# 7 第七次作业

**题目 1**

一个自旋正在按照下面的幺正矩阵

$$U_a(t)=\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi t}{4}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{\pi t}{4} & -\frac{1}{2}\sin\frac{\pi t}{4}\\ \frac{1}{2}\sin\frac{\pi t}{4} & \cos\frac{\pi t}{4}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{\pi t}{4}\end{pmatrix}$$

进行动力学演化。

1. (10 分) 初始的自旋态是 $|u\rangle$ ，那么时刻 $t$ 时，自旋处于什么态? 假设在 $t_f$ 时刻, 自旋态演化成为 $|\phi\rangle=\frac{\sqrt{3}}{2}|u\rangle+\frac{i}{2}|d\rangle$. 请问 $t_f=$ ? (注意: 量子态的整体相因子不重要, 即 $|\tilde{\psi}\rangle=e^{i\theta}|\psi\rangle$ 和 $|\psi\rangle$ 是同一个量子态. 另外, 只需要给出最小的 $t_f$.)
2. (10 分) 初始的自旋态是 $|d\rangle$, 那么时刻 $t$ 时，自旋处于什么态? 在同样的 $t_f$ 时刻, 自旋处于什么态?
3. (10 分) 初始的自旋态是
$$|\psi\rangle=\frac{3}{5}|u\rangle+\frac{4}{5}i|d\rangle$$
利用态叠加原理求出自旋在时刻 $t_f$ 的状态。

1. 在时刻 $t$，量子态为 $|\psi\rangle=U_a(t)|u\rangle$，因此

$$|\psi\rangle=\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi t}{4}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{\pi t}{4} & -\frac{1}{2}\sin\frac{\pi t}{4}\\ \frac{1}{2}\sin\frac{\pi t}{4} & \cos\frac{\pi t}{4}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{\pi t}{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi t}{4}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{\pi t}{4}\\ \frac{1}{2}\sin\frac{\pi t}{4}\end{pmatrix}$$

在 $t_f$ 时刻，自旋态演化为 $|\phi\rangle$，

$$\begin{aligned}&\cos\frac{\pi t_f}{4}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{\pi t_f}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}e^{i\theta}\\ &\frac{1}{2}\sin\frac{\pi t_f}{4}=\frac{i}{2}e^{i\theta}\end{aligned}$$

由上式可得，

$$\cos\frac{\pi t_f}{4}=0,\ \sin\frac{\pi t_f}{4}=\pm 1$$

因此，$t_f=2+4k$ $(k\in\mathbf{Z})$. 取最小值，$t_f=2$.

2. 在时刻 $t$，自旋处于

$$|\psi\rangle=\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi t}{4}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{\pi t}{4} & -\frac{1}{2}\sin\frac{\pi t}{4}\\ \frac{1}{2}\sin\frac{\pi t}{4} & \cos\frac{\pi t}{4}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{\pi t}{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\sin\frac{\pi t}{4}\\ \cos\frac{\pi t}{4}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{\pi t}{4}\end{pmatrix}$$

在 $t=t_f=2$ 时，自旋处于

$$\begin{aligned}|\psi(t=t_f)\rangle&=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ i\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}\\ &=-\frac{1}{2}|u\rangle+i\frac{\sqrt{3}}{2}|d\rangle\end{aligned}$$

.

3. 根据态叠加原理，有

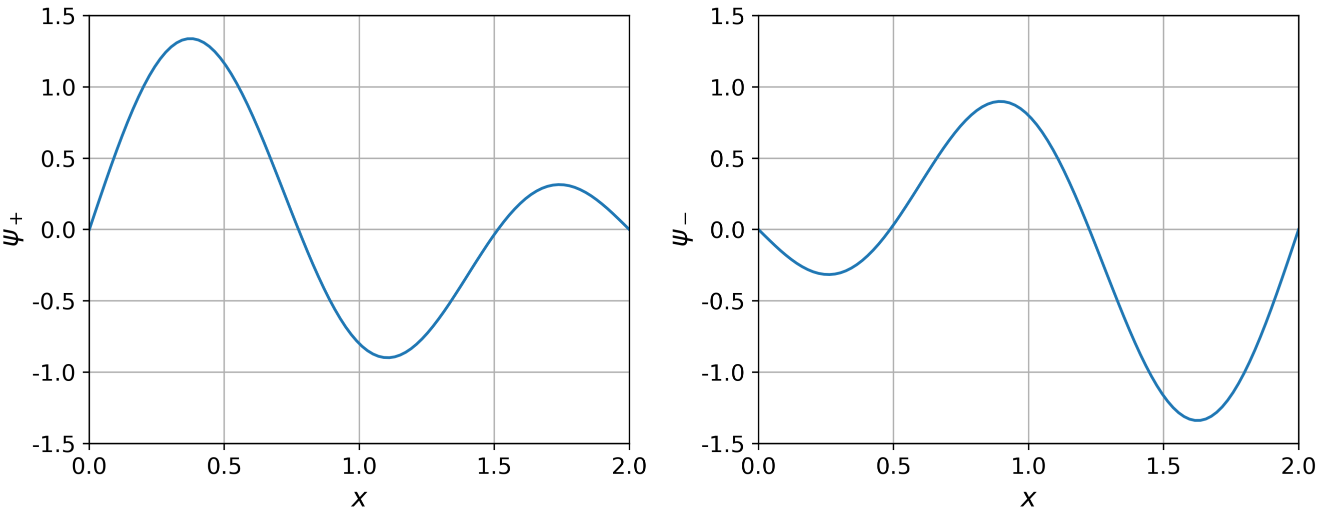
$$
\begin{aligned}
|\psi(t=t_f)\rangle = U_a(t_f)|\psi\rangle &= \frac{3}{5}U_a(t_f)|u\rangle + \frac{4}{5}iU_a(t_f)|d\rangle \\
&= \begin{pmatrix} -i\frac{3\sqrt{3}}{10} \\ \frac{3}{10} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -i\frac{2}{5} \\ -\frac{2\sqrt{3}}{5} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -i\frac{3\sqrt{3}+4}{10} \\ \frac{3-4\sqrt{3}}{10} \end{pmatrix} \\
&= -i\frac{3\sqrt{3}+4}{10}|u\rangle + \frac{3-4\sqrt{3}}{10}|d\rangle
\end{aligned}
$$

**题目 2**

(10 分) 一个长度为 $a=2$ 的一维盒子里, 粒子处于两个能量本征态 (参见课本公式 (6.27)）的叠加态

$$
\begin{aligned}
\psi_+(x) &= \frac{3}{5}\psi_2(x) + \frac{4}{5}\psi_3(x) = \frac{3}{5}\sin(\pi x) + \frac{4}{5}\sin\left(\frac{3\pi}{2}x\right) \\
\psi_-(x) &= \frac{3}{5}\psi_2(x) - \frac{4}{5}\psi_3(x) = \frac{3}{5}\sin(\pi x) - \frac{4}{5}\sin\left(\frac{3\pi}{2}x\right)
\end{aligned}
$$

请画出这两个波函数 $\psi_+$ 和 $\psi_-$.




**题目附**

加题（如果本题做对了，在总分不超过 40 分的前提下，最多加 5 分）

1. 请写出氢原子半径的公式, 并计算其大小;
2. 如果普朗克常数增加了 1000 倍, 即

$$
h = 6.62607015 \times 10^{-31}\ \mathrm{J\cdot s}.
$$

根据这个公式重新计算氢原子的半径.

1. 氢原子半径为

$$
r_n = \frac{\varepsilon_0 h^2}{\pi m_e e^2} \cdot n^2
$$

将 $n=1$，$\varepsilon_0=8.854\times10^{-12}$，$e=1.602\times10^{-19}$，$m_e=9.109\times10^{-31}$，$h=6.62607015\times10^{-34}$ 代入上式，可得

$$r=5.3\times10^{-11}m$$

2. 将 $h=6.62607015\times10^{-31}$ 代入上式，有

$$r'=5.3\times10^{-5}m$$