9 第九次作业

题目 1

对于双自旋态 $|S_3\rangle$，选择处于 xz 平面内的两个方向

$$\vec{e}_1 = (0,0,1), \quad \vec{e}_2 = \left(\sin\frac{\pi}{4}, 0, \cos\frac{\pi}{4}\right).$$

(1)(10 分) 计算自旋 1 沿 $\vec{e}_1$ 正方向同时自旋 2 沿 $\vec{e}_2$ 负方向的概率 $p(e_1^+, e_2^-)$.

(2)(10 分) 粒子源发射 1000 对这样的自旋对，那么右侧检测屏上下两个斑点各自大约有多少粒子.

(1) 记 $\theta = \frac{\pi}{4}$. 则有

$$|e_1^+ e_2^-\rangle = |u\rangle \otimes \left(\sin\frac{\theta}{2}|u\rangle - \cos\frac{\theta}{2}|d\rangle\right) = \sin\frac{\theta}{2}|uu\rangle - \cos\frac{\theta}{2}|ud\rangle.$$

双自旋态为

$$|S_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|ud\rangle + |du\rangle)$$

因此，所求概率为

$$\begin{aligned} p(e_1^+, e_2^-) &= |\langle e_1^+ e_2^- | S_3\rangle|^2 = \frac{1}{2}\cos^2\frac{\theta}{2} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{2}}{8} \approx 0.427. \end{aligned}$$

(2) 在双自旋施特恩-格拉赫实验中，一共有四种可能的结果，分别是 (e_1^+, e_2^+)(意思是自旋 1 飞向左上方，自旋 2 飞向右上方), (e_1^+, e_2^-), (e_1^-, e_2^+), (e_1^-, e_2^-). 因此题目中要求的右侧检测屏上下两个斑点各自的粒子数量，需要分别求出 $p(e_1^+, e_2^+) + p(e_1^-, e_2^+)$ 和 $p(e_1^+, e_2^-) + p(e_1^-, e_2^-)$.

同 (1)，可计算

$$|e_1^- e_2^-\rangle = |d\rangle \otimes \left(\sin\frac{\theta}{2}|u\rangle - \cos\frac{\theta}{2}|d\rangle\right) = \sin\frac{\theta}{2}|du\rangle - \cos\frac{\theta}{2}|dd\rangle.$$

所以

$$p(e_1^-, e_2^+) = |\langle e_1^- e_2^- | S_3\rangle|^2 = \frac{1}{2}\sin^2\frac{\theta}{2}.$$

因此，$p(e_1^+, e_2^-) + p(e_1^-, e_2^-) = \frac{1}{2}$，则 $p(e_1^+, e_2^+) + p(e_1^-, e_2^+) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

所以右侧检测屏上下两个斑点各 500 个粒子.

题目 2

在课本中我们举例说明了 $|S\rangle$ 会违反贝尔不等式，其中用到了三个方向 $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3$. 请再找两个例子，其中 $\vec{n}_2$ 和 $\vec{n}_3$ 和课本的方向一样，$\vec{n}_1$ 不一样，使得这两个例子分别 (1)(7 分) 违反贝尔不等式；(2)(7 分) 遵守贝尔不等式.

自旋单态 $|S\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|ud\rangle - |du\rangle$. 课本中 $\vec{n}_2 = \{\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{1}{2}\}$，$\vec{n}_3 = \{\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, -\frac{1}{2}\}$.

设 $\vec{n}_1 = \{\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta\}$ $(0 \le \theta \le \pi,\ 0 \le \varphi < 2\pi)$.

因此，$|n_1^+\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|u\rangle + e^{i\varphi}\sin\frac{\theta}{2}|d\rangle$, $|n_2^+\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|u\rangle + \frac{1}{2}|d\rangle$, $|n_3^+\rangle = \frac{1}{2}|u\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}|d\rangle$

$$p(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \frac{1}{2}\left|\frac{1}{2}\cos\frac{\theta}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}e^{i\varphi}\sin\frac{\theta}{2}\right|^2 = \frac{1}{8}(2 - \cos\theta - \sqrt{3}\sin\theta\cos\varphi)$$

$$p(\vec{n}_2,\vec{n}_3)=\frac{1}{2}\sin^2\frac{\pi}{6}=\frac{1}{8}$$

$$p(\vec{n}_1,\vec{n}_3)=\frac{1}{2}\left|-\frac{1}{2}e^{i\varphi}\sin\frac{\theta}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right|^2=\frac{1}{8}(2+\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta\cos\varphi)$$

以下两种做法均正确:

做法一:

(1) 按照课本上的定义，若要违反贝尔不等式，则有

$$p(\vec{n}_1,\vec{n}_2)+p(\vec{n}_2,\vec{n}_3)<p(\vec{n}_1,\vec{n}_3)$$

代入可得 $\cos\theta>\frac{1}{2}$，因此

$$0\le\theta<\frac{\pi}{3},\ 0\le\varphi<2\pi$$

(2) 若遵循贝尔不等式，则

$$p(\vec{n}_1,\vec{n}_2)+p(\vec{n}_2,\vec{n}_3)\ge p(\vec{n}_1,\vec{n}_3)$$

因此

$$\frac{\pi}{3}\le\theta\le\pi,\ 0\le\varphi<2\pi$$

综上可知，是否违反贝尔不等式与 θ 的取值有关，与 φ 无关. 可举例 $\vec{n}_1=\{\frac{1}{2},0,\frac{\sqrt{3}}{2}\}$ 违反贝尔不等式，$\vec{n}_1=\{0,0,-1\}$ 遵循贝尔不等式.

做法二:

若要遵循贝尔不等式，实则需要任意的两个概率之和小于等于第三个，即

$$p(\vec{n}_1,\vec{n}_2)+p(\vec{n}_2,\vec{n}_3)\ge p(\vec{n}_1,\vec{n}_3)\ \&\ p(\vec{n}_1,\vec{n}_2)+p(\vec{n}_1,\vec{n}_3)\ge p(\vec{n}_2,\vec{n}_3)\ \&\ p(\vec{n}_2,\vec{n}_3)+p(\vec{n}_1,\vec{n}_3)\ge p(\vec{n}_1,\vec{n}_2)$$

因此有

$$\begin{cases}\cos\theta\le\dfrac{1}{2}\\ \cos\theta\ge-\dfrac{1}{2}\\ \sin\theta\cos\varphi\le\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$$

解得:

$$\frac{\pi}{3}\le\theta\le\frac{2\pi}{3}\ \&\ \frac{\pi}{6}\le\varphi\le\frac{11\pi}{6}$$

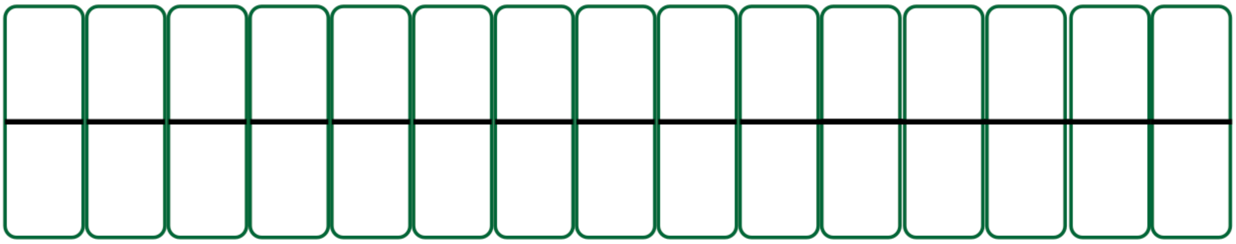
若要违反贝尔不等式，只需要是上述范围的补集即可，即

$$0\le\theta<\frac{\pi}{3}\ 或\ \frac{2\pi}{3}<\theta\le\pi\ 或\ 0\le\varphi<\frac{\pi}{6}\ 或\ \frac{11\pi}{6}<\varphi<2\pi$$

因此，若要违反贝尔不等式，可取 $\theta=\frac{\pi}{6},\varphi=0$，即 $\vec{n}_1=\{\frac{1}{2},0,\frac{\sqrt{3}}{2}\}$；若要遵循贝尔不等式，可取 $\theta=\frac{\pi}{3},\varphi=\pi$，即 $\vec{n}_1=\{-\frac{\sqrt{3}}{2},0,\frac{1}{2}\}$.

题目 3

(6 分) 巧克力版贝尔不等式: 总共 30 块巧克力, 正好 15 块是黑色的,15 块酒心的,15 块圆形的, 请按如下的规则成对放入下面的 15 个长方盒中：同一长方盒子中的两块巧克力不能都是黑色的, 不能都是酒心的, 不能都是圆形的.(有很多可能, 只要给出一种就可以) 小娟拿走了盒子上面的 15 块巧克力, 请数一下小娟手中下面三种巧克力的个数: (1) 黑色但不是酒心 M_1; (2) 酒心但不是圆形 M_2; (3) 黑色但不是圆形 M_3. 看看是否满足 $M_1+M_2\ge M_3$.



其中的一种可能：

$\|uuu\rangle$	$\|uud\rangle$	$\|uud\rangle$	$\|udu\rangle$	$\|udu\rangle$	$\|duu\rangle$	$\|duu\rangle$	$\|udd\rangle$	$\|udd\rangle$	$\|udd\rangle$	$\|udd\rangle$	$\|ddu\rangle$	$\|ddu\rangle$	$\|ddu\rangle$	$\|ddu\rangle$
$\|ddd\rangle$	$\|ddd\rangle$	$\|ddu\rangle$	$\|ddd\rangle$	$\|dud\rangle$	$\|ddd\rangle$	$\|udd\rangle$	$\|ddd\rangle$	$\|ddu\rangle$	$\|duu\rangle$	$\|dud\rangle$	$\|ddd\rangle$	$\|uud\rangle$	$\|udd\rangle$	$\|dud\rangle$

其中，第一个 u 代表是黑色，第二个 u 代表是洒心，第三个 u 代表是圆形。根据题意可知，$M_1 = 6$，$M_2 = 2$，$M_3 = 6$，因此满足 $M_1 + M_2 \geq M_3$.

题目 4(附加题)
（如果本题做对了，在总分不超过 40 分的前提下，最多加 5 分）假设方向 $\vec{e}_1$ 任意，$\vec{e}_1 = \vec{e}_2$. 对于双自旋态 $|S_3\rangle$，计算自旋 1 沿 $\vec{e}_1$ 正方向同时自旋 2 沿 $\vec{e}_2$ 负方向的概率 $p(e_1^+, e_2^-)$.

设 $\vec{n}_1 = \vec{n}_2 = \{\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta\}$ $(0 \leq \theta \leq \pi，0 \leq \varphi < 2\pi)$. 则

$$
\begin{aligned}
|n_1^+ n_2^-\rangle &= \left(\cos\frac{\theta}{2}|u\rangle + e^{i\varphi}\sin\frac{\theta}{2}|d\rangle\right) \otimes \left(\sin\frac{\theta}{2}|u\rangle - e^{i\varphi}\cos\frac{\theta}{2}|d\rangle\right) \\
&= \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}|uu\rangle - e^{i\varphi}\cos^2\frac{\theta}{2}|ud\rangle + e^{i\varphi}\sin^2\frac{\theta}{2}|du\rangle - e^{i2\varphi}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}|dd\rangle
\end{aligned}
$$

因此，

$$
p(e_1^+, e_2^-) = |\langle n_1^+ n_2^- | S_3\rangle|^2 = \frac{1}{2}|\sin^2\frac{\theta}{2} - \cos^2\frac{\theta}{2}|^2 = \frac{1}{2}\cos^2\theta.
$$