

第三次习题

1. 考虑两个复数 $z_1 = \sqrt{3} - i$ 和 $z_2 = 4 + 2i$

- (1) (2分) 求 $z_3 = z_1 + z_2^*$;
- (2) (2分) 求 $z_4 = z_1^* \times z_2$;
- (3) (2分) 求 $z_5 = z_1/z_2$;
- (4) (4分) 将 z_1 用模和幅角表达 $z_1 = r e^{i\theta}$, 求 r 和 θ .

2. 在二维希尔伯特空间中有两个向量

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 4i \end{pmatrix}, \quad |\psi_2\rangle = \begin{pmatrix} 2 + 2i \\ 1 - 3i \end{pmatrix}$$

- (1)(6分) 计算 $\langle\psi_1|\psi_1\rangle$ 和 $\langle\psi_2|\psi_2\rangle$;
- (2)(6分) 计算 $\langle\psi_1|\psi_2\rangle$ 和 $\langle\psi_2|\psi_1\rangle$.

3. 在二维希尔伯特空间里定义两个向量

$$|\bar{e}_1\rangle = \frac{5}{13}|e_1\rangle + \frac{12}{13}i|e_2\rangle = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 5 \\ 12i \end{pmatrix}, \quad |\bar{e}_2\rangle = \frac{12}{13}|e_1\rangle - \frac{5}{13}i|e_2\rangle = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 12 \\ -5i \end{pmatrix}$$

- (1) (8分) 证明这两个向量正交归一;
- (2) (10分) 由于它们正交归一, 所以它们是二维希尔伯特空间的正交基矢。在这组正交基下, 题2中的 $|\psi_2\rangle$ 可以展开成如下形式

$$|\psi_2\rangle = a|\bar{e}_1\rangle + b|\bar{e}_2\rangle$$

求 a 和 b .