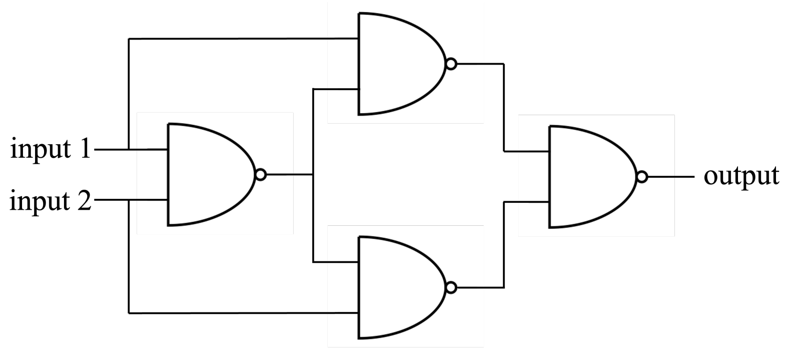
11　第十一次作业

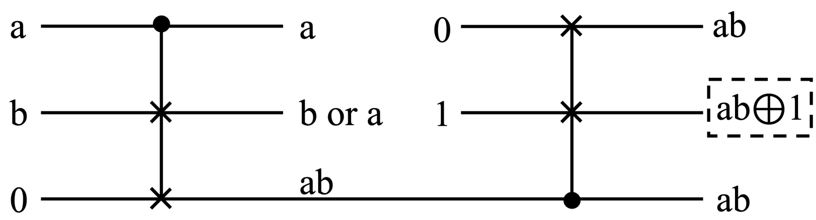
题目 1

(10 分) 利用一个或多个经典与非门实现经典异或门.



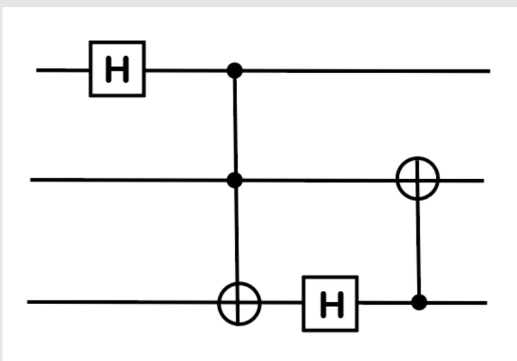
题目 2

(10 分) 利用一个或多个弗雷德金门 (Fredkin gate) 实现经典与非门.



题目 3

(10 分) 下面这个量子线路有四步操作, 输入态是 $|000\rangle$, 写出每一步操作后的量子态.



第一步：第一个量子态经过一个哈达玛门，$|0\rangle$ 变为

$$H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$$

第二、三个量子态没有发生变化。因此第一步操作后量子态变为

$$|\psi_1\rangle = H|0\rangle \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle + |100\rangle).$$

第二步：三个量子态经过托福利门，考察 $|\psi_1\rangle$ 的每个分量的变化，

$$|000\rangle \to |000\rangle,\ |100\rangle \to |100\rangle.$$

因此第二步操作后量子态不变，

$$|\psi_2\rangle = |\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle + |100\rangle).$$

第三步：第一、二个量子态不变，第三个量子态经过一个哈达玛门，同第一步，$|0\rangle$ 变为 $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$. 因此第三步操作后量子态变为

$$|\psi_3\rangle = \frac{1}{2}(|000\rangle + |001\rangle + |100\rangle + |101\rangle).$$

第四步：第一个量子态不变。第二、三个量子态经过了一个 CNOT 门，考察 $|\psi_3\rangle$ 的每一个分量，

$$|00\rangle \to |00\rangle,\ |01\rangle \to |11\rangle.$$

因此第四步操作后量子态变为

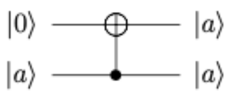
$$|\psi_4\rangle = \frac{1}{2}(|000\rangle + |011\rangle + |100\rangle + |111\rangle).$$

题目 4(附加题)

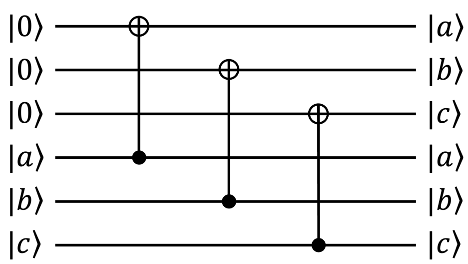
(如果本题做对了，在总分不超过 40 分的前提下，最多加 5 分) 可逆经典计算机是量子计算机的一个特例，那可逆经典计算机可以复制 (或克隆) 吗? 如果不可以, 请给出理由; 如果可以, 请利用课本中介绍的可逆逻辑门, 构建一个能完成克隆的线路 (用 6 个比特说明即可: 3 个比特作为克隆对象, 另外 3 个存储克隆的结果).

可逆经典计算机可以复制。

首先考虑 2 个比特的例子 (1 个比特作为克隆对象, 另外 1 个存储克隆的结果). 考虑 CNOT:$(x,a) \mapsto (x \oplus a, a)$. 取 $x = 0$, 则 $(0,a) \mapsto (a,a)$, 这里 a=0 或 1. 注意如此构造的复制操作并不违反不可克隆定理——CNOT 只能实现在 $|a\rangle$ 是 $|0\rangle$ 或者 $|1\rangle$ 时 $|0\rangle|a\rangle$ 到 $|a\rangle|a\rangle$ 的复制, 对于一般的叠加态 $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle, (\alpha,\beta) \neq (0,0)$ 则做不到复制: $U_{\text{CNOT}}|\psi\rangle|0\rangle = \alpha|00\rangle + \beta|11\rangle \neq |\psi\rangle|\psi\rangle$.



类似地也能画出复制 3 个经典比特的线路:



注意这里 a, b 都只能是 0, 1.