

改进临界多边形生成算法

杨卫波^{1,2}, 王万良²

YANG Weibo^{1,2}, WANG Wanliang²

1.温州大学 物理与电子信息工程学院, 浙江 温州 325035

2.浙江工业大学 信息工程学院, 杭州 310023

1.College of Physics & Electronic Information Engineering, Wenzhou University, Wenzhou, Zhejiang 325035, China

2.College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology, Hangzhou 310023, China

YANG Weibo, WANG Wanliang. Improved algorithm for No-Fit Polygon calculation. Computer Engineering and Applications, 2013, 49(1):32-35.

Abstract: An improved and more efficient algorithm to calculate No-Fit Polygon(NFP) is proposed and it is based on the orbital approach presented by Burke et al. The new algorithm greatly decreases the problem geometry complexity and simplifies calculation method of the minimum moving distance. Many heuristic strategies and the algorithms can be more easily combined to solve two-dimensional nesting problems. Computational results show that the improved algorithm is very efficient, and it has been used in the leather automatic nesting software.

Key words: No-Fit Polygon(NFP); irregular shape; nesting; orbital approach

摘 要:在Burke等人提出的用于求解临界多边形的移动碰撞算法基础之上,提出了一种更加高效的求取NFP的改进算法。该算法大大降低了问题的几何复杂性,简化了计算最小移动距离的方法,使许多启发式策略可以更加容易地与该方法结合来求解二维排样问题。实例验证了改进算法是有效且可行的,已应用于皮革自动排样软件中。

关键词:临界多边形;不规则形状;排样;移动碰撞法

文献标志码:A **中图分类号:**TP301.6 **doi:**10.3778/j.issn.1002-8331.1206-0291

1 引言

临界多边形(No-Fit Polygon, NFP)的概念由Adamowicz等^[1]提出,是计算多边形靠接位置的一种重要几何计算工具,被广泛应用于机械CAD/CAM、机器人路径求解、图形图像学等诸多领域。多边形的最优靠接位置的求解问题以及重叠判断问题,是排样问题中需要重复计算的最关键问题。临界多边形的计算和应用,可以避免大量重复的判交、碰撞步骤,使得此问题能得到高效地解决。因此,研究NFP的求解具有重要的学术理论价值和实践意义。

国内外学者针对如何获得NFP提出了多种有效方法,大体上可总结为:移动碰撞法、Minkowski矢量和法、凹多边形凸化分割法、基于轨迹计算的NFP算法等。最早应用的移动碰撞法^[2]简单易行,但计算复杂度高,需要改进;Minkowski矢量和法^[3]针对凸多边形时简单有效,时间复杂度最低,但当两个多边形中有一个是凹多边形时无法得到正确的NFP。针对Minkowski矢量和算法的缺陷,Bennell

等^[4-5]基于倾斜图法提出一种改进的算法,但该算法所得NFP与用倾斜图法几何作图得到的NFP存在出入及多余轨迹。吴忻生等^[6]在Ghost的斜率图法基础之上,对凹-凹这种情况进行了重点研究分析,提出了一种求取NFP的改进算法。刘胡瑶等^[7]将多边形滑动碰撞问题转化为顶点和边之间的轨迹线提取问题,提出了基于轨迹计算的NFP求解算法;另外一种求取NFP的凹多边形凸化分割法^[8],计算复杂度已经大于碰撞法的复杂度。本文在比较各种求解NFP算法的基础上,充分研究Burke等^[9]提出的算法,设计了一种改进算法,有效地减少了几何计算复杂性,从而获得在实际排样中切实可行的NFPs。

2 临界多边形及Burke等人的求解算法

给定多边形 A 与多边形 B ,其临界多边形可以通过下述方式构造:选定多边形 B 上的一个点 O_B 作为参考点,固定多边形 A ,将多边形 B 沿着多边形 A 平移一周,保证多

基金项目:国家自然科学基金(No.51175473);温州市科技计划项目(No.G20100204);浙江省重大科技专项项目(No.2009C11039)。

作者简介:杨卫波(1977—),男,博士生,讲师,主要研究方向:计算智能,开放式数控技术开发与装备智能化;王万良(1957—),教授,博士生导师,主要研究方向:计算机控制与智能自动化等。E-mail: yangweibo_hubei@163.com

收稿日期:2012-06-20 **修回日期:**2012-09-17 **文章编号:**1002-8331(2013)01-0032-04

CNKI出版日期:2012-10-18 <http://www.cnki.net/kcms/detail/11.2127.TP.20121018.1553.010.html>

边形 B 和多边形 A 始终相切,此时参考点的移动轨迹所围成的区域(不包括边界)就是多边形 B 相对于多边形 A 的临界多边形,记为 NFP_{AB} ,其边集记为 E_{AB} 。此外, B 沿着 A 的边界外侧滑动所形成的 NFP 称为外围 NFP(或外靠接 NFP), B 沿着 A 的边界内侧滑动所形成的 NFP 称为内部 NFP(或内靠接 NFP),图1显示了多边形 A 、 B 的 NFP_{AB} 的形成过程。

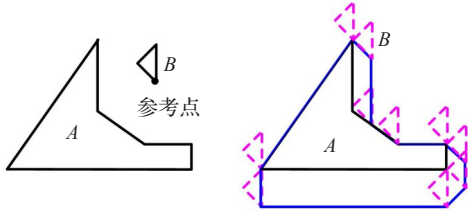


图1 多边形 B 相对于 A 的 NFP_{AB} 形成过程示意图

临界多边形有如下性质:当移动多边形 B 使得 $O_B \in NFP_{AB}$ 时, B 与 A 相交;当移动多边形 B 使得 O_B 在 NFP_{AB} 的边界上,即 $O_B \in e(e \in E_{AB})$ 时, B 与 A 相切;其他情况下, B 与 A 相离。由于 NFP 这个重要几何性质,它已成为多种几何算法的基础,例如多边形排样(布局)等算法中,通常需要预先知道多边形之间所有可能的靠接位置,而 NFP 正好提供了这一信息,求取 NFP 之后,排样(布局)等问题就可以简化为基于 NFP 的定位选优过程。

Burke 等人在文献[9]中描述了一种对移动碰撞算法进行改进后的算法,具体算法分为两个逻辑步骤。第一步是将一个多边形绕另一个多边形滑动运动,产生 NFP 的外轮廓,这一阶段的算法和 Mahadevan^[10]的算法极为相似,其中做了一些改进;第二阶段是定义和找出起始点以便找出临界多边形的其他路径,这些路径可能是 NFP 的内孔,单独使用 Mahadevan 的算法是不可能找到这些内孔的。实验结果显示,算法的求解质量和求解速度相对于传统方法均有显著提高。

3 改进的 NFP 求取算法

虽然 Burke 等的方法简单地分为两个阶段,较以前的移动碰撞法更加容易理解和实现,且能很好地处理一些特殊的图形,整体而言比移动碰撞法有较大的改进,但是仍有许多不足。Burke 等的算法在移动方向判别时分为 8 种情况判断,这些判断过程使得算法的时间复杂度增大;在确定可移动向量时也不够简洁;另外在确定可移动举例时算法时间复杂度也较高,有很大的改进空间。本文在 Burke 方法基础之上,提出并实现了一种改进的求取 NFP 的方法,对其算法的各个步骤均有改进,有效减少了大量标记、判断过程,优化了算法,使得算法的运算得到大量简化。

求解 NFP 的移动碰撞算法,其基本原理是保持多边形 A 固定不动,根据 A 和 B 当前时刻的靠接状态,得出 B 下一步的可移动方向和可移动距离,将 B 移动到新的位置(B 不旋转),然后重复以上移动过程,直至邻接 A 绕完一周回

到初始位置,整个过程 AB 相接触,但互不重叠。具体算法可以分为如下 5 个步骤。

3.1 多边形靠接位置检测

设多边形 A 、 B 均为逆时针方向,得到 A 在 Y 方向上的最低顶点作为起始点,设为 A_0 ,如果有多个最低顶点,取 X 坐标最小的一个顶点作为起始点;同理获得 B 的最高顶点 B_0 ,并将 B_0 作为 B 的第 1 个顶点,同时也作为移动过程中的参考点。算法迭代开始前,将 B 移动到使得 B_0 和 A_0 重合。

算法每次迭代时,都需要对多边形 A 、 B 的当前靠接状况进行正确检测,这个过程可以通过对 A 和 B 中的各条边进行相交测试获得。在 B 绕 A 运动过程中, A 、 B 相互之间的靠接状态可分为 3 种情况:(1) A 的顶点和 B 的顶点相接触;(2) A 的顶点和 B 的边接触;(2) B 的顶点和 A 的边接触,如图 2 所示。

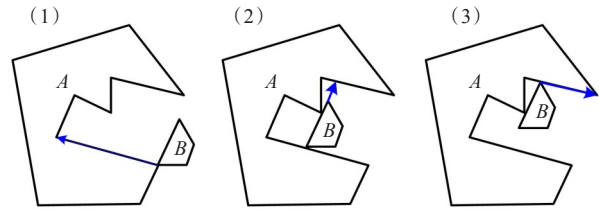


图2 多边形靠接的 3 种靠接类型

定义结构体 Touchers 来保存各个靠接点的状态信息,其中, touch_type 是描述当前靠接状态的枚举类型, SVector2D 为二维向量类型(包含该矢量的方向和长度信息),结构体中的节点的编号统一定义为 A 、 B 中相应接触边的起始点在多边形中的编号序列。结构体 Touchers 定义如下:

```
struct Touchers
{
    touch_type m_touchType; //当前节点靠接类型
    SVector2D m_axis; //移动方向向量
    SPoint m_point; //靠接点坐标
    int m_nIndexStationary; //当前节点在A中编号
    int m_nIndexOrbiting; //当前节点在B中编号
};
```

图 2 所示为求解外靠接临界多边形的靠接位置,对于内靠接 NFP,也可以用类似方法进行处理。

3.2 求解移动方向

确定了多边形 A 、 B 当前靠接状态后,就可以判别在每个靠接点位置时,多边形 B 的备选移动方向。Burke 将靠接的第一种情况(A 的顶点和 B 的顶点相接触)分为 8 种情况进行逐一判别,计算时间长且难于理解。为减少判别计算时间,本文将接触点所在的边矢量的起点规定为判别矢量的起始点,每次迭代只对满足条件的情况进行判别,从而将判别移动方向减少到两种。如图 3(1)、3(2)所示,图中 a 、 b 为多边形 A 、 B 接触点所在的边矢量;3(3)、3(4)分别为另外两种靠接状态时的边矢量位置情况。

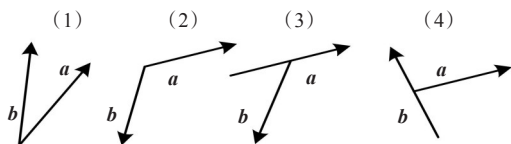


图3 多边形靠接时边矢量位置关系图

对于图3中的4种边矢量位置关系, B 的可移动方向判别算法如下:

(1) A 、 B 顶点相接触且矢量 a 到矢量 b 的夹角小于 180° , 即叉积 Z 分量大于 0 (图3(1)), 则移动方向为 a 。

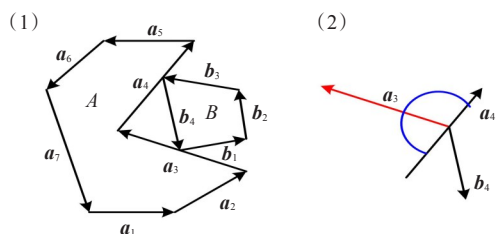
(2) A 、 B 顶点相接触且矢量 a 到矢量 b 的夹角大于 180° , 即叉积 Z 分量小于零 (图3(2)), 则移动方向为 $-b$ 。

(3) 如果 B 的顶点和 A 的边接触 (图3(3)), 则移动方向为 a 。

(4) 如果 A 的顶点和 B 的边接触 (图3(4)), 此种情况相当于多边形 A 相对矢量 b 移动, 但 A 必须保持固定, 因此 B 的移动方向为 $-b$ 。

3.3 确定可移动向量

并不是每一个靠接位置按照确定好的移动方向都是可以移动的, 如图4(1)中 a_5 和 b_1 确定的靠接位置按照移动方向 a_5 移动的话, 会导致 a_4 和 b_4 向量相交, 因此这样的靠接位置应该排除。

图4 A 、 B 有多个靠接点示例图

对于一个可以移动的向量来说, 它必须对所有多边形 A 、 B 的靠接边都是可以移动的, Burke 算法对此情况给出了 6 种判别情况, 本文经过分析将其进行简化, 把这些情况划分为图5所示的 4 种情况。5(1)、5(2)为针对点与点靠接情况, 5(3)、5(4)为点和边接靠, 图中的圆弧所给出的角度范围为可移动向量的禁止移动方向, 当可移动向量方向在此角度范围内时, 必然会引起 a 、 b 向量发生碰撞。例如, 图4(1)中 a_5 移动向量, 其已经处于 a_4 和 b_4 形成的靠接禁止区, 因此这种情况应该排除, 图4(2)对此情况进行了说明。

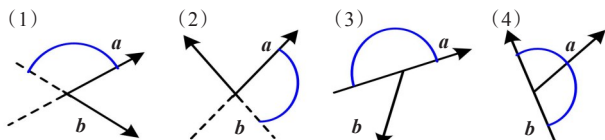


图5 各种靠接状况时的禁止移动范围

3.4 计算最小移动距离

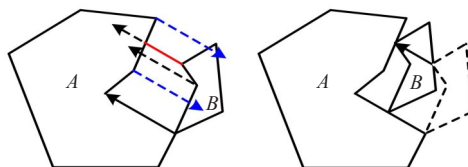
确定多边形 B 的移动方向后, 为防止移动过程中发生碰撞, 还需要进一步计算 A 和 B 在给定方向上的最小碰撞

距离。计算最小碰撞距离的算法为:

(1) 计算 B 的各个顶点在给定方向 $Vector$ 上到 A 的各边的距离, 并取其中的最小距离 $Mindist_{BA}$ 。

(2) 计算 A 的各个顶点在给定方向 $-Vector$ 上到 B 的各边的距离, 并取其中的最小距离 $Mindist_{AB}$ 。

(3) 取 A 的顶点到 B 的边的最小距离 $Mindist_{AB}$, 以及 B 的顶点到 A 的边的最小距离 $Mindist_{BA}$ 中的最小值, 即为最小碰撞距离 (确定过程如图6所示)。

图6 确定 A 、 B 最小碰撞距离

在计算最小碰撞距离时, 如果按照线段与多边形的各条边分别进行求交计算的话, 计算复杂度较大。文献[3]利用 A 和 B 接触部分的递增线段族和递减线段族的概念来简化计算复杂性, 但实现极为复杂。本文应用了另外一种方法来简化计算的复杂性。

图7所示的多边形由顶点集 $A_i(X_i, Y_i), i=0, 1, \dots, 7$ 组成, 线段由点 $P_1(x_1, y_1)$ 和点 $P_2(x_2, y_2)$ 构成, 定义 S_i 变量:

$$S_i = D(A_i, P_1, P_2) = \begin{vmatrix} X_i & x_1 & x_2 \\ Y_i & y_1 & y_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad (1)$$

那么, 由 S_i 值的符号就可判别出多边形顶点 A_i 在线段 P_1P_2 的哪一侧 (左侧、右侧或在线段上), 进一步通过 S_i 符号的变化情况, 就可以判别出多边形的两个顶点 (连续编号) 构成的边是否与线段 P_1P_2 相交: (1) 若这 2 点的 S_i 符号相同且 $S_i \neq 0$, 可以说明它们在线段的同侧, 与线段没有交点; (2) 若符号相反且 $S_i \neq 0$ 则必有交点; (3) 若两点的 S_i 至少有一个为 0 时, 则点在线段所在的直线上, 进一步判断点是否在线段上。求出多边形各个顶点的 S_i 值, 那么 S 中总的符号改变的次数即为多边形与线段的交点个数 (包括点不在线段 P_1P_2 上), 在以后计算交点时, 则只计算 S_i 符号改变时多边形的边与线段的交点, 对于其他的边则无需计算, 从而可以大大减少多边形与线段求交点的计算量。

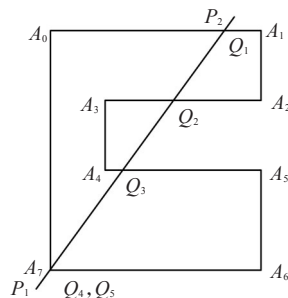


图7 线段与多边形求交简化计算示例图

3.5 根据向量移动多边形

按照得到的可移动向量的方向和最小碰撞距离,将多边形 B 进行平移操作,并保存此可移动向量。

多边形 B 的参考点平移后得到的点作为新的参考点,然后重新开始进行多边形靠接检测(3.1节),迭代执行上面所介绍的各个过程,直到多边形 B 的参考点回到了最初的起始参照点为止。

最后将上面各次迭代中保存的向量首尾相接,形成的多边形就是 B 相对 A 的临界多边形 NFP_{AB} ,算法结束。

4 实验与结果分析

为检验本文改进移动碰撞算法的计算性能,与 Burke 等人的算法作了比较,所用的测试数据可以在 ESICUP (<http://paginas.fe.up.pt/~esicup>) 的站点上找到。采用普通 PC 机,微处理器为 Pentium4 1.6 GHz,内存 1.00 GB,对于每组数据中所有多边形,两两计算它们的临界多边形,每组数据所生成的 NFP 总数 $F=N \times N$ (N 为组中多边形个数),算法作 25 次运行,选择求解结果最好的一组数据。测试结果如表 1 所示。

表 1 改进后移动碰撞法与 Burke 算法运行时间对比

实例	多边形个数	NFPs 总数	运行时间/ms	
			Burke 算法	改进移动碰撞法
Shapes0	4	16	102	94
Shirts	8	64	107	93
Marques	8	64	58	50
Swim	10	100	1 573	1 328
Jakobs2	25	625	372	280
Poly2b	30	900	586	390
Poly4b	60	3 600	4 578	3 012
Poly5b	75	5 625	8 868	4 724

从表 1 可以看出,无论是简单多边形还是复杂多边形,改进后的算法比 Burke 算法有更快的求解时间,且多边形的个数越多,改进算法性能就越好。改进的算法在判定多边形的移动方向和确定可移动向量时,较 Burke 算法有较大的简化,这在一定程度上提高了求取 NFP 的速度,另外在移动碰撞算法中存在大量的线段与多边形求交的运算,改进算法中线段与多边形求交算法的运用更加提高了求取临界多边形的效率,这使得 NFP 算法与收敛速度相对较慢的智能算法(如遗传算法)的结合成为了可能。

5 结束语

Burke 等人的研究结果表明,移动碰撞法是计算临界多边形的有效算法,但其算法仍存在一些不足。本文对 Burke 算法进行了改进,在大大降低原问题几何复杂性的同时,提出了一种简化计算最小移动距离的新方法。该算法使得 NFP 的计算更加高效快捷,对 ESICUP 中的测试数据的计算结果表明,改进的方法正确有效,较 Burke 的算法有极大提高。本文算法已成功而有效地运用到二维不规则皮革自动排样系统中,并使得系统整体速度和效率有很大的改进。今后的研究重点将在此基础上,增加处理图形中含有弧线的情况,并深入研究各种启发搜索策略,使 NFP 在实际应用中得到更好的应用。

参考文献:

[1] Adamowicz M, Albano A.Nesting two dimensional shapes in rectangular modules[J].Computer-Aided Design, 1976, 8(1): 27-33.

[2] 刘嘉敏,张胜男,黄有群.二维不规则形状自动排料算法的研究与实现[J].计算机辅助设计与图形学学报, 2000, 12(7): 488-491.

[3] Ghosh P K.A unified computational framework for Minkowski operations[J].Computers and Graphics, 1993, 17(4): 357-378.

[4] Bennell J A, Oliveira J F.The geometry of nesting problems: a tutorial[J].European Journal of Operational Research, 2008, 184(2): 397-415.

[5] Bennell J A, Dowsland K A, Dowsland W B.The irregular cutting-stock problem-a new procedure for deriving the No-Fit Polygon[J].Computers and Operations Research, 2001, 28(1): 271-287.

[6] 吴忻生,唐萍,袁鹏.一种基于 Ghost 斜率图法的改进的临界多边形生成算法[J].计算机应用研究, 2011, 28(3): 1176-1179.

[7] 刘胡瑶,何援军.基于轨迹计算的临界多边形求解算法[J].计算机辅助设计与图形学学报, 2006, 18(8): 1123-1129.

[8] 张德富,陈竞驰,刘永凯.用于二维不规则排样的离散临界多边形模型[J].软件学报, 2009, 20(6): 1511-1521.

[9] Burke E, Hellier R, Kendall G, et al.Complete and robust No-Fit Polygon generation for the irregular stock cutting problem[J].European Journal of Operational Research, 2007, 179(1): 27-49.

[10] Mahadevan A.Optimisation in computer aided pattern packing[D].North Carolina: North Carolina State University, 1984.