5 第五次作业

题目 1

(12 分）有两个自旋态

$$|\psi_1\rangle = \frac{5}{13}|u\rangle + \frac{12}{13}i|d\rangle$$
$$|\psi_2\rangle = \frac{12}{13}|u\rangle - \frac{5}{13}|d\rangle$$

(1) (6 分) 计算 $|\psi_3\rangle = \hat{\sigma}_x |\psi_1\rangle$ 和 $|\psi_4\rangle = \hat{\sigma}_y |\psi_2\rangle$.

(2) (6 分) 计算 $\langle\psi_1 |\hat{\sigma}_x| \psi_1\rangle = \langle\psi_1 \mid \psi_3\rangle$ 和 $\langle\psi_2 |\hat{\sigma}_y| \psi_2\rangle = \langle\psi_2 \mid \psi_4\rangle$.

1. $|\psi_3\rangle = \hat{\sigma}_x |\psi_1\rangle = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{5}{13} \\ \frac{12}{13}i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12}{13}i \\ \frac{5}{13} \end{bmatrix}$

   $|\psi_4\rangle = \hat{\sigma}_y |\psi_2\rangle = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{12}{13} \\ -\frac{5}{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{13}i \\ \frac{12}{13}i \end{bmatrix}$

2. $\langle\psi_1 |\hat{\sigma}_x| \psi_1\rangle = \langle\psi_1 \mid \psi_3\rangle = \begin{bmatrix} \frac{5}{13} & -\frac{12}{13}i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{12}{13}i \\ \frac{5}{13} \end{bmatrix} = 0$

   $\langle\psi_2 |\hat{\sigma}_y| \psi_2\rangle = \langle\psi_2 \mid \psi_4\rangle = \begin{bmatrix} \frac{12}{13} & -\frac{5}{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{5}{13}i \\ \frac{12}{13}i \end{bmatrix} = 0$

题目 2

(8 分）验算 $\vec{n} \cdot \hat{\sigma} |n_+\rangle = |n_+\rangle$.（$|n_+\rangle$ 的定义见课本 92 页）

$$\hat{n} \cdot \hat{\sigma} = \sum_{i=x,y,z} n_i \hat{\sigma}_i = \sin\theta\cos\phi\hat{\sigma}_x + \sin\theta\sin\phi\hat{\sigma}_y + \cos\theta\hat{\sigma}_z = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta e^{-i\phi} \\ \sin\theta e^{i\phi} & -\cos\theta \end{bmatrix}$$

$$|n_+\rangle = \begin{bmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2} \end{bmatrix}$$

$$\therefore \hat{n} \cdot \hat{\sigma} |n_+\rangle = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta e^{-i\phi} \\ \sin\theta e^{i\phi} & -\cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\frac{\theta}{2} + \sin\theta\sin\frac{\theta}{2} \\ e^{i\phi}\left(\sin\theta\cos\frac{\theta}{2} - \cos\theta\sin\frac{\theta}{2}\right) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\left(\theta - \frac{\theta}{2}\right) \\ e^{i\phi}\sin\left(\theta - \frac{\theta}{2}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2} \end{bmatrix} = [n_+\rangle$$

题目 3

(10 分）假设施特恩-格拉赫实验中（磁场沿 z 方向）的银原子总是处于下面这个自旋态

$$|\psi\rangle = \frac{3}{5}|u\rangle + \frac{4i}{5}|d\rangle. \tag{4}$$

若最后检测屏上共有 400 个银原子, 那么上斑点中有大约有多少个银原子, 下斑点中大约有多少个银原子?

上斑点: $P_u = |\langle u \mid \psi\rangle|^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25} \to 400 \times \frac{9}{25} = 144$个

下斑点: $P_d = |\langle d \mid \psi\rangle|^2 = \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{25} \to 400 \times \frac{16}{25} = 256$个

题目 4

（10 分）假设施特恩-格拉赫实验中的银原子总是处于下面这个自旋态

$$|\phi\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|u\rangle + \frac{1}{2}|d\rangle \tag{5}$$

那么磁场沿什么方向 $\vec{n}$ 的时候，检测屏上只会出现一个斑点.

检测屏上只出现一个亮点，说明此时 $\hat{n}\cdot\hat{\sigma}|\phi\rangle = \lambda|\phi\rangle$ ，即 $|\phi\rangle = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ 是 $\hat{n}\cdot\hat{\sigma}$ 的一个本征态。由于检测屏分上下两块，所以对应的本征值为 $\lambda = \pm 1$ 两种。

先考虑 $\lambda = 1$ 的情况。由之前的计算可知: $\hat{n}\cdot\hat{\sigma}\,|n_+\rangle = \begin{bmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} \cos\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ e^{i\phi}\sin\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{1}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \theta = \frac{\pi}{3} \\ \phi = 0 \end{cases} \text{，即 } \lambda = 1 \text{ 对应 } \vec{n} = \left(\tfrac{\pi}{3}, 0\right) \text{ 或 } \vec{n} = (\tfrac{\sqrt{3}}{2}, 0, \tfrac{1}{2}).$$

再考虑 $\lambda = -1$ 的情况，此时本征态是 $|n_-\rangle = \begin{bmatrix} \sin\frac{\theta}{2} \\ -e^{i\phi}\cos\frac{\theta}{2} \end{bmatrix}$，因此

$$\begin{cases} \sin\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ -e^{i\phi}\cos\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{1}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \theta = \frac{2}{3}\pi \\ \phi = \pi \end{cases} \text{，即 } \lambda = -1 \text{ 对应 } \vec{n} = \left(\tfrac{2}{3}\pi, \pi\right) \text{ 或 } \vec{n} = (-\tfrac{\sqrt{3}}{2}, 0, -\tfrac{1}{2}).$$

综上，磁场沿 $\vec{n} = \left(\frac{\pi}{3}, 0\right)$ 和 $\vec{n} = \left(\frac{2}{3}\pi, \pi\right)$（或 $\vec{n} = \pm(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{1}{2})$）时，检测屏上只会出现一个斑点。

题目 5

假设施特恩-格拉赫实验中 (磁场沿 z 方向) 银原子一个一个从粒子源发出，每一个银原子都处于下面这个自旋态

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|u\rangle - i\,|d\rangle) \tag{6}$$

当银原子在检测屏上方形成一个斑点，我们记为 1; 当银原子在检测屏下方形成一个斑点，我们记为 0. 这样我们就会得到一串随机数，比如

$$1011000110101011100010\ldots \tag{7}$$

在我们的电脑中都有一个随机数产生器，它也会产生一串类似的随机数请思考和讨论这两种方式产生的随机数的区别，由于训练 AI 时需要用随机数，现在有人正在思考如何利用电脑中产生的随机数和真正的随机数之间的区别来给 AI 产生的图像加上“水印”

所谓随机数, 其实是一个特殊的数列, 该数列中的每项以同等的概率选取, 这种选取不依赖于数列中的其他项. 因此, 说一个具体的数 (如 50) 是随机的是没有意义的, 尽管它可以是某个随机数序列中的某一项.

绝对随机的随机数只是一种理想的随机数, 计算机不会产生绝对随机的随机数, 它只能生成相对随机的随机数, 即伪随机数. 因此, 伪随机数并不是假随机数, 这里的“伪”是有规律的意思, 就是产生的伪随机数既是随机的又是有规律的. 产生均匀分布随机数的方法主要有: 平方取中法、倍积取中法、乘同余法、线性同余法...

由于实验已经证明隐变量理论的不准确性，对 $|\psi\rangle$ 做测量也能得到不同结果，其不能通过任何手段预测结果。因此，它产生的随机数是真正的随机数。