

# ПРИКЛАДНАЯ СТАТИСТИКА



## Вторая домашка

17 декабря 2022 г.

ПАСТЬ ПОРВУ, МОРГАЛА ВЫКОЛЮ!

*Маленький Кевин перед встречей с грабителями (Один Дома, 1990)*

Случилось страшное! Гринч, злобный Снеговик и злая сестра-близнец Снегурочки решили украсть новогодние праздники, новогоднее настроение и новогодние угощения. Все трое стали злыми из-за дедлайнов. Ребята не успевают до Нового Года закрыть их все. Надо помочь им, тогда все станут добрыми и это спасёт праздники!

Решение работы нужно сдать либо в виде затеханого pdf-файла либо в виде рукописной pdf-ки. Если вы решаете задачи и оформляете их решение на листочке, пишите максимально разборчивым почерком. Если у вас плохой почерк, техайте решения. Иначе проверяющих ваши работы покинет новогоднее настроение.

### Задачи от Гринча

Гринч украл новогоднее настроение. Он согласен вернуть его назад и перестать быть злым, если вы решите для него следующие 10 задач. Каждая решается в одну строчку.

**Задача 1 (5 баллов).** В гирлянде 5 лампочек. Каждая лампочка может не работать с вероятностью  $p$ . Найдите вероятность того, что не работают 1 и 5 лампочки, а все остальные работают.

**Задача 2 (5 баллов).** Плотность распределения случайной величины  $X$  имеет вид

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}, & x \in [3; 9] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}.$$

Найдите вероятность того, что  $4 \leq X \leq 8$ .

**Задача 3 (5 баллов).** Вова и Катя хотел подкараулить деда Мороза у ёлки, но Вова уснул. Дед Мороз уже здесь! Катя стучит в дверь Вовы, чтобы разбудить его. Вова просыпается от каждого стука с вероятностью 0.1. Сколько в среднем надо ударить Кате, чтобы Вова проснулся?

**Задача 4 (5 баллов).** Математическое ожидание случайной величины  $X$  равно 2, а дисперсия 3. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины  $5 \cdot X + 2$ .

**Задача 5 (5 баллов).** Тётя Зина и баба Маша режут Оливье и смотрят праздничный выпуск «Угадай мелодию». Баба Маша угадывает мелодию с 3-х, 4-х или 5-ти нот с вероятностями  $1/4$ ,  $1/2$  и  $1/4$  соответственно. Функция распределения числа нот, необходимых тётё Зине для отгадывания, такова

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 4 \\ 1/4, & x \in [4; 5) \\ 1/2, & x \in [5; 6) \\ 3/4, & x \in [6; 7) \\ 1, & x \geq 7. \end{cases}$$

Найдите вероятность того, что одновременно тётя Зина отгадает мелодию ровно с 5 нот, а баба Маша с 4—х и более.

**Задача 6 (5 баллов).** Функция распределения случайной величины  $X$  имеет следующий вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1/4, & x \in [0; 1) \\ 3/4, & x \in [1; 2) \\ 1, & x \geq 2. \end{cases}$$

Найдите  $E(X)$ .

**Задача 7 (5 баллов).** Пусть  $X$  равномерно принимает значения  $-1, 0, 1$ , а  $Y = X^2$ . Найдите  $\text{Cov}(X, Y)$ . Правда ли, что  $X$  и  $Y$  независимые?

**Задача 8 (5 баллов).** Пусть  $\text{Var}(X) = 1$  и  $Y = 2X - 3$ , а  $Z = 6 - 3X$ . Найдите  $\text{Corr}(Y, Z)$ .

**Задача 9 (5 баллов).** На гирлянде висит 10 лампочек. Время работы каждой лампочки имеет экспоненциальное распределение с параметром 1, то есть  $X_1$  – время до перегорания первой лампочки,  $X_2$  – время до перегорания второй лампочки и так далее. Все лампочки горят независимо.  $X_{\min}$  – время, через которое перегорит первая лампочка. Найдите  $\mathbb{P}(X_{\min} \leq 1)$ .

**Задача 10 (5 баллов).** На гирлянде висит 10 лампочек. Время работы каждой лампочки имеет экспоненциальное распределение с параметром 1, то есть  $X_1$  – время до перегорания первой лампочки,  $X_2$  – время до перегорания второй лампочки и так далее. Все лампочки горят независимо.  $X_{\max}$  – время, через которое перегорит последняя лампочка. Чему равна  $\mathbb{P}(X_{\max} \leq 1)$ ?

## Задачи от злобного Снеговика

Злобный Снеговик украл новогодние угощения. Разгадайте его задачки, его сердце растает и он вернёт яства на праздничный стол.

**Задача 11 (10 баллов).** Миша стащил с новогоднего стола пирожок. Миша знает, что совместное распределение случайных величин:  $X$  – изюминок в пирожке и  $Y$  – орехов в нем, задано следующим образом:

	$X = 0$	$X = 5$	$X = 10$
$Y = 5$	0,1	0,1	0,1
$Y = 7$	0,2	0,2	0,3

- Определите, сколько изюминок в среднем попадает в пирожок.
- Найдите  $\text{Cov}(X, Y)$ .
- Правда ли, что изюм и орехи кладут в пирожок независимо друг от друга?
- Найдите распределение случайной величины  $Y$  и запишите его.
- Найдите  $\text{Var}(Y)$

**Задача 12 (10 баллов).** Время (в часах), за которое тётя Люба готовит оливье является случайной величиной  $X$  с функцией плотности

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2, & x \in [0; 1] \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

- Найдите функцию распределения случайной величины  $F(x)$ .
- Чему равна вероятность того, что тётя Люба приготовит Оливье менее чем за полчаса?
- Известно, что тётя Любе нужно по крайней мере 15 минут для того, чтобы сделать Оливье. Какова вероятность, что она справится с готовкой более, чем за 30 минут?

- г) Пусть  $Y = \frac{1}{X}$ . Найдите плотность распределения этой случайной величины.
- д) Найдите  $E(Y)$ ,  $Var(Y)$  и  $Cov(X, Y)$ .
- е) Компьютер умеет генерировать только равномерные случайные величины. Опишите алгоритм, с помощью которого вы бы сгенерировали случайную величину  $X$ .

## Задачи от злобной сестры-близнеца Снегурочки

Злобная сестра-близнец Снегурочки отменила новогодние выходные. Помогите Снегурочке закрыть её дедлайны, решив две следующие задачки. Тогда выходные вернутся.

**Задача 13 (10 баллов).** Вокруг новогодней ёлки танцуют хороводом 27 детей. Мы считаем, что ребенок высокий, если он выше обоих своих соседей. Величина  $X$  – количество высоких детей в хороводе. Найдите  $E(X)$ ,  $Var(X)$ . Вероятность совпадения роста будем считать равной нулю.

**Задача 14 (10 баллов).** Злая сестра-близнец Снегурочки постоянно пьёт неразбавленный спирт. Из-за того, что она много пьёт, у неё проблемы с памятью, и она помнит не больше, чем три последних рюмки. Хозяин питейного заведения с вероятностью  $1/4$  разбавляет каждую подаваемую рюмочку спирта. Если по ощущениям злой Снегурочки половина выпитых рюмок или больше была разбавлена, она превращает хозяина в сосульку.

Какова вероятность того, что хозяин питейного заведения успеет подать Снегурочке третью рюмку спирта? Сколько в среднем рюмок выпьет Снегурочка, прежде чем превратит хозяина в сосульку?

## Ещё задачи

У вас получилось спасти праздники! В награду вы можете решить одну из следующих задач. Если решите все, получите бонусные баллы.

**Задача 15 (10 баллов).** Напишите письмо Деду Морозу. В этом письме расскажите Деду Морозу о том, каким для вас был этот год. Попросите в нём подарки для себя, всех своих родных и друзей. Упакуйте это письмо в красивый конверт и положите под ёлку.

Сфотографируйте, как письмо лежит под ёлкой и прикрепите фото к работе. Содержимое письма показывать ни в коем случае не надо.

**Задача 16 (10 баллов).** Случайные величины  $X, Y, Z$  имеют равномерное распределение на отрезке  $[0; 1]$ . Найдите плотность распределения случайной величины  $(XY)^Z$ .