座位号 专业 学院 学号 姓名

（密封线内不答题） 密 封 线

诚信应考, 考试作弊将带来严重后果!

华南理工大学本科生期末考试

《工科数学分析(上)》期末考试(A)

注意事项：1. 考前请将密封线内填写清楚;

2. 考试形式：闭卷;

3. 请用蓝色或黑色水笔答题，不要用铅笔或者其他颜色的笔答题;

4. 交卷时除了草稿纸不用交之外，每页试卷都要交;

5. 本试卷共 10 大题, 满分 100 分, 考试时间 120 分钟。

题 号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总 分
得 分											

一、 (10分)用$\varepsilon-\delta$语言叙述$\lim\limits_{x\to b}g(x)=B$的定义. 并用定义证明$\lim\limits_{x\to a}\sqrt{x}=\sqrt{a}(a>0)$.

解：1). $\forall \varepsilon>0$, $\exists \delta>0$, s.t

$0<|x-b|<\delta$ 时有

$|g(x)-B|<\varepsilon$

2). $\because |\sqrt{x}-\sqrt{a}|=\dfrac{|x-a|}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}$

$\leq \dfrac{1}{\sqrt{a}}|x-a|$

$\therefore \forall \varepsilon>0$, 令 $\delta=\sqrt{a}\varepsilon$ 则

$0<|x-a|<\delta$ 时有：

$|\sqrt{x}-\sqrt{a}|\leq\dfrac{1}{\sqrt{a}}|x-a|<\varepsilon$ #

二、 (10分)计算下列极限

(1) $\lim\limits_{t\to\infty}\left(\frac{t}{1+t}\right)^t$;

解: $\lim\limits_{t\to\infty}\left(\frac{t}{1+t}\right)^t=\lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\frac{\cancel{t}-\cancel{t}-1}{t+1}\right)^t$

$=\lim\limits_{t\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{t+1}\right)^{-(t+1)}\right]^{-\frac{t}{t+1}}$

$=\lim\limits_{t\to\infty}e^{-\frac{t}{t+1}\ln\left[\left(1-\frac{1}{t+1}\right)^{-(t+1)}\right]}$

$=e^{-\ln e}=\frac{1}{e}$ #

(2) $\lim\limits_{x\to0+}\left((2+\frac{1}{x})e^x-\frac{1}{x}\right)$.

解: $\because e^x=1+x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$

$\therefore (2+\frac{1}{x})(1+x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2))-\frac{1}{x}$

$=2+2x+x^2+o(x^2)+\cancel{\frac{1}{x}}+1+\frac{1}{2}x$

$+o(x)-\cancel{\frac{1}{x}}$

$=3+\frac{5}{2}x+o(x)$

$\therefore \lim\limits_{x\to0^+}((2+\frac{1}{x})e^x-\frac{1}{x})=3$ #

三、 (10分)完成下面两题

(1) 设$y=x^2\mathrm{e}^{3x}$, 求$y^{(n)}(x)$.

解：$y^{(n)}(x)=\sum_{k=0}^{n} C_n^k (x^2)^{(k)}(e^{3x})^{(n-k)}$

$=x^2\cdot 3^n e^{3x}+n\cdot 2x\cdot 3^{n-1}e^{3x}$

$+C_n^2\cdot 2\cdot 3^{n-2}\cdot e^{3x}$

$=[3^n x^2+2\cdot 3^{n-1}\cdot nx+n(n-1)3^{n-2}]e^{3x}$ #

(2) 定义函数

$$g(x)=\begin{cases} x^4\sin\frac{1}{x},\ x\neq 0,\\ 0, \quad\ x=0.\end{cases}$$

问$g(x)$在$x=0$有几阶导数.

解：由定义

$$f'(x)=\begin{cases} 4x^3\sin\frac{1}{x}-x^2\cos\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

$f''(0)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f'(h)-f'(0)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}(4h^2\sin\frac{1}{h}-h\cos\frac{1}{h})=0$

$\therefore f''(x)=\begin{cases} 12x^2\sin\frac{1}{x}-6x\cos\frac{1}{x}-\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$

易见 $f'''(0)$ 不存在 #

四、 (10分)计算以下两题

(1) $\int x^2 \mathrm{e}^{-x} \mathrm{d}\, x$,

解: $\int x^2 e^{-x} dx = -\int x^2 d e^{-x}$

$= -x^2 e^{-x} + \int e^{-x} 2x dx$

$= -x^2 e^{-x} - 2\int x d e^{-x}$

$= -x^2 e^{-x} - 2xe^{-x} + 2\int e^{-x} dx$

$= -x^2 e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x} + C$ #

(2) $\int \sqrt{x^2+4} \mathrm{d}x$.

解: $\int \sqrt{x^2+4}\, dx = x\sqrt{x^2+4} - \int x d\sqrt{x^2+4}$

$= x\sqrt{x^2+4} - \int x \frac{\cancel{2}x dx}{\cancel{2}\sqrt{x^2+4}}$

$= x\sqrt{x^2+4} - \int \frac{x^2+4-4}{\sqrt{x^2+4}} dx$

$= x\sqrt{x^2+4} - \int \sqrt{x^2+4}\, dx + 4\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}$

$= x\sqrt{x^2+4} - \int \sqrt{x^2+4}\, dx + 4\ln(x+\sqrt{x^2+4})$

$\therefore \int \sqrt{x^2+4}\, dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+4} + 2\ln(x+\sqrt{x^2+4}) + C$ #

注: 也可用换元法

五、 (10分)设$f(x) \in C[a,b]$, $f(x) > 0$. 则存在唯一的$\xi \in (a,b)$, 使得$\int_a^\xi f(t)\mathrm{d}t = \int_\xi^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t$.

证明：令 $F(x) = \int_a^x f(t)dt - \int_x^b \frac{1}{f(t)}dt$

$\because F(x) \in C^1[a,b]$

又 $F'(x) = f(x) + \frac{1}{f(x)} > 0$

且 $F(a) = -\int_a^b \frac{1}{f(t)}dt < 0$

$F(a) = \int_a^b f(t)dt > 0$

由连续性 $\exists \xi \in (a,b)$

s.t $F(\xi) = 0$

即 $\int_a^\xi f(t)dt = \int_\xi^b \frac{1}{f(t)}dt$

又 $F(x)$ 严格单调、

$\therefore \xi$ 唯一 #

六、 (10分)设心脏线的极坐标方程为$r=b(1+\cos\theta)$, 其中$r=\sqrt{x^2+y^2},\theta=\arctan\frac{y}{x},b>0$.

(1) 求$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$;

解：$r'=-b\sin\theta$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{r'(\theta)\sin\theta+r(\theta)\cos\theta}{r'\cos\theta-r(\theta)\sin\theta}$$

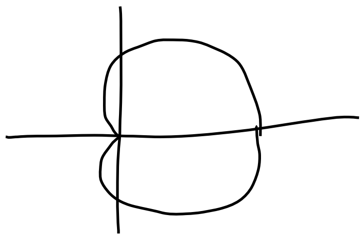
$$=\frac{-b\sin^2\theta+b(1+\cos\theta)\cos\theta}{-b\sin\theta\cos\theta-b(1+\cos\theta)\sin\theta}$$

$$=-\frac{\cos2\theta+\cos\theta}{\sin2\theta+\sin\theta}=-\frac{2\cos\frac{3\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{3\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}$$

$$=-\cot\frac{3\theta}{2}\quad(\theta\neq0,\ \theta\neq\pm\tfrac{2}{3}\pi).\ \#$$

(2) 求心脏线所围成的面积.

解：如图由对称性



$$S=\int_0^\pi r^2(\theta)\,d\theta$$

$$=\int_0^\pi b^2(1+\cos\theta)^2\,d\theta$$

$$=b^2\int_0^\pi(1+2\cos\theta+\cos^2\theta)\,d\theta$$

$$=\pi b^2+\frac{1}{2}b^2\int_0^\pi(1+\cos2\theta)\,d\theta$$

$$=\frac{3}{2}\pi b^2\ \#$$

七、 (10分)完成下面两题

(1) 讨论函数$g(x)=\ln x$的凹凸性;

解：$\because g'(x)=\frac{1}{x}$

$g''(x)=-\frac{1}{x^2}<0$

$\therefore g(x)$为严格凹函数. #

(2) 设$p,q>0$, 且$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, 又设$a>0,\ b>0$, 证明：

$$ab\le\frac{1}{p}a^p+\frac{1}{q}b^q.$$

证明：只需证

$\ln(ab)\le\ln(\frac{1}{p}a^p+\frac{1}{q}b^q)$

由(1). $\ln x$严格凹

$\therefore \ln(\frac{1}{p}a^p+\frac{1}{q}b^q)$

$\ge\frac{1}{p}\ln a^p+\frac{1}{q}\ln b^q$

$=\ln ab$ #

八、 (10分)设$f(x), g(x) \in C[a,b]$满足$f(x) \geq g(x)$, $\forall x \in [a,b]$, 且$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$, 则在区间$[a,b]$上$f(x) \equiv g(x)$.

证明：令 $h(x) = f(x) - g(x)$

由已知 $h(x) \geq 0$ 且 $\int_a^b h(x)dx = 0$

只需 $h(x) \equiv 0$、否则不妨设 $\exists x_0 \in (a,b)$

s.t $h(x_0) > 0$、由连续性

$\exists \delta > 0$、 s.t $\forall x \in [x_0-\delta, x_0+\delta]$

均有 $h(x) \geq \frac{1}{2}h(x_0)$

$$\therefore \int_a^b h(x)dx = \int_a^{x_0-\delta} h(x)dx + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} h(x)dx + \int_{x_0+\delta}^b h(x)dx$$

$$\geq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} h(x)dx$$

$$\geq \frac{1}{2}h(x_0)\cdot 2\delta > 0$$、矛盾 #

九、 (10分)设$g(x) \in C[0,1]$, 在开区间$(0,1)$内可导，且$g(0)=1$, $g(1)=0$. 证明：存在一点$x_0 \in (0,1)$, 使得$g'(x_0) = -\frac{g(x_0)}{x_0}$.

证明：令 $f(x) = x\,g(x)$

$\because$ $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 上可导 又 $f(0)=0$，

$f(1) = 1\cdot g(1) = 0$

$\therefore \exists x_0 \in (0,1)$ s.t. $f'(x_0) = 0$

又 $f'(x) = g(x) + x g'(x)$

$\therefore 0 = g(x_0) + x_0 g'(x_0)$

$\Rightarrow g'(x_0) = -\frac{g(x_0)}{x_0}$ #

十、 (10分)　(1)设$g(x)$在任一有限区间上可积，且$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=a$. 求证:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x g(t)\mathrm{d}t=a.$$

证明：由Hospital法则

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x g(t)dt=\lim_{x\to+\infty}g(x)=a$$

#

(2) 第(1)小题的逆命题是否成立？如果不成立，给出反例. 如果加上一个条件：$g(x)$在$[0,+\infty)$上单调上升，第(1)小题的逆命题是否成立？给出理由.

解：其逆不成立，例如：$g(x)=\cos x$

则 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_0^x \cos t dt=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$

但 $\lim\limits_{x\to+\infty}\cos x$ 不存在

加上$g(x)$在$[0,+\infty)$上单调上升后，逆成立.

事实上：

$$\frac{1}{x}\int_0^x g(t)dt\leq g(x)\leq\frac{1}{x}\int_x^{2x}g(t)dt$$

令 $\frac{1}{x}\int_0^x g(t)dt\to l$

$$\therefore\ \frac{1}{x}\int_x^{2x}g(t)dt=2\cdot\frac{1}{2x}\int_0^{2x}g(t)dt-\frac{1}{x}\int_0^x g(t)dt$$

$$\to 2l-l=l$$

由夹逼性：$\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=l$. #