莫比乌斯反演与筛法与数

课件是赶的，一下午哪写的完啊！！！至少两下午吧！！！

小规定

基本上这个课件里的分数都表示分数下取整。

就是说 $\frac{x}{y}$ 表示 $\left\lfloor\frac{x}{y}\right\rfloor$，因为没时间弄这个了。

也可能不是，大家自己适配。

【铺垫】简单题

求 $\sum_{i\le n}\sum_{j\le m}[\gcd(i,j)=1]$

$n,m \le 10^5$

【铺垫】简单题

$$\sum_{i\le n}\sum_{j\le m}[\gcd(i,j)=1]=\sum_{i\le n,j\le m}\sum_{k|i,k|j}\mu(k)=\sum_{k\le n}\mu(k)*\frac{n}{k}*\frac{m}{k}$$

【NOI 2010】 能量采集

等价于求 $\sum_{i\le n}\sum_{j\le m}\gcd(i,j)$

$n,m\le 10^5$

【NOI 2010】 能量采集

网上题解大多是利用了 $\mu \times 1 = \varepsilon$

但是其实 $\varphi \times 1 = id$

$\sum_{i \le n, j \le m} \gcd(i, j) = \sum_{i \le n, j \le m} \sum_{k|i,k|j} \varphi(k) = \sum_{k \le n} \varphi(k) * \frac{n}{k} * \frac{m}{k}$

还有个性质是 $\mu \times id = \varphi$ ，可以都记住

【SDOI 2014】 数表

有一张 $n \times m$ 的数表，其第 i 行第 j 列（$1 \le i \le n$，$1 \le j \le m$）的数值为能同时整除 i 和 j 的所有自然数之和。给定 a，计算数表中不大于 a 的数之和。

$n, m \le 10^5, q \le 20000$

【SDOI 2014】 数表

首先我们不考虑a的限制，那么题目要求

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sigma_1(\gcd(i,j))$$

我们直接枚举约数有

$$\sum_{d=1}^{n}\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}\sum_{j=1}^{\lfloor\frac{m}{d}\rfloor}\sigma_1(d)[\gcd(i,j)=1]$$

然后我们把σ_1挪到前面，对最后那个式子反演一下有

$$\sum_{d=1}^{n}\sigma_1(d)\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}\sum_{j=1}^{\lfloor\frac{m}{d}\rfloor}\sum_{x|i,x|j}\mu(x)$$

【SDOI 2014】 数表

把x挪到前面

$$\sum_{d=1}^{n}\sigma_1(d)\sum_{x=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}\mu(x)\lfloor\frac{n}{dx}\rfloor\lfloor\frac{m}{dx}\rfloor$$

我们令$T=dx$，然后更改枚举顺序有

$$\sum_{T=1}^{n}\lfloor\frac{n}{T}\rfloor\lfloor\frac{m}{T}\rfloor\sum_{d|T}\sigma_1(d)\mu(\frac{T}{d})$$

没有a的限制这题就做完了……但是现实非常骨感

【SDOI 2014】数表

我们设$g(T)=\sum_{d|T}\sigma_1(d)\mu(\frac{T}{d})$，可以发现当$\sigma_1(d)\leqslant a$时，才会对$g(T)$产生贡献

于是我们将询问按a从小到大排序，枚举询问的时候，a变大会使得一些$\sigma_1(d)$对$g(T)$产生贡献，我们就用枚举倍数的方法来找到所有的T，然后我们需要动态修改$g(T)$的值，而且还要支持区间询问，因此我们使用常数较小的树状数组实现

假定所有的$\sigma_1(d)$都能产生贡献，枚举所有倍数的复杂度为$\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{i}\approx n\ln n$，每次更新$g(T)$复杂度为$\log n$，则修改复杂度为$O(n\log^2 n)$，每次询问需要数论分块，查询区间和复杂度为$O(\log n)$，所以总复杂度为$O(q\sqrt{n}\log n+n\log^2 n)$

【SDOI 2017】数字表格

题目背景

Doris 刚刚学习了 fibonacci 数列。用 f_i 表示数列的第 i 项，那么

$$f_0 = 0, f_1 = 1$$

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, n \geq 2$$

题目描述

Doris 用老师的超级计算机生成了一个 $n \times m$ 的表格，

第 i 行第 j 列的格子中的数是 $f_{\gcd(i,j)}$，其中 $\gcd(i, j)$ 表示 i, j 的最大公约数。

Doris 的表格中共有 $n \times m$ 个数，她想知道这些数的乘积是多少。

答案对 $10^9 + 7$ 取模。

【SDOI 2017】数字表格

$$=\prod_{i=1}^{N}\prod_{j=1}^{M}F_{\gcd(i,j)}$$

$$=\prod_{k=1}^{N}F_k^{\left(\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}[\gcd(i,j)=k]\right)}$$

$$=\prod_{k=1}^{N}F_k^{\left(\sum_{d=1}^{\lfloor\frac{N}{k}\rfloor}\mu(d)\lfloor\frac{N}{kd}\rfloor\lfloor\frac{M}{kd}\rfloor\right)}$$

$$=\prod_{T=1}^{N}\left(\prod_{k|T}F_k^{\mu(\frac{T}{k})}\right)^{\lfloor\frac{N}{T}\rfloor\lfloor\frac{M}{T}\rfloor}$$

【SDOI 2015】 约数个数和

求 $\sum_{i\leq n,j\leq m}\sigma_0(ij)$

$T,n,m\leq 50000$

【SDOI 2015】约数个数和

首先 $\sigma_0(ij)=\sum_{a|i}\sum_{b|j}\left[\gcd\left(a,\frac{j}{b}\right)=1\right]$，因为这样保证选的 b 是极大的，也就是说不能从 a 中拿出一部分给 b 。

然后你发现其实它就等于 $\sum_{a|i}\sum_{b|j}[\gcd(a,b)=1]$

因此所求为

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{x|i}\sum_{y|j}[\gcd(x,y)=1]$$

改变求和顺序，先枚举因数 x 和 y

$$\sum_{x=1}^{n}\sum_{y=1}^{m}\left\lfloor\frac{n}{x}\right\rfloor\left\lfloor\frac{m}{y}\right\rfloor[\gcd(x,y)=1]\quad=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{x|i}\sum_{y|j}\sum_{d|gcd(x,y)}\mu(d)$$

【SDOI 2015】约数个数和

$$= \sum_{d=1}^{min(n,m)} \mu(d) \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \sum_{x|i} \sum_{y|j} [d|gcd(x,y)]$$

$$= \sum_{d=1}^{min(n,m)} \mu(d) \sum_{x=1}^{n} \sum_{y=1}^{m} [d|gcd(x,y)] \lfloor \frac{n}{x} \rfloor \lfloor \frac{m}{y} \rfloor$$

$$= \sum_{d=1}^{min(n,m)} \mu(d) \sum_{x=1}^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor} \sum_{y=1}^{\lfloor \frac{m}{d} \rfloor} \lfloor \frac{n}{dx} \rfloor \lfloor \frac{m}{dy} \rfloor \quad = \sum_{d=1}^{min(n,m)} \mu(d) (\sum_{x=1}^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor} \lfloor \frac{n}{dx} \rfloor) (\sum_{y=1}^{\lfloor \frac{m}{d} \rfloor} \lfloor \frac{m}{dy} \rfloor)$$

【51NOD 1584】加权约数和

求 $\sum_{i,j\le n}\max(i,j)\,\sigma_1(ij)$

$T,n\le 10^6$

【51NOD 1584】加权约数和

$$2*(\sum_{i=1}^{N} i \sum_{i=1}^{j} \sigma(i*j)) - \sum_{i=1}^{N} i*\sigma(i^2)$$

记上式大括号里的式子为 $F(N)$，减号后面的式子为 $G(N)$

【51NOD 1584】加权约数和

$$
\begin{aligned}
F(N) &= \sum_{i=1}^{N} i \sum_{j=1}^{i} \sigma(i \cdot j) \\
&= \sum_{i=1}^{N} i \sum_{j=1}^{i} \sum_{x|i} \sum_{y|j} [(x, y) == 1] x * j / y \\
&= \sum_{k=1}^{N} \mu(k) \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{N}{k} \rfloor} ik \sum_{j=1}^{i} \sum_{x|i} \sum_{y|j} xk * jk/(yk) \\
&= \sum_{k=1}^{N} \mu(k) k^2 \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{N}{k} \rfloor} i \sum_{j=1}^{i} \sum_{x|i} x \sum_{j|y} \frac{j}{y} \\
&= \sum_{k=1}^{N} \mu(k) k^2 \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{N}{k} \rfloor} i \cdot \sigma(i) \sum_{j=1}^{i} \sigma(j)
\end{aligned}
$$

【51NOD 1584】加权约数和

$$F(N)=\sum_{k=1}^{N}\sum_{i|k}\mu(\frac{k}{i})\cdot(\frac{k}{i})^2\cdot i\cdot\sigma(i)\sum_{j=1}^{i}\sigma(j)$$

$G(N)$ 是类似的处理方式，将 $\sigma(i^2)$展开为 $\sum_{x|i}\sum_{y|i}[(x,y)==1]x*i/y$，最终可以得到：

$$G(N)=\sum_{k=1}^{N}\sum_{i|k}\mu(\frac{k}{i})\cdot(\frac{k}{i})^2\cdot i\cdot\sigma^2(i)$$

杜教筛小回顾

F 是 f 的前缀和，G,H 同理。

假设 $f\times g=h$，并且 F,H 易求出，G 难求出。

那么 $H(n)=\sum_{ij\le n}f(i)g(j)=\sum_{i\le n}f(i)G\left(\frac{n}{i}\right)=G(n)+\sum_{2\le i\le n}f(i)G\left(\frac{n}{i}\right)$

所以可以求出所有 $G\left(\frac{n}{x}\right)$

杜教筛小应用

比如说我们要求 $G(i)=\varphi(i)*i$ 的前缀和

那么观察 $g\times id=id^2$ ，就令 $f=id$ ，$h=id^2$ 即可。

比如说我们要求 $G(i)=\varphi(i)*i^k$ 的前缀和

那么观察 $g\times id^k=id^{k+1}$ ，就令 $f=id^k$ ，$h=id^{k+1}$ 即可。

比如说我们要求 $G(i)=\mu(i)*i^k$ 的前缀和

那么观察 $g\times id^k=id^k*\varepsilon=\varepsilon$，就令 $f=id^k$ ，$h=\varepsilon$ 即可。

【LUOGU P3768】 简单的数学题

求 $\sum_{i,j\leq n} ij\gcd(i,j)$

$n \leq 10^9$

【LUOGU P3768】简单的数学题

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} ij \gcd(i,j)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} ij \sum_{k|i,k|j} \varphi(k)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \varphi(k) \sum_{k|i} \sum_{k|j} ij$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \varphi(k) \cdot k^2 \cdot \left(\sum_{i=1}^{n/k} i\right)^2$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \varphi(k) \cdot k^2 \cdot \sum_{i=1}^{n/k} i^3$$

【LUOGU U18201】分析矿洞

求 $\sum_{i,j\leq n}\varphi(\gcd(i,j)^2)$

$n\leq 10^{10}$

【LUOGU U18201】 分析矿洞

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\varphi(gcd(i,j)^2)$$

$$=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\varphi(gcd(i,j))*gcd(i,j)$$

$$=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\sum_{d|i,d|j}\varphi(d)*d*\varepsilon(gcd(i,j)==d)$$

$$=\sum_{d=1}^{N}\varphi(d)*d*\sum_{i=1}^{\lfloor N/d\rfloor}\sum_{j=1}^{\lfloor N/d\rfloor}\varepsilon(gcd(i,j))$$

$$=\sum_{d=1}^{N}\varphi(d)*d*(2*\sum_{i=1}^{\lfloor N/d\rfloor}\varphi(i)-1)$$

【CQOI 2015】选数

从 $[L,R]$ 的数字中可重复选 N 个，也就是方案数为 $(R-L+1)^N$ 。

求选出来数字的 $\gcd = K$ 的方案数。

$L,R,N,K \leq 10^9$

【CQOI 2015】 选数

$f(k)$ 为 $\gcd = k$ 方案数，$g(k) = \sum_{k|d} f(d)$ 。

那么有 $f(k) = \sum_{k|d} \mu\left(\frac{d}{k}\right) g(d)$

显然 $g(k) = \left(\frac{R}{k} - \frac{L-1}{k}\right)^N$

答案就是 $f(K) = \sum_{K|d} \mu\left(\frac{d}{K}\right) g(d) = \sum_{d \le \frac{R}{K}} \left(\frac{R_0}{d} - \frac{L_0}{d}\right)^N \mu(d)$ ，杜教筛

其中 $R_0 = \frac{R}{K}, L_0 = \frac{L-1}{K}$

【SPOJ 20173】 DIVCNT2

求 $\sum_{i\leq n}\sigma_0(i^2)$

$n\leq 10^{12}$

【SPOJ 20173】 DIVCNT2

$\sigma_0(n^2) = \prod(2c_i + 1) = \sum_{d|n} 2^{w(d)} = \sum_{d|n}\sum_{t|d} \mu^2(t) = (\mu^2 \times 1 \times 1)(n) = (\mu^2 \times \sigma_0)(n)$

则 $\sum_{i\le n}\sigma_0(i^2) = \sum_{i\le n}\sum_{d|i}\mu^2(d)\,\sigma_0\left(\frac{i}{d}\right) = \sum_{d\le n}\mu^2(d)\sum_{i\le\frac{n}{d}}\sigma_0(i)$

则需要求 σ_0 和 μ^2 的前缀和在 $\sqrt{n}$ 个位置的值。

σ_0 的前缀和好求，整除分块就行（求 $\sigma_0\left(\frac{n}{x}\right)$ 时用到的 $\sigma_0\left(\frac{n}{xy}\right)$ 都记忆化了）

μ^2 的前缀和则是“无平方因子数字的个数”，等于 $\sum_{i\le\sqrt{n}}\mu(i) * \frac{n}{i^2}$ （μ 正好是容斥系数）

所以记忆化 μ 的前缀和就行了。

【51NOD 1238】最小公倍数 V3

求 $\sum_{i,j\le n} lcm(i,j)$

$n \le 10^{10}$

【51NOD 1238】最小公倍数 V3

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{ij}{gcd(i,j)}=\sum_{d=1}^{n}\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}\sum_{j=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}[gcd(i,j)=1]\frac{i*j*d^2}{d}$$

$$=\sum_{d=1}^{n}\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}\sum_{j=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}i*j*d\sum_{k|gcd(i,j)}\mu(k)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{d=1}^{n}\sum_{k|i}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}\sum_{k|j}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}i*j*d*\mu(k)$$

【51NOD 1238】最小公倍数 V3

$$=\sum_{k=1}^{n}\sum_{d=1}^{n}\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{n}{dk}\rfloor}\sum_{j=1}^{\lfloor\frac{n}{dk}\rfloor} ik*jk*d*\mu(k)$$

$$=\sum_{T=1}^{n}\sum_{d|T}(\frac{T}{d})^2*d*\mu(\frac{T}{d})\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{n}{T}\rfloor}\sum_{j=1}^{\lfloor\frac{n}{T}\rfloor} i*j=\sum_{T=1}^{n}(\frac{(\lfloor\frac{n}{T}\rfloor+1)*\lfloor\frac{n}{T}\rfloor}{2})^2 T\sum_{d|T}\mu(d)*d$$

现在考虑如何求 $f(T)=T\sum_{d|T}\mu(d)*d$ 的前缀和:

$$\sum_{i=1}^{n}f(i)=\sum_{i=1}^{n}i\sum_{d|i}\mu(d)*d=\sum_{d=1}^{n}\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}\mu(d)*d*i*d=\sum_{d=1}^{n}\mu(d)*d^2\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}i=\sum_{d=1}^{n}\frac{(1+\lfloor\frac{n}{d}\rfloor)*\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}{2}\mu(d)*d^2$$

本来还想准备这些题：

【NOI 2016】循环之美

【WC 2014】时空穿梭

【SDOI 2018】旧试题

【SDOI 2018】反回文串

【LOJ 2476】蒜头的奖杯

奈何真没时间咯，推荐大家写一下，都是很进阶的题

MIN_25 筛

对于满足一下条件的积性函数 f ，如果其满足一下两条件，那么可以快速计算 F ：

$f(p)$ 是关于 p 的低阶多项式。

$f(p^k)$ 有快速计算的方法。

比如 $\varphi(p) = p - 1$，$\varphi(p^k) = (p-1)p^{k-1} = \varphi(p^{k-1}) * p$

时间复杂度为 $O\left(\frac{n^{\frac{3}{4}}}{\log n}\right)$，空间复杂度为 $O(\sqrt{n})$

MIN_25 筛

- **首先，我们先来解决对于每一个$x = \lfloor \frac{N}{i} \rfloor$，求解$\sum_{i=1}^{x}[i\ is\ a\ prime] * i^k$的值。**
- 我们先通过线性筛得到$\sqrt{N}$以内所有的质数$prime_i$以及它们的前缀k次方和$sum_i = \sum_{j=1}^{i} prime_j^k$。
- 定义$g(N, i) = \sum_{j=1}^{N}[j\ is\ a\ prime\ or\ Min_j > prime_i] * j^k$，其中$Min_i$表示$i$最小的质因数。
- 直观地来说，$g(N, i)$表示的就是N以内的在埃拉特斯特尼筛算法进行第i轮后尚未被筛去的数的k次方和。
- 一个合数X一定存在一个$\sqrt{X}$以内的质因数，因此$g(N, Cnt)$即为所求，其中Cnt为$\sqrt{N}$以内的质数个数。
- 考虑如何通过$g(*, i-1)$求出$g(*, i)$。
- 若$prime_i^2 > N$，那么埃拉特斯特尼筛算法的第i轮将不会筛去任何数，有$g(N, i) = g(N, i-1)$。
- 若$prime_i^2 \le N$，考虑埃拉特斯特尼筛算法的第i轮筛去的数从$g(N, i-1)$中删除，有
  $g(N, i) = g(N, i-1) - prime_i^k * (g(\lfloor \frac{N}{prime_i} \rfloor, i-1) - sum_{i-1})$。
  这里由于$prime_i^2 \le N$，有$\lfloor \frac{N}{prime_i} \rfloor \ge prime_i$，因此$\lfloor \frac{N}{prime_i} \rfloor$以内最小质因数大于等于$prime_i$的数的$k$次方之和即为
  $g(\lfloor \frac{N}{prime_i} \rfloor, i) - sum_{i-1}$。
- 总结起来即为

$$g(N, i) = \begin{cases} g(N, i-1) & prime_i^2 > N \\ g(N, i-1) - prime_i^k * (g(\lfloor \frac{N}{prime_i} \rfloor, i-1) - sum_{i-1}) & prime_i^2 \le N \end{cases}$$

- 这部分的时间复杂度为$O(\frac{N^{\frac{3}{4}}}{LogN})$。

MIN_25 筛

- **接下来，我们考虑如何用上述信息求解$\sum_{i=1}^{N} f(i)$。**
- 定义$s(N,i) = \sum_{j=1}^{N}[Min_j \geq prime_i] * f(j)$，即所有满足最小质因子大于等于$prime_i$的$f$值之和。
- 由定义，最终答案$\sum_{i=1}^{N} f(i) = s(N,1) + f(1)$。
- 经过上面的计算，我们已经可以快速计算$\sum_{i=1}^{N}[i\ is\ a\ prime] * f(i)$，因此答案中质数的贡献能够被轻松计算：$\sum_{j=1}^{N}[j\ is\ a\ prime] * f(j) - \sum_{j=1}^{i-1} f(prime_j)$。
- 接下来考虑答案中合数的贡献，我们枚举这个合数的最小质因子及其出现次数，由于f为积性函数，我们可以得到合数的贡献为$\sum_{j=i}^{prime_j^2 \leq N} \sum_{k=1}^{prime_j^{k+1} \leq N} (s(\lfloor \frac{N}{prime_j^k} \rfloor, j+1) * f(prime_j^k) + f(prime_j^{k+1}))$
- 总结起来即为

$$s(N,i) = \begin{cases} 0 & prime_i > N \\ \sum_{j=1}^{N}[j\ is\ a\ prime] * f(j) - \sum_{j=1}^{i-1} f(prime_j) & \\ + \sum_{j=i}^{prime_j^2 \leq N} \sum_{k=1}^{prime_j^{k+1} \leq N} (s(\lfloor \frac{N}{prime_j^k} \rfloor, j+1) * f(prime_j^k) + f(prime_j^{k+1})) & prime_i \leq N \end{cases}$$

- 这部分计算即使不进行记忆化，也十分迅速，其复杂度被证明为$O(\frac{N}{Poly(LogN)})$。

MIN_25 筛题目（仅给出）

【LOJ 6053】简单的函数

【UOJ 188】Sanrd

【UOJ 449】喂鸽子

【51nod 1847】奇怪的数学题

【51nod 1965】奇怪的式子

【EOJ XXX】签到题

由于 min_25 筛在 OI 系列赛中从未出现，且我估计即使出现也不会占很多分（比如说杜教筛在【NOI 2016】循环之美中仅占 16 分），这里仅给出题单，有兴趣可以自己研究（有些我也忘了咋做了