信息学中的概率统计：作业二

截止日期：2024 年 10 月 18 日（周五）下课前。**如无特殊情况，请不要提交电子版！**

第一题

对于任意 $a \geq 1$，构造**非负**离散随机变量 X，使得 $P(X \geq a \cdot E(X)) = 1/a$。

第二题

在课上，我们介绍了 n 重伯努利试验。如果某个随机试验只有两个可能的结果 A 和 $\overline{A}$，且 $P(A) = p$，将试验独立地重复进行 n 次，令 X 表示结果 A 的发生次数。在课上，我们利用二项式系数的性质证明了 $E(X) = np$。在本题中，我们将用另一种方法计算 $E(X)$ 和 $E(X^2)$。

(1) 对于任意 $t \in \mathbb{R}$，计算 $E\left(e^{Xt}\right)$。

(2) 对于任意 $t \in \mathbb{R}$，证明

$$E\left(e^{Xt}\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{i!} \cdot E(X^i)。$$

提示：对于固定的 $0 \leq k \leq n$，考虑对 e^{kt} 应用泰勒公式。

(3) 利用上一问中的结论，计算 $E(X)$ 和 $E(X^2)$。提示：令 $f(t) = E\left(e^{Xt}\right)$。如何利用上一问中的结论，通过 $f(t)$ 求得 $E(X)$ 和 $E(X^2)$?

第三题

在课上，我们考虑了如下球与桶模型：有 n 个球，每个球都等可能被放到 m 个桶中的任一个。在本题中，我们考虑 $m = n$ 的情况，并假设 $n = m \geq 2$。

(1) 随机变量 X_i 表示第 i 个桶中球的数量。对于任意 $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$，证明 $E(X_i) = 1$。

(2) 对于任意 $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ 和任意 $1 \leq k \leq n$，证明 $P(X_i = k) \leq \frac{1}{k!}$。

(3) 定义随机变量 $Y = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$，证明 $P(Y \geq 4 \log_2 n) \leq 1/n$。提示：考虑使用 Union Bound。

(4) 证明 $E(Y) \leq 5 \log_2 n$。

第四题

给定离散随机变量 X，证明对于任意实数 c，$E((X - c)^2) \geq \mathrm{Var}(X)$。

第五题

给定离散随机变量 X, 假设其期望 $E(X)$ 和标准差 $\sigma(X)$ 均存在。对于任意实数 m, 若满足 $P(X \geq m) \geq 1/2$ 且 $P(X \leq m) \geq 1/2$，证明 $|E(X) - m| \leq \sqrt{2}\sigma$。

第六题

令 $X \sim \pi(\lambda)$，也即随机变量 X 服从参数为 $\lambda > 0$ 的泊松分布。

(1) 对于任意实数 t，计算 $E(e^{tX})$。

(2) 证明对于任意实数 $x > 0$,

$$P((x/\lambda)^X \geq (x/\lambda)^x) \leq \frac{e^{-\lambda}(e\lambda)^x}{x^x}。$$

(3) 证明对于任意 $x > \lambda$,

$$P(X \geq x) \leq \frac{e^{-\lambda}(e\lambda)^x}{x^x},$$

且对于任意 $0 < x < \lambda$,

$$P(X \leq x) \leq \frac{e^{-\lambda}(e\lambda)^x}{x^x}。$$

(4) 证明

$$P(|X - \lambda| \geq 0.2\lambda) \leq 2 \cdot e^{-0.01\lambda}。$$