程序员

浮点数不完全指南

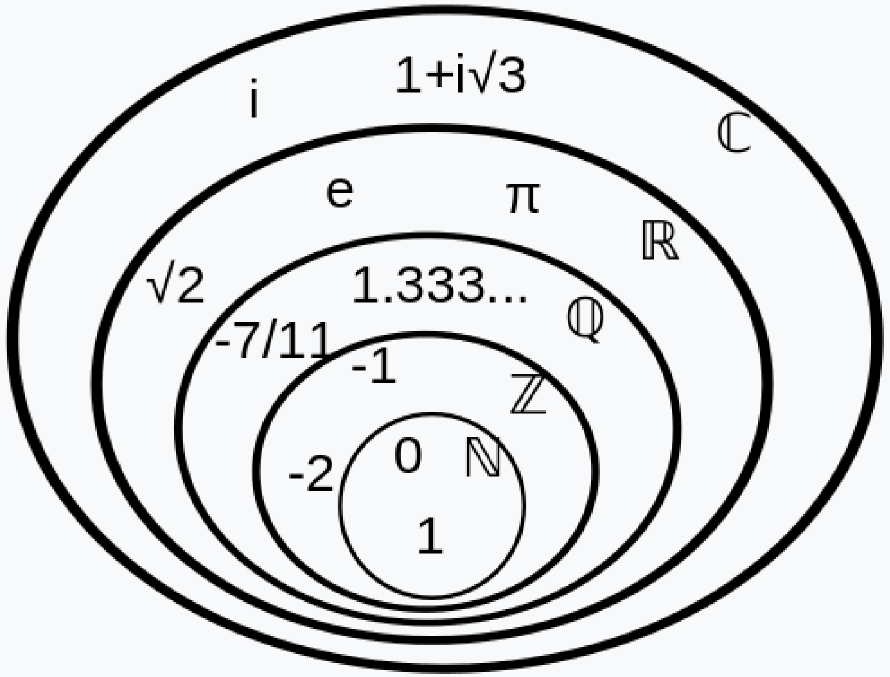
zhuyie
zhuyie@gmail.com

Agenda

- 基础概念
- IEEE 754 标准简介
- 浮点数格式
- 舍入规则
- 基础运算的实现方式
- 非规格化浮点数
- 半精度浮点数
- 量化

二进制计算机可以原生表示哪些数?

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$$



Decimal Fraction

123.625 in decimal							
Number base as Power	10^2	10^1	10^0	.	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}
Equivalent	100	10	1	.	1/10	1/100	1/1000
Our number	1	2	3	.	6	2	5

1*100+2*10+3*1+6*1/10+2*1/100+5*1/1000
=100+20+3+0.6+0.02+0.005
=123.625

Binary Fraction

123.625 in binary											
Number base as Power	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0	.	2^{-1}	2^{-2}	2^{-3}
Equivalent	64	32	16	8	4	2	1	.	1/2	1/4	1/8
Our number	1	1	1	1	0	1	1	.	1	0	1

64+32+16+8+2+1+1/2+1/8
=64+32+16+8+2+1+0.5+0.125
=123.625

$$123.625_{10} = 1111011.101_2$$

Binary-Coded Decimal

- 单个10进制数字有10种状态，可以用4个2进制bit来完整表示。
- 我们常见的计算机都采用8个bit组成1个字节，因此BCD一般采用packed形式，即用1个字节表示2个10进制数字。

```
Decimal:    9    1
Binary:  1001 0001
```

- 优点：能精确表示0.1这种binary fraction无法精确表示的数。
  - binary fraction无法精确表示所有分母不为2的幂次方的分数，例如`0.2, 0.3, 0.4, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9`。
- 缺点：存储密度较低，实现数学运算的电路复杂度较高。

Scientific notation

- 科学计数法由尾数、底数和指数三部分组成：

$m \times b^e$

```
m: significand or mantissa, a real number.
b: base.
e: exponent, an integer.
```

- 一些例子：

Decimal notation	Scientific notation
2	2×10^{0}
300	3×10^{2}
4 321.768	$4.321\,768 \times 10^{3}$
−53 000	-5.3×10^{4}
6 720 000 000	6.72×10^{9}
0.2	2×10^{-1}
987	9.87×10^{2}
0.000 000 007 51	7.51×10^{-9}

Normalized scientific notation

- 350 can be written as `3.5×10^2` or `35×10^1` or `350×10^0`.
- 其中significand部分 `大于等于1且小于base` 的那种形式，被称为normalized形式。就上例而言，是 `3.5x10^2` 。
- 得到normalized形式表示的方法是调整exponent值。

Fixed point notation

- 一个数可以视为**整数部分+小数部分**。对应的可以将用于表示此种数据类型的若干个bit分为两部分，一部分bit表示整数部分，另一部分bit表示小数部分。
- 可以定义出多类采用这种方式的表示法(例如16.16, 28.4)，在具体某一类中，其整数部分和小数部分所占用的bit数是固定的，也即小数点的位置是固定的。因此这种表示法被称为**定点数**。

Fixed point notation (cont.)

- 相比于整数，定点数相当于牺牲了一部分bit位来表示小数部分，因此其**表示范围**相应减小。
    - 整数可以视为一种小数部分占0 bit的特殊形式的定点数。
- 定点数的**精度**是固定的。
- 定点数概念简单，可基于整数运算逻辑来实现，很适合在没有FPU的低端计算设备中使用。

Floating point notation

- 地球到太阳的距离(量级): `10^11m`; 原子间的距离(量级): `10^-10m`;
- 当描述这两类距离时，显然应该有不同的**精度**要求。具体而言：数值量级越大时，精度要求可以较低，而数值量级越小时，精度要求会越高。
- 那能否有一种数据格式，既能表示较大的**数值范围**，也能在数值量级较小时提供很高的**精度**呢?
  - **浮点数**就是这种数据格式。
  - 采用了**科学计数法**的思路，需要通过exponent值来确定小数点的**实际位置**，因此而得名。

IEEE 754 标准简介

- 由Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE)在1985年初次发布，2008年和2019年有两次版本修订。
- 标准定义了:
  - arithmetic formats
  - interchange formats
  - rounding rules
  - operations
  - exception handling

浮点数格式

- 存在多种浮点数格式。某种浮点数格式由以下3个参数来定义：
  - 基数(base or radix) b，在IEEE 754中有两种取值，2或者10。
  - 精度(precision) p。
  - 指数(exponent)范围：emin to emax, with emin = 1 − emax for all IEEE 754 formats.

浮点数格式 (cont.)

- 一个浮点数由以下三部分组成：
  - s = 符号位(sign)，0或1。
  - c = 有效数字或尾数(significand/coefficient/mantissa)，以基数b的形式来书写，最多p位数字。
  - q = 指数值(exponent)，满足条件emin ≤ q + p − 1 ≤ emax。
- 其值为：$(-1)^s \times c \times b^q$
- 逻辑上就是一种科学计数法表示。

浮点数格式 (cont. 2)

- 当base=2时，若采用normalized scientific notation则尾数必定为 `1.xxxx` 的形式。
    - 最前面的 `1` 可以不存储，进而可以多出来一个bit来表示尾数(提高精度)。因此base=2的浮点数**默认要求**存储为normalized形式。
    - 如何表示0?
        - 当exponent值为某特殊值时，significand部分按另一套规则来解释。
- base=10的浮点数不强制要求normalized形式。why?

浮点数格式 (cont. 3)

- 使用一个单独的符号位来表示正数还是负数。
  - 存在两个0，`+0`和`-0`。
    - +0和-0相等吗?
  - 现代二进制计算机中的有符号整数，通过使用补码(Two's complement)的方式，避免了两个0的问题。

浮点数格式 (cont. 4)

- 指数部分存在正值也存在负值。
  - 再引入1位符号位，还是使用补码表示?
- 引入biased表示法：
  - 真正的exponent值，需要加上一个 `bias` 再存储，使得emin实际存储为1。
  - 将实际存储中的0值和最大值保留下来，用于表示 `0, ∞` 等特殊值。

Special values

Exponent	Significand	Object represented
All Bits Set to 0	All Bits Set to 0	+/- Zero
All Bits Set to 0	Non-Zero	+/- Denormalized number
All Bits Set to 1	All Bits Set to 0	+/- Infinity
All Bits Set to 1	Non-Zero	NaN (Not a Number)

Basic and interchange formats

标准定义了5种基本格式(basic formats)：binary32, binary64, binary128, decimal64, decimal128。

Name	Common name	Base	Significand bits[b] or digits	Decimal digits	Exponent bits	Decimal E max	Exponent bias[11]	E min	E max	Notes
binary16	Half precision	2	11	3.31	5	4.51	$2^4-1 = 15$	−14	+15	not basic
binary32	Single precision	2	24	7.22	8	38.23	$2^7-1 = 127$	−126	+127	
binary64	Double precision	2	53	15.95	11	307.95	$2^{10}-1 = 1023$	−1022	+1023	
binary128	Quadruple precision	2	113	34.02	15	4931.77	$2^{14}-1 = 16383$	−16382	+16383	
binary256	Octuple precision	2	237	71.34	19	78913.2	$2^{18}-1 = 262143$	−262142	+262143	not basic
decimal32		10	7	7	7.58	96	101	−95	+96	not basic
decimal64		10	16	16	9.58	384	398	−383	+384	
decimal128		10	34	34	13.58	6144	6176	−6143	+6144	

10进制浮点数

- As with binary interchange, the encoding scheme for the decimal interchange formats encodes the **sign, exponent, and significand**.
- The **significand** can be encoded as a compressed sequence of decimal digits using densely packed decimal or, alternatively, as a binary integer.

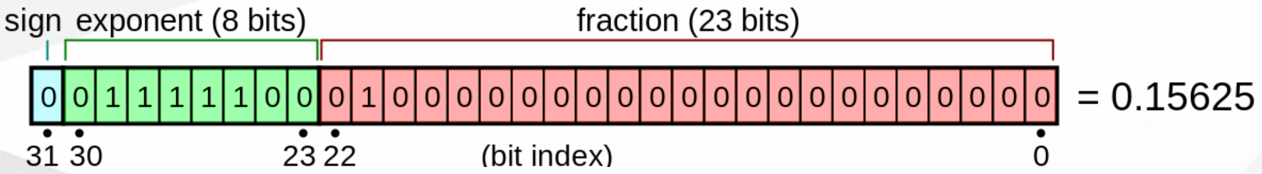
支持非binary base浮点数的计算机

In 1964, IBM introduced **hexadecimal** floating-point representations in its System/360 mainframes; these same representations are still available for use in modern z/Architecture systems. However, in 1998, IBM included IEEE-compatible **binary** floating-point arithmetic to its mainframes; in 2005, IBM also added IEEE-compatible **decimal** floating-point arithmetic.

POWER6, POWER7, and POWER8 CPUs that implement IEEE 754-2008 **decimal** arithmetic fully in **hardware**.

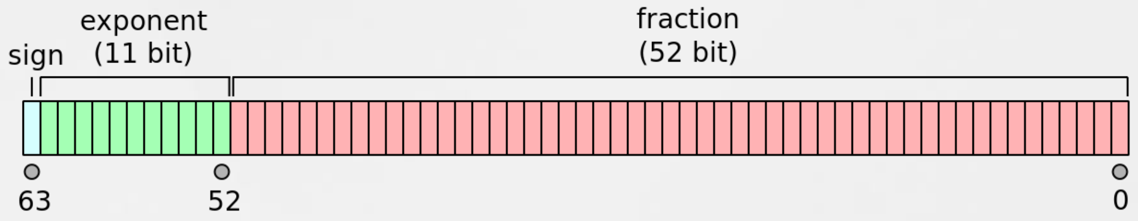
Layout

binary32，单精度浮点数，对应C中的float。




```
e = 01111100 = 0x7C = 124; 124 - 127(bias) = -3
c = 1.01; 移位后为0.00101;
    1x2^-3 + 1x2^-5 = 0.125+0.03125 = 0.15625;
```

binary64，双精度浮点数，对应C中的double。



舍入规则

- 当significant的位数大于最大精度位数时，就需要进行舍入操作(Rounding)。
- IEEE 754定义了5种Rounding规则，分别是：
  - Round to nearest, ties to even (**default** for binary floating point)
  - Round to nearest, ties away from zero
  - Round toward 0 (also known as truncation)
  - Round toward $+\infty$ (also known as ceiling)
  - Round toward $-\infty$ (also known as floor)

舍入规则 (cont.)

Example of rounding to integers using the IEEE 754 rules

Mode	Example value			
	+11.5	+12.5	−11.5	−12.5
to nearest, ties to even	+12.0	+12.0	−12.0	−12.0
to nearest, ties away from zero	+12.0	+13.0	−12.0	−13.0
toward 0	+11.0	+12.0	−11.0	−12.0
toward +∞	+12.0	+13.0	−11.0	−12.0
toward −∞	+11.0	+12.0	−12.0	−13.0

References: 1 2

浮点数基础运算

- 简要介绍加/减/乘/除的实现规则，以及浮点数和整数互转的规则。
- 参考Floating-point arithmetic operations。
- 为了便于理解和展示，例子是以decimal32格式、限制为7位精度来进行介绍的，但其基础原理同样适用于binary32, binary64等标准格式。

加法

首先将两个操作数进行**对阶**，也就是调整两数中阶码较小的那个数，移动其小数点位置，使得两数的阶码相等。

```
  123456.7 + 101.7654 = ?

  123456.7 = 1.234567 × 10^5
  101.7654 = 1.017654 × 10^2

  e=5; s=1.234567 (123456.7)
+ e=2; s=1.017654 (101.7654) ==> e=5; s=0.001017654
```

加法 (cont.)

尾数部分相加，指数部分保持不变。

```
  123456.7 + 101.7654 = (1.234567 × 10^5) + (1.017654 × 10^2)
                      = (1.234567 × 10^5) + (0.001017654 × 10^5)
                      = (1.234567 + 0.001017654) × 10^5
                      =  1.235584654 × 10^5

  e=5;  s=1.234567
+ e=5;  s=0.001017654  (after shifting)
---------------------
  e=5;  s=1.235584654  (true sum: 123558.4654)
```

加法 (cont. 2)

根据精度进行舍入处理，并进行规格化处理。由于我们限定为7位精度，因此出现了round-off error，丢失了部分精度。

```
e=5;  s=1.235585    (final sum: 123558.5)
```

加法 (cont. 3)

另一个加法出现精度错误的例子：两个非零浮点数相加的结果可能等于其中较大的那个。

```
  e=5;  s=1.234567     (123456.7)
+ e=-3; s=9.876543     (0.009876543)
```

```
  e=5;  s=1.234567
+ e=5;  s=0.00000009876543 (after shifting)
--------------------------
  e=5;  s=1.23456709876543 (true sum)
  e=5;  s=1.234567         (after rounding and normalization)
```

减法

和加法类似。首先对阶，然后尾数执行减法，最后进行舍入和规格化处理。

```
  e=5;  s=1.234571 (123457.1)
- e=5;  s=1.234567 (123456.7)
------------------
  e=5;  s=0.000004
  e=-1; s=4.000000 (after rounding and normalization)
```

乘法和除法

无需对阶，对指数部分执行加法/减法操作，对尾数部分执行乘法/除法操作，再进行舍入和规格化处理。

```
  e=3;  s=4.734612
× e=5;  s=5.417242
-------------------------
  e=8;  s=25.648538980104 (true product)
  e=8;  s=25.64854        (after rounding)
  e=9;  s=2.564854        (after normalization)
```

和整数运算的差异

- 结果和**运算顺序**密切相关。
- not necessarily **associative**: (a+b)+c 不一定等于 a+(b+c)
- not necessarily **distributive**: (a+b)c 不一定等于 ac+bc

浮点数和整数互转

- 浮点数转换为整数时，小数部分将被丢弃，例如：`567.8 => 567`
- 整数转换为浮点数时：
  - FP32的数值表示**范围**大于INT32，双精度同理。
    ```
    printf("%f", FLT_MAX) =>
    340282346638528859811704183484516925440.000000
    ```
  - FP32和INT32能表示的不同数值的个数都是~2^32。
  - 浮点数类型采用**动态精度**，离0值越远其精度越低，超过一个阈值之后，相邻的两个浮点数的数值差将大于1。
  - 对于FP32而言，绝对值<=2^24的整数可以无损表示，否则将采用近似表示。why?

非规格化浮点数

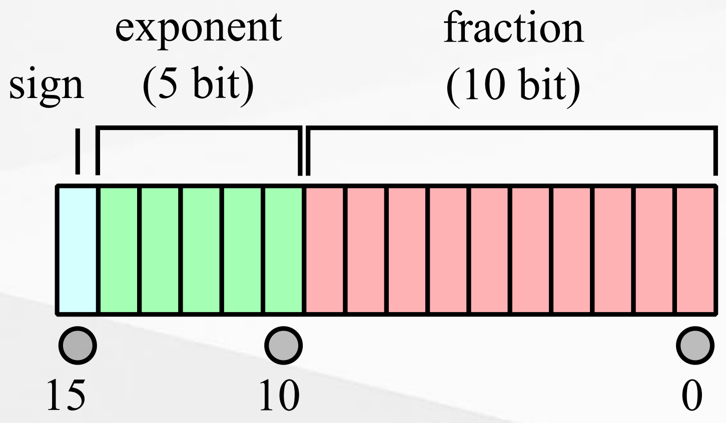
- denormal numbers, denormalized numbers, subnormal numbers
- 在规格化的浮点数中，尾数(significant)不能含有前导0(leading zeros)。前导0通过调整exponent的方式进行移除。
- 对于非常小的值例如 `0.000000000000000000000000000000000000000123`，调整后的exponent值可能超出了当前格式中exponent的表示范围，此时无法用规格化的方式来表示这个值。
- 这时候有两种选择：flush to zero on underflow, 或者是使用另一种表示方式(也即subnormal)。
- subnormal numbers的exponent为一个固定的特殊值，significant的leading digit允许为0。

非规格化浮点数 (cont.)

- Pros
  - 增加了正/负p个bit的数值空间来表示非常接近0的小数。
  - 确保所有当前格式能表示的浮点数之间的加法/减法运算，永远不会出现下溢出(underflow)。
  - 不会underflow意味着不会出现意外的division by zero错误。
- Cons
  - 相比规格化浮点数，计算性能显著降低。
  - 参考测试程序denormalized.c。

半精度浮点数：FP16

- Nvidia and Microsoft defined the **half** datatype in the Cg language, released in early 2002.
- 在IEEE 754-2008中被标准化，正式名称是**binary16**。



- 编码方式不变，只是调整了位宽：
- 在较新的GPU中有原生支持。

半精度浮点数：bfloat16

- 由Google提出，'b' stands for "brain"
- 通过直接丢弃FP32的低16位来获得，也就是保留符号位(1位)、指数位(8位)和部分尾数位(7位)。相比于FP16是用**更低的精度**换取了**更大的动态范围**。
- 更大的动态范围意味着出现下溢出的风险更小，相比FP16降低了因为梯度消失(过小)而无法训练的风险。
- 主要在AI相关的加速器(例如Google TPU)中有支持。
- References: 1 2 3

量化(quantization)

- 在AI领域一般指将**浮点数**转换为较小比特位的**整数**，并基于后者来进行存储和计算。
- Pros:
  - 降低带宽(bandwidth)和存储(storage)需求。
  - 提升计算速度。
- Cons:
  - 可能损失精度。
- References: 1 2

量化实现方法

一种比较简单的做法是利用离差标准化的思路：

```
V_quant = Q * (V_x - V_min)
V_quant_revert = V_quant / Q + V_min

R = V_max - V_min
S = 1 << quant_bits - 1
Q = S / R
```

其中，V_x表示原始浮点输入，V_quant表示量化后的定点数值，V_quant_revert是根据量化参数还原出的浮点数，quant_bits表示量化位数(1~32)。

量化的效能提升

以FP32量化为INT8为例(单个number由4个字节降为1个字节)：

- 磁盘上的模型文件更小，加载到内存所需时间更少，占用内存更小。
- 整数运算由于逻辑简单，通常比浮点数运算要快。参考测试程序speed.c。
- 在支持SIMD指令的环境中，以带128位寄存器的SSE为例，单条指令可以同时操作4个FP32、8个INT16、16个INT8。INT8的执行速度会更快。
- 在利用GPU加速计算时，降低Host to Device的通讯耗时。

Q & A