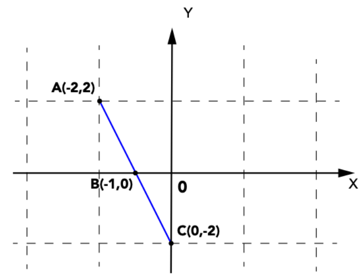
4 第四次作业

题目 1

(10 分) 有一个矩阵 X

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$



图中有三个点 A, B, C, 它们在一条直线上. 它们在矩阵 X 的作用下会相应变成三个点: A', B', C'. 请求出这三个新点的坐标, 并在图中将它们标出, 最后证明它们仍然在一条直线上.

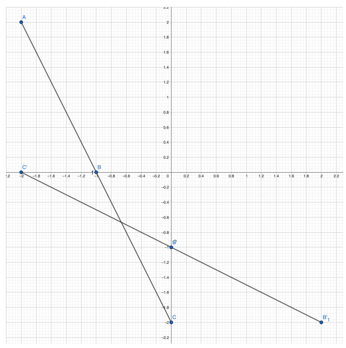
$$A' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix},$$

$$B' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$C' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}。$$

斜率: $\dfrac{-2-0}{0-(-1)} = \dfrac{0-2}{-1-(-2)} = -2$,

所以 A', B', C' 仍然在一条直线上。



题目 2

有两个矩阵

$$M_1 = \begin{pmatrix} 2 & 2+i \\ 2-i & 1+i \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1+2i \\ 1-2i & 3 \end{pmatrix}$$

1. (10 分) 计算 $M_1M_2, M_2M_1, M_1^T, M_2^T, M_1^\dagger, M_2^\dagger$.

2. (1 分) $M_1M_2 = M_2M_1$ 吗?

3. (4 分) M_1 和 M_2 中哪个是厄米矩阵?

1. $M_1M_2 = \begin{bmatrix} 2 & 2+i \\ 2-i & 1+i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1+2i \\ 1-2i & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8-3i & 8+7i \\ 7-3i & 7+6i \end{bmatrix}$ .... 2 分

$M_2M_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1+2i \\ 1-2i & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2+i \\ 2-i & 1+i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8+3i & 3+5i \\ 8-7i & 7 \end{bmatrix}$ .... 2 分

$M_1^T = \begin{bmatrix} 2 & 2+i \\ 2-i & 1+i \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2 & 2-i \\ 2+i & 1+i \end{bmatrix}$ .... 1 分

$$M_2^T = \begin{bmatrix} 2 & 1+2i \\ 1-2i & 3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2 & 1-2i \\ 1+2i & 3 \end{bmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{1 分}$$

$$M_1^\dagger = \begin{bmatrix} 2 & 2+i \\ 2-i & 1+i \end{bmatrix}^\dagger = \begin{bmatrix} 2 & 2+i \\ 2-i & 1-i \end{bmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{2 分}$$

$$M_2^\dagger = \begin{bmatrix} 2 & 1+2i \\ 1-2i & 3 \end{bmatrix}^\dagger = \begin{bmatrix} 2 & 1+2i \\ 1-2i & 3 \end{bmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{2 分}$$

2. $M_1M_2 = \begin{bmatrix} 8-3i & 8+7i \\ 7-3i & 7+6i \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 8+3i & 3+5i \\ 8-7i & 7 \end{bmatrix} = M_2M_1$ $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 1 分

3. $M_1^\dagger \neq M_1$, 不是厄米矩阵. $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 2 分

   $M_2^\dagger = M_2$, 是厄米矩阵. $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 2 分

题目 3

1. (4 分) 验证下面这个向量 $|\psi\rangle$ 是矩阵 X (见题 1) 的本征态

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

2. (2 分) 相应的本征值是多少?

3. (4 分) 将向量 $|\psi\rangle$ 归一化.

1. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

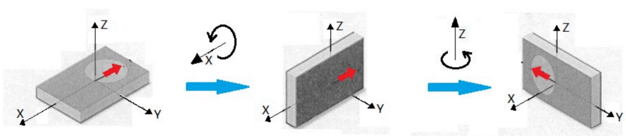
2. $\det\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \lambda^2 - 1 = 0 \to \lambda = \pm 1, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = -1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \to \lambda = -1$

3. $c = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}, |\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

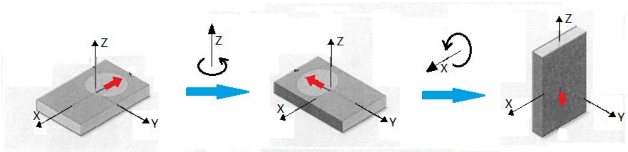
题目 4

(5 分) 在二维平面里进行两次不同的旋转, 旋转的结果不依赖于两次旋转的次序; 举例说明三维空间里的两次旋转, 旋转的结果会依赖于两次旋转的次序.

长方体绕 x、z 轴先后旋转的结果不同:



(a) 先绕X轴转90度，再绕Z轴转90度



(b) 先绕Z轴转90度，再绕X轴转90度