

## 第十次习题

1. 给定一个自旋态

$$|\psi\rangle = \frac{5}{13}|u\rangle - \frac{12}{13}i|d\rangle$$

- (8分) 计算期待值 $\langle\psi|\hat{\sigma}_x|\psi\rangle$  和 $\langle\psi|\hat{\sigma}_y|\psi\rangle$
- (10分) 计算 $\Delta\hat{\sigma}_x^2$ 和 $\Delta\hat{\sigma}_y^2$ ; 它们满足不等式 $\Delta\hat{\sigma}_x^2 + \Delta\hat{\sigma}_y^2 \geq 1$ 吗?

2. 考虑讲义中描述的自旋和猫的复合系统, 它们有四个量子态  $|u, \text{alive}\rangle$ 、 $|d, \text{alive}\rangle$ 、 $|u, \text{dead}\rangle$ 和 $|d, \text{dead}\rangle$ . 初始时刻, 这个系统处于如下量子态

$$|\Psi_0\rangle = \left(\frac{3}{5}|u\rangle - i\frac{4}{5}|d\rangle\right) \otimes |\text{alive}\rangle = \frac{3}{5}|u, \text{alive}\rangle - i\frac{4}{5}|d, \text{alive}\rangle$$

现在猫对自旋进行测量. 按照多世界理论, 系统会变成

$$|\Psi_1\rangle = \frac{3}{5}|u, \text{alive}\rangle - i\frac{4}{5}|d, \text{dead}\rangle$$

按照哥本哈根解释, 如果测量结果是自旋向上, 波包塌缩为

$$|\Psi_2\rangle = |u, \text{alive}\rangle$$

现在把 $|u, \text{alive}\rangle$ 、 $|d, \text{alive}\rangle$ 、 $|u, \text{dead}\rangle$ 、和 $|d, \text{dead}\rangle$ 写成如下列向量

$$|u, \text{alive}\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |d, \text{alive}\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |u, \text{dead}\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |d, \text{dead}\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) (4分) 请验证 $|\Psi_1\rangle = U|\Psi_0\rangle$ , 其中

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) (4分) 请验证 $|\Psi_2\rangle = A|\Psi_1\rangle$ , 其中

$$A = \begin{pmatrix} 5/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(c) (4分) 证明 $U$ 是一个么正矩阵, 而 $A$ 不是一个么正矩阵。

3. (10分) 半人马座A发生一次超新星爆炸, 释放出的一个高能电子飞向了地球. 依据量子力学进行的估算告诉我们, 描述这个电子的波函数的半径将达到 $10^9 - 10^{24}$ 米, 远远大于地球的直径 $10^7$ 米. 这个电子到达地球后会和地球上的DNA相互作用, 导致某个基因发生突变. 相互作用发生前, 我们关心的系统的波函数大致可以写成

$$|\Psi_0\rangle = (a|\psi_1\rangle + b|\psi_2\rangle) \otimes |\Phi_{\text{DNA}}^0\rangle$$

这里 $|\psi_1\rangle$ 表示和DNA在空间上没有重叠的粒子波函数,  $|\psi_2\rangle$ 表示和DNA重叠的粒子波函数;  $|\Phi_{\text{DNA}}^0\rangle$ 是描述没有DNA突变的波函数。由于粒子的波函数非常宽, 它和DNA的重叠部分很小, 所以 $|a|^2 \gg |b|^2$ 。粒子和DNA相互作用后, 波函数会变成

$$|\Psi_f\rangle = a|\psi_1\rangle \otimes |\Phi_{\text{DNA}}^0\rangle + b|\psi_2\rangle \otimes |\Phi_{\text{DNA}}^m\rangle$$

由于 $|\psi_1\rangle$ 和DNA在空间上没有重叠, 它不会让DNA发生任何变化;  $|\psi_2\rangle$ 和DNA在空间上重叠, 它会导致DNA发生突变。假设这个突变的基因会让某只类鹿动物长出角来。分别用波包塌缩理论和多世界理论来描述这个来自半人马座A的电子和DNA作用的后果。