

第 2 章 微纳米尺度辐射传输的理论基础

经典的热辐射研究一般不考虑辐射的近场效应，也不考虑电磁波的干涉效应。但随着微电子、机械、探测技术的不断进步，在航空航天、医学等领域逐渐出现结构的特征尺寸与辐射的特征波长相当甚至更小，这时经典的辐射传输理论已不再适用，只有从电磁学的角度给出热辐射更本质的解释，才能考虑电磁辐射的近场效应和相干性，以及其他在微纳米尺度下出现的问题。如果结构的特征尺寸继续减小，还有可能需要考虑物质内部的晶格结构的影响，甚至考虑辐射的量子特征，这些情况下需要从量子力学的角度才能给出合理的解释，超出本文的研究范围。

为方便起见，本文中考虑的材料均为非磁性，各向同性，线性材料。本文中对微纳米尺度辐射研究的前提条件如下：

(1) 本文的研究中未考虑非局部效应 (non-local effect)。一般来说，在结构的特征尺寸大于 Fermi 长度时，这一近似是成立的^[27]。

(2) 电磁现象的宏观描述是有效的。可见光的发射和折射用含连续介质常数的麦克斯韦方程组来描写，而 X 射线衍射清楚地显示出物质的原子性质。因此，取长度 $l_c = 10\text{nm}$ 作为宏观区域的绝对下限似乎是合理的^[58]。

(3) 涨落耗散理论是成立的：即假设电流是随机的、无关的，电场是相关的，这要求是局部热平衡假设成立^[31]。

2.1 Maxwell 方程组及其本构关系

2.1.1 时域 Maxwell 方程组

作为电磁理论^[59]基础的 Maxwell 方程组描述了有关电磁场和电荷守恒的基本规律，其形式如下：

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2-1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (2-2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2-3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (2-4)$$

式中： \mathbf{E} ——电场强度；

\mathbf{H} ——磁场强度；

\mathbf{B} ——磁感应强度；

\mathbf{D} ——电位移矢量；

ρ ——电荷密度。

辐射的热流密度，即电磁学中的坡印廷矢量为 $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ 。

2.1.2 本构关系

电磁理论中的本构关系（constitutive relation）述了媒质的存在对电磁场的影响。

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \quad (2-5)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (2-6)$$

式中： ε ——介电常数；

μ ——磁导率；

2.1.3 Fourier 变换

时域变化量可以通过积分变换得出对应的频域形式，在频域下便于对物理量进行分析。常用的积分变换方法有 Fourier 变换、Laplace 变换、Hankel 变换、z 变换等，在电磁理论中常用 Fourier 变换。某随时间变化的函数 $y = f(t)$ ，定义式(2-7)为函数 $y = f(t)$ 的 Fourier 正变换，定义式(2-8)为 $G(\omega)$ 的 Fourier 逆变换。

$$F[f(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = G(\omega) \quad (2-7)$$

$$F^{-1}[G(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G(\omega) e^{i\omega t} d\omega = f(t) \quad (2-8)$$

2.1.4 Maxwell 方程组的频域形式

2.1.4.1 平面波展开

随时间变化的信号，可以通过 Fourier 变换，表示成不同频率的简谐波的叠加。

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\mathbf{r}, \omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (2-9)$$

根据本构关系，对于线形、各向同性材料，有下面的关系：

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega) = \varepsilon_0 \varepsilon(\mathbf{r}, \omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) \quad (2-10)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, \omega) = \mu_0 \mu(\mathbf{r}, \omega) \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega) \quad (2-11)$$

对于电磁场和电磁波，其每一个频率下的分量都满足 Helmholtz 方程，即

$$\nabla^2 \varphi(\mathbf{r}, \omega) + \mu \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2} \varphi(\mathbf{r}, \omega) = 0 \quad (2-12)$$

该方程解的形式满足

$$\varphi(\mathbf{r}, \omega) = A e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} + B e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \quad (2-13)$$

上式中 $\mathbf{k} = k\hat{u}$ ， $k = \sqrt{\mu \varepsilon} \omega / c$ 。

对于沿 z 正方向传输的电磁波，其角频率 ω 的分量可以通过 Fourier 变换得到

$$\varphi(\mathbf{r}, \omega) = \int \frac{d\alpha d\beta}{4\pi^2} \varphi(\alpha, \beta, z, \omega) e^{i(\alpha x + \beta y)} \quad (2-14)$$

将上式代入式(2-12)，得

$$\nabla^2 \left(\int \frac{d\alpha d\beta}{4\pi^2} \varphi(\alpha, \beta, z, \omega) e^{i(\alpha x + \beta y)} \right) + \mu \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2} \int \frac{d\alpha d\beta}{4\pi^2} \varphi(\alpha, \beta, z, \omega) e^{i(\alpha x + \beta y)} = 0 \quad (2-15)$$

将散度符号移到积分号内，得

$$\left(\int \frac{d\alpha d\beta}{4\pi^2} \nabla^2 \left[\varphi(\alpha, \beta, z, \omega) e^{i(\alpha x + \beta y)} \right] \right) + \mu \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2} \int \frac{d\alpha d\beta}{4\pi^2} \varphi(\alpha, \beta, z, \omega) e^{i(\alpha x + \beta y)} = 0 \quad (2-16)$$

$$\nabla^2 \left[\varphi(\alpha, \beta, z, \omega) e^{i(\alpha x + \beta y)} \right] + \mu \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2} e^{i(\alpha x + \beta y)} \varphi(\alpha, \beta, z, \omega) = 0 \quad (2-17)$$

由于

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\varphi(\alpha, \beta, z, \omega) e^{i(\alpha x + \beta y)} \right] \\ &= \frac{\partial^2 \varphi(\alpha, \beta, z, \omega)}{\partial x^2} e^{i(\alpha x + \beta y)} + 2 \frac{\partial \varphi(\alpha, \beta, z, \omega)}{\partial x} \frac{\partial e^{i(\alpha x + \beta y)}}{\partial x} + \varphi(\alpha, \beta, z, \omega) \frac{\partial^2 e^{i(\alpha x + \beta y)}}{\partial x^2} \\ &= \varphi(\alpha, \beta, z, \omega) (-\alpha^2) e^{i(\alpha x + \beta y)} \end{aligned} \quad (2-18)$$

并且有

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[\varphi(\alpha, \beta, z, \omega) e^{i(\alpha x + \beta y)} \right] = \varphi(\alpha, \beta, z, \omega) (-\beta^2) e^{i(\alpha x + \beta y)} \quad (2-19)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[\varphi(\alpha, \beta, z, \omega) e^{i(\alpha x + \beta y)} \right] = \frac{\partial^2 \varphi(\alpha, \beta, z, \omega)}{\partial z^2} e^{i(\alpha x + \beta y)} \quad (2-20)$$

所以

$$\begin{aligned} & \varphi(\alpha, \beta, z, \omega) (-\alpha^2) e^{i(\alpha x + \beta y)} + \varphi(\alpha, \beta, z, \omega) (-\beta^2) e^{i(\alpha x + \beta y)} \\ &+ \frac{\partial^2 \varphi(\alpha, \beta, z, \omega)}{\partial z^2} e^{i(\alpha x + \beta y)} + \mu \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2} e^{i(\alpha x + \beta y)} \varphi(\alpha, \beta, z, \omega) = 0 \end{aligned} \quad (2-21)$$

即

$$\varphi \left(\mu \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2} - \alpha^2 - \beta^2 \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \varphi(\alpha, \beta, z, \omega) = 0 \quad (2-22)$$

因此

$$\varphi(\mathbf{r}, \omega) = \int \frac{d\alpha d\beta}{4\pi^2} \varphi(\alpha, \beta, z=0, \omega) e^{i(\alpha x + \beta y + \gamma z)} \quad (2-23)$$

通过上式，可以实现从空间域到频率域的转变。

2.1.4.2 时谐电磁场

在电磁分析过程中，经常涉及随时间按正弦规律变化的电磁场，而对于线性媒质中的非正弦周期变化的电磁场，也可以通过分解为基波和各次谐波正弦激励的叠加，予以分析处理^[60]。这时，一般形式的 Maxwell 方程组可以用不含时间的复相量表示，例如电场强度可以用一个与时间无关的复相量表示成 $\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}(\mathbf{r})e^{i\varphi_E(\mathbf{r})}$ ，它所对应的实际时变电场则可取 $\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}$ 的实部而得。即该点的电场实时描述为

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \text{Re}[\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}] = \text{Re}[\mathbf{E}(\mathbf{r})e^{i(-\omega t + \varphi_E)}] = \mathbf{E}(\mathbf{r})\cos[-\omega t + \varphi_E] \quad (2-24)$$

这样，正弦稳态情况下的时谐电磁场时，可以得到 Maxwell 方程组的相量形式：

$$\nabla \times \tilde{\mathbf{E}} = -i\omega \tilde{\mathbf{B}} \quad (2-25)$$

$$\nabla \times \tilde{\mathbf{H}} = \tilde{\mathbf{J}} + i\omega \tilde{\mathbf{D}} \quad (2-26)$$

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{B}} = 0 \quad (2-27)$$

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{D}} = \tilde{\rho} \quad (2-28)$$

为了表示方便，下面所有的复数量，如不加说明，都表示频域量，省略变量上方加注的 \sim 。

2.1.4.3 复坡印廷矢量和复电磁能密度

当电磁场的物理量用复数来表示时，辐射的热流密度就相应的用复坡印廷矢量的时间平均值来表示：

$$\begin{aligned} \langle S \rangle &= \langle \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \rangle \\ &= \left\langle \frac{1}{2} [\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)e^{-i\omega t} + \mathbf{E}^*(\mathbf{r}, \omega)e^{i\omega t}] \times \frac{1}{2} [\mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega)e^{-i\omega t} + \mathbf{H}^*(\mathbf{r}, \omega)e^{i\omega t}] \right\rangle \\ &= \frac{1}{4} \langle \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) \times \mathbf{H}^*(\mathbf{r}, \omega) + \mathbf{E}^*(\mathbf{r}, \omega) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega) + \\ &\quad \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega)e^{-2i\omega t} + \mathbf{E}^*(\mathbf{r}, \omega) \times \mathbf{H}^*(\mathbf{r}, \omega)e^{2i\omega t} \rangle \\ &= \frac{1}{2} \langle \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) \times \mathbf{H}^*(\mathbf{r}, \omega) + \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega)e^{-2i\omega t} \rangle \\ &= \frac{1}{2} \text{Re}[\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) \times \mathbf{H}^*(\mathbf{r}, \omega)] \end{aligned} \quad (2-29)$$

电磁场的时均电磁能密度为：

$$\langle U \rangle = \frac{1}{2} \langle \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \rangle \quad (2-30)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \langle \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) \rangle \\ &= \frac{1}{8} \langle [\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t} + \mathbf{E}^*(\mathbf{r}, \omega) e^{i\omega t}] \cdot [\mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t} + \mathbf{D}^*(\mathbf{r}, \omega) e^{i\omega t}] \rangle \\ &= \frac{1}{8} \langle \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) \cdot \mathbf{D}^*(\mathbf{r}, \omega) + \mathbf{E}^*(\mathbf{r}, \omega) \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega) \\ & \quad + \mathbf{E}^*(\mathbf{r}, \omega) \cdot \mathbf{D}^*(\mathbf{r}, \omega) e^{2i\omega t} + \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega) e^{-2i\omega t} \rangle \\ &= \frac{1}{4} \langle \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) \cdot \mathbf{D}^*(\mathbf{r}, \omega) + \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega) e^{-2i\omega t} \rangle \\ &= \frac{1}{4} \text{Re} [\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) \cdot \mathbf{D}^*(\mathbf{r}, \omega)] \end{aligned} \quad (2-31)$$

同理

$$\frac{1}{2} \langle \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \rangle = \frac{1}{4} \text{Re} [\mathbf{B}(\mathbf{r}, \omega) \cdot \mathbf{H}^*(\mathbf{r}, \omega)] \quad (2-32)$$

所以

$$\langle U \rangle = \frac{1}{4} \text{Re} [\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) \cdot \mathbf{D}^*(\mathbf{r}, \omega) + \mathbf{B}(\mathbf{r}, \omega) \cdot \mathbf{H}^*(\mathbf{r}, \omega)] \quad (2-33)$$

2.2 光学常数与色散关系

光学常数，如折射率 $n(\omega)$ 、介电常数 $\varepsilon(\omega)$ 、电导率 $\sigma(\omega)$ ，并非真正意义上的常数，而一般是光频率的函数。光学常数随频率的变化关系，叫做色散关系。描述物质色散关系的模型主要有两种：洛伦兹模型（Lorentz）和德鲁德模型（Drude）^[61]。

洛伦兹色散理论适用于绝缘体和半导体：

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_{\infty} \left(1 + \frac{\omega_L^2 - \omega_T^2}{\omega_T^2 - \omega^2 - i\Gamma\omega} \right) \quad (2-34)$$

德鲁德色散理论主要适用于金属：

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_{\infty} - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + i\Gamma\omega} \quad (2-35)$$

另外，不同物质的色散关系还可以从光学常数手册中查得^[62]。

2.3 涨落耗散理论

2.3.1 Dirac 函数

Dirac 函数（又称 δ 函数）^[63]是一种广义函数。一维 Dirac 函数的形式如下：

$$\delta_{\xi}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\xi} & (0 \leq x \leq \xi) \\ 0 & (x \leq 0 \text{ 或 } x \geq \xi) \end{cases} \quad (2-36)$$

$$\delta(x) = \lim_{\xi \rightarrow 0} \delta_{\xi}(x) = \begin{cases} \infty & x = 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases} \quad (2-37)$$

式(2-37)称为一维 Dirac 函数，其具有以下性质：

- (1) $\iint_{R_{\xi}} \delta(x) dx dy = 1$ ，其中 $R_{\xi} : |x| < \xi$ ；
- (2) $\iint_R F(x) \delta(x - \xi) dx dy = F(\xi)$ ，其中 F 是区域 R 上的任意连续函数。

二维 Dirac 函数与一维 Dirac 函数类似，具有下面的性质：

$$\delta(x, y) = \delta(x) \delta(y) \quad (2-38)$$

即二维 Dirac 函数是两个一维 Dirac 函数的乘积。

2.3.2 涨落耗散理论的物理意义及数学描述

热辐射的产生是由于物质内部分子或电子热运动产生涨落电流，涨落的电流产生涨落的电磁场，电流是随机变量，但不同位置不同时刻的电场和磁场是相关的。涨落耗散理论采用系综平均（ensemble average）的方法对电流、电场、磁场等电磁场物理量进行描述。

系综平均是量子力学中经常提到的一种平均概念，其考虑在相同的时间和空间内、所有相似的系统求平均值。这种平均方法只有在实验或者计算可以无限重复的条件下才可以得到。本文中用 $\langle \bullet \rangle$ 表示系综平均。

物质的内部的涨落电流可以通过涨落耗散理论描述为下面的形式^[17]：

$$\langle j_m(\mathbf{r}', \omega) j_l^*(\mathbf{r}'', \omega') \rangle = 4\pi \varepsilon_0 \operatorname{Im}(\varepsilon) \omega \Theta(\omega, T) \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}'') \delta(\omega - \omega') \quad (2-39)$$

式中： ε_0 ——真空中的介电常数；

$j(\mathbf{r}', \omega)$ ——在 \mathbf{r}' 点产生的涨落电流的频率为 ω 的分量。

结合 Dirac 函数的定义，从式(2-39)中可以看出涨落耗散理论描述的涨落电流，其不同位置或不同频率分量是无关的。

2.4 格林函数法

格林函数法^[64]是求解数学物理方程的一种常用方法，在物理意义上可以将其解释为：一个系统的输入为源点 (ξ, η) 处的 δ 函数，格林函数是在场中任意一点 (x, y) 上所产生的响应。如果所研究的问题中输入和响应是线性的，那么，任意的源产生的响应就是相同边界条件的相应格林函数的叠加。电磁学中的源和相对应的电磁场就满足这样的线性关系，因此，格林函数法是解析求解电磁学问题的一种重要方法。在应用中，一般给出与给定问题几何条件相同，但边界条件更为简单的点源的解（格林函数），然后通过格林公式来求出几何条件相同，但边界条件更为复杂的，有任意源分布的问题的解，从而简化求解过程。

对于标量问题，用标量格林函数，可以将方程的解表示成标量格林函数与标量源乘积积分的形式。对于区域 V 中的源分布已知，该区域的波动方程定解问题可以表示为：

$$\nabla^2 \Phi(\mathbf{r}) + k^2 \Phi(\mathbf{r}) = -f(\mathbf{r}) \quad (2-40)$$

$$\alpha \Phi(\mathbf{r}) + \beta \frac{\partial}{\partial n} \Phi(\mathbf{r}) \Big|_S = p(\mathbf{r}) \quad (2-41)$$

与其对应的格林函数的边值问题为：

$$\nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + k^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad (2-42)$$

$$\alpha G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \beta \frac{\partial}{\partial n} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \Big|_S = 0 \quad (2-43)$$

则

$$\Phi(\mathbf{r}) = \iiint_V G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') f(\mathbf{r}') dV' + \oiint_S \left[G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n} \Phi(\mathbf{r}') - \Phi(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right] dS' \quad (2-44)$$

即可以通过求解格林函数 $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ ，简化问题的求解过程。

标量格林函数用于求解标量源问题，而对于电磁场问题，除少数情况可用标量格林函数来表示电磁场的直角坐标分量外，通常仅能用标量格林函数表示矢量位函数（或称矢势）的直角坐标分量，再通过矢量位函数导出电磁场，导致电磁场的表达式比较复杂。对于电磁场中的矢量源，一般用张量格林函数，或称并矢格林函数。

电磁场是矢量场，他们与矢量源之间满足非齐次矢量波动方程，用矢量表示为：

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{H} - k^2 \mathbf{H} = -i\omega \varepsilon \mathbf{J}^m + \nabla \times \mathbf{J} \quad (2-45)$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} - k^2 \mathbf{E} = -i\omega \mu \mathbf{J} + \nabla \times \mathbf{J}^m \quad (2-46)$$

式中： \mathbf{J}^m ——电磁源。

设在有界空间区域 V 中仅有电流源，在区域边界 S 上给出电场切向分量和磁场的切向分量，则电场的边值问题为：

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} - k^2 \mathbf{E} = -i\omega \mu \mathbf{J} \quad (2-47)$$

$$\hat{\mathbf{e}}_n \times \mathbf{E} \Big|_S = \mathbf{f} \quad (2-48)$$

或

$$\hat{\mathbf{e}}_n \times \nabla \times \mathbf{E} \Big|_S = \mathbf{g} \quad (2-49)$$

与其对应的格林函数的边值问题为：

$$\nabla \times \nabla \times \vec{\mathbf{G}} - k^2 \vec{\mathbf{G}} = -\vec{\mathbf{I}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (2-50)$$

$$\hat{\mathbf{e}}_n \times \vec{\mathbf{G}} \Big|_S = 0 \quad (2-51)$$

或

$$\hat{e}_n \times \nabla \times \vec{G}|_S = 0 \quad (2-52)$$

则

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = & -i\omega\mu \iiint_V \vec{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}') dV' \\ & + \iint_S \left\{ \nabla' \times \vec{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot [\hat{e}_n \times \mathbf{E}(\mathbf{r}')] - i\omega\epsilon \vec{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot [\hat{e}_n \times \mathbf{H}(\mathbf{r}')] \right\} dS' \end{aligned} \quad (2-53)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{r}) = & \iiint_V \vec{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \nabla' \times \mathbf{j}(\mathbf{r}') dV' \\ & + \iint_S \left\{ -\nabla' \times \vec{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot [\hat{e}_n \times \mathbf{H}(\mathbf{r}')] - i\omega\epsilon \vec{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot [\hat{e}_n \times \mathbf{E}(\mathbf{r}')] \right\} dS' \end{aligned} \quad (2-54)$$

对于半无限厚平面物体内部电流源 $\mathbf{j}(\mathbf{r}', \omega)$ ，研究区域为整个空间，其产生的电场和磁场用格林函数法表示为：

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = i\mu\omega \int \vec{G}^E(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}', \omega) d^3\mathbf{r}' \quad (2-55)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega) = \int \vec{G}^H(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}', \omega) d^3\mathbf{r}' \quad (2-56)$$

其中

$$\vec{G}^E(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{i}{16\pi^3} \int \frac{1}{\gamma_2} \left(\hat{s} t_{21}^s \hat{s} + \hat{p}_1^+ t_{21}^p \hat{p}_2^+ \right) e^{i\mathbf{K} \cdot (\mathbf{R} - \mathbf{R}')} e^{i(\gamma_1 z - \gamma_2 z')} d^2 K \quad (2-57)$$

$$\vec{G}^H(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{k_0}{16\pi^3} \int \frac{1}{\gamma_2} \left(-\hat{p}_1^+ t_{21}^s \hat{s} + \hat{s} t_{21}^p \hat{p}_2^+ \right) e^{i\mathbf{K} \cdot (\mathbf{R} - \mathbf{R}')} e^{i(\gamma_1 z - \gamma_2 z')} d^2 K \quad (2-58)$$

式中： t_{21}^s —— s 偏振电磁波从介质 2 到介质 1 中的透射系数；

t_{21}^p —— p 偏振电磁波从介质 2 到介质 1 中的透射系数。

对两半无限厚平行平面的物体内部电流源 $\mathbf{j}(\mathbf{r}_2, \omega)$ ，其格林函数为：

$$\vec{G}^E(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{i}{16\pi^3} \int \frac{1}{\gamma_2} \left(\hat{s} t_{21}^s \hat{s} + \hat{p}_1^+ t_{21}^p \hat{p}_2^+ \right) e^{i\mathbf{K} \cdot (\mathbf{R} - \mathbf{R}')} e^{i[\gamma_1(z-d) - \gamma_2 z']} d^2 K \quad (2-59)$$

$$\vec{G}^H(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{k_0}{16\pi^3} \int \frac{n_1}{\gamma_2} \left(-\hat{p}_1^+ t_{21}^s \hat{s} + \hat{s} t_{21}^p \hat{p}_2^+ \right) e^{i\mathbf{K} \cdot (\mathbf{R} - \mathbf{R}')} e^{i[\gamma_1(z-d) - \gamma_2 z']} d^2 K \quad (2-60)$$

其中

$$t_{12}^s = \frac{t_{13}^s t_{32}^s e^{i\gamma_3 d}}{1 - r_{13}^s r_{32}^s e^{2i\gamma_3 d}} \quad (2-61)$$

而 p 偏振的透射系数计算公式只需将上式中的上角标 s 换成 p。

2.5 近场现象的电磁学解释

2.5.1 负介电常数媒质界面处产生的倏逝波

假设介电常数为 $\varepsilon = \varepsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)$ 的非磁性各向同性等离子体材料，当 $\omega < \omega_p$ 时，

$k = \omega \sqrt{\mu\varepsilon} = ik^I$ ，其中 $k^I = \omega \left[\mu\varepsilon_0 \left(\frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1 \right) \right]^{1/2}$ 。平面波的电场 \mathbf{E} 为 \hat{x} 方向，传播方向

为 \hat{z} 向，此时可得

$$\mathbf{E} = \hat{x} E_0 e^{-k^I z} \quad (2-62)$$

$$\mathbf{H} = \hat{y} \frac{ik^I}{\omega\mu} E_0 e^{-k^I z} \quad (2-63)$$

即电磁场的振幅都随着离开界面的距离 z 的增大以指数规律减小，此时的电磁波称为倏逝波，相应的复坡印廷矢量为：

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* = -\hat{z} \frac{ik^I}{\omega\mu} |E_0|^2 e^{-2k^I z} \quad (2-64)$$

时间平均坡印廷矢量为：

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(\mathbf{S}) = 0 \quad (2-65)$$

可见在垂直于界面的方向上，平均能流密度为 0，即倏逝波并不传播能量，这正是倏逝波与均匀平面电磁波的最大不同之处。

2.5.2 发生全反射时界面处的倏逝波

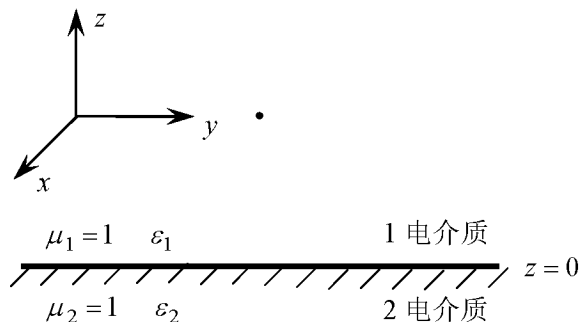


图 2-1 发生全反射时的几何结构示意图

当均匀平面电磁波入射到界面时可能会发生全反射^[65]，其几何结构如图 2-1 所示。电介质 1, 2 都是无损耗材料且 $\mu_1 = \mu_2 = 1$ 。电磁波频率为 ω ，在电介质 1 中界面处的波矢量为 k_1 ，三个分量 k_{1x} ， k_{1y} ， k_{1z} 皆为正数。

令 A 为入射场电场强度的振幅。设 A 为复数，其中包含了初相位的部分，而随时间和位置变化的部分为

$$\tau_i = \omega \left(t - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}}{v_1} \right) = \omega \left(t - \frac{x \sin \theta_i + z \cos \theta_i}{v_1} \right) \quad (2-66)$$

式中： v_1 ——电磁波在电介质 1 中的频率；

\mathbf{s} ——单位矢量，方向为电磁波传播方向。

把各个场矢量分解成平行于入射面（用 \parallel 表示）和垂直于入射面（用 \perp 表示）的两个分量。于是入射电场强度的各分量为：

$$E_{1x} = -A_{\parallel} \cos \theta_i e^{-i\tau_i} \quad (2-67)$$

$$E_{1y} = A_{\perp} e^{-i\tau_i} \quad (2-68)$$

$$E_{1z} = A_{\parallel} \sin \theta_i e^{-i\tau_i} \quad (2-69)$$

根据 $\mathbf{H} = \sqrt{\epsilon} \mathbf{s} \times \mathbf{E}$ ，可得到磁场强度各分量：

$$H_{1x} = -A_{\perp} \cos \theta_i \sqrt{\varepsilon_1} e^{-i\tau_i} \quad (2-70)$$

$$H_{1y} = -A_{\parallel} \sqrt{\varepsilon_1} e^{-i\tau_i} \quad (2-71)$$

$$H_{1z} = A_{\perp} \sin \theta_i \sqrt{\varepsilon_1} e^{-i\tau_i} \quad (2-72)$$

同理，设 T 和 R 为透射波和反射波的复振幅，则透射场为：

$$E_{2x} = -T_{\parallel} \cos \theta_t e^{-i\tau_t} \quad (2-73)$$

$$E_{2y} = T_{\perp} e^{-i\tau_t} \quad (2-74)$$

$$E_{2z} = T_{\parallel} \sin \theta_t e^{-i\tau_t} \quad (2-75)$$

$$H_{2x} = -T_{\perp} \cos \theta_t \sqrt{\varepsilon_2} e^{-i\tau_t} \quad (2-76)$$

$$H_{2y} = -T_{\parallel} \sqrt{\varepsilon_2} e^{-i\tau_t} \quad (2-77)$$

$$H_{2z} = T_{\perp} \sin \theta_t \sqrt{\varepsilon_2} e^{-i\tau_t} \quad (2-78)$$

其中

$$\tau_t = \omega \left(t - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}}{v_2} \right) = \omega \left(t - \frac{x \sin \theta_t + z \cos \theta_t}{v_2} \right) \quad (2-79)$$

而反射场

$$E_{rx} = -R_{\parallel} \cos \theta_r e^{-i\tau_r} \quad (2-80)$$

$$E_{ry} = R_{\perp} e^{-i\tau_r} \quad (2-81)$$

$$E_{rz} = R_{\parallel} \sin \theta_r e^{-i\tau_r} \quad (2-82)$$

$$H_{rx} = -R_{\perp} \cos \theta_r \sqrt{\varepsilon_1} e^{-i\tau_r} \quad (2-83)$$

$$H_{ry} = -R_{\parallel} \sqrt{\varepsilon_1} e^{-i\tau_r} \quad (2-84)$$

$$H_{rz} = R_{\perp} \sin \theta_r \sqrt{\varepsilon_1} e^{-i\tau_r} \quad (2-85)$$

其中

$$\tau_r = \omega \left(t - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}}{v_1} \right) = \omega \left(t - \frac{x \sin \theta_r + z \cos \theta_r}{v_1} \right) \quad (2-86)$$

当入射角 $\theta_i > \theta_{cr}$ ，即满足全反射条件时，折射角 θ_t 满足

$$\frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_t} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_1 \mu_1}} \quad (2-87)$$

$$\cos \theta_t = \sqrt{1 - \sin^2 \theta_t} = \sqrt{1 - \frac{\varepsilon_1 \mu_1}{\varepsilon_2 \mu_2} \sin^2 \theta_i} = i \sqrt{\frac{\varepsilon_1 \mu_1}{\varepsilon_2 \mu_2} \sin^2 \theta_i - 1} \quad (2-88)$$

此时产生的透射电磁场为

$$E_{2x} = -T_{\parallel} \cos \theta_i e^{-i\tau_t} = -T_{\parallel} e^{-i\tau_t} i \sqrt{\frac{\varepsilon_1 \mu_1}{\varepsilon_2 \mu_2} \sin^2 \theta_i - 1} \quad (2-89)$$

$$E_{2y} = T_{\perp} e^{-i\tau_t} \quad (2-90)$$

$$E_{2z} = T_{\parallel} \sin \theta_i e^{-i\tau_t} = T_{\parallel} \sin \theta_i \sqrt{\frac{\varepsilon_1 \mu_1}{\varepsilon_2 \mu_2}} e^{-i\tau_t} \quad (2-91)$$

$$H_{2x} = -T_{\perp} i \sqrt{\frac{\varepsilon_1 \mu_1}{\varepsilon_2 \mu_2} \sin^2 \theta_i - 1} \sqrt{\varepsilon_2} e^{-i\tau_t} \quad (2-92)$$

$$H_{2y} = -T_{\parallel} \sqrt{\varepsilon_2} e^{-i\tau_t} \quad (2-93)$$

$$H_{2z} = T_{\perp} \sqrt{\varepsilon_2} e^{-i\tau_t} \sqrt{\frac{\varepsilon_1 \mu_1}{\varepsilon_2 \mu_2}} \sin \theta_i \quad (2-94)$$

可以求得 z 方向的坡印廷矢量为：

$$S_z = E_{2x} \times H_{2y}^* - E_{2y} \times H_{2x}^* = -i \sqrt{\varepsilon_2} \sqrt{\frac{\varepsilon_1 \mu_1}{\varepsilon_2 \mu_2} \sin^2 \theta_i - 1} \left(|T_{\parallel}|^2 - |T_{\perp}|^2 \right) \quad (2-95)$$

$$\langle S_z \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(S_z) = 0 \quad (2-96)$$

式(2-96)说明在垂直于界面的方向上没有电磁能量的传播。

$$S_x = E_{2y} \times H_{2z}^* - E_{2z} \times H_{2y}^* = \left(|T_\perp|^2 + |T_\parallel|^2 \right) \sin \theta_i \sqrt{\frac{\epsilon_1 \mu_1}{\mu_2}} \quad (2-97)$$

$$\langle S_x \rangle = \frac{1}{2} \left(|T_\perp|^2 + |T_\parallel|^2 \right) \sin \theta_i \sqrt{\frac{\epsilon_1 \mu_1}{\mu_2}} \quad (2-98)$$

由上式可知，当发生全发射时，透射波在 z 方向上没有能量的传播，能量沿着平行与物质界面的方向传播，这是一种表面波。

2.6 本章小结

求解微纳米尺度下的热辐射传输问题不能采用经典 Stefan-Boltzmann 定律，必须从电磁辐射角度出发，考虑近场倏逝波的影响，考虑电磁波的相干性。本章是辐射传输的理论基础，介绍了 Maxwell 方程组的时域和频域形式，介绍了物质的光学常数和色散关系，介绍了格林函数法，介绍了涨落耗散理论，最后推导得出了平面电磁波在媒质与真空的界面处产生的倏逝波，并指出其表征能量传输的时均坡印廷矢量在垂直于界面方向上是 0，而能量沿着平行于边界的方向传播，为后面章节的推导和分析给出了理论基础。

2 近场热辐射简介

经典的热辐射理论与黑体的概念密切相关。黑体是指可吸收所有波长、所有角度的所有辐射的一个理想物体。一个黑体既是一个能吸收所有电磁波的理想物体，也是一个理想的发射体。黑体辐射谱遵从普朗克分布，物体在温度为 T 时所辐射的电磁波的峰值波长由维恩位移定律决定^[52]。普朗克黑体辐射公式是基于玻尔兹曼统计力学方法发展而来的，它开启了量子力学的大门^[53]。普朗克因此获得了 1918 年诺贝尔物理学奖。这里黑体辐射完全是从几何光学的观点来看的，没有考虑到物体间的距离比辐射电磁波波长小很多的情形。所以，在经典热辐射理论中，热传输方程将辐射电磁波简化为一条直线，使用光线追踪法来求解两者间的热辐射^[54]。在几何光学中，艾里斑的透射率为 1，即透过所有射向它的光线。然而，当入射光的波长小到可以和艾里斑的直径相比拟时，衍射效应不可再被忽略，透射率可以小于或大于 1^[55]。在有些情况下，物体吸收的能量可以大于辐射热流，即吸收率大于 1，超过了黑体辐射极限。对于前一章中介绍过的倏逝波的情形，在物体表面小于 1 个波长的距离内的薄层内的能量密度可以远大于体内，并且越接近表面，能量密度越高。当两个物体的间距远小于热辐射的特征波长时，可以发生近场的光学隧穿效应，大大增强热辐射。近年来，有大量关于光波通过小孔、纳米尺度间距的热辐射研究和纳米结构的电磁波辐射的研究。这一领域依旧有着很多的内容需要进一步的发展与阐述。这一章里主要介绍近场热辐射的基本概念和理论，包括近场隧穿与倏逝波在近场热辐射中的作用、两平板间的近场热辐射公式等，同时对近场热辐射的相关实验与应用作了简要介绍。

2.1 近场热辐射基本概念

物体间热传输过程可以分成三类：传导、辐射、对流。这也是我们的日常生活中常见的三种热传输现象。由于存在温度差，两个接触的物体间的热传递过程是传导。而对流是指热的传输通过流动介质，从一处传输到另一处的现象。热辐射则是指从一个物体发射出的电磁波传播到另一个物体而被吸收的过程。由于电磁波的传播可以不依赖于任何传播介质，热辐射也可以不需要中间介质。由于辐射是靠的是电磁波的传播，在这三种热传输形式中，辐射是速度最快的热传输方式。在真空中的两个物体的热传输只能是以辐射的形

式进行。

热辐射的过程可以分成 4 个基础的过程：发射、吸收、散射和辐射能量的传播^[56]。一般来说，发射是指辐射能从一个物体里发出来的过程，是物体的内能转化成电磁波能量的过程。处于绝对零度以上的物体都会发射电磁波。物质发射出能量时，伴随着物质内的能量载体（电子、原子或分子、声子等）从高能级向低能级跃迁的过程，而发射出来电磁波的能量载体是光子。吸收是指能量被物体吸收的过程，能量的转化过程则与发射相反，是能量载体从低能级向高能级的跃迁过程。

散射是指辐射能量的重定向，包含的光学现象有折射、反射、透射和衍射^[57]。从微观层面上讲，也是很基础的物理过程，光学散射现象如折射、反射、透射、衍射都是原子层面的散射所表现出来的宏观的行为。然而，这种从微观层面上描述的散射现象一般不能用来直接解决实际应用中的辐射热传输问题，实际中描述发射、吸收和散射过程需要更加简化的模型。

在热辐射的远场区域，即物体间的间距远远大于发射的电磁波的波长时，辐射能量的传输形式可以使用射线光学或几何光学来近似地表示，如图 2.1(a) 所示。当使用射线来表示电磁能量的传输方向时，不会考虑电磁波的相位关系。经典的辐射理论中，热辐射的发射过程在热传输过程中由普朗克黑体辐射公式来表示。在光线传播方向由吸收或散射引起的衰减与辐射光强度成正比关系，比例系数称为吸收系数或散射系数。这些系数可以由量子力学来推导得到，也能用波动光学理论推导得到。近场范围内的热辐射传输是指当物

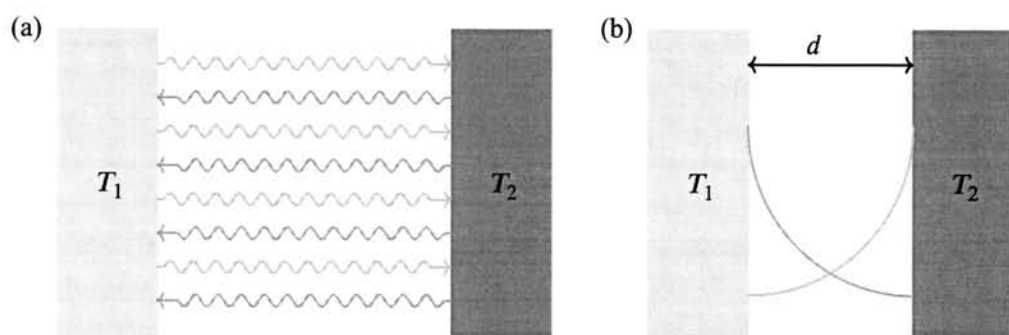


图 2.1 (a) 远场辐射示意图，电磁波采用射线法来描述，不必考虑相位关系
(b) 近场辐射示意图，两物体间间距很小时，存在倏逝波的隧穿

体间的距离小于或等于发射电磁波的波长时的辐射，如图 2.1(b) 所示。此时，物体间存在着电磁波的隧穿，并且这部分对热辐射的贡献远远地大于远场贡献。近场和远场的分界是

间距小于一个临界值 λ_{\max} 。由普朗克定律有，温度为 T 的黑体辐射谱 $u_\lambda(\lambda, T)$:

$$u_\lambda(\lambda, T) = \frac{2hc_0^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc_0/\lambda kT} - 1} \tag{2.1}$$

对 $u_\lambda(\lambda, T)$ 求导，令结果为 0，可以得到关于 λ 的方程:

$$\frac{\partial u_\lambda}{\partial \lambda} = 2hc_0^2 \left(\frac{hc_0}{kT\lambda^7} \frac{e^{hc_0/\lambda kT}}{(e^{hc_0/\lambda kT} - 1)^2} - \frac{1}{\lambda^6} \frac{5}{e^{hc_0/\lambda kT} - 1} \right) = 0 \tag{2.2}$$

求解这个方程，可以得到临界值 λ_{\max} :

$$\lambda_{\max} = \frac{2.898 \times 10^6 \text{ nm} \cdot \text{K}}{T} \tag{2.3}$$

图 2.2 是临界距离随温度的变化关系，表 2.1 给出了部分温度下近场热辐射对应的临界距离。从表中可以看到，在室温下， $T = 300 \text{ K}$ 时，辐射电磁波的峰值波长约为 $7.66 \mu\text{m}$ ($\omega = 1305.5 \text{ cm}^{-1}$)。随着温度的升高，峰值波长向短波方向移动。

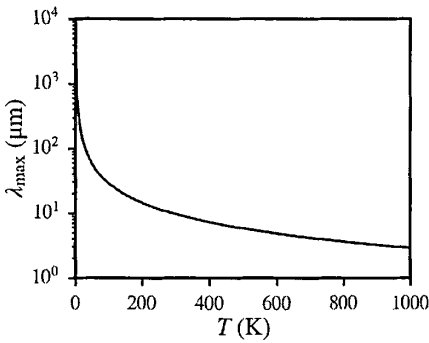


表 2.1 不同温度下的临界距离值

$T(\text{K})$	$\lambda_{\max}(\mu\text{m})$
1	2298.8
300	7.66
500	4.6
1000	2.3

图 2.2 临界距离值（热辐射中心波长）随温度的变化

2.2 近场热辐射的基本理论与计算方法

近场热辐射的电磁理论是基于 Maxwell 方程组的电磁理论。Maxwell 方程组描述的是电磁场、源和材料的电磁响应的过程。物质的辐射吸收是通过材料的介电系数的虚部（折射率的虚部）来体现的。电磁波的散射过程可以通过假设总场是入射场和散射场的和时求解 Maxwell 方程组来获得。然而，热辐射的发射过程并不包含在 Maxwell 方程组中。由 Rytov 和他的同事建立起来的波动电动力学 (Fluctuational electrodynamics) 提供了连接 Maxwell 方程组和热辐射发射过程的桥梁^[58]。在 1971 年，Polder 和 Van Hove 提出了两个

距离很近的物体间的热辐射理论, 受到了广大的认可^[59]。他们的理论基于波动电动力学, 认为热辐射的源是由物体内的热产生的电流元。在这样的模型下, 结果得到了极大的简化^[60]。

考虑一个系统, 包含有两个分隔开的物体, 如图 2.3 所示。时谐场中的含有电流源的 Maxwell 方程组可以表示为:

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = i\omega \mathbf{B}(\mathbf{r}, \omega), \quad (2.4a)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega) = -i\omega \mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega) + \mathbf{J}(\mathbf{r}, \omega). \quad (2.4b)$$

式中, \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 是复电场和磁场矢量, \mathbf{r} 是位移矢量, ω 是角频率, \mathbf{D} 和 \mathbf{B} 分别是电位移矢量和磁感应强度, 可以通过物质方程与 \mathbf{E} 和 \mathbf{H} 联系起来。由式 2.4 可以得到下面的波动方程:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) - \epsilon(\omega) \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = i\omega \mu_0 \mathbf{J}(\mathbf{r}, \omega), \quad (2.5a)$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega) - \epsilon(\omega) \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega) = \nabla \times \mathbf{J}(\mathbf{r}, \omega). \quad (2.5b)$$

其中 μ_0 是真空磁导率, $\epsilon(\omega)$ 是材料的介电系数。电流密度 $\mathbf{J}(\mathbf{r}, \omega)$ 是在热源内随机分布的电流源, 是辐射电磁波的来源, 满足由热力学耗散理论得到的统计关联函数^[61]:

$$\langle j_l(\mathbf{r}, \omega) j_m^*(\mathbf{r}', \omega) \rangle = \frac{4}{\pi} \epsilon_0 \epsilon''(\omega) \omega \Theta_0(\omega, T) \delta_{lm} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (2.6)$$

其中

$$\Theta_0(\omega, T) = \hbar \omega \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\exp(\hbar \omega / (k_B T)) - 1} \right) \quad (2.7)$$

是频率为 ω 谐振子包含零点能 $\frac{1}{2} \hbar \omega$ 的平均能量, δ 是克罗内克 δ 函数。式 2.6 中 δ_{lm} 表示正交方向的电流不产生耦合, $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ 排除了自身空间分布^[62]。在热辐射计算中, 由于常数项零点能通常对结果不会产生影响, 所以一般被忽略。

对于给定的问题, 结合合适的边界条件, 可以从式 2.5-2.6 计算平均坡印亭矢量 $\mathbf{S}(\mathbf{r}, \omega)$:

$$\langle \mathbf{S}(\mathbf{r}, \omega) \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \langle \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \rangle \quad (2.8)$$

其中电场和磁场可以使用并矢格林函数推导得到:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = i\omega \mu_0 \int_V d\mathbf{r}' \vec{\mathbf{G}}^{ee}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}', \omega), \quad (2.9a)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega) = \int_V d\mathbf{r}' \vec{\mathbf{G}}^{me}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}', \omega), \quad (2.9b)$$

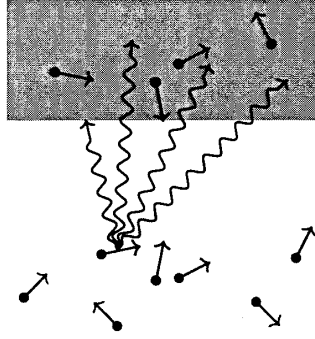


图 2.3 热源内的随机分布的电偶极子产生电磁波向外辐射

由式 2.9 可以得到场与电流的关系^[63]:

$$\langle E_i(\mathbf{r}, \omega) H_j^*(\mathbf{r}', \omega) \rangle = i \frac{4\epsilon''(\omega)\omega^2}{\pi c^2} \Theta_0(\omega, T) \int_V d\mathbf{r}' G_{il}^{ee}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) G_{jl}^{me*}(\mathbf{r}', \mathbf{r}, \omega). \quad (2.10)$$

这样, 式 2.10 中唯一的未知项 $\langle E_i(\mathbf{r}, \omega) H_j^*(\mathbf{r}', \omega) \rangle$ 可以由式 2.6 来计算。上述并矢格林函数 $G_{il}^{ee}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega)$ 和 $G_{jl}^{me*}(\mathbf{r}', \mathbf{r}, \omega)$ 与系统的结构相关。

通过求解并矢格林函数, 可以得到温度分别为 T_1 、 T_2 、间距为 d 的两无限大平板的近场热辐射的净热流 $h(T_1, T_2, d)$ ^[64,65]:

$$h(T_1, T_2, d) = \int_0^\infty \frac{d\omega}{4\pi^2} [\Theta(\omega, T_1) - \Theta(\omega, T_2)] \int_0^\infty dk k [\tau_s(\omega, k) + \tau_p(\omega, k)] \quad (2.11)$$

在上式中, 后一项关于 k 的积分结果是关于 ω 的函数, 可以认为是一项关于 ω 的权重函数。式 2.11 中的 τ_p, τ_s 是关于 p 极化入射波和 s 极化入射波的透射几率。对于行波 ($k < \omega/c$) 与倏逝波 ($k > \omega/c$), τ_p 与 τ_s 可以表示为:

$$\tau_{\alpha=s,p} = \begin{cases} \frac{(1 - |r_\alpha^{01}|^2)(1 - |r_\alpha^{02}|^2)}{|1 - \exp(2ik_0^z d) r_\alpha^{01} r_\alpha^{02}|^2}, & k < \omega/c \\ \frac{4\text{Im}(r_\alpha^{01})\text{Im}(r_\alpha^{02}) \exp(-2|k_0^z|d)}{|D_\alpha|^2}, & k > \omega/c \end{cases} \quad (2.12)$$

其中 r_α^{0i} ($\alpha = s, p, i = 1, 2$) 是 α 极化入射波从真空入射到介质 i 的反射系数。 $D_\alpha = 1 - r_\alpha^{01} r_\alpha^{02} \exp(-2|k_0^z|d)$ 是 Fabry-Perot 型分母项, k_0 是真空波数, k_0^z 是真空波矢的 z 分量。

式 2.11 是计算两无限大平板间热辐射的基础。如果真空间隙两边的平板换成多层膜结构, 这种情形下由于各层都可以作为源与接收体, 式 2.11 原则上是不适用的。如果只集中于真空间隙内的场的情况, 那么式 2.11 依然是有效的^[66]。这时, 反射系数需要改写成由真空入射到多层膜的反射系数。

在实验中,更为常用的是热辐射系数 $h_g(T, d)$ 。当源与接收体的温度差很小 ($T_1 \approx T_2$) 时,它们之间的热辐射系数为^[67,68]:

$$\begin{aligned} h_g(T, d) &= \lim_{(T_1 - T_2) \rightarrow 0} \left| \frac{h(T_1, T_2, d)}{T_1 - T_2} \right| \\ &= \int_0^\infty d\omega \int_0^\infty \frac{\partial \Theta(\omega, T)}{\partial T} \frac{dk k}{4\pi^2} [\tau_s(\omega, k) + \tau_p(\omega, k)] \end{aligned} \quad (2.13)$$

上述无限大平板间近场热辐射的计算公式(式2.11和式2.13)可以适用于各种各样的材料和系统,甚至在利用有效介质理论(effective medium theories, EMT)时,可以计算具有微纳结构和复合结构之间的近场热辐射^[69-71]。

除了使用上述的辐射热流 h 与热辐射系数 h_g 来衡量近场热辐射外,还有电磁能量密度和与之密切相关的局域态密度(local density of states, LDOS)、热辐射空域和时域相关长度、能流路径与穿透深度等^[72-75]。在近场区域内,上述指标都与倏逝波密切相关。此外,还有更多关于近场热辐射的热力学分析等^[76,77]。

2.2.1 近场热辐射中的表面极化激元

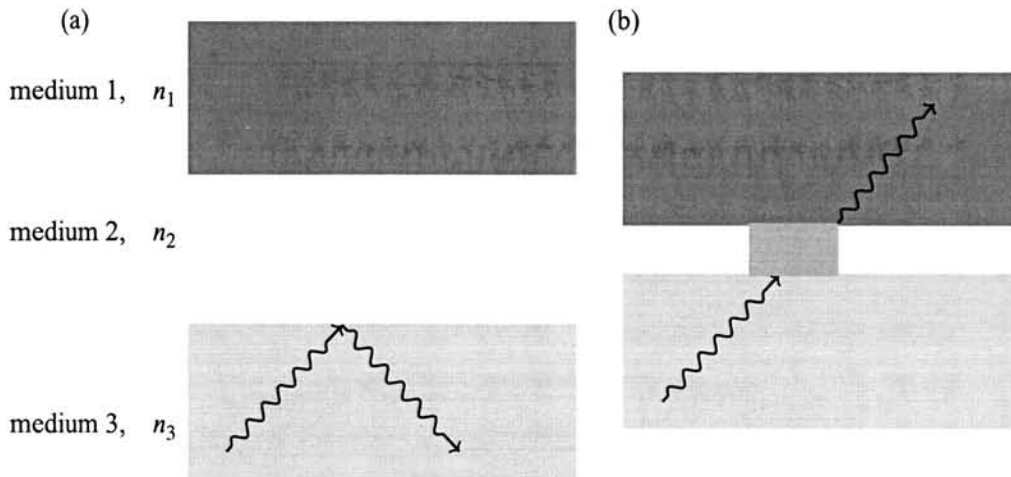


图 2.4 倏逝波在两个无限大平板间隧穿示意图。(a) 当间距 d 较大时,不会发生隧穿。(b) 当间距较小时,有隧穿效应发生。

考虑两个无限大平板 1 和 3, 它们的间距为 d , 它们的折射率分别是 n_1 和 n_3 , 如图 2.4 所示, 介质 2 是真空间隙, 即 $n_2 = 1$ 。当不存在介质 3 时, 从前面的全反射和倏逝波可知, 对平面波从介质 1 入射到真空时, 只有平行波矢 $k_x < k_0$ 的入射波可以透射

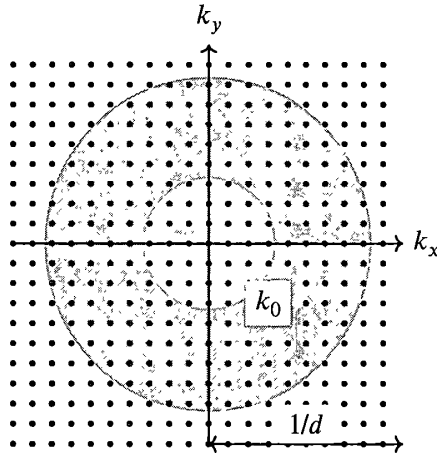


图 2.5 介质中的倏逝波和行波，在最中心区域的是行波，可以在真空中传播，而圆环区域在真空中是倏逝波，对介质而言则是行波。注意到只有在间距 d 很小时，隧穿电磁波的贡献才会占据主导地位。

进入真空中，即图 2.5 中内圆所限定范围，而 $k_x > k_0$ 的入射波都会被全反射。而介质 1 中 k_x 的最大值为 $n_1 k_0$ （其它两个分量均为 0 时），即图 2.5 中外圆的边界。那么这种情况下 k_x 大小位于两圆之间时，只能作为倏逝波在两个介质界面处传播。这时，如果在介质 2 上方引入第 3 个介质，与介质 1 的距离为 d ，（即介质 2 的厚度为 d ），为方便讨论，介质 3 的折射率设定为 $n_3 = n_1$ 。当 d 远大于介质 1 中入射的光波波长时，这种情况下就是远场时的情形，依然只有 $k_x < k_0$ 的波可以经由介质 1 传播到介质 3，而 $k_x > k_0$ 的电磁波入射后发生全反射后，倏逝波只能在 1 和 2 表面衰减，如图 2.4(a) 所示。当 d 减小到小于一定距离时，倏逝波可以经由介质 2 耦合进入到介质 3，如图 2.4(b) 所示，这时介质 3 中的接收到了从 1 传输过去的能量。此时，介质 1 中 k_x 位于图 2.5 中圆环内的入射波也能传递到介质 3，这就是近场情况下的热辐射的情形^[78,79]。

对于折射率为 n_1 为无损介质材料，当间距 $d \rightarrow 0$ 时的最大热辐射是黑体辐射的 n_1^2 倍，这一极限值来自于无损材料中的黑体辐射强度正比于 n_1^2 ^[80]。

对于温度不太高的情况，辐射体的发射波长主要集中于中远红外波段（3 – 15 μm ），如表 2.1 所示。在此波段，很多极化晶体能支持表面声子激元^[81]。对于各类声子极化晶体，描述他们的电磁响应时，Drude 模型不再适用，这时，应该使用 Lorentz 模型^[61]：

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_\infty + \sum_{j=1}^N \frac{S_j \omega_j^2}{\omega_j^2 - i\gamma_j \omega - \omega^2} \quad (2.14)$$

式中， ϵ_∞ 是高频时的介电常数， $S_j = \omega_{p,j}/\omega_j$ 是振荡强度。例如，碳化硅（SiC）是一种典

型的电介质，其相对介电系数可以使用 Lorentz 模型表示为^[72]

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_{\infty} + \epsilon_{\infty} \frac{\omega_{\text{LO}}^2 - \omega_{\text{TO}}^2}{\omega_{\text{TO}}^2 - i\gamma\omega - \omega^2} \quad (2.15)$$

其中 $\epsilon_{\infty}=6.7$, $\omega_{\text{LO}} = 1.827 \times 10^{14} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, $\omega_{\text{TO}} = 1.495 \times 10^{14} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ 和 $\gamma = 0.9 \times 10^{12} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ 。

图 2.6(a) 给出了碳化硅的介电系数 $\epsilon(\omega)$ 实部与虚部，从图中可以到，碳化硅有一个共振峰在 $\omega = \omega_{\text{TO}}$ 处。

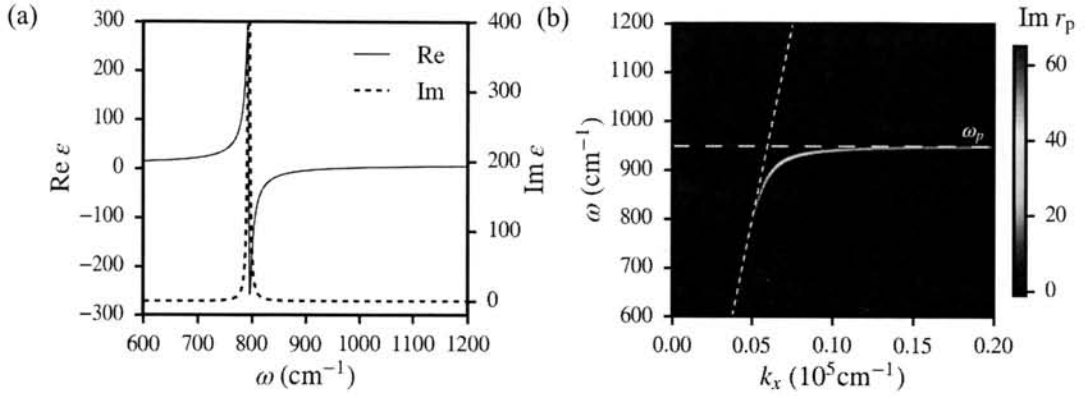


图 2.6 (a) 碳化硅的介电系数谱，包含实部（实线）与虚部（虚线）。(b) 空气-碳化硅组成界面的色散关系，图中的横向虚线为 SiC 的表面声子激发截止频率 ω_p ，斜向虚线为光锥线。

考虑由两无限大的碳化硅组成的平板，它们的间距为 d 。利用上一章的计算两界面反射系数的公式，将式 2.15 代入到式 1.21 中，可以得到真空-碳化硅形成的界面的反射系数 r_p ，即色散关系如图 2.6(b) 所示。图中的亮线的渐近线是碳化硅的表面声子激发的截止频率 ω_p ，可以表示为 $\omega_p = \sqrt{\epsilon_{\infty}\omega_{\text{LO}}^2 + \omega_{\text{TO}}^2/(1 + \epsilon_{\infty})}$ ，大约是 948 cm^{-1} ($10.55 \mu\text{m}$)^[56]。

利用式 2.11，可以计算碳化硅平板间的近场热辐射效应。在常温下，设置 $T_1 = 300 \text{ K}$ ， $T_2 = 299 \text{ K}$ ，可以得到碳化硅间的辐射热流如图 2.7(a) 所示，图中同时给出了 p 极化波与 s 极化波下的倏逝波与行波的贡献。从图中可以看出，近距离时的热流绝大多数来自于 p 极化倏逝波隧穿贡献。例如， $d = 10 \text{ nm}$ 时，这个占比达到了 99.66%，这时 p 极化波热流比 s 极化波热流高出几个量级。图中同时给出了黑体辐射值，黑体辐射热流不随间距而变化，为 $h_{\text{BB}} = \sigma_{\text{SB}}(T_1^4 - T_2^4) = 6.09 \text{ Wm}^{-2}$ ，其中 σ_{SB} 是 Stefan-Boltzman 常数。可以看出，碳化硅间的近场热辐射高出黑体辐射值几个量级。在近场时，无论是 p 极化波还是 s 极化波，行波的贡献都很小，都在 h_{BB} 以下。

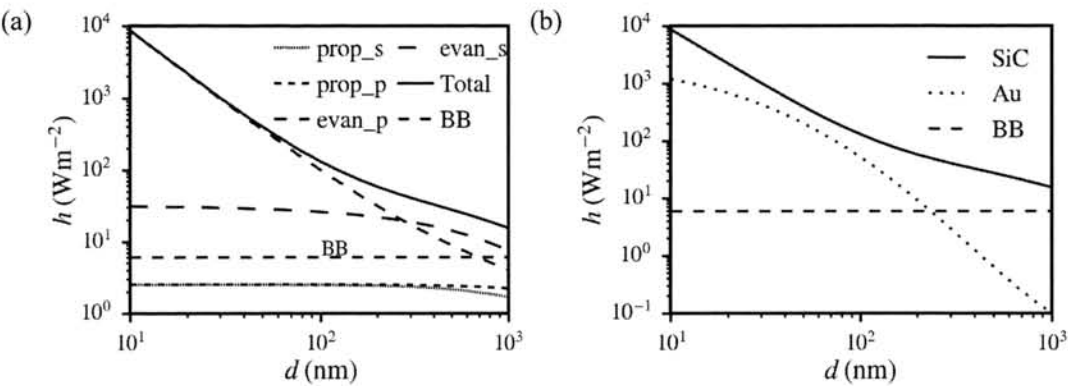


图 2.7 (a) 碳化硅的近场辐射热流，其中实线是总辐射热流，倏逝波 (evan) 与行波 (prop) 的 p 分量 (- p) 与 s 分量 (- s) 的贡献为图中的虚线，点划线为黑体的辐射热流。(b) 碳化硅的近场辐射热流与金的近场辐射热流的对比

由第 1 章的计算可知，金在中远红外波段也存在表面等离子激元。图 2.7(b) 给出了碳化硅间的辐射热流与金之间的辐射热流的对比。可以看到，金的总辐射热流要低于碳化硅很多，这与金的损耗很大有关。在这个波段，金的体耗散很大，并不是一个良好的发射体^[82]。

2.2.2 近场热辐射的计算方法

式 2.10 中并矢格林函数是理解近场热辐射的基础，由并矢格林函数导出的式 2.11 是计算两无限大平板间近场热辐射的基础，但是对任意形状的物体间的近场热辐射，式 2.11 不再适用了。下面简要介绍几种近年来由经典的电磁学计算方法发展起来的用于近场热辐射的计算方法。

2.2.2.1 Derjaguin 近似法

基于上述的无限大平板间的近场热辐射公式，Derjaguin 近似法可用于计算一些曲面形状的物体间的近场热辐射。近年来有研究者使用这种方法来计算球体与球体间^[83]、球体与平板间的近场热辐射^[84]。Derjaguin 近似法的基本思想是将曲面微分成很多的小型平面组成，使用式 2.11 计算所分隔的这些微分平面间的近场热辐射。图 2.8 是使用 Derjaguin 近似法计算两微球间的近场热辐射结果及示意图。Karthik 等人指出，用 Derjaguin 近似法计算曲面物体间的近场热导率时，需要考虑到远场的影响^[83]。

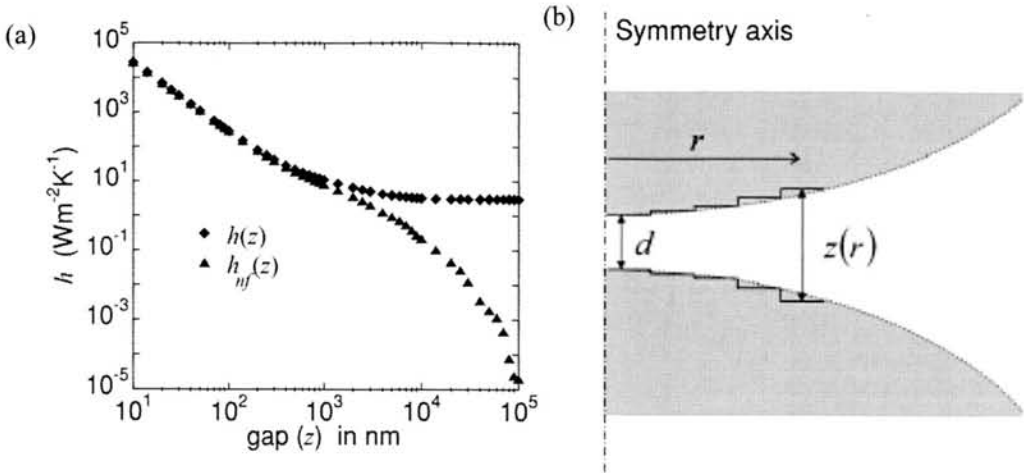


图 2.8 (a)Derjaguin 近似法计算的微球间的热导率, h_z 是近场热传输系数 h_{nf} 和远场热传输系数之和 (b)Derjaguin 近似法示意图^[83]

2.2.2.2 散射矩阵法

散射矩阵法是一种通用的计算任意形状或材料间的热辐射的方法。这种方法以计算每一个物体的辐射和被其它所有物体的散射。散射矩阵法集中考虑一个物体时，可以计算它与其它物体间的热流值，即可以得到体系中所有其它物体对它的散射总值。另外，散射矩阵法的另一个优点是可以得到空间的热流分布。一个简单的例子是利用散射矩阵法来计算多层膜情形下的近场热辐射^[56,85]。

2.2.2.3 热学离散偶极子近似法

热学离散偶极子近似法（thermal discrete-dipole approximation,TDDA）是基于离散偶极子近似法发展而来计算热辐射的。TDDA 通过将物体离散成很多个体积元，通过将这些体积元考虑成散射体，通过入射法和散射场的相互作用来得到总的场分布。不同的是，在 TDDA 中，源是由物体内的热电偶极子形成的。利用这种方法可以计算任意形状三维结构间的近场热辐射。Edalatpour 等人利用这种方法计算了两个球体的近场热辐射并与解析方法的结果进行了对比^[86]，如图 2.9 所示。

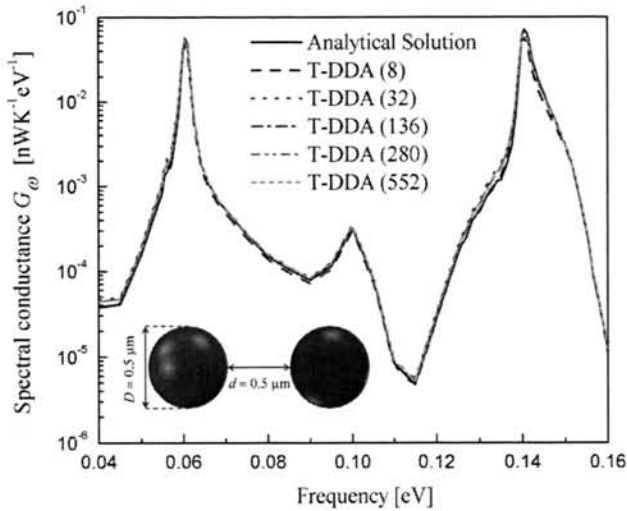


图 2.9 利用 TDDA 计算球体间的近场热传输谱并且和解析式的结果进行对比^[86]。

2.2.2.4 有限时域差分法

有限时域差分法 (finite difference time domain, FDTD) 是电磁学数值计算中被广泛采用的一种数值计算方法^[87]。这种方法可以用来计算各种几何形状、各种材料和结构的吸收、反射和透射谱。使用 FDTD 法计算近场热辐射时，需要求解含有随机源项 $\mathbf{K}(t)$ 的 Maxwell 方程组^[88,89]：

$$\frac{d^2 \mathbf{P}}{dt^2} + \gamma \frac{d\mathbf{P}}{dt} + \omega_0^2 \mathbf{P} = \sigma_e \mathbf{E} + \mathbf{K}(t) \tag{2.16}$$

DATAS 等人利用 FDTD 法计算了碳化硅间的近场热辐射^[90,91]。

本节简要介绍了近几年发展起来的近场热辐射的相关理论和计算近场热辐射的方法，其中后面三种计算方法都是基于经典的电磁学计算方法而根据热辐射理论作了修改而来的。远场热辐射的相关理论已经发展成熟了，而随着纳米制造技术的进步，近场热辐射的数值计算方法会变得越来越重要。近些年发展的近场热辐射的计算方法有助于更好地解释相关实验结果和设计各种新颖结构来发现新现象^[92]。

第 3 章 电磁超材料的近场辐射特性的理论分析

3.1 引言

在绪论部分第四小节我们介绍了涨落耗散理论以及它在分析普通电介质的辐射特性的应用。2010 年, 德国科学家 Joulain^[40] 等人对电磁超介质的热传输特性进行了分析, 由于介质中存在磁响应, 辐射场中引入了新的辐射模式。为了得到更多的辐射物理机制, 我们首先对电磁超介质的态密度进行推导。

3.2 半无限大电磁超材料平面-真空结构的电磁场的格林函数

考虑半无限大电磁介质平面 (介质 2) 与真空 (介质 1) 的情形, 其几何示意图如图 3-1 所示。

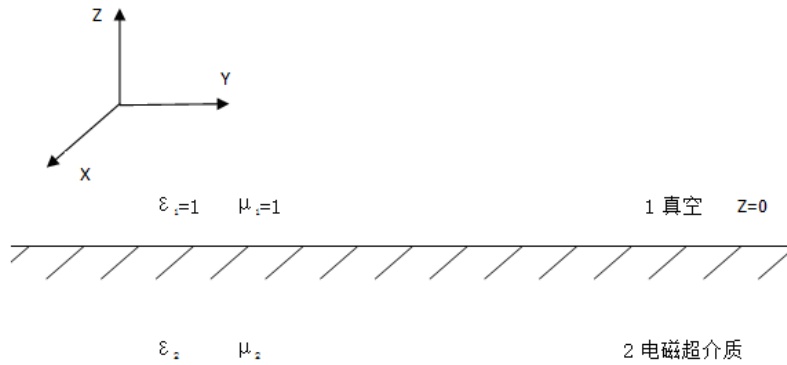


图 3-1 电磁介质与真空界面的几何示意图

我们将推导半无限大电磁介质在真空中得态密度。在这种几何结构下, 电流对应辐射电磁场的格林函数可以分别写做

$$\vec{G}^{Ee}(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{i}{8\pi^2} \int \frac{1}{\gamma_2} (\hat{s} t_{21}^s \hat{s} + \hat{p}_1^+ t_{21}^p \hat{p}_2^+) e^{i\vec{k} \cdot (\vec{R} - \vec{R}')} e^{i(\gamma_1 z - \gamma_2 z')} d^2 \vec{K} \quad (3-1)$$

$$\vec{G}^{He}(\vec{r}, \vec{r}') = -\frac{n_1 \mu_2 \omega}{8\pi^2 \mu_1 c} \int \frac{1}{\gamma_2} (\hat{s} t_{21}^p \hat{p}_2^+ - \hat{p}_1^+ t_{21}^s \hat{s}) e^{i\vec{k} \cdot (\vec{R} - \vec{R}')} e^{i(\gamma_1 z - \gamma_2 z')} d^2 \vec{K} \quad (3-2)$$

其中 t_{21}^s 为 s 偏振电磁波从介质 2 到介质 1 的透射系数; t_{21}^p 为 p 偏振电磁波从介质 2 到介质 1 的透射系数; \hat{s} 为 s 偏振单位矢量; \hat{p}_2^+ , \hat{p}_1^+ 分别为介质 2 中和介质 1 中正向传播的 p 偏振电磁波的单位矢量; $\vec{r} = (\vec{R}, z)$, 波矢量 $\vec{k} = (\vec{K}, \gamma)$,

且 $\gamma_i = \varepsilon_i \mu_i k_0^2 - K^2$, $\hat{s} = \hat{K} \times \hat{z}$, $p_i^\pm = \frac{|K| \hat{z} \mp \gamma_i \hat{K}}{n_i k_0}$ 。

在电响应和磁响应同时存在的电磁超介质中, 单色电场的传播方程为

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) + \frac{\omega^2}{c^2} \mu_r \varepsilon_r \vec{E} = i\mu\omega \vec{j}_e - \nabla \times \vec{j}_m \quad (3-3)$$

根据方程中电流和磁流的对应关系可以得到磁流对应辐射电磁场的格林函数与电流对应辐射场格林函数的关系

$$\vec{G}^{Em}(\vec{r}, \vec{r}', \omega) = [\nabla_{r'} \times {}^T \vec{G}^{Ee}(\vec{r}, \vec{r}', \omega)]^T \quad (3-4)$$

$$\vec{G}^{Hm}(\vec{r}, \vec{r}', \omega) = \frac{\nabla_r}{\varepsilon(\vec{r}) \mu(\vec{r}) \omega^2} \times [\nabla_{r'} \times {}^T \vec{G}^{Ee}(\vec{r}, \vec{r}', \omega)]^T \quad (3-5)$$

这样可得到半无限大电磁介质平面与真空结构磁电流对应辐射电磁场的格林函数

$$\vec{G}^{Em}(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{n_2 \omega}{8\pi^2 c^2} \int \frac{1}{\gamma_2} (\hat{s} t_{21}^p \hat{p}_2^+ - \hat{p}_1^+ t_{21}^s \hat{s}) e^{i\vec{K} \cdot (\vec{R} - \vec{R}')} e^{i(\gamma_1(z-d) - \gamma_2 z')} d^2 \vec{K} \quad (3-6)$$

$$\vec{G}^{Hm}(\vec{r}, \vec{r}') = -\frac{in_1 n_2}{8\pi^2 \varepsilon_2 \mu_1 c^2} \int \frac{1}{\gamma_2} (\hat{s} t_{21}^p \hat{p}_2^+ + \hat{p}_1^+ t_{21}^s \hat{s}) e^{i\vec{K} \cdot (\vec{R} - \vec{R}')} e^{i(\gamma_1(z-d) - \gamma_2 z')} d^2 \vec{K} \quad (3-7)$$

3.3 磁响应对应的辐射电磁场的相关函数

对介质 2 内电流产生的电磁场, 根据格林函数方法

$$\vec{E}(\vec{r}, \omega) = i\omega \int d^3 \vec{r}' \mu_0 \mu_2 \vec{G}^{Ee}(\vec{r}, \vec{r}', \omega) \vec{j}_e(\vec{r}', \omega) \quad (3-8)$$

$$\vec{H}(\vec{r}, \omega) = \int d^3 \vec{r}' \vec{G}^{He}(\vec{r}, \vec{r}', \omega) \vec{j}_e(\vec{r}', \omega) \quad (3-9)$$

考虑电流的相关函数

$$\langle j_k^e(\vec{r}, \omega) j_l^{*e}(\vec{r}', \omega') \rangle_s = \frac{\omega}{\pi} \varepsilon_0 \text{Im}(\varepsilon_2(\omega)) \Theta(\omega, T) \delta_{kl} \delta(\omega - \omega') \quad (3-10)$$

通过格林函数方法我们可以计算涨落电流对应的辐射电磁场。格林函数可以看做是涨落电流对应辐射电磁场的线性响应函数。根据格林函数方法, 我们得到对介质 2 内磁流产生的电磁场

$$\vec{E}(\vec{r}, \omega) = \int d^3 \vec{r}' \vec{G}^{Em}(\vec{r}, \vec{r}', \omega) \vec{j}_m(\vec{r}', \omega) \quad (3-11)$$

$$\vec{H}(\vec{r}, \omega) = i\omega \int d^3 \vec{r}' \varepsilon_0 \varepsilon_2 \vec{G}^{Hm}(\vec{r}, \vec{r}', \omega) \vec{j}_m(\vec{r}', \omega) \quad (3-12)$$

考虑磁电流的相关函数

$$\langle j_i^m(\vec{r}, \omega) j_j^{*m}(\vec{r}', \omega') \rangle = \frac{\omega}{\pi} \mu_0 \mathbf{Im}(\mu_2(\omega)) \Theta(\omega, T) \delta_{ij} \delta(\omega - \omega') \quad (3-13)$$

我们首先计算磁响应辐射电场的相关函数

$$\langle \vec{E}(\vec{r}, \omega) \vec{E}^*(\vec{r}', \omega') \rangle = \left\langle \int \vec{G}^{Em}(\vec{r}, \vec{r}_2, \omega) \cdot \vec{j}^m(\vec{r}_2, \omega) d^3 \vec{r}_2 \vec{G}^{Em*}(\vec{r}', \vec{r}_2', \omega') \cdot \vec{j}^m(\vec{r}_2', \omega') d^3 \vec{r}_2' \right\rangle \quad (3-14)$$

$$\left\langle |\vec{E}(\vec{r}, \omega)|^2 \right\rangle = \frac{\omega}{\pi} \mu_0 \Theta(\omega, T) \sum_{k,l=x,y,z} \left\langle \int \mathbf{Im}(\mu_2(\omega)) |\vec{G}_{kl}^{Em}(\vec{r}, \vec{r}_2, \omega)|^2 d^3 \vec{r}_2 \right\rangle \quad (3-15)$$

经计算

$$\begin{aligned} \sum_{k,l=x,y,z} \left\langle \int \mathbf{Im}(\mu_2(\omega)) |\vec{G}_{kl}^{Em}(\vec{r}, \vec{r}_2, \omega)|^2 d^3 \vec{r}_2 \right\rangle &= \frac{\omega^2}{64\pi^4 c^2} \int d^2 K \frac{\mathbf{Im}(\mu_2)}{2\mathbf{Im}(\gamma_2)} |n_2|^2 \frac{4\pi^2}{|\gamma_2|^2} e^{-2z\mathbf{Im}(\gamma_1)} \\ &\times \left[(\hat{e}_m \cdot \hat{s}) t_{21}^s (\hat{p}_2^+ \cdot \hat{e}_l) - (\hat{e}_m \cdot \hat{p}_1^+) t_{21}^p (\hat{s} \cdot \hat{e}_l) \right] \times \left[(\hat{e}_m \cdot \hat{s}) t_{21}^{s*} (\hat{p}_2^{+*} \cdot \hat{e}_l) - (\hat{e}_m \cdot \hat{p}_1^{+*}) t_{21}^p (\hat{s} \cdot \hat{e}_l) \right] \end{aligned} \quad (3-16)$$

所以得到

$$\begin{aligned} \left\langle |\vec{E}(\vec{r}, \omega)|^2 \right\rangle &= \frac{\mu_0 \Theta(\omega, T) \omega^3}{8\pi^2 c^2} \int dK \frac{\mathbf{Im}(\mu_2)}{2\mathbf{Im}(\gamma_2)} |n_2|^2 \frac{e^{-2z\mathbf{Im}(\gamma_1)}}{|\gamma_2|^2} \\ &\times \sum_{k,l=x,y,z} \left[(\hat{e}_m \cdot \hat{s}) t_{21}^s (\hat{p}_2^+ \cdot \hat{e}_l) - (\hat{e}_m \cdot \hat{p}_1^+) t_{21}^p (\hat{s} \cdot \hat{e}_l) \right] \times \left[(\hat{e}_m \cdot \hat{s}) t_{21}^{s*} (\hat{p}_2^{+*} \cdot \hat{e}_l) - (\hat{e}_m \cdot \hat{p}_1^{+*}) t_{21}^p (\hat{s} \cdot \hat{e}_l) \right] \end{aligned} \quad (3-17)$$

现在计算

$$\sum_{k,l=x,y,z} \left[(\hat{e}_m \cdot \hat{s}) t_{21}^s (\hat{p}_2^+ \cdot \hat{e}_l) - (\hat{e}_m \cdot \hat{p}_1^+) t_{21}^p (\hat{s} \cdot \hat{e}_l) \right] \times \left[(\hat{e}_m \cdot \hat{s}) t_{21}^{s*} (\hat{p}_2^{+*} \cdot \hat{e}_l) - (\hat{e}_m \cdot \hat{p}_1^{+*}) t_{21}^p (\hat{s} \cdot \hat{e}_l) \right]$$

把上式分成 4 项分开考虑，令

$$\begin{aligned} (A1 + B1)(A2 + B2) &= \left[(\hat{e}_m \cdot \hat{s}) t_{21}^s (\hat{p}_2^+ \cdot \hat{e}_l) - (\hat{e}_m \cdot \hat{p}_1^+) t_{21}^p (\hat{s} \cdot \hat{e}_l) \right] \\ &\times \left[(\hat{e}_m \cdot \hat{s}) t_{21}^{s*} (\hat{p}_2^{+*} \cdot \hat{e}_l) - (\hat{e}_m \cdot \hat{p}_1^{+*}) t_{21}^p (\hat{s} \cdot \hat{e}_l) \right] \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} A1 &= (\hat{e}_m \cdot \hat{s}) t_{21}^s (\hat{p}_2^+ \cdot \hat{e}_l) \quad B1 = -(\hat{e}_m \cdot \hat{p}_1^+) t_{21}^p (\hat{s} \cdot \hat{e}_l) \\ A2 &= (\hat{e}_m \cdot \hat{s}) t_{21}^{s*} (\hat{p}_2^{+*} \cdot \hat{e}_l) \quad B2 = -(\hat{e}_m \cdot \hat{p}_1^{+*}) t_{21}^p (\hat{s} \cdot \hat{e}_l) \end{aligned}$$

为不是一般性，令 $\hat{x} = \hat{K}$ ，根据 $\gamma_i = \varepsilon_i \mu_i k_0^2 - K^2$ ， $\hat{s} = \hat{K} \times \hat{z}$ ， $p_i^\pm = \frac{|K| \hat{z} \mp \gamma_i \hat{K}}{n_i k_0}$

分 9 项计算上式

$$(1) \quad \hat{e}_m = \hat{x} \quad \hat{e}_l = \hat{x}$$

$$A1=A2=B1=B2=0$$

$$(2) \quad \hat{e}_m = \hat{x} \quad \hat{e}_l = \hat{y}$$

$$A1=B1=0 \quad A2 = \frac{\gamma_1}{n_1 k_0} t_{21}^p \quad B2 = \frac{\gamma_1^*}{n_1^* k_0} t_{21}^{p*}$$

$$(3) \quad \hat{e}_m = \hat{x} \quad \hat{e}_l = \hat{z}$$

$$A1=A2=B1=B2=0$$

$$(4) \quad \hat{e}_m = \hat{y} \quad \hat{e}_l = \hat{x}$$

$$A2=B2=0 \quad A1 = \frac{\gamma_2}{n_2 k_0} t_{21}^s \quad B1 = \frac{\gamma_2^*}{n_2^* k_0} t_{21}^{s*}$$

$$(5) \quad \hat{e}_m = \hat{y} \quad \hat{e}_l = \hat{y}$$

$$A1=A2=B1=B2=0$$

$$(6) \quad \hat{e}_m = \hat{y} \quad \hat{e}_l = \hat{z}$$

$$A2=B2=0 \quad A1 = -\frac{|K|}{n_2 k_0} t_{21}^s \quad B1 = -\frac{|K|^*}{n_2^* k_0} t_{21}^{s*}$$

$$(7) \quad \hat{e}_m = \hat{z} \quad \hat{e}_l = \hat{x}$$

$$A1=A2=B1=B2=0$$

$$(8) \quad \hat{e}_m = \hat{z} \quad \hat{e}_l = \hat{y}$$

$$A1=B1=0 \quad A2 = \frac{|K|}{n_1 k_0} t_{21}^p \quad B2 = \frac{|K|^*}{n_1^* k_0} t_{21}^{p*}$$

$$(9) \quad \hat{e}_m = \hat{z} \quad \hat{e}_l = \hat{z}$$

$$A1=A2=B1=B2=0$$

对上述九项加和得到

$$\sum_{k,l} (A1+B1)(A2+B2) = |t_{21}^s|^2 \frac{(|\gamma_2|^2 + |K|^2)}{|n_2|^2 k_0^2} + |t_{21}^p|^2 \frac{(|\gamma_1|^2 + |K|^2)}{|n_1|^2 k_0^2} \quad (3-18)$$

进而我们得到电场的相关函数

$$\begin{aligned} \left\langle |\vec{E}(\vec{r}, \omega)|^2 \right\rangle &= \frac{\mu_0 \Theta(\omega, T) \omega^3}{8\pi^2 c^2} \int K dK \frac{\text{Im}(\mu_2)}{2\text{Im}(\gamma_2)} |n_2|^2 \frac{e^{-2z\text{Im}(\gamma_1)}}{|\gamma_2|^2} \\ &\times \left(|t_{21}^s|^2 \frac{(|\gamma_2|^2 + |K|^2)}{|n_2|^2 k_0^2} + |t_{21}^p|^2 \frac{(|\gamma_1|^2 + |K|^2)}{|n_1|^2 k_0^2} \right) \end{aligned} \quad (3-19)$$

由涨落耗散理论给出

$$\langle j_i^m(\vec{r}, \omega) j_j^{*m}(\vec{r}', \omega') \rangle = \frac{\omega}{\pi} \mu_0 \mathbf{Im}(\mu_2(\omega)) \Theta(\omega, T) \delta_{ij} \delta(\omega - \omega') \quad (3-20)$$

$$\langle j_k^e(\vec{r}, \omega) j_l^{*e}(\vec{r}', \omega') \rangle_s = \frac{\omega}{\pi} \varepsilon_0 \mathbf{Im}(\varepsilon_2(\omega)) \Theta(\omega, T) \delta_{kl} \delta(\omega - \omega') \quad (3-21)$$

$$\langle j_k^e(\vec{r}, \omega) j_l^{*m}(\vec{r}', \omega') \rangle = 0 \quad (3-22)$$

可知磁流的相关函数只与相对磁导率的虚部有关，电流的相关函数只与相对介电函数的虚部有关，且磁流和电流是不相关的，电流的相关函数决定辐射电磁场的相关函数，故当考虑介质 2 对辐射场的磁响应时，须令 $\mathbf{Im}(\varepsilon_2) = 0$ ；考虑介质 2 对辐射场的电响应时，须令 $\mathbf{Im}(\mu_2) = 0$ 。

对于磁响应引起的辐射电磁场，由于 $\gamma_i = \varepsilon_i \mu_i k_0^2 - K^2$ 得到

$$\frac{\mathbf{Im}(\mu_2)}{2\mathbf{Im}(\gamma_2)} = \frac{c^2}{\omega^2} \frac{\mathbf{Re}(\gamma_2)}{\varepsilon_2} \quad (3-23)$$

故磁响应辐射电场的相关函数为：

$$\begin{aligned} \langle |\vec{E}(\vec{r}, \omega)|^2 \rangle &= \frac{\mu_0 \Theta(\omega, T) \omega}{8\pi^2} \int K dK \frac{\mathbf{Re}(\gamma_2)}{\varepsilon_2} |n_2|^2 \frac{e^{-2z\mathbf{Im}(\gamma_1)}}{|\gamma_2|^2} \\ &\times \left(|t_{21}^s|^2 \frac{(|\gamma_2|^2 + |K|^2)}{|n_2|^2 k_0^2} + |t_{21}^p|^2 \frac{(|\gamma_1|^2 + |K|^2)}{|n_1|^2 k_0^2} \right) \end{aligned} \quad (3-24)$$

把磁响应的辐射电场相关函数分为远场和近场，s 偏振和 p 偏振考虑

$$\langle |\vec{E}(\vec{r}, \omega)|^2 \rangle_{Em} = \frac{\mu_0 \Theta(\omega, T) \omega}{8\pi^2} \left(\int_0^{\omega/c} K dK (FS + FP) + \int_{\omega/c}^{\infty} K dK (NS + NP) \right) \quad (3-25)$$

由 $\gamma_i = \varepsilon_i \mu_i k_0^2 - K^2$ ，可得到如下关系

$$\frac{|\gamma_2|^2 + |K|^2}{k_0^2} = \frac{\mathbf{Re}(\gamma_2^* \mu_2) \varepsilon_2}{\mathbf{Re}(\gamma_2)} \quad (3-26)$$

$$\frac{|\gamma_1|^2 + |K|^2}{k_0^2} = 1 \quad \text{远场} \quad (3-27)$$

$$\frac{|K|^2 - |\gamma_1|^2}{k_0^2} = 1 \quad \text{近场} \quad (3-28)$$

我们分别得到电场相关函数的 s 偏振和 p 偏振中近场和远场辐射部分的表达式

$$FS = \frac{4}{|\gamma_1 \mu_2 + \gamma_2 \mu_1|^2} \mathbf{Re}(\gamma_2^* \mu_2) \quad (3-29)$$

$$\text{FP} = \frac{4 \text{Re}(\gamma_2) \varepsilon_2}{|\gamma_1 \varepsilon_2 + \gamma_2 \varepsilon_1|^2} \quad (3-30)$$

$$\text{NS} = \frac{4}{|\gamma_1 \mu_2 + \gamma_2 \mu_1|^2} \text{Re}(\gamma_2^* \mu_2) e^{-2z|\gamma_1|} \quad (3-31)$$

$$\text{NP} = \frac{4 \text{Re}(\gamma_2) \varepsilon_2}{|\gamma_1 \varepsilon_2 + \gamma_2 \varepsilon_1|^2} \left(\frac{2|\mathbf{K}|^2}{k_0^2} - 1 \right) e^{-2z|\gamma_1|} \quad (3-32)$$

这样得到磁响应产生电场的相关函数的最终表达式

$$\left\langle |\vec{E}(\vec{r}, \omega)|^2 \right\rangle_{Em} = \frac{\mu_0 \Theta(\omega, T) \omega}{8\pi^2} \left(\int_0^{\omega/c} K dK \left(\frac{4}{|\gamma_1 \mu_2 + \gamma_2 \mu_1|^2} \text{Re}(\gamma_2^* \mu_2) + \frac{4 \text{Re}(\gamma_2) \varepsilon_2}{|\gamma_1 \varepsilon_2 + \gamma_2 \varepsilon_1|^2} \right) + \int_{\omega/c}^{\infty} e^{-2z|\gamma_1|} K dK \left(\frac{4}{|\gamma_1 \mu_2 + \gamma_2 \mu_1|^2} \text{Re}(\gamma_2^* \mu_2) + \frac{4 \text{Re}(\gamma_2) \varepsilon_2}{|\gamma_1 \varepsilon_2 + \gamma_2 \varepsilon_1|^2} \left(\frac{2|\mathbf{K}|^2}{k_0^2} - 1 \right) \right) \right) \quad (3-33)$$

接着我们计算磁响应产生的辐射磁场的相关函数

$$\left\langle \vec{H}(\vec{r}, \omega) \vec{H}^*(\vec{r}', \omega') \right\rangle = \omega^2 \varepsilon_0^2 |\varepsilon_2|^2 \left\langle \int \vec{G}^{Hm}(\vec{r}, \vec{r}_2, \omega) \cdot \vec{j}^m(\vec{r}_2, \omega) d^3 \vec{r}_2 \vec{G}^{Hm*}(\vec{r}', \vec{r}_2', \omega') \cdot \vec{j}^m(\vec{r}_2', \omega') d^3 \vec{r}_2' \right\rangle \quad (3-34)$$

$$\left\langle |\vec{H}(\vec{r}, \omega)|^2 \right\rangle = \omega^2 \varepsilon_0^2 |\varepsilon_2|^2 \frac{\omega}{\pi} \mu_0 \Theta(\omega, T) \sum_{k,l=x,y,z} \left\langle \int \text{Im}(\mu_2(\omega)) |\vec{G}_{kl}^{Hm}(\vec{r}, \vec{r}_2, \omega)|^2 d^3 \vec{r}_2 \right\rangle \quad (3-35)$$

经计算

$$\begin{aligned} \sum_{k,l=x,y,z} \left\langle \int \text{Im}(\mu_2(\omega)) |\vec{G}_{kl}^{Hm}(\vec{r}, \vec{r}_2, \omega)|^2 d^3 \vec{r}_2 \right\rangle &= \frac{\omega^2}{64\pi^4 |\varepsilon_2|^2} \int d^2 K \frac{\text{Im}(\mu_2)}{2 \text{Im}(\gamma_2)} |n_2|^2 \frac{4\pi^2}{|\gamma_2|^2} e^{-2z \text{Im}(\gamma_1)} \\ &\times \left[(\hat{e}_m \cdot \hat{s}) t_{21}^p (\hat{s} \cdot \hat{e}_l) + (\hat{e}_m \cdot \hat{p}_1^+) t_{21}^s (\hat{p}_2^+ \cdot \hat{e}_l) \right] \times \left[(\hat{e}_m \cdot \hat{s}) t_{21}^{p*} (\hat{s} \cdot \hat{e}_l) + (\hat{e}_m \cdot \hat{p}_1^{+*}) t_{21}^s (\hat{p}_2^{+*} \cdot \hat{e}_l) \right] \end{aligned} \quad (3-36)$$

所以得到

$$\begin{aligned} \left\langle |\vec{H}(\vec{r}, \omega)|^2 \right\rangle &= \frac{\varepsilon_0 \Theta(\omega, T) \omega^3}{8\pi^2 c^2} \int dK \frac{\text{Im}(\mu_2)}{2 \text{Im}(\gamma_2)} |n_2|^2 \frac{e^{-2z \text{Im}(\gamma_1)}}{|\gamma_2|^2} \\ &\times \left[(\hat{e}_m \cdot \hat{s}) t_{21}^p (\hat{s} \cdot \hat{e}_l) + (\hat{e}_m \cdot \hat{p}_1^+) t_{21}^s (\hat{p}_2^+ \cdot \hat{e}_l) \right] \times \left[(\hat{e}_m \cdot \hat{s}) t_{21}^{p*} (\hat{s} \cdot \hat{e}_l) + (\hat{e}_m \cdot \hat{p}_1^{+*}) t_{21}^s (\hat{p}_2^{+*} \cdot \hat{e}_l) \right] \end{aligned} \quad (3-37)$$

现在计算

$$\sum_{k,l=x,y,z} \left[(\hat{e}_m \cdot \hat{s}) t_{21}^p (\hat{s} \cdot \hat{e}_l) + (\hat{e}_m \cdot \hat{p}_1^+) t_{21}^s (\hat{p}_2^+ \cdot \hat{e}_l) \right] \times \left[(\hat{e}_m \cdot \hat{s}) t_{21}^{p*} (\hat{s} \cdot \hat{e}_l) + (\hat{e}_m \cdot \hat{p}_1^{+*}) t_{21}^s (\hat{p}_2^{+*} \cdot \hat{e}_l) \right]$$

把上式分成 4 项分开考虑，令

$$(A1+B1)(A2+B2)=\left[(\hat{e}_m \cdot \hat{s})t_{21}^p(\hat{s} \cdot \hat{e}_l)+(\hat{e}_m \cdot \hat{p}_1^+)t_{21}^s(\hat{p}_2^+ \cdot \hat{e}_l)\right] \\ \times \left[(\hat{e}_m \cdot \hat{s})t_{21}^{p*}(\hat{s} \cdot \hat{e}_l)+(\hat{e}_m \cdot \hat{p}_1^{+*})t_{21}^s(\hat{p}_2^{+*} \cdot \hat{e}_l)\right]$$

其中

$$A1=(\hat{e}_m \cdot \hat{s})t_{21}^p(\hat{s} \cdot \hat{e}_l) \quad B1=(\hat{e}_m \cdot \hat{p}_1^+)t_{21}^s(\hat{p}_2^+ \cdot \hat{e}_l) \\ A2=(\hat{e}_m \cdot \hat{s})t_{21}^{p*}(\hat{s} \cdot \hat{e}_l) \quad B2=(\hat{e}_m \cdot \hat{p}_1^{+*})t_{21}^s(\hat{p}_2^{+*} \cdot \hat{e}_l)$$

为不失一般性, 令 $\hat{x}=\hat{K}$, 根据 $\gamma_i=\varepsilon_i\mu_i k_0^2-K^2$, $\hat{s}=\hat{K} \times \hat{z}$, $p_i^\pm=\frac{|K|\hat{z} \mp \gamma_i \hat{K}}{n_i k_0}$

分 9 项计算上式

$$(1) \quad \hat{e}_m=\hat{x} \quad \hat{e}_l=\hat{x}$$

$$A1=B1=0$$

$$A2=\frac{\gamma_1}{n_1 k_0}t_{21}^s\frac{\gamma_2}{n_2 k_0} \quad B2=\frac{\gamma_1^*}{n_1^* k_0}t_{21}^s\frac{\gamma_2^*}{n_2^* k_0}$$

$$(2) \quad \hat{e}_m=\hat{x} \quad \hat{e}_l=\hat{y}$$

$$A1=A2=B1=B2=0$$

$$(3) \quad \hat{e}_m=\hat{x} \quad \hat{e}_l=\hat{z}$$

$$A1=B1=0$$

$$A2=\frac{-\gamma_1}{n_1 k_0}t_{21}^s\frac{|K|}{n_2 k_0} \quad B2=\frac{-\gamma_1^*}{n_1^* k_0}t_{21}^{s*}\frac{|K|}{n_2^* k_0}$$

$$(4) \quad \hat{e}_m=\hat{y} \quad \hat{e}_l=\hat{x}$$

$$A1=A2=B1=B2=0$$

$$(5) \quad \hat{e}_m=\hat{y} \quad \hat{e}_l=\hat{y}$$

$$A1=t_{21}^p \quad B1=t_{21}^{p*}$$

$$A2=B2=0$$

$$(6) \quad \hat{e}_m=\hat{y} \quad \hat{e}_l=\hat{z}$$

$$A1=A2=B1=B2=0$$

$$(7) \quad \hat{e}_m=\hat{z} \quad \hat{e}_l=\hat{x}$$

$$A1=B1=0$$

$$A2=\frac{|K|}{n_1 k_0}t_{21}^s\frac{-\gamma_2}{n_2 k_0} \quad B2=\frac{|K|^*}{n_1^* k_0}t_{21}^{s*}\frac{-\gamma_2^*}{n_2^* k_0}$$

$$(8) \quad \hat{e}_m=\hat{z} \quad \hat{e}_l=\hat{y}$$

$$A1=A2=B1=B2=0$$

$$(9) \quad \hat{e}_m = \hat{z} \quad \hat{e}_l = \hat{z}$$

$$A1=B1=0$$

$$A2 = \frac{|K|}{n_1 k_0} t_{21}^s \frac{|K|}{n_2 k_0} \quad B2 = \frac{|K|^*}{n_1^* k_0} t_{21}^{s*} \frac{|K|^*}{n_2^* k_0}$$

对上述九项加和得到

$$\sum_{k,l} (A1+B1)(A2+B2) = |t_{21}^s|^2 \frac{(|\gamma_2|^2 + |K|^2)(|\gamma_1|^2 + |K|^2)}{|n_1|^2 |n_2|^2 k_0^4} + |t_{21}^p|^2 \quad (3-38)$$

所以磁响应对应磁场的相关函数为

$$\begin{aligned} \left\langle \left| \bar{H}(\vec{r}, \omega) \right|^2 \right\rangle &= \frac{\varepsilon_0 \Theta(\omega, T) \omega^3}{8\pi^2 c^2} \int dK \frac{\mathbf{Im}(\mu_2)}{2\mathbf{Im}(\gamma_2)} |n_2|^2 \frac{e^{-2z\mathbf{Im}(\gamma_1)}}{|\gamma_2|^2} \\ &\times \left[|t_{21}^s|^2 \frac{(|\gamma_2|^2 + |K|^2)(|\gamma_1|^2 + |K|^2)}{|n_1|^2 |n_2|^2 k_0^4} + |t_{21}^p|^2 \right] \end{aligned} \quad (3-39)$$

把磁响应的辐射磁场相关函数分为远场和近场，s 偏振和 p 偏振考虑

$$\left\langle \left| \bar{H}(\vec{r}, \omega) \right|^2 \right\rangle_{Em} = \frac{\mu_0 \Theta(\omega, T) \omega}{8\pi^2} \left(\int_0^{\omega/c} K dK (FS + FP) + \int_{\omega/c}^{\infty} K dK (NS + NP) \right) \quad (3-40)$$

由 $\gamma_i = \varepsilon_i \mu_i k_0^2 - K^2$ ，考虑如下关系

$$\frac{|\gamma_2|^2 + |K|^2}{k_0^2} = \frac{\mathbf{Re}(\gamma^* \mu_2) \varepsilon_2}{\mathbf{Re}(\gamma)} \quad (3-41)$$

$$\frac{|\gamma_1|^2 + |K|^2}{k_0^2} = 1 \quad \text{远场} \quad (3-42)$$

$$\frac{|K|^2 - |\gamma_1|^2}{k_0^2} = 1 \quad \text{近场} \quad (3-43)$$

得到磁响应的辐射磁场相关函数 s 偏振和 p 偏振中的远场和近场的辐射部分的表达式

$$FS = \frac{4}{|\gamma_1 \mu_2 + \gamma_2 \mu_1|^2} \mathbf{Re}(\gamma_2^* \mu_2) \quad (3-44)$$

$$FP = \frac{4 \mathbf{Re}(\gamma_2) \varepsilon_2}{|\gamma_1 \varepsilon_2 + \gamma_2 \varepsilon_1|^2} \quad (3-45)$$

$$\text{NS} = \frac{4}{|\gamma_1 \mu_2 + \gamma_2 \mu_1|^2} \text{Re}(\gamma_2^* \mu_2) \left(\frac{2|K|^2}{k_0^2} - 1 \right) e^{-2z|\gamma_1|} \quad (3-46)$$

$$\text{NP} = \frac{4 \text{Re}(\gamma_2) \varepsilon_2}{|\gamma_1 \varepsilon_2 + \gamma_2 \varepsilon_1|^2} e^{-2z|\gamma_1|} \quad (3-47)$$

这样得到磁响应产生磁场的相关函数

$$\left\langle |\vec{H}(\vec{r}, \omega)|^2 \right\rangle_{Hm} = \frac{\varepsilon_0 \Theta(\omega, T) \omega}{8\pi^2} \left(\int_0^{\omega/c} K dK \left(\frac{4}{|\gamma_1 \mu_2 + \gamma_2 \mu_1|^2} \text{Re}(\gamma_2^* \mu_2) + \frac{4 \text{Re}(\gamma_2) \varepsilon_2}{|\gamma_1 \varepsilon_2 + \gamma_2 \varepsilon_1|^2} \right) + \int_{\omega/c}^{\infty} e^{-2z|\gamma_1|} K dK \left(\frac{4}{|\gamma_1 \mu_2 + \gamma_2 \mu_1|^2} \text{Re}(\gamma_2^* \mu_2) \left(\frac{2|K|^2}{k_0^2} - 1 \right) + \frac{4 \text{Re}(\gamma_2) \varepsilon_2}{|\gamma_1 \varepsilon_2 + \gamma_2 \varepsilon_1|^2} \right) \right) \quad (3-48)$$

3.4 电响应对应的辐射电磁场的相关函数

进而我们计算电响应辐射电场的相关函数

$$\left\langle \vec{E}(\vec{r}, \omega) \vec{E}^*(\vec{r}', \omega') \right\rangle = \left\langle \int \vec{G}^{Ee}(\vec{r}, \vec{r}_2, \omega) \cdot \vec{j}^e(\vec{r}_2, \omega) d^3 \vec{r}_2 \vec{G}^{Ee*}(\vec{r}', \vec{r}_2', \omega') \cdot \vec{j}^e(\vec{r}_2', \omega') d^3 \vec{r}_2' \right\rangle \quad (3-49)$$

$$\left\langle |\vec{E}(\vec{r}, \omega)|^2 \right\rangle = \frac{\omega^3}{\pi} \mu_0^2 \varepsilon_0 \Theta(\omega, T) \sum_{k, l=x, y, z} \left\langle \int \text{Im}(\varepsilon_2(\omega)) |\vec{G}_{kl}^{Ee}(\vec{r}, \vec{r}_2, \omega)|^2 d^3 \vec{r}_2 \right\rangle \quad (3-50)$$

经计算

$$\sum_{k, l=x, y, z} \left\langle \int \text{Im}(\varepsilon_2(\omega)) |\vec{G}_{kl}^{Ee}(\vec{r}, \vec{r}_2, \omega)|^2 d^3 \vec{r}_2 \right\rangle = \frac{1}{64\pi^4} \int d^2 K \frac{\text{Im}(\varepsilon_2)}{2 \text{Im}(\gamma_2)} \frac{4\pi^2}{|\gamma_2|^2} e^{-2z \text{Im}(\gamma_1)} \times \left[(\hat{e}_m \cdot \hat{s}) t_{21}^s (\hat{s} \cdot \hat{e}_l) + (\hat{e}_m \cdot \hat{p}_1^+) t_{21}^p (\hat{p}_2^+ \cdot \hat{e}_l) \right] \times \left[(\hat{e}_m \cdot \hat{s}) t_{21}^{s*} (\hat{s} \cdot \hat{e}_l) + (\hat{e}_m \cdot \hat{p}_1^{+*}) t_{21}^p (\hat{p}_2^{+*} \cdot \hat{e}_l) \right]$$

得到

$$\left\langle |\vec{E}(\vec{r}, \omega)|^2 \right\rangle = \frac{\mu_0 \Theta(\omega, T) \omega^3}{8\pi^2 c^2} \int dK \frac{\text{Im}(\varepsilon_2)}{2 \text{Im}(\gamma_2)} \frac{e^{-2z \text{Im}(\gamma_1)}}{|\gamma_2|^2} \times \left[|t_{21}^p|^2 \frac{(|\gamma_2|^2 + |K|^2)(|\gamma_1|^2 + |K|^2)}{|n_1|^2 |n_2|^2 k_0^4} + |t_{21}^s|^2 \right] \quad (3-51)$$

对于电响应引起的辐射电磁场，由于 $\gamma_i = \varepsilon_i \mu_i k_0^2 - K^2$ 得到

$$\frac{\text{Im}(\varepsilon_2)}{2 \text{Im}(\gamma_2)} = \frac{c^2}{\omega^2} \frac{\text{Re}(\gamma_2)}{\mu_2} \quad (3-52)$$

把电响应的辐射电场相关函数分为远场和近场，s 偏振和 p 偏振考虑

$$\left\langle \left| \vec{E}(\vec{r}, \omega) \right|^2 \right\rangle_{Em} = \frac{\mu_0 \Theta(\omega, T) \omega}{8\pi^2} \left(\int_0^{\omega/c} K dK (FS + FP) + \int_{\omega/c}^{\infty} K dK (NS + NP) \right) \quad (3-53)$$

经过类似磁响应的化简我们最终得到电响应产生电场的相关函数

$$\left\langle \left| \vec{E}(\vec{r}, \omega) \right|^2 \right\rangle_{He} = \frac{\mu_0 \Theta(\omega, T) \omega}{8\pi^2} \left(\int_0^{\omega/c} K dK \left(\frac{4 \operatorname{Re}(\gamma_2) \mu_2}{|\gamma_1 \mu_2 + \gamma_2 \mu_1|^2} + \frac{4 \operatorname{Re}(\gamma_2^* \varepsilon_2)}{|\gamma_1 \varepsilon_2 + \gamma_2 \varepsilon_1|^2} \right) + \int_{\omega/c}^{\infty} e^{-2z|\gamma_1|} K dK \left(\frac{4 \operatorname{Re}(\gamma_2) \mu_2}{|\gamma_1 \mu_2 + \gamma_2 \mu_1|^2} + \frac{4 \operatorname{Re}(\gamma_2^* \varepsilon_2)}{|\gamma_1 \varepsilon_2 + \gamma_2 \varepsilon_1|^2} \left(\frac{2|K|^2}{k_0^2} - 1 \right) \right) \right) \quad (3-54)$$

同理亦可得到电响应产生磁场的相关函数

$$\left\langle \left| \vec{H}(\vec{r}, \omega) \right|^2 \right\rangle_{He} = \frac{\varepsilon_0 \Theta(\omega, T) \omega}{8\pi^2} \left(\int_0^{\omega/c} K dK \left(\frac{4 \operatorname{Re}(\gamma_2) \mu_2}{|\gamma_1 \mu_2 + \gamma_2 \mu_1|^2} + \frac{4 \operatorname{Re}(\gamma_2^* \varepsilon_2)}{|\gamma_1 \varepsilon_2 + \gamma_2 \varepsilon_1|^2} \right) + \int_{\omega/c}^{\infty} e^{-2z|\gamma_1|} K dK \left(\frac{4 \operatorname{Re}(\gamma_2) \mu_2}{|\gamma_1 \mu_2 + \gamma_2 \mu_1|^2} \left(\frac{2|K|^2}{k_0^2} - 1 \right) + \frac{4 \operatorname{Re}(\gamma_2^* \varepsilon_2)}{|\gamma_1 \varepsilon_2 + \gamma_2 \varepsilon_1|^2} \right) \right) \quad (3-55)$$

这里就不多做赘述计算其计算详细过程。

3.5 电磁响应对应的辐射电磁场的电磁能密度和态密度

由 3.4 节的计算可知，电流产生的电磁能密度为

$$\begin{aligned} \langle U \rangle_e &= 2 \left(\varepsilon_0 \left\langle \left| \vec{E}(\vec{r}, \omega) \right|^2 \right\rangle_{Ee} + \mu_0 \left\langle \left| \vec{H}(\vec{r}, \omega) \right|^2 \right\rangle_{He} \right) \\ &= \frac{\varepsilon_0 \mu_0 \Theta(\omega, T) \omega}{4\pi^2} \left(\int_0^{\omega/c} K dK \left(\frac{8 \operatorname{Re}(\gamma_2) \mu_2}{|\gamma_1 \mu_2 + \gamma_2 \mu_1|^2} + \frac{8 \operatorname{Re}(\gamma_2^* \varepsilon_2)}{|\gamma_1 \varepsilon_2 + \gamma_2 \varepsilon_1|^2} \right) + \int_{\omega/c}^{\infty} e^{-2z|\gamma_1|} \frac{2K^3}{k_0^2} dK \left(\frac{4 \operatorname{Re}(\gamma_2) \mu_2}{|\gamma_1 \mu_2 + \gamma_2 \mu_1|^2} + \frac{4 \operatorname{Re}(\gamma_2^* \varepsilon_2)}{|\gamma_1 \varepsilon_2 + \gamma_2 \varepsilon_1|^2} \right) \right) \end{aligned} \quad (3-56)$$

对远场部分考虑如下关系

$$\frac{1 - |r_{12}^s|^2}{2} = \frac{8|\gamma_1| \operatorname{Re}(\gamma_2) \mu_2}{|\gamma_1 \mu_2 + \gamma_2 \mu_1|^2} \quad (3-57)$$

$$\frac{1 - |r_{12}^p|^2}{2} = \frac{8|\gamma_1| \operatorname{Re}(\gamma_2^* \varepsilon_2)}{|\varepsilon_1 \mu_2 + \varepsilon_2 \mu_1|^2} \quad (3-58)$$

对近场部分考虑如下关系

$$\mathbf{Im}(r_{12}^s) = \frac{2|\gamma_1| \mathbf{Re}(\gamma_2^* \varepsilon_2)}{|\gamma_1 \mu_2 + \gamma_2 \mu_1|^2} \quad (3-59)$$

$$\mathbf{Im}(r_{12}^p) = \frac{2|\gamma_1| \mathbf{Re}(\gamma_2) \mu_2}{|\varepsilon_1 \mu_2 + \varepsilon_2 \mu_1|^2} \quad (3-60)$$

最终我们得到电流对应辐射电磁场的电磁能密度以及态密度

$$\langle U \rangle_e = \frac{\omega \Theta(\omega, T)}{2\pi^2 c^2} \left(\int_0^{\omega/c} K \frac{dK}{|\gamma_1|} \frac{(1-|r_{12}^s|^2) + (1-|r_{12}^p|^2)}{2} + \int_{\omega/c}^{\infty} \frac{K^3 dK}{k_0^2 |\gamma_1|} (\mathbf{Im}(r_{12}^s) + \mathbf{Im}(r_{12}^p)) e^{-2\mathbf{Im}(\gamma_1 z)} \right) \quad (3-61)$$

$$\rho_e = \frac{\omega}{2\pi^2 c^2} \left(\int_0^{\omega/c} K \frac{dK}{|\gamma_1|} \frac{(1-|r_{12}^s|^2) + (1-|r_{12}^p|^2)}{2} + \int_{\omega/c}^{\infty} \frac{K^3 dK}{k_0^2 |\gamma_1|} (\mathbf{Im}(r_{12}^s) + \mathbf{Im}(r_{12}^p)) e^{-2\mathbf{Im}(\gamma_1 z)} \right) \quad (3-62)$$

同理，磁流产生的电磁能密度

$$\begin{aligned} \langle U \rangle_m &= 2 \left(\varepsilon_0 \left\langle |\vec{E}(\vec{r}, \omega)|^2 \right\rangle_{Em} + \mu_0 \left\langle |\vec{H}(\vec{r}, \omega)|^2 \right\rangle_{Hm} \right) \\ &= \frac{\varepsilon_0 \mu_0 \Theta(\omega, T) \omega}{4\pi^2} \left(\int_0^{\omega/c} K dK \left(\frac{8}{|\gamma_1 \mu_2 + \gamma_2 \mu_1|^2} \mathbf{Re}(\gamma_2^* \mu_2) + \frac{8 \mathbf{Re}(\gamma_2) \varepsilon_2}{|\gamma_1 \varepsilon_2 + \gamma_2 \varepsilon_1|^2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \int_{\omega/c}^{\infty} e^{-2z|\gamma_1|} \frac{2K^3}{k_0^2} dK \left(\frac{4}{|\gamma_1 \mu_2 + \gamma_2 \mu_1|^2} \mathbf{Re}(\gamma_2^* \mu_2) + \frac{4 \mathbf{Re}(\gamma_2) \varepsilon_2}{|\gamma_1 \varepsilon_2 + \gamma_2 \varepsilon_1|^2} \right) \right) \end{aligned} \quad (3-63)$$

对远场部分考虑如下关系

$$\frac{1-|r_{12}^s|^2}{2} = \frac{8|\gamma_1| \mathbf{Re}(\gamma_2^* \mu_2)}{|\gamma_1 \mu_2 + \gamma_2 \mu_1|^2} \quad (3-64)$$

$$\frac{1-|r_{12}^p|^2}{2} = \frac{8|\gamma_1| \mathbf{Re}(\gamma_2) \varepsilon_2}{|\varepsilon_1 \mu_2 + \varepsilon_2 \mu_1|^2} \quad (3-65)$$

对近场部分考虑如下关系

$$\mathbf{Im}(r_{12}^s) = \frac{2|\gamma_1| \mathbf{Re}(\gamma_2^* \mu_2)}{|\gamma_1 \mu_2 + \gamma_2 \mu_1|^2} \quad (3-66)$$

$$\mathbf{Im}(r_{12}^p) = \frac{2|\gamma_1| \mathbf{Re}(\gamma_2) \varepsilon_2}{|\varepsilon_1 \mu_2 + \varepsilon_2 \mu_1|^2} \quad (3-67)$$

我们得到磁电流对应辐射电磁场的电磁能密度以及态密度

$$\langle U \rangle_m = \frac{\omega \Theta(\omega, T)}{2\pi^2 c^2} \left(\int_0^{\omega/c} K \frac{dK}{|\gamma_1|} \frac{(1-|r_{12}^s|^2) + (1-|r_{12}^p|^2)}{2} + \int_{\omega/c}^{\infty} \frac{K^3 dK}{k_0^2 |\gamma_1|} (\mathbf{Im}(r_{12}^s) + \mathbf{Im}(r_{12}^p)) e^{-2\mathbf{Im}(\gamma_1 z)} \right) \quad (3-68)$$

$$\rho_m = \frac{\omega}{2\pi^2 c^2} \left(\int_0^{\omega/c} K \frac{dK}{|\gamma_1|} \frac{(1-|r_{12}^s|^2) + (1-|r_{12}^p|^2)}{2} + \int_{\omega/c}^{\infty} \frac{K^3 dK}{k_0^2 |\gamma_1|} (\mathbf{Im}(r_{12}^s) + \mathbf{Im}(r_{12}^p)) e^{-2\mathbf{Im}(\gamma_1 z)} \right) \quad (3-69)$$

最终我们得到电响应和磁响应总的态密度

$$\rho = \rho_e + \rho_m \quad (3-70)$$

这样我们得到了电响应产生辐射的态密度以及磁响应产生辐射的态密度，可以看出二者态密度的解析表达式与不考虑介质磁效应辐射产生的态密度相同，不同之处在于菲涅尔反射系数的不同。

3.6 本章小结

本章首先利用电磁场的传播方程和格林函数方法推导了半无限大真空平面结构的格林函数；进而分电响应和磁响应推导了电磁响应对应的电磁能密度和态密度。这是第一次在理论上得到的半无限大电磁超介质和真空结构的态密度的解析表达式。

[54-56]。从已有工作和结构分析的角度来看，电磁波在电磁超材料中的传播特性强烈地依赖于材料的固有性质以及结构单元的尺寸、形状、均匀性、对称性等。此外，电磁超材料具有特定的电响应和磁响应，同时具备固有的介电损耗和磁损耗。当对其加热时，电磁超材料将会在其周围产生红外热辐射。通过电磁超材料结构的设计对热辐射光谱进行调控，尤其是在近场换热条件下，开展电磁超材料的热辐射和热传输特性探究，对于提高热光电转换系统能量转换效率，增加磁存储技术存储密度以及解决 MEMs 系统的微尺度热传输等问题有着重要的理论意义和实用价值。

1.3 热辐射和近场热传输的研究现状

人们对两宏观物体的宏观热辐射和热传输已经进行了大量深入的理论和实验研究。在宏观尺度下，热辐射遵循 Planck 定律，黑体空腔单位体积内波长在 $\lambda-\lambda+d\lambda$ 范围内热辐射能量密度可以表示为：

$$E(\lambda)d\lambda = u(\lambda, T)\rho(\lambda)d\lambda = \frac{8\pi hc}{\lambda^5 (e^{hc/\lambda kT} - 1)} d\lambda, \quad (1-1)$$

其中 $u(\lambda, T) = hc/\lambda (e^{hc/\lambda kT} - 1)$ 是单热光子平均能量，在频率空间等同 Planck 谐振子的平均能量 Θ ，由空腔温度唯一确定； $\rho(\lambda) = 8\pi/\lambda^4$ 是黑体空腔的局域态密度，由腔体结构和材料的物性参数所决定。Stefan-Boltzmann 定律预言真空中两热物体的最大热辐射通量为： $\sigma(T_1^4 - T_2^4)$ 。然而，当两辐射体的间距与热辐射的中心波长，即位恩辐射波长 $\lambda_{th} = \hbar c / k_B T$ 可比拟或者更小时，近场热辐射和传输相对于远场辐射能够产生几个数量级的增强^[10]。在这种情况下，热辐射源物体所支持的表面电磁模式，如表面等离激元^[57]、表面声子极化子^[2, 6]以及其它表面模式^[58]的贡献将变得不可忽略。

1.3.1 随机的 Maxwell 方程和涨落电动力学

从电磁学的角度讲，我们可以用如下物理形式来描述热能量的辐射：任何处于温度大于绝对零度的物体都存在着热涨落，这样就引起了热物体中带电粒子的不规则运动，这种随机涨落的电荷产生的涨落电磁场，被称作热辐射。从宏观的角度理解，涨落的电磁场是由涨落电荷形成的涨落体电流密度引起的。换一句话讲，总的热辐射场不是由于各个涨落电荷产生涨落电磁场叠加而成，而是由这些涨落电荷形成的宏观体电流密度引起的^[59]。涨落电动力学就是基于上述热辐射的宏观物理机制而建立的，通过在 Maxwell 方程中引入涨落源，

用于处理局域热平衡条件下的热源的能量辐射和传播过程^[59, 60]。

对于非磁性介质，为了描述电磁波的传输，常规形式的 Maxwell 方程组可以写成如下形式：

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = i\omega \mathbf{B}(\mathbf{r}, \omega) = i\omega \mu_0 \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega) \quad (1-2)$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega) &= -i\omega \mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega) + \mathbf{J}(\mathbf{r}, \omega) = -i\omega \varepsilon' \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) + \sigma \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) \\ &= -i\omega (\varepsilon' + i\sigma / \omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = -i\omega \varepsilon \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) \end{aligned} \quad (1-3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega) = \nabla \cdot (\varepsilon' \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)) = \rho_e \quad (1-4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, \omega) = \nabla \cdot (\mu_0 \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega)) = 0 \quad (1-5)$$

在时谐场入射情况下，电荷的连续性方程为：

$$\nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, \omega) = i\omega \rho_e \quad (1-6)$$

在 Maxwell 方程组中， ε' 是电磁波传输介质的介电函数实部，与电导率 σ 共同构成了介质的复介电函数 $\varepsilon = \varepsilon' + i\sigma / \omega$ ，则介质的相对介电函数 $\varepsilon_r = \varepsilon / \varepsilon_0$ ， ε_0 和 μ_0 分别是真空中的介电常数和磁导率。式(1-3)中的 \mathbf{J} 代表位移电流密度，与材料的物性参数决定。为了描述随机热涨落引起的热辐射过程，需要在 Maxwell 方程组中引入额外的随机电流密度源 \mathbf{J}^r ，则式(1-3)可以改写成如下形式：

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega) = -i\omega \varepsilon \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) + \mathbf{J}^r \quad (1-7)$$

由于引入的电流源具有随机性， \mathbf{J}^r 总的平均值为 0，则总辐射场的平均值为 0。但由于随机电流源空间相关函数不为 0，即不同时刻不同位置辐射的电磁场是相关的，所以辐射场的能量密度和坡印廷矢量不为 0。根据涨落耗散理论，随机电流密度的相关函数可以表示为：

$$\langle \mathbf{J}_n^r(\mathbf{r}, \omega) \mathbf{J}_m^{r*}(\mathbf{r}', \omega') \rangle = \frac{\omega}{\pi} \varepsilon''(\omega) \Theta(\omega, T) \delta_{nm} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') , \quad (1-8)$$

其中对于各向同性介质 $\delta_{nm} = 1$ ， ε'' 代表介质介电函数的虚部。通过求解随机的 Maxwell 方程组，随机热涨落的辐射电场 \mathbf{E} 和磁场 \mathbf{H} 可以分别表示为：

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = i\mu_0 \omega \int d^3 \mathbf{r}' \vec{G}^E(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) \mathbf{J}^r(\mathbf{r}', \omega) , \quad (1-9)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega) = \int d^3 \mathbf{r}' \vec{G}^H(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) \mathbf{J}^r(\mathbf{r}', \omega) , \quad (1-10)$$

其中 \vec{G}^E 和 \vec{G}^H 分别是随机电流源对电场和磁场的响应函数，或者称为随机电流源的格林函数。对于半无限大平面结构，电场和磁场的格林函数可以写成如下形式^[61]：

$$\vec{G}^E(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{i}{8\pi^2} \int \frac{1}{\gamma} (\hat{s} t_{21}^s \hat{s} + \hat{p}_1^+ t_{21}^p \hat{p}_2^+) e^{i\mathbf{K} \cdot (\mathbf{R} - \mathbf{R}')} e^{i(\gamma_1 z - \gamma_2 z')} d^2 \mathbf{K} \quad (1-11)$$

$$\vec{G}^H(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{k_0}{8\pi^2} \int \frac{1}{\gamma} (\hat{s} t_{21}^p \hat{p}_2^+ - \hat{p}_1^+ t_{21}^s \hat{s}) e^{i\mathbf{K} \cdot (\mathbf{R} - \mathbf{R}')} e^{i(\gamma_1 z - \gamma_2 z')} d^2 \mathbf{K} \quad (1-12)$$

在式(1-11)和(1-12)中, t_{21}^s 为 s 偏振的入射电磁波从介质 2 到介质 1 的透射系数, t_{21}^p 为 p 偏振的入射电磁波从介质 2 到介质 1 的透射系数, \hat{s} 为 s 偏振单位矢量, \hat{p}_2^+ , \hat{p}_1^+ 分别为介质 2 中和介质 1 中正向传播的 p 偏振电磁波的单位矢量。介质 1 和介质 2 中总的波矢量可以表示成横向波矢量和纵向波矢量的叠加 $\mathbf{k}_i = (\mathbf{K}, \gamma_i)$, 且 $\gamma_i = \varepsilon_i k_0^2 - K^2$, 其中 $i=1, 2$ 。场源的空间位置同样表示成横向和纵向分量, 即 $\mathbf{r} = (\mathbf{R}, z)$, $\hat{s} = \hat{\mathbf{K}} \times \hat{\mathbf{z}}$, $p_i^\pm = |K| \hat{\mathbf{z}} \mp \gamma_i \hat{\mathbf{K}} / n_i k_0$ 。这样, 在辐射空间电场的相关函数可以用随机电流的相关函数 $\langle \mathbf{J}_n^r(\mathbf{r}, \omega) \mathbf{J}_m^{r*}(\mathbf{r}', \omega') \rangle$ 表示:

$$\langle \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) \mathbf{E}^*(\mathbf{r}', \omega') \rangle = \left\langle \mu_0^2 \omega \omega' \int \vec{G}^E(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, \omega) d^3 \mathbf{r}' \vec{G}^{E*}(\mathbf{r}', \mathbf{r}^*, \omega') \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}^*, \omega') d^3 \mathbf{r}^* \right\rangle \quad (1-13)$$

同理, 我们也可以用随机电流的相关函数表示磁场的相关函数 $\langle \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega) \mathbf{H}^*(\mathbf{r}', \omega') \rangle$, 那么在辐射场特定位置和频率的电磁能密度可以表示为:

$$\langle U(\mathbf{r}, \omega) \rangle = \frac{\varepsilon_0}{2} \langle |\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)|^2 \rangle + \frac{\mu_0}{2} \langle |\mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega)|^2 \rangle \quad (1-14)$$

我们定义涨落电磁场的局域态密度 $\rho(\mathbf{r}, \omega)$ 满足如下关系:

$$U(\mathbf{r}, \omega) = \rho(\mathbf{r}, \omega) \frac{\hbar \omega}{\exp(\hbar \omega / k_B T) - 1}, \quad (1-15)$$

其中 $\Theta = \hbar \omega / [\exp(\hbar \omega / k_B T) - 1]$ 代表 Planck 谐振子的平均能量。对于半无限大平面结构, 热辐射局域态密度的具体解析形式表达式为^[3]:

$$\rho(z, \omega) = \frac{\omega^2}{2\pi^2 c^3} \left\{ \int_0^{\omega/c} K \frac{dK}{|\gamma_1|} \frac{(1 - |r_{12}^s|^2) + (1 - |r_{12}^p|^2)}{2} + \int_{\omega/c}^\infty \frac{K^3 dK}{k_0^2 |\gamma_1|} [\text{Im}(r_{12}^s) + \text{Im}(r_{12}^p)] e^{-2\text{Im}(\gamma_1 z)} \right\} \quad (1-16)$$

在式(1-16)中, $r_{12}^p = (-\varepsilon_1 \gamma_2 + \varepsilon_2 \gamma_1) / (\varepsilon_1 \gamma_2 + \varepsilon_2 \gamma_1)$ 和 $r_{12}^s = (\gamma_1 - \gamma_2) / (\gamma_1 + \gamma_2)$ 分别代表介质 1 和介质 2 界面的 p 偏振和 s 偏振的菲涅尔反射系数。

我们同样可以利用上述方法计算涨落电磁场的坡印廷矢量^[62], 进一步两热物体之间的热通量可以表示成如下形式^[63]:

$$q_{net}'' = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty d\omega [\Theta(\omega, T_1) - \Theta(\omega, T_2)] \int_0^\infty \sum_{j=s,p} \xi_j(\omega, K) K dK \quad (1-17)$$

在上式中 T_1 和 T_2 表示两个电磁超材料各自的温度, $\zeta_j(\omega, K)$ 是两电磁超材料之间的能量传输系数, 其最大值是 1, 可以写成如下形式:

$$\xi_j(\omega, K) = \begin{cases} \frac{[1 - |r_j|^2]^2}{|1 - r_j^2 e^{i2\gamma D}|^2}, & K < k_0, \text{ for propagating mode} \\ \frac{4[\text{Im}(r_j)]^2 e^{-2|\gamma|D}}{|1 - r_j^2 e^{i2\gamma D}|^2}, & K > k_0, \text{ for evanescent mode} \end{cases}$$

其中, K 是平行于电磁超材料表面的横向波矢量, γ 为垂直于表面的 z 方向的纵向波矢量。 $j=s, p$, r_s 和 r_p 分别代表电磁超材料对 s 偏振和 p 偏振入射光的菲涅尔反射系数。

1.3.2 近场热辐射和热传输的研究现状

1968 年至 1994 年, 若干实验上的工作验证了近场热辐射和传输的增强效应。Cravalh 等人^[64]在液氮温度下测量了真空层隔开的两固体介质间的近场能量传输。随后, Domoto 和 Xu 等人^[1, 65]分别报道了在低温下两金属板之间的热传输。Kutateladze 等人^[66]进一步测量了在低温下换热间距的变化对热量交互作用的影响。1994 年, Whale^[67]指出之前的低温的实验报道有可能是 inaccurate 的, 其中一个重要的原因是低温下被测系统的热阻效应不遵循黑体辐射 Planck 定律或者 Stefan-Boltzmann 定律, 因为两个定律中都没有考虑波的干涉效应, 而在低温下, 由位恩辐射波长定义 $\lambda(\mu\text{m}) = 2897.8/T(\text{K})$ 可知, 在低温下热辐射的中心波长远大于这种多层板系统的热阻尺寸。最近, 不同的研究小组分别对两半无限大平板结构^[2]、半无限大平板与纳米粒子结构^[68, 69]以及纳米粒子结构间近场热辐射和传输^[70]在理论上做了研究。

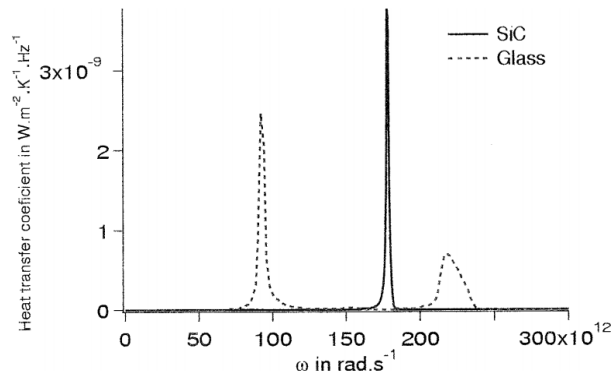


图 1-6 半无限大体块 SiC 和 SiO₂ 材料的传热系数随频率的变化^[2]

Fig.1-6 Heat transfer coefficient varies with frequency for semi-infinite bulk SiC and SiO₂ media^[2]