莫比乌斯反演

By i207M
Graduated from SJZEZ2020
Studying @THU

Powered by Marp

这是数论中的重要内容，时常在各地省选、NOI中出现。
用途很广，很考验思维。

在NOIP前应该了解，会做基本的题。

对于一些函数 $f(n)$ ，如果很难直接求出它的值，而容易求出其倍数和或约数和 $g(n)$ ，那么可以通过莫比乌斯反演简化运算，求得 $f(n)$ 的值。

开始学习莫比乌斯反演前，我们需要一些前置知识： **积性函数** 、 Dirichlet **卷积** 、 **莫比乌斯函数** 。

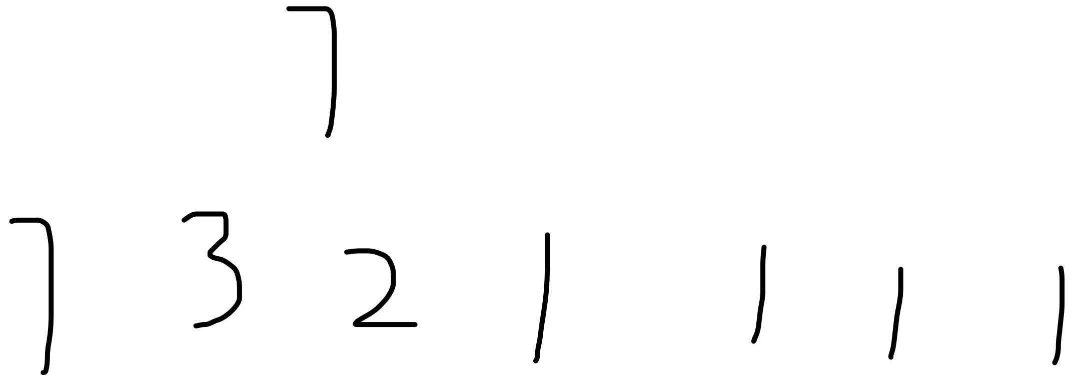
前置知识

引理 1

$$\forall a, b, c \in \mathbb{Z}, \left\lfloor \frac{a}{bc} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor}{c} \right\rfloor$$

证：

$$\begin{aligned} &\frac{a}{b} = \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor + r(0 \le r < 1) \\ \implies &\left\lfloor \frac{a}{bc} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{c} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{c} \left(\left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor + r \right) \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor}{c} + \frac{r}{c} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor}{c} \right\rfloor \quad \square \end{aligned}$$



引理 2

$\forall n \in \mathbb{N}_+, \lfloor \frac{n}{d} \rfloor$的不同取值数$\leq \lfloor 2\sqrt{n} \rfloor$

($|V|$ 表示集合 V 的元素个数)

证:

对于 $d \leq \lfloor \sqrt{n} \rfloor$ ，$\lfloor \frac{n}{d} \rfloor$ 有 $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$ 种取值;

对于 $d > \lfloor \sqrt{n} \rfloor$ ，有 $\lfloor \frac{n}{d} \rfloor \leq \lfloor \sqrt{n} \rfloor$ ，也只有 $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$ 种取值;

综上，得证。

数论分块

不妨设 $k = \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor$，考虑证明当 $\left\lfloor \frac{n}{j} \right\rfloor = k$ 时，j 的最大值为 $\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$：

$$\left\lfloor \frac{n}{j} \right\rfloor = k \iff k \le \frac{n}{j} < k+1 \iff \frac{1}{k+1} < \frac{j}{n} \le \frac{1}{k} \iff \frac{n}{k+1} < j \le \frac{n}{k}$$

又因为 j 为整数 所以 $j_{max} = \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$

$\left\lfloor \frac{n}{\left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor} \right\rfloor$

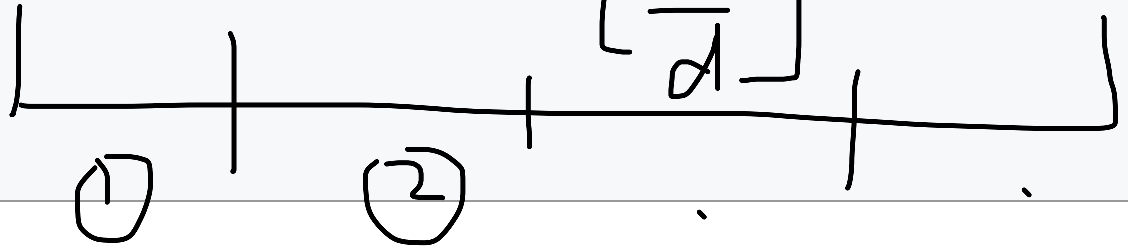
利用上述结论，我们每次以 $[i, j]$ 为一块，分块求和即可

```
for (int i = 2, j; i <= n; i = j + 1)
{
    j = n / (n / i);
    // [i, j]
    // do something
}
```

$\left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor$

$\sqrt{n}$ 种值

$\left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor$



例题：[CQOI2007]余数求和

计算

$$G(n,k)=\sum_{i=1}^{n} k \bmod i$$
$$n,k \le 10^9$$

是否做过?

$$ans = \sum_{i=1}^{n} k - i \times \lfloor \frac{k}{i} \rfloor = nk - \sum_{i=1}^{n} i \times \lfloor \frac{k}{i} \rfloor$$

整除分块是降低复杂度的核心

积性函数

定义

若函数 $f(n)$ 满足 $f(1)=1$ 且 $\forall x,y\in\mathbb{N}_+,\gcd(x,y)=1$ 都有 $f(xy)=f(x)f(y)$，则 $f(n)$ 为积性函数。

若函数 $f(n)$ 满足 $f(1)=1$ 且 $\forall x,y\in\mathbb{N}_+$ 都有 $f(xy)=f(x)f(y)$，则 $f(n)$ 为完全积性函数。

性质

若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 均为积性函数，则以下函数也为积性函数：

$$h(x) = f(x^p)$$
$$h(x) = f(x)g(x)$$
$$h(x) = \sum_{d|x} f(d)g(\frac{x}{d})$$

d(i^k)

设 $x = \prod p_i^{k_i}$

若 $F(x)$ 为积性函数，则有 $F(x) = \prod F(p_i^{k_i})$ 。

若 $F(x)$ 为完全积性函数，则有 $F(x) = \prod F(p_i)^{k_i}$ 。

例子

常用

- 单位函数： $\epsilon(n)=\boxed{[n=1]}$ (完全积性)
- 恒等函数： $\mathrm{id}_k(n)=n^k$ 。 $\mathrm{id}_1(n)$ 通常简记作 $\mathrm{id}(n)$ 。 (完全积性)
- 常数函数： $1(n)=1$ (完全积性)
- 除数函数： $\sigma_k(n)=\sum_{d|n}d^k$。 $\sigma_0(n)$ 通常简记作 $\mathrm{d}(n)$ 或 $\tau(n)$ ， $\sigma_1(n)$ 通常简记作 $\sigma(n)$ 。
- 欧拉函数： $\varphi(n)=\sum_{i=1}^{n}[\gcd(i,n)=1]$
- 莫比乌斯函数： $\mu(n)=\begin{cases}1 & n=1\\ 0 & \exists d>1: d^2\mid n\\ (-1)^{\omega(n)} & otherwise\end{cases}$ 其中 $\omega(n)$ 表示 n 的本质不同质因子个数，它也是一个积性函数。

2×3

$\mu(6)=1$

$\mu(12)=0$

$\mu(1)=1 \quad \mu(2)=(-1)^1=-1 \quad \mu(3)=-1,\ \mu(4)=0$

Dirichlet 卷积

定义

定义两个数论函数 f, g 的 Dirichlet 卷积为

$$(f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d)g(\frac{n}{d})$$

① 交

② 结合

③ 分配 +

$+(\ )$

$g(d)f(\frac{n}{d})$

性质

Dirichlet 卷积满足以下运算规律：

- 交换律 $(f * g = g * f)$；
- 结合律 $(f * g) * h = f * (g * h)$；
- 分配律 $f * (g + h) = f * g + f * h$；
- $f * \varepsilon = f$，其中 ε 为 Dirichlet 卷积的单位元（任何函数卷 ε 都为其本身）

$$\sum_{d|n} f(d)\boxed{\varepsilon\left(\frac{n}{d}\right)} \longleftarrow d=n \qquad = f(n)$$

例子

$$\varepsilon = \mu * 1 \iff \varepsilon(n) = \sum_{d|n} \mu(d)$$

$$d = 1 * 1 \iff d(n) = \sum_{d|n} 1 \times 1$$

$$\sigma = \mathrm{id} * 1 \iff \sigma(n) = \sum_{d|n} d \times 1$$

$$\varphi = \mu * \mathrm{id} \iff \varphi(n) = \sum_{d|n} d \cdot \mu\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} \mu(d) \cdot \frac{n}{d}$$

$p_1^{k_1} \cdots p_s^{k_s}$

0,1 0,1 ...

$1(d) \times 1(\frac{n}{d})$

$2^{|S|}$ 有一半 +1 −1

$2^{|S|} = 2^0 = 1$

② 容斥

μ 对质因子容斥

n − gcd 为 2, 3, 5, … 的

+ gcd 有两个质因子

gcd = 6, 10, 15

有的不会证明?

$n = \sum_{d|n} \varphi(d)$

$\iff \mathrm{id} = \varphi * 1 = \varepsilon$

① 用 ε = μ * 1

$\varphi = \mathrm{id} * \mu = \varphi * 1 * \mu$

性质二：

$$\sum_{d|n}\mu(d)=[n=1]$$

证明：

- 当 $n=1$ 时显然。
- 当 $n\neq 1$ 时，设 $n=p_1^{q1}\cdot p_2^{q2}\cdots p_m^{qm}$ 。
  - 在 n 的所有因子中，μ 值不为 0 的只有所有质因子次数都为 1 的因子，其中质因子个数为 r 个的有 C_k^r 个。
  - 那么显然有：$\sum_{d|n}\mu(d)=C_k^0-C_k^1+C_k^2+\cdots+(-1)^kC_k^k=\sum_{i=0}^{k}(-1)^iC_k^i$ 。
  - 由二项式定理知 $(x+y)^n=\sum_{i=0}^{n}C_n^i x^i y^{n-i}$ 。令 $x=-1,y=1$ ，代入即可得证。

小试牛刀

$id = 1 * \varphi$

$\gcd(i,n) = \sum_{d \mid (i,n)} \varphi(d)$

1D GCD

求

$$\sum \gcd(i,n)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{d \mid (i,n)} \varphi(d) \Rightarrow d \mid n$$

$$= \sum_{d \mid n} \varphi(d) \frac{n}{d} = \varphi * id$$

O(因数)求出每个因数的φ

pri[i] p_1 p_2 … p_k

cnt[i] 2 1 5

void dfs(int i, int num, int phi)

① 不选

dfs(i+1, num, phi)

② 选

枚举次数 1…5

dfs(i+1, num·p^i, phi·(p-1)·p^{i-1})

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i}^{n} gcd(i, n) \\
&= \sum_{i}^{n} \sum_{d|i,n} \varphi(d) \\
&= \sum_{d|n} \varphi(d) \frac{n}{d}
\end{aligned}
$$

2D GCD (P2398 GCD SUM)

求

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \cancel{\gcd(i,j)} \quad \sum_{d\mid(i,j)} \varphi(d)$$

$n \le m$

$n \le 10^9$

$$= \sum_{d=1}^{n} \varphi(d) \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor \left\lfloor \frac{m}{d} \right\rfloor$$

$$\sum_{i}^{n}\sum_{j}^{m} gcd(i,j)$$

$$=\sum_{i}^{n}\sum_{j}^{m}\sum_{d|i,j}\varphi(d)$$

$$=\sum_{d\leqslant n}\varphi(d)\left\lfloor\frac{n}{d}\right\rfloor\left\lfloor\frac{m}{d}\right\rfloor$$

$$j=\min\left(\left\lfloor\frac{n}{\lfloor\frac{n}{i}\rfloor}\right\rfloor,\left\lfloor\frac{m}{\lfloor\frac{m}{j}\rfloor}\right\rfloor\right)$$

同时对n,m整除分块?

类似地，可求$\sum\sum[\gcd(i,j)==1]$ $\varepsilon(\gcd(i,j))=\sum_{d|(i,j)}\mu(d)$

$$d \cdot 2d \cdot 3d \cdots \frac{n}{d} \cdot d$$

$$d\left(1+2+\cdots\cdots\frac{n}{d}\right)$$

$$= \cancel{d} \cdot \frac{1}{2}\frac{n}{\cancel{d}}\left(\frac{n}{d}+1\right)$$

与n互质的整数和

求

$$\sum_{i}^{n} i[\gcd(i,n)==1] = \frac{n}{2}(\varphi+\varepsilon)$$

$$\varepsilon(\gcd(i,n))$$

$$= \sum_{d|n}\mu(d)\cdot\frac{n}{2}\left(\frac{n}{d}+1\right)$$

$$= \frac{n}{2}\left(\sum_{d|n}\mu(d)\frac{n}{d}\right)+(\mu*1)$$

$$= \frac{n}{2}\left(\varphi(n)+\varepsilon(n)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} i \sum_{d|(i,n)} \mu(d)$$

$$= \sum_{d|n}\mu(d)\sum_{i=1,\,d|i}^{n} i$$

$$
\begin{aligned}
g(n) &= \sum_{i}^{n} ie(gcd(i, n)) \\
&= \sum_{i}^{n} i \sum_{d|i,n} \mu(d) \\
&= \sum_{d|n} \mu(d) \sum_{d|i,i \leqslant n} i \\
&= \sum_{d|n} \mu(d) \frac{n(\frac{n}{d}+1)}{2} \\
&= \frac{n}{2}(\mu \times id + \mu \times 1) \\
&= \frac{n}{2}(\varphi + e)
\end{aligned}
$$

继续研究

莫比乌斯反演

公式

设 $f(n),g(n)$ 为两个数论函数。

如果有 $f(n)=\sum_{d|n}g(d)$，那么有 $g(n)=\sum_{d|n}\mu(d)f(\frac{n}{d})$。

如果有 $f(n)=\sum_{n|d}g(d)$，那么有 $g(n)=\sum_{n|d}\mu(\frac{d}{n})f(d)$。

注意两个式子的区别。

$k=\frac{n}{d}$　$n=kd$ ✓

$d=\frac{n}{k}$

d是n因数

d是$\frac{n}{k}$因数 ⟺ k是$\frac{n}{d}$因数 ⟹ k是n的因数

当d=1时，k取遍n的因数

证明

方法一：对原式做数论变换。

$f(\frac{n}{d})$　$\varepsilon(\frac{n}{k})$　$g(n)$、$\varepsilon(n)$

$$\sum_{d|n}\mu(d)f(\frac{n}{d}) = \sum_{d|n}\mu(d)\sum_{k|\frac{n}{d}} g(k) = \sum_{k|n} g(k)\sum_{d|\frac{n}{k}}\mu(d) = g(n)$$

之前我们是在枚举n的约数d，求出 $\mu(d)$，再枚举 $\frac{n}{d}$ 的约数i，求出 $g(i)$。
其实换一个顺序也没有关系，先枚举i再枚举d。

方法二：运用卷积。

原问题为：已知 $f = g * 1$，证明 $g = f * \mu$

易知如下转化： $f * \mu = g * 1 * \mu \implies f * \mu = g$ （其中 $1 * \mu = \varepsilon$）

ε

对于第二种形式：

$d=kn$

$$\sum_{n|d}\mu\boxed{(\frac{d}{n})}f(d) = \sum_{k=1}^{+\infty}\mu(k)f(kn)=\sum_{k=1}^{+\infty}\mu(k)\sum_{kn|d}g(d) = \sum_{n|d}g(d)\boxed{\sum_{k|\cancel{\frac{n}{d}}\,\frac{d}{n}}\mu(k)}=\sum_{n|d}g(d)\epsilon(\frac{n}{d}) = g(n)$$

我们把 d 表示为 kn 的形式，然后把 f 的原定义代入式子。

发现枚举 k 再枚举 kn 的倍数可以转换为直接枚举 n 的倍数再求出 k ,

发现后面那一块其实就是 ϵ , 整个式子只有在 $d=m$ 的时候才能取到值 .

欧拉函数前缀和

小试牛刀。

$\sum \varphi(i)$

不考虑对范围的限制，则实际上需要求 n 以内两两互质的数对个数，由莫比乌斯反演知：

$$
\begin{aligned}
S_2(n) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\boxed{[\gcd(i,j)=1]} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\boxed{\sum_{d\mid i,\, d\mid j}\mu(d)} \\
&= \sum_{d=1}^{n}\mu(d)\boxed{\left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor^2}
\end{aligned}
$$

重要提醒：看见μ就尽力提前！μ是灵魂！

μ的本质就是对质因数容斥！！！

$$\varphi = \mu * id$$

$$n - \boxed{gcd = 2, 3, 5, 7} \cdots + gcd = 2x, \cdots - gcd\ xxx$$

杜教筛

暂时不讲。

题

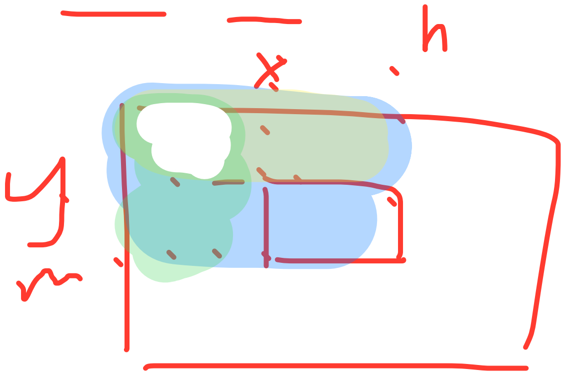
可能会混进去一些奇奇怪怪的题目。

在讲题时一定要积极思考！

「HAOI 2011」Problem b

求值（多组数据）

$$\sum_{i=x}^{n}\sum_{j=y}^{m}[\gcd(i,j)=k] \qquad (1 \leqslant T, x, y, n, m, k \leqslant 5\times 10^4)$$



$$= \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{k} \rfloor}\sum_{j=1}^{\lfloor \frac{m}{k} \rfloor}[(i,j)=1]$$

$$i,j \Leftrightarrow ik, jk$$

先容斥解决上下界，然后/k。然后转化为欧拉函数前缀和。

1D LCM

求

$$\sum \mathrm{lcm}(i,n) = \sum \frac{i\cdot n}{\gcd(i,n)}$$

$$= n\sum_{d|n}\frac{1}{d}\sum i[(i,n)=d]$$

$$= n\sum_{d|n}\cancel{\frac{1}{d}}\sum_{j=1}^{\frac{n}{d}} j\cancel{d}\left[\left(j,\frac{n}{d}\right)=1\right]$$

$$g(n)=\frac{n}{2}\left(\varphi(n)+\varepsilon(n)\right)$$

$$= n\sum_{d|n} g\left(\frac{n}{d}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i}^{n} lcm(i,n) \\
&= n\sum_{i}^{n}\frac{i}{gcd(i,n)} \\
&= n\sum_{d|n}\frac{\sum_{i\leqslant n} i[gcd(i,n)=d]}{d} \\
&= n\sum_{d|n}\sum_{j}^{\frac{n}{d}} je(gcd(j,\frac{n}{d})) \\
&= n\sum_{d|n} g(\frac{n}{d}) \\
&= n(g\times 1)
\end{aligned}
$$

$$\left(\sum_{i \mid d} i \right)$$

$$d \cdot \left(\left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor \cdots \right)$$

$$S(n) = \frac{n(n+1)}{2}$$

互质数乘积

求

$$10^6$$

$$\sum^{n} \sum^{m} ij[\gcd(i,j) == 1]$$

$$= \sum_{i}^{n} \sum_{j}^{m} ij \sum_{d \mid (i,j)} \mu(d)$$

$$= \sum_{d=1}^{n} \mu(d)\, d^2\, S\left(\left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor\right) S\left(\left\lfloor \frac{m}{d} \right\rfloor\right)$$

$$
\begin{aligned}
S(n,m) &= \sum_{i}^{n}\sum_{j}^{m} ije(gcd(i,j)) \\
&= \sum_{i}^{n}\sum_{j}^{m} ij \sum_{d|i,j} \mu(d) \\
&= \sum_{d\leqslant n} \mu(d) Sum(\left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{m}{d} \right\rfloor)
\end{aligned}
$$

$$\sum_{d=1}^{n} d^k \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor} \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{m}{d} \rfloor} [(i,j)=1]$$

$$= \sum d^k \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor} \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{m}{d} \rfloor} \sum_{u|(i,j)} \mu(u)$$

$$= \sum d^k \sum_{u=1}^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor} \mu(u) \left\lfloor \frac{n}{du} \right\rfloor \left\lfloor \frac{m}{du} \right\rfloor$$

$$\sum_{D=1}^{n} \sum_{d|D} d^k \cdot \mu\left(\frac{D}{d}\right) \left\lfloor \frac{n}{D} \right\rfloor \left\lfloor \frac{m}{D} \right\rfloor$$

$$= \sum_{D=1}^{n} \left\lfloor \frac{n}{D} \right\rfloor \left\lfloor \frac{m}{D} \right\rfloor \boxed{\sum_{d|D} d^k \cdot \mu\left(\frac{D}{d}\right)} = F[D]$$

$$F[D] \quad \boxed{id_k * \mu}$$

BZOJ 4407 于神之怒加强版

计算 $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \gcd(i,j)^k \mod (10^9+7)$ 的值

1<=N,M,K<=5000000,1<=T<=2000

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\gcd(i,j)^k \\
=&\sum_{d} d^k \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}[\gcd(i,j)=d] \\
=&\sum_{d} d^k \sum_{i=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}\sum_{j=1}^{\lfloor\frac{m}{d}\rfloor}[\gcd(i,j)=1] \\
=&\sum_{d} d^k \sum_{i=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}\sum_{j=1}^{\lfloor\frac{m}{d}\rfloor}\sum_{u|i,u|j}\mu(u) \\
=&\sum_{d} d^k \sum_{u}\mu(u)\lfloor\frac{n}{du}\rfloor\lfloor\frac{m}{du}\rfloor \\
=&\sum_{D}\lfloor\frac{n}{D}\rfloor\lfloor\frac{m}{D}\rfloor\sum_{d|D} d^k\mu(\frac{D}{d}) \\
=&\sum_{D}\lfloor\frac{n}{D}\rfloor\lfloor\frac{m}{D}\rfloor F(D)
\end{aligned}
$$

BZOJ 2154 Crash 的数字表格

求值

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\operatorname{lcm}(i,j) \qquad (n,m\leqslant 10^7)$$

$$=\sum_{i}\sum_{j}\frac{i\cdot j}{\gcd(i,j)}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{d\mid i,\, d\mid j}\frac{i\cdot j}{d}\left[\gcd\left(\frac{i}{d},\frac{j}{d}\right)=1\right]$$

$$=\sum_{d=1}^{n}\frac{1}{\cancel{d}}\,d\;\underbrace{\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}\sum_{j=1}^{\lfloor\frac{m}{d}\rfloor} i\cancel{d}\,jd\,[\gcd(i,j)=1]}_{\text{互质数对的积}}$$

$$S\left(\left\lfloor\frac{n}{d}\right\rfloor,\left\lfloor\frac{m}{d}\right\rfloor\right)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\frac{i\cdot j}{\gcd(i,j)}$$

枚举最大公因数 d

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{d|i,d|j,\gcd(\frac{i}{d},\frac{j}{d})=1}\frac{i\cdot j}{d}$$

$$\sum_{d=1}^{n}d\cdot\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}\sum_{j=1}^{\lfloor\frac{m}{d}\rfloor}[\gcd(i,j)=1]\ i\cdot j$$

出现了互质数对之积的和！完结撒花，两层分块。

$$\sum_{d=1}^{n}d\cdot\mathrm{sum}(\lfloor\frac{n}{d}\rfloor,\lfloor\frac{m}{d}\rfloor)$$

DZY Loves Math V

$$\sum_{i_1|a_1}\sum_{i_2|a_2}\cdots\sum_{i_n|a_n}\varphi(i_1 i_2\cdots i_n)$$

$$\varphi(p_1^{k_1}\, p_2^{k_2}\cdots)$$

$$\left(\sum \underline{\varphi(p_1^{k_1})}\right)\left(\underline{\varphi(p_2^{k_2})}\right)\cdots\left(\varphi(\quad)\right)$$

弱化：a_i互质?

$a_1 = p^1$ 　　 p质数

$a_2 = p^2$

$\vdots$

$a_n = p^n$

借助φ的积性性质，我们对每个质因数分别考虑；

将每个a分解质因数，假设分解后某个质数p在每个ai中的次数分别是bi，那么p对答案的贡献就是

$$\sum_{i_1=1}^{b_1}\sum_{i_2=1}^{b_2}\cdots\sum_{i_n=1}^{b_n}\varphi\left(p^{\sum_{j=1}^{n} i_j}\right) \qquad p^{t-1}(p-1)$$

$$=\left(\left(\sum_{i_1=1}^{b_1}\sum_{i_2=1}^{b_2}\cdots\sum_{i_n=1}^{b_n}p^{\sum_{j=1}^{n} i_j}\right)-1\right)\times\frac{p-1}{p}+1$$

$$=\left(\left(\prod_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{b_i}p^{j}\right)-1\right)\times\frac{p-1}{p}+1$$

第一行是在枚举从每个数中选择多少指数；

第二行是，根据φ的公式展开，然后由于在$n = 1$时不成立，所以把1拿出来单独考虑；

第三步就是分步计算了。

二分

DZY Loves Math VII

-1/0/1

已知μ(N)，求第K小的N。 ① 假设你会求 10^{10} 以内的μ前缀和

已知 $\varphi(N)$，求第K小的N。

已知d(N)，求第K小的N。

I. |μ(N)|<=1,K<=10^8

II. $\varphi(N)$<=10^10,K<=1000，满足答案不超过10^12

III. d(N)<=10^7,K<=50，满足答案不超过10^100

$$n\prod\left(1-\frac{1}{p_i}\right)$$

$$\begin{array}{ll} & -1 \quad x \\ \text{cnt} & 0 = n - \sum|\mu| \\ & 1 \quad y \end{array}$$

第一问：二分，联立方程组。需要算$\sum \mu(n)$，$\sum |\mu(n)|$。How?

$$-x+y=\sum \mu$$

$$x+y=\sum|\mu|$$

$\sum\mu$ 容斥

$$\sum_{i=1}^{n}|\mu(i)| = n + \sum_{i=2}^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}\mu(i)\boxed{\lfloor\frac{n}{i^2}\rfloor}$$

直接考虑μ的容斥特征。

$n -$ 有平方因子

$n -$ 有$2^2, 3^2, \dots$

$+$ 有$6^2, 10^2, 15^2$

$-$ 有$(2\times3\times5)^2 \dots$

2^3 ① 2 $3-1$ $n=2^3\times 3$

② 2^4 $n=2^4$. 对于$>10^6$质数. M-R

第二问：大力分解 $\varphi(n)$ ，然后直接算所有合法解，暴力枚举小于10^6的质数及指数。

第三问：先搜出最优解，然后爆搜调整+剪枝。判断大小可以取对数。

「SDOI2015」约数个数和

多组数据，求

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} d(i\cdot j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{x\mid i}\sum_{y\mid j}[(x,y)=1]$$

$$n, m, T \le 5\times 10^4$$

要推这道题首先要了解 d 函数的一个特殊性质

$$d(i \cdot j) = \sum_{x|i} \sum_{y|j} [\gcd(x, y) = 1]$$

证明?

$\frac{i}{x} \mid i \quad \frac{j}{y} \mid j$

$k \mid i \cdot j$

当 $x = \gcd(k, i)$

$y = \dfrac{k}{\gcd(k, i)}$

$\gcd(\frac{6}{1}, 4) = 2 \neq 1$

换个角度看

1 4

2 2

$$d(i \cdot j) = \sum_{x|i} \sum_{y|j} [\gcd(\boxed{\frac{i}{x}}, y) = 1]$$

$d(6) \cdot d(12)$

$d(72)$ 4

$d(i)\,d(j) \neq d(ij)$

限制：质因数尽量从 i 中取

$$\sum\sum d$$

$$= \sum_{i}\sum_{j}\sum_{p|i,p|j} \cdots$$

$$\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor \left\lfloor \frac{m}{p} \right\rfloor$$

$$= \sum_{p\ge 1}^{n} \mu(p) \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{p} \rfloor} \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{m}{p} \rfloor} d(i)\, d(j)$$

$$d(i\cdot j) = \sum_{x|i}\sum_{y|j}[\gcd(x,y)=1]$$

$$= \sum_{x|i}\sum_{y|j}\sum_{p|\gcd(x,y)} \mu(p)$$

$$= \sum_{p=1}^{\min(i,j)}\sum_{x|i}\sum_{y|j}[p \mid \gcd(x,y)]\cdot\mu(p)$$

$$= \sum_{p|i,p|j}\mu(p)\sum_{x|i}\sum_{y|j}[p \mid \gcd(x,y)]$$

$$x = x' \cdot p$$
$$y = y' \cdot p$$

$$= \sum_{p|i,p|j}\mu(p)\sum_{x|\frac{i}{p}}\sum_{y|\frac{j}{p}} 1$$

$$= \sum_{p|i,p|j}\mu(p)\, d\left(\frac{i}{p}\right) d\left(\frac{j}{p}\right)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} d(i\cdot j)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{p|i,p|j}\boxed{\mu(p)}d\left(\frac{i}{p}\right)d\left(\frac{j}{p}\right)$$

$$=\sum_{p=1}^{\min(n,m)}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}[p\mid i,p\mid j]\cdot\mu(p)d\left(\frac{i}{p}\right)d\left(\frac{j}{p}\right)$$

$i = p \cdot \frac{i}{p}$

$$=\sum_{p=1}^{\min(n,m)}\sum_{i=1}^{\left\lfloor\frac{n}{p}\right\rfloor}\sum_{j=1}^{\left\lfloor\frac{m}{p}\right\rfloor}\mu(p)d(i)d(j)$$

$$=\sum_{p=1}^{\min(n,m)}\mu(p)\boxed{\sum_{i=1}^{\left\lfloor\frac{n}{p}\right\rfloor}d(i)}\boxed{\sum_{j=1}^{\left\lfloor\frac{m}{p}\right\rfloor}d(j)}$$

$$=\sum_{p=1}^{\min(n,m)}\mu(p)S\left(\left\lfloor\frac{n}{p}\right\rfloor\right)S\left(\left\lfloor\frac{m}{p}\right\rfloor\right)\left(S(n)=\sum_{i=1}^{n}d(i)\right)$$

那么 $O(n)$ 预处理 μ, d 的前缀和， $O(\sqrt{n})$ 分块处理询问，总复杂度 $O(n+T\sqrt{n})$.

BZOJ 3309 DZY Loves Math

$f(n)$ 为 n 的幂指数的最大值。例如f(1960)=f(2^3 * 5^1 * 7^2)=3, f(10007)=1, f(1)=0。

$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} f(\gcd(i,j))$

$T \leq 10000, 1 \leq a, b \leq 10^7$

gcd(i,j)=d 的个数

$$ans = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} \underbrace{f(\gcd(i,j))}_{=d} = \sum_{d=1}^{\min(a,b)} f(d) \boxed{\sum_{x=1}^{\min(\lfloor\frac{a}{d}\rfloor,\lfloor\frac{b}{d}\rfloor)} \mu(x)\lfloor\frac{a}{dx}\rfloor\lfloor\frac{b}{dx}\rfloor}$$

令 $dx = T$ 那么有

$$ans = \sum_{T=1}^{\min(a,b)} \lfloor\frac{a}{T}\rfloor\lfloor\frac{b}{T}\rfloor(\sum_{d|T} f(d)\mu(\frac{T}{d})) = F[T]$$

我们线性筛出 $f*\mu$ 就行了，每次整除分块回答，复杂度是 $\mathcal{O}(n+T\sqrt{n})$ 的。

如何筛?

$$F[n] = \sum_{d|n} f(d)\,\mu\left(\frac{n}{d}\right)$$ 知

$f*1$ $O(n\log\log n)$?

法一 $\mu(d)f(\frac{x}{d})$

因为系数上有个 μ，所以我们把这个和式的枚举条件转化为 x 的质因子的集合的子集枚举. 于是 $f(x/d)$ 只有两种取值: f(x) 和 f(x)−1. 我们将 x 的质因子分为两个集合: M 代表最高次质因子, R 代表非最高次质因子. 然后我们考虑什么时候会取到这两种取值:

如果 $f(x/d)=f(x)$, 那么肯定最高次的质因子至少存在一个, 而不是最高次的质因子任意取. 这样的话共有 $\cancel{(2^{|M|}\times 2^{|R|})-1}$ 个项. 此时作为系数的 μ 的取值根据选中的质因子个数的奇偶性±1抵消到$(-1)^{|M|+|R|+1}$。 $(2^{|M|}-1)2^{|R|}$ $|R|=0$

如果 $f(x/d)=f(x)-1$, 那么肯定是最高次的质因子都被选中了, 那么此时只有非最高次质因子还可以任意取, 于是项数是 $2^{|R|}$.只有$|R|=0$时贡献不是0.

$$\left\{\begin{matrix} \cancel{f(x)\ \mu(d)} \\ \cancel{(f(x)-1)\ \mu(d)} \end{matrix}\right\} \Rightarrow F(x)=\begin{cases}0, & |R|\neq 0\\ (-1)^{w(n)} \end{cases}$$

for p in prime

for i in $[1, \frac{n}{p}]$

$$f(i \times p) \mathrel{+}= f(i) \Rightarrow f * 1$$

回顾：

$$f(i \times p) \mathrel{-}= f(i) \Rightarrow f * \mu$$

遇到两个数乘积，直接枚举它们的乘积，是个套路！！！

$n \le 10$

$2\ 3\ 5\ 7$

$1 = (0,0,0,0)$

$2 = (1,0,0,0)$

$3 = (0,1,0,0)$

$4 = (2,0,0,0)$

$6 = (\le 1, \le 1, \le 0, \le 0)$

$f*1(6) = f(1)+f(2)+f(3)+f(6)$

法二

$f*\mu$的实质是在做**高维差分**！！！ why?

考虑$f*1$的实质是按质因子的**高维前缀和**，而$*\mu$是它的逆运算。

于是有一个借助埃氏筛实现的方法。

for i : $1 \dots n$

for j : $1 \dots n$

$sum[i][j] = sum[i][j-1] + f[i][j]$

$sum[i][j] \mathrel{+}= sum[i-1][j]$

$12 = (\le 2, \le 1, \le 0, \le 0, \le 1)$

$n = 10^7$

$a \mapsto (\ ,\ ,\ ,\ )$

[SDOI2017]数字表格

https://www.luogu.com.cn/problem/P3704

$$\prod_{i=1}^{N}\prod_{j=1}^{M}F_{\gcd(i,j)}$$

$$=\prod_{k=1}^{N}F_k^{\left(\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}[\gcd(i,j)=k]\right)}$$

重点在指数部分：

$$=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}[\gcd(i,j)=k]$$

$$=\sum_{i=1}^{\left\lfloor\frac{N}{k}\right\rfloor}\sum_{j=1}^{\left\lfloor\frac{M}{k}\right\rfloor}[\gcd(i,j)=1]$$

$$=\sum_{d=1}^{\left\lfloor\frac{N}{k}\right\rfloor}\mu(d)\left\lfloor\frac{N}{kd}\right\rfloor\left\lfloor\frac{M}{kd}\right\rfloor$$

$$
\begin{aligned}
&= \prod_{k=1}^{N} F_k^{\left(\sum_{d=1}^{\left\lfloor \frac{N}{k} \right\rfloor} \mu(d) \left\lfloor \frac{N}{kd} \right\rfloor \left\lfloor \frac{M}{kd} \right\rfloor \right)} \\
&= \prod_{T=1}^{N} \left(\prod_{k|T} {F_k}^{\mu\left(\frac{T}{k}\right)} \right)^{\left\lfloor \frac{N}{T} \right\rfloor \left\lfloor \frac{M}{T} \right\rfloor}
\end{aligned}
$$

括号里的函数直接预处理。

注意： 莫比乌斯反演不要一门心思想着化简，随时估计一下现在的复杂度能不能通过此题。

几个值得注意的时间复杂度

n<=10^6：NlogN

n<=10^7,T=1：线性筛

n<=10^7,T<=1000：分解质因数 线性筛 + $\sqrt{n}$

n<=10^10,11,12：其他筛法（杜教筛...）

n<=10^14,15：根号

n<=10^18：也许配合Pollard-rho质因数分解

一些总结

回顾课件

课件里写了很多注意事项与心得体会。

约数个数的上界

$n \le$	10^1	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6	10^7	10^8	10^9
$\max\{\omega(n)\}$	2	3	4	5	6	7	8	8	9
$\max\{d(n)\}$	4	12	32	64	128	240	448	768	1344
$n \le$	10^{10}	10^{11}	10^{12}	10^{13}	10^{14}	10^{15}	10^{16}	10^{17}	10^{18}
$\max\{\omega(n)\}$	10	10	11	12	12	13	13	14	15
$\max\{d(n)\}$	2304	4032	6720	10752	17280	26880	41472	64512	103680

10^5

10^4

Thank you

祝大家取得好成绩!

感谢 `OI-Wiki` 的信息

如果你很强，可以尝试以下几个题目:

[SDOI2017]遗忘的集合，[SDOI2018]旧试题