

Теория принятия решений

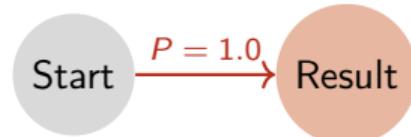
Лекция 2: Определённость. Рациональный выбор и доминирование

Динара Жусупова

Казахский университет технологии и бизнеса
Кафедра "Компьютерная инженерия и автоматизация"

Февраль 2026

- Лекция 1: Структура $(A, \Omega, u(a, \omega))$, payoff-матрица.
- **Лекция 2 (сейчас): Определённость** — одна «ветка» будущего.
- Лекция 3: Риск (вероятности).



Почему начинаем с определённости

Это фундамент: учимся «чистить» альтернативы, разделять цели и ограничения, прежде чем усложнять модель вероятностями.

Цели лекции

По окончании вы сможете:

- 1 Формализовать задачу:** отличать целевую функцию от ограничений.
- 2 Применять доминирование:** визуально и математически отсеивать худшие варианты.
- 3 Оптимизировать:** находить лучшее решение в дискретных задачах.
- 4 Различать подходы:** Optimizing (максимизация) vs. Satisficing (достаточно хорошо).

Определённость: что это значит?

Определение

Задача при определённости: каждому действию $a \in A$ соответствует **единственный, точно известный исход**.

Формально

Можно считать $\Omega = \{\omega_1\}$ и тогда payoff:

$$u(a, \omega_1) \equiv f(a), \quad a \in A,$$

то есть выбор сводится к сравнению $f(a)$.

Примеры

- **Покупка товара:** цена и характеристики фиксированы (в рамках модели).
- **Производство:** известна рецептура: 2 болта + 1 гайка = 1 узел.
- **Логистика:** расстояние между городами А и В фиксировано.

Модель рационального выбора (формулы)

Однокритериальная постановка

$$a^* \in \arg \max_{a \in A} f(a) \quad \text{или} \quad a^* \in \arg \min_{a \in A} c(a).$$

С ограничениями

$$\max_{a \in A} f(a) \quad \text{при} \quad g_k(a) \leq b_k, \quad k = 1, \dots, K.$$

Определим допустимое множество:

$$A_{\text{feas}} = \{a \in A : g_k(a) \leq b_k, \forall k\}.$$

Тогда $a^* \in \arg \max_{a \in A_{\text{feas}}} f(a)$.

Критерий vs. ограничение

Критерий сравнивает «лучше/хуже», **ограничение** задаёт «допустимо/недопустимо».

1. Дискретный выбор

- Выбираем из конечного списка (поставщики, маршруты).
- Часто: $A = \{a_1, \dots, a_m\}$ и сравнение по таблице.
- *Фокус лекции.*

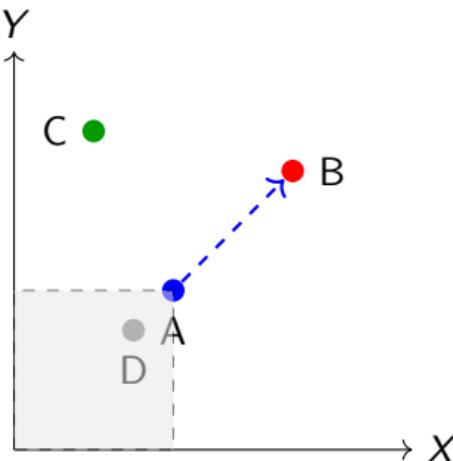
2. Непрерывная оптимизация

- Решение $x \in \mathbb{R}^n$.
- Часто: $\max f(x)$ при $Ax \leq b$ (LP).
- Относится к *Operations Research*.

Мы работаем с дискретными альтернативами и редукцией множества.

Доминирование: визуальная интуиция и определение

Пусть критерии X и Y нужно **максимизировать**.



Парето-доминирование (max/max)

$a \succ b$, если

$$x_i(a) \geq x_i(b) \quad \forall i, \quad \text{и} \quad \exists j : x_j(a) > x_j(b).$$

- $B \succ A$ (лучше по обоим критериям).
- $A \succ D$ (значит D можно выбросить).
- B и C несравнимы (trade-off).

Доминирование при смешанных критериях (min/max)

Пусть $x(a) = (x_1(a), \dots, x_d(a))$, но часть критериев нужно **минимизировать**.

Унификация направления

Введём

$$s_i = \begin{cases} +1, & \text{если } x_i \text{ максимизируем,} \\ -1, & \text{если } x_i \text{ минимизируем,} \end{cases} \quad \tilde{x}_i(a) = s_i x_i(a).$$

Тогда доминирование проверяем по \tilde{x} как в случае max/max.

Пример

Если цена $p(a)$ минимизируется, то $\tilde{p}(a) = -p(a)$ (теперь «больше — лучше»).

Почему доминируемые альтернативы исключают

Монотонная функция ценности

Пусть $V(x)$ монотонна:

$$x_i \geq y_i \quad \forall i \Rightarrow V(x) \geq V(y).$$

Следствие

Если $a \succ b$, то $V(x(a)) > V(x(b))$, значит

$$b \notin \arg \max_{a \in A} V(x(a)).$$

Смысл

Доминирование — «санитарный фильтр»: заведомо худшие варианты выкидываем до любых «весов» и тонкой настройки.

Пример: редукция множества (min цена, max эффект)

Задача: выбрать ноутбук.

- Цена $p(a) \downarrow$ (min).
- Производительность $q(a) \uparrow$ (max).

Формально

$a \succ b$ если

$p(a) \leq p(b), \quad q(a) \geq q(b), \quad$ и хотя бы одно строго: $(p(a) < p(b)) \vee (q(a) > q(b)).$

Вариант	Цена (000)	Баллы	Статус
A	450	78	?
B	420	75	OK
C	450	72	Доминируется A
D	470	80	OK
E	430	78	Доминирует A

Итог: A и C исключаем. Выбираем из {B, D, E}.

Алгоритм выбора (в формулах)

① Ограничения (feasibility):

$$A_{\text{feas}} = \{a \in A : g_k(a) \leq b_k, \forall k\}.$$

② Редукция по доминированию:

$$A_{\text{nd}} = \{a \in A_{\text{feas}} : \nexists b \in A_{\text{feas}} \text{ такое, что } b \succ a\}.$$

③ Финальный выбор:

$$a^* \in \arg \max_{a \in A_{\text{nd}}} f(a) \quad (\text{если один критерий}).$$

Замечание

Если критериев несколько и остаётся несколько A_{nd} , нужен дополнительный принцип (веса, АНР, TOPSIS и т.д.).

Мини-практика (5 минут)

Дано: 6 проектов. **Цели:** min стоимость, max эффект. **Бюджет:** ≤ 11 млн.

Проект	Стоимость ↓	Эффект ↑
P_1	12	70
P_2	10	68
P_3	12	65
P_4	13	72
P_5	11	70
P_6	10	74

Задание: 1) отсечь по бюджету; 2) проверить доминирование; 3) выбрать лучший.

Решение мини-практики (формально)

Шаг 1: ограничение

$$A_{\text{feas}} = \{P_2, P_5, P_6\} \quad (\text{так как } \text{cost} \leq 11).$$

Шаг 2: доминирование (min cost, max effect)

Для проектов a, b :

$$a \succ b \iff \text{cost}(a) \leq \text{cost}(b), \text{eff}(a) \geq \text{eff}(b), \text{ и хотя бы одно строго.}$$

- $P_6 \succ P_2$ ($10=10$ и $74 > 68$).
- $P_6 \succ P_5$ ($10 < 11$ и $74 > 70$).

Ответ

$$A_{\text{nd}} = \{P_6\} \Rightarrow a^* = P_6.$$

Если оптимизировать невозможно? (Satisficing)

Иногда найти максимум $f(a)$ слишком дорого или невозможно.

Bounded Rationality (Саймон)

Вместо поиска **наилучшего** выбираем **достаточно хорошее**.

Правило порога

Задать уровень притязаний τ и выбрать первый вариант:

выбрать a , такое что $f(a) \geq \tau$.

(или набор порогов по нескольким критериям).

Типовые ошибки при выборе

- ① Смешение целей и ограничений (нет чётких f и g_k).
- ② Игнорирование **baseline** (вариант “ничего не делать”).
- ③ **Sunk costs** (учёт прошлых затрат в будущих решениях).
- ④ Неправильное направление (min/max) или несопоставимые шкалы.

Главное сегодня

- При определённости: **оптимизация** $f(a)$ на допустимом множестве A_{feas} .
- **Доминирование** задаётся неравенствами и даёт редукцию $A \rightarrow A_{\text{nd}}$.
- Практический пайплайн:

$$A \rightarrow A_{\text{feas}} \rightarrow A_{\text{nd}} \rightarrow a^*.$$

Следующая лекция: риск и деревья решений (вероятности, EMV, folding back).