线性代数2

By i207M
Graduated from SJZEZ2020
Studying @THU

Powered by Marp

矩阵求逆

模拟高斯消元，将原矩阵消成对角线矩阵，同时对单位矩阵进行同样的操作。
单位矩阵最后的样子就是原矩阵的逆矩阵。
why?

$$\begin{bmatrix} A \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ 2a\,d & e & f \end{bmatrix}$$

$+1b \quad +1c$

$$A = I$$

单位矩阵的作用是*记录*下消元的过程。
我们尝试一下三种变换即可证明。

① A $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

② A' $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

③ A'' $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \boxed{\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} = A^{-1}$$

by i207M

例题 可逆

$$\begin{cases} x+y+z = ? \\ x+2y = ? \\ y+z = ? \end{cases}$$

n元线性方程组，未知数的系数给定，q次询问，每次询问给定常数值，求方程组的解。

$n \leq 100, q \leq 5000$

$O(qn^3)$

$O(n^3+qn^2)$

$A^{-1}A\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$

$\vec{x} = \boxed{A^{-1}}\boxed{\vec{b}}$

$$Ax = b$$

$$x = A^{-1}b$$

$$O(n^3 + n^2 q)$$

行列式

数学家想要找一个矩阵到数的映射$f: M(R) \to R$

要求f满足:

- 行线性
- 行交错性
- 规范性

(可将行线性、行交错性改为列线性、列交错性)

数学家称这样的函数为行列式函数，记为$\det(A)$或$|A|$.

一、$f\left(\begin{bmatrix}\vec{a}_1\\ \vec{a}_i\\ \vdots\\ \vec{a}_r\end{bmatrix}\right)=f\left(\begin{bmatrix}\vec{a}_1\\ \vdots\\ \vec{a}_i+a_j\\ \vdots\\ \vec{a}_n\end{bmatrix}\right)$

$\begin{matrix}1&2&3&4\\1&2&0&0\\0&0&3&4\end{matrix}$

行列式的性质

$\vec{a}_1=[\ \cdots\ ]$

二、$f\left(\begin{bmatrix}a_1\\ \vdots\\ \cancel{a_j}\\ \cancel{a_j}\\ \vdots\end{bmatrix}\right)=0$

- 矩阵转置，行列式不变
- 矩阵行（列）交换，行列式取反
- 矩阵行（列）相加或相减，行列式不变
- 矩阵行（列）所有元素同时乘以数 k ，行列式等比例变大

$f\left(\begin{bmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_i\\ \vdots\\ a_j\\ \vdots\\ a_n\end{bmatrix}\right)+f\left(\begin{bmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_j\\ \vdots\\ a_i\\ \vdots\\ a_n\end{bmatrix}\right)=f\left(\begin{bmatrix}a_1\\ \vdots\\ \cancel{a_i+a_j}\\ \vdots\\ \cancel{a_i+a_j}\\ \vdots\\ a_n\end{bmatrix}\right)=0$

在*高等线性代数*这门课程中，我们将会学习到行列式函数的存在性和唯一性。为方便起见，我们假设行列式函数的存在性是显然的。
接下来我们尝试构造出行列式函数，即证明行列式函数的唯一性：

$$f\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix} = f\begin{pmatrix}\sum_{i_1=1}^{n} a_{1i_1}\varepsilon_{i_1}\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$$

$$= \sum_{i_1=1}^{n} \boxed{a_{1i_1}}\, f\begin{pmatrix}\varepsilon_{i_1}\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

$$= \sum_{1\le i_1,\cdots,i_n\le n} a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}\, f\begin{pmatrix}\varepsilon_{i_1}\\ \varepsilon_{i_2}\\ \vdots\\ \varepsilon_{i_n}\end{pmatrix}$$

$$= \sum_{n\text{阶排列}\, i_1\cdots i_n} (-1)^{I(i_1\cdots i_n)}\, a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}\, f(I_n)$$

$$= \boxed{f(I_n)}\cdot \det\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$$

$(a \ b \ c) = a(1,0,0) + b(0,1,0) + c(0,0,1)$

$= a f\begin{pmatrix}1\,0\,0\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix} + b f\begin{pmatrix}0\,1\,0\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}$

n^2

n^n

$= (-1)^I f(I_n)$

$a_{11}a_{22}a_{33} f\begin{pmatrix}0\,1\,0\\ 0\,1\,0\\ 0\,0\,1\end{pmatrix}$

$f\begin{pmatrix}0\,1\,0\\ 1\,0\,0\\ 0\,0\,1\end{pmatrix} = -1$

1

按第1维排序

$(\_\ ), (\_\ ), (\_\ )$

$(1, l_1)\ (2, l_2) \cdots (n, l_n)$

公式:

$n!$

$$D = |A| = \sum_{[l]} (-1)^v \boxed{a_{1,l_1} a_{2,l_2} \ldots a_{n,l_n}}$$

$n!$

其中 v 为 l_1 , l_2 , $\cdots$, l_n 中逆序对的个数。

$a_{p_1,1}\, a_{p_2,2} \cdots a_{p_n,n}$

$$= \sum_{[l]} (-1)^v a_{l_1,1}\, a_{l_2,2} \cdots a_{l_n,n}$$

$n \times n$ 方阵的行列式可以理解为所有列（行）向量所夹的几何体的有向体积。或者理解为"体积"为1的超立方体经过线性变换后的"体积"。
证明比较麻烦，我们可以借助二维的情况来帮助理解。
二阶行列式也就是叉积：

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3$$

求行列式

我们可以通过线性变换，将矩阵消成上三角矩阵，对角线的乘积就是行列式，这样可以在$O(n^3)$时间内求行列式。

行列式非零当且仅当矩阵的秩是n，也就是满秩。

矩阵树定理

$$K = D - A$$

D为度数矩阵，A为邻接矩阵。K为基尔霍夫矩阵。

去掉K的任意一行一列，其行列式就是答案。

加权?

一棵树的权值是树边边权的乘积。求生成树的权值和。

相当于把一条边拆成边权条边。

例题：P4208 [JSOI2008]最小生成树计数

https://www.luogu.com.cn/problem/P4208

对于每一层，爆搜或矩阵树定理。

Thank you

祝大家取得好成绩！

感谢 `OI-Wiki` 的信息

如果你很强，可以尝试以下几个题目：

CF917D