

诚信应考, 考试作弊将带来严重后果!

华南理工大学本科生期末考试

《工科数学分析(上)》期末考试(B)

- 注意事项: 1. 考前请将密封线内填写清楚;
2. 考试形式: 闭卷;
3. 请用蓝色或黑色水笔答题, 不要用铅笔或者其他颜色的笔答题;
4. 交卷时除了草稿纸不用交之外, 每页试卷都要交;
5. 本试卷共 10 大题, 满分 100 分, 考试时间 120 分钟。

| | | | | | | | | | | | |
|-----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|-----|
| 题 号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 | 七 | 八 | 九 | 十 | 总 分 |
| 得 分 | | | | | | | | | | | |

一、 (10分)用 $\varepsilon - \delta$ 语言叙述 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ 的定义. 并用定义证明 $\lim_{x \rightarrow b} \sqrt{x} = \sqrt{b}$.

二、 (10分)计算下列极限

(1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{1+x} \right)^x;$

(2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left((2+x)e^{\frac{1}{x}} - x \right).$

三、 (10分)完成下面两题

(1) 设 $y = \arctan x$, 求 $y^{(n)}(0)$.

(2) 定义函数

$$f(x) = \begin{cases} x^4 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

问 $f(x)$ 在 $x = 0$ 有几阶导数.

四、 (10分)计算以下两题

(1) $\int x^2 e^x dx,$

(2) $\int \sqrt{x^2 + a^2} dx (a > 0).$

五、 (10分) 设 $f(x) \in C[0, 1]$, $f(x) > 0$. 则存在唯一的 $a \in (0, 1)$, 使得 $\int_0^a f(t) dt = \int_a^1 \frac{1}{f(t)} dt$.

六、 (10分)设心脏线的极坐标方程为 $r = a(1 + \cos \theta)$, 其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2}, \theta = \arctan \frac{y}{x}, a > 0$.

(1) 求 $\frac{dy}{dx}$;

(2) 求心脏线的全长.

七、(10分)完成下面两题

(1) 讨论函数 $f(x) = \ln x$ 的凹凸性;

(2) 设 $p, q > 0$, 且 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 又设 $a > 0, b > 0$, 证明:

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q.$$

八、 (10分) 设 $f(x), g(x) \in C[a, b]$ 满足 $f(x) \leq g(x), \forall x \in [a, b]$, 且 $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$, 则 $f(x) \equiv g(x)$.

九、 (10分) 设 $f(x) \in C[0, 1]$, 在开区间 $(0, 1)$ 内可导, 且 $f(0) = 1, f(1) = 0$. 证明: 存在一点 $x_0 \in (0, 1)$, 使得 $f'(x_0) = -\frac{f(x_0)}{x_0}$.

十、(10分) (1) 设 $f(x)$ 在任一有限区间上可积, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$. 求证:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = l.$$

(2) 第(1)小题的逆命题是否成立? 如果不成立, 给出反例. 如果加上一个条件: $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调上升, 第(1)小题的逆命题是否成立?