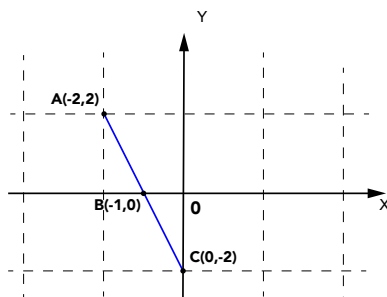


## 第四次习题

1. (10分) 有一个矩阵  $X$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$



图中有三个点A,B,C, 它们在一条直线上. 它们在矩阵  $X$  的作用下会相应变成三个点:  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ . 请求出这三个新点的坐标, 并在图中将它们标出, 最后证明它们仍然在一条直线上.

2. 有两个矩阵

$$M_1 = \begin{pmatrix} 2 & 2+i \\ 2-i & 1+i \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1+2i \\ 1-2i & 3 \end{pmatrix}$$

- (1) (10分) 计算  $M_1 M_2$ ,  $M_2 M_1$ ,  $M_1^T$ ,  $M_2^T$ ,  $M_1^\dagger$ ,  $M_2^\dagger$ .
  - (2) (1分)  $M_1 M_2 = M_2 M_1$  吗?
  - (3) (4分)  $M_1$  和  $M_2$  中哪个是厄米矩阵?
3. (1) (4分) 验证下面这个向量  $|\psi\rangle$  是矩阵  $X$  (见题1) 的本征态

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(2)(2分) 相应的本征值是多少? (3)(4分) 将向量  $|\psi\rangle$  归一化.

4. (5分) 在二维平面里进行两次不同的旋转, 旋转的结果不依赖于两次旋转的次序; 举例说明三维空间里的两次旋转, 旋转的结果会依赖于两次旋转的次序.

附加题 (0分) :

- 矩阵变换是一种线性变换, ‘线性’的一个几何含义是: 一条直线在线性变换下不会弯曲, 依然是一条直线, 最多变成一个点. 证明: 二维空间里的一条直线在任意矩阵的作用下是依然一条直线 (特殊情况下, 可能是一个点). (题1给出了一个例子.)