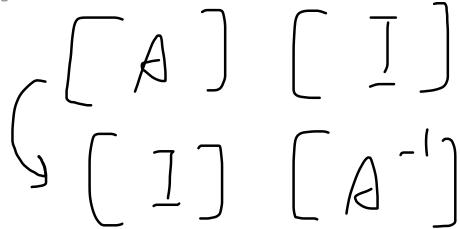
线性代数2

By i207M Graduated from SJZEZ2020 Studying @THU

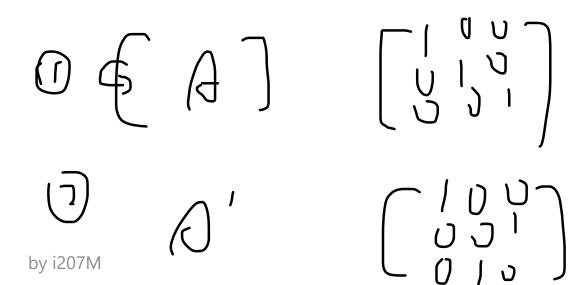
Powered by Marp

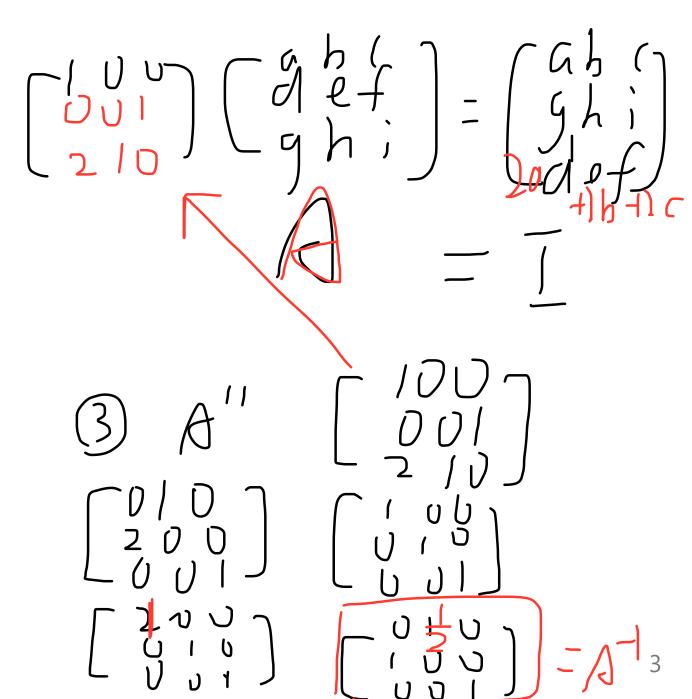
矩阵求逆

模拟高斯消元,将原矩阵消成对角线矩阵,同时对单位矩阵进行同样的操作。 单位矩阵最后的样子就是原矩阵的逆矩阵。 why?



单位矩阵的作用是记录下消元的过程。 我们尝试一下三种变换即可证明。





例题

034

n元线性方程组,未知数的系数给定,q次询问,每次询问给定常数值,求方程组的解。

$$n \le 100, q \le 5000$$

$$A^{-1}A\overrightarrow{x} = A^{-1}A$$

$$O(9h^3)$$
 $O(n^3 + 9h^2)$

$$Ax = b$$

$$Ax = b$$
 $x = A^{-1}b$

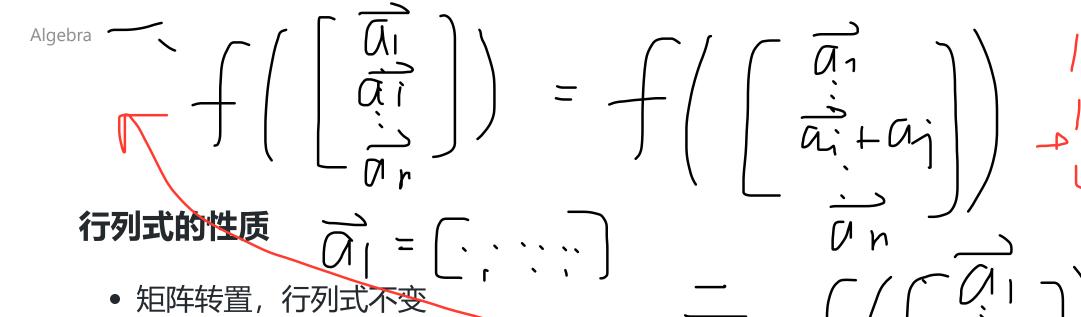
$$O(n^3 + n^2q)$$

行列式

(可将行线性、行交错性改为列线性、列交错性)

数学家称这样的函数为行列式函数,记为 $\det(A)$ 或|A|.

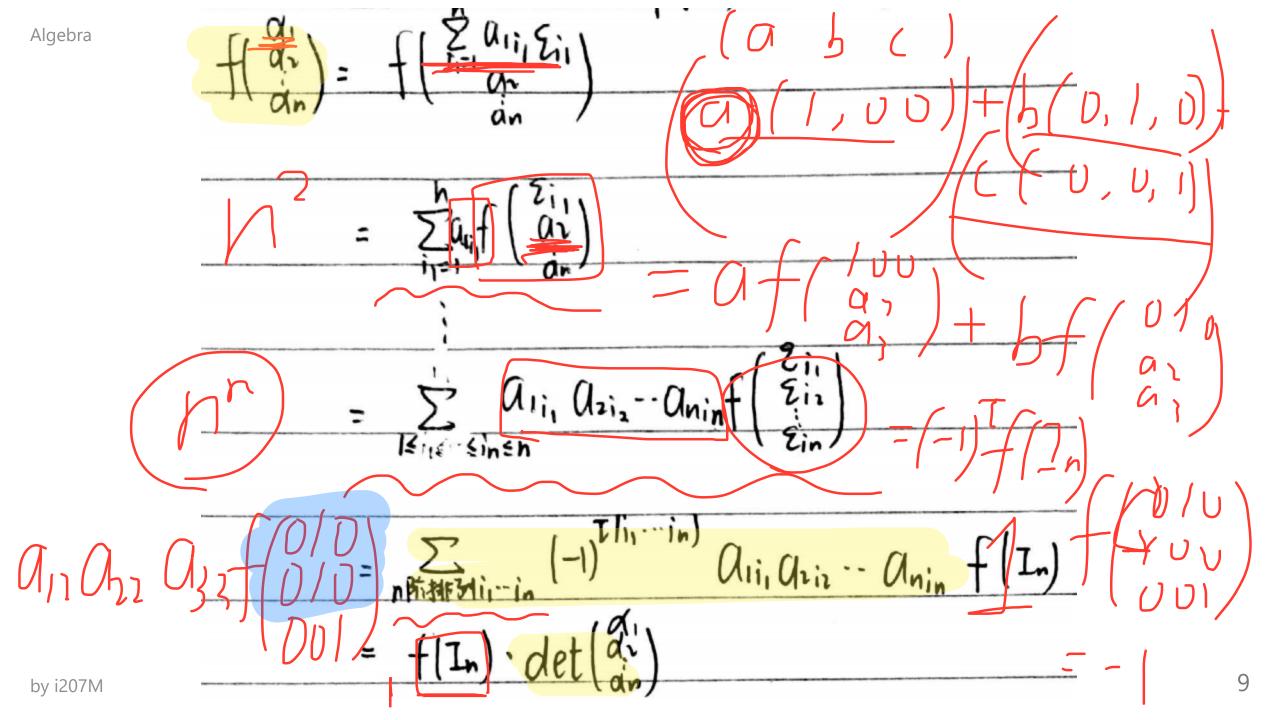
✓



- 矩阵行 (列) 交换, 行列式取反
- 矩阵行(列)相加或相减,行列式不变

在*高等线性代数*这门课程中,我们将会学习到行列式函数的存在性和唯一性。为方便起见,我们假设行列式函数的存在性是显然的。

接下来我们尝试构造出行列式函数,即证明行列式函数的唯一性:



公式:
$$D = |A| = \sum_{l=1}^{n} (-1)^{n} [a_{1,l_{1}} a_{2,l_{2}} \dots a_{n,l_{n}}]$$

$$|A| = \sum_{l=1}^{n} (-1)^{n} [a_{1,l_{1}} a_{2,l_{2}} \dots a_{n,l_{n}}]$$

 $n \times n$ 方阵的行列式可以理解为所有列(行)向量所夹的几何体的有向体积。或者理解为"体积"为1的超立方体经过线性变换后的"体积"。

证明比较麻烦, 我们可以借助二维的情况来帮助理解。

二阶行列式也就是叉积:

$$egin{bmatrix} 1 & 0 \ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1$$

$$egin{array}{c|c} 1 & 2 \ 2 & 1 \end{array} = -3$$

求行列式

我们可以通过线性变换,将矩阵消成上三角矩阵,对角线的乘积就是行列式,这样可以在 $O(n^3)$ 时间内求行列式。

行列式非零当且仅当矩阵的秩是n,也就是满秩。

矩阵树定理

$$K = D - A$$

D为度数矩阵, A为邻接矩阵。K为基尔霍夫矩阵。

去掉K的任意一行一列,其行列式就是答案。

加权?

一棵树的权值是树边边权的乘积。求生成树的权值和。

相当于把一条边拆成边权条边。

例题: P4208 [JSOI2008]最小生成树计数

https://www.luogu.com.cn/problem/P4208

对于每一层,爆搜或矩阵树定理。

Thank you

祝大家取得好成绩!

感谢 OI-Wiki 的信息

如果你很强,可以尝试以下几个题目:

CF917D