座位号＿＿＿＿ 专业班级＿＿＿＿ 学院＿＿＿＿ 学号 姓名＿＿＿＿

（密封线内不答题）

密 封 线

诚信应考，考试作弊将带来严重后果！

华南理工大学本科生期末考试

2021-2022-1 学期《线性代数与解析几何》试卷(A 卷)

注意事项：1. 开考前请将密封线内各项信息填写清楚；
2. 所有答案请直接答在试卷上；
3．考试形式：闭卷；
4. 本试卷共八大题，满分 100 分，考试时间 120 分钟。

题 号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得 分									

一、选择题(共 5 题，每题 3 分，共 15 分)

得分

1. 以下各向量组中线性无关的向量组为(　B　)

A．(1,0,2), (1,1,1), (3,2,1), (4,7,9)　　B．(2,-3,4,1), (5,2,7,1), (-1,-3,5,5)

C．(2,3,1,4), (3,1,2,4), (0,0,0,0)　　D．(1,2,-3,1), (3,6,-9,3), (3,0,7,7)

2. 设A,B为同阶可逆方阵，则(　D　)

A．$AB=BA$　　B．存在可逆矩阵C，使$C'AC = B$

C．存在可逆矩阵 C，使$C^{-1}AC = B$　　D．存在可逆矩阵P,Q，使 $PAQ = B$

3. 关于三类初等矩阵$P(i,j),P\big(i(k)\big),P\big(i,j(k)\big)$，以下成立的是(　D　)

A．$P\big(i,j(k)\big)' = P\big(j,i(k)\big)^{-1}$　　B．$P(i,j)' = P(i,j)^*$

C．$P(i(k))' = P(i(-k))^{-1}$　　D．$P\big(i,j(k)\big)'=P\big(j,i(-k)\big)^*$

4. 设矩阵$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，则 A 与 B(　D　)

A．合同且相似　B．合同但不相似　C．不合同但相似　D．不合同也不相似

5. 以下方程表示双叶双曲面的是(　C　)

A．$9x^2 + 9y^2 + 4z^2 = 36$　　B．$9x^2 + 9y^2 - 4z^2 = 36$

C．$9x^2 - 9y^2 - 4z^2 = 36$　　D．$9x^2 + 9y^2 - 4z^2 = 0$

二、填空题(共 6 题，每题 3 分，共 18 分)

得分

1. 设$A = (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta), B = (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\gamma)$都是 4 阶方阵，$|A| = 2$, $|B| = 1$，则$|2(A + B)| =$＿＿＿384＿＿＿

2. 若n阶方阵A满足$A^3=E$,则$(A+E)^{-1}=$________________ $\frac{1}{2}(A^2-A+E)$

3. 当k=________时，向量$\beta=(1,k,5)$可由向量$\alpha_1=(1,-3,2),\alpha_2=(-2,-1,1)$线性表示。 $-\frac{36}{5}$

4. R^2中，从基$\alpha_1=(1,-1)$，$\alpha_2=(1,0)$到基$\beta_1=(1,2)$，$\beta_2=(1,1)$的过渡矩阵为________________。$\begin{pmatrix}-2 & -1\\ 3 & 2\end{pmatrix}$

5. 三阶方阵A的特征值为1, -1, 2,则$|A^2+4A^{-1}|$=____-90____。

6. 当实数 t 满足________________时，二次型$f(X)=x_1^2+2x_2^2+tx_3^2+4tx_1x_3$为正定二次型。 $0<t<1/4$

三、**(8 分)** 计算n阶行列式D_n:

得分

$$D_n=\begin{vmatrix}1 & x_1+2 & 2x_1^2+3x_1 & \cdots & (n-1)x_1^{n-1}+nx_1^{n-2}\\ 1 & x_2+2 & 2x_2^2+3x_2 & \cdots & (n-1)x_2^{n-1}+nx_2^{n-2}\\ 1 & x_3+2 & 2x_3^2+3x_3 & \cdots & (n-1)x_3^{n-1}+nx_3^{n-2}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & x_n+2 & 2x_n^2+3x_n & \cdots & (n-1)x_n^{n-1}+nx_n^{n-2}\end{vmatrix}$$

解： $$D_n=\begin{vmatrix}1 & x_1 & 2x_1^2 & \cdots & (n-1)x_1^{n-1}\\ 1 & x_2 & 2x_2^2 & \cdots & (n-1)x_2^{n-1}\\ 1 & x_3 & 2x_3^2 & \cdots & (n-1)x_3^{n-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & x_n & 2x_n^2 & \cdots & (n-1)x_n^{n-1}\end{vmatrix} \quad 4'$$

$$=(n-1)!\begin{vmatrix}1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1}\\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1}\\ 1 & x_3 & x_3^2 & \cdots & x_3^{n-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1}\end{vmatrix} \quad 2'$$

$$=(n-1)!\prod_{1\le j<i\le n}(x_i-x_j) \quad 2'$$

四、(8 分) 已知$A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$，求矩阵 X 满足 $AXA^*=B$。

得分

解：$|A|=-2$,故 A 可逆 2′

$AXA^*=B\Rightarrow AX(|A|A^{-1})=-2\,AXA^{-1}=B\Rightarrow X=-\frac{1}{2}A^{-1}BA$ 2′

$$(A|BA)=\begin{pmatrix}2&1&1&0&1&1\\1&0&1&1&0&1\\0&1&1&2&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&-1&0&0\\0&1&0&0&1&0\\0&0&1&2&0&1\end{pmatrix}$$ 3′

$$X=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&0\\0&-\frac{1}{2}&0\\-1&0&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$ 1′

五、(15 分) a取何值时，线性方程组

得分

$$\begin{cases} x_1 + ax_2 + a^2x_3 = 1 \\ x_1 + a^2x_2 + a^4x_3 = -a \\ x_1 + a^3x_2 + a^6x_3 = a^2 \end{cases}$$

有唯一解？无解？有无穷多解？在有无穷多解时，求通解(用方程组的特解与其导出组的基础解系表示)。

解：$|A| = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a^4 \\ 1 & a^3 & a^6 \end{vmatrix} = (a^3 - a^2)(a^3 - a)(a^2 - a) = a^4(a-1)^3(a+1)$ 3′

当$a \neq 0$且$a \neq \pm 1$时，原方程组有唯一解。 2′

当$a=0$时，$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，无解 2′

当$a=1$时，$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，无解 2′

当$a=-1$时，$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，有无穷多解，

$\begin{cases} x_1 = 1 - x_3, \\ x_2 = 0, \end{cases}$ x_3为自由未知量。 3′

方程组有一特解$\gamma_0 = (1,0,0)'$，导出组有一基础解系：$\alpha = (-1,0,1)'$ 2′

方程组的通解为：$\gamma_0 + k\alpha$，其中k为任意常数。 1′

得分

六、(15 分) (1) 求过直线l_1:$\begin{cases}x=1+2t\\y=2+3t\\z=2+t\end{cases}$和点 A(1,1,1)的平面$\pi$的方程；

(2) 求点 B(1,2,1)到平面π的距离$d(B,\pi)$；

(3) 求直线l_2:$\frac{x}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+1}{2}$与平面$\pi$的夹角$\theta$。

解：(1) 直线l_1过点 C(1,2,2)，其方向向量为$\overrightarrow{n_1}$=(2,3,1)，

则向量$\overrightarrow{AC}=(0,1,1)$在平面π上， $3'$

$\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{AC}=\left(\begin{vmatrix}3&1\\1&1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&2\\1&0\end{vmatrix},\begin{vmatrix}2&3\\0&1\end{vmatrix}\right)$**=(2,-2,2)=2(1,-1,1)** $3'$

则可得平面π的点法式方程：$(x-1)-(y-1)+(z-1)=0$

故平面π的一般方程为：$x-y+z-1=0$ $3'$

(2) $d(B,\pi)=\frac{|1-2+1-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ $2'$

(3) 直线l_2的方向向量为$\overrightarrow{n_2}$=(2,-1,2)，平面π的法向量$\vec{n}$=(1,-1,1)，

则$\sin\theta=\frac{|\overrightarrow{n_2}\cdot\vec{n}|}{|\overrightarrow{n_2}||\vec{n}|}=\frac{2+1+2}{3\cdot\sqrt{3}}=\frac{5}{9}\sqrt{3}$**，故**$\theta=\arcsin\frac{5}{9}\sqrt{3}$ $4'$

七、（15 分）(1)用正交变换将下列实二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+4x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3-8x_2x_3$$

化为标准形，并写出所作的正交变换；

(2)写出上述二次型的秩、正惯性指数、负惯性指数。

得分

解：(1)所给二次型 $f(X)=X'AX$ **的矩阵** $A=\begin{pmatrix}1&-2&2\\-2&4&-4\\2&-4&4\end{pmatrix}$

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&2&-2\\2&\lambda-4&4\\-2&4&\lambda-4\end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda-9)$$

故 A 的特征值为 $\lambda_1=0$(二重)，$\lambda_2=9$ **3′**

当 $\lambda_1=0$，**0E-A=** $\begin{pmatrix}-1&2&-2\\2&-4&4\\-2&4&-4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$,

故 $x_1=2x_2-2x_3$, x_2,x_3 **为自由未知量，**

从而 AX=0 有一个基础解系： $\alpha_1=(2,1,0)',\alpha_2=(-2,0,1)'$,

对 α_1,α_2 **作施密特正交化得：** $\beta_1=\alpha_1$，$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=(-\frac{2}{5},\frac{4}{5},1)'$

对 β_1,β_2 **作单位化得:**

$$\eta_1=\left(\frac{2}{5}\sqrt5,\frac{1}{5}\sqrt5,0\right)',\eta_2=\left(-\frac{2}{15}\sqrt5,\frac{4}{15}\sqrt5,\frac{5}{15}\sqrt5\right)'$$ **5′**

当 $\lambda_2=9$，**9E-A=** $\begin{pmatrix}8&2&-2\\2&5&4\\-2&4&5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&0&-1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$

故 $\begin{cases}x_1=\frac{1}{2}x_3\\x_2=-x_3\end{cases}$, x_3 **为自由未知量，**

从而(9E-A)X=0 的一个基础解系： $\alpha_3=(1,-2,2)'$,

将 α_3 **作单位化得：** $\eta_3=\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)'$, **3′**

令 $P=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=\begin{pmatrix}\frac{2}{5}\sqrt5&-\frac{2}{15}\sqrt5&\frac{1}{3}\\\frac{1}{5}\sqrt5&\frac{4}{15}\sqrt5&-\frac{2}{3}\\0&\frac{5}{15}\sqrt5&\frac{2}{3}\end{pmatrix}$, $X=PY$，**得二次型的标准形：**

$$f(X)=9y_3^2$$ **2′**

(2)r(f)=1，正惯性指数为 1，负惯性指数为 0 **2′**

得分

八、**(6 分)** 证明：正交矩阵的特征值的模为 1。

证明：设A为n阶正交矩阵，则$A'A = E$且A为实矩阵，故$\bar{A} = A$。

设λ为A的任一特征值，则存在$\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n)' \neq 0$,使得$A\alpha = \lambda\alpha$, 2'

从而$\overline{A\alpha} = \bar{A}\bar{\alpha} = A\bar{\alpha} = \overline{\lambda\alpha} = \bar{\lambda}\bar{\alpha}$, 故$\bar{\alpha}'A' = \bar{\lambda}\bar{\alpha}'$, 因此

$$\bar{\alpha}'A'A\alpha = \bar{\alpha}'\alpha = (\bar{\lambda}\bar{\alpha}')(\lambda\alpha) = \bar{\lambda}\lambda\bar{\alpha}'\alpha$$

即$(\bar{\lambda}\lambda - 1)\ \bar{\alpha}'\alpha = (|\lambda|^2 - 1)\bar{\alpha}'\alpha = 0$,

因为$\bar{\alpha}'\alpha = |a_1|^2 + |a_1|^2 + \cdots + |a_n|^2 > 0$，故$|\lambda|^2 - 1=0$，因此$|\lambda| = 1$。 4'