dv} = \frac{\int_{-\infty}^{x} f(u,y)du}{f_Y(y)} = \int_{-\infty}^{x}\frac{f(u,y)}{f_Y(y)}du$
- $F(x|y) = P(X \le x|Y=y) = \int_{-\infty}^{x}\frac{f(u,y)}{f_Y(y)}du$ 为给定$Y=y$条件下 X的**条件分布函数**
- $f(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$为给定$Y=y$条件下 X的**条件密度函数**
  - 正则性?
  - $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}dx = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx}{f_Y(y)} = \frac{f_Y(y)}{f_Y(y)} = 1$

1. 多维连续随机变量的分布函数和密度函数

- 例： 随机变量X, Y服从单位圆 $(x^2+y^2 \le 1)$上的二维均匀分布。计算$f(x|y)$
- $f(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$
- $f(x,y) = \frac{1}{\pi}$若 (x,y)在单位圆内
- 否则 $f(x,y) = 0$
- $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx = \frac{2\sqrt{1-y^2}}{\pi}$
- $f(x|y) = \frac{1}{\pi} / \frac{2\sqrt{1-y^2}}{\pi} = \frac{1}{2\sqrt{1-y^2}}$若 $|x| \le \sqrt{1-y^2}$
- 否则 $f(x|y) = 0$

2. 多维连续随机变量的独立性

- 回顾：给定二维离散随机变量(X,Y)，若对于任意实数x,y均有 $P(X=x,Y=y)=P(X=x)\cdot P(Y=y)$，则称$X,Y$**相互独立**

- 给定二维随机变量(X,Y)，分布函数为$F(x,y)$， 边际分布函数为$F_X(x)$和$F_Y(y)$。若对于任意实数x,y均有 $F(x,y)=F_X(x)\cdot F_Y(y)$，则称$X,Y$**相互独立**

- 对于离散随机变量， 相互独立**等价于**对于任意实数x,y均有 $P(X=x,Y=y)=P(X=x)\cdot P(Y=y)$
- 对于连续随机变量， 相互独立**等价于**对于任意实数x,y均有密度函数 $f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)$

2. 多维连续随机变量的独立性

- 例1： X,Y的联合密度函数满足
  - $f(x,y) = 6 \cdot e^{-2x-3y}$ 若 $x > 0, y > 0$
  - 否则$f(x,y) = 0$
- 判断 X,Y是否相互独立
  - $f_X(x) = 2 \cdot e^{-2x}$
  - $f_Y(y) = 3 \cdot e^{-3y}$
  - $f(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$

2. 多维连续随机变量的独立性

- 例2：令随机变量 X某服务器第一次发生故障的时间， Y表示另一台服务器第一次发生故障的时间。已知则$X \sim \mathrm{Exp}(\lambda_1)$， $Y \sim \mathrm{Exp}(\lambda_2)$，且$X$与$Y$相互独立。
- 计算$P(X < Y)$

- $P(X < Y) = \int_{x=0}^{+\infty}\int_{y=x}^{+\infty} f(x,y)dxdy = \int_{x=0}^{+\infty}\int_{y=x}^{+\infty} f_X(x)\cdot f_Y(y)dxdy$
- $f_X(x)\cdot f_Y(y) = \lambda_1 e^{-\lambda_1 x}\cdot \lambda_2 e^{-\lambda_2 y}$
- $P(X < Y) = \int_0^{+\infty} \lambda_1 e^{-\lambda_1 x}\cdot \int_x^{+\infty} \lambda_2 e^{-\lambda_2 y} dydx = \int_0^{+\infty} \lambda_1 e^{-\lambda_1 x}\cdot P(Y \geq x)\, dx$
- $P(Y \geq x) = e^{-\lambda_2 x}$
- $P(X < Y) = \int_{x=0}^{+\infty} \lambda_1 e^{-\lambda_1 x}\cdot e^{-\lambda_2 x} dx = \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$

2. 多维连续随机变量的独立性

- 二维连续随机变量X,Y的联合密度函数满足
- $f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\cdot\left(\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}-\frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}\right)\right]$
- 其中 $\mu_1,\mu_2\in\mathbb{R},\sigma_1,\sigma_2>0,|\rho|\leq 1$
- 称 X,Y服从参数为$\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho$的**二维正态（高斯）分布**
- 记号： $X,Y\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$

- 验证正则性： $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=1$
- 计算边际密度函数
- 计算条件密度函数
- 判断 X,Y是否相互独立

2. 多维连续随机变量的独立性

- $f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\cdot\left(\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}-\frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}\right)\right]$
- 计算$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy$?
- 换元法：定义u',v'，使得$\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}-\frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}=(u')^2+(v')^2$
  - 配方得：$u'=\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}-\rho\cdot\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\Rightarrow v'=\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\cdot\sqrt{1-\rho^2}$
- 若$u=\frac{\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}-\rho\cdot\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)}{\sqrt{1-\rho^2}},v=\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}$，则有$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(u^2+v^2\right)\right]$
- $\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|=\begin{vmatrix}\frac{1}{\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}} & -\frac{\rho}{\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\\ 0 & \frac{1}{\sigma_2}\end{vmatrix}=\frac{1}{\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\Rightarrow\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|=\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}$

2. 多维连续随机变量的独立性

- $f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(u^2+v^2\right)\right]$
- $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|=\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}$
- $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=\iint\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(u^2+v^2\right)\right]\cdot\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}dudv$
- $=\iint\frac{1}{2\pi}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(u^2+v^2\right)\right]dudv$
- $=\int_{-\infty}^{-\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}du\cdot\int_{-\infty}^{-\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{v^2}{2}}dv=1$
- 思考：如何从随机变量的角度理解换元 $u=\frac{\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}-\rho\cdot\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)}{\sqrt{1-\rho^2}},v=\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}$?

2. 多维连续随机变量的独立性

- 边际密度函数$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$
- $f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\cdot\left(\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}-\frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}\right)\right]$
- 换元$u = \frac{\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\cdot\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)}{\sqrt{1-\rho^2}}, v = \frac{x-\mu_1}{\sigma_1}$
- $f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)\cdot\exp\left(-\frac{v^2}{2}\right)$
- $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \sqrt{1-\rho^2}\cdot\sigma_2\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)du$
- $f_X(x) = \frac{1}{2\pi\sigma_1}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)du\cdot\exp\left(-\frac{v^2}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma_1}\exp\left(-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right)$
- 类似有 $f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma_2}\exp\left(-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}\right)$

PEKING UNIVERSITY

2. 多维连续随机变量的独立性

- 若$X,Y \sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$，则$X \sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$， $Y \sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$
  - 边际分布与参数 ρ无关 $\Rightarrow$ 具有相同边际分布的多维联合分布可以不同
- 计算条件密度函数 $f(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_{Y(y)}}$
  - $f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \cdot \left(\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} - \frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}\right)\right]$
  - $f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma_2} \exp\left(-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}\right)$
  - $f(x|y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \cdot \left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1} - \rho \cdot \frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right)$
  - $= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \cdot \left(\frac{x-\mu_1-\rho\cdot\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\cdot(y-\mu_2)}{\sigma_1}\right)^2\right)$
- 给定$Y = y$条件下， X的条件分布服从$N(\mu_1 + \rho \cdot \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \cdot (y - \mu_2), \sigma_1^2(1 - \rho^2))$

2. 多维连续随机变量的独立性

- 给定$Y=y$条件下， X的条件分布服从$N(\mu_1+\rho\cdot\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\cdot(y-\mu_2),\sigma_1^2(1-\rho^2))$
- 给定$X=x$条件下， Y的条件分布服从$N(\mu_2+\rho\cdot\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\cdot(x-\mu_1),\sigma_2^2(1-\rho^2))$

- 何时有 X,Y相互独立?
  - $f(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$
  - 若X,Y相互独立， $f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)$，也即$f(x|y)=f_X(x)$
  - $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$， $Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$
  - X,Y相互独立等价于$\rho=0$

北京大学 PEKING UNIVERSITY

3. 多维连续随机变量的特征数

- 回顾：给定离散随机变量X,Y和函数g，$Z=g(X,Y)$。
- 定理：$E(Z)=\sum_i\sum_j P\left(X=x_i,Y=y_j\right)\cdot g(x_i,y_j)$

- 给定连续随机变量X,Y和函数g，$Z=g(X,Y)$。如何计算$E(Z)$?
- 定理：$E(Z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\cdot g(x,y)\,dxdy$

- 例：$X\sim U(0,1),Y\sim U(0,1)$，且$X$与$Y$相互独立。求$E(|X-Y|)$
  - $E(|X-Y|)=\int_0^1\int_0^1|x-y|dxdy=\frac{1}{3}$

3. 多维连续随机变量的特征数

- **数学期望的线性性：** $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$
  - $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\cdot(x+y)dxdy$
  - $=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\cdot x\, dxdy+\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\cdot y\cdot dxdy$
  - $=\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\, dydx+\int_{-\infty}^{+\infty} y\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\cdot dxdy$
  - $=\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f_X(x)dx+\int_{-\infty}^{+\infty} y\cdot f_Y(y)dy=E(X)+E(Y)$

- 推广： $E(X_1+X_2+\cdots+X_n)=E(X_1)+E(X_2)+\cdots+E(X_n)$

PEKING UNIVERSITY 北京大学

3. 多维连续随机变量的特征数

- 定理：若连续随机变量X和Y相互独立，则有$E(XY)=E(X)\cdot E(Y)$
- $\quad \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\cdot x\cdot y\,dxdy$
- $=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\cdot x\cdot f_Y(y)\cdot y\,dxdy$
- $=\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f_X(x)dx\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} y\cdot f_Y(y)dx$
- $=E(X)\cdot E(Y)$

- 推广：若连续随机变量$X_1,X_2,\ldots,X_n$相互独立，则有$E(X_1X_2\cdots X_n)=E(X_1)\cdot E(X_2)\cdots E(X_n)$
- 推论：若连续随机变量$X_1,X_2,\ldots,X_n$相互独立，则有$\mathrm{Var}(X_1\pm X_2\pm\cdots\pm X_n)=\mathrm{Var}(X_1)+\mathrm{Var}(X_2)+\cdots+\mathrm{Var}(X_n)$

3. 多维连续随机变量的特征数

- 例1: 随机向量$X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$满足$X_i \sim N(0,1)$
- 随机变量Y表示X的模长。计算 $E(Y^2)$

- $E(Y^2) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i^2) = n$

3. 多维连续随机变量的特征数

- 例2: 随机向量$X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$满足$X_i \sim N(0,1)$，且$X_i$相互独立
- 给定固定向量$a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$。令随机变量$Y$表示 X与a的内积。计算$E(Y)$和 $\mathrm{Var}(Y)$

- $Y = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i$
- $E(Y) = E(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i E(X_i) = 0$
- $\mathrm{Var}(Y) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(a_i X_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2$

北京大学 PEKING UNIVERSITY

3. 多维连续随机变量的特征数

- 例3: $n\times n$矩阵 A每个元素均服从 $N(0,1)$，且不同元素相互独立
- 计算 $E(\det(A))$， $E(\text{trace}(A))$， $E(\text{trace}(A^2))$
- $\det(A) = \sum_\sigma\left(\text{sgn}(\sigma)\cdot\prod_{i=1}^n A_{i,\sigma(i)}\right)$
- $E\left(\det(A)\right) = \sum_\sigma \text{sgn}(\sigma)\cdot E\left(\prod_{i=1}^n A_{i,\sigma(i)}\right) = \sum_\sigma \text{sgn}(\sigma)\cdot \prod_{i=1}^n E\left(A_{i,\sigma(i)}\right) = 0$

- $\text{trace}(A) = \sum_{i=1}^n A_{i,i}$
- $E\left(\text{trace}(A)\right) = E\left(\sum_{i=1}^n A_{i,i}\right) = 0$

- $A_{i,i}^2 = \sum_{j=1}^n A_{i,j}\cdot A_{j,i}$
- $E\left(A_{i,i}^2\right) = \sum_{j=1}^n E(A_{i,j}\cdot A_{j,i}) = 1$
- $E\left(\text{trace}(A^2)\right) = E\left(\sum_{i=1}^n A_{i,i}^2\right) = n$

PEKING UNIVERSITY 北京大学

3. 多维连续随机变量的特征数

- 回顾：
  - $F(x|y) = \int_{-\infty}^{x} \frac{f(u,y)}{f_Y(y)} du$ 为给定$Y = y$条件下 X的**条件分布函数**
  - $f(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$为给定$Y = y$条件下 X的**条件密度函数**
  - 对于离散随机变量，$E(X|Y = y_j) = \sum_i x_i \cdot P(X = x_i \mid Y = y_j)$

- 对于二维连续随机变量X, Y，**定义条件数学期望** $E(X|Y = y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x|y) \cdot x \cdot dx$

- 回顾：$E\big(E(X|Y)\big) = E(X)$

3. 多维连续随机变量的特征数

- **条件数学期望** $E(X|Y=y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x|y)\cdot x\cdot dx$
- $E\big(E(X|Y)\big)=E(X)$

- 例：$X\sim \mathrm{Exp}(\lambda)$， $Y\sim U(0,X)$。计算$E(X)$和 $\mathrm{Var}(X)$

- $E(Y|X=x)=\frac{x}{2}$
- $E(Y)=E\big(E(Y|X)\big)=\frac{E(X)}{2}=\frac{1}{2\lambda}$
- $E(Y^2|X=x)=\frac{x^2}{3}$
- $E(Y^2)=E\big(E(Y^2|X)\big)=\frac{E(X^2)}{3}=\frac{2}{3\lambda^2}$

3. 多维连续随机变量的特征数

- 给定随机变量X和Y，定义X和Y的**协方差**
- $\mathrm{Cov}(X,Y)=E\Big(\big(X-E(X)\big)\big(Y-E(Y)\big)\Big)=E(XY)-E(X)E(Y)$
- 性质回顾：
- $\mathrm{Cov}(X,X)=\mathrm{Var}(X)=E(X^2)-\big(E(X)\big)^2$
- $\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathrm{Cov}(Y,X)$
- $\mathrm{Cov}(aX,bY)=ab\cdot\mathrm{Cov}(X,Y)$
- $\mathrm{Cov}(X_1+X_2,Y)=\mathrm{Cov}(X_1,Y)+\mathrm{Cov}(X_2,Y)$
- 若X和Y相互独立，则$\mathrm{Cov}(X,Y)=0$
- $\mathrm{Var}(X_1+X_2+\cdots+X_n)=\sum_i\sum_j\mathrm{Cov}\big(X_i,X_j\big)=\sum_i\mathrm{Var}(X_i)+2\sum_i\sum_{j<i}\mathrm{Cov}\big(X_i,X_j\big)$
- $\mathrm{Var}(X+Y)=\mathrm{Var}(X)+\mathrm{Var}(Y)+2\mathrm{Cov}(X,Y)$

3. 多维连续随机变量的特征数

- 例： X,Y的联合密度函数满足
  - $f(x,y)=\frac{x+y}{3}$ 若 $0<x<1, 0<y<2$
  - 否则$f(x,y)=0$
- 计算$\mathrm{Cov}(X,Y),\mathrm{Var}(X),\mathrm{Var}(Y)$
- $E(X)=\int_0^1 x\cdot\int_0^2 f(x,y)\cdot dy\,dx=\int_0^1\frac{2x+2}{3}\cdot x\cdot dx=\frac{5}{9}$
- $E(X^2)=\int_0^1 x^2\cdot\int_0^2 f(x,y)\cdot dy\,dx=\int_0^1\frac{2x+2}{3}\cdot x^2\cdot dx=\frac{7}{8}$
- $E(Y)=\int_0^2 y\cdot\int_0^1 f(x,y)\cdot dx\,dy=\int_0^2\frac{2y+1}{6}\cdot y\cdot dx=\frac{11}{9}$
- $E(Y^2)=\int_0^2 y^2\cdot\int_0^1 f(x,y)\cdot dx\,dy=\int_0^2\frac{2y+1}{6}\cdot y^2\cdot dx=\frac{16}{9}$
- $E(XY)=\int_0^1 x\cdot\int_0^2 y\cdot f(x,y)\cdot dy\,dx=\int_0^1 x\cdot\frac{2x+8/3}{3}\cdot dx=\frac{2}{3}$
- $\mathrm{Var}(X)=E(X^2)-\big(E(X)\big)^2=\frac{13}{162},\mathrm{Var}(Y)=E(Y^2)-\big(E(Y)\big)^2=\frac{23}{81}$
- $\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=-\frac{1}{81}$

3. 多维连续随机变量的特征数

- $X, Y \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$，计算$\mathrm{Cov}(X, Y)$
- $E(X) = \mu_1, E(Y) = \mu_2$
- $f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \cdot \left(\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} - \frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}\right)\right]$
- $\mathrm{Cov}(X, Y) = \iint f(x, y) \cdot (x - \mu_1) \cdot (y - \mu_2) dxdy$
- $u = \frac{\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1} - \rho \cdot \frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)}{\sqrt{1-\rho^2}}, v = \frac{y-\mu_2}{\sigma_2}$
- $y = \sigma_2 v + \mu_2, x = \left(\sqrt{1-\rho^2} \cdot u + \rho \cdot v\right) \cdot \sigma_1 + \mu_1$
- $(x - \mu_1)(y - \mu_2) = \sigma_1\sigma_2 v\left(\sqrt{1-\rho^2} \cdot u + \rho \cdot v\right)$
- $f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{1}{2}(u^2 + v^2)\right], \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}$

3. 多维连续随机变量的特征数

- $(x-\mu_1)(y-\mu_2)=\sigma_1\sigma_2 v\left(\sqrt{1-\rho^2}\cdot u+\rho\cdot v\right)$
- $f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(u^2+v^2\right)\right],\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|=\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}$
- $\mathrm{Cov}(X,Y)=\iint f(x,y)\cdot(x-\mu_1)\cdot(y-\mu_2)dxdy$
- $=\iint\frac{1}{2\pi}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(u^2+v^2\right)\right]\cdot(x-\mu_1)\cdot(y-\mu_2)dudv$
- $=\iint\frac{1}{2\pi}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(u^2+v^2\right)\right]\cdot\sigma_1\sigma_2 v\left(\sqrt{1-\rho^2}\cdot u+\rho\cdot v\right)\cdot dudv$
- $=\sigma_1\sigma_2\iint\frac{1}{2\pi}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(u^2+v^2\right)\right]\cdot v\left(\sqrt{1-\rho^2}\cdot u+\rho\cdot v\right)\cdot dudv$
- $\iint\frac{1}{2\pi}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(u^2+v^2\right)\right]\cdot vududv=0$
- $\iint\frac{1}{2\pi}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(u^2+v^2\right)\right]\cdot v^2dudv=1$
- $\mathrm{Cov}(X,Y)=\rho\sigma_1\sigma_2$

3. 多维连续随机变量的特征数

- 给定随机变量X和Y，若$\sigma(X),\sigma(Y) > 0$，定义X和Y的**相关系数** $\mathrm{Corr}(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$
- 回顾：$\mathrm{Cov}(X,Y) = E\left(\big(X - E(X)\big)\big(Y - E(Y)\big)\right)$
- 回顾：$\tilde{X} = \frac{X-E(X)}{\sigma(X)}$为$X$的标准化随机变量
- $\mathrm{Corr}(\tilde{X},\tilde{Y}) = E(\tilde{X}\tilde{Y}) = E\left(\frac{X-E(X)}{\sigma(X)} \cdot \frac{Y-E(Y)}{\sigma(Y)}\right) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} = \mathrm{Corr}(X,Y)$
  - $\mathrm{Corr}(X,Y) > 0$（或$\mathrm{Cov}(X,Y) > 0$）： X和Y**正相关**
  - $\mathrm{Corr}(X,Y) < 0$（或$\mathrm{Cov}(X,Y) < 0$）： X和Y**负相关**
  - $\mathrm{Corr}(X,Y) = 0$（或$\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$）： X和Y**不相关**
- 若相互独立，一定有不相关
  - $E\left(\big(X - E(X)\big)\big(Y - E(Y)\big)\right) = E\big(X - E(X)\big) \cdot E\big(Y - E(Y)\big) = 0$
- 不相关，是否一定有相互独立?

3. 多维连续随机变量的特征数

- 给定随机变量X和Y，若$\sigma(X), \sigma(Y) > 0$，定义X和Y的**相关系数** $\mathrm{Corr}(X, Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$

- 性质1: $|\mathrm{Corr}(X, Y)| \leq 1$
- 证明:
  - $g(t) = E\left(\left(t(X - E(X)) + (Y - E(Y))\right)^2\right) = t^2\sigma(X)^2 + 2t\mathrm{Cov}(X, Y) + \sigma(Y)^2$
  - $g(t) \geq 0, \sigma(X), \sigma(Y) > 0 \Rightarrow \left(2\mathrm{Cov}(X, Y)\right)^2 - 4\sigma(X)^2\sigma(Y)^2 \leq 0$

- 性质2: $\mathrm{Corr}(X, Y) = \pm 1$当且仅当存在$a \neq 0$与$b$，$P(Y = aX + b) = 1$

PEKING UNIVERSITY

3. 多维连续随机变量的特征数

- 例1：X,Y的联合密度函数满足
  - $f(x,y)=\frac{x+y}{3}$ 若 $0<x<1, 0<y<2$
  - 否则$f(x,y)=0$
- 计算$\mathrm{Corr}(X,Y)$并判断相关性

- $\mathrm{Var}(X)=E(X^2)-\left(E(X)\right)^2=\frac{13}{162}, \mathrm{Var}(Y)=E(Y^2)-\left(E(Y)\right)^2=\frac{23}{81}$
- $\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=-\frac{1}{81}$
- $\mathrm{Corr}(X,Y)=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}=-\frac{\frac{1}{81}}{\sqrt{\frac{13}{162}}\cdot\sqrt{\frac{23}{81}}}=-\sqrt{\frac{2}{299}}$，负相关

3. 多维连续随机变量的特征数

- 例2： $X, Y \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$证明 X, Y相互独立当且仅当 X, Y 不相关

- X, Y相互独立等价于 $\rho = 0$
- X, Y不相关等价于$\rho = 0$

4. 多维连续随机变量函数的分布

- 给定连续随机变量X, Y和函数$g(x, y)$，求$Z = g(X, Y)$的概率密度函数

- **卷积公式**：若X, Y相互独立，$Z = X + Y$，则 $f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y) f_Y(y) dy$

- 证明:
- $P(Z \le z) = \iint_{x+y\le z} f_X(x) f_Y(y) dxdy = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{z-y} f_X(x)dx \cdot f_Y(y)dy$
- $\int_{-\infty}^{z-y} f_X(x)dx = P(X \le z - y)$
- $P(Z \le z) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(X \le z-y) \cdot f_Y(y)dy$，两边对$z$求导

4. 多维连续随机变量函数的分布

- 例1: $X \sim N(0, \sigma_1), Y \sim N(0, \sigma_2)$，$X, Y$相互独立，求$Z = X + Y$的概率密度函数
- $f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y) f_Y(y) dy = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{(z-y)^2}{\sigma_1^2} + \frac{y^2}{\sigma_2^2}\right)\right) dy$
- $\frac{(z-y)^2}{\sigma_1^2} + \frac{y^2}{\sigma_2^2} = y^2\left(\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2}\right) - \frac{2yz}{\sigma_1^2} + \frac{z^2}{\sigma_1^2}$
- 令 $A = \frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2}$
- $\frac{(z-y)^2}{\sigma_1^2} + \frac{y^2}{\sigma_2^2} = A\left(y - \frac{z}{\sigma_1^2 A}\right)^2 + \frac{z^2}{\sigma_1^2} - \frac{z^2}{\sigma_1^4 A} = A\left(y - \frac{z}{\sigma_1^2 A}\right)^2 + \frac{z^2}{\sigma_1^2}\left(1 - \frac{1}{\sigma_1^2 A}\right)$
- $\frac{z^2}{\sigma_1^2}\left(1 - \frac{1}{\sigma_1^2 A}\right) = \frac{z^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$
- $f_Z(z) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{z^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}\right) \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{A}{2}\left(y - \frac{z}{\sigma_1^2 A}\right)^2\right) dy$

4. 多维连续随机变量函数的分布

- 例1: $X \sim N(0,\sigma_1), Y \sim N(0,\sigma_2)$，$X, Y$相互独立，求$Z = X + Y$的概率密度函数
- $f_Z(z) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\exp\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{z^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right)\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{A}{2}\left(y-\frac{z}{\sigma_1^2 A}\right)^2\right)dy$
- $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sqrt{1/A}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{A}{2}\left(y-\frac{z}{\sigma_1^2 A}\right)^2\right)dy = 1$
- $f_Z(z) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\exp\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{z^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right)\cdot\sqrt{2\pi}\cdot\sqrt{1/A}$
- $A = \frac{1}{\sigma_1^2}+\frac{1}{\sigma_2^2} \Rightarrow f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}\exp\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{z^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right)$
- 也即 $Z \sim N(0,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$

PEKING UNIVERSITY

4. 多维连续随机变量函数的分布

- 推广： $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i)$，且相互独立，则$\sum_{i=1}^{n} a_i X_i \sim N(\mu_0, \sigma_0^2)$
- $\mu_0 = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i$ ， $\sigma_0^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma_i^2$

- 特别有，若X_i独立同分布，且$X_i \sim N(0,1)$，则$\sum_{i=1}^{n} a_i X_i \sim N(0, |a|^2)$
  - 当 $a_i = \frac{1}{n}$， $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N\left(0, \frac{1}{n}\right)$

4. 多维连续随机变量函数的分布

- 例2: $X \sim \mathrm{Exp}(1), Y \sim \mathrm{Exp}(1)$，$X, Y$相互独立，求$Z = X + Y$的概率密度函数

- $f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y) f_Y(y) dy = \int_0^z e^{-(z-y)-y} dy = z e^{-z}$
- 也即 $Z \sim \Gamma(2,1)$

- 回顾：对于$\alpha, \lambda > 0$，定义概率密度函数
  - $f(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}$，当$x \geq 0$
  - $f(x) = 0$，当$x < 0$

- 推广： $X \sim \Gamma(\alpha_1, \lambda), Y \sim \Gamma(\alpha_2, \lambda)$，$X, Y$相互独立， $X + Y \sim \Gamma(\alpha_1 + \alpha_2, \lambda)$

4. 多维连续随机变量函数的分布

- $X \sim U(0,1), Y \sim U(0,1)$， X, Y相互独立，求$Z = \max\{X, Y\}$的概率密度函数
  - $P(Z \leq z) = P(X \leq z)P(Y \leq z) = z^2$
  - $f_Z(z) = 2z$当 $z \in (0,1)$

- $X \sim U(0,1), Y \sim U(0,1)$， X, Y相互独立，求$Z = \min\{X, Y\}$的概率密度函数
  - $P(Z \geq z) = P(X \geq z)P(Y \geq z) = (1 - z)^2$
  - $P(Z \leq z) = 1 - (1 - z)^2$
  - $f_Z(z) = 2(1 - z)$ 当 $z \in (0,1)$

PEKING UNIVERSITY 北京大学

4. 多维连续随机变量函数的分布

- 若 $X_1, X_2, \dots, X_n$相互独立，则$Y = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$的分布函数$F(y)$满足
  - $F_Y(y) = F_{X_1}(y) \cdot F_{X_2}(y) \cdot \cdots \cdot F_{X_n}(y)$
- 若 $X_1, X_2, \dots, X_n$相互独立，则$Y = \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$的分布函数$F(y)$满足
  - $F_Y(y) = 1 - (1 - F_{X_1}(y)) \cdot (1 - F_{X_2}(y)) \cdot \cdots \cdot (1 - F_{X_n}(y))$

4. 多维连续随机变量函数的分布

- 回顾：设X为连续随机变量，若函数$y=g(x)$严格单调，其反函数$h(y)$有连续导数，则$Y=g(X)$的概率密度函数为
  - $f_Y(y)=f_X\big(h(y)\big)\cdot|h'(y)|$ 当 $y\in(\alpha,\beta)$
  - $f_Y(y)=0$当 $y\notin(\alpha,\beta)$

- 若连续随机变量X,Y的联合密度函数为$f(x,y)$。函数$u=u(x,y),v=v(x,y)$有连续偏导数且$x=x(u,v),y=y(u,v)$为唯一的反函数
- 则$U=u(X,Y),V=v(X,Y)$的联合密度函数为 $f\big(x(u,v),y(u,v)\big)\cdot|J|$，其中
  - $J=\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\left(\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|\right)^{-1}=\left(\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}\right)^{-1}$

4. 多维连续随机变量函数的分布

- 例1：若X, Y相互独立，且$X \sim N(\mu,1), Y \sim N(\mu,1)$。计算$U = X + Y$和$V = X - Y$的联合密度函数
- $u = x + y, v = x - y \Rightarrow x = \frac{u+v}{2}, y = \frac{u-v}{2}$
- $J = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \Rightarrow |J| = \frac{1}{2}$
- $U = X + Y$和$V = X - Y$的联合密度函数为
- $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left(\frac{u+v}{2}-\mu\right)^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left(\frac{u-v}{2}-\mu\right)^2}{2}} \cdot \left|-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{4\pi} e^{-\frac{1}{4}((u-2\mu)^2+v^2)}$
- 也即 $U \sim N(2\mu, 2), V \sim N(0,2)$，且$U, V$相互独立

4. 多维连续随机变量函数的分布

- 例2：若连续随机变量X,Y相互独立，计算$U = XY$的概率密度函数
- $u = xy, v = y \Rightarrow x = u/v, y = v$
- $J = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/v & -\frac{u}{v^2} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{v} \Rightarrow |J| = \frac{1}{|v|}$
- U,V的联合密度函数为 $f\left(\frac{u}{v}, v\right) \cdot |J| = f_X\left(\frac{u}{v}\right) \cdot f_Y(v) \cdot \frac{1}{|v|}$
- U的边际密度函数为 $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X\left(\frac{u}{v}\right) \cdot f_Y(v) \cdot \frac{1}{|v|} \cdot dv$

PEKING UNIVERSITY

4. 多维连续随机变量函数的分布

- 例2：若连续随机变量X,Y相互独立，计算$U = XY$的概率密度函数
- U的概率密度函数为 $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X\left(\frac{u}{v}\right) \cdot f_Y(v) \cdot \frac{1}{|v|} \cdot dv$
- 验证：
- $P(U \le u) = \iint_{xy\le u} f_X(x) f_Y(y)\, dxdy$
- $= \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{u/y} f_X(x)dx \cdot f_Y(y)dy + \int_{-\infty}^{0} \int_{u/y}^{+\infty} f_X(x)dx \cdot f_Y(y)dy$
- 对u求导，$f_U(u) = \int_0^{+\infty} f_X(u/y) \cdot f_Y(y) \cdot \frac{1}{y} \cdot dy - \int_{-\infty}^{0} f_X\left(\frac{u}{y}\right) \cdot f_Y(y) \cdot \frac{1}{y} \cdot dy$
- $= \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(u/y) \cdot f_Y(y) \cdot \frac{1}{|y|} \cdot dy$

5. 多维高斯分布

- 随机向量$\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$。定义$E(\boldsymbol{X}) = (E(X_1), E(X_2,), \dots, E(X_n))$为 $\boldsymbol{X}$的数学期望向量，$\mathrm{Cov}(\boldsymbol{X}) = E\left(\left(\boldsymbol{X} - E(\boldsymbol{X})\right)\left(\boldsymbol{X} - E(\boldsymbol{X})\right)^T\right)$为$\boldsymbol{X}$的协方差矩阵
- $\mathrm{Cov}(\boldsymbol{X}) = \begin{pmatrix} \mathrm{Var}(X_1) & \mathrm{Cov}(X_1, X_2) & \dots & \mathrm{Cov}(X_1, X_n) \\ \mathrm{Cov}(X_2, X_1) & \mathrm{Var}(X_2) & \dots & \mathrm{Cov}(X_2, X_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathrm{Cov}(X_n, X_1) & \mathrm{Cov}(X_n, X_2) & \dots & \mathrm{Var}(X_n) \end{pmatrix}$
- 性质：$\mathrm{Cov}(\boldsymbol{X})$是半正定的对阵矩阵
  - $\boldsymbol{\alpha}^T \mathrm{Cov}(\boldsymbol{X})\boldsymbol{\alpha} = E\left(\left(\boldsymbol{\alpha}^T\left(\boldsymbol{X} - \mathrm{E}(\boldsymbol{X})\right)\right)^2\right) \geq 0$

5. 多维高斯分布

- $X_1, X_2 \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$，计算协方差矩阵和其逆矩阵
  - 协方差矩阵为$B = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$
  - $\det(B) = (1-\rho^2)\sigma_1^2\sigma_2^2$
  - 逆矩阵为 $B^{-1} = \frac{1}{1-\rho^2} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} & -\frac{\rho}{\sigma_1\sigma_2} \\ -\frac{\rho}{\sigma_1\sigma_2} & \frac{1}{\sigma_2^2} \end{pmatrix}$
- $f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \cdot \left(\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} - \frac{2\rho(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}\right)\right]$
- $= \frac{1}{2\pi\cdot(\det(B))^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})^T B^{-1} (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})\right)$

5. 多维高斯分布

- n维高斯分布的联合密度函数为
- $f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\cdot(\det(B))^{\frac{1}{2}}}\exp\left(-\frac{1}{2}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})^T B^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})\right)$

- 数学期望向量： $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^n$
- 协方差矩阵： $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$
- 记号： $\boldsymbol{X} \sim N(\boldsymbol{\mu}, B)$

- 当 $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$， $B = I_n$，
- $f(\boldsymbol{x}) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\cdot\exp\left(-\frac{1}{2}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}|^2\right) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\exp\left(-\frac{(x_i-\mu_i)^2}{2}\right)$
- 也即 $X_1, X_2, \dots, X_n$相互独立且 $X_i \sim N(0,1)$

5. 多维高斯分布

- n维高斯分布的联合密度函数为
- $$f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \cdot (\det(B))^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})^T B^{-1} (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})\right)$$
- 性质：
  - 边际分布 $X_i \sim N(\mu_i, B_{i,i})$
  - $X_1, X_2, \dots, X_n$相互独立等价于 $X_1, X_2, \dots, X_n$两两不相关，也即B为对角矩阵
  - $\boldsymbol{X} \sim N(\boldsymbol{\mu}, B) \Rightarrow A\boldsymbol{X} + \boldsymbol{b} \sim N(A\boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{b}, ABA^T)$
  - $\boldsymbol{X} \sim N(0, I_n)$，$U$为正交矩阵，则$U\boldsymbol{X} \sim N(0, I_n)$
  - $\boldsymbol{X} \sim N(\boldsymbol{\mu}, B) \Rightarrow B^{-\frac{1}{2}}(\boldsymbol{X} - \mu) \sim N(0, I_n)$

5. 多维高斯分布

- n维高斯分布的联合密度函数为
- $f(\boldsymbol{x}) = \dfrac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \cdot (\det(B))^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})^T B^{-1} (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})\right)$
- $\boldsymbol{X} \sim N(\boldsymbol{\mu}, B)$，令$\boldsymbol{Y} = A\boldsymbol{X} + \boldsymbol{b}$
- $f_Y(\boldsymbol{y}) = f_X(A^{-1}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{b})) \cdot \left|\dfrac{\partial x}{\partial y}\right| = f_X\left(A^{-1}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{b})\right) \cdot \left|\dfrac{\partial y}{\partial x}\right|^{-1} = f_X(A^{-1}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{b})) \dfrac{1}{|\det(A)|}$
- $= \dfrac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \cdot (\det(B))^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot (A^{-1}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{b}) - \boldsymbol{\mu})^T B^{-1} (A^{-1}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{b}) - \boldsymbol{\mu})\right) \cdot \dfrac{1}{|\det(A)|}$
- $= \dfrac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \cdot \left(\det(ABA^T)\right)^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot (\boldsymbol{y} - A\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{b})^T (ABA^T)^{-1} (\boldsymbol{y} - A\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{b})\right)$