矩形件排样优化的背包算法

华中理工大学 曹 炬 周 济 余 俊

摘要 根据矩形件排样的实际下料工艺要求，将一个二维排样问题转化为一个一维下料问题，并构造了一个利用背包问题解法的矩形件排样的近似优化算法。

关键词 矩形件排样 背包算法 近似算法 最优化

矩形件排样优化是指在给定长和宽一定数量的板材上，尽可能多地排放所需要的矩形件，使得所需要的板材尽可能少，以达到节省材料的目的。矩形件排样优化问题实际上是一个十分困难的问题，从数学计算复杂性理论看，它属于具有最高计算复杂性的一类问题——NP 完全问题。也就是说在一般情况下，即使使用当今最快的计算机，在人们可接受的时间内也不可能求出这类问题的最优解。另一方面由于生产实际的需要，人们又迫切需要利用现代科技对这一问题给出一些能满足生产需要的求解方法。这些方法应该是能以较高的计算速度给生产者一个好的解。所谓好的解是指虽然不是最优解，但接近最优解，并且应比人工排样的效率高，能达到或超过人们所期望的材料利用率。国外有不少学者在这方面已做了许多工作，构造了一些近似算法[1~6]。近似算法是指这些算法的计算结果接近或达到最优解，同时计算速度非常快。

矩形件的排样在机械制造、轻工、家具及玻璃切割等行业经常遇到，因此在排样算法的构造方面必须考虑到这些行业的下料工艺。例如玻璃和木材的切割，一般采用直线通割，即一刀或一锯到头，切割中一般不允许转角 90°。即使对于机械制造中的钢板下料，在钢板厚度不超过 15 mm 的条件下，也可采用剪板机进行钢板的直线剪裁。为了适应这些下料工艺的要求，笔者构造了一个矩形件的排样算法。

1 排样算法

设板材的长为 L，宽为 $W(L \geqslant W)$，板材的数量足以排下所有要排的矩形件。所有要排的矩形件共有 k 种，第 i 种矩形件的个数为 n_i，长度为 l_i，宽度为 $w_i(1 \leqslant i \leqslant k)$，则全部要排的矩形件总数为

$$n = \sum_{i=1}^{k} n_i$$

收稿日期：1993—12—17

1.1 板宽条料的产生

首先对给定的 i，计算下式的非负最小值

$$\min\{(W - u_i w_i)l_i, \quad (w - v_i l_i)w_i\} \quad (1)$$

并对于当前所有未排的矩形件计算

$$w = \min_i\{w_i\}$$

这里 $1 \leqslant u_i, v_i \leqslant n_i$。若 $W - v_i l_i < w$ 或 $W - u_i w_i < w$

则在式(1)中选择小的一个，并决定产生一个条料 $u_i w_i l_i$ 或 $v_i l_i w_i$，其效果见图 1。

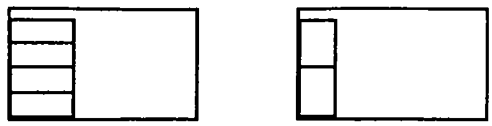

图 1

这时令 $n_i := n_i - u_i$ 或 $n_i := n_i - v_i$。而对于那些 $l_i > w_i$ 的矩形件 i，则直接产生 c_i 个宽度为 l_i，长度为 $r_i \cdot w_i$ 的条料，其中

$$r_i = \min\{W/w_i, n_i\}$$

$$c_i = \begin{cases} n_i/r_i + 1 & n_i\% r_i = 0 \\ n_i/r_i & n_i\% r_i \neq 0 \end{cases}$$

这里，$n_i\% r_i$ 为 n_i 除以 r_i 的余数，第 c_i 个条料的长度为 $w_i \cdot n_i\% r_i$，并且令 $n_i := 0$。

1.2 条料的补充方案一

从以上产生条料的方案中可以看出，当第一种情况的两个条件 $W - v_i l_i < w$ 和 $W - u_i w_i < w$ 都不满足时，当第二种情况的 $W - r_i w_i < w$ 不满足时，就可能在矩形 $(W - r_i w_i)l_i$、$(W - v_i l_i)w_i$ 或 $(W - u_i w_i)l_i$ 中排放其他未排的矩形件，因此有必要对以上产生条料的方案进行补充。

补充方案一是对上面相应矩形，按板材的横向试探是否能产生若干个长度接近 w_i 或 l_i 的条料，如果能产生这样的若干个条料，并且所有条料之和大于等于 $W - u_i w_i$ 或 $W - v_i l_i$ 或 $W - r_i w_i$，这时采用背包算法，按板材的横向方向用这些条料补充先产生的条料，这样补充的效果见图 2。

1.3 条料的补充方案二

补充方案二是在补充方案一条件不满足的条

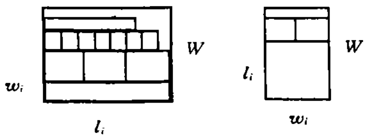

图 2

件下，先将已产生的条料全部补充到原始条料中去，这样做之后的效果图一般如图 3 所示。

然后继续填充图 3 中的空白部分直至不可再填充或不再有剩下的矩形件为止。在全部的矩形件都被排放到某个条料中之后，就采用背包算法，以所有条料的宽度基础，按板材长度 L 方向，排放这些条料。由此看出，在以上算法中有两处采用了背包算法。并且是将二维排样转化为一维下料问题，从而利用背包算法的。

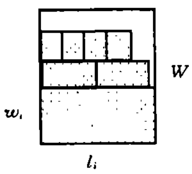

图 3

1.4 背包问题

设 h_i 为 m 个给定宽度的条料，L 为给定的长度，目的是合理地组合这些 h_i，使得所用长为 L 的板材的数量最少。因此其数学模型为

$$\max \sum_{i=1}^{m} x_i h_i$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{m} x_i h_i \leqslant W \\ \sum\limits_{i=1}^{m} h_i \geqslant W \\ x_i = 0 \text{ 或 } 1 \end{cases}$$

这是一个 0-1 规划问题。笔者采用一种动态规划方法求解上面的背包问题。

2 计算结果

根据以上算法，笔者对若干个实际问题进行了排样，这里给出其中 1 个问题的数据以及它们的排样效果图。数据见下表，排样板材的长和宽分别为 $L=12\ 030$ mm 和 $W=2\ 550$ mm。其排样效果图见图 4。

从以上问题的计算结果看到，本算法的效果是令人满意的，材料利用率相当高，从直观判断它们离最优解差得不远了。本算法的计算速度也非常快。对于计算过的问题，在 286 型不带协处理器的微机上，所有的计算时间在 10 s 之内。笔者已根据该算法，用 C 语言开发了一个矩形件排样系统。该系统操作简单、功能齐全，具有很大的推广价值。

数据表

i	n_i(个)	l_i(mm)	w_i(mm)
2	96	450	270
3	48	400	270
4	16	1 140	170
5	8	2 500	300
6	8	2 500	139
7	40	300	270
8	32	1 500	270
9	32	270	110
10	8	1 993	165
11	16	710	675
12	16	500	500
13	32	800	500
14	30	300	74
15	8	1 360	160
16	8	1 760	785

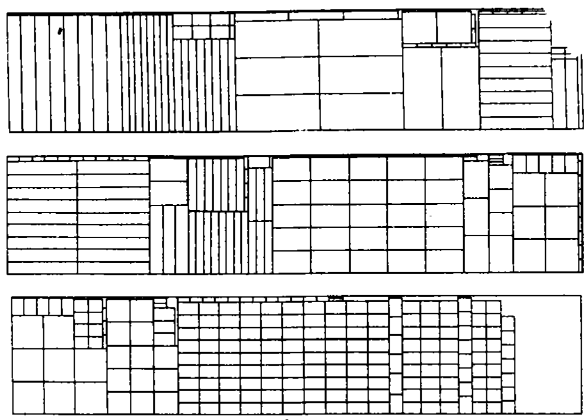

图 4

参 考 文 献

1 Christofides N. An Algorithm for Two—Dimensional Cutting Problems. Operations Research，1977，25(1)：30～40

2 Baker B S. Orthogonal Packings in Two Dimensions. SIAM J. Comput，1980，9(4)：846～855

3 Wang P T. Two Algorithms for Constrained Two—Dimensional Cuttings Stock Problems. Operations Rereasch，1983，31(3)：573～586

4 Rhee W T. Optimal Bin Packing with Items of Random Sizes. Mathematics of Operations Research，1988，13(1)：140～151

5 Yanasee H H. Two—dinemsional Cuttion Stock with Multiple Stock Sizes. J. Opt Res. Soc，1991，42(8)：673～683

6 Chauny F. A Two—phase Heuristic for the Two—dimensional Cutting—Stock Problem. J. Opt Res. Soc，1991，42(1)：39～47

（编辑：周佑启）

中国机械工程学会会刊 ISSN 1004－132X

中国机械工程

CHINA MECHANICAL ENGINEERING

2
1994
Vol. 5

ISSN 1004-132X
04>
771004 132004