数学建模技巧分享

数学建模技巧

<u>非线性模型线性化方法</u>：

- 直接替换法
- 函数变换法
- 级数展开法

<u>大M法</u>：

- Either-Or Constraints
- If-Then Constraints

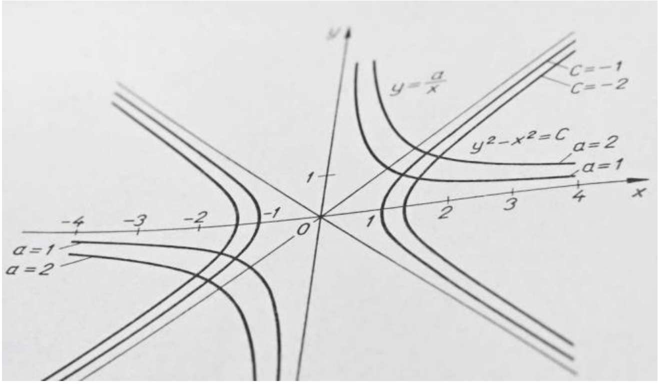
<u>分段线性化</u>：

- Piecewise Linear Functions
- Functions of a Special Form

<u>约束转目标</u>：

- Lagrangian Relaxation

直接替换法

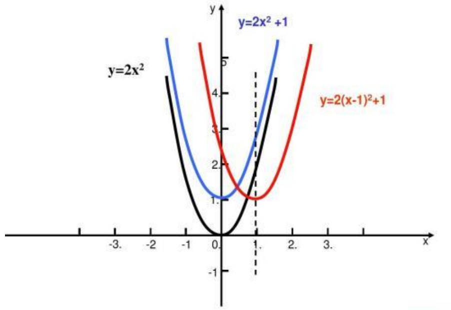


倒数(双曲线)形式

$$\frac{1}{y}=\frac{b}{x}+a$$

变量替换

$$Y=bX+a$$

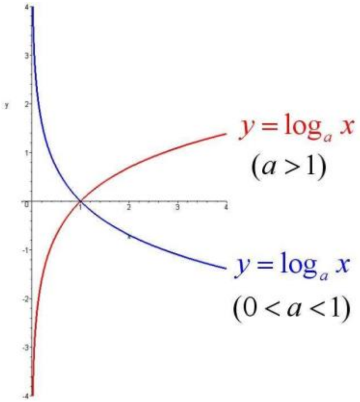


多项式形式

$$y=bx^2+cx+a$$

变量替换

$$y=bX+cx+a$$



对数形式

$$y=b\ln x+a$$

变量替换

$$y=bX+a$$

函数变换法

幂函数形式

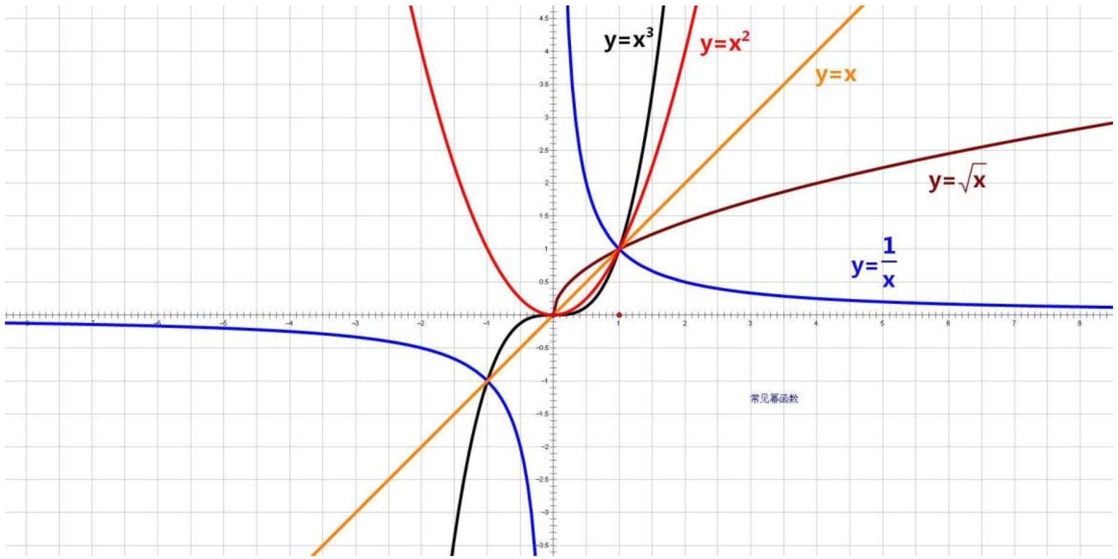
$$y = e^{a} x_1 x_2^{b} x_3^{c}$$

同时取对数

$$\ln y = \ln x_1 + b\ln x_2 + c\ln x_3 + a$$

变量替换

$$Y = X_1 + bX_2 + cX_3 + a$$



指数函数形式

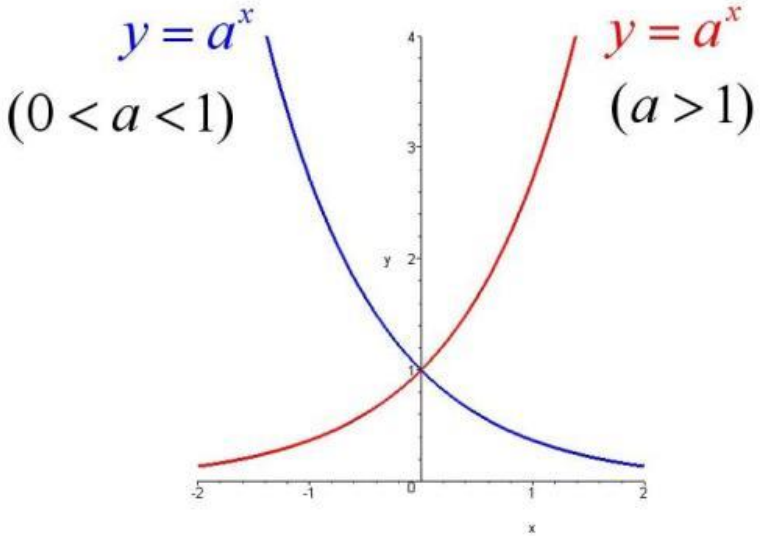
$$y = e^{a} b^{x_1} c^{x_2}$$

同时取对数

$$\ln y = (\ln b)x_1 + (\ln c)x_2 + a$$

变量替换

$$Y = (\ln b)x_1 + (\ln c)x_2 + a$$



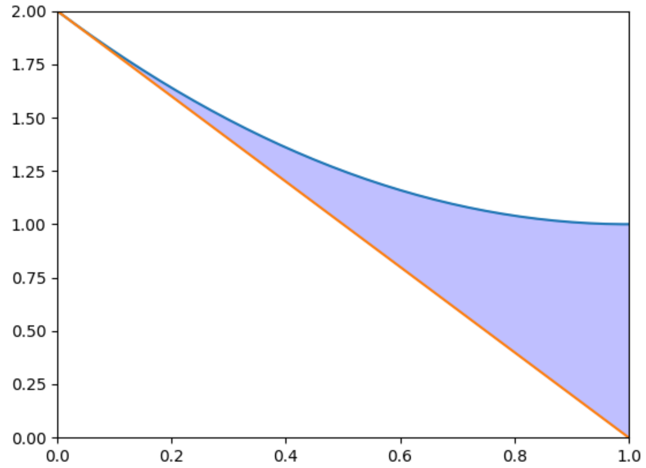
级数展开法

$$f(x) = (x-1)^2 + 1 = x^2 - 2x + 2, \qquad 0 \le x \le 1$$

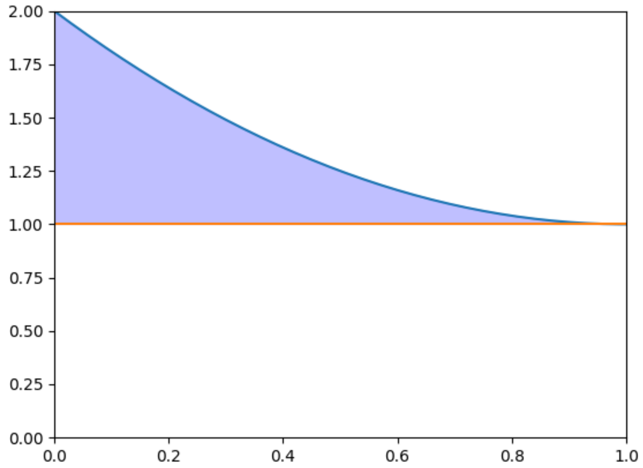
$$f(x) = \frac{f(0)}{0!} + \frac{f'(0)}{1!}x = -2x + 2$$

$$f(x) = \frac{f(1)}{0!} + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) = 1$$

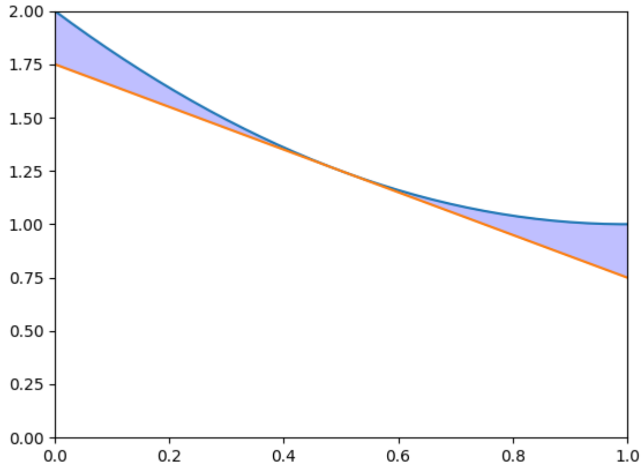
$$f(x) = \frac{f(0.5)}{0!} + \frac{f'(0.5)}{1!}(x-0.5) = -x + 1.75$$



$x_0 = 0$ 处展开



$x_0 = 1$ 处展开



$x_0 = 0.5$ 处展开

泰勒级数展开公式

$$f(x) = \frac{f(x_0)}{0!} + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x)$$

数学建模技巧

非线性模型线性化方法：

- 直接替换法
- 函数变换法
- 级数展开法

大M法：

- Either-Or Constraints
- If-Then Constraints

分段线性化：

- Piecewise Linear Functions
- Functions of a Special Form

约束转目标：

- Lagrangian Relaxation

Either-Or Constraints

$$f(x_1,x_2,\dots,x_n)\le 0 \quad 或 \quad g(x_1,x_2,\dots,x_n)\le 0$$

等价于

$$\begin{cases} f(x_1,x_2,\dots,x_n)\le 0 \\ -\infty\le g(x_1,x_2,\dots,x_n)\le +\infty \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} -\infty\le f(x_1,x_2,\dots,x_n)\le +\infty \\ g(x_1,x_2,\dots,x_n)\le 0 \end{cases}$$

引入大M和0-1变量y

$$f(x_1,x_2,\dots,x_n)\le My$$

$$g(x_1,x_2,\dots,x_n)\le M(1-y)$$

$$y=0 \text{ or } 1$$

y=0

y=1

$$\begin{cases} f(x_1,x_2,\dots,x_n)\le 0 \\ g(x_1,x_2,\dots,x_n)\le M \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} f(x_1,x_2,\dots,x_n)\le M \\ g(x_1,x_2,\dots,x_n)\le 0 \end{cases}$$

If-Then Constraints

如果 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) > 0$ ，那么 $g(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0$

~~如果 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0$ ，那么 $-\infty \leq g(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq +\infty$~~

$\Downarrow$ **引入大M和0-1变量y**

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq M(1-y)$$

$$-g(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq My$$

$$y = 0 \text{ or } 1$$

y=1

$$\begin{cases} f(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0 \\ g(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq -M \end{cases}$$

y=0

$$\begin{cases} f(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq M \\ g(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0 \end{cases}$$

数学建模技巧

非线性模型线性化方法：

- 直接替换法
- 函数变换法
- 级数展开法

大M法：

- Either-Or Constraints
- If-Then Constraints

分段线性化：

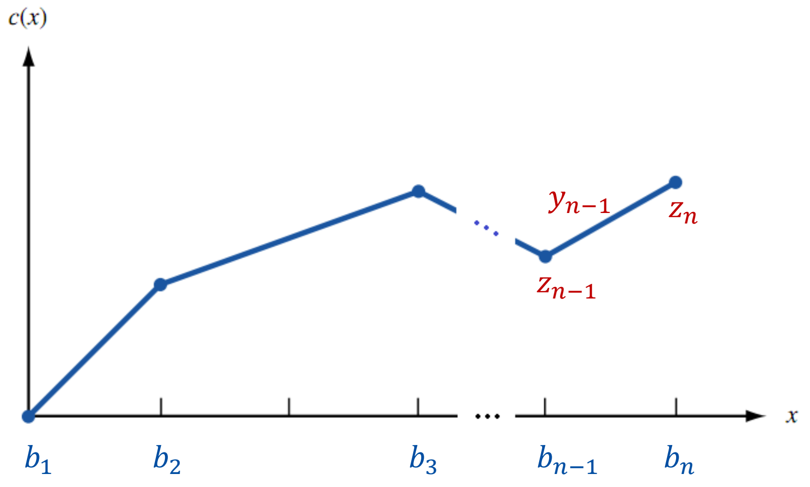
- Piecewise Linear Functions
- Functions of a Special Form

约束转目标：

- Lagrangian Relaxation

Piecewise Linear Functions

$$c(x)=\begin{cases} a_1x+d_1 & (b_1\le x\le b_2)\\ a_2x+d_2 & (b_2\le x\le b_3)\\ a_3x+d_3 & (b_3\le x\le b_4)\\ \quad\vdots & \\ a_{n-1}x+d_{n-1} & (b_{n-1}\le x\le b_n)\end{cases}$$



引入0-1变量 y_i 和非负变量 z_i ⟹

$$c(x)=z_1c(b_1)+z_2c(b_2)+\cdots+z_nc(b_n)$$

$$\begin{aligned} z_1&\le y_1\\ z_2&\le y_1+y_2\\ z_3&\le y_2+y_3\\ &\vdots\\ z_{n-1}&\le y_{n-2}+y_{n-1}\\ z_n&\le y_{n-1}\end{aligned}$$

$$y_1+y_2+\cdots+y_{n-1}=1$$ ← 有且只有一个 y_i 为1

$$z_1+z_2+\cdots+z_n=1$$ ← 最多有两个 z_i 非0

$$x=z_1b_1+z_2b_2+\cdots+z_nb_n$$

$$y_i=0\text{ or }1\qquad (i=1,2,\cdots,n-1)$$

$$z_i\ge 0\qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

Functions of a Special Form

μ_t , p_t 是变量

λ_t 是常量

$t \in T$

$$\mu_t \cdot W(\mu_t, p_t) = \sum_{i=0}^{M} \sum_{k=1}^{N} i \cdot z_{tki} \cdot W(i,k)$$

$$\sum_{i=0}^{M} x_{ti} = 1, \quad \forall\, t \in T$$

M是 μ_t 可能的取值上限

$$\mu_t = \sum_{i=0}^{M} i \cdot x_{ti}, \quad \forall\, t \in T$$

$$\sum_{k=1}^{N} y_{tk} = 1, \quad \forall\, t \in T$$

N是 p_t 可能的取值上限

$$p_t = \sum_{k=1}^{N} k \cdot y_{tk}, \quad \forall\, t \in T$$

$$\sum_{i=0}^{M} \sum_{k=1}^{N} z_{tki} = 1, \quad \forall\, t \in T$$

$$z_{tki} \geq x_{ti} + y_{tk} - 1, \quad \forall\, t \in T, i \in [0,1,\dots,M], k \in [1,2,\dots,N]$$

x_{ti} 等于1，y_{tk} 等于1时，z_{tki} 必须等于1

线性化

$$\underbrace{\mu_t \cdot W(\mu_t, p_t)}_{❶} \cdot \underbrace{F(\mu_t, \lambda_t)}_{❷}$$

线性化

$$F(\mu_t, \lambda_t) = \sum_{i=0}^{M} a_{ti}\, F(i, \lambda_t)$$

$$\sum_{i=0}^{M} a_{ti} = 1, \quad \forall\, t \in T$$

$$\mu_t = \sum_{i=0}^{M} i \cdot a_{ti}, \quad \forall\, t \in T$$

以上 x_{ti},y_{tk},z_{tki},a_{ti} 都是0-1变量

数学建模技巧

非线性模型线性化方法：

- 直接替换法
- 函数变换法
- 级数展开法

大M法：

- Either-Or Constraints
- If-Then Constraints

分段线性化：

- Piecewise Linear Functions
- Functions of a Special Form

约束转目标：

- Lagrangian Relaxation

Lagrangian Relaxation

拉格朗日松弛技术

有约束优化问题 → **无约束优化问题**

$$\text{minimize} \quad L(P) = \sum_{\substack{v_{it} \in P \\ 1 \le i \le n}} f_i(t) \,.$$

$$V_i(P) = \left|\{v_{it} | v_{it} \in P\}\right|, \qquad 1 \le i \le n$$

$$V_i(P) = 1, \qquad 1 \le i \le n$$

$$\text{minimize} \quad L(P) + \sum_{1 \le i \le n} \mu_i \left(1 - V_i(P)\right)$$

$$= \sum_{\substack{v_{it} \in P \\ 1 \le i \le n}} f_i(t) + \sum_{1 \le i \le n} \mu_i - \sum_{1 \le i \le n} \mu_i \left|\{v_{it} | v_{it} \in P\}\right|$$

$$= \sum_{\substack{v_{it} \in P \\ 1 \le i \le n}} (f_i(t) - \mu_i) + \sum_{1 \le i \le n} \mu_i$$

拉格朗日算子

为什么要松弛：

- **松弛后的问题比原问题更容易求解**
- **计算原问题的上界或者下界**