Student Name: Динара Жусупова
Student ID:

Математика для анализа данных
ДЗ 1

Раздел 1

1. РЕШЕНИЕ: Пусть x=|B+P+M| - число посетителей, которые употребляют все три напитка. Тогда количество посетителей, которые пьют хотя бы один напиток

   n=|B|+|P|+|M|-(|B+P|+|P+M|+|B+M|)+2x=12+11+9-(5+4+3)+2x=20+2x

   Но число посетителей 18, поэтому не имеет решений.

   ОТВЕТ: нет решений

2. РЕШЕНИЕ:

$$P(\{c\}) = 1 - 0.8 = 0.2$$
$$P(\{a\}) = 1 - 0.7 = 0.3$$
$$P(\{c\}) = 1 - 0.3 - 0.2 = 0.5$$

   ОТВЕТ: $P(\{c\}) = 0.2, P(\{a\}) = 0.3, P(\{c\}) = 0.5$

3. РЕШЕНИЕ: A - выпало 2 туза одного цвета

$$p(A) = \frac{m}{n} = \frac{2}{C_4^2} = \frac{1}{12}$$

   ОТВЕТ: 1/12

4. РЕШЕНИЕ: A_i - i-тый вагон ограбили

   а) B - ровно 2 вагона ограбили

$$B = (A_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3) \cup (A_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3) \cup (\bar{A}_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

   б) B - хотя бы один вагон ограбили

$$B = A_1 \cup A_2 \cup A_3$$

   ОТВЕТ: а) $(A_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3) \cup (A_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3) \cup (\bar{A}_1 \cap A_2 \cap A_3)$; б) $B = A_1 \cup A_2 \cup A_3$

5. РЕШЕНИЕ: A - выпадет в сумме 10 очков при подбросе двух костей

   m - количество благоприятных исходов равно 3-м, потому что

   4(Радомир) + 6(Добрыня) = 6(Радомир) + 4(Добрыня) = 5(Радомир) + 5(Добрыня) = 10

   n - количество всех исходов 6*6 = 36

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

   ОТВЕТ: $\frac{1}{12}$

6. РЕШЕНИЕ: а) $C_{20}^{3} = 1140$

   б) можно не только по месяцу, в котором родилась корова, можно и по цвету шерсти, например рыжую «Белка»

   ОТВЕТ: а) 1140; б) «Белка»

7. РЕШЕНИЕ: Найдем сначала количество возможных вариантов рассадки вождей, при выполнении условия для вождя племени Агвадашинс. Он должен сидеть с краю, поэтому первое слева может быть занято вождем или пустовать, тогда остальных можно рассадить 20! или при пустующем первом месте на второе место садится вождь, тогда 19!. Еще учитываем, что такие же случаи возможны и для правого конца, получаем всего 2 * (19! + 20!) случаев.

   Теперь посчитаем случаи, когда три вождя племен Вабибинэс, Джэки и Маковаян сидят вместе, для того чтобы исключить из полученных выше случаев. Трех вождей можно поменять местами в группе 3! способами, перестановка остальных n вождей $(n-3)!$ и сдвиг группы этих вождей возможно $(n-2)$ - мя способами. В итоге получаем

   $$3! * (n-3)! * (n-2) = 3! * (n-2)!.$$

   Тогда объединяя два шага рассуждений, получаем, что

   $$m = 2 * (20! - 3! * 18! + 19! - 3! * 17!) = 2 * 17! * 19 * (21^2 - 3 * 21 - 6) = 2 * 17! * 19 * 372$$

   и $n = 21!$

   Тогда

   $$p(A) = \frac{m}{n} = \frac{2 * 17! * 19 * 372}{21!} \approx 0.098.$$

   ОТВЕТ: а) 0.098; б) в задаче задаются имена племен, а не вождей.

8. РЕШЕНИЕ:

   Рассмотрим события:

   A - девушки приедут

   B - будет стычка

   C - шериф в городе

   $$P(C|(\bar{A} \cap \bar{B})) = 0.18,\ P(C|(A \cap B)) = 0.9,$$
   $$P(C|(B \backslash A)) = 0.54,\ P(C|(A \backslash B)) = 0.36,$$
   $$P(A) = 0.6,\ P(B) = 0.4.$$

   б) Найти $P(A \cap B)$. A и B - независимы, поэтому

   $$P(A \cap B) = P(A) * P(B) = 0.6 * 0.4 = 0.24$$

   а) Найти $p(A \cup B)$.

   $$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.6 + 0.4 - 0.24 = 0.76$$

в) Найти $P(A \cap B \cap C)$.

$$P(C|(A \cap B)) = \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(A \cap B)} \rightarrow P(A \cap B \cap C) = P(C|(A \cap B)) * P(A \cap B) = 0.9 * 0.24 = 0.216$$

г) Найти $P(A|C)$.

События $B \backslash A$, $A \backslash B, A \cap B$, $\bar{A} \cap \bar{B}$ - несовместны и образуют полное вероятностное пространство Ω. Тогда по формуле полной вероятности, найдем

$$P(C) = P(C|(B \backslash A)) * P(B \backslash A) + P(C|(A \backslash B)) * P(A \backslash B) + P(C|(A \cap B)) * P(A \cap B) + P(C|(\bar{A} \cap \bar{B})) * P(\bar{A} \cap \bar{B})$$

Для этого найдем вероятности событий:

$$P(B \backslash A) = P(B \cap \bar{A}) = P(B) * P(\bar{A}) = 0.4 * 0.4 = 0.16$$

$$P(A \backslash B) = P(A \cap \bar{B}) = P(A) * P(\bar{B}) = 0.6 * 0.6 = 0.36$$

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) * P(\bar{B}) = 0.4 * 0.6 = 0.24$$

$$P(C) = 0.54 * 0.16 + 0.36 * 0.36 + 0.9 * 0.24 + 0.18 * 0.24 = 0.48$$

Т.к. $A = (A \backslash B) \cup (A \cap B)$ и $A \backslash B$, $A \cap B$ - несовместны

$$P(A|C) = P((A \backslash B)|C) + P((A \cap B)|C)$$

Тогда по формуле Байеса получаем

$$P((A \backslash B)|C) = \frac{P(C|(A \backslash B)) * P(A \backslash B)}{P(C)} = \frac{0.36 * 0.36}{0.48} = 0.27$$

и

$$P((A \cap B)|C) = \frac{P(C|(A \cap B)) * P(A \cap B)}{P(C)} = \frac{0.9 * 0.24}{0.48} = 0.45.$$

$$P(A|C) = P((A \backslash B)|C) + P((A \cap B)|C) = 0.27 + 0.45 = 0.72.$$

д) Найти $P(C|A)$.

По формуле Байеса получаем

$$P(C|A) = \frac{P(A|C) * P(C)}{P(A)} = \frac{0.72 * 0.48}{0.6} = 0.58$$

ОТВЕТ: а) 0.76; б) 0.24; в) 0.216; г) 0.72; д) 0.58.

Раздел 2

1. РЕШЕНИЕ:

а) увеличится на одну, потому что за одну операцию, бандит отдает две и одну забирает;

б) у Ричарда, потому что он ее забрал за час до приезда;

в) у Ричарда, потому что на самом деле все купюры будут у него, т.к. для любого номера купюры n найдется момент времени $\frac{1}{2^n}$, когда Ричард забрал эту купюру у менеджера;

г) ни одной, вытекает из пункта в).

2. РЕШЕНИЕ:

   а) из 9-ти вагонов выбрать 4 можно C_9^4 способами и расположить по ним бандитов можно 4! способами, в итоге $C_9^4 * 4! = 6 * 7 * 8 * 9 = 3024$

   б) «Упрямая»:)

   ОТВЕТ: а) 3024; б) «Упрямая»

3. РЕШЕНИЕ:

   Это связано с геометрией. Три круга делят плоскость на $2^3 = 8$ частей. Если мы нарисуем четвёртый, то он пересекает уже нарисованные окружности максимум в 6 точках. Тогда дугами разрезаются 6 или менее частей, и всего их оказывается не более 14. А нужно $2^4 = 16$.

4. РЕШЕНИЕ:

   Не имеет значения где будет 1-ый разрез, важно в какую половину попадет 2-ой разрез. Чтобы получился один из разрезов длины больше 0.5, требуется, чтобы 2-ой разрез попал на ту половину, что и 1-ый. Тогда $P = \frac{0.5}{1} = 0.5$. Ясно, что вероятность попадания разреза в точку 0.5 равно 0.

   ОТВЕТ: 0.5

Раздел 3

1. РЕШЕНИЕ:

   Рассмотрим событие A - среди выбранных 10-ти человек нет как минимум одной категории.

   Тогда число благоприятных случаев:

$$m = C_3^2 \sum_{k=1}^{9} C_{10}^k * C_{10}^{10-k} + C_3^1 * C_{10}^{10}$$

   и $n = C_{30}^{10}$, тогда получаем

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{554265}{30045015} \approx 0.018$$

   ОТВЕТ: 0.018

2. РЕШЕНИЕ:

   У каждого шерифа есть C_{10}^5 способов выбрать 5 бандитов из 10-ти. Так как они выбирают независимо друг от друга вероятность выбора не совпадающего расклада

$$P(A) = \frac{1}{C_{10}^5 * C_{10}^5} = 1.5747e - 05$$

   почти ноль.

   ОТВЕТ: 1.5747e-05

3. РЕШЕНИЕ:

   От общего количества выбора 7-ми человек из 30-ти, а это C_{30}^7, отнимем количество способов выбора только бандитов C_{20}^7. Получаем $C_{30}^7 - C_{20}^7 = 1958280$.

   ОТВЕТ: 1958280

4. РЕШЕНИЕ:

   Рассмотрим следующие события:

   A - атака индейцев

   B - шериф выживет

   C - появился бандит

$$P(B|(\bar{A}\cap\bar{C})) = 0.99,\ P(B|(A\backslash C)) = 0.95,\ P(B|(C\backslash A)) = 0.9,$$
$$P(B|(A\cap C)) = 0.8,\ P(C) = 0.1,\ P(A) = 0.2$$

   а) A, C - независимы. Найти $P(\bar{B})$.

$$P(A\cap C) = P(A) * P(C) = 0.2 * 0.1 = 0.02$$
$$P(A\backslash C) = P(A) * P(\bar{C}) = 0.2 * 0.9 = 0.18$$
$$P(C\backslash A) = P(C) * P(\bar{A}) = 0.1 * 0.8 = 0.08$$
$$P(\bar{A}\cap\bar{C}) = P(\bar{A}) * P(\bar{C}) = 0.9 * 0.8 = 0.72$$
$$P(A\cup B) = 1 - P(\bar{A}\cap\bar{C}) = 0.28$$

   События $A\cap C, A\backslash C, C\backslash A, \bar{A}\cap\bar{C}$ - несовместны и составляют полное вероятностное пространство. Тогда

$$P(B) = P(B|(A\backslash C))*P(A\backslash C)+P(B|(C\backslash A))*P(C\backslash A)+P(B|(\bar{A}\cap\bar{C}))*P(\bar{A}\cap\bar{C})+P(B|(A\cap C))*P(A\cap C)$$
$$P(B) = 0.95 * 0.18 + 0.9 * 0.08 + 0.8 * 0.02 + 0.99 * 0.72 \approx 0.97$$
$$P(\bar{B}) = 1 - 0.97 = 0.03$$

   ОТВЕТ: а) 0.03

Раздел 4

1. РЕШЕНИЕ:

   а) Оъединение может не являться σ - алгеброй.

   Например, пусть эти три σ - алгебры состоят из подмножеств событий $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ и их дополнений $\{A_{n+1}, A_{n+2}, \ldots\}$. Т. к. объединение содержит все одноэлементные события $\{A_1\}, \{A_2\}, \ldots, \{A_n\}$, и в том числе с нечетными номерами $\{A_1\}, \{A_3\}, \ldots$, их объединение будет событием $\{A_1, A_3, \ldots\}$, но согласно построению объединение не содержит такого элемента. Нарушается аксиома о замкнутости операции счетного объединения.

   б) Да, здесь операция счетного объединения замкнута.

   ОТВЕТ: а) нет; б) да.

2. РЕШЕНИЕ:

   По условию задачи положение поезда на числовой прямой в момент времени t можно представить как $n+t*k$, где n - положение поезда в начальной точке отсчета и k - его скорость целые числа. Т. е. по сути надо найти два этих параметра, тогда бандит сможет ограбить поезд. Стратегия может быть такой:

(a) начнем с нуля и вначале пусть $p = 0$ и $l = 1$, рассмотрим точку $p \pm t * l$, потому что скорость ненулевая;

(b) проверим точку в начальный момент $t = 1$, отправив бандита в точку 1 и через минуту отправим в точку -2, потому что если его начальная точка $n = 0$ и скорость $k = 1$ с противоположным направлением, то через 2 минуты поезд уже будет в -2;

(c) если бандиты промахнулись, то делаем сдвиг вправо $p = 1$ и проверяем для $l = 1$ точки в двух направлениях $1+3*1 = 4$, $1-4*1 = -3$ и влево для $p = -1$ точки $-1 - 5 * 1 = -6$, $-1 + 6 * 1 = 5$;

(d) если снова неудача, то теперь увеличиваем скорость на единицу $l = 2$ и проверяем для $p = 1$ точки $1 + 7 * 2 = 15$, $1 - 8 * 2 = -15$ и влево для $p = -1$ точки $-1 - 9 * 2 = -19$, $-1 + 10 * 2 = 19$;

(e) в случае продолжения процесса снова сдвигаем $p = 2$ и проверяем для $l = 1, 2$ точки $2 + 11 * 1 = 13$, $2 - 12 * 1 = -10$, $2 + 13 * 2 = 28$, $2 - 14 * 2 = -26$ и влево для $p = -2$ точки $-2 - 15 * 1 = -17$, $-2 + 16 * 1 = 14$, $-2 - 17 * 2 = -36$, $-2 + 18 * 2 = 34$;

(f) т.к. времени и бандитов бесконечно, мы повторяем шаги (2c) - (2d), т. е. при увеличении параметров мы проверяем предыдущие значения для другого параметра, например, на s-ом шаге изменяя параметр $p = p \pm 1$ проверяем все точки в двух направлениях для $l = 1, 2, \ldots, s$, также и при увеличении скорости $l = l + 1$, в итоге мы найдем точку $n + t * k$.

Спасибо за проверку ДЗ!