10　第十次作业

题目 1
给定一个自旋态
$$|\psi\rangle = \frac{5}{13}|u\rangle - \frac{12}{13}i|d\rangle$$
(1)(8 分) 计算期待值 $\langle\psi|\hat{\sigma}_x|\psi\rangle$ 和 $\langle\psi|\hat{\sigma}_y|\psi\rangle$
(2)(10 分) 计算 $\Delta\hat{\sigma}_x^2$ 和 $\Delta\hat{\sigma}_y^2$；它们满足不等式 $\Delta\hat{\sigma}_x^2 + \Delta\hat{\sigma}_y^2 \geq 1$ 吗?

(1)
$$\langle\psi|\hat{\sigma}_x|\psi\rangle = \left(\frac{5}{13}\langle u| + \frac{12}{13}i\langle d|\right)\left(\frac{5}{13}|d\rangle - \frac{12}{13}i|u\rangle\right) = -\frac{60}{169}i + \frac{60}{169}i = 0$$
$$\langle\psi|\hat{\sigma}_y|\psi\rangle = \left(\frac{5}{13}\langle u| + \frac{12}{13}i\langle d|\right)\left(i\frac{5}{13}|d\rangle - \frac{12}{13}|u\rangle\right) = -\frac{60}{169} - \frac{60}{169} = -\frac{120}{169}$$
(2)
$$\hat{\sigma}_x^2 = \hat{\sigma}_y^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
因此，
$$\langle\psi|\hat{\sigma}_x^2|\psi\rangle = \langle\psi|\hat{\sigma}_y^2|\psi\rangle = \left(\frac{5}{13}\langle u| + \frac{12}{13}i\langle d|\right)\left(\frac{5}{13}|u\rangle - \frac{12}{13}i|d\rangle\right) = 1$$
因此，
$$\Delta\hat{\sigma}_x^2 = \langle\psi|\hat{\sigma}_x^2|\psi\rangle - |\langle\psi|\hat{\sigma}_x|\psi\rangle|^2 = 1$$
$$\Delta\hat{\sigma}_y^2 = \langle\psi|\hat{\sigma}_y^2|\psi\rangle - |\langle\psi|\hat{\sigma}_y|\psi\rangle|^2 = \frac{14161}{28561} \approx 0.496$$
所以满足不等式 $\Delta\hat{\sigma}_x^2 + \Delta\hat{\sigma}_y^2 \geq 1$.

题目 2
考虑讲义中描述的自旋和猫的复合系统，它们有四个量子态 $|u,\text{alive}\rangle, |d,\text{alive}\rangle, |u,\text{dead}\rangle, |d,\text{dead}\rangle$. 初识时刻，这个系统处于如下量子态
$$|\Psi_0\rangle = \left(\frac{3}{5}|u\rangle - i\frac{4}{5}|d\rangle\right) \otimes |\text{alive}\rangle = \frac{3}{5}|u,\text{alive}\rangle - i\frac{4}{5}|d,\text{alive}\rangle$$
现在猫对自旋进行测量. 按照多世界理论，系统会变成
$$|\Psi_1\rangle = \frac{3}{5}|u,\text{alive}\rangle - i\frac{4}{5}|d,\text{dead}\rangle$$
按照哥本哈根解释，如果测量结果是自旋向上，波包塌缩为
$$|\Psi_2\rangle = |u,\text{alive}\rangle$$
现在把 $|u,\text{alive}\rangle, |d,\text{alive}\rangle, |u,\text{dead}\rangle, |d,\text{dead}\rangle$ 写成如下列向量
$$|u,\text{alive}\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ |d,\text{alive}\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ |u,\text{dead}\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ |d,\text{dead}\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a)(4 分) 请验证 $|\Psi_1\rangle = U|\Psi_0\rangle$，其中

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(b)(4 分) 请验证 $|\Psi_2\rangle = A|\Psi_1\rangle$，其中

$$A = \begin{pmatrix} 5/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(c)(4 分) 证明 U 是一个幺正矩阵，而 A 不是一个幺正矩阵.

(a) 根据题意，

$$|\Psi_0\rangle = \frac{3}{5}|u, \text{alive}\rangle - i\frac{4}{5}|d, \text{alive}\rangle = \begin{pmatrix} 3/5 \\ -i4/5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|\Psi_1\rangle = \frac{3}{5}|u, \text{alive}\rangle - i\frac{4}{5}|d, \text{dead}\rangle = \begin{pmatrix} 3/5 \\ 0 \\ 0 \\ -i4/5 \end{pmatrix}$$

因此，

$$U|\Psi_0\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/5 \\ -i4/5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 \\ 0 \\ 0 \\ -i4/5 \end{pmatrix} = |\Psi_1\rangle$$

(b) 根据题意，

$$|\Psi_2\rangle = |u, \text{alive}\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

因此，

$$A|\Psi_1\rangle = \begin{pmatrix} 5/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/5 \\ 0 \\ 0 \\ -i4/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = |\Psi_2\rangle$$

(c)

$$U^\dagger U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = UU^\dagger = I$$

$$A^\dagger A = \begin{pmatrix} 5/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25/9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq I$$

因此，U 是一个幺正矩阵，而 A 不是一个幺正矩阵.

题目 3

(10 分) 半人马座 A 发生一次超新星爆炸, 释放出的一个高能电子飞向了地球. 依据量子力学进行的估算告诉我们, 描述这个电子的波函数的半径将达到 $10^9 - 10^{24}$ 米, 远远大于地球的直径 10^7 米. 这个电子到达地球后会和地球上的 DNA 相互作用, 导致某个基因发生突变。相互作用发生前, 我们关心的系统的波函数大致可以写成

$$|\Psi_0\rangle = (a\,|\psi_1\rangle + b\,|\psi_2\rangle) \otimes \left|\Phi^0_{\mathrm{DNA}}\right\rangle$$

这里 $|\psi_1\rangle$ 表示和 DNA 在空间上没有重叠的粒子波函数，$|\psi_2\rangle$ 表示和 DNA 重叠的粒子波函数; $|\Phi^0_{DNA}\rangle$ 是描述没有 DNA 突变的波函数。由于粒子的波函数非常宽, 它和 DNA 的重叠部分很小, 所以 $|a|^2 \gg |b|^2$。粒子和 DNA 相互作用后, 波函数会变成

$$|\Psi_f\rangle = a\,|\psi_1\rangle \otimes \left|\Phi^0_{\mathrm{DNA}}\right\rangle + b\,|\psi_2\rangle \otimes |\Phi^m_{\mathrm{DNA}}\rangle$$

由于 $|\psi_1\rangle$ 和 DNA 在空间上没有重叠, 它不会让 DNA 发生任何变化; $|\psi_2\rangle$ 和 DNA 在空间上重叠, 它会导致 DNA 发生突变。假设这个突变的基因会让某只类鹿动物长出角来。分别用波包塌缩理论和多世界理论来描述这个来自半人马座 A 的电子和 DNA 作用的后果。

波包塌缩理论：观测者观测动物有没有长出角来的动作会使波函数 $|\Psi_f\rangle$ 发生塌缩。观测者观察到动物没有长出角的概率为 $|a|^2$，此时波函数塌缩为 $|\psi_1\rangle \otimes |\Phi^0_{\mathrm{DNA}}\rangle$；观测者观察到动物长出角的概率为 $|b|^2$，此时波函数塌缩为 $|\psi_2\rangle \otimes |\Phi^m_{\mathrm{DNA}}\rangle$。

多世界理论：观测是观测者和量子系统间产生纠缠的过程。在纠缠的过程中波函数变成了 $|\Psi_f\rangle$，产生了两个平行世界，一个是电子和 DNA 没有发生相互作用，动物没有长出角，另一个是电子和 DNA 发生了相互作用，动物长出了角。需要强调的是，无论 $|b|^2$ 多小，在其中的一个世界里基因突变都发生了。