

LEHRSTUHL FÜR STATISTIK UND ÖKONOMETRIE
ÜBUNG ZUR DATENANALYSE

Aufgabenserie 1: Rechnen mit Vektoren und Matrizen

Aufgabe 1

Gegeben seien folgende Vektoren:

$$\boldsymbol{\iota} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

1. Berechnen Sie $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$ und $\boldsymbol{\iota} - 2\boldsymbol{y}$.
2. Berechnen Sie $\boldsymbol{y} * \boldsymbol{\iota}$, $\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y}$ und $\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}'$.
Hinweis: HIER steht $*$ für eine elementweise Multiplikation.
3. Stellen Sie $\sum_{i=1}^3 (x_i - y_i)^2$ mit Vektoren dar.

Gegeben seien auch die folgenden Matrizen:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 0.5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{E} = (\boldsymbol{x} \quad \boldsymbol{y}).$$

4. Berechnen Sie $\boldsymbol{A}' + 2\boldsymbol{B}'$.
5. Berechnen Sie $\boldsymbol{E}\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{\iota}'\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{D}\boldsymbol{\iota}$ und $\boldsymbol{\iota}'\boldsymbol{D}\boldsymbol{\iota}$.
6. Berechnen Sie die Determinanten von \boldsymbol{A} , \boldsymbol{B} , \boldsymbol{C} und \boldsymbol{D} .
7. Berechnen Sie \boldsymbol{A}^{-1} , \boldsymbol{C}^{-1} und \boldsymbol{D}^{-1} .
8. Ermitteln Sie den Rang von \boldsymbol{D} .
9. Zeigen Sie, dass \boldsymbol{B} eine idempotente Matrix ist (dass also gilt: $\boldsymbol{B}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}$).
10. Zeigen Sie, dass \boldsymbol{C} eine orthogonale Matrix ist (dass also gilt: $\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}' = \boldsymbol{C}'\boldsymbol{C} = \boldsymbol{I}_2$).

Aufgabe 2

Gegeben seien die beiden Matrizen

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

1. Bestimmen Sie jeweils die Eigenwerte und Eigenvektoren.
2. Sind \boldsymbol{A} und/oder \boldsymbol{B} singulär?
3. Ist die Matrix \boldsymbol{B} positiv definit?