《概率论与数理统计》

得分

一、选择题（共 6 题，每题 3 分，共 18 分）

1. 若 $P(AB)=0$，则下述命题中正确的是（ B ）。

A．A 与 B 互不相容；　　B. $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$ ；

C. A 与 B 相互独立；　　D. $P(A)=0$ 或 $P(B)=0$.

2. 设 $X\sim N(0,2), Y\sim N(1,2)$，且 X 与 Y 相互独立，则（ D ）。

A. $P(X+Y\le 0)=\frac{1}{2}$;　　B. $P(X-Y\le 1)=\frac{1}{2}$;

C. $P(X-Y\le 0)=\frac{1}{2}$;　　D. $P(X+Y\le 1)=\frac{1}{2}$.

3. 设总体 $X\sim N(0,1)$， X_1, X_2 是总体 X 的一个样本，令 $Y=\frac{X_1}{|X_2|}$，则 Y 服从(C)。

A. 正态分布；　B. χ^2 分布；　C. t 分布；　D. F 分布.

4. 设 X_1, X_2, X_3 独立同分布，分布函数为 $F(x)$，令 $Y=\min\{X_1, X_2, X_3\}$，则 $P(Y\le 1)=$（ B ）。

A. $1-(F(1))^3$;　B. $1-(1-F(1))^3$;　C. $(F(1))^3$;　D. $(1-F(1))^3$.

5. 设随机变量 X 的密度函数为 $f(x)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{x^2}{4}}$，则 $Y=2X$ 的密度函数为（ B ）。

A. $\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{y^2}{16}}$;　B. $\frac{1}{4\sqrt{\pi}}e^{-\frac{y^2}{16}}$;　C. $\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{y^2}{8}}$;　D. $\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{8}}$.

6. 设随机变量 X 服从 t 分布 $t(n)$，对给定的 $\alpha(0<\alpha<1)$，数 $t_\alpha(n)$ 满足 $P(X>t_\alpha(n))=\alpha$，若 $P(|X|\le x)=\alpha$，则 x 等于(A)。

A. $t_{\frac{1-\alpha}{2}}(n)$;　B. $t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)$;　C. $t_{\frac{\alpha}{2}}(n)$;　D. $t_{1-\alpha}(n)$.

得分

二、填空题（共 6 题，每题 3 分，共 18 分）。

1. 设随机变量 X 和 Y 的期望分别为 -1 和 1，方差分别为 1 和 2，且 X 和 Y 相互独立，用切比雪夫不等式估计 $P(|X+Y|\ge 3)\le$_______。$\frac{1}{3}$

2. 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0, & x<1\\ 0.4, & 1\le x<3\\ 1, & x\ge 3\end{cases}$，则 $P(X<2|X\neq 1)=$ __0__。

3. 若二维随机向量(X,Y)~$N(1,2,4,9,0)$，则 $Var[X-2Y+1]=$ __40__。

4. 设 $X_1,X_2,...,X_n$ 是来自总体 $X\sim N(0,\sigma^2)$ 的样本，若 $\hat{\sigma}^2=a\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ 是 σ^2 的无偏估计，

则 a=__$\frac{1}{n}$__。

5. 设 $X_1,\cdots,X_4$ 是来自总体 $X\sim N(0,2)$ 的样本，令 $Y=\frac{1}{2}(X_1-X_2)^2+\frac{1}{2}(X_3+X_4)^2$，则 $E[Y]=$__4__。

6. 已知 X,Y 满足 $E[X]=1,Var[X]=9,E[Y]=0,Var[Y]=16,$ 相关系数 $r(X,Y)=-\frac{1}{2},$ 设随机变量 $Z=\frac{X}{3}+\frac{Y}{2}$，则 X 与 Z 的协方差 Cov(X,Z)=__0__。

三、（10 分） 在房间里有 10 个人，分别佩戴从 1 号到 10 号的纪念章，任选 3 人记录其纪念章的号码。试求：(1) 最大号码为 5 的概率；

(2) 如果已知记录的最大号码为 5，求记录的三个号码中有 3 的概率？

得分

解：(1)*A*={记录的最大号码为 5}，

$$P(A)=\frac{C_4^2}{C_{10}^3}=\frac{1}{20};$$ **（5 分）**

（2）*B*={记录的号码中有 3}，

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{\frac{C_3^1}{C_{10}^3}}{P(A)}=\frac{1}{2}.$$ **（10 分）**

四、(10 分)

设某面粉厂采用自动流水线灌装面粉，装袋重量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$. 从中随机地抽取 36 袋，经计算得平均重量为 $\bar{x}=24.92$kg，修正标准差 $s_n^*=1.974$ kg.

(1) 在置信度为 0.95 时，求出面粉重量平均值 μ 的置信区间。

(2) 在显著性水平 α=0.05 下，检验是否可以认为该流水线面粉的平均重量为每袋 25kg。

$t_{0.975}(35)=2.0301,\quad t_{0.975}(36)=2.0281,\quad t_{0.95}(35)=1.6896,\quad t_{0.95}(36)=1.6883$

解：（1）μ 的置信度为 0.95 的置信区间为：

得分

$$\left[\overline{X}-t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\cdot\frac{s_n^*}{\sqrt{n}},\overline{X}+t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\cdot\frac{s_n^*}{\sqrt{n}}\right]$$

（**2** 分）

$$t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\cdot\frac{s_n^*}{\sqrt{n}}=t_{0.975}(35)\cdot\frac{s_n^*}{\sqrt{36}}=2.0301\times\frac{1.974}{6}\approx 0.668,$$

得置信区间为[24.252,25.588]. （**5** 分）

(2) 1. 提出假设 $H_0:\mu=\mu_0=25;\qquad H_1:\mu\neq\mu_0.$

2. 构造统计量 $T=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S_n^*/\sqrt{36}}=\dfrac{\overline{X}-25}{1.974/6}\sim t(35).$

3. 求分位点 $P\left(|T|\geq t_{0.975}(35)\right)=0.05, t_{0.975}(35)=2.0301.$ （**8** 分）

4. 求观测值 $T=\dfrac{24.92-25}{1.974/6}=\dfrac{-0.08}{0.329}=-0.2432.$

5. 作判断 $|T|=0.2432<t_{0.975}(35)=2.0301$，接受 H_0，即认为平均重量为每袋25kg。

（**10** 分）

五、（**10** 分）

抽样检查产品质量时，如果发现有多于 10 个的次品，则拒绝接受这批产品.设某批产品的次品率为 10%，试用中心极限定理来判断，至少应抽取多少个产品来检查，才能保证拒绝接受该产品的概率达到 0.95？

$\Phi(1.285)=0.9,\quad \Phi(1.645)=0.95,\quad \Phi(1.96)=0.975,\quad \Phi(2.33)=0.99$

得分

解：设应抽 n 个产品来检查，$X_k=\begin{cases}1, & 第k个产品是次品\\ 0, & 第k个产品是正品\end{cases}.$

$P(X_k=1)=0.1,\ \sum\limits_{k=1}^{n}X_k\sim B(n,0.1)$，求 n 使得 $P(\sum\limits_{k=1}^{n}X_k\geq 10)=0.95$。

由中心极限定理知：$\sum\limits_{k=1}^{n}X_k$ 近似服从正态分布 $N(0.1n,0.09n)$， （**2** 分）

$$P(\sum_{k=1}^{n}X_k\geq 10)=1-\Phi\left(\frac{10-0.1n}{\sqrt{0.09n}}\right)=0.95\Rightarrow\Phi\left(\frac{10-0.1n}{\sqrt{0.09n}}\right)=0.05\Rightarrow\Phi\left(\frac{0.1n-10}{0.3\sqrt{n}}\right)=0.95,$$

（**7** 分）

所以，$\dfrac{0.1n-10}{0.3\sqrt{n}}=1.645$，$n-4.935\sqrt{n}-100=0$，解得：$n\approx163.009$，取$n=164$.

至少抽取 164 个产品来检查，才能保证拒绝接受该产品的概率达到 0.95。

（10 分）

六、(**10** 分)

得分

设二维随机向量（X,Y）服从矩形区域$D=\{(x,y)|0\le x\le2,0\le y\le1\}$上的均匀分布，且

$$U=\begin{cases}-1, & X\le Y\\ 1, & X>Y\end{cases};\qquad V=\begin{cases}0, & X\le 2Y\\ 1, & X>2Y\end{cases}.$$

求(1) $P(U=-1)$;　　(2) U，V 的联合分布;　　(3)W=UV 的分布列.

解：（因为（X,Y）是均匀分布，用面积来做更好做）

（**1**）$P(U=-1)=P(X\le Y)=\int_0^1(\int_x^1\frac{1}{2}dy)dx=\frac{1}{4}.$ **（3 分）**

（**2**）$P(U=-1,V=0)=P(X\le Y,X\le 2Y)=P(X\le Y)=\frac{1}{4},$

$P(U=-1,V=1)=P(X\le Y,X>2Y)=0,$

$P(U=1,V=0)=P(X>Y,X\le 2Y)=P(Y<X\le 2Y)=\frac{1}{4},$

$P(U=1,V=1)=P(X>Y,X>2Y)=P(X>2Y)=\frac{1}{2}.$

U \ ***V***	0	1
-1	$\frac{1}{4}$	0
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

（8 分）

(3)

W=UV	0	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

（10 分）

七、(12 分)

得分

设随机变量(X,Y)的概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases} Ae^{-(x+2y)}, & 0<x<1, y>0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}.$$

（1）求 A 的值；（2）判断 X，Y 是否独立；（3）期望 $E[2XY]$.

X	1	2	3
P	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	$(1-\theta)^2$

解：（1） $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy=\int_0^1(\int_0^{+\infty} Ae^{-(x+2y)}dy)dx=\frac{A}{2}\int_0^1 e^{-x}dx=\frac{A}{2}(1-e^{-1})=1,$

所以，$A=\frac{2}{1-e^{-1}}$.　　**（3 分）**

（2） X 的边缘密度 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\int_0^{+\infty}\frac{2}{1-e^{-1}}e^{-(x+2y)}dy=\frac{1}{1-e^{-1}}e^{-x},(0<x<1)$，

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{1-e^{-1}}e^{-x}, & 0<x<1 \\ 0, & \text{其它}\end{cases}.$$

Y 的边缘密度 $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\int_0^1\frac{2}{1-e^{-1}}e^{-(x+2y)}dx=2e^{-2y},(y>0)$，

$$f_Y(y)=\begin{cases}2e^{-2y}, & y>0 \\ 0, & \text{其它}\end{cases}.$$

由于 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$, 所以 X,Y 独立。　　**（8 分）**

（3） $E[2XY]=2E[XY]=2E[X]E[Y]$　（由(2)知 X，Y 相互独立）

$$E[X]=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_X(x)dx=\int_0^1 x\cdot\frac{1}{1-e^{-1}}e^{-x}dx=\frac{1}{1-e^{-1}}\left[\left(-xe^{-x}\right)\Big|_0^1+\int_0^1 e^{-x}dx\right]=1-\frac{e^{-1}}{1-e^{-1}},$$

注意 Y 服从参数为 2 的分布，所以 $E[Y]=\frac{1}{2}$,

由上计算知：$E[2XY]=2E[X]E[Y]=2\times\left(1-\frac{e^{-1}}{1-e^{-1}}\right)\times\frac{1}{2}=1-\frac{e^{-1}}{1-e^{-1}}$.

（若没有注意到 X,Y 的独立性，也可以直接计算）

（12 分）

八、**(12 分)**

得分

设总体 X 具有分布律

其中 $\theta(0<\theta<1)$ 为未知参数.

（1） 求θ的矩估计量$\hat{\theta}_M$，并讨论$\hat{\theta}_M$的无偏性；

（2） 当样本观察值为$x_1=1, x_2=2, x_3=1, x_4=1, x_5=3$时，求$\theta$的极大似然估计值.

解：（1） $E[X]=1\times\theta^2+2\times 2\theta(1-\theta)+3\times(1-\theta)^2=3-2\theta;$

$$\Rightarrow 3-2\theta=\overline{X}\Rightarrow \hat{\theta}_M=\frac{1}{2}(3-\overline{X}).$$

$$E\left[\hat{\theta}_M\right]=E\left[\frac{1}{2}(3-\overline{X})\right]=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}E[\overline{X}]=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}(3-2\theta)=\theta,$$

所以，$\hat{\theta}_M$是θ的无偏估计.　　　　　　　　　　　　　　　　（6 分）

(2) 似然函数：$L(\theta)=P(X_1=x_1, X_2=x_2,\cdots, X_5=x_5)$

$$=P(X_1=1)P(X_2=2)P(X_3=1)P(X_4=1)P(X_5=3)$$

$$=\theta^2\cdot 2\theta(1-\theta)\cdot\theta^2\cdot\theta^2\cdot(1-\theta)^2=2\theta^7(1-\theta)^3.$$

取对数：$\ln(L(\theta))=\ln\left(2\theta^7(1-\theta)^3\right)=\ln 2+7\ln\theta+3\ln(1-\theta).$

求导数：$\dfrac{d\left(\ln(L(\theta))\right)}{d\theta}=\dfrac{7}{\theta}-\dfrac{3}{1-\theta}=0,$

$$7-7\theta=3\theta\Rightarrow\theta=\frac{7}{10}.$$

所以，θ的极大似然估计值为$\theta=\dfrac{7}{10}$.　　　　　　　　　　　　　　（12 分）