姓名________ 学号________ 学院________ 专业________ 座位号________

（密封线内不答题）

密 封 线

诚信应考，考试作弊将带来严重后果!

华南理工大学期末考试

《线性代数与解析几何 》(A)试卷(17-18年度第1学期)

注意事项：1. 考前请将密封线内填写清楚;
2. 所有答案请直接答在试卷上;
3. 考试形式：闭卷;
4. 本试卷共 8 大题，满分 100 分，考试时间 120 分钟.

题 号	一	二	三	四	五	六	七	八	总 分
得 分									

一、 (15分) 填空题.

得分	

1. 若n阶行列式D的值等于d，则将D的每个第(i,j)元素a_{ij}换到第$(n-i+1, n-j+1)$元素的位置上，得到的新行列式的值为 d .

2. 设A, B为可逆阵，则$\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^{-1} =$ $\begin{pmatrix} 0 & B^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{pmatrix}$.

3. 设n为正整数，矩阵$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$，则$A^n =$ $\begin{pmatrix} 1 & n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$

4. 与矩阵$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$乘法可交换的所有矩阵为 $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$

5. 设$\alpha_1 = (1,4,1), \alpha_2 = (2,1,0), \alpha_3 = (6,2,-16), \beta = (2,t,3)$，当$t =$ 任意实数 时，β可由$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性表出.

二、 (18分) 选择题:

得分	

1. 行列式$\begin{vmatrix} 8 & 27 & 64 & 125 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$ (A).

(A) 12, (B) -12, (C) 16, (D) -16

2. 矩阵A是n阶方阵，A^*是其伴随矩阵，则下列结论错误的是(D).

(A) 若A可逆, 则A^*可逆　　(B) 若A不可逆, 则A^*也不可逆

(C) 若$|A^*|\neq 0$, 则A是可逆的　(D) $|AA^*|=|A|$.

3. 要下列齐次线性方程组有非零解, 只需条件(D) 满足:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0, \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0. \end{cases}$$

(A) $m\leq n$,　(B) $m=n$,　(C) $m>n$,　(D) 系数矩阵的秩小于n.

4. 设3阶矩阵A的特征值为$1, 0, -1$, $f(x)=x^2-2x-1$, 则$f(A)$的特征值为(A)

(A) $-2,-1,2$,　(B)$-2,-1,-2$,　(C) $0,1,-1$,　(D) $2,0,-2$.

5. 若矩阵A只和自己相似, 则(C).

(A) A必为单位矩阵; (B) A必为零矩阵;

(C) A必为数量矩阵; (D) A为任意对角矩阵.

6. 在下列二次型中, 属于正定二次型的是(C).

(A) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2$;

(B) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+2x_1x_2+x_3^2$;

(C) $f(x_1,x_2,x_3)=4x_1^2+3x_2^2+6x_3^2-x_1x_2-x_1x_3$;

(D) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$.

三、 (7分)计算行列式:

得分	

$$D=\begin{vmatrix} a & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & a+1 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & a+2 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & a+n-1 \end{vmatrix}.$$

$$D=\begin{vmatrix} a+\frac{(n-1)(n+2)}{2} & 2 & 3 & \cdots & n \\ a+\frac{(n-1)(n+2)}{2} & a+1 & 3 & \cdots & n \\ a+\frac{(n-1)(n+2)}{2} & 2 & a+2 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a+\frac{(n-1)(n+2)}{2} & 2 & 3 & \cdots & a+n-1 \end{vmatrix} \text{(+3分)} = \begin{vmatrix} a+\frac{(n-1)(n+2)}{2} & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & a-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-1 \end{vmatrix} \text{(+3分)}$$

$$=\left[a+\frac{(n-1)(n+2)}{2}\right](a-1)^{n-1} \qquad \text{(+1分)}$$

四、 (15分) 求解下列非齐次线性方程组：

得分	

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=7, \\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=-2, \\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5=23, \\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=12, \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 23 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 & 12 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 23 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & -5 & -16 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 23 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1-x_3-x_4-5x_5=-16 \\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=k_1+k_2+5k_3-16 \\ x_2=-2k_1-2k_2-6k_3+23 \\ x_3=k_1 \\ x_4=k_2 \\ x_5=k_3 \end{cases}$$

通解： $$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = k_1\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_3\begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -16 \\ 23 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

五、 (15 分) 在$\mathbb{R}^3$中, 求由基$\varepsilon_1=(1,0,0)$, $\varepsilon_2=(1,1,0)$, $\varepsilon_3=(1,1,1)$到基$\eta_1=(1,2,3)$, $\eta_2=(2,3,1)$, $\eta_3=(3,1,2)$的过渡矩阵, 并求向量$\xi=(1,0,1)$在这两组基下的坐标.

得分	

$$\left(\varepsilon_1^T \quad \varepsilon_2^T \quad \varepsilon_3^T \mid \eta_1^T \quad \eta_2^T \quad \eta_3^T\right)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&2&3\\0&1&1&2&3&1\\0&0&0&3&1&2\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-1&-1&2\\0&1&0&-1&2&-1\\0&0&1&3&1&2\end{array}\right)$$ +5分

从基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$到基$\eta_1,\eta_2,\eta_3$的过渡矩阵 $P=\begin{pmatrix}-1&-1&2\\-1&2&-1\\3&1&2\end{pmatrix}$

设ξ在基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$的坐标为$(x_1,x_2,x_3)$

$x_1\varepsilon_1+x_2\varepsilon_2+x_3\varepsilon_3=\xi$

$$\left(\varepsilon_1^T,\varepsilon_2^T,\varepsilon_3^T,\xi^T\right)=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1\\0&1&0&-1\\0&0&1&1\end{array}\right)$$ +5分

$(x_1,x_2,x_3)=(1,-1,1)$

所以，ξ在基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$的坐标为$(1,-1,1)$

设ξ在基η_1,η_2,η_3的坐标为(y_1,y_2,y_3)

$y_1\eta_1+y_2\eta_2+y_3\eta_3=\xi$

$$\left(\eta_1^T,\eta_2^T,\eta_3^T,\xi^T\right)=\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&1\\2&3&1&0\\3&1&2&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1/9\\0&1&0&-2/9\\0&0&1&4/9\end{array}\right)$$ +5分

$(y_1,y_2,y_3)=\left(\frac{1}{9},-\frac{2}{9},\frac{4}{9}\right)$

所以，ξ在基η_1,η_2,η_3的坐标为$\left(\frac{1}{9},-\frac{2}{9},\frac{4}{9}\right)$

六、 (10分) 求过点$(1,1,1)$, 且垂直于平面$x-y+z=7$和$3x+2y-12z+5=0$的平面方程.

得分	

$$\vec{n}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -12 \end{vmatrix}=10\vec{i}+15\vec{j}+5\vec{k}$$ (+6分)

$$10(x-1)+15(y-1)+5(z-1)=0$$

平面方程： $2(x-1)+3(y-1)+(z-1)=0$ (+4分)

即： $2x+3y+z-6=0$

七、 (15 分) 设3阶实对称矩阵$A=\begin{pmatrix} 6 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$,

得分	

(1) 求A的特征值、特征向量; (2) 求正交矩阵T, 使得$T^{-1}AT$为对角形.

(1)

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-6 & -2 & -4 \\ -2 & \lambda-3 & -2 \\ -4 & -2 & \lambda-6 \end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda-11)\overset{令}{=}0$$

特征值： $\lambda_1=\lambda_2=2,\quad \lambda_3=11$

对 λ=2:

$$(\lambda E-A)=\begin{pmatrix} -4 & -2 & -4 \\ -2 & -1 & -2 \\ -4 & -2 & -4 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$(\lambda E-A)X=0$的基础解系： $\alpha_1=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

对应λ=2 的特征向量为： $\alpha_1=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

对 $\lambda=11$:

$$(11E-A)=\begin{pmatrix}5&-2&-4\\-2&8&-2\\-4&-2&5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-4&-1\\0&2&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$(11E-A)X=0$的基础解系，也是对应 $\lambda=11$的特征向量 : $\alpha_3=\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$

(2) α_1,α_2 正交化: $\beta_1=\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$, $\beta_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4/5\\-2/5\\1\end{pmatrix}$

β_1,β_2,α_3单位化: $\begin{pmatrix}-1/\sqrt{5}\\2/\sqrt{5}\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-\frac{4}{3\sqrt{5}}\\-\frac{2}{3\sqrt{5}}\\\frac{\sqrt{5}}{3}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2/3\\1/3\\2/3\end{pmatrix}$

得正交矩阵 $T=\begin{pmatrix}\frac{-1}{\sqrt{5}}&-\frac{4}{3\sqrt{5}}&\frac{2}{3}\\\frac{2}{\sqrt{5}}&-\frac{2}{3\sqrt{5}}&\frac{1}{3}\\0&\frac{\sqrt{5}}{3}&\frac{2}{3}\end{pmatrix}$

使得 $T^{-1}AT=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&11\end{pmatrix}$

八、 (5分) 设A是$m\times n$矩阵, B是$m\times k$矩阵,且$A=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$, $B=(\beta_1,\beta_2,...,\beta_k)$是它们的列向量构成的分块矩阵. 假定对每个$\beta_j$，分块矩阵$(A,\beta_j)$的秩与$A$的秩相等. 令$C=(A,B)$为由$A,B$构成的分块矩阵, 证明: $r(C)=r(A)$.

得分	

因为 $r(A,\beta_i)=r(A)$

β_i可以表示为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的线性组合， $i=1,2,\cdots,k$

则 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_k,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表示

所以, $r(A,B)\le r(A)$

又 $r(A,B)\ge r(A)$

因此, $r(C)=r(A,B)=r(A)$