8 第八次作业

题目 2

(10 分) 在课本图 6.8 描述的双峰干涉实验中，假设总共有 3000 个电子通过双缝。在线圈没有电流通过时，探测器 d_5 上探测到了大约 150 个电子。现在线圈通电产生磁场，造成电子上下两部分波函数有一个 $\pi/3$ 的相位差，即通过双缝以后，电子的波函数成为

$$|\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\psi_1\rangle + e^{i\pi/3}|\psi_2\rangle\right)$$

请问探测器 d_5 上探测到了大约多少个电子。

在线圈没有电流通过时，电子的波函数为

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\psi_1\rangle + |\psi_2\rangle\right).$$

经过双缝后，电子态将演化为

$$|\psi\rangle \to \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{j=1}^{9}(a_j + b_j)|d_j\rangle.$$

因此，探测器 d_j 将会探测到 $N(|a_j + b_j|^2)/2$ 个电子。对于探测器 d_5，由于对称性，$a_5 = b_5$，因此探测器 d_5 会探测到 $2N|a_5|^2$ 个电子，即 $2 \times 3000|a_5|^2 = 150$，所以 $|a_5|^2 = 0.025$。

线圈通电产生磁场后，电子态变为

$$|\Phi\rangle \to \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{j=1}^{9}\left(a_i + e^{i\pi/3}b_i\right)|d_i\rangle.$$

对于探测器 d_5，$|a_5|^2 = |b_5|^2 = 0.025$，因此探测到的电子数量为

$$\frac{1}{2}|a_5 + e^{i\pi/3}b_5|^2 N \approx 113.$$

题目 2

(10 分) 证明下面这个双自旋态是纠缠态。

$$|\Phi\rangle = \frac{1}{2}|ud\rangle - i\frac{1}{2}|du\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|dd\rangle.$$

反证法。假设 $|\Phi\rangle$ 是直积态，那么可以选择课本中 (7.4) 式

$$|\Psi_{12}\rangle = a_1a_2|uu\rangle + a_1b_2|ud\rangle + b_1a_2|du\rangle + b_1b_2|dd\rangle$$

中的系数 a_1, b_1, a_2, b_2 使得 $|\Phi\rangle = |\Psi_{12}\rangle$，有

$$a_1a_2 = 0,\ a_1b_2 = \frac{1}{2},\ b_1a_2 = -i\frac{1}{2},\ b_1b_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

上面的等式不能同时成立，因此假设不成立，$|\Phi\rangle$ 是纠缠态。

题目 3
(10 分) 针对上面这个纠缠态 $|\Phi\rangle$，计算 $\langle\Phi|\hat{\sigma}_x|\Phi\rangle$ 和 $\langle\Phi|\hat{\sigma}_z \otimes \hat{\tau}_x|\Phi\rangle$。

(1)

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_x|\Phi\rangle &= \frac{1}{2}(\hat{\sigma}_x|u\rangle) \otimes |d\rangle - i\frac{1}{2}(\hat{\sigma}_x|d\rangle) \otimes |u\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{\sigma}_x|d\rangle) \otimes |d\rangle \\ &= \frac{1}{2}|dd\rangle - i\frac{1}{2}|uu\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|ud\rangle\end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned}\langle\Phi|\hat{\sigma}_x|\Phi\rangle &= \left(\frac{1}{2}\langle ud| + i\frac{1}{2}\langle du| + \frac{1}{\sqrt{2}}\langle dd|\right)\left(\frac{1}{2}|dd\rangle - i\frac{1}{2}|uu\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|ud\rangle\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_z \otimes \hat{\tau}_x|\Phi\rangle &= \frac{1}{2}(\hat{\sigma}_z|u\rangle) \otimes (\hat{\tau}_x|d\rangle) - i\frac{1}{2}(\hat{\sigma}_z|d\rangle) \otimes (\hat{\tau}_x|u\rangle) + \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{\sigma}_z|d\rangle) \otimes (\hat{\tau}_x|d\rangle) \\ &= \frac{1}{2}|uu\rangle + i\frac{1}{2}|dd\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|du\rangle\end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned}\langle\Phi|\hat{\sigma}_z \otimes \hat{\tau}_x|\Phi\rangle &= \left(\frac{1}{2}\langle ud| + i\frac{1}{2}\langle du| + \frac{1}{\sqrt{2}}\langle dd|\right)\left(\frac{1}{2}|uu\rangle + i\frac{1}{2}|dd\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|du\rangle\right) \\ &= i\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= 0\end{aligned}$$

题目 4
(10 分) 验证课本第 130 页公式 (7.21)。

(7.21) 式是

$$|S\rangle = -\frac{e^{i\varphi}}{\sqrt{2}}\left(|n_+n_-\rangle - |n_-n_+\rangle\right).$$

其中，$|S\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|ud\rangle - |du\rangle)$ 是自旋单态，$|n_+\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|u\rangle + e^{i\varphi}\sin\frac{\theta}{2}|d\rangle$，$|n_-\rangle = \sin\frac{\theta}{2}|u\rangle - e^{i\varphi}\cos\frac{\theta}{2}|d\rangle$ 是沿 $\boldsymbol{n}$ 方向自旋算符 $\boldsymbol{n}\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ 的两个本征态。因此，

$$\begin{aligned}|S\rangle &= -\frac{e^{-i\varphi}}{\sqrt{2}}\left(|n_+n_-\rangle - |n_-n_+\rangle\right) \\ &= -\frac{e^{-i\varphi}}{\sqrt{2}}\left[\left(\cos\frac{\theta}{2}|u\rangle + e^{i\varphi}\sin\frac{\theta}{2}|d\rangle\right) \otimes \left(\sin\frac{\theta}{2}|u\rangle - e^{i\varphi}\cos\frac{\theta}{2}|d\rangle\right) - \right. \\ &\quad \left.\left(\sin\frac{\theta}{2}|u\rangle - e^{i\varphi}\cos\frac{\theta}{2}|d\rangle\right) \otimes\right]\left(\cos\frac{\theta}{2}|u\rangle + e^{i\varphi}\sin\frac{\theta}{2}|d\rangle\right) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left(\sin^2\frac{\theta}{2} + \cos^2\frac{\theta}{2}\right)|du\rangle - \left(\cos^2\frac{\theta}{2} + \sin^2\frac{\theta}{2}\right)|ud\rangle\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|ud\rangle - |du\rangle)\end{aligned}$$

题目 5(附加题)
(如果本题做对了，在总分不超过 40 分的前提下，最多加 5 分) 请说明（或证明)，如果随机选一个双自旋态，它是纠缠态的概率无穷接近 1.

对于一个双自旋态

$$|\Psi_{12}\rangle = c_1|uu\rangle + c_2|ud\rangle + c_3|du\rangle + c_4|dd\rangle$$

始终有归一化的约束，即

$$|c_1|^2 + |c_2|^2 + |c_3|^2 + |c_4|^2 = 1.$$

若双自旋态是直积态，则

$$|\Psi_{12}\rangle = a_1a_2|uu\rangle + a_1b_2|ud\rangle + b_1a_2|du\rangle + b_1b_2|dd\rangle$$

故有

$$a_1a_2 = c_1,\ a_1b_2 = c_2,\ b_1a_2 = c_3,\ b_1b_2 = c_4$$

因此有

$$c_1c_4 = c_2c_3.$$

由于 c_1，c_2，c_3，c_4 均为复数，所以确定一个纠缠态需要 6 个独立的实参数（3 个独立的复参数），而对于直积态只需要 4 个独立的实参数（2 个独立的复参数）。因此在无穷大的测试选择中，获取纠缠态的概率接近于 1.