Lehrstuhl für Statistik und Ökonometrie
Übung zur Datenanalyse

Aufgabenserie 2: Momente und Hypothesentests

Aufgabe 3

1. Zeigen Sie, dass allgemein für die Kovarianz zweier Zufallsvariablen Z_i und Z_j gilt:

$$Cov(Z_i, Z_j) = E(Z_i Z_j) - E(Z_i) \cdot E(Z_j)$$

Sie betrachten einen dreidimensionalen Zufallsvektor $\boldsymbol{z} = (Z_1\ Z_2\ Z_3)'$. Für die drei Zufallsvariablen Z_1, Z_2, Z_3 gelte $E(\boldsymbol{z}) = (1\ 2\ 0)'$ sowie $Var(Z_3) = 23$ bzw. $Cov(Z_i, Z_j) = 2i \cdot j$, außer für $i = 3$, $j = 3$.

2. Stellen Sie die Varianz-Kovarianz-Matrix von $\boldsymbol{z}$ auf.

3. Bestimmen Sie $E(3Z_1 + 2Z_2 + Z_3)$ und $Var(\sum_{i=1}^{3} Z_i)$.

4. Bestimmen Sie den Korrelationskoeffizienten $\rho_{Z_1 Z_2}$ von Z_1 und Z_2.

Aufgabe 4

Die Zufallsvariable T kann als Prüfgröße eines Hypothesentests mit Nullhypothese H_0 und Alternativhypothese H_1 verwendet werden. Dabei ist bekannt, dass

$$T \overset{H_0}{\sim} \chi^2(3)$$

und dass große Realisationen t der Prüfgröße tendenziell gegen H_0 sprechen. Zudem steht Ihnen folgender `R`-Output zur Verfügung:

```
> qchisq(0.95,3)
[1] 7.814728
> pchisq(8,3)
[1] 0.9539883
```

1. Stellen Sie den kritischen Bereich (Ablehnungsbereich) des Testes für eine Irrtumswahrscheinlichkeit α von 5% auf, und skizzieren Sie ihn in einer geeigneten Grafik.

Bei Erhebung einer einfachen Zufallsstichprobe erhalten Sie die realisierte Prüfgröße $t = 8$.

2. Treffen Sie bei $\alpha = 0.05$ eine Testentscheidung anhand der Stichprobe.

3. Bestätigen Sie die Testentscheidung anhand des p-Werts, und zeichnen Sie diesen in die Skizze aus Teilaufgabe 1 ein.

Aufgabe 5

Die Zufallsvariable X bezeichne die Eigenkapitalrentabilität eines zufällig ausgewählten Unternehmens im Produktionssektor. Es wird angenommen, dass X in der Grundgesamtheit normalverteilt ist mit Erwartungswert μ_X und Varianz σ_X^2. Es wird eine einfache Zufallsstichprobe vom Umfang $n = 10$ gezogen, d.h. die Eigenkapitalrentabilitäten $X_1, ..., X_{10}$ von zehn zufällig ausgewählten Produktionsunternehmen werden beobachtet.

1. Wie sind das Stichprobenmittel $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ und die Zufallsvariable $\sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - \mu_X}{\sigma_X}$ verteilt?

Zudem ist bekannt, dass

$$\sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - \mu_X}{S_{X,n}} \sim t(n-1),$$

wobei $S_{X,n}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2$ die Stichprobenvarianz bezeichnet.

2. Die Stichprobe ergab ein Stichprobenmittel von $\bar{x}_{10} = 0.1225$ und eine Stichprobenvarianz von $s_{x,10}^2 = 0.0499$. Zudem steht Ihnen folgender R-Output zur Verfügung:

```
> qnorm(0.9)
[1] 1.281552
> qnorm(0.95)
[1] 1.644854
> qt(0.9,9)
[1] 1.383029
> qt(0.95,9)
[1] 1.833113
```

   Testen Sie mithilfe einer geeigneten Prüfgröße

$$H_0: \ \mu_X = \mu_0 = 0 \quad \text{gegen} \quad H_1: \ \mu_X \neq \mu_0 = 0$$

   bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit α von 10%.