第十九卷第二期 内蒙古大学学报（自然科学版） 1988年4月
Vol.19No.2 Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Intramongolicae Apr.1988

明安图是卡塔兰数的首创者

罗 见 今

（内蒙古师范大学科学史研究室）

摘 要

本文叙述组合数学中著名的卡塔兰数在西方发展的历史和现代研究的概况，指出中国清代蒙古族数学家明安图（约1692—1763）在18世纪三四十年代先于欧拉（1758）和卡塔兰（1838）提出并应用了这一序列。本文将明安图的首创性成果表示成现代的形式，说明他在无穷级数研究中求卡塔兰数的两种方法各具特色，与现今所知的求法都不相同，值得进一步研究。

关键词：中国数学史；数学家明安图；无穷级数；组合数学；计数函数；欧拉；卡塔兰；卡塔兰数。

1 关于卡塔兰数

卡塔兰（Eugene Charies Catalan，1814—1894）在1838年提出并解决了下面的问题：[1] n个有固定顺序的因子，例如 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，在两个相邻的因子间作乘法，这种运算连续进行下去，如何确定求出它的积的方法的个数？[2]在这一问题中，所求的数字是C_{n-1}，有计数公式

$$C_n=(n+1)^{-1}\binom{2n}{n}\quad(n\geqslant 0)\tag{1}$$

对 $n=4$，设四个有固定顺序的因子是 a,b,c,d，则 $C_3=5$，这五种方法是：

$$((ab)(cd)),(((ab)c)d),((a(bc))d),(a((bc)d)),(a(b(cd))).$$

这种加括号的方法具有组合学的意义，在非交换、非结合代数中有其应用。关于卡塔兰这一工作的叙述发表在文献[3]和[4]中。

上述问题还有另外的表述形式。设构造n个给定实数乘积的全部不同方法的个数为$h(n)$，则可以证明[5]：

$$h(n)=(n-1)!\binom{2n-2}{n-1}\tag{2}$$

如果保持这些实数的给定次序，即从n个元素的全排列 $n!$ 中只选出一种顺序，则有求乘积的不同方法个数 C_n：

$$C_n=\frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}\qquad(n\geqslant 1)\tag{3}$$

式（3）与（1）一致，只是计数起点不同，通常称(3)为卡塔兰数（Catalan numb-

本文于1987年3月16日收到

ers)。式（3）表明，卡塔兰数可以看作是贾宪三角形（Pascal triangle）中“中垂线”上的数递次除以自然数而得到的，$n\leqslant 20$ 的数表如下：

$C_1=1$	$C_6=24$	$C_{11}=16796$	$C_{16}=9694845$
$C_2=1$	$C_7=132$	$C_{12}=58786$	$C_{17}=35357670$
$C_3=2$	$C_8=429$	$C_{13}=208012$	$C_{18}=129644790$
$C_4=5$	$C_9=1430$	$C_{14}=742900$	$C_{19}=477638700$
$C_5=14$	$C_{10}=4862$	$C_{15}=2674440$	$C_{20}=1767263189$

随着组合数学和图论的发展，人们发现卡塔数兰及其推广可作多种组合解释，具有多种应用，因而吸引了一批研究者。人们又在历史资料中发现了更早的出处。早在1758—1759年，大数学家欧拉（L.Euler）向塞格纳（J.A.v.Segner）提出了一个问题：将一个凸多边形区域以其（不相交的）对角线划分成三角形区域，共有多少种不同的划分方法？塞格纳解决了这个问题，把它总结成一列递归的数贯。对有 $n+1$ 条边的凸多边形区域，这种划分的方法的个数，正好是现今所称的卡塔兰数，即上面已用符号 C_n 所表示的。例如，如果 $n=1$，已定义 $C_1=1$，可把一条直线段想象为具有两条边但无内部的多边形区域。如果$n=2$，则 $C_2=1$，因为一个三角形区域没有对角线因而也不能进一步划分。可以证明，[6]这样构造的数学模型的解，具有式（3）形式。塞格纳在一篇有关回忆[8]中，列出了一个相当于 C_{n+2} 的数值表（$m<18$）；但由于一个不幸的计算错误，$m>11$ 的值是不对的。[9]这一点很快被欧拉指出，他公布了对 $m<23$ 的正确的值。[7]欧拉还用公式表示了 C_{n+2} 而未予证明：

$$\frac{(2m+2)!}{(m+1)!(m+2)!}\quad\left(=\frac{1}{m+2}\binom{2m+2}{m+1}\right)\tag{4}$$

上述问题称为“欧拉—塞格纳问题”，是西方数学史上现有的最早的记录。另外有一种传说[10]，欧拉在1751年向哥德拔赫(Goldbach）提出过这一问题，但目前尚无确切的史料能证明这一点。

将一个凸多边形区域以其对角线划分成三角形区域，其剖分方法的数字如何计算的较一般性的问题是由帕法夫（Pfaff）对温福斯（N.von Fuss）提出，后者推广了塞格纳的递归关系（1791）[11]。

欧拉—塞格纳问题在1838—1839年再次出现于一系列论文中，以各种各样的方法获得解决。值得注意的有毕讷特（J.Binet,1839)，他获得了 C_n 的生成函数[12]：

$$\frac{1}{2}(1-\sqrt{1-4x})=\sum_{n=0}^{\infty}C_nx^n\qquad(|x|<1/4)\tag{5}$$

还有洛椎谷斯（O.Rodrigues,1838），[13]他提出了一种非常优美的直接的解。

拉谟（G.Lame)、[14]卡塔兰和洛椎谷斯等人同时在同一杂志上发表了有关论文，今天的数学家却偏向于用“卡塔兰数”来称呼 C_n，这只是一种习惯或约定，现在已变成了数学名词。这样的情况在数学史上并不罕见，例如组合数学中的“斯坦纳三元系”（Steiner triple system），最早是由柯克曼（T.P.Kirkman）提出的，但这些名字沿用至今，已形成了固定用法。

在本世纪前，西方数学家对这一问题及其推广或等价形式发表了几十篇论文，其中蕴含数

学家凯利（A.Cayley）、柯克曼等作了深入的研究工作，后者在1857年写了三篇文章，共100多页，讨论了多边形划分的各种情况（包括顶点在内部），发现了为数众多的递归关系，这里不一一列举出处了。

卡塔兰数有两个递推公式，在文献[5][6]中有详细的介绍：

$$C_n=(4n-6)/n \quad C_{n-1} \quad (C_1=1, n>1) \tag{6}$$

$$C_n=\sum_{k=1}^{n-1} C_k C_{n-k} \qquad (C_1=1, n>1) \tag{7}$$

到本世纪中，这方面的论文数量翻了一番。著名组合数学家波利亚（G.Polya）和有影响的布尔巴基（N.Bourbaki）学派都卷入了对卡塔兰序列的研究。六十年代以来，论文数量有了惊人的增长，提出了它的相伴序列，形成了卡塔兰序列族；认识到它在序贯计数理论研究多重集合排列的枚举问题中的重要意义；卡塔兰序列不仅经常出现在上述非结合代数、图形剖分的枚举问题中，而且经常出现在随机游动、投票问题和平面树的枚举等问题中；它的计值法更加丰富了，产生了安德烈（Andre）反射原理、循环排列法、概率法、拉格朗日（Lagrange）展开法、矢量控制法等[10]；与它相关的组合解释已增至五十余种。……现代组合学家、数学史家高尔德（H.W.Gould）收集了几百篇有关论文[15]，据信，这样的文章和著作已有五百种之多。

卡塔兰序列历史久远，已成为组合数学和图论中的一个基本的重要计数函数。《科学技术百科全书》"组合论"条目[16]在介绍计数函数时，把著名的斐波那契数（Fibonacci numbers）、斯特灵数（Stirling numbers）和卡塔兰数同时作为典型列子；有一定普及面的基础论著《组合学导引》[5] 在第六章"递归关系"和第七章"生成函数"里用十页的篇幅详细介绍了上述的两种组合意义。卡塔兰序列迄今仍是组合数学的热门课题。

但是，西方数学家们不会想到，在世界数学史上，第一个提出现今所称的卡塔兰数并有大量研究和应用成果的，却是中国清代著名的蒙古族科学家、钦天监监正（国家天文台台长）——明安图。

2　明安图的首创性成果

明安图，字静庵，蒙古族，奉天蒙古正白旗（今内蒙古锡林郭勒盟正镶白旗）人，我国清代著名的科学家，他生卒的年代大约是公元1692年到1763年，[17]生活于康熙、雍正、乾隆时代。明安图"自童年亲受数学于圣祖仁皇帝"，[18]大约在1710年，他被选入钦天监当官学生，专门学习天文、历法和数学，继承了当时高深的科学知识。康熙皇帝在中国历史上是一位罕见的懂得自然科学的统治者，明安图从小得到皇帝的指教，受到几任皇帝的器重，终生在钦天监供职，1759年提为钦天监监正。这个职务，从名义上看来是国家天文台台长，其实他要负责解决天文、历法、气象、地理、测绘、数学等自然科学方面的问题，简直相当于今天的科学院院长了。

1700年法国人杜德美（Pierre Jartoux.1668—1720）到中国，[19]带来了三个圆函数的无穷级数展开式：即牛顿(I.Newton）在1667年所创的π的展式、格列高里(J.Gregory）在1667年所创的正弦、正矢的展式，吸引了当时一些中国数学家的注意。这三个公式是传统数学所没有的，用起来十分方便，但是杜德美并没有将公式的证明或推导过程一同带来，使

人仅知其然不知其所以然。[19]数学家梅瑴成（1681—1763）把这三式收在一本书内[20]，并称"译西士杜德美法"。明安图同瑴梅成一起在参加清政府组织的汇编《律历渊源》的工作（1713年开始），从杜氏得知上述三式，[21]但他怀疑是否西方数学家不愿将其中的道理传授，这就激发了他一定要把这个问题的原理搞清楚的决心。那时明安图才二十多岁。后来他曾对儿子明新说：杜氏三术"实古今所未有也，……惜仅有其法而未详其义，恐人有金针不度之疑"。[18]由于他对中国传统数学有深刻的了解，依据"古法"进行了大量的推算，又创造了连比例求解的一整套数学方法，不仅证明了杜氏三术，而且还获得了六个新的公式，被后来的数学家称为"杜氏九术"（其实没有一术为杜氏所创），在当时世界上属于先进的成果，在清代数学史上产生了深远的影响。除此之外，明安图还有一项重大的成就，没有引起以前数学史家足够的重视，这就是后来收入遗著《割圜密率捷法》卷三"分弧通弦率数求全弧通弦率数法解（共八题）"的一组八个公式（下文简称"八题"）。

以前的研究没有指出，明安图的"八题"实际上是八个用 $\sin\alpha$ 的幂级数表示的 $\sin m\alpha$（$m=2,3,4,5,10,100,1000,10000$）的无穷级数展开式；当 $m=2$ 时，由于式（5）的原因，这一展开式必然要出现系数 C_n，关于这一点，下文还要给出证明。明氏将"八题"列于全部"法解"（包括九术法解）之首，并用了九十六面的篇幅讨论"八题"，"九术"的篇幅亦不能与之相比，说明他对此的重视。一个重要的原因，是他提出并大量应用了现今所称的卡塔兰数。由于明氏原著内容非常丰富，我们将在另文中探讨他的数学方法，本文只叙述有关成就。

明安图为求卡塔兰数设计了三种几何模型，归结为两种递归的数学方法。但是，由于当时传统数学尚无进入符号代数阶段，明氏的公式都是用文字叙述的，需要将它表示成现代的形式，我们看到，他的第一种方法即相当于获得

$$C_{n+1}=\sum_{k\geq 0}(-1)^k\binom{n-k}{k+1}C_{n-k}.\ (C_1=1,n\geqslant 1) \tag{8}$$

式（8）同式（3）是等价的。用这一计数公式，他又得到：（$|\alpha|<\pi/2$）

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha-\sum_{n=1}^{\infty}4^{1-n}C_n(\sin\alpha)^{2n+1}. \tag{9}$$

式（9）可由式（5）取 $x=(\mathrm{Sin}\alpha/2)^2$，经过一些变换而导出，不仅证明了式（9）的正确性；而且说明，依 $\sin\alpha$ 的幂展开 $\sin 2\alpha$ 必然出现卡塔兰数。

明安图求卡塔兰数的第二种方法较复杂，本文从中抽象出如下的递归结构：规定

$$M_1=(1),\ M_2=(0,1).$$

$$M_{n+1}=\left(2\sum_{k=1}^{n-1}M_k+M_n\right)M_n \tag{10a}$$

式中加法应将各加数括号内从左向右对齐再相加，式中乘法应将两乘数括号内各项分别相乘再相加，每作一次乘法，积向右移一位，即积的括号内左添一零。例如：

$$\begin{aligned}n=2,\ M_3&=(2M_1+M_2)M_2\\&=[2(1)+(0,1)](0,1)\\&=[(2)+(0,1)](0,1)\\&=(2,1)(0,1)\end{aligned}$$

$$=(0,0,2,1)$$

$$n=3,\ M_4=[2(M_1+M_2)+M_3]M_3$$

$$=[(2)+(0,2)+(0,0,2,1)](0,0,2,1)$$

$$=(2,2,2,1)(0,0,2,1)$$

$$=(0,0,0,4,6,6,4,1)$$

$$n=4,\ M_5=[2(M_1+M_2+M_3)+M_4]M_4$$

$$=[(2)+(0,2)+(0,0,4,2)+(0,0,0,4,6,6,4,1)]\cdot$$

$$\cdot(0,0,0,4,6,6,4,1)$$

$$=(2,2,4,6,6,6,4,1)(0,0,0,4,6,6,4,1)$$

$$=(0,0,0,0,8,20,40,68,94,114,116,94,60,28,$$

$$8,1)。$$ 等等。

M_n 括号内共 2^{n-1} 项，左起共 $n-1$ 个零。对 $M_1,M_2,\cdots,M_n$ 求和，省去项数大于 n 的项，即得卡塔兰序列，记作 MC_n：

$$MC_n=(1,1,2,5,14,42,132,429,1430,\cdots,C_n) \tag{10b}$$

明氏用此法同样得到了（9）式。除了明氏原证外，对式（10）尚无新证。

应当说明，明氏的这些成果与卡塔兰数的早期研究相比，具有独辟蹊径的特点，即令对今天的研究者来说，也是十分新奇的。更引人注目的是，明氏一旦获得了卡塔兰数，便把它作为工具，力图导出依 $\sin\alpha$ 的幂展开的 $\sin m\alpha$ 的级数。

我们知道，当 m 为奇数时 $\sin m\alpha$ 的展式只有有限项，明氏以他独创的方法用卡塔兰数解决了 $m=3$ 以及 $m=5$ 的情况；当 m 为偶数时，展开式是无穷级数，其中系数的求法，相当于给出了卡塔兰数的一种函数，例如当 $m=4$ 时，有

$$\sin 4\alpha=4\sin\alpha-10\sin^3\alpha+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{16C_n-2C_{n+1}}{4^n}(\sin\alpha)^{2n+3}. \tag{11}$$

证明略。明安图用类似的方式解决了当 $m=10$，100，1000，10000 时的情况。在他的著作中以大量列成图表的算式记录了导出和应用卡塔兰数的过程，因表达方式的限制和为了统一起见，他在所有的地方都只列出前七个卡塔兰数。为得到这些展开式系数，进行了令人惊叹的计算，最大的一个有五十二位：

$$-31\ 32264\ 07271\ 14357\ 52669\ 78698\ 50597\ 63664\ 56628\ 79994\ 27000$$

明安图在青年时代决心按自己的方式解决无穷级数的疑难，使他进入了数学的一个广阔的新天地，作出包括卡塔兰数在内的一系列新发现。经过一二十年的酝酿和推算，他感到新的思想和方法都已经成熟了，便在1730年前后开始著书《割圜密率捷法》。工作时断时续，“次第相求，以至成书，约三十余年”，[22]大概和他有繁重的公务在身相关。从清朝的档案中能够查到明安图进见皇帝的许多记录，大多与月食、日食、观候、天气预报、编时宪书等有关，1756—1757年他参加何国宗率领的国家测量队到新疆测绘天山以北的地图，无暇著书；特别是在1759年被任命为钦天监监正之后，每年接见的记录都有一、二十次，其间还率领国家测量队到新疆进行了一年的测绘工作。[17]在他临终时，“以遗稿一帙嘱其季子景毓（即儿子明新）命际新（即学生陈际新）续而成之”，并说：“余积解有年，未能卒业，汝与同学者务续而成之，则余志也”。[18]明氏去世后，陈际新“寻绪推究，质以平日

所闻面授之言，遇有疑义，则与先生之季子景臻及门人张良亭相与讨论；而良亭、景臻亦时同推步、校录。越数年，甲午(1774年)始克成书。”[18]陈际新认为这本书属于“先生之遗法”，“殆发其自得之义”，可见明安图去世前已完成了基本的工作，后继者的任务，主要是理解遗著的内容、推算、校对和抄录。

《割圜密率捷法》书稿写成后并没有立即出版，[15]为某氏（一说，为数学家张敦仁）所秘。[25]但世间已有知道的，它的抄本曾广为传播，[13]产生了很大的影响。历经曲折，直到1839年，也就是明安图开始著书的一百多年之后，这本书才在一些数学家的关心下刊布于世。

显然，由于上述的历史原因，明安图数学成就产生的时代不能依著作完成或刊行的时间来确定，而要依据他的工作时代：即在18世纪三、四十年代，至迟于五十年代前期，已作出了上述贡献。就卡塔兰数的提出而言，这仍是世界数学史上最早的记录。

中国科学史的著名学者、日本三上义夫[2]英国李约瑟[2,]对明安图的成就都有较高的评价；国内数学史的前辈李俨、[26]钱宝琮[21]和李迪[17]等先生对研究明安图也作出了基本的工作。我们高兴地看到，明安图数学成就的意义，不仅在属于分析数学的无穷级数方面，而且在属于离散数学的计数理论方面，因而，他是中国近代数学史上一位应当进一步深入研究的、重要的数学家。

参考文献

[1] Catalan E.Note sur une équation aux différences, J, Math. Pures Appl. 1838, 3(1):508—516

[2] Riordan, A note on Catalan parentheses, The American Mathematical Monthly 1973,80:904—916

[3] Netto E. Lehrbuch der Combinatorik, Chelsea, New York,1958,b,192ff

[4] Louis Comtet Analyse Combinatoire, Paris, Tome Premier,1970 p64ff

[5] Brualdi R A. Introductory Combinatorics, Elsevier North—Holland, Inc. Newyork Oxford Amsterdam, 1977, 109—112. 中译本组合学导引，李盘林、王天明译，华中工学院出版社，1982，120—123

[6] 同5，139—144. 中译本 153—158

[7] Euler, L. Novi Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, 7 (1758—1759) 13—14.

[8] Segner J A V.Enumeratio modorum, quibus figurae planae rectilineae per diagonales dividuntur in triangula, ibid. 203—209.

[9] Brown W G. Historical note on a recurrent combinatorial problem The American Mathematical Monthly 1965, 72, 973—977

[10] 初文昌，序贯计数理论及其应用，大连工学院博士论文，1987年，引言，P.I

[11] Fuss N v Solutio quaestionis, quot modis polygonum n laterum n. polygona m laterum per diagonales resolvi pueat, Nova Acta Acad Sci. Imperialis Petropolitanae, 1791,9

[12] Binet J. Réflexions sur le problème de déterminer le nombre de manières dont une figure rectiligne peut etre partagée en triangles au moyen de ses diagonales, J. Math. Pures Appl. 1839, 4, 79—91

[13] Rodrigues, O.Sur le nombre de manières de decomposer un bolygoneen triangles au moyen de diagonales, 1838 3, 547—548

[14] Lamé G. Extrait d'une lettre de M. Lamé a M.Liouville sur cette question: un polygone convexe etant donne, de combien de manieres peut—on le partagep en triangles au moyen de

diagonales ? ibid.,505—507

[15] Gould, H.W. Research bibliogreph of two special number sequences, Morgontown, MR53 . 5460. 1971—1976

[16] Brylawski, T. Combinatorics, McGraw—Hill Encyclopedia of Science & Technology (1677) 中译本见科学技术百科全书第一卷数学（1980）356

[17] 李迪，蒙古族科学家明安图，明安图科学活动编年，内蒙古人民出版社，1978，45—58

[18] 明安图，割圜密率捷法，道光已亥（1839）孟秋，石梁岑氏校刊本，陈新际，序，第一页

[19] 李俨，明清算家的割圆术研究，见中算史论丛第三集，十三、杜德美法的输入，科学出版社，1955，293

[20] 梅瑴成，赤水遗珍，见梅氏丛书辑要卷六十一附录一

[21] 钱宝琮主编，中国数学史，科学出版社，1964，301

[22] 同[18]，卷三第二页

[23] 见衡斋算学　六册，割圜连比例图解序（1819）和[18]岑建功序

[24] 三上义夫，中国算学之特色，林科棠译，万有文库本，80

[25] Joseph Needham, Science and Civilization in China, Vol. Ⅲ, 1959, 145

[29] 同[19]，十四、明安图的割圜密率捷法，299—352

Ming Antu, the First Inventor of Catalan Numbers in the World

Luo Jianjin

(Institute for the History of Science Nei Monggol Normal University)

Catalan numbers is a famous counting function in combinatorics, today, and many scholars have made a study on this series in history. Western mathematicians do not know that the first inventor of catalan numbers in the world is neither L. Euler (1758), nor E.Catalan (1838), but Chinese-Mongolian mathematician Ming Antu(1692—1763? in the Qing Dynasty), who put forward these numbers in order to solve a problem of infinite series the 30's or 40's of 18th century.

Ming Antu's result in modern form is expressed in this paper, which also points out that there is a marked difference between two methods and modern methods.

Key words: History of mathematics in China; Mathematician Ming Antu; Infinite series; Combinatorics; Counting Function; L.Euler; E.Catalan; Catala nnumbers.