

文章编号:1671-8836(2010)04-0437-04

基于黎曼球面的多目标演化算法

彭 晟, 李元香

(武汉大学 软件工程国家重点实验室, 湖北 武汉 430072)

摘 要: 对于求解多目标优化问题提出了一种基于黎曼球面的多目标演化算法(RSEA). 它的特点在于: 先在目标空间中采用无穷远点作为采样基点来对 Pareto 最优前沿进行采样; 再将无界的多目标函数空间同构映射到黎曼球面上, 进而在黎曼球面上对产生的新个体是否加入精英文档进行判定, 以此提高了算法的均匀性与多样性, 加快了算法的收敛速度. 数值实验表明, 新算法与 NSGA2, SPEA2 算法相比, 性能有明显的提高.

关 键 词: 演化算法; 黎曼球面; 多目标优化; Pareto 最优前沿

中图分类号: O 242; Q 332 **文献标识码:** A

0 引 言

在生产、经济、科学和工程活动中经常需要对多个目标的方案、设计的好坏进行判断, 而这些目标的最优值之间往往存在着冲突. 因为这些多目标优化问题中的各目标之间通过决策变量相互制约, 很难客观地评价多目标问题解的优劣性, 所以多目标优化问题的最优解并不惟一, 而是存在一个最优解集合, 集合中元素称为 Pareto 最优.

由于多目标优化问题在各领域都有重要的应用, 因此多目标演化优化技术近年来得到极大的发展^[1,2]. 主要有多目标杂乱遗传算法(MOM-GA)^[3,4]、多目标贝叶斯优化算法(mBOA)^[4]、非劣排序遗传算法(NSGA)^[3,4]和强 Pareto 演化算法(SPEA)^[3,4]等. 其中文献[5]提出了一种在目标空间采样真实 Pareto 前沿的几何选择算法 GPS, 但是它需要事先估计真实 Pareto 前沿的范围; 文献[6, 7]提出一种以极坐标方式用角度来控制的一种多目标演化算法, 但是对真实 Pareto 前沿形状有较高要求.

本文提出一种新的目标空间采样方法的多目标演化算法(RSEA), 它不需要事先对真实 Pareto 前沿的范围进行估计, 而且对所优化函数没有任何特殊依赖, 对真实 Pareto 前沿的形状没有任何要求.

1 预备知识

1.1 多目标优化问题定义

定义 1 多目标优化问题(MOP)的定义

$$\text{Min } y = F(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x))$$

$$\text{subject to } g_i(x) \leq 0, i = 1, 2, \dots, k$$

$$\text{where } x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in X$$

$$y = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in Y$$

$$X = \{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid l_i \leq x_i \leq u_i, i = 1, 2, \dots, n \}$$

$$L = (l_1, l_2, \dots, l_n), U = (u_1, u_2, \dots, u_n)$$

一个一般的 MOP 由 n 个决策变量, k 个目标函数和 m 个约束条件组成, X 表示决策空间, L 和 U 分别为上界和下界, Y 表示目标函数空间.

定义 2 Pareto 占优(Pareto dominance): 一个多目标决策向量 $w = (w_1, w_2, w_3, \dots, w_k)$, 如果对另一个多目标决策向量 $v = (v_1, v_2, v_3, \dots, v_k)$ 占优(记为 $w \prec v$) 当且仅当

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, m\}, w_i \leq v_i$$

$$\exists i \in \{1, 2, \dots, m\}, w_i < v_i$$

定义 3 Pareto 优化集(Pareto optimal set, POS): 对于多目标优化问题 $F(X)$, Pareto 优化集 POS 是包含所有 Pareto 优化的集合. POS 是 X 中所有可能解的子集. 数学上, POS 定义如下: POS = $\{x \in X \mid \nexists x' \in X: F(x') \prec F(x)\}$.

收稿日期: 2009-01-09

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60773009)

作者简介: 彭 晟, 男, 博士生, 现从事智能计算方面的研究. E-mail ps_who@qq.com

1.2 黎曼球面定义

在 \mathbf{R}^3 中考虑一个半径为 1 的球面 $S: x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$. 点 $(0, 0, 1)$ 称为北极, 记作 N . 平面 Ox_1x_2 与复平面 \mathbf{C} 重合, 所以复数 $z = x + iy$ 也可以看成三维实空间的点 $z = (x, y, 0)$. 那么对于给定的 z , 在 \mathbf{R}^3 中作过 z 和 N 的直线, 它与 S 交于一点 Z (N). 这样扩充复平面 $\mathbf{C} = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ 与球面 S 上的点是一一对应的, 特别是 ∞ 点与 N 点对应. S 称为黎曼球面, \mathbf{C} 与 S 这种一一对应称为球极射影^[8], 如图 1.

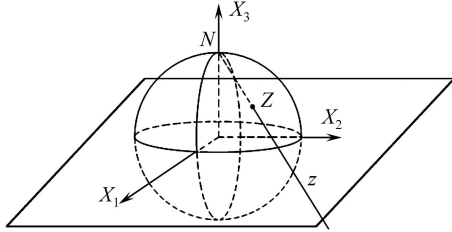


图 1 球极射影

设 $z, z' \in \mathbf{C}$, 它们在 S 上对应的点记为 $Z = (x_1, x_2, x_3)$ 和 $Z' = (x'_1, x'_2, x'_3)$.

定义 z, z' 两点的球面距离为:

$$d(z, z') = \sqrt{(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + (x_3 - x'_3)^2}$$

2 黎曼球面多目标演化算法

考虑两个目标的优化问题 $\min(f_1(v), f_2(v))$, $v \in [a, b]^N$. 将 $(f_1(v), f_2(v))$ 看成一个复数 $z = x + iy$, 其中 $x = f_1(v) > 0, y = f_2(v) > 0$.

在平面上对真实 Pareto 前沿进行如下采样: 采样基点选择为平面上的无穷远点(图 2).

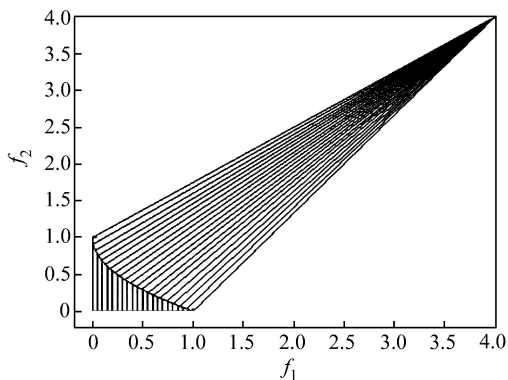


图 2 平面 Pareto 前沿采样

现在通过球极射影将扩展 (x, y) 平面映射成黎曼球面 S . 对 (x, y) 平面中 Pareto 前沿的采样转换成在黎曼球面 S 上进行, 采用如图 3 所示的方式.

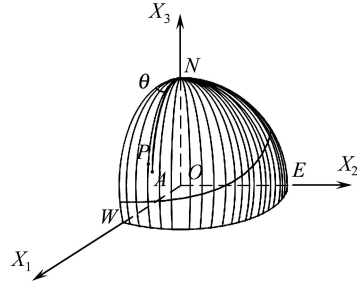


图 3 黎曼球面 Pareto 前沿

当新生成的个体 $P(x, y)$ 要插入精英空间中时, 使用如下黎曼球面采样规则:

计算 P 点所属的采样区间, 即 NP 与 NW 在 N 点的夹角.

计算 P 点与 N 点的球面距离.

按如下规则修改精英空间: 对于 P 所属的采样区间当前最好解 A 点, 如果 $d(P, N) < d(A, N)$ 则 P 点替换 A 点, 反之则不替换.

RSEA 算法流程:

```
{ 初始化种群  $P(0)$ ,  $t=0$ ;
  初始化精英空间 elite(0)
  While (不满足终止条件) do
    { 计算  $P(t)$  中每个个体的适应值
      根据个体适应值比例选择出两父体
      如果  $\text{Random}[0, 1] < p_c$  ( $p_c$  为杂交概率)
        则
          { 对两父体进行杂交操作;
            将后代串变异操作后插入到  $P(t+1)$ ; }
        其他 { 将两父体变异操作后插入到  $P(t+1)$ ; }
      利用黎曼球面采样规则
      如果新个体适应值大于精英空间中该采样区间的标志个体的适应值
        则用新个体替换成为该采样区间中的标志个体;
       $t = t + 1$ 
    }
}
```

3 数值实验及分析

3.1 数值实验

为了测试 RSEA 的性能, 选取专为测试多目标优化算法性能而设计的 4 个 benchmark 问题 ZDT1, ZDT2, ZDT3 和 ZDT4^[9] 并与 SPEA2, NSGA2 进行比较. 实验平台为 Windows XP SP2, Intel (R) Pentium (R) D CPU 3.40 GHz, 3.39 GHz, 0.99 GB. 求解测试函数的主要参数设置如下:

ZDT1 ~ ZDT4 的种群大小为 100, ZDT1 ~ ZDT3 演化代数 1 000, ZDT4 演化代数 10 000.

ZDT1:

$$\text{Min } f_1(X) = x_1$$

$$\text{Min } f_2(X) = g(X) \left(1 - \frac{f_1(X)}{g(X)} \right)$$

$$g(X) = 1 + 9 \sum_{i=2}^n x_i / (n-1)$$

$$\text{s.t. } : 0 \leq x_i \leq 1, n=30$$

该问题有凸的 Pareto 前沿(图 4).

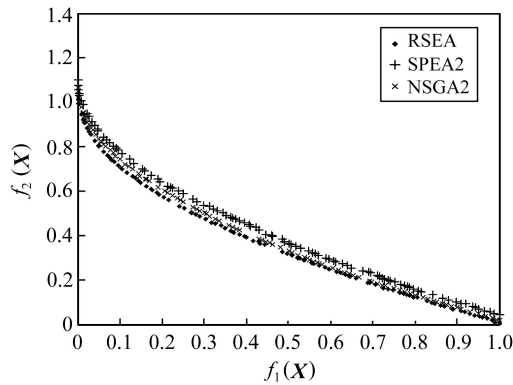


图 4 ZDT1 对比实验结果

ZDT2:

$$\text{Min } f_1(X) = x_1$$

$$\text{Min } f_2(X) = g(X) \left(1 - \frac{f_1(X)^2}{g(X)} \right)$$

$$g(X) = 1 + 9 \sum_{i=2}^n \frac{x_i}{n-1}$$

$$\text{s.t. } : 0 \leq x_i \leq 1, n=30$$

该问题有非凸的 Pareto 前沿(图 5).

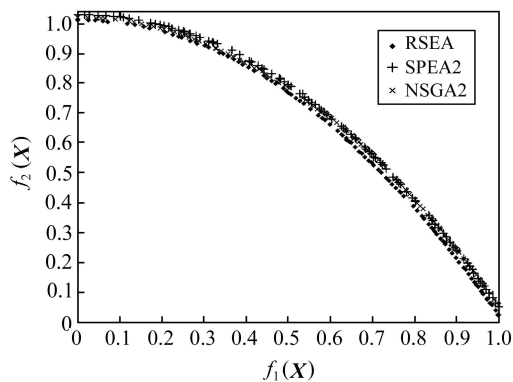


图 5 ZDT2 对比实验结果

ZDT3:

$$\text{Min } f_1(X) = x_1$$

$$\text{Min } f_2(X) = g(X) \left(1 - \frac{x_1}{g(X)} - \frac{x_1 \sin(10 \sqrt{x_1})}{g(X)} \right)$$

$$g(X) = 1 + 9 \sum_{i=2}^n x_i / (n-1)$$

$$\text{s.t. } : 0 \leq x_i \leq 1, n=30$$

该问题的 Pareto 前沿是不连续的(图 6).

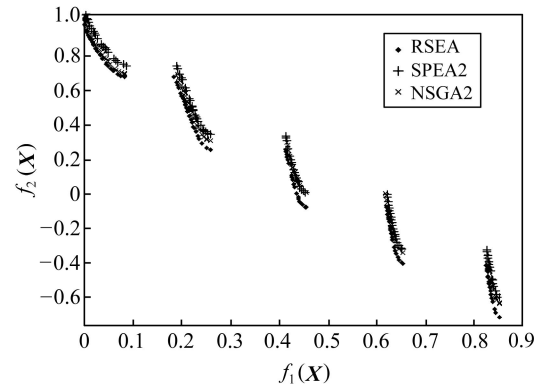


图 6 ZDT3 对比实验结果

ZDT4:

$$\text{Min } f_1(X) = x_1$$

$$\text{Min } f_2(X) = g(X) \left(1 - \frac{f_1(X)}{g(X)} \right)$$

$$g(X) = 1 + 10(m-1) + \sum_{i=2}^n (x_i^2 - 10 \cos(4 \pi x_i))$$

$$\text{s.t. } : 0 \leq x_1 \leq 1, -5 \leq x_i \leq 5, i=2, \dots, 10$$

该问题包含 21^9 个局部 Pareto 前沿. 这个函数可以测试算法解决多峰问题的能力(图 7).

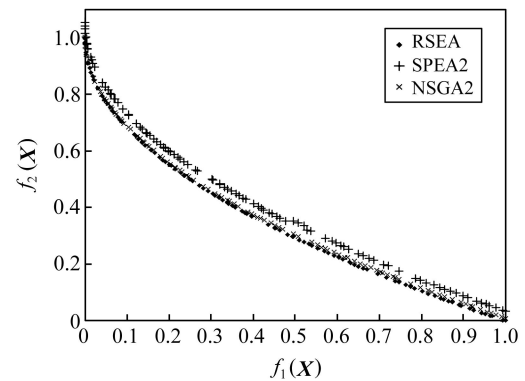


图 7 ZDT4 对比实验结果

3.2 性能分析

如果 $z \in \text{POS}$, 那么 $\exists z' < z$. 因为 $z, z', +$ 三点共线, 根据直线两点式方程公式, 那么过 z 和 z' 的直线方程即得到 $L: f(t) = (1-t)z + tz', t \in [0, +\infty)$, 其中 t 为对应参数, $t=0$ 对应点为 z , $t=1$ 对应点为 z' . $\forall z_N \in L$ 记 $z_N = f(t_N)$, 设 $t_N > 1$, 因此得

$$d(z, z_N) - d(z, z') = d(z, z') > 0 \quad (1)$$

又因为 $L: f(t)$, $d(x, y)$ 均连续, 若 $t_N \rightarrow +\infty$, 则 $z_N \rightarrow +\infty$, (1) 式两边取极限, 则

$$d(z, +) - d(z, +) > 0 \quad (2)$$

由球极射影的连续性和保号性即得:

$$d(Z, N) - d(Z, N) > 0 \quad (3)$$

因此球面距离占优的点必定不会比被占优的点差; 即(3)式为一个搜索必要条件.

4 结 论

本文提出了一种新的基于黎曼球面的多目标演化算法(RSEA). 它打破传统的思维方式, 先把采样基点选择为平面上的无穷远点, 再将无界目标空间转换到一个与目标空间同构的球面上来采样, 以此保证采样过程的均匀性和多样性; 此外在个体采样比较过程中所需优化选择比较次数只需要一次, 进而有效地减小了算法的时间复杂度, 并加快算法收敛速度. 在数值实验部分的对比实验中, 4 个 benchmark 问题的测试结果均显示有明显良好的效果.

本算法无需事先估计真实 Pareto 前沿的范围, 只需要目标空间的函数值而不需关心函数的表达形式及真实 Pareto 前沿的形状, 将来可以推广到 3 个目标以上数值优化问题以及多目标组合优化问题.

参考文献:

- [1] Deb K. *Multi-Objective Optimization Using Evolutionary Algorithms* [M]. New York: John Wiley & Sons, 2001.
- [2] Coello C A C, Van Veldhuizen D A, Lamont G B. *Evolutionary Algorithms for Solving Multi-Objective Problems* [M]. Boston: Kluwer Academic Publishers, 2002.
- [3] 崔逊学. 多目标进化算法及其应用[M]. 北京: 国防工

业出版社, 2006: 48-64.

Cui Xunxue. *Multiobjective evolutionary Algorithms and their Applications* [M]. Beijing: National Defense Industry Press, 2006: 48-64 (Ch).

- [4] 郑金华. 多目标进化算法及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2007: 20-55.
- Zheng Jinhua. *Multi-Objective Evolutionary Algorithms and Their Applications* [M]. Beijing: Science Press, 2007: 20-55 (Ch).
- [5] Zheng Bojin, Li Yuanxiang, Peng Shujuan. GPS: A geometric comparison-based Pareto selection method [C]// *Progress in Intelligence Computation and Applications, International Symposium on Intelligent Computation and Its Application (ISICA 2005)*, Wuhan: China University of Geosciences Press, 2005: 558-562.
- [6] Sato H, Aguirre H E, Tanaka K. Local dominance using polar coordinates to enhance multi-objective evolutionary algorithms [DB/OL]. [2008-09-09]. <http://ieeexplore.ieee.org/stamp/stamp.jsp?tp=&arnumber=1330856&isnumber=29383>.
- [7] Sato H, Aguirre H E, Tanaka K. Local dominance including control of dominance area of solutions in MOEAs [DB/OL]. [2008-09-09]. http://ieeexplore.ieee.org/xpls/abs_all.jsp?arnumber=4223021.
- [8] 方企勤. 复变函数教程[M]. 北京: 北京大学出版社, 1996: 11-14.
- Fang Qiqin. *The Tutorial of the Functions of the Complex Variable* [M]. Beijing: Peking University Press, 1996: 11-14 (Ch).
- [9] Zitzler E, Deb K, Thiele L. Comparison of multi-objective evolutionary algorithms: Empirical results [J]. *Evolutionary Computation*, 2000, 8(2): 173-195.

A Multi-Objective Evolutionary Algorithm Based on Riemann-Sphere

PENG Sheng, LI Yuanxiang

(State Key Laboratory of Software Engineering, Wuhan University, Wuhan 430072, Hubei, China)

Abstract: A new multi-objective evolutionary algorithm named Riemann-sphere multi-objective evolutionary algorithm (RSEA) is proposed in this paper. First The RSEA takes the infinity as the sampling center. Then by Stereographic projection, the object-space is mapped onto the Riemann-Sphere. Moreover, spherical distance is used to evaluate whether the new individuals join the elitist space or not. Using this method, it can accelerate the rate of convergence as well as the distribution and diversity. The numerical experiments show that the performance of the RSEA is better than that of NSGA2, SPEA2.

Key words: evolutionary algorithm; Riemann-sphere; multi-objective optimization; Pareto optimal front