

# 2020 简量期末

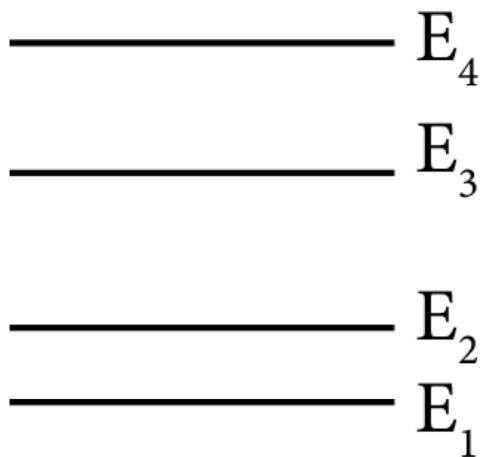
by [Arthals](#)

blog: [Arthals' ink](#)

1. 有 4 个能量本征态，它们的能量从低到高分别是  $E_1 < E_2 < E_3 < E_4$  (见图)。锂有两种同位素  ${}^6\text{Li}$  和  ${}^7\text{Li}$ 。 ${}^6\text{Li}$  由三个质子、三个中子、三个电子构成，是费米子； ${}^7\text{Li}$  由三个质子、四个中子、三个电子构成，是玻色子。

- (a) 请问把 3 个  ${}^6\text{Li}$  原子放到这 4 个量子态，共有多少种放法？
- (b) 对于这些  ${}^6\text{Li}$  原子，其中能量最低的放法是怎样的？
- (c) 请问把 3 个  ${}^7\text{Li}$  原子放到这 4 个量子态，共有多少种放法？
- (d) 对于这些  ${}^7\text{Li}$  原子，其中能量最低的放法是怎样的？

提示：有同学可能知道，由于锂原子最外层有一个未配对的电子，所以锂原子是具有自旋的，在某一个能级，比如  $E_2$ ，锂原子可以自旋向上也可以自旋向下。在考虑上面问题时，我们假设锂原子的自旋被“冻结”了，只能处于自旋向上的状态。物理学家可以通过强磁场来“冻结”锂原子的自旋。



2. 在二维希尔伯特空间里有两个向量

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ i\sqrt{5} \end{pmatrix}, \quad |\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -i \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \quad (1)$$

计算内积  $\langle\psi_2|\psi_1\rangle$ 。

3. 现在有两个矩阵

$$M_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1+i \\ i & -5 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2+i \\ 2-i & -3 \end{pmatrix} \quad (2)$$

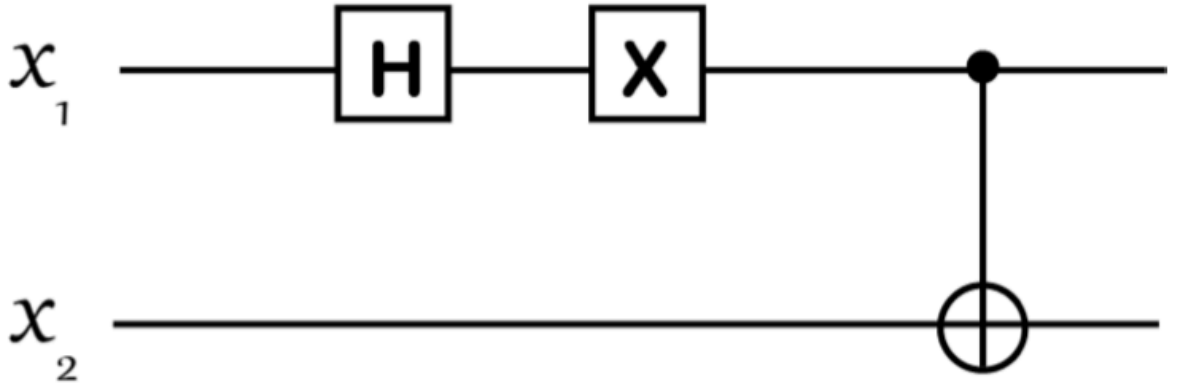
- (a) 计算  $M_1 M_2$  和  $M_2 M_1$ ，它们相等吗？
- (b)  $M_1$  和  $M_2$  中哪个是厄密矩阵？

4. 给定一个自旋态

$$|\psi\rangle = \frac{3}{5}|u\rangle - \frac{i4}{5}|d\rangle \quad (3)$$

问测得

- (a) 自旋沿  $z$  方向向上的几率是多少?
  - (b) 自旋沿  $y$  方向向下 (对应  $\hat{\sigma}_y$  的本征值为 -1) 的几率是多少?
5. 给定一个双自旋态  $|\Psi\rangle = \frac{1}{3}|uu\rangle - \frac{2i}{3}|ud\rangle + \frac{2}{3}|du\rangle$
- (a) 证明它是纠缠态。
  - (b) 计算  $\langle\Psi|\hat{\sigma}_x \otimes \hat{\tau}_y|\Psi\rangle$ 。
6. 有一个量子计算机程序，它作用在两个量子比特  $x_1$  和  $x_2$  上，由三个量子逻辑门组成：先进行一个哈达玛门操作，然后进行一个  $X$  门操作，最后是一个  $CNOT$  门。我们用  $|x_2, x_1\rangle$  表示两个量子比特的状态，比如  $|01\rangle$  表示第一个量子比特  $x_1$  处于状态  $|1\rangle$ ，第二个量子比特  $x_2$  处于状态  $|0\rangle$ 。



- (a) 如果输入态是  $|00\rangle$ ，请问输出态是什么?
  - (b) 如果输入态是  $|01\rangle$ ，请问输出态是什么?
  - (c) 如果输入态是  $(3|00\rangle + 4i|01\rangle)/5$ ，请问输出态是什么?
7. 给定一个自旋态  $|\phi\rangle = \frac{(2|u\rangle + i|d\rangle)}{\sqrt{5}}$
- (a) 计算关于  $\hat{\sigma}_y$  测量的不确定度  $\Delta\hat{\sigma}_y^2$ ;
  - (b) 计算关于  $\hat{\sigma}_z$  测量的不确定度  $\Delta\hat{\sigma}_z^2$ ;
  - (c) 它们满足  $\Delta\hat{\sigma}_y^2 + \Delta\hat{\sigma}_z^2 \geq 1$  吗?
8. 宇宙射线包含各种高能量的粒子，比如质子， $\alpha$  粒子，电子等。它们和 DNA 相互作用后可能导致某些基因发生突变。在很久以前有一只类鹿的动物，它生殖细胞中的 DNA 和宇宙射线中的某个粒子有了这么一次遭遇。这个粒子由于来自一颗遥远的恒星，在飞行了几十光年到达地球时，它的波函数已经远远宽于地球的直径。这时候，我们关心的系统的波函数大致可以写成

$$|\Psi_0\rangle = (a|\psi_1\rangle + b|\psi_2\rangle) \otimes |\Phi_{DNA}^0\rangle \quad (4)$$

这里  $|\psi_1\rangle$  表示和 DNA 在空间上没有重叠的粒子波函数， $|\psi_2\rangle$  表示和 DNA 重叠的粒子波函数； $|\Phi_{DNA}^0\rangle$  是描述还没有变异 DNA 的波函数。由于粒子的波函数非常宽，它和 DNA 的重叠部分很小，所以  $|a|^2 \gg |b|^2$ 。粒子和 DNA 相互作用后，波函数会变成

$$|\Psi_f\rangle = a|\psi_1\rangle \otimes |\Phi_{DNA}^0\rangle + b|\psi_2\rangle \otimes |\Phi_{DNA}^m\rangle \quad (5)$$

由于  $|\psi_1\rangle$  和 DNA 在空间上没有重叠，它不会让 DNA 发生任何变化； $|\psi_2\rangle$  和 DNA 在空间上重叠，它会导致 DNA 发生突变。假设这个突变的基因会让那只类鹿动物长出角来。分别用波包塌缩理论和多世界理论来描述这个宇宙射线粒子和 DNA 作用的后果。