

## 第七次习题

1. 一个自旋正在按照下面的么正矩阵

$$U_s(t) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi t}{4} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \frac{\pi t}{4} & -\frac{1}{2} \sin \frac{\pi t}{4} \\ \frac{1}{2} \sin \frac{\pi t}{4} & \cos \frac{\pi t}{4} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \frac{\pi t}{4} \end{pmatrix}$$

进行动力学演化。

- (a) (10分) 初始的自旋态是 $|u\rangle$ ，那么时刻 $t$ 时，自旋处于什么态？  
假设在 $t_f$ 时刻，自旋态演化成为 $|\phi\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|u\rangle + \frac{i}{2}|d\rangle$ 。请问 $t_f = ?$   
(注意：量子态的整体相因子不重要，即 $|\tilde{\psi}\rangle = e^{i\theta}|\psi\rangle$ 和 $|\psi\rangle$ 是同一个量子态。另外，只需要给出最小的 $t_f$ .)
- (b) (10分) 初始的自旋态是 $|d\rangle$ ，那么时刻 $t$ 时，自旋处于什么态？  
在同样的 $t_f$ 时刻，自旋处于什么态？
- (c) (10分) 初始的自旋态是

$$|\psi\rangle = \frac{3}{5}|u\rangle + \frac{4}{5}i|d\rangle,$$

利用态叠加原理求出自旋在时刻 $t_f$ 的状态。

2. (10分) 一个长度为 $a = 2$ 的一维盒子里，粒子处于两个能量本征态  
(参见课本公式(6.27)) 的叠加态

$$\psi_+(x) = \frac{3}{5}\psi_2(x) + \frac{4}{5}\psi_3(x) = \frac{3}{5}\sin(\pi x) + \frac{4}{5}\sin\left(\frac{3\pi}{2}x\right) \quad (1)$$

$$\psi_-(x) = \frac{3}{5}\psi_2(x) - \frac{4}{5}\psi_3(x) = \frac{3}{5}\sin(\pi x) - \frac{4}{5}\sin\left(\frac{3\pi}{2}x\right) \quad (2)$$

请画出这两个波函数 $\psi_+$ 和 $\psi_-$ 。

\* \* \* \* \*

**附加题** (如果本题做对了，在总分不超过40分的前提下，最多加5分)

- (1) 请写出氢原子半径的公式，并计算其大小；  
(2) 如果普朗克常数增加了1000倍，即

$$h = 6.62607015 \times 10^{-31} \text{ J} \cdot \text{s}.$$

根据氢原子半径公式重新计算氢原子的半径。