3422

华南理工大学《线性代数与解析几何》习题解答

（2014~2015学年，适用专业：新生各专业）

第4章　线性方程组（习题4）

1. 解下列线性方程组：

(1) $$\begin{cases} x_1+2x_2-5x_3+4x_4+x_5 &= 4,\\ 3x_1+7x_2-x_3-3x_4+2x_5 &= 10,\\ -x_2-13x_3-2x_4+x_5 &= -14,\\ x_3-16x_4+2x_5 &= -11,\\ 2x_4+5x_5 &= 12. \end{cases}$$

解：对增广矩阵$\tilde{A}$作初等行变换，即

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 4 & 1 & 4\\ 3 & 7 & -1 & -3 & 2 & 10\\ 0 & -1 & -13 & -2 & 1 & -14\\ 0 & 0 & 1 & -16 & 2 & -11\\ 0 & 0 & 0 & 2 & 5 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{r_4-r_3\\ r_5-2r_4}]{\substack{r_2+(-3)r_1\\ r_3+1\cdot r_3}}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 4 & 1 & 4\\ 0 & 1 & 14 & -15 & -1 & -2\\ 0 & 0 & 1 & -17 & 0 & -16\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

故$(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=(1,1,1,1,2)$.

(2) $$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4 &= 0,\\ 7x_1+14x_2+20x_3+27x_4 &= 0,\\ 5x_1+10x_2+16x_3+19x_4 &= -2,\\ 3x_1+5x_2+6x_3+13x_4 &= 5. \end{cases}$$

解：对增广矩阵$\tilde{A}$作初等行变换，即

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 0\\ 7 & 14 & 20 & 27 & 0\\ 5 & 10 & 16 & 19 & -2\\ 3 & 5 & 6 & 13 & 5 \end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2\\ 0 & -1 & -3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix}1&2&3&4&0\\0&1&3&-1&-5\\0&0&1&1&0\\0&0&1&-1&-2\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&2&3&4&0\\0&1&3&-1&-5\\0&0&1&1&0\\0&0&0&1&1\end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&0&1\\0&1&0&0&-1\\0&0&1&0&-1\\0&0&0&1&1\end{pmatrix}$$

故$(x_1,x_2,x_3,x_4)=(1,-1,-1,1)$.

3. 设$\alpha_1=(3,-1,1),\alpha_2=(1,1,2),\alpha_3=(1,-3,-3),\alpha_4=(4,0,5)$.

(1) 证明：$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性相关；

(2) 证明：$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$线性无关

证明：**(1)**设A是以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$为行向量的矩阵，则

$r(A)\leqslant 3\Rightarrow\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$极大线性无关组的个数不超过3

$\Rightarrow\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$必定线性相关.

(2)记A是以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$为行向量的矩阵，则

$|A|=8\neq 0\Rightarrow r(A)=3\Rightarrow\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$线性无关.

5. 证明向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$与向量组$\beta_1=\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_s,\beta_2=\alpha_1+\alpha_3+\cdots+\alpha_s,\cdots,\beta_s=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{s-1}$等价.

证明：由β_i的表达式知$\beta_1,\cdots,\beta_s$可由$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$线性表出.

$\because\ \alpha_i=\dfrac{1}{s-1}\sum\limits_{k=1}^{s}\beta_k-\beta_i$

$\Rightarrow\alpha_1,\cdots,\alpha_s$可由$\beta_1,\cdots,\beta_s$线性表出.

$\therefore$ 向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$与向量组$\beta_1,\cdots,\beta_s$等价.

6. 设向量组$\xi_1=(1,-1,2,4),\xi_2=(0,3,1,2),\xi_3=(3,0,7,14),\xi_4=(1,-1,2,0),\xi_5=(2,1,5,6)$.

(1) 证明ξ_1,ξ_2线性无关.

(2) 求向量组中包含ξ_1,ξ_2的极大线性无关组.

证明: (1)设A是以ξ_1,ξ_2为行向量的矩阵,则A的一个二阶子式

$$\begin{vmatrix}1 & -1\\ 0 & 3\end{vmatrix}=3\neq 0\Rightarrow r(A)=2\Rightarrow \xi_1,\xi_2\text{线性无关.}$$

(2)注意到$\xi_3=3\xi_1+\xi_2,\xi_5=\xi_1+\xi_2+\xi_4$.

设A是以ξ_1,ξ_2,ξ_4为行向量的矩阵, 则A的一个三阶子式

$$\begin{vmatrix}1 & -1 & 4\\ 0 & 3 & 2\\ 1 & -1 & 0\end{vmatrix}=-12\Rightarrow r(A)=3\Rightarrow \xi_1,\xi_2,\xi_4\text{线性无关.}$$

$\therefore\ \xi_1,\xi_2,\xi_4$是极大线性无关组.

7. 设$\alpha_1=(2,1,2,2,-4),\alpha_2=(1,1,-1,0,2),\alpha_3=(0,1,2,1,-1)$, $\alpha_4=(-1,-1,-1,-1,1),\alpha_5=(1,2,1,1,1)$. 试确定向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$, α_4,α_5的秩和极大线性无关组.

解: 设A是以$\alpha_2,\alpha_3,-\alpha_4,\alpha_5,\alpha_1$为行向量的矩阵,则

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1\\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 2 & 2 & -4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 2 & 1 & -3\\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 4 & 2 & -8\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 2 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 6 & 3 & -9\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 2 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$\therefore\ r(A)=3\Rightarrow \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$的秩为3.

设B是以$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_1$为行向量的矩阵, 则$A$ 的一个三阶子式

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 2\end{vmatrix}=6\Rightarrow r(B)=3\Rightarrow \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\text{是极大线性无关组.}$$

8. 证明: 若向量组(I)可由向量组(II) 线性表出, 则向量组(I)的秩不超过向量组(II)的秩.

证明：设向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$可由向量组$\beta_1,\cdots,\beta_n$线性表出. 不妨设$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$为$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$极大线性无关组；$\beta_1,\cdots,\beta_r$为$\beta_1,\cdots,\beta_n$的极大线性无关组. 则

$$\begin{cases} (1)\ \alpha_1,\cdots,\alpha_s\text{可由}\alpha_1,\cdots,\alpha_m\text{线性表出} \\ (2)\ \beta_1,\cdots,\beta_n\text{可由}\beta_1,\cdots,\beta_r\text{线性表出} \end{cases}$$

$\therefore$ (传递性)$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$可由$\beta_1,\cdots,\beta_r$线性表出

$\Rightarrow s\leqslant r$　　（见P102，推论4.1）

9. 设A,B都是$m\times n$矩阵，证明：$r(A+B)\leqslant r(A)+r(B)$.

证明：设$A=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n),B=(\beta_1,\cdots,\beta_n)$，其中$\alpha_i$（或$\beta_i$）为$A$（或$B$）的第$i$列向量. 不妨设$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$是$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$的一个极大线性无关组；$\beta_1,\cdots,\beta_r$是$\beta_1,\cdots,\beta_n$的一个极大线性无关组.则

$$\begin{cases} \forall\alpha_i,\quad \exists k_{ij}\ \ \text{使得}\alpha_i=\sum\limits_{j=1}^{s}k_{ij}\alpha_j \\ \forall\beta_i,\quad \exists h_{ij}\ \ \text{使得}\beta_i=\sum\limits_{j=1}^{r}h_{ij}\beta_j \end{cases}$$

$$\Rightarrow \alpha_i+\beta_i=\sum_{j=1}^{s}k_{ij}\alpha_j+\sum_{j=1}^{r}h_{ij}\beta_j$$

$\Rightarrow \alpha_1+\beta_1,\cdots,\alpha_n+\beta_n$可由$\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\cdots,\beta_r$线性表出.

设$\gamma_1,\cdots,\gamma_t$是$\alpha_1+\beta_1,\cdots,\alpha_n+\beta_n$的一个极大线性无关组，则

$\gamma_1,\cdots,\gamma_t$可由$\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\cdots,\beta_r$线性表出.

$\Rightarrow t\leqslant s+r$，　即　$r(A+B)\leqslant r(A)+r(B)$

10. 设A是$m\times n$矩阵，证明：$r(A^T)=r(A)$.

证明：设$r(A)=k$,则

(1)存在A的k阶子式$|C|\neq 0\Rightarrow A^T$的k阶子式$|C^T|\neq 0$;

(2)若$|B|$是A^T的$k+1$阶子式，则$|B^T|$是A的$k+1$阶子式

$\Rightarrow |B|=|B^T|=0$.

所以必有　$r(A^T)=r(A)$.

11. 设A,B均为$n\times n$矩阵，且$AB=0$. 证明：$r(A)+r(B)\leqslant n$.

证明：设$r(A)=r$,设$\eta_1,\cdots,\eta_{n-r}$是$AX=0$的一个基础解系.

设$B=(\beta_1,\cdots,\beta_n)$，则$AB=0\Rightarrow A\beta_i=0$.

不妨设$\beta_1,\cdots,\beta_t$是$\beta_1,\cdots,\beta_n$的一个极大线性无关组，则

$\beta_1,\cdots,\beta_t$可由$\eta_1,\cdots,\eta_{n-r}$线性表出$\Rightarrow t\leqslant n-r$

$\therefore\ r+t\leqslant r+(n-r)=n$，即有$r(A)+r(B)\leqslant n$.

12. 设A为$n\times n$矩阵，且$A^2=A$.证明：$r(A)+r(A-E)\leqslant n$.

证明：$A^2=A\Rightarrow A^2-A=A(A-E)=0$

$\Rightarrow r(A)+r(A-E)\leqslant n$.

13. 设$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$是n维线性空间V的一组基，$\beta_1,\cdots,\beta_s$是V的一组向量，且有$n\times s$矩阵满足

$$(\beta_1,\cdots,\beta_s)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)A.$$

证明：矩阵A的秩等于向量组$\beta_1,\cdots,\beta_s$的秩.

证明：记$C=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n),A=(\gamma_1,\cdots,\gamma_s),B=(\beta_1,\cdots,\beta_s)$，记$\mathrm{rank}(\beta_1,\cdots,\beta_s)$ 表示向量组$\beta_1,\cdots,\beta_s$的秩，则

(1)$\mathrm{rank}(\beta_1,\cdots,\beta_s)=r(B)$ (Page104定理4.3)

(2)$r(C)=n\Rightarrow C$可逆$\Rightarrow r(B)=r(A)$ (Page105推论4.6)

$\therefore\ \mathrm{rank}(\beta_1,\cdots,\beta_s)=r(A)$.

14. 求下列齐次线性方程组的一个基础解系，并写出通解.

(2)$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 &=0\\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5 &=0\\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5 &=0\\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5 &=0\end{cases}$

解：对系数矩阵A作初等行变换

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\3&2&1&1&-3\\0&1&2&2&6\\5&4&3&3&-1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&-1&-2&-2&-6\\0&1&2&2&6\\0&-1&-2&-2&-6\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&2&2&6\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&-1&-1&-5\\0&1&2&2&6\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$\therefore\ \eta_1=(1,-2,1,0,0),\eta_2=(1,-2,0,1,0),\eta_3=(5,-6,0,0,1)$ 为方程组的一个基础解系. $\eta=k_1\eta_1+k_2\eta_2+k_3\eta_3$是通解, 其中$k_1,k_2,k_3$是任意常数.

(3)$\begin{cases}3x_1+4x_2+x_3+2x_4+3x_5&=0\\5x_1+7x_2+x_3+3x_4+4x_5&=0\\4x_1+5x_2+2x_3+x_4+5x_5&=0\\7x_1+10x_2+x_3+6x_4+5x_5&=0\end{cases}$

解: 对系数矩阵A作初等行变换

$$A=\begin{pmatrix}3&4&1&2&3\\5&7&1&3&4\\4&5&2&1&5\\7&10&1&6&5\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}3&4&1&2&3\\5&7&1&3&4\\1&1&1&-1&2\\7&10&1&6&5\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&1&-1&2\\5&7&1&3&4\\3&4&1&2&3\\7&10&1&6&5\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&1&-1&2\\0&2&-4&8&-6\\0&1&-2&5&-3\\0&3&-6&13&-9\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&1&-1&2\\0&1&-2&4&-3\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&3&0&5\\0&1&-2&0&-3\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$\therefore\ \eta_1=(-3,2,1,0,0),\eta_2=(-5,3,0,0,1)$ 为方程组的一个基础解系. $\eta=k_1\eta_1+k_2\eta_2$是通解, 其中k_1,k_2 是任意常数.

15. 设线性方程组为

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 0, \\ 9x_1 - x_2 + 14x_3 + 2x_4 &= 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 4x_4 &= 1, \\ 4x_1 + 5x_2 + 7x_3 - 10x_4 &= 2. \end{cases}$$

(1) 求方程组导出组的一个基础解系;

(2) 用特解和导出组的基础解系表示方程组的所有解.

解: 对增广矩阵$\tilde{A}$作初等行变换, 即

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 & 0 \\ 9 & -1 & 14 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & -4 & 1 \\ 4 & 5 & 7 & -10 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -7 & -1 & 14 & -2 \\ 3 & 2 & 5 & -4 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 0 & -7 & -1 & 14 & -2 \\ 0 & -7 & -1 & 14 & -2 \\ 0 & -7 & -1 & 14 & -2 \\ 1 & 3 & 2 & -6 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -6 & 1 \\ 0 & -7 & -1 & 14 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\therefore$ (1)导出组的基础解系为

$$\eta_1 = (-\frac{11}{7}, -\frac{1}{7}, 1, 0), \quad \eta_2 = (0, 2, 0, 1).$$

(2)取特解$\gamma_0 = (\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, 0, 0)$,则方程组所有解为

$$\gamma = k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \gamma_0, \quad \text{其中} k_1, k_2 \text{为任意常数}.$$

16. 求下列非齐次线性方程组的通解.

(2) $$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 &= -2, \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 &= 23, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 &= 12. \end{cases}$$

解: 对增广矩阵$\tilde{A}$作初等行变换, 即

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 23 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 & 12 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 23 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 14 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&7\\0&1&2&2&6&23\\3&2&1&1&-3&-2\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&7\\0&1&2&2&6&23\\0&-1&-2&-2&-6&-23\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&-1&-1&-5&-16\\0&1&2&2&6&23\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$\therefore$ 通解为

$$\gamma=\gamma_0+k_1\eta_1+k_2\eta_2+k_3\eta_3$$

其中k_1,k_2,k_3是任意常数，$\gamma_0=(-16,23,0,0,0),\eta_1=(1,-2,1,0,0)$，$\eta_2=(1,-2,0,1,0),\eta_3=(5,-6,0,0,1)$.

(4) $$\begin{cases}2x_1+5x_2+x_3+3x_4&=2,\\4x_1+6x_2+3x_3+5x_4&=4,\\4x_1+14x_2+x_3+7x_4&=4,\\2x_1-3x_2+3x_3+6x_4&=7.\end{cases}$$

解：对增广矩阵$\tilde{A}$作初等行变换，即

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix}2&5&1&3&2\\4&6&3&5&4\\4&14&1&7&4\\2&-3&3&6&7\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}2&5&1&3&2\\0&-4&1&-1&0\\0&4&-1&1&0\\0&-8&2&3&5\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}2&5&1&3&2\\0&0&0&0&0\\0&4&-1&1&0\\0&0&0&5&5\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}2&5&1&0&-1\\0&4&-1&0&-1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$\therefore$ 通解为$\gamma=(\frac{1}{8},-\frac{1}{4},0,1)+k(-\frac{9}{8},\frac{1}{4},1,0)$,其中$k$为任意常数.

20. 对于λ不同的值，判断下列方程组是否有解，有解时求出全部的解.

(1) $$\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3&=1\\x_1+\lambda x_2+x_3&=1\\x_1+x_2+\lambda x_3&=1\end{cases}$$

解：对增广矩阵$\tilde{A}$作初等行变换，即

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix}\lambda&1&1&1\\1&\lambda&1&1\\1&1&\lambda&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\lambda+2&\lambda+2&\lambda+2&3\\1&\lambda&1&1\\1&1&\lambda&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\lambda\neq-2\text{时}}\begin{pmatrix}1&1&1&\frac{3}{\lambda+2}\\0&\lambda-1&0&1-\frac{3}{\lambda+2}\\0&0&\lambda-1&1-\frac{3}{\lambda+2}\end{pmatrix}$$

$\therefore$ $\lambda=1$时，有无穷多解，$\gamma=(1,0,0)+k_1(-1,1,0)+k_2(-1,0,1)$,其中$k_1,k_2$为任意常数；当$\lambda=-2$时，无解；当$\lambda\neq1$，且$\lambda\neq-2$时，有唯一解$x_1=\dfrac{1}{\lambda+2},x_2=\dfrac{1}{\lambda+2},x_3=\dfrac{1}{\lambda+2}$.

(2) $\begin{cases}(1+\lambda)x_1+x_2+x_3&=1\\x_1+(1+\lambda)x_2+x_3&=\lambda\\x_1+x_2+(1+\lambda)x_3&=\lambda^2\end{cases}$

解：对增广矩阵$\tilde{A}$作初等行变换，即

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix}1+\lambda&1&1&1\\1&1+\lambda&1&\lambda\\1&1&1+\lambda&\lambda^2\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}3+\lambda&3+\lambda&3+\lambda&1+\lambda+\lambda^2\\1&1+\lambda&1&\lambda\\1&1&1+\lambda&\lambda^2\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&1&\frac{1+\lambda+\lambda^2}{3+\lambda}\\1&1+\lambda&1&\lambda\\1&1&1+\lambda&\lambda^2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&\frac{1+\lambda+\lambda^2}{3+\lambda}\\0&\lambda&0&\frac{2\lambda-1}{3+\lambda}\\0&0&\lambda&\frac{\lambda^3+2\lambda^2-\lambda-1}{3+\lambda}\end{pmatrix}$$

$\therefore$ $\lambda=0$或-3时，无解；当$\lambda\neq0$，且$\lambda\neq-3$时，有唯一解

$x_1=\frac{-\lambda^2+2}{\lambda^2+3\lambda},x_2=\frac{2\lambda-1}{\lambda^2+3\lambda},x_3=\frac{\lambda^3+2\lambda^2-\lambda-1}{\lambda^2+3\lambda}$.

(3) $\begin{cases}(3-2\lambda)x_1+(2-\lambda)x_2+x_3&=\lambda\\(2-\lambda)x_1+(2-\lambda)x_2+x_3&=1\\x_1+x_2+(2-\lambda)x_3&=1\end{cases}$

解：对增广矩阵$\tilde{A}$作初等行变换，即

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix}3-2\lambda & 2-\lambda & 1 & \lambda\\ 2-\lambda & 2-\lambda & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2-\lambda & 1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2-(2-\lambda)r_3]{r_1-r_2}\begin{pmatrix}1-\lambda & 0 & 0 & \lambda-1\\ 0 & 0 & (\lambda-1)(3-\lambda) & \lambda-1\\ 1 & 1 & 2-\lambda & 1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\lambda\neq 1\text{时}}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 3-\lambda & 1\\ 1 & 1 & 2-\lambda & 1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 3-\lambda & 1\\ 0 & 1 & 2-\lambda & 2\end{pmatrix}$$

$\therefore$ $\lambda = 1$时，有无穷多解，$\gamma = (1,0,0) + k_1(-1,1,0) + k_2(-1,0,1)$，其中$k_1,k_2$为任意常数；当$\lambda = 3$时，无解；当$\lambda \neq 1$，且$\lambda \neq 3$时，有唯一解$x_1 = -1, x_2 = \frac{\lambda-4}{\lambda-3}, x_3 = -\frac{1}{\lambda-3}$

23. 设$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$是非齐次线性方程组$AX=b$的解. 证明:

$$k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_t\eta_t$$

也是$AX=b$的一个解的充分必要条件是$k_1+k_2+\cdots+k_t=1$.

证明: $\because$ $A(\sum\limits_{i=1}^{t}k_i\eta_i)=\sum\limits_{i=1}^{t}k_iA\eta_i=\sum\limits_{i=1}^{t}k_ib=(\sum\limits_{i=1}^{t}k_i)b$

$\therefore$ $A(\sum\limits_{i=1}^{t}k_i\eta_i)=b\Leftrightarrow(\sum\limits_{i=1}^{t}k_i)b=b\Leftrightarrow\sum\limits_{i=1}^{t}k_i=1$