一、选择题（共 6 题，每题 3 分，共 18 分）

1、设 $X_1, X_2 \cdots X_n (n \ge 2)$ 为来自总体 $N(\mu, 1)$ 的简单随机样本，记 $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$，则下列结论中不正确的是(　　)。

（A）$\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2$ 服从 χ^2 分布　　　　（B）$2(X_n - X_1)^2$ 服从 χ^2 分布

（C）$\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ 服从 χ^2 分布　　　　（D）$n(\bar{X} - \mu)^2$ 服从 χ^2 分布

2、设随机变量 $X \sim Pios(3)$，$Y \sim B\left(8, \frac{1}{3}\right)$，且 X, Y 相互独立，则 $Var(X - 3Y - 4)$ =(　　)。

A. -13　　B. 15　　C. 19　　D. 23

3、设一个盒子中有 5 件产品，其中有 3 件是正品，2 件次品。从盒子中任取两件，则

取出的两件产品中至少有一件次品的概率为(　　)。

A. $\frac{3}{10}$　　B. $\frac{5}{10}$　　C. $\frac{7}{10}$　　D. $\frac{1}{5}$

4、随机变量 $X \sim N(0, 1)$，对于给定的 $\alpha\left(0 < \alpha < 1\right)$，数 u_α 满足 $P(u > u_\alpha) = \alpha$，

若 $P(|X| < c) = \alpha$，则 c 等于（　　）。

A. $\boldsymbol{u}_{\alpha/2}$　　B. $\boldsymbol{u}_{(1-\alpha)/2}$　　C. $\boldsymbol{u}_{1-\alpha}$　　D. $\boldsymbol{u}_{1-\alpha/2}$

5．设随机变量 X 与 Y 均服从正态分布 $X \sim N(\mu, 4^2)$，$Y \sim N(\mu, 5^2)$，而 $p_1 = P\{X \le \mu - 4\}$，$p_2 = P\{Y \ge \mu + 5\}$，则（　　）

A. 对任何实数 μ，都有 $p_1 = p_2$.　　　　B. 对任何实数 μ，都有 $p_1 < p_2$.

C. 只对 μ 的个别值，才有 $p_1 = p_2$.　　　　D. 对任何实数 μ，都有 $p_1 > p_2$.

6.设 X~Pios(λ)，且 $E[(X-1)(X-2)] = 1$，则 λ =（　　）。

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 0

答案：1. B　2. C　3. C　4. B　5. A　6.A

二、填空题（共 6 题，每题 3 分，共 18 分）。

1、设 X_1, X_2 是来自于总体 X 的样本，$\hat{\mu}_1 = \frac{1}{3}X_1 + \frac{2}{3}X_2$，$\hat{\mu}_2 = \frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{2}X_2$ 为总体均值 μ 的无偏估计，则 $\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2$ 中较有效的是______________。

2、设随机变量X与Y独立且都服从[0, 3]上的均匀分布，则 $P\left[\min(X, Y) \ge 2\right] =$________。

3. 设随机变量 X 的分布函数为 $\boldsymbol{F}(x) = 0.5\Phi(x) + 0.5\Phi\left(\frac{x-4}{2}\right)$，其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数，则 $EX =$ _______。

4. 设随机变量 X 和 Y 的数学期望分别为 -2 和2,方差分别为1和4,而相关系数为 -0.5 ,则根据契比雪夫不等式 $P\{|X+Y| \ge 6\} \le$_________。

5. 设随机变量 $\xi \sim B(n, p),\ E(\xi) = 3,\ Var(\xi) = 1.2$，则$n$=________。

6. 设总体 X 服从正态分布 $N(0,4)$,而 $X_1, X_2, \cdots X_{15}$ 是来自总体 X 的简单随机样本，则

$$Y = \frac{X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_{10}^2}{2\left(X_{11}^2 + X_{12}^2 + \cdots + X_{15}^2\right)}$$

服从的分布是________(包括分布参数)。

答案：1. $\hat{\mu}_2$　　2. $\frac{1}{9}$　　3. 2　　4. 1/12　　5. 5　　6. F(10,5)

三、(10 分) 某保险公司把被保险人分为三类：谨慎的、一般的、冒失的，统计资料表明，上述三种人在一年内发生事故的概率依次为 0.05，0.15 和 0.30。如果谨慎的占总的被保人数的 20%，一般的占 50%，冒失的占 30%。

(1)求某被保人在一年内发生事故的概率；

(2)若此人在一年内发生事故，则他是谨慎的客户的概率是多少。

解. 设事件 B 为“被保险人在一年内出了事故”这一事件；事件 A_1, A_2, A_3 分别为“谨慎的、一般的、冒失的被保险人”，则根据全概率公式可得：

$$P(B) = p(B|A_1)p(A_1) + p(B|A_2)p(A_2) + p(B|A_3)p(A_3) \qquad 3 分$$

$$=0.2\times0.05+0.5\times0.15+0.3\times0.3=0.175 \qquad 5 分$$

$$P(A_1|B)=\frac{p(B|A_1)p(A_1)}{p(B|A_1)p(A_1)+p(B|A_2)p(A_2)+p(B|A_3)p(A_3)}$$ 8 分

$$=\frac{0.05\times 0.2}{0.175}=0.0571$$ 10 分

四、（10 分） 设某次概率统计考试考生的成绩 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，从中随机地抽取 36 位考生的成绩，算得平均成绩为 $\bar{x}=66.5$ 分，修正标准差为 $S^*=15$ 分。

(1) 在置信度为 0.95 时，求考生成绩数学期望 μ 的置信区间。

(2) 在显著性水平 α=0.05 下，检验是否可以认为这次考试的平均成绩为 70 分。

$t_{0.975}(35)=2.0301,\quad t_{0.975}(36)=2.0281,\quad t_{0.95}(35)=1.6896,\quad t_{0.95}(36)=1.6883$

解：（1） $\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\dfrac{S^{*2}}{n}}}\sim t(n-1)$，$\delta(\bar{x})=\dfrac{S^*}{\sqrt{n}}t_{0.975}(35)=\dfrac{15}{6}\times 2.0301=5.07525$ (4 分)

学生成绩数学期望 μ 的置信区间：（61.42,71.58）(5 分)

（2） $H_0:\mu=70,\quad H_1:\mu\neq 70,$

拒绝域： $A=\left\{\left|\dfrac{\bar{X}-70}{\sqrt{\dfrac{S^{*2}}{n}}}\right|>t_{0.975}(35)\right\}$， $\left|\dfrac{66.5-70}{\sqrt{\dfrac{15^2}{36}}}\right|=1.4<t_{0.975}(35)=2.0301$ （9 分）

不拒绝原假设。可以认为这次考试的平均成绩为 70 分。（10 分）

五、（10 分） 某单位有 400 部内线电话，每时刻每部电话打外线的概率为 10%，设各电话使用外线与否是相互独立的，估计在任一时刻有 30～50 部电话同时使用外线的概率。

$\Phi(1.67)=0.9525,\quad \Phi(1.60)=0.9452,\quad \Phi(1.52)=0.9357,\quad \Phi(1.36)=0.9131$

解： 设 X 为任一时刻使用的终端数，则 X~B(400, 0.1)

$$p\{30 \le X \le 50\} = p\left\{\frac{30-np}{\sqrt{np(1-p)}} \le \frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}} \le \frac{50-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right\} \qquad (5分)$$

$$= p\left\{-\frac{10}{6} \le \frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}} \le \frac{10}{6}\right\}$$

$$=\Phi(1.67)-\Phi(-1.67)$$

$$=0.9525\times 2-1=0.905 \qquad (10分)$$

六.$(10分)$ 设$X_1, X_2, \cdots, X_n$是取自双参数指数分布总体的一组样本，密度函数为

$$f(x;\theta,\mu)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}e^{-\frac{x-\mu}{\theta}} & x>\mu \\ 0 & 其它\end{cases}$$

其中θ,μ是未知参数，$x_1, x_2, \cdots, x_n$是一组样本值，求θ,μ的最大似然估计量。

解：

$$L(\mu,\theta)=\frac{1}{\theta^n}\exp\left\{-\frac{1}{\theta}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i-n\mu\right)\right\}, \quad \mu<\min\{x_1,\cdots,x_n\} \qquad (3分)$$

$\dfrac{\partial \ln L}{\partial \mu}=\dfrac{n}{\theta}>0$, 故$\ln L$是$\mu$的递增函数，所以

$\hat{\mu}=\min\{x_1,\cdots,x_n\}$. (6分)

$\dfrac{\partial \ln L}{\partial \theta}=0$, 得 $\hat{\theta}=\bar{x}-\min\{x_1,\cdots,x_n\}$

所以最大似然估计量为

$\hat{\mu}_L=X_{(1)}$, $\hat{\theta}_L=\bar{X}-X_{(1)}$ (10分)

七、(12 分) 设随机变量X和Y的联合分布在以点$(0,1),(1,0),(1,1)$为顶点的三角形区域上服从均匀分布，求随机变量$U=X+Y$的方差.

解： 三角形区域为$G=\{(x,y):0\le x\le 1, 0\le y\le 1, x+y\ge 1\}$;随机变量$X$和$Y$的联合密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}2 & 当(x,y)\in G \\ 0 & 当(x,y)\notin G\end{cases} \qquad （3 分）$$

以$f_1(x)$表示X的概率密度,则当$x\le 0$或$x\ge 1$时，$f_1(x)=0$;当$0<x<1$时,有

$$f_1(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy=\int_{1-x}^{1} 2dy=2x$$

因此 $$EX=\int_0^1 2x^2dx=\frac{2}{3},\quad EX^2=\int_0^1 2x^3dx=\frac{1}{2}$$ （5 分）

$$DX=EX^2-(EX)^2=\frac{1}{2}-\frac{4}{9}=\frac{1}{18}$$ （6 分）

同理可得，$EY=\frac{2}{3},DY=\frac{1}{18}$.　　（8 分）

现在求 X 和 Y 的协方差

$$EXY=\iint_G 2xydxdy=2\int_0^1 xdx\int_{1-x}^{1} ydy=\frac{5}{12}$$ （9 分）

$$\operatorname{cov}(X,Y)=EXY-EX\cdot EY=\frac{5}{12}-\frac{4}{9}=-\frac{1}{36}$$ （10 分）

于是 $$DU=D(X+Y)=DX+DY+2\operatorname{cov}(X,Y)=\frac{1}{18}+\frac{1}{18}-\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$$ （12 分）

八、（12 分）设随机变量 X,Y 相互独立，且 X 的概率分布为

$P\{X=0\}=P\{X=1\}=\frac{1}{2}$，$Y$ 的概率密度为 $f(y)=\begin{cases}2y, & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$

（1）求 $P\{Y\le EY\}$；

（2）求 $Z=X+Y$ 的概率密度。

解（1）由数字特征的计算公式可知：$EY=\int_{-\infty}^{+\infty} yf(y)dy=\int_0^1 2y^2dy=\frac{2}{3}$。

则 $P\{Y\le EY\}=P\left\{Y\le\frac{2}{3}\right\}=\int_{-\infty}^{\frac{2}{3}} f(y)dy=\int_0^{\frac{2}{3}} 2ydy=\frac{4}{9}$。（6 分）

（2）先求 Z 的分布函数，由分布函数的定义可知：$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{X+Y\le z\}$。

由于 X 为离散型随机变量，则由全概率公式可知

$F_Z(z)=P\{X+Y\le z\}$

$=P\{X=0\}P\{X+Y\le z\mid X=0\}+P\{X=1\}P\{X+Y\le z\mid X=1\}$ （9分）

$=\dfrac{1}{2}P\{Y\le z\}+\dfrac{1}{2}P\{Y\le z-1\}$

$=\dfrac{1}{2}F_Y(z)+\dfrac{1}{2}F_Y(z-1)$ （10分）

（其中$F_Y(z)$为Y的分布函数：$F_Y(z)=P\{Y\le z\}$

$$\therefore f_Z(z)=\frac{1}{2}f_Y(z)+\frac{1}{2}f_Y(z-1)=\begin{cases} z-1 & 1<z\le 2 \\ z & 0<z\le 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$ （12 分）