

20. ДИНАМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ВЯЗКОУПРУГОСТИ В СКОРОСТЯХ И НАРЯЖЕНИЯХ

В этом параграфе приводится и исследуется постановка динамической задачи вязкоупругости для среды Максвелла в скоростях перемещений и напяржениях, а также разностный метод решения поставленной задачи.

Рассмотрим постановку трехмерной задачи линейной изотропной теории вязкоупругости, которая является предметом наших исследований в настоящей главе. В области $D \in R^3$ требуется определить вектор перемещений $\bar{u}(x, t)$, тензоры деформаций $\varepsilon_{ik}(x, t)$ и напяржений $\sigma_{ik}(x, t)$, удовлетворяющие

Уравнениям движения

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + f_i \equiv L_i \bar{\sigma}, \quad x \in D, \quad i=1,2,3, \quad (20.1)$$

где ρ – плотность материала, $\bar{f} = (f_1, f_2, f_3)$ – вектор массовых сил.

Соотношениям перемещение-деформация

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right), \quad i, k = 1, 2, 3 \quad (20.2)$$

и уравнениям состояния среды, которые вводятся отдельно для девиаторов s_{ik}, e_{ik} и шаровых составляющих σ, ε тензоров напяржений и деформаций соответственно:

$$s_{ik} = \sigma_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik} \sigma, \quad \sigma = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33},$$

$$e_{ik} = \varepsilon_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik} \varepsilon, \quad \varepsilon = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}.$$

Здесь δ_{ik} – символ Кронеккера.

Уравнения состояния, построенные на основе использования элементарных моделей вязкоупругих сред, имеют следующий вид [5, 49, 75].

Модель Максвелла

$$\frac{\partial s_{ik}}{\partial t} + \frac{1}{\theta} s_{ik} = 2\mu \frac{\partial e_{ik}}{\partial t}, \sigma = K\varepsilon. \quad (20.3)$$

Модель Кельвина-Фойгта

$$s_{ik} = 2\mu \left(e_{ik} + \theta \frac{\partial e_{ik}}{\partial t} \right), \sigma = K\varepsilon, \quad (20.4)$$

где $K = 3\lambda + 2\mu$, λ, μ – константы Ламе, $\theta = \eta / \mu$ – время сдвиговой релаксации (ползучести) для модели Максвелла (Кельвина-Фойгта), η – коэффициент вязкости. На границе Γ области D могут быть заданы напряжения

$$\sum_{k=1}^3 \sigma_{ik}(x, t) n_k = g_i(x, t), \quad x \in \Gamma, i=1,2,3, \quad (20.5)$$

где n_k – направляющие косинусы внешней нормали к границе Γ , либо перемещения

$$u_i(x, t) = \varphi_i(x, t), \quad x \in \Gamma, \quad i=1,2,3, \quad (20.6)$$

либо на части границы Γ_1 задаются условия (20.5), а на Γ_2 – условия (20.6), $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Постановка смешанной задачи Коши завершается заданием начальных условий для вектора перемещений.

$$\bar{u}(x, 0) = \bar{u}_0(x), \quad \left. \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \right|_{t=0} = \bar{u}_i(x), \quad x \in D. \quad (20.7)$$

Если уравнения состояния выбраны в виде (20.3), то в начальный момент времени требуется задание также и напряжений. Обычно в теории вязкоупругости принято считать, что предыстория исследуемой среды была недеформируемой [49, 75], поэтому можно принять для среды Максвелла.

$$\sigma_{ik}(x, 0) = 0, \quad x \in D. \quad (20.8)$$

Заметим, что в поставленной задаче требуется определить пятнадцать неизвестных функций, что вызывает определенные

трудности при исследовании и решении этой задачи. Поэтому в данном параграфе используется постановка в скоростях и напряжениях, которая получается из выписанной следующим образом. Введем вектор скоростей перемещений

$$\bar{v}(x, t) = \partial \bar{u}(x, t) / \partial t$$

и подставим уравнения (20.2) в (20.3). Кроме того, для упрощения изложения рассмотрим двумерную задачу, а именно, плоскую деформацию, которая реализуется в предположении, что $u_3(x, t) \equiv 0$ и все функции не зависят от координаты x_3 . Тогда получим двумерную симметричную систему уравнений первого порядка [11].

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial v_1}{\partial t} &= \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + f_1; \\ \rho \frac{\partial v_2}{\partial t} &= \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + f_2; \\ \frac{1}{E} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial t} - \frac{\nu}{E} \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial t} - \frac{\nu}{E} \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial t} + \frac{1}{3\eta} \sigma_{11} - \frac{1}{6\eta} \sigma_{22} - \frac{1}{6\eta} \sigma_{33} &= \frac{\partial v_1}{\partial x_1}, \\ -\frac{\nu}{E} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial t} + \frac{1}{E} \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial t} - \frac{\nu}{E} \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial t} - \frac{1}{6\eta} \sigma_{11} + \frac{1}{3\eta} \sigma_{22} - \frac{1}{6\eta} \sigma_{33} &= \frac{\partial v_2}{\partial x_2}, \quad (20.9) \\ -\frac{\nu}{E} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial t} - \frac{\nu}{E} \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial t} + \frac{1}{E} \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial t} - \frac{1}{6\eta} \sigma_{11} - \frac{1}{6\eta} \sigma_{22} + \frac{1}{3\eta} \sigma_{33} &= 0, \\ \frac{2(1+\nu)}{E} \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial t} + \frac{1}{\eta} \sigma_{12} &= \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1}. \end{aligned}$$

Здесь используется модуль Юнга E и коэффициент Пуассона ν , определяемые формулами

$$E = \mu \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu}, \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}.$$

Отметим, что в отличие от плоских задач теории упругости, в системе (20.9) σ_{33} не исключается, так как это привело бы к необходимости решать интегродифференциальные уравнения. Действительно, если предположить, что в начальный момент времени,

$$\sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \text{ при } t=0,$$

то из пятого уравнения системы (20.9) получаем

$$\sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}) + \frac{(1-2\nu)E}{6\eta} \int_0^t (\sigma_{11} + \sigma_{22}) e^{\frac{E}{3\eta}(\tau-t)} d\tau, \quad t \geq 0.$$

Рассмотрим задание начально-краевых условий для системы уравнений (20.9). В качестве области определения выберем прямоугольник, на каждой из сторон которого могут быть заданы либо скорости

$$v_1(x) = u_{1,1}(x), \quad v_2(x) = u_{1,2}(x), \quad x \in \Gamma_j, \quad (20.10)$$

либо напряжения

$$\sigma_{11}(x) = p_{11}(x), \quad \sigma_{12}(x) = p_{12}(x), \quad x \in \Gamma_j, \quad x_1 = 0, l_1,$$

$$\sigma_{22}(x) = p_{22}(x), \quad \sigma_{12}(x) = p_{12}(x), \quad x \in \Gamma_j, \quad x_2 = 0, l_2.$$

либо условия симметрии.

$$v_1(x) = 0, \quad \sigma_{12}(x) = 0, \quad x \in \Gamma_j, \quad x_1 = 0, l_1,$$

$$v_2(x) = 0, \quad \sigma_{12}(x) = 0, \quad x \in \Gamma_j, \quad x_2 = 0, l_2. \quad (20.12)$$

Здесь $\Gamma_j, j = 1, 2, 3, 4$ – одна из сторон прямоугольника. Из системы (20.9) видно, что в начальный момент времени должны быть заданы скорости и напряжения.

$$\bar{v}(x, 0) = \bar{u}_1(x), \quad \sigma_{ik}(x, 0) = p_{ik}(x), \quad x \in D, \quad i, k = 1, 2. \quad (20.13)$$

Эквивалентность приведенных постановок (20.1), (20.2), (20.3), (20.5), (20.7), (20.8) и (20.9), (20.11), (20.13) (или с граничными условиями (20.6), (20.10)) следует из того, что в них участвуют одни и те же уравнения, а также из способа вычисления перемещений по скоростям и задания начальных напряжений:

$$\bar{u}(x, t) = \bar{u}_0(x) + \int_0^t \bar{v}(x, \tau) d\tau, \quad p_{ik}(x) = 0.$$

Запишем систему (20.9) в более компактном виде. Введем безразмерные переменные следующим образом.

$$\hat{x}_i = \frac{x_i}{l}, \quad \hat{t} = \frac{tl_1}{l}, \quad \hat{v}_i = \frac{v_i}{c_1}, \quad \hat{\sigma}_{ik} = \frac{\sigma_{ik}}{\rho c_1^2},$$

$$\hat{f}_i = \frac{l}{\rho c_1^2} f_i, \quad c_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \quad c_2^2 = \frac{\mu}{\rho}, \quad \gamma = \frac{c_1}{c_2}, \quad l = \min(l_1, l_2).$$

Тогда система (20.9) в векторной форме примет следующий вид (знак \wedge для упрощения записи в дальнейшем опускаем)

$$A \frac{\partial \bar{z}}{\partial t} + B_1 \frac{\partial \bar{z}}{\partial x_1} + B_2 \frac{\partial \bar{z}}{\partial x_1} + C \bar{z} + \bar{F} = 0, \quad (20.14)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & -b & -b & 0 \\ 0 & 0 & -b & a & -b & 0 \\ 0 & 0 & -b & -b & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma^2 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \frac{d}{6\theta} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix},$$

$$\bar{z} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_1 \\ \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix}, \quad \bar{F} = \begin{pmatrix} -f_1 \\ -f_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} a &= \frac{\gamma^2(\gamma^2 - 1)}{3\gamma^2 - 4}, \\ b &= \frac{\gamma^2(\gamma^2 - 2)}{2(3\gamma^2 - 4)}, \\ d &= \frac{l}{c_2} \gamma. \end{aligned} \quad (20.15)$$

Выполняется следующая

ТЕОРЕМА 20.1. Если решение (20.14), (20.13) с граничными условиями (20.10), (20.11) или (20.12) существует, то оно единственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что существует два решения. Тогда их разность в силу линейности задачи также удовлетворяет поставленной задаче, но с однородными граничными и начальными условиями. Разность решений будем обозначать также символом $\bar{z}(x, t)$. Введем скалярное произведение двух вектор-функций $\bar{z}_1(x, t)$, $\bar{z}_2(x, t)$ и норму функции $\bar{z}(x, t)$.

$$(\bar{z}_1, \bar{z}_2) = \int_D \left[\sum_{k=1}^6 z_{1,k}(x, t) z_{2,k}(x, t) \right] dx,$$

$$\|\bar{z}\|^2 = (\bar{z}, \bar{z}), \quad \|\bar{z}\|_A^2 = (A\bar{z}, \bar{z}), \quad A = A^* > 0.$$

Умножим уравнение (20.14) скалярно на $2\bar{z}(x, t)$

$$2\left(A \frac{\partial \bar{z}}{\partial t}, \bar{z}\right) + 2\left(B_1 \frac{\partial \bar{z}}{\partial x_1}, \bar{z}\right) + 2\left(B_2 \frac{\partial \bar{z}}{\partial x_2}, \bar{z}\right) + 2(C\bar{z}, \bar{z}) = 0. \quad (20.16)$$

Так как матрицы A и C симметричны и A положительно определена, а C – неотрицательна, то

$$2\left(A \frac{\partial \bar{z}}{\partial t}, \bar{z}\right) = \frac{d}{dt} (A\bar{z}, \bar{z}) = \frac{d}{dt} \|\bar{z}\|_A^2, \quad (C\bar{z}, \bar{z}) \geq 0.$$

Далее распишем второй и третий члены в (20.16)

$$\begin{aligned}
\left(B_1 \frac{\partial \bar{z}}{\partial x_1}, \bar{z} \right) &= - \int_D \left(\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} v_1 + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} v_2 + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \sigma_{11} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \sigma_{12} \right) dx, \quad \left(B_2 \frac{\partial \bar{z}}{\partial x_2}, \bar{z} \right) = \\
&= - \int_D \left(\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} v_1 + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} v_2 + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \sigma_{22} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \sigma_{12} \right) dx. \quad (20.17)
\end{aligned}$$

Выполняя в этих соотношениях интегрирование по частям и учитывая однородность граничных условий, получим, что выражения (20.17) обращаются в нуль. Тогда из (20.16) имеем

$$\frac{d}{dt} ||\bar{z}||_A^2 \leq 0$$

или

$$||\bar{z}(x, t)||_A^2 \leq ||\bar{z}(x, 0)||_A^2$$

Учет нулевых начальных условий завершает доказательство.

Замечание. Доказательство теоремы проведено в предположении, что область D – прямоугольник. Однако, если в соотношениях (20.17) вместо интегрирования по частям применить формулу Грина, то теорема будет верна для произвольной области D .

Теперь опишем метод решения поставленной задачи при помощи конечных разностей. Подобный метод был использован для решения динамических задач теории упругости в работах [3, 21-24].

Симметричную, положительную матрицу A представим в виде

$$A = L \cdot L$$

и произведем в системе (20.14) замену переменных

$$\bar{w} = L \bar{z}. \quad (20.18)$$

Здесь

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & b_1 & b_1 & 0 \\ 0 & 0 & b_1 & a_1 & b_1 & 0 \\ 0 & 0 & b_1 & b_1 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}, L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & b_2 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_2 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_2 & b_2 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/\gamma \end{pmatrix},$$

$$a_1 = \frac{\gamma}{3} \left(\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{3\gamma^2 - 4}} \right), b_1 = \frac{\gamma}{3} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{\sqrt{3\gamma^2 - 4}} \right),$$

$$a_2 = \frac{1}{3\gamma} \left(2\sqrt{2} + \sqrt{3\gamma^2 - 4} \right), b_2 = \frac{1}{3\gamma} \left(-\sqrt{2} + \sqrt{3\gamma^2 - 4} \right).$$

Система уравнений (20.14) для новой функции $\bar{w}(x, t)$ принимает вид

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \tilde{B}_1 \frac{\partial \bar{w}}{\partial x_1} + \tilde{B}_2 \frac{\partial \bar{w}}{\partial x_2} + \tilde{C} \bar{w} + \bar{F} = 0, \quad (20.19)$$

где $\tilde{B}_i = L^{-1} B_i L^{-1}$, $i=1,2$, $\tilde{C} = L^{-1} C L^{-1}$,

$$\tilde{B}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -a_2 & -b_2 & -b_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/\gamma \\ -a_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -b_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -b_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/\gamma & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{B}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/\gamma \\ 0 & 0 & -b_2 & -a_2 & -b_2 & 0 \\ 0 & -b_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/\gamma & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{C} = \frac{d}{\theta\gamma^2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Матрицы \tilde{B}_1 и \tilde{B}_2 приводятся различными ортогональными преобразованиями к одной диагональной матрице Λ

$$\tilde{B}_i = Q_i' \Lambda Q_i.$$

Здесь штрих означает транспонирование матрицы.

$$Q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & a_2 & -2b_2 & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & b_2 & a_2 & 1 & 0 & b_2 \\ 0 & b_2 & a_2 & -1 & 0 & b_2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$Q_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -b_2 & a_2 & 1 & 0 & b_2 \\ 0 & -a_2 & -2b_2 & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & -b_2 & a_2 & -1 & 0 & b_2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1/\gamma & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1/\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Представим матрицу Λ в виде суммы двух диагональных матриц

$$\Lambda = \Lambda^+ + \Lambda^- ,$$

где Λ^+ содержит на диагонали неотрицательные элементы диагонали матрицы Λ , Λ^- – неположительные. Теперь представим матрицы \tilde{B}_1 и \tilde{B}_2 в виде суммы неположительных \tilde{B}_i^- и неотрицательных \tilde{B}_i^+ матриц.

$$\tilde{B}_i^+ = Q_i' \Lambda^+ Q_i , \quad \tilde{B}_i^- = Q_i' \Lambda^- Q_i , \quad \tilde{B}_i = \tilde{B}_i^+ + \tilde{B}_i^- .$$

Систему (20.19) перепишем в виде

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \tilde{B}_1^+ \frac{\partial \bar{w}}{\partial x_1} + \tilde{B}_1^- \frac{\partial \bar{w}}{\partial x_1} + \tilde{B}_2^+ \frac{\partial \bar{w}}{\partial x_2} + \tilde{B}_2^- \frac{\partial \bar{w}}{\partial x_2} + \tilde{C} \bar{w} + \bar{F} = 0. \quad (20.20)$$

В прямоугольнике D введем равномерную сетку $\bar{\omega}_h$ с шагами h_1 и h_2

$$\bar{\omega}_h = \{(x_{1,i}, x_{2,j})\}, \quad x_{1,i} = ih_1, \quad i=0,1,\dots,N, \quad h_1 = l_1/N,$$

$$x_{2,j} = jh_2, \quad j=0,1,\dots,M, \quad h_2 = l_2/M.$$

Интервал времени $t \in [0, T]$ на котором определяется решение задачи покрывается равномерной сеткой с шагом τ . Функции непрерывного аргумента $\bar{w}(x, t)$ заменяются набором чисел, определенных в узлах сетки

$$\bar{w}_{ij}^n = \bar{w}(x_{1,i}, x_{2,j}, t_n).$$

Ниже для упрощения формул какие-либо из индексов i, j, n (либо все) будут опускаться. Теперь заменим производные в (20.20) их разностными аналогами и получим следующую явную разностную схему

$$\bar{w}_t^n + \tilde{B}_1^+ \bar{w}_{x_1}^n + \tilde{B}_1^- \bar{w}_{x_1}^n + \tilde{B}_2^+ \bar{w}_{x_2}^n + \tilde{B}_2^- \bar{w}_{x_2}^n + \tilde{C} \bar{w}^n + \bar{F}^n = 0. \quad (20.21)$$

Здесь

$$\begin{aligned} w_t^n &= \frac{(w^{n+1} - w^n)}{\tau}, \quad w_{x_1}^n = \frac{(w_{i,j}^n - w_{i-1,j}^n)}{h_1}, \\ w_{x_1}^n &= \frac{(w_{i+1,j}^n - w_{i,j}^n)}{h_1}, \quad w_{x_2}^n = \frac{(w_{i,j}^n - w_{i,j-1}^n)}{h_2}, \\ w_{x_2}^n &= \frac{(w_{i,j+1}^n - w_{i,j}^n)}{h_2}. \end{aligned}$$

Нетрудно проверить, что построенные разностные уравнения (20.21) аппроксимируют систему (20.20) или (20.19) с первым порядком точности по τ и $h = \max(h_1, h_2)$. Распишем производную по времени и выразим систему (20.21) в явном виде

$$\begin{aligned} \bar{w}^{n+1} &= [E - \tau(\tilde{B}_1^+ D_{-1} + \tilde{B}_1^- D_1) - \\ &- \tau(\tilde{B}_2^+ D_{-1} + \tilde{B}_2^- D_2) - \tau \tilde{C}] \bar{w}^n - \tau \bar{F}^n, \end{aligned} \quad (20.22)$$

где $D_{-i} w = w_{x_i}^-$, $D_i w = w_{x_i}^+$, E – единичная матрица. Сохранив первый порядок аппроксимации, систему (20.22) представим в факторизованном виде

$$\begin{aligned} \bar{w}^{n+1} &= [E - \tau(\tilde{B}_2^+ D_{-2} + \tilde{B}_2^- + \tilde{C})] \times \\ &\times [E - \tau(\tilde{B}_1^+ D_{-1} + \tilde{B}_1^- D_1)] \bar{w}^n - \tau \bar{F}^n. \end{aligned} \quad (20.23)$$

Эта схема эквивалента следующей

$$\begin{aligned}\bar{w}^{n+1/2} &= \left[E - \tau (\tilde{B}_1^+ D_{-1} + \tilde{B}_1^- D_1) \right] \bar{w}^n ; \\ \bar{w}^{n+1} &= \left[E - \tau (\tilde{B}_2^+ D_{-2} + \tilde{B}_2^- D_2 + \tilde{C}) \right] \bar{w}^{n+1/2} - \tau \bar{F}^n ,\end{aligned}\quad (20.24)$$

где $\bar{w}^{n+1/2}$ – некоторый вспомогательный вектор. Таким образом, исходная система двумерных уравнений представлена в виде двух систем, каждая из которых содержит производные только по одной из переменных. Такой подход называется факторизацией, хорошо известен [39, 94] и облегчает построение алгоритма и решение задачи. В уравнениях (20.24) перейдем к римановым инвариантам, что упростит систему и позволит записать алгоритм в компактном виде. Воспользуемся представлением матриц \tilde{B}_i^+ и \tilde{B}_i^- и заменой переменных

$$\bar{r}^{(2)} = Q_2 \bar{w} , \quad \bar{r}^{(1)} = Q_1 \bar{w} . \quad (20.25)$$

Умножая (20.24) слева на Q_i , получим

$$\begin{aligned}(\bar{r}^{(1)})^{n+1/2} &= \left[E - \tau (\Lambda^+ D_{-1} + \Lambda^- D_1) \right] (\bar{r}^{(1)})^n ; \\ (\bar{r}^{(2)})^{n+1} &= \left[E - \tau (\Lambda^+ D_{-2} + \Lambda^- D_2 + \bar{C}) \right] (\bar{r}^{(2)})^{n+1/2} - \tau Q_2 \bar{F}^n ; \\ (\bar{r}^{(1)})^n &= Q_1 \bar{w}^n , \quad (\bar{r}^{(2)})^{n+1/2} = Q_2 Q'_1 (\bar{r}^{(1)})^{n+1/2} ; \\ \bar{w}^{n+1} &= Q'_2 (\bar{r}^{(2)})^{n+1} , \quad \bar{C} = Q_2 \tilde{C} Q'_2 .\end{aligned}\quad (20.26)$$

Граничные и начальные условия выводятся из исходных при помощи замен переменных (20.18) и (20.25) и имеют следующий вид

а) на границе заданы скорости v_1 и v_2

$$\begin{aligned}-r_2^{(1)} + r_6^{(1)} &= \sqrt{2} v_1 \big|_{x_1=0, l_1} \\ -r_1^{(1)} + r_5^{(1)} &= \sqrt{2} v_2 \big|_{x_1=0, l_1} \\ -r_1^{(2)} + r_5^{(2)} &= \sqrt{2} v_2 \big|_{x_2=0, l_2}\end{aligned}$$

$$-r_2^{(2)} + r_6^{(2)} = \sqrt{2} v_2 \mid_{x_2=0, l_2}$$

б) на границе заданы напряжения

$$-r_2^{(1)} + r_6^{(1)} = \sqrt{2} \sigma_{11} \mid_{x_1=0, l_1}$$

$$-r_1^{(1)} + r_5^{(1)} = \gamma \sqrt{2} \sigma_{12} \mid_{x_1=0, l_1}$$

$$-r_2^{(2)} + r_6^{(2)} = \sqrt{2} \sigma_{22} \mid_{x_2=0, l_2}$$

$$-r_1^{(2)} + r_5^{(2)} = \gamma \sqrt{2} \sigma_{12} \mid_{x_2=0, l_2}$$

в) условия симметрии

$$-r_2^{(1)} + r_6^{(1)} = 0$$

$$r_1^{(1)} + r_5^{(1)} = 0, \quad x_1 = 0, l_1$$

$$r_2^{(2)} + r_6^{(2)} = 0$$

$$r_1^{(2)} + r_5^{(2)} = 0, \quad x_2 = 0, l_2.$$

В приложении 1 этой главы приведена система (20.26) в индексной форме и подробно описан алгоритм решения задачи в инвариантах.

Теперь исследуем устойчивость по начальным данным разностной схемы (20.23) или (20.24) при однородных краевых условиях и правой части. Запишем эту схему следующем виде

$$\bar{w}_t^n + \tilde{B}_1^+ \bar{w}_{x_1}^n + \tilde{B}_1^- \bar{w}_{x_1}^n = 0; \quad (20.27)$$

$$\bar{w}_t^{n+1/2} + \tilde{B}_2^+ \bar{w}_{x_2}^{n+1/2} + \tilde{B}_2^- \bar{w}_{x_2}^{n+1/2} + \tilde{C} \bar{w}^{n+1/2} = 0;$$

или

$$\bar{w}_t^n + A_1 \bar{w}^n = 0; \quad (20.28)$$

$$\bar{w}_t^{n+1/2} + (A_2 + \tilde{C}) \bar{w}^{n+1/2} = 0,$$

где

$$A_1 = \tilde{B}_1^+ D_{-1} + \tilde{B}_1^- D_1, \quad A_2 = \tilde{B}_2^+ D_{-2} + \tilde{B}_2^- D_2. \quad (20.29)$$

Для исследования схемы (20.28) применим теорию Самарского [78, 80]. Операторы A_1 и A_2 не являются самосопряженными, поэтому воспользуемся теоремой 4, ч. II, § 2 [80].

ТЕОРЕМА. Пусть в двухслойной разностной схеме

$$B y_t + A y = 0 \quad (20.30)$$

операторы A и B не зависят от n , $B = B^* > 0$ и оператор A^{-1} существует. Тогда условие

$$A^{-1} \geq \frac{\tau}{1+\rho} B^{-1} \quad (20.31)$$

достаточно для устойчивости с постоянной $\rho \geq 1$ схемы (20.30) в пространстве H_B . Это же условие необходимо для устойчивости в H_B с постоянной $\rho \leq 1$. Условие

$$A^{-1} \geq 0,5 \tau B^{-1} \quad (20.32)$$

необходимо и достаточно для устойчивости схемы (20.30) в H_B с постоянной $\rho = 1$.

Заметим, что при $B=E$ условие (20.32) эквивалентно неравенству

$$(Ax, x) \geq 0,5 \tau \|Ax\|^2. \quad (20.33)$$

В схеме (20.28) перейдем к инвариантам по формулам (20.25)

$$\begin{aligned} (\bar{r}^{(1)})_t^n + \bar{A}_1 (\bar{r}^{(1)})^n &= 0; \\ (\bar{r}^{(2)})^{n+1/2} + (\bar{A}_2 + \bar{C}) (\bar{r}^{(2)})^{n+1/2} &= 0, \end{aligned} \quad (20.34)$$

где

$$\bar{A}_1 = \Lambda^+ D_{-1} + \Lambda^- D_1, \bar{A}_2 = \Lambda^+ D_{-2} + \Lambda^- D_2, \bar{C} = Q_2 \tilde{C} Q_2'. \quad (20.35)$$

Введем пространство сеточных функций H_h со скалярным произведением

$$[\bar{u}, \bar{v}] = \sum_{r=1}^6 \sum_{i=10}^N \sum_{j=0}^M u_{ij}^k v_{ij}^k g(h_1, h_2), \quad (20.36)$$

$$\text{где } g(h_1, h_2) = \begin{cases} h_1 h_2, & \text{во внутренних узлах } \bar{\omega}_h \\ h_1 h_2 / 2, & \text{в узлах границы} \\ h_1 h_2 / 4, & \text{в угловых узлах} \end{cases}$$

Нам нужны будут также следующие скалярные произведения

$$\begin{aligned} (u, v) &= \sum_{j=0}^M \sum_{i=1}^N u_{ij} v_{ij} h_1 \alpha(h_2); \quad (u, v) = \sum_{j=0}^M \sum_{i=1}^{N-1} u_{ij} v_{ij} h_1 \alpha(h_2); \\ [u, v] &= \sum_{j=0}^M \sum_{i=1}^N u_{ij} v_{ij} h_1 \alpha(h_2); \quad <u, v> = \sum_{j=1}^M \sum_{i=0}^N u_{ij} v_{ij} h_2 \alpha(h_1); \\ [u, v] &= \sum_{j=0}^{M-1} \sum_{i=0}^N u_{ij} v_{ij} h_2 \alpha(h_1); \end{aligned} \quad (20.37)$$

$$\alpha(h_i) = \begin{cases} h_i, & \text{во внутренних узлах } \bar{\omega}_h \\ h_i / 2, & \text{на границе} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (\bar{u}, \bar{v})_1 &= (u_1, v_1) + (u_2, v_2) + (u_3, v_3) + (u_4, v_4) + (u_5, v_5) + (u_6, v_6); \\ (\bar{u}, \bar{v})_1^* &= [u_1, v_1] + [u_2, v_2] + [u_3, v_3] + [u_4, v_4] + (u_5, v_5) + (u_6, v_6); \\ (\bar{u}, \bar{v})_2 &= <u_1, v_1> + [u_2, v_2] + [u_3, v_3] + [u_4, v_4] + (u_5, v_5) + <u_6, v_6>; \\ (\bar{u}, \bar{v})_2^* &= [u_1, v_1] + <u_2, v_2> + [u_3, v_3] + \\ &+ [u_4, v_4] + <u_5, v_5> + <u_6, v_6>; \end{aligned} \quad (20.38)$$

Рассмотрим оператор \bar{A}_1 .

$$\begin{aligned} (\bar{A}_1 \bar{r}^{(1)}, \bar{r}^{(1)})_1 &= \frac{1}{\gamma} (r_{1, x_1}^{(1)}, r_1^{(1)}) + (r_{2, x_1}^{(1)}, r_2^{(1)}) - \\ &\frac{1}{\gamma} (r_{5, x_1}^{(1)}, r_5^{(1)}) - (r_{6, x_1}^{(1)}, r_6^{(1)}). \end{aligned}$$

Пользуясь разностными формулами суммирования по частям получим:

$$\begin{aligned} \left(\bar{A}_1 \bar{r}^{(1)}, \bar{r}^{(1)} \right)_1 = & \sum_{j=0}^M \left[\frac{1}{\gamma} \left(r_{1,N_j}^{(1)} \right)^2 - \frac{1}{\gamma} \left(r_{1,0j}^{(1)} \right)^2 + \left(r_{2,Nj}^{(1)} \right)^2 - \left(r_{2,0j}^{(1)} \right)^2 - \right. \\ & \left. - \frac{1}{\gamma} \left(r_{5,Nj}^{(1)} \right)^2 + \frac{1}{\gamma} \left(r_{5,0j}^{(1)} \right)^2 - \left(r_{6,Nj}^{(1)} \right)^2 + \left(r_{6,0j}^{(1)} \right)^2 \right] h_1 \alpha(h_2) + \\ & - \frac{1}{\gamma} \left[r_{1,x_1}^{(1)}, r_1^{(1)} \right] - \left[r_{2,x_1}^{(1)}, r_2^{(1)} \right] + \frac{1}{\gamma} \left(r_{5,\bar{x}_1}^{(1)}, r_5^{(1)} \right) + \left(r_{6,\bar{x}_1}^{(1)}, r_6^{(1)} \right). \end{aligned}$$

Из граничных условий в инвариантах имеем

$$\left(r_1^{(1)} \right)^2 = \left(r_5^{(1)} \right)^2, \quad \left(r_2^{(1)} \right)^2 = \left(r_6^{(1)} \right)^2. \quad (20.39)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \left(\bar{A}_1 \bar{r}, \bar{r}^{(1)} \right)_1 = & \frac{-1}{\gamma} \left[r_{1,x_1}^{(1)}, r_1^{(1)} \right] - \left[r_{2,x_1}^{(1)}, r_2^{(1)} \right] + \\ & + \frac{1}{\gamma} \left(r_{5,\bar{x}_1}^{(1)}, r_5^{(1)} \right) + \left(r_{6,\bar{x}_1}^{(1)}, r_6^{(1)} \right) = \left(\bar{A}_1 \bar{r}^{(1)}, \bar{r}^{(1)} \right)_1^*; \quad (20.40) \end{aligned}$$

$$\bar{A} = - \left(\Lambda^+ D_1 + \Lambda^- D_{-1} \right).$$

Далее рассмотрим выражение

$$\begin{aligned} \left(\bar{A}_1 \bar{r}^{(1)}, \bar{r}^{(1)} \right)_1 + \left(\bar{A}_1 \bar{r}^{(1)}, \bar{r}^{(1)} \right)_1^* = & \frac{1}{\gamma} \left(r_{1,x_1}^{(1)}, r_1^{(1)} \right) + \left(r_{2,x_1}^{(1)}, r_2^{(1)} \right) + \\ & + \frac{1}{\gamma} \left[-r_{5,x_1}^{(1)}, r_5^{(1)} \right] + \left[-r_{6,x_1}^{(1)}, r_6^{(1)} \right] + \frac{1}{\gamma} \left[-r_{1,\bar{x}_1}^{(1)}, r_1^{(1)} \right] + \left[-r_{2,\bar{x}_1}^{(1)}, r_2^{(1)} \right] + \\ & + \frac{1}{\gamma} \left(r_{5,\bar{x}_1}^{(1)}, r_5^{(1)} \right) + \left(r_{6,\bar{x}_1}^{(1)}, r_6^{(1)} \right) = \sum_{j=0}^M \left[\frac{1}{\gamma} h_1 \left(r_{1,\bar{x}_1}^{(1)}, r_1^{(1)} \right)_{Nj} - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{\gamma} h_1 \left(r_{1, \bar{x}_1}^{(1)}, r_{0j}^{(1)} \right) \Big] \alpha(h_2) + \frac{h_1}{\gamma} \left(-r_{1, \bar{x}_1}^{(1)}, r_1^{(1)} \right) + \\
& + \sum_{j=0}^M \left[h_1 \left(r_{2, \bar{x}_1}^{(1)}, r_{Nj}^{(1)} \right) - h_1 \left(r_{2, \bar{x}_1}^{(1)}, r_{0j}^{(1)} \right) \right] \alpha(h_2) + \\
& + h_1 \left(-r_{2, \bar{x}_1}^{(1)}, r_2^{(1)} \right) + \sum_{j=0}^M \left[\frac{1}{\gamma} h_1 \left(r_{5, \bar{x}_1}^{(1)}, r_{Nj}^{(1)} \right) - \right. \\
& \left. -\frac{1}{\gamma} h_1 \left(r_{5, \bar{x}_1}^{(1)}, r_{0j}^{(1)} \right) \right] \alpha(h_2) + \frac{h_1}{\gamma} \left(-r_{5, \bar{x}_1}^{(1)}, r_5^{(1)} \right) + \\
& + \sum_{j=0}^M \left[h_1 \left(r_{6, \bar{x}_1}^{(1)}, r_{Nj}^{(1)} \right) - h_1 \left(r_{6, \bar{x}_1}^{(1)}, r_{0j}^{(1)} \right) \right] \alpha(h_2) + h_1 \left(-r_{6, \bar{x}_1}^{(1)}, r_6^{(1)} \right).
\end{aligned}$$

Пользуясь первой разностной формулой Грина

$$-(r_{\bar{x}x}, r) = (r_{\bar{x}}, r_{\bar{x}}] - r r_{\bar{x}}|_N + r r_x|_0$$

и условием $\gamma > 1$ получаем:

$$\begin{aligned}
& \left(\bar{A}_1 \bar{r}^{(1)}, \bar{r}^{(1)} \right)_1 + \left(\bar{A}_1 \bar{r}^{(1)}, \bar{r}^{(1)} \right)_1^* = \\
& = \frac{h_1}{\gamma} \|r_{1, \bar{x}_1}^{(1)}\|^2 + h_1 \|r_{2, \bar{x}_1}^{(1)}\|^2 + \frac{h_1}{\gamma} \|r_{5, \bar{x}_1}^{(1)}\|^2 + h_1 \|r_{6, \bar{x}_1}^{(1)}\|^2 = \\
& = \frac{h_1}{\gamma} \|r_{1, \bar{x}_1}^{(1)}\|^2 + h_1 \|r_{2, \bar{x}_1}^{(1)}\|^2 + \frac{h_1}{\gamma} \|r_{5, \bar{x}_1}^{(1)}\|^2 + h_1 \|r_{6, \bar{x}_1}^{(1)}\|^2 \geq \frac{h_1}{\gamma^2} \|r_{1, \bar{x}_1}^{(1)}\|^2 + \\
& + h_1 \|r_{2, \bar{x}_1}^{(1)}\|^2 + \frac{h_1}{\gamma^2} \|r_{1, \bar{x}_1}^{(1)}\|^2 + h_1 \|r_{6, \bar{x}_1}^{(1)}\|^2 = h_1 \|\bar{A}_1 \bar{r}^{(1)}\|_1^2. \quad (20.41)
\end{aligned}$$

Из (20.40) и (20.41) получаем, что

$$\left(\bar{A}_1 \bar{r}^{(1)}, \bar{r}^{(1)} \right) \geq \frac{h_1}{2} \left\| \bar{A}_1 \bar{r}^{(1)} \right\|_1^2, \quad (20.42)$$

где скалярное произведение $(u, v)_1$ и норма $\|u\|_1$ определены согласно (20.38).

Условие устойчивости (20.33) можно переписать следующим образом

$$\left(\bar{A}_1 \bar{r}^{(1)}, \bar{r}^{(1)} \right)_1 - \frac{\tau}{2} \|\bar{A}_1 \bar{r}^{(1)}\|_1^2 \geq 0. \quad (20.43)$$

Применяя неравенство (20.42) получаем

$$\left(\bar{A}_1 \bar{r}^{(1)}, \bar{r}^{(1)} \right)_1 - \frac{\tau}{2} \|\bar{A}_1 \bar{r}^{(1)}\|_1^2 \geq \frac{h_1 - \tau}{2} \|\bar{A}_1 \bar{r}^{(1)}\|_1^2 \geq 0.$$

Следовательно, неравенство (20.43) будет выполнено при условии

$$h_1 - \tau \geq 0 \text{ или } \frac{\tau}{h_1} \leq 1. \quad (20.44)$$

Согласно сформулированной теореме условие (20.44) является достаточным для устойчивости уравнения

$$\left(\bar{r}_t^{(1)} \right)^n + \bar{A}_1 \left(\bar{r}^{(1)} \right)^n = 0$$

в пространстве L_2 (оператор $B = E$).

$$\left\| \bar{r}^{(1)} \right\|_1^{n+1/2} \leq \left\| \bar{r}^{(1)} \right\|_1^n. \quad (20.45)$$

Пользуясь граничными условиями (20.39), можно получить оценку (20.45) и в норме (20.37)

$$\left\| \bar{r}^{(1)} \right\|_1^{n+1/2} \leq \left\| \bar{r}^{(1)} \right\|_1^n. \quad (20.46)$$

Рассмотрим устойчивость второго уравнения схемы (20.34).

$$\left(\bar{r}^{(2)} \right)_t^{n+1/2} + \left(\bar{A}_2 + \bar{C} \right) \left(\bar{r}^{(2)} \right)^{n+1/2} = 0. \quad (20.47)$$

Условие устойчивости (20.33) в этом случае будет иметь следующий вид

$$\left((\bar{A}_2 + \bar{C}) \bar{r}^{(2)}, \bar{r}^{(2)} \right)_2 \geq \frac{\tau}{2} \left\| (\bar{A}_2 + \bar{C}) \bar{r}^{(2)} \right\|_2^2 \quad (20.48)$$

где скалярное произведение $(u, v)_2$ определено в (20.38).

Оценим член $\left\| (\bar{A}_2 + \bar{C}) \bar{r}^{(2)} \right\|_2^2$.

$$\begin{aligned} \left\| (\bar{A}_2 + \bar{C}) \bar{r}^{(2)} \right\|_2^2 &= \left\| \bar{A}_2 \bar{r}^{(2)} \right\|_2^2 + \left\| \bar{C} \bar{r}^{(2)} \right\|_2^2 + \\ &+ 2 \left(\bar{A}_2 \bar{r}^{(2)}, \bar{C} \bar{r}^{(2)} \right)_2. \end{aligned} \quad (20.49)$$

Первый член в правой части равенства (20.49) оценивается также, как аналогичное выражение для инварианта $\bar{r}^{(1)}$ (формула (20.42)):

$$\left\| \bar{A}_2 \bar{r}^{(2)} \right\|_2^2 \leq \frac{2}{h_2} \left(\bar{A}_2 \bar{r}^{(2)}, \bar{r}^{(2)} \right)_2. \quad (20.50)$$

Если обозначить максимальное собственное значение матрицы \bar{C} через β , то нетрудно получить оценку второго члена в (20.49).

$$\left\| \bar{C} \bar{r}^{(2)} \right\|_2^2 \leq \beta \left(\bar{C} \bar{r}^{(2)}, \bar{r}^{(2)} \right)_2. \quad (20.51)$$

Матрица неотрицательна и максимальное собственное значение \bar{C} равно $\beta = d / \Theta$ (формула (20.15)).

Для оценки третьего члена в (20.49) применим неравенства (20.50), (20.51) и ε -неравенство

$$\begin{aligned} 2ab &\leq \frac{1}{\varepsilon} a^2 + \varepsilon b^2, \quad \varepsilon > 0; \\ 2 \left(\bar{A}_2 \bar{r}^{(2)}, \bar{C} \bar{r}^{(2)} \right)_2 &\leq \frac{1}{\varepsilon} \left\| \bar{A}_2 \bar{r}^{(2)} \right\|_2^2 + \varepsilon \left\| \bar{C} \bar{r}^{(2)} \right\|_2^2 \leq \\ &\leq \frac{2}{\varepsilon h_2} \left(\bar{A}_2 \bar{r}^{(2)}, \bar{r}^{(2)} \right)_2 + \beta \varepsilon \left(\bar{C} \bar{r}^{(2)}, \bar{r}^{(2)} \right)_2. \end{aligned} \quad (20.52)$$

Пользуясь неравенствами (20.50), (20.51) и (20.52) из (20.49) получаем

$$\begin{aligned} \left\| \left(\bar{A}_2 + \bar{C} \right) \bar{r}^{(2)} \right\|_2^2 &\leq \frac{2}{h_2} \left(\bar{A}_2 \bar{r}^{(2)}, \bar{r}^{(2)} \right)_2 + \beta \left(\bar{C} \bar{r}^{(2)}, \bar{r}^{(2)} \right)_2 + \\ &+ \frac{2}{\varepsilon h_2} \left(\bar{A}_2 \bar{r}^{(2)}, \bar{r}^{(2)} \right)_2 + \beta \varepsilon \left(\bar{C} \bar{r}^{(2)}, \bar{r}^{(2)} \right)_2 = \frac{2(1+\varepsilon)}{\varepsilon h_2} \left(\bar{A}_2 \bar{r}^{(2)}, \bar{r}^{(2)} \right)_2 + \\ &+ \beta(1+\varepsilon) \left(\bar{C} \bar{r}^{(2)}, \bar{r}^{(2)} \right)_2. \end{aligned}$$

Выберем ε из условия равенства коэффициентов

$$\frac{2(1+\varepsilon)}{\varepsilon h_2} = \beta(1+\varepsilon), \quad \varepsilon = \frac{2}{\beta h_2}. \quad (20.53)$$

Тогда получаем

$$\left\| \left(\bar{A}_2 + \bar{C} \right) \bar{r}^{(2)} \right\|_2^2 \leq \left(\beta + \frac{2}{h_2} \right) \left(\left(\bar{A}_2 + \bar{C} \right) \bar{r}^{(2)}, \bar{r}^{(2)} \right)_2. \quad (20.54)$$

Подставляя неравенство (20.54) в условие устойчивости (20.48) имеем

$$\begin{aligned} \left(\left(\bar{A}_2 + \bar{C} \right) \bar{r}^{(2)}, \bar{r}^{(2)} \right)_2 - \frac{\tau}{2} \left\| \left(\bar{A}_2 + \bar{C} \right) \bar{r}^{(2)} \right\|_2^2 &\geq \\ = \left(\frac{1}{\beta} + \frac{2}{h_2} - \frac{\tau}{2} \right) \left\| \left(\bar{A}_2 + \bar{C} \right) \bar{r}^{(2)} \right\|_2^2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Следовательно условие

$$\tau \leq \frac{2h_2}{2 + \beta h_2} \quad (20.55)$$

является достаточным для устойчивости уравнения (20.47) в пространстве L_2

$$\left\| \bar{r}^{(2)} \right\|_2^{n+1} \leq \left\| \bar{r}^{(2)} \right\|_2^{n+1/2}. \quad (20.56)$$

Пользуясь граничными условиями для инварианта $\bar{r}^{(2)}$ можно получить оценку (20.56) в норме (20.36)

$$\left[\left[\bar{r}^{(2)} \right] \right]^{n+1} \leq \left[\left[\bar{r}^{(2)} \right] \right]^{n+1/2}. \quad (20.57)$$

Учитывая, что ортогональное преобразование сохраняет норму, и при условии

$$\tau \leq \min \left(h_1, \frac{2h_2}{2 + \beta h_2} \right). \quad (20.58)$$

получаем

$$\begin{aligned} \left[\left[\bar{w} \right] \right]^{n+1} &= \left[\left[\bar{r}^{(2)} \right] \right]^{n+1} \leq \left[\left[\bar{r}^{(2)} \right] \right]^{n+1/2} = \left[\left[\bar{r}^{(1)} \right] \right]^{n+1/2} \leq \\ &\leq \left[\left[\bar{r}^{(1)} \right] \right]^n = \left[\left[\bar{w} \right] \right]^n, \text{ т.е. } \left[\left[\bar{w} \right] \right]^{n+1} \leq \left[\left[\bar{w} \right] \right]^n. \end{aligned}$$

Тогда

$$\left[\left[\bar{w} \right] \right]^{n+1} \leq \left[\left[\bar{w} \right] \right]^n \leq \left[\left[\bar{w} \right] \right]^{n-1} \leq \dots \leq \left[\left[\bar{w} \right] \right]^0.$$

Таким образом, доказана следующая

ТЕОРЕМА 20.2. Если выполнено условие (20.58), то разностная схема (20.24) устойчива по начальным данным в норме (20.36).

В Приложении 1 этой главы приведено решение с помощью разработанного алгоритма задачи об ударе клиновидным тупым штампом по одной из сторон вязкоупругой плиты. Проведено также численное исследование зависимости скорости диссипации полной механической энергии вязкоупругого тела от времени релаксации или коэффициента вязкости. Результаты, приведенные в Приложении 1, показывают, что имеется сильная зависимость скорости диссипации от времени релаксации θ и наиболее быстрое уменьшение механической энергии достигается при некотором конечном значении θ . Теоретическому исследованию и обоснованию этого факта посвящены следующие параграфы этой главы.

Приложение 1

Приведем подробный алгоритм решения задачи теории вязкоупругости, разработанный в параграфе 20. Перепишем формулу (20.26)

$$\begin{aligned} \left(\bar{r}^{(1)}\right)^n &= Q_1 \bar{w}^n, \left(\bar{r}^{(1)}\right)^{n+1/2} = \left[E - \tau \left(\Lambda^+ D_{-1} + \Lambda^- D_1 \right) \right] \left(\bar{r}^{(1)}\right)^n, \\ \left(\bar{r}^{(2)}\right)^{n+1/2} &= Q_2 Q_1^T \left(\bar{r}^{(1)}\right)^{n+1/2}, \end{aligned} \quad (\text{П.1})$$

$$\left(\bar{r}^{(2)}\right)^{n+1} = \left[E - \tau \left(\Lambda^+ D_{-2} + \Lambda^- D_2 + \bar{C} \right) \right] \left(\bar{r}^{(2)}\right)^{n+1/2} - \tau Q_2 \bar{F}^n,$$

$$\bar{w}^{n+1} = Q_2' \left(\bar{r}^{(2)}\right)^{n+1}.$$

Матрицы Q_1 , Q_2 определены в параграфе 20, а Λ^+ , Λ^- и \bar{C} имеют следующий вид.

$$\Lambda^+ = \begin{pmatrix} 1/\gamma & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \Lambda^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1/\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\bar{C} = \begin{pmatrix} g_1 & 0 & 0 & 0 & g_1 & 0 \\ 0 & g_2 & g_3 & 0 & 0 & -g_2 \\ 0 & g_3 & g_4 & 0 & 0 & -g_3 \\ 0 & 0 & 0 & 2g_1 & 0 & 0 \\ g_1 & 0 & 0 & 0 & g_1 & 0 \\ 0 & -g_2 & -g_3 & 0 & 0 & g_2 \end{pmatrix},$$

$$\alpha = \frac{d}{\Theta \gamma^2}, \quad g_1 = \frac{\alpha}{2}, \quad g_2 = \frac{2\alpha}{3\gamma^2},$$

$$g_3 = \frac{\alpha}{3\gamma^2} \sqrt{2(3\gamma^2 - 4)}, \quad g_4 = \frac{\alpha}{3\gamma^2} (3\gamma^2 - 4).$$

Решение определено на сетке

$$\overline{\omega}_h = \{(x_i, y_k), x_i = ih_1, i=0,1,\dots,N, y_k = kh_2, k=0,1,\dots,M\}.$$

Обозначим

$$\alpha_1 = \frac{\tau}{h_1}, \quad \alpha_2 = \frac{\tau}{h_2}, \quad \beta_1 = \frac{\alpha_1}{\gamma}, \quad \beta_2 = \frac{\alpha_2}{\gamma}.$$

Тогда в индексной форме система (П.1) принимает следующий вид

$$\left(\bar{r}^{(1)}\right)_{ij}^n = Q'_1 \bar{w}_{ij}^n, \quad i=\overline{0,N}, \quad j=\overline{0,M}. \quad (\text{П.2})$$

$$\left(r_1^{(1)}\right)_{ij}^{n+\frac{1}{2}} = (1-\beta_1) \left(r_1^{(1)}\right)_{ij}^n + \beta_1 \left(r_1^{(1)}\right)_{i-1,j}^n,$$

$$\left(r_2^{(1)}\right)_{ij}^{n+\frac{1}{2}} = (1-\alpha_1) \left(r_2^{(1)}\right)_{ij}^n + \alpha_1 \left(r_2^{(1)}\right)_{i-1,j}^n, \quad i=\overline{1,N}, \quad j=\overline{0,M}$$

$$\left(r_3^{(1)}\right)_{ij}^{n+\frac{1}{2}} = \left(r_3^{(1)}\right)_{ij}^n,$$

$$\left(r_4^{(1)}\right)_{ij} = \left(r_4^{(1)}\right)_{ij}^n, \quad i=\overline{0,N}, \quad j=\overline{0,M} \quad (\text{П.3})$$

$$\left(r_5^{(1)}\right)_{ij}^{n+\frac{1}{2}} = (1-\beta_1) \left(r_5^{(1)}\right)_{ij}^n + \beta_1 \left(r_5^{(1)}\right)_{i+1,j}^n,$$

$$\left(r_6^{(1)}\right)_{ij}^{n+\frac{1}{2}} = (1-\alpha_1)\left(r_6^{(1)}\right)_{ij}^n + \alpha_1\left(r_6^{(1)}\right)_{i+1,j}^n, i=\overline{0, N-1}, j=\overline{0, M}.$$

Граничные условия в инвариантах, приведенные в параграфе 20, перепишем в виде (для определенности полагаем, что на всех границах прямоугольника заданы напряжения)

$$\begin{aligned} \left(r_1^{(1)}\right)_{oj}^{n+\frac{1}{2}} &= -\left(r_5^{(1)}\right)_{oj}^{n+\frac{1}{2}} + \gamma \sqrt{2} \sigma_{12,oj}, \\ \left(r_2^{(1)}\right)_{ij} &= -\left(r_6^{(1)}\right)_{oj}^{n+\frac{1}{2}} + \sqrt{2} \sigma_{11,ij}, j=\overline{0, M}. \end{aligned} \quad (\text{П.4})$$

$$\left(r_5^{(1)}\right)_{Nj}^{n+\frac{1}{2}} = -\left(r_1^{(1)}\right)_{Nj}^{n+\frac{1}{2}} + \gamma \sqrt{2} \sigma_{12,Nj}, \quad (\text{П.5})$$

$$\left(r_6^{(1)}\right)_{Nj}^{n+\frac{1}{2}} = -\left(r_2^{(1)}\right)_{Nj}^{n+\frac{1}{2}} + \sqrt{2} \sigma_{11,Nj}, j=\overline{0, M}.$$

$$\left(\bar{r}^{(2)}\right)_{ij}^{n+\frac{1}{2}} = Q'_2 Q_1 \left(\bar{r}^{(1)}\right)_{ij}^{n+\frac{1}{2}}, i=\overline{0, N}, j=\overline{0, M}. \quad (\text{П.6})$$

$$\begin{aligned} \left(r_1^{(2)}\right)_{ij}^{n+1} &= (1-\beta_2 - \tau g_1) \left(r_1^{(2)}\right)_{ij}^{n+\frac{1}{2}} + \beta_2 \left(r_1^{(2)}\right)_{i,j-1}^{n+\frac{1}{2}} - \\ &\quad - \tau g_1 \left(r_5^{(2)}\right)_{ij}^{n+\frac{1}{2}} - \tau F_{1,ij}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(r_2^{(2)}\right)_{ij}^{n+1} &= (1-\alpha_2 - \tau g_2) \left(r_2^{(2)}\right)_{ij}^{n+\frac{1}{2}} + \alpha_2 \left(r_2^{(2)}\right)_{i,j-1}^{n+\frac{1}{2}} - \\ &\quad - \tau g_3 \left(r_3^{(2)}\right)_{ij}^{n+\frac{1}{2}} + \tau g_2 \left(r_6^{(2)}\right)_{ij}^{n+\frac{1}{2}} - \tau F_{2,ij}, i=\overline{0, N}, j=\overline{1, M}; \end{aligned}$$

$$\left(r_3^{(1)}\right)_{ij}^{n+1} = (1-\tau g_4) \left(r_3^{(2)}\right)_{ij}^{n+\frac{1}{2}} -$$

$$-\tau g_3 \left(r_2^{(2)} \right)_{ij}^{n+\frac{1}{2}} + \tau g_3 \left(r_6^{(2)} \right)_{ij}^{n+\frac{1}{2}} - \tau F_{3,ij} , \quad (\text{П.7})$$

$$\left(r_4^{(2)} \right)_{ij}^{n+1} = (1 - 2\tau g_1) \left(r_4^{(2)} \right)_{ij}^{n+\frac{1}{2}} - \tau F_{4,ij} , \quad i = \overline{0, N} , \quad j = \overline{0, M} ;$$

$$\left(r_5^{(2)} \right)_{ij}^{n+1} = (1 - \beta_2 - \tau g_1) \left(r_5^{(2)} \right)_{ij}^{n+\frac{1}{2}} + \beta_2 \left(r_5^{(2)} \right)_{i,j+1}^{n+\frac{1}{2}} -$$

$$-\tau g_1 \left(r_1^{(2)} \right)_{ij}^{n+\frac{1}{2}} - \tau F_{5,ij} ,$$

$$\left(r_6^{(2)} \right)_{ij}^{n+1} = (1 - \alpha_2 - \tau g_2) \left(r_6^{(2)} \right)_{ij}^{n+\frac{1}{2}} + \alpha_2 \left(r_6^{(2)} \right)_{i,j+1}^{n+\frac{1}{2}} +$$

$$+\tau g_2 \left(r_2^{(2)} \right)_{ij}^{n+\frac{1}{2}} + \tau g_3 \left(r_3^{(2)} \right)_{ij}^{n+\frac{1}{2}} - \tau F_{6,ij} , \quad i = \overline{0, N} , \quad j = \overline{0, M-1} .$$

$$\left(r_1^{(2)} \right)_{i0}^{n+1} = - \left(r_5^{(2)} \right)_{i0}^{n+1} + \gamma \sqrt{2} \sigma_{12,i0} , \quad (\text{П.8})$$

$$\left(r_2^{(2)} \right)_{i0}^{n+1} = \left(r_6^{(2)} \right)_{i0}^{n+1} - \sqrt{2} \sigma_{22,i0} , \quad i = \overline{0, N} .$$

$$\left(r_5^{(2)} \right)_{iM}^{k+1} = - \left(r_1^{(2)} \right)_{iM}^{n+1} + \gamma \sqrt{2} \sigma_{12,im} ,$$

$$\left(r_6^{(2)} \right)_{iM} = \left(r_2^{(2)} \right)_{iM}^{n+1} + \sqrt{2} \sigma_{22,iM} , \quad i = \overline{0, N} . \quad (\text{П.9})$$

$$\bar{w}_{ij}^{n+1} = Q'_2 \left(\bar{r}^{(2)} \right)_{ij}^{n+1} , \quad i = \overline{0, N} , \quad j = \overline{0, M} . \quad (\text{П.10})$$

Опишем алгоритм решения задачи в инвариантах. Пусть на момент времени $t = n\tau$ во всей сеточной области $\bar{\omega}_h$ известен вектор \bar{w}^n . Зная матрицу по формуле (П.2) находим $\left(\bar{r}^{(1)} \right)^n$. Из системы (П.3) можно вычислить не только все компоненты $\left(\bar{r}^{(1)} \right)^{n+1/2}$ во

внутренних точках $\bar{\omega}_h$, но и величины $\left(\bar{r}_1^{(1)}\right)^{n+1/2}$ и $\left(\bar{r}_2^{(1)}\right)^{n+1/2}$ на границе $x_1=l_1$, а $\left(\bar{r}_5^{(1)}\right)^{n+1/2}$ и $\left(\bar{r}_6^{(1)}\right)^{n+1/2}$ на границе $x_1=0$. Условия (П.4), (П.5) дают возможность доопределить нужные компоненты вектора $\left(\bar{r}^{(1)}\right)^{n+1/2}$ во всех точках области $\bar{\omega}_h$. Зная $\left(\bar{r}^{(1)}\right)^{n+1/2}$ по формулам (П.6) найдем $\left(\bar{r}^{(2)}\right)^{n+1/2}$. Затем, используя систему (П.7) и условия (П.8), (П.9), нетрудно определить $\left(\bar{r}^{(2)}\right)^{n+1}$, а следовательно и \bar{w}^{n+1} (П.10) во всех точках области $\bar{\omega}_h$. Заметим, что вычисление \bar{w}^{n+1} не является необходимым для продолжения счета, по $\left(\bar{r}^{(2)}\right)^{n+1}$ можно сразу найти $\left(\bar{r}^{(1)}\right)^{n+1}$

$$\left(\bar{r}^{(1)}\right)^{n+1} = Q_1 Q_2' \left(\bar{r}^{(2)}\right)^{n+1}.$$

После вычисления \bar{w}^{n+1} или $\left(\bar{r}^{(1)}\right)^{n+1}$ во всей области описанный алгоритм повторяется.

Разработанный алгоритм реализован в виде программы, составленной на алгоритмическом языке FORTRAN. По программе проведены расчеты на компьютере для решения динамической плоской задачи об ударе клиновидным тупым штампом с постоянной скоростью по одной из сторон вязкоупругой плиты. Полученные результаты оказались очень близки к решению подобной задачи по схеме С.К.Годунова, приведенной в работах [58, 73]. Это говорит о достоверности полученного решения и о правильности разработанного алгоритма.

До начала воздействия плита конечной толщины находится в состоянии покоя, поэтому начальные условия полагаются нулевыми. В момент времени $t=0$ жесткий клиновидный штамп с постоянной скоростью V_0 входит в соприкосновение с плитой (рис. П1). Так как раствор клина близок к 180° , то площадь контакта быстро увеличивается со скоростью V_A . В предположениях плоской деформации задача становится двумерной и решается в прямоугольнике $D = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$. Граничные условия за-

даются следующим образом. На верхней стороне плиты $y=0$ при отсутствии сил трения между соприкасающимися поверхностями задаются смешанные условия

$$v_2 = V_0, \sigma_{12} = 0 \text{ при } 0 \leq x \leq V_A t,$$

$$\sigma_{22} = 0, \sigma_{12} = 0 \text{ при } x > V_A t.$$

Противоположная сторона плиты свободна от напряжений

$$\sigma_{22} = 0, \sigma_{12} = 0 \text{ при } y = 1.$$

Из рис. П1 видно, что задача симметрична относительно прямой $x=0$, поэтому

$$v_1 = 0, \sigma_{12} = 0 \text{ при } x = 0.$$

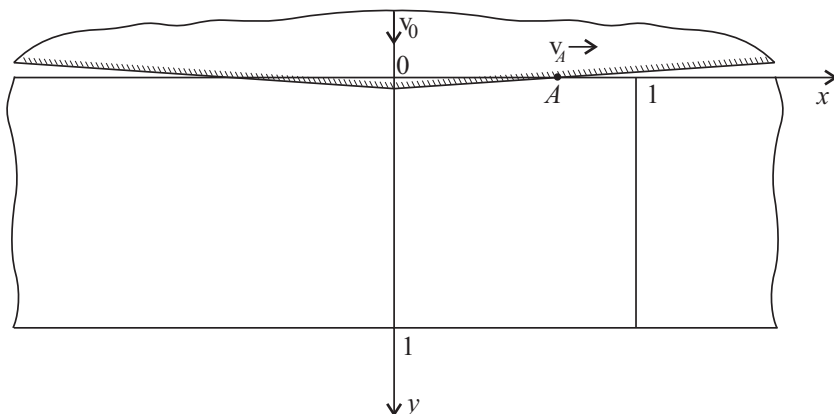


Рис. П1

Так как область интегрирования в горизонтальном направлении мы ограничиваем контуром $x = 1$, то задание краевых условий при $x = 1$ требует особого рассмотрения. В [58, 73] предложен численный алгоритм моделирования прохождения упругих волн без отражения через ограничительный контур. Однако мы ограничимся решением задачи до таких моментов времени, пока упругие возмущения не достигли правой границы. Тогда при $x=1$ можно, например, положить

$$\sigma_{11} = 0, \sigma_{12} = 0.$$

Для расчетов были выбраны следующие значения для безразмерных параметров задачи

$$\gamma = 2.04, \quad v_0 = 1, \quad h_i = 0.025, \quad \frac{\tau}{h_i} = 0.666, \quad i = 1, 2.$$

Для исследования поведения решения в зависимости от времени релаксации Θ или коэффициента вязкости $\eta = \Theta \mu$ проведены расчеты при различных значениях Θ . Безразмерный коэффициент $\alpha = d / (\Theta \gamma^2)$ (d определен в формулах (20.15)) принимал значения 0; 0.4; 1; 2; 10; 20 (на рис. П2 им соответствуют цифры 1, 2, ..., 6). Отметим, что при $\alpha = 0$ вязкие члены обращаются в нуль и мы получаем решение плоской динамической теории упругости.

На рис. П2а приведены профили скоростей v_1 (пунктирная линия) и v_2 (сплошная) в сечении $y = 0$ на момент времени $t = 0,5$. На рис. П2б приведены профили напряжений σ_{11} (сплошная линия) и σ_{22} (пунктирная) в сечении $x = 0$ на момент времени $t = 0,5$. С ростом α максимальные значения напряжений уменьшаются и раз-

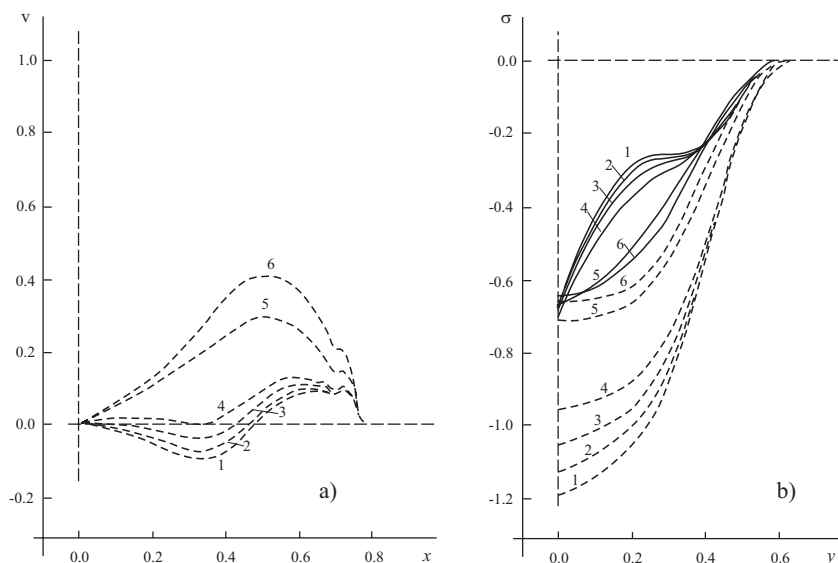


Рис. П2

ность $\sigma_{11} - \sigma_{22}$ стремится к нулю. Это связано с тем, что с уменьшением времени релаксации девиаторная составляющая тензора напряжений быстро убывает до нуля и в теле формируется состояние гидростатического давления, т.е. тензор напряжений имеет шаровой вид.

Приведем результаты численного исследования поведения полной механической энергии вязкоупругого тела в зависимости от времени релаксации. Описанная задача видоизменяется следующим образом. В начальный момент времени с жестким неподвижным клиновидным штампом сталкивается плита, летящая с постоянной скоростью V_0 . В этом случае начальные условия остаются нулевыми за исключением скорости v_2 , которая во всем теле при $t=0$ равняется $-V_0$. Граничные условия имеют прежнюю структуру, но становятся однородными. При такой постановке задачи начальная кинетическая энергия плиты в упругом случае должна сохраняться с течением времени в виде механической энергии, в вязкоупругом теле она будет диссипироваться с неко-

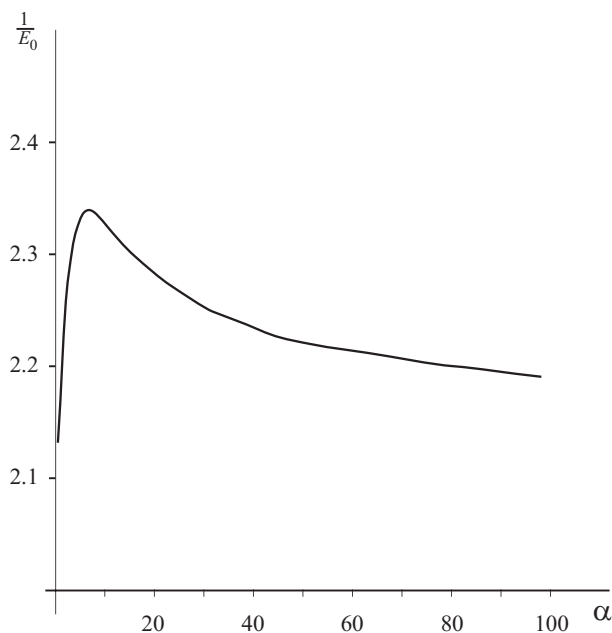


Рис. ПЗ

торой скоростью, зависящей от коэффициента вязкости. В таблице 1 и на рис. ПЗ приведены результаты расчетов полной механической E_0 , кинетической E_1 и потенциальной E_2 энергии на момент времени $t = 0,5$. В начальный момент времени

$$E_1=0,5, E_2=0, E_0=E_1+E_2=0,5.$$

Таблица 1.

α	θ, c	$E_0, \text{Н}\cdot\text{м}$	$E_1, \text{Н}\cdot\text{м}$	$E_2, \text{Н}\cdot\text{м}$	$1/E_0$
0		0.4750	0.3847	0.0903	2.105
0.1	1.58.10-3	0.4717	0.3853	0.0865	2.120
0.5	3.16.10-4	0.4627	0.3871	0.0757	0.161
1.0	1.58.10-4	0.4536	0.3890	0.0646	2.204
2.0	7.91.10-5	0.4410	0.3929	0.0482	2.267
3.0	5.27.10-5	0.4336	0.3966	0.0370	2.306
40.	3.69.10-5	0.4294	0.4002	0.0292	2.329
5.0	3.16.10-5	0.4271	0.4036	0.0236	2.341
6.0	2.64.10-5	0.4261	0.4067	0.0194	2.347
7.0	2.26.10-5	0.4259	0.4096	0.0163	2.348
8.0	1.98.10-5	0.4261	0.4122	0.0139	2.347
9.0	1.76.10-5	0.4266	0.4147	0.0120	2.344
10.0	1.58.10-5	0.4274	0.4169	0.0105	2.340
20.0	7.91.10-5	0.4356	0.4315	0.0040	2.296
25.0	6.33.10-6	0.4389	0.4360	0.0029	2.278
30.0	5.27.10-6	0.4419	0.4397	0.0022	2.263
35.0	4.52.10-6	0.4441	0.4424	0.0018	2.252
40.0	3.96.10-6	0.4455	0.4441	0.0014	2.245
50.0	3.16.10-6	0.4484	0.4474	0.0010	2.230
60.0	2.64.10-6	0.4508	0.4501	0.0007	2.218

α	θ, c	$E_0, \text{Н}\cdot\text{м}$	$E_1, \text{Н}\cdot\text{м}$	$E_2, \text{Н}\cdot\text{м}$	$1/E_0$
70.0	$2.26 \cdot 10^{-6}$	0.4523	0.4517	0.0006	2.211
80.0	$1.98 \cdot 10^{-6}$	0.4537	0.4532	0.0005	2.204
90.0	$1.76 \cdot 10^{-6}$	0.4549	0.4545	0.0004	2.198
100.0	$1.58 \cdot 10^{-6}$	0.4557	0.4554	0.0003	2.194

Величина $1/E_0$ характеризует скорость убывания энергии и приведена в таблице 1 и на рис. ПЗ. Видно, что диссипация энергии сильно зависит от вязкости в теле и максимальная скорость диссипации достигается при $\theta = 226 \cdot 10^{-5}$ сек. ($\alpha = 7$).