3422

华南理工大学《线性代数与解析几何》习题解答

第3章　向量代数与几何应用（习题3）

1. 判别下列等式何时成立.

(1)　$|\mathbf{a}+\mathbf{b}|=|\mathbf{a}-\mathbf{b}|$;

解: $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|=|\mathbf{a}-\mathbf{b}| \Leftrightarrow |\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2=|\mathbf{a}-\mathbf{b}|^2$

$\Leftrightarrow |\mathbf{a}|^2+|\mathbf{b}|^2+2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=|\mathbf{a}|^2+|\mathbf{b}|^2-2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0$

即: 等式当且仅当$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0$时成立.

(2)　$|\mathbf{a}+\mathbf{b}|=|\mathbf{a}|+|\mathbf{b}|$.

解: $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|=|\mathbf{a}|+|\mathbf{b}| \Leftrightarrow |\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2=(|\mathbf{a}|+|\mathbf{b}|)^2$

$\Leftrightarrow |\mathbf{a}|^2+|\mathbf{b}|^2+2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=|\mathbf{a}|^2+|\mathbf{b}|^2+2|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|$

$\Leftrightarrow \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}| \Leftrightarrow |\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cos<\mathbf{a},\mathbf{b}>=|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|$

$\Leftrightarrow \cos<\mathbf{a},\mathbf{b}>=1 \Leftrightarrow <\mathbf{a},\mathbf{b}>=0$

即: 等号当且仅当$\mathbf{a},\mathbf{b}$同向时成立.

3. 在同一个空间直角坐标系中标出点$A(2,4,-1)$和点$B(-2,4,1)$,并求点A关于xOy面的对称点的坐标及点B关于y轴对称点的坐标.

解: 点A关于xOy面的对称点的坐标为$(2,4,1)$,点B关于y轴对称点的坐标为$(2,4,-1)$.

4. 已知向量$\mathbf{a}=3\mathbf{i}+5\mathbf{j}+4\mathbf{k},\mathbf{b}=-6\mathbf{i}+\mathbf{j}+2\mathbf{k},\mathbf{c}=4\mathbf{i}-3\mathbf{j}-4\mathbf{k}$,求$2\mathbf{a}+3\mathbf{b}+4\mathbf{c}$.

解: $2\mathbf{a}+3\mathbf{b}+4\mathbf{c}=\big(2\cdot3+3\cdot(-6)+4\cdot4\big)\mathbf{i}+\big(2\cdot5+3\cdot1+4\cdot(-3)\big)\mathbf{j}+\big(2\cdot4+3\cdot2+4\cdot(-4)\big)\mathbf{k}=4\mathbf{i}+\mathbf{j}-2\mathbf{k}$

8. 在空间直角坐标系中，$\mathbf{a}=3\mathbf{i}-6\mathbf{k},\mathbf{b}=2\mathbf{i}-4\mathbf{j}$，求$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$及$\mathbf{a}$与$\mathbf{b}$的夹角.

解: $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=3\cdot2+0\cdot(-4)+(-6)\cdot0=6$

$$\cos<\mathrm{a},\mathrm{b}>=\frac{\mathrm{a}\cdot\mathrm{b}}{|\mathrm{a}|\cdot|\mathrm{b}|}=\frac{1}{5}\Rightarrow<\mathrm{a},\mathrm{b}>=\arccos\frac{1}{5}.$$

9. 化简下列向量表达式.

(1) $(\mathrm{a}+\mathrm{b})\times(\mathrm{a}-2\mathrm{b})$;

解: $(\mathrm{a}+\mathrm{b})\times(\mathrm{a}-2\mathrm{b})=\mathrm{a}\times\mathrm{a}+\mathrm{a}\times(-2\mathrm{b})+\mathrm{b}\times\mathrm{a}+\mathrm{b}\times(-2\mathrm{b})$

$=-3(\mathrm{a}\times\mathrm{b})$

(2) $(2\mathrm{a}+\mathrm{b})\times(3\mathrm{a}-2\mathrm{b})$.

解: $(2\mathrm{a}+\mathrm{b})\times(3\mathrm{a}-2\mathrm{b})=(2\mathrm{a})\times(3\mathrm{a})+(2\mathrm{a})\times(-2\mathrm{b})+\mathrm{b}\times(3\mathrm{a})$

$+\mathrm{b}\times(-2\mathrm{b})=-7(\mathrm{a}\times\mathrm{b})$

10. 已知$\overrightarrow{AB}=\mathrm{a}-2\mathrm{b},\overrightarrow{AD}=\mathrm{a}-3\mathrm{b}$,其中$|\mathrm{a}|=5,|\mathrm{b}|=3$,a与b 的夹角为$\frac{\pi}{6}$,求平行四边形$ABCD$的面积.

解: 设平行四边形面积为S, 则

$$S=|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}|=|-(\mathrm{a}\times\mathrm{b})|=|\mathrm{a}|\cdot|\mathrm{b}|\cdot\sin\frac{\pi}{6}=\frac{15}{2}\ .$$

11. 设向量x与$\mathrm{a}=2\mathrm{i}+3\mathrm{j}+\mathrm{k}$和$\mathrm{b}=\mathrm{i}-\mathrm{j}+3\mathrm{k}$都垂直, 而与$\mathrm{c}=2\mathrm{i}+2\mathrm{k}$的内积为$-10$,求x.

解: 设$\mathrm{x}=\lambda(\mathrm{a}\times\mathrm{b})$, 则

$$\mathrm{x}\cdot\mathrm{c}=\lambda(\mathrm{a},\mathrm{b},\mathrm{c})=\lambda\begin{vmatrix}2&3&1\\1&-1&3\\2&0&2\end{vmatrix}=\lambda\cdot10=-10\Rightarrow\lambda=-1$$

$\therefore\mathrm{x}=(-1)(\mathrm{a}\times\mathrm{b})=-10\mathrm{i}+5\mathrm{j}+5\mathrm{k}$.

12. 设$\mathrm{a}=\mathrm{i}-\mathrm{j}+2\mathrm{k}$和$\mathrm{b}=\mathrm{i}+\mathrm{j},\mathrm{c}=\mathrm{i}+2\mathrm{j}+\mathrm{k}$,求$(\mathrm{a},\mathrm{b},\mathrm{c})$.

解: $(\mathrm{a},\mathrm{b},\mathrm{c})=\begin{vmatrix}1&-1&2\\1&1&0\\1&2&1\end{vmatrix}=4$

16. 求过点$M_0(2,9,-6)$且与连接坐标原点O及点M_0的线段OM_0 垂直的平面方程.

解: 平面点法式方程为: $2(x-2)+9(y-9)-6(z+6)=0$.

18. 求过点$(3,0,-1)$且与平面$3x-7y+5z-12=0$平行的平面.

解: 平面的点法式方程为: $3(x-3)-7y+5(z+1)=0$.

20. 求过点$(4,0,-2)$和点$(5,1,7)$且平行于x轴的平面方程.

解: 设平面方程为$By+Cz+D=0$,则

$$\begin{cases} B\cdot 0+C\cdot(-2)+D=0 \\ B\cdot 1+C\cdot 7+D=0 \end{cases} \Rightarrow B:C:D=(-9):1:2$$

所以, 平面方程为 $-9y+z+2=0$.

22. 已知两平面$x-2y+3z+D=0$和$-2x+4y+Cz+6=0$.问: 当C和D为何值时,(1) 两平面平行?(2) 两平面重合?

(1)若两平面平行, 则

$$\frac{1}{-2}=\frac{-2}{4}=\frac{3}{C}\neq\frac{D}{6}\Rightarrow C=-6, D\neq-3$$

(2)若两平面重合, 则

$$\frac{1}{-2}=\frac{-2}{4}=\frac{3}{C}=\frac{D}{6}\Rightarrow C=-6, D=-3$$

25. 求下列直线的对称式方程.

(1) 平行于$\mathrm{a}=3\mathrm{i}+\mathrm{j}+2\mathrm{k}$,经过点$P(1,0,-2)$;

解: 直线方程为 $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-0}{1}=\dfrac{z+2}{2}$.

(2) 经过点$A(1,0,-1)$和点$B(1,1,3)$;

解: 直线方程为 $\dfrac{x-1}{0}=\dfrac{y-0}{1}=\dfrac{z+1}{4}$.

(3) 经过点$A(2,3,-5)$且与直线$\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z+1}{4}$平行;

解: 直线方程为 $\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y-3}{3}=\dfrac{z+5}{4}$.

(4) 经过点$P_0(3,1,2)$且平行于平面$x+y+z+3=0$和$y-z+1=0$.

解: 直线方向向量为 $\mathrm{l}=(\mathrm{i}+\mathrm{j}+\mathrm{k})\times(\mathrm{j}-\mathrm{k})=-2\mathrm{i}+\mathrm{j}+\mathrm{k}$, 从而直线方程为$\dfrac{x-3}{-2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-2}{1}$.

27. 求下列平面的方程.

(1) 过直线$\begin{cases} x=2+3t \\ y=2+t \\ z=1+2t \end{cases}$ 和点$(1,2,-1)$;

解: 设平面方程为$A(x-1)+B(y-2)+C(z+1)=0$,则

$$\begin{cases} A(2-1)+B(2-2)+C(1+1)=0 \\ A\cdot 3+B\cdot 1+C\cdot 2=0 \end{cases} \Rightarrow A:B:C=(-2):4:1$$

故平面方程为 $-2(x-1)+4(y-2)+(z+1)=0$.

(2) 过点$(1,1,1)$且与直线$\begin{cases} 2x+y+z=3 \\ 2x+3y-z=1 \end{cases}$ 垂直;

解: 平面法向量为 $\mathbf{n}=(2,1,1)\times(2,3,-1)=(-4,4,4)$,故平面方程为$-(x-1)+(y-1)+(z-1)=0$.

(3) 过直线$\begin{cases} x+3y-z=0 \\ x-y+z+1=0 \end{cases}$ 且与平面$x+2z=1$垂直.

解: 直线过点$(-\frac{1}{2},0,-\frac{1}{2})$且方向向量为

$$\mathbf{l}=(1,3,-1)\times(1,-1,1)=(2,-2,-4).$$

故所求平面法向量为

$$\mathbf{n}=(1,-1,-2)\times(1,0,2)=(-2,-4,1),$$

故所求平面方程为 $-2(x+\frac{1}{2})-4(y-0)+(z+\frac{1}{2})=0$.

28. 证明下列两条直线l_1和l_2共面, 并求它们所在的平面的方程.

$$l_1:\frac{x-7}{3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-1}{-2},$$

$$l_2:\begin{cases} x=1+2t \\ y=-2-3t \\ z=5+4t. \end{cases}$$

证明:$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & 4 \\ 7-1 & 2-(-2) & 1-5 \end{vmatrix}=0\Rightarrow l_1$和$l_2$共面.

$\because$ $\mathbf{n}=(3,2,-2)\times(2,-3,4)=(2,-16,-13)$,

$\therefore$ 所求平面方程为 $2(x-7)-16(y-2)-13(z-1)=0$.