Student Name: Динара Жусупова
Student ID:

Математика для анализа данных
ДЗ 2

---

1. РЕШЕНИЕ:

   p - вероятность, что лампочка не работает

   A - не работают лампочки №1 и №5, а остальные работают

$$P(A) = p^2(1-p)^3.$$

   ОТВЕТ: $p^2(1-p)^3$

2. РЕШЕНИЕ:

$$P(\xi \le x) = F_\xi(x)$$
$$f_\xi(x) = F'_\xi(x)$$
$$\int_4^8 \frac{dx}{6} = \frac{1}{6}x|_4^8 = \frac{2}{3}$$

   ОТВЕТ: $\frac{2}{3}$

3. РЕШЕНИЕ:

   Пусть X - случайная величина, число стуков в дверь Катей для пробужддения Вовы. Тогда $\mathbb{E}(X) = p * 1 + (1-p) * \mathbb{E}(X+1)$. Решая уравнение, получаем $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p} = 10$

   ОТВЕТ: 10

4. РЕШЕНИЕ:

$$\mathbb{E}(X) = 2,\ Var(X) = 3$$
$$\mathbb{E}(5X+2) = ?,\ Var(5X+2) = ?$$
$$\mathbb{E}(5X+2) = 5 * \mathbb{E}(X) + 2 = 5 * 2 + 2 = 12,\ Var(5X+2) = 5^2 Var(X) + 0 = 25 * 3 = 75$$

   ОТВЕТ: 12, 75

5. РЕШЕНИЕ:

   ξ - случайная величина, число нот, за которое Баба Маша угадает мелодию

ξ	1	2	3	4	5	6	7
p	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	0

   η - случайная величина, число нот, за которое Тетя Зина угадает мелодию

η	1	2	3	4	5	6	7
p	0	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

   Т.к. $P(\xi \ge 4) = 1 - P(\xi < 4) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ получаем $P(\xi \ge 4) * P(\eta = 5) = \frac{3}{4} * \frac{1}{4} = \frac{3}{16}$
   ОТВЕТ: $\frac{3}{16}$

6. РЕШЕНИЕ:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{1}{4}, & x \in [0,1) \\ \frac{3}{4}, & x \in [1,2) \\ 1, & x \geq 2 \end{cases}$$

$$\mathbb{E}(x) = \frac{1}{4} * 0 + \frac{1}{2} * 1 + \frac{1}{4} * 2 = 1$$

ОТВЕТ: 1

7. РЕШЕНИЕ:

Заданы распределения случайных величин:

X	-1	0	1
p	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

и

Y	0	1
p	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

Тогда закон распределения случайной величины $X * Y$ можно записать так:

X*Y	-1	0	1
p	$\frac{2}{9}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{2}{9}$

$$\mathbb{E}(X) = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 0,\ \mathbb{E}(Y) = \frac{2}{3},\ \mathbb{E}(X * Y) = -1 * \frac{2}{9} + 0 * \frac{5}{9} + 1 * \frac{2}{9} = 0$$

$$Cov(X,Y) = \mathbb{E}(X * Y) - \mathbb{E}(X) * \mathbb{E}(Y) = 0 - 0 * \frac{2}{3} = 0$$

ОТВЕТ: $Cov(X,Y) = 0$, они независимы, потому что функции x и x^2 линейно независимы.

8. РЕШЕНИЕ:

$$Var(X) = 1,\ Y = 2 * X - 3,\ Z = 6 - 3 * X$$

$$Corr(Y,Z) = \frac{Cov(Y,Z)}{\sqrt{Var(Y)}\sqrt{Var(Z)}}$$

Найдем $\mathbb{E}(Y) = 2 * \mathbb{E}(X) - 3$ и $\mathbb{E}(Z) = 6 - 3 * \mathbb{E}(X)$. Т.к. $Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$, отсюда получаем, что $\mathbb{E}(X^2) = 1 + (\mathbb{E}(X))^2$.

Также $\mathbb{E}(Y * Z) = \mathbb{E}((2 * X - 3) * (6 - 3 * X)) = -6 * \mathbb{E}(X^2) + 21 * \mathbb{E}(X) - 18$, тогда

$$Cov(Y,Z) = -6 * \mathbb{E}(X^2) + 21 * \mathbb{E}(X) - 18 - (2 * \mathbb{E}(X) - 3) * (6 - 3 * \mathbb{E}(X)) = -6.$$

Вычислим

$$Var(Y) = 4 * Var(X) = 4,\ Var(Z) = 9 * Var(X) = 9$$

Получаем

$$Corr(Y,Z) = \frac{-6}{2 * 3} = -1$$

ОТВЕТ: -1

9. РЕШЕНИЕ:

$n = 10$ лампочек, $F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\alpha x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$

X_{min} - случайная величина, время, через которое перегорит 1-ая лампочка

$$P(X_{min} \leq 1) = 1 - (1 - F(x))^{10} = 1 - \left(\frac{1}{e}\right)^{10} \approx 0.99$$

ОТВЕТ: ≈ 0.99

10. РЕШЕНИЕ: X_{max} - случайная величина, время, через которое перегорит последняя лампочка

$$P(X_{max} \leq 1) = F_{X_{max}}(1) = \left(1 - \frac{1}{e}\right)^{10} \approx 0.01$$

ОТВЕТ: ≈ 0.01

11. РЕШЕНИЕ:

X - случайная величина, число изюминок в пирожке.

Y - случайная величина, число орехов в пирожке.

Y\X	0	5	10
5	0.1	0.1	0.1
7	0.2	0.2	0.3

(a)

X	0	5	10
p	0.3	0.3	0.4

Вычислим $\mathbb{E}(X) = 0 * 0.3 + 5 * 0.3 + 10 * 0.4 = 5.5$.

(b)

$$Cov(X, Y) = \mathbb{E}(X * Y) - \mathbb{E}(X) * \mathbb{E}(Y)$$

Вычислим $\mathbb{E}(Y) = 5 * 0.3 + 7 * 0.7 = 6.4$.

X*Y	0	25	35	50	70
p	0.3	0.09	0.21	0.12	0.28

Вычислим $\mathbb{E}(X * Y) = 0 * 0.3 + 25 * 0.09 + 35 * 0.21 + 50 * 0.12 + 70 * 0.28 = 35.2$. Тогда $Cov(X, Y) = 35.2 - 5.5 * 6.4 = 0$.

(c) X и Y - независимы

(d)

Y	5	7
p	0.3	0.7

(e)

Y^2	25	35	49
p	0.09	0.42	0.49

$$\mathbb{E}(Y^2) = 25 * 0.09 + 35 * 0.42 + 49 * 0.49 = 40.96$$

$$Var(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - (\mathbb{E}(Y))^2 = 40.96 - (6.4)^2 = 0$$

12. РЕШЕНИЕ:

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 3x^2, & x \in [0, 1] \\ 0, & x \notin [0, 1] \end{cases}$$

(a)

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} f_\xi(t)dt = \int_0^x 3t^2 dt = \begin{cases} x^3, & x \in [0, 1] \\ 0, & x \notin [0, 1] \end{cases}$$

(b)

$$P(\xi < 0.5) = F_\xi(0.5) = (0.5)^3 = 0.125$$

(c) Так как $P(\xi > \frac{1}{2}) = 1 - P(\xi \le \frac{1}{2}) = 1 - \frac{1}{2^3} = \frac{7}{8}$ и $P(\xi > \frac{1}{4}) = 1 - P(\xi \le \frac{1}{4}) = 1 - \frac{1}{4^3} = \frac{63}{64}$.

$$P(\xi > \frac{1}{2}|\xi > \frac{1}{4}) = \frac{P(\xi > \frac{1}{2} \cap \xi > \frac{1}{4})}{P(\xi > \frac{1}{4})} = \frac{\frac{7}{8}}{\frac{63}{64}} = \frac{8}{9}.$$

(d) $\eta = \frac{1}{\xi}$, $f_\eta(x)$–?

$$F_\eta(x) = P(\eta \le x) = P(\frac{1}{\xi} \le x) = P(\xi \ge \frac{1}{x}) = 1 - P(\xi < \frac{1}{x}) = 1 - F_\xi(\frac{1}{x})$$

$$F_\eta(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x^3}, & x \ge 1 \\ 1, & 0 \le x < 1 \end{cases}$$

$$f_\eta(x) = \begin{cases} \frac{3}{x^4}, & x \ge 1 \\ 0, & 0 \le x < 1 \end{cases}$$

(e)

$$\mathbb{E}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x * f_\xi(x)dx = \int_0^1 3x^3 dx = \frac{3}{4}x^4|_0^1 = \frac{3}{4}$$

(f) **Теорема.** Пусть $u \in U[0,1]$ - равномерное распределение, а F - произвольная функция распределения. Тогда случайная величина $\xi = F^{-1}(u)$ (квантильное преобразование над случайной величиной u) имеет функцию распределения:

$$F_\eta(u) = \sqrt[3]{u}.$$

13. РЕШЕНИЕ:

X - случайная величина, число детей, рост которых выше соседей в хороводе. Разложим на сумму случайных величин. Тогда

$$X = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_{27}$$

Y_i - случайная величина, i - тый ребенок в хороводе выше 2-х соседей.

Y_i	0	1
p	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

$\mathbb{E}(Y_i) = 0 * \frac{2}{3} + 1 * \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$, тогда

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_{27}) = 27 * \mathbb{E}(Y_1) = 27 * \frac{1}{3} = 9.$$

Найдем теперь

$$\begin{aligned} Var(X) = Cov(X, X) = Cov(Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_{27}, Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_{27}) = \\ = Var(Y_1) + Var(Y_2) + \ldots + Var(Y_{27}) + 2 * Cov(Y_1, Y_2) + 2 * Cov(Y_1, Y_3) + \ldots + \\ +2 * Cov(Y_{26}, Y_{27}). \end{aligned}$$

Т. к.

Y_i^2	0	1
p	$\frac{8}{9}$	$\frac{1}{9}$

тогда $Var(Y_i) = \mathbb{E}(Y_i^2) - (\mathbb{E}(Y_i))^2 = 0$.

При $i \neq j$ вычислим $Cov(Y_i, Y_j)$:

Сначала рассмотрим события

A - i и j соседи

B - i и j оба выше соседей

Вычислим $P(B|A) = 0$ и $P(B|\bar{A}) = \frac{1}{4}$ и $P(A) = \frac{2}{26} = \frac{1}{13} \to P(\bar{A}) = 1 - \frac{1}{13} = \frac{12}{13}$. Тогда $P(B) = P(B|A) * P(A) + P(B|\bar{A}) * P(\bar{A}) = 0 * \frac{1}{13} + \frac{1}{4} * \frac{12}{13} = \frac{3}{13}$.

$Y_i \backslash Y_j$	0	1
0	?	?
1	?	$\frac{3}{13}$

Значит $\mathbb{E}(Y_i * Y_j) = \frac{3}{13}$. Отсюда

$$Cov(Y_i, Y_j) = \mathbb{E}(Y_i * Y_j) - \mathbb{E}(Y_i) * \mathbb{E}(Y_j) = \frac{3}{13} - \frac{1}{9} = \frac{14}{117}$$

$$Var(X) = 2*(Cov(Y_1, Y_2) + Cov(Y_1, Y_3) + \ldots + Cov(Y_{26}, Y_{27})) = 2*\frac{14}{117}*(26+25+\ldots+1) = 84.$$

ОТВЕТ: $\mathbb{E}(X) = 9$, $Var(X) = 84$

14. РЕШЕНИЕ:

A - рюмка разбавлена

B - превратит хозяина в сосульку

C - Снегурочка выпьет 3-ю рюмку

$P(A) = \frac{1}{4}$

A_1 - 1-ая рюмка разбавлена, A_2 - 2-ая рюмка разбавлена

Вычислим $P(\bar{A}_1 \cap A_2) = \frac{3}{4} * \frac{1}{4} = \frac{3}{16}$ и

$$P(C) = 1 - P(A_1) - P(\bar{A}_1 \cap A_2) = 1 - \frac{1}{4} - \frac{3}{16} = \frac{9}{16}.$$

X - случайная величина, число выпитых Снегурочкой перед тем как хозяин превратится в сосульку

X	1	2	3	4	5	...
p	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4} * \frac{3}{4}$	0	$\left(\frac{1}{4}\right)^2 * \left(\frac{3}{4}\right)^2$	$\left(\frac{1}{4}\right)^2 * \left(\frac{3}{4}\right)^3$	...

Вычислим математическое ожидание случайной величины X:

$$\mathbb{E}(X) = 1 * \frac{1}{4} + 2 * \frac{1}{4} * \frac{3}{4} + 3 * 0 + 4 * \left(\frac{1}{4}\right)^2 * \left(\frac{3}{4}\right)^2 + 5 * \left(\frac{1}{4}\right)^2 * \left(\frac{3}{4}\right)^3 + \ldots$$

Докажем формулу для $0 < q < 1$ и потом применим:

$$1 * q + 2 * q^2 + 3 * q^3 + \ldots = \frac{q}{(1-q)^2}$$

Умножим $(1-q)^2 = 1 - 2 * q + q^2$ на ряд, получаем

$(1 - 2*q + q^2)*(1*q + 2*q^2 + 3*q^3 + \ldots) = q - 2*q^2 + 2*q^2 - 4*q^3 + q^3 + 3*q^3 - \ldots = q$

При $q = \frac{3}{4}$ вычислим сумму ряда:

$$\frac{3}{4} + 2*\left(\frac{3}{4}\right)^2 + 3*\left(\frac{3}{4}\right)^3 + \ldots = \frac{\frac{3}{4}}{\left(1 - \frac{3}{4}\right)^2} = 12$$

$$4*\left(\frac{3}{4}\right)^4 + 5*\left(\frac{3}{4}\right)^5 + \ldots = 12 - \left(\frac{3}{4} + 2*\left(\frac{3}{4}\right)^2 + 3*\left(\frac{3}{4}\right)^3\right) = \frac{567}{64}$$

$$\mathbb{E}(X) = 1*\frac{1}{4} + 2*\frac{1}{4}*\frac{3}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}*\frac{567}{64} = \frac{103}{64}$$

ОТВЕТ: $\frac{9}{16}$, $\frac{103}{64}$

15. РЕШЕНИЕ: ОТВЕТ:

Спасибо за проверку ДЗ!