3422

华南理工大学《线性代数与解析几何》习题解答

（2014~2015学年，适用专业：新生各专业）

第2章　矩阵（习题2）

1. 计算下列矩阵

(3) $\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c & 1 & 1 \\ b & a & 1 & 1 \\ c & b & 1 & 1 \end{pmatrix}$

解：$\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c & 1 & 1 \\ b & a & 1 & 1 \\ c & b & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} a^2+b^2+c^2 & ac+ba+cb & a+b+c & a+b+c \\ ca+ab+bc & c^2+a^2+b^2 & c+a+b & c+a+b \\ a+b+c & c+a+b & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

4. 求与$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$可交换的所有矩阵.

解：设$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$，记$B=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$，且$AB=BA$，则

$\because AB=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3a_{11}-2a_{12} & a_{11}+2a_{12} \\ 3a_{21}-2a_{22} & a_{21}+2a_{22} \end{pmatrix}$，

$BA=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3a_{11}+a_{21} & 3a_{12}+a_{22} \\ -2a_{11}+2a_{21} & -2a_{12}+2a_{22} \end{pmatrix}$

$$\therefore \begin{cases} 3a_{11}-2a_{12} &= 3a_{11}+a_{21} \\ a_{11}+2a_{12} &= 3a_{12}+a_{22} \\ 3a_{21}-2a_{22} &= -2a_{11}+2a_{21} \\ a_{21}+2a_{22} &= -2a_{12}+2a_{22} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2a_{12} &= a_{21} \\ a_{11} &= a_{12}+a_{22} \end{cases}$$

取$a_{12}=a, a_{22}=b$,则$a_{21}=-2a, a_{11}=b+a$,故所求矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} a+b & a \\ -2a & b \end{pmatrix}$$

6. 证明：与任意n阶矩阵都可以交换的矩阵A只能是数量矩阵，即$A = kE$.

证明：设矩阵$A = (a_{ij})_{nn}, B = \mathrm{diag}(b_{11}, b_{22}, \cdots, b_{nn})$,其中$b_{ii} \neq b_{jj} (i \neq j; i, j = 1, 2, \cdots, n)$,则

$$BA = (b_{ii}a_{ij})_{nn}, \quad AB = (a_{ij}b_{jj})_{nn}.$$

所以$AB = BA \Leftrightarrow (b_{ii} - b_{jj})a_{ij} = 0$.由于$i \neq j$时$b_{ii} \neq b_{jj}$，从而$a_{ij} = 0$,故$A$是对角矩阵.（见例题**1.3**）

记$A = \mathrm{diag}(a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn})$,对于任意$i \neq j$,有

$$P(i, j(1))A = \begin{pmatrix} a_{11} & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & a_{ii} & & a_{jj} & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & a_{jj} & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$AP(i, j(1)) = \begin{pmatrix} a_{11} & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & a_{ii} & & a_{ii} & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & a_{jj} & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

所以$P(i, j(1))A = AP(i, j(1)) \Leftrightarrow a_{ii} = a_{jj} = k$.即有$A = kE$.

9. 证明：若A是实对称矩阵并且$A^2 = 0$，则$A = 0$.

证明：设$A = (a_{ij})$,则$A^2 = AA^T = (c_{ij}) = C = 0$,其中

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{jk} = 0.$$

特别地，$c_{ii} = \sum\limits_{k=1}^{n} (a_{ik})^2 = 0 \Leftrightarrow a_{ik} = 0 \Leftrightarrow A = 0$,其中$i, k$任意.

12. 设A, B为对称矩阵，试证明：AB也是对称矩阵当且仅当A, B可交换.

证明：根据已知条件$A = A^T, B = B^T$.从而

(1) 若$AB = BA$，则$(AB)^T = (BA)^T = A^T B^T = AB$;

(2) 若$(AB)^T = AB$，则$AB = (AB)^T = B^T A^T = BA$.

即有：AB也是对称矩阵当且仅当A, B可交换.

13. 设$A = (a_{ij})$为n阶方阵, 对任意的n维向量$X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$都有$AX = 0$，证明：$A = 0$.

证明：选取列向量$X_i = (\delta_{i1}, \delta_{i2}, \cdots, \delta_{in})^T$,其中

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}.$$

则$E = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$.由于$AX_i = 0$,所以

$$A = AE = (AX_1, AX_2, \cdots, AX_n) = 0$$

14. 用初等行变换把下列矩阵化成阶梯形矩阵.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$

解：$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4 - 7r_1]{r_2 - 2r_1, r_3 - 5r_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & -7 & -13 & 6 \\ 0 & -14 & -26 & 12 \\ 0 & -14 & -26 & 8 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow[r_3 \leftrightarrow r_4]{r_3 - 2r_2, r_4 - 2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & -7 & -13 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

15. 计算下列矩阵的秩，如果矩阵为满秩，计算出矩阵的逆：

(1) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

解：记$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$,则$|A| = 26 \neq 0 \Rightarrow r(A) = 3.$

$$\because \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - \frac{3}{2}r_2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{13}{2} & 0 & -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2 + \frac{2}{13}r_3} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & \frac{10}{13} & \frac{2}{13} \\ 0 & 0 & \frac{13}{2} & 0 & -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{2}{13}r_3]{\frac{1}{2}r_1,\ \frac{1}{2}r_2,} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{5}{13} & \frac{1}{13} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{13} & \frac{2}{13} \end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{13} & \frac{1}{13} \\ 0 & -\frac{3}{13} & \frac{2}{13} \end{pmatrix}$$

16. 求矩阵

$$\begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

的逆，其中$a_i \neq 0(i = 1, 2, \cdots, n)$.

解：记$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$，则

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}=\begin{cases}(-1)^{1+n}\prod\limits_{k=1}^{n-1}a_k, & i=n,j=1\\ (-1)^{1+n}\prod\limits_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\ k\neq i}}a_k, & 1\leqslant i<j=i+1\leqslant n\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

且$|A|=(-1)^{n+1}\prod\limits_{k=1}^{n}a_k$，所以

$$A^{-1}=\frac{A^*}{|A|}=\begin{pmatrix}0&0&\cdots&0&0&\frac{1}{a_n}\\ \frac{1}{a_1}&0&\cdots&0&0&0\\ 0&\frac{1}{a_2}&\cdots&0&0&0\\ \vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&\vdots\\ 0&0&\cdots&\frac{1}{a_{n-2}}&0&0\\ 0&0&\cdots&0&\frac{1}{a_{n-1}}&0\end{pmatrix}$$

20. 已知$A=\begin{pmatrix}1&2&-1&0&0&0\\3&4&-2&0&0&0\\5&-3&1&0&0&0\\0&0&0&3&2&0\\0&0&0&1&4&0\\0&0&0&0&0&3\end{pmatrix}$,用分块矩阵的方法求$A^2$.

解：记$B=\begin{pmatrix}1&2&-1\\3&4&-2\\5&-3&1\end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix}3&2&0\\1&4&0\\0&0&3\end{pmatrix}$,则

$$B^2=\begin{pmatrix}2&13&-6\\5&28&-13\\1&-5&2\end{pmatrix},C^2=\begin{pmatrix}11&14&0\\7&18&0\\0&0&9\end{pmatrix},A=\begin{pmatrix}B&0\\0&C\end{pmatrix},$$

所以 $A^2=\begin{pmatrix}B^2&0\\0&C^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&13&-6&0&0&0\\5&28&-13&0&0&0\\1&-5&2&0&0&0\\0&0&0&11&14&0\\0&0&0&7&18&0\\0&0&0&0&0&9\end{pmatrix}$

21. 求$(k+l)\times(k+l)$矩阵
$$A=\begin{pmatrix}E_k & B\\ 0 & E_l\end{pmatrix}$$
的逆，其中E_k, E_l分别为k,l阶单位矩阵，B为$k\times l$矩阵.

解：设所求逆矩阵为$A^{-1}=\begin{pmatrix}X & Y\\ Z & T\end{pmatrix}$,其中
$$X=(x_{ij})_{kk}, Y=(y_{ij})_{kl}, Z=(z_{ij})_{lk}, T=(t_{ij})_{ll}$$
则$A^{-1}A=\begin{pmatrix}X & XB+Y\\ Z & ZB+T\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E_k & 0\\ 0 & E_l\end{pmatrix}$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}X=E_k\\ XB+Y=0\\ Z=0\\ ZB+T=E_l\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}X=E_k\\ Y=-B\\ Z=0\\ T=E_l\end{cases}$$
即有 $A^{-1}=\begin{pmatrix}E_k & -B\\ 0 & E_l\end{pmatrix}$

22. A,B,C为同阶方阵，其中A,B可逆.求
$$D=\begin{pmatrix}0 & A\\ B & C\end{pmatrix}$$
的逆.

解：设$D^{-1}=\begin{pmatrix}X & Y\\ Z & T\end{pmatrix}$，其中$X,Y,Z,T$为同阶方阵. 则
$$D^{-1}D=\begin{pmatrix}YB & XA+YC\\ TB & ZA+TC\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E & 0\\ 0 & E\end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}YB=E\\ XA+YC=0\\ TB=0\\ ZA+TC=E\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}Y=B^{-1}\\ X=-B^{-1}CA^{-1}\\ T=0\\ Z=A^{-1}\end{cases}$$
即有 $D^{-1}=\begin{pmatrix}-B^{-1}CA^{-1} & B^{-1}\\ A^{-1} & 0\end{pmatrix}$

23. 如果$\boldsymbol{A^k=0}$,证明$\boldsymbol{(E-A)^{-1}=E+A+A^2+\cdots+A^{k-1}}$.

证明: $\because \boldsymbol{(E-A)(E+A+A^2+\cdots+A^{k-1})}$

$\boldsymbol{=(E+A+A^2+\cdots+A^{k-1})-(A+A^2+\cdots+A^k)}$

$\boldsymbol{=E-A^k=E}$

$\therefore \boldsymbol{(E-A)^{-1}=E+A+A^2+\cdots+A^{k-1}}$