线性代数

By i207M
Graduated from SJZEZ2020
Studying @THU

Powered by Marp

数学的三大分支：

代数，几何，分析（微积分）

线性代数研究什么？

线性代数（Linear algebra）是关于向量空间和线性映射的一个数学分支。它包括对线、面和子空间的研究，同时也涉及到所有的向量空间的一般性质。—— Wiki

向量，空间，线性方程，及其运算。

在OI中应用的核心是：向量，**矩阵**。

定义

人教版数学必修四：既有大小又有方向的量称为向量。

Wiki：向量指一个同时具有大小和方向，且满足平行四边形法则的几何对象。（ex：电流）

$u=(2,2)$　　$(a_1,\cdots a_n)$

OI中简化：有限个有序数字。（真实的定义不是这样的）

$\vec{a}(x_1,y_1)$

$\vec{b}(x_2,y_2)$

向量的维数

向量的运算：加减（平行四边形法则），数乘，内积外积

向量的运算律：交换结合分配

向量之间没有乘法

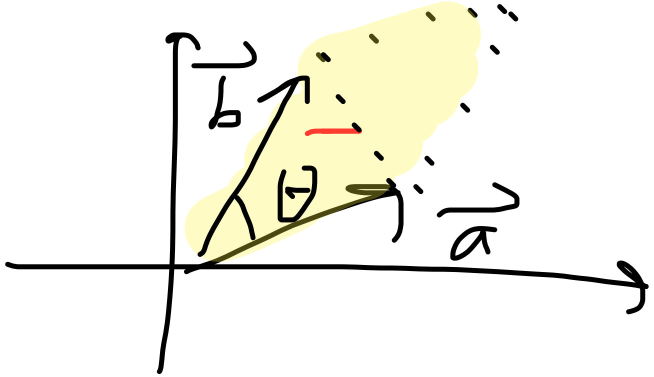
$\vec{a}\times\vec{b}=|x_1y_2-x_2y_1|$

向量共线

两向量的夹角 $\cos\langle a,b\rangle=\dfrac{a\cdot b}{|a||b|}$

$S=|a||b|\sin\theta$

$=\sqrt{\ }\sqrt{\ }\sqrt{1-\cos^2\theta}$



线性组合

二维空间中，几个点能表示一条直线？如果更多或更少会是什么情况？这些点一定行吗？

三维空间中，几个点表示一条直线？几个点表示一个平面？

怎么解一个三元一次方程组？三元一次方程组何时有唯一解？至少需要几个方程？有这么多方程就够了吗？

有没有发现一些惊人的一致性？
那就是藏在线性代数下的秘密。

定义线性相关和线性无关

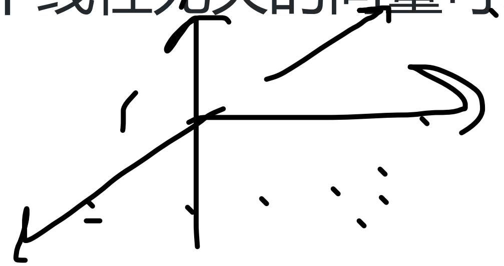
$a_1 \cdots a_n$　　$\sum k_i a_i = \vec{0}$，且k_i全为0

线性无关和方程组的解有什么关系？

$\beta = \sum k_i a_i$

在高中我们学习过平面向量基本定理。还有个空间向量基本定理。

2个线性无关的向量可以确定一个二维空间；3个线性无关的向量可以确定一个三维空间。



线性空间（向量空间）的维数？

若干个向量线性组合所能表示出的全部向量构成了封闭的向量空间。
秩是向量空间的维度，它的代数意义是最大的一个向量子集，使得两两线性无关，这个子集的大小就是秩。 = 极大线性无关组大小

1, 0, 0
0, 1, 0
0 0, 1

向量的维数和线性空间维数的关系？

{三维vector}

线性空间的基

$\sum k_i a_i = 0 \Rightarrow a_j = \frac{1}{k_j}(-\sum\ )$

线性变换

对于一类问题，以斐波那契数列为例：$f[i]=f[i-1]+f[i-2]$

怎么推导出$f[n]$? 怎么求$\sum f[i]$?

我告诉你，如果你发现一个变换是线性变换，那你就连接上了线性代数的无穷力量——你有大量现成的工具来处理这类操作了！

线性变换的一般形式是什么?

有一个向量$(a_1, ..., a_n)$

要从它出发，计算出另一个向量，这个"计算"是这么来的:

我们要算出来的结果是$(b_1, ..., b_n)$

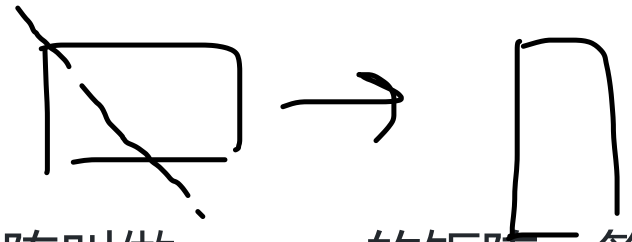
每个新的位置的数，都是原来的$a_1, ..., a_n$的线性组合，也就是

$b[1] = c[1][1]a[1] + c[1][2]a[2] + ... + c[1][n]a[n]$ $b_i = \sum a_j \cdot c_{ij}$

以此类推。

c是一个二维数组，我们相当于在定义一种一维数组和二维数组的运算。我们定义出来的正是$n \times n$矩阵和$n \times 1$矩阵（向量）之间的乘法。

矩阵就是刻画线性变换的工具，矩阵中的数字其实是变换的系数，而将一个向量与矩阵相乘就代表将其按照要求变换一次。



A

n行m列的矩阵叫做$n \times m$的矩阵。第i行第j列的元素称为$a_{ij}, a[i][j]$

矩阵的转置 $n \times m \rightarrow m \times n$ A^T A'

单位矩阵 I

I

对角矩阵

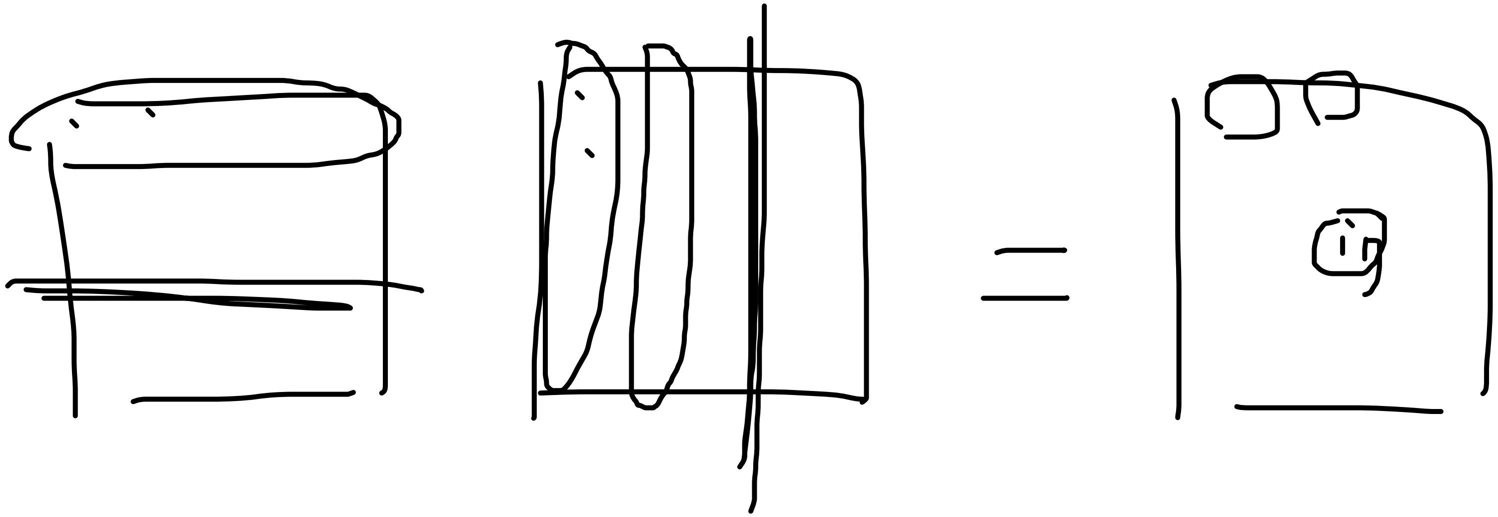
上三角矩阵 下三角矩阵

$a \longrightarrow b = a$

行向量，列向量也是矩阵，只有一行或一列。

矩阵加减

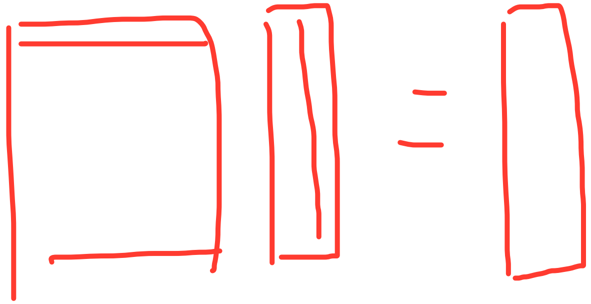
矩阵数乘



矩阵乘法

定义

$$c[i][j] = \sum_{k=1}^{n} a[i][k] \times b[k][j]$$



注意矩阵的形状

$n \times m \quad m \times k$

结合律，分配律，**无交换律**

$A(B+C) = AB + AC$

$ABC = (AB)C = A(BC)$

for i

for j

for k

$c_{ij} += a_{ik} \cdot b_{kj}$

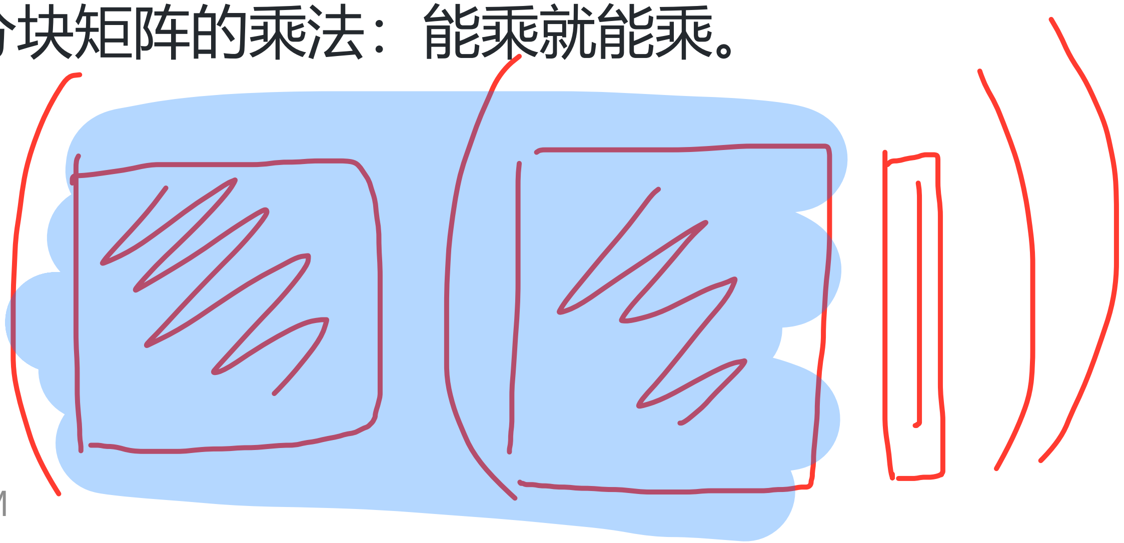
b[k][j]

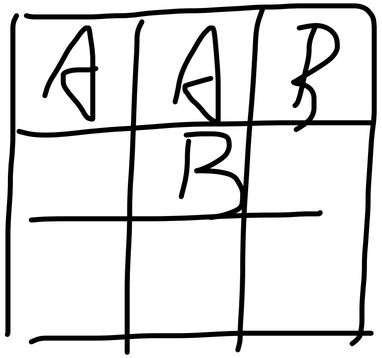
注意：

变量顺序以减小常数。

矩阵乘法的顺序：左乘还是右乘。

分块矩阵的乘法：能乘就能乘。





$$\begin{bmatrix} f_i \\ f_{i-1} \end{bmatrix} = v_1 \longrightarrow \begin{bmatrix} f_{i+1} \\ f_i \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} f_{i+1} &= f_i + f_{i-1} \\ f_i &= 1 f_i + 0 f_{i-1} \end{aligned}$$

矩阵与线性递推

$$A v_1 = v_2 \qquad A^{n-1} v_1 = v_n = \begin{bmatrix} f_n \\ f_{n-1} \end{bmatrix}$$

把斐波那契数的递推写成矩阵的形式。

矩阵的乘法满足结合律，因此我们获得了一个工具：把两个线性运算合成一个线性运算。借助快速幂的思想，我们只需算A^n即可算出f_n

斐波那契数列有很多很多性质等待挖掘。

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} f_3 \\ f_2 \end{array}$$

$$f[i]=af[i-1]+bf[i-2]+c$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f_1 \\ f_0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} f_2 \\ f_1 \end{bmatrix}$$

扩展

- $f[i]=a\times f[i-1]+b\times f[i-2]+c$
- $sumf[i] = sumf[i-1]+f[i]$

套路：我的递推式需要维护什么信息？能不能把信息都存在矩阵里？

$$\begin{bmatrix} a & b & c & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f_i \\ f_{i-1} \\ 1 \\ sum_{i-1} \end{bmatrix} \rightleftarrows \begin{bmatrix} f_{i+1} \\ f_i \\ 1 \\ sum_i \end{bmatrix}$$

扩展

怎么维护平方和、立方和等多项式函数?

$$f[i] = f[i-1] + f[i-2] + p(i)$$

$$f[i] = f[i-1] + f[i-2] + i^3 + i^2 + 1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \boxed{} \\ 1 & 0 & 0\ 0\ 0\ 0 \\ 0 & 0 & 1\ 3\ 3\ 1 \\ & & 0\ 1\ 2\ 1 \\ & & 0\ 0\ 1\ 1 \\ & & 0\ 0\ 0\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_i \\ f_{i-1} \\ i^3 \\ i^2 \\ i \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(i+1)^3 = i^3 + 3i^2 + 3i + 1$$

$$(i+1)^2$$

$$(i) + (1)$$

$$i^3 = \binom{i}{3} + 3\cdot 2\binom{i}{2} + \binom{i}{1}$$

$$\binom{i+1}{3} = \binom{i}{3} + \binom{i}{2}$$

$$\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1}$$

$$f[i] += f[i - w[j]]$$

例题：P5343 【XR-1】分块

https://www.luogu.com.cn/problem/P5343

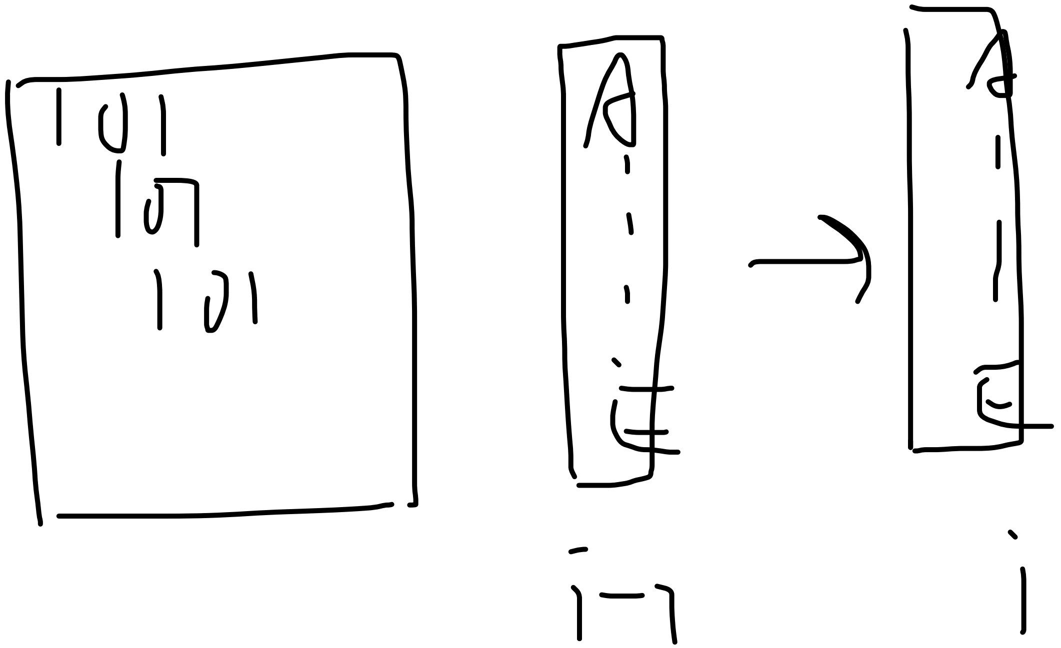
矩乘优化递推.

矩阵与计数

$f(i)(A\sim E) = f(i-1)(\quad) +$

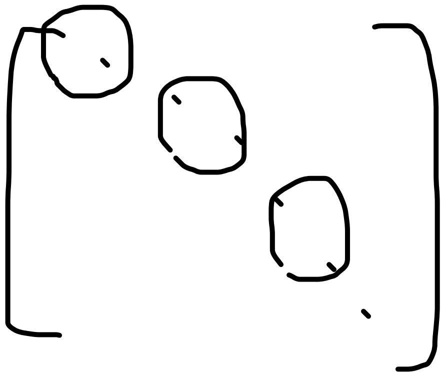
例题：P2233 [HNOI2002]公交车路线

https://www.luogu.com.cn/problem/P2233

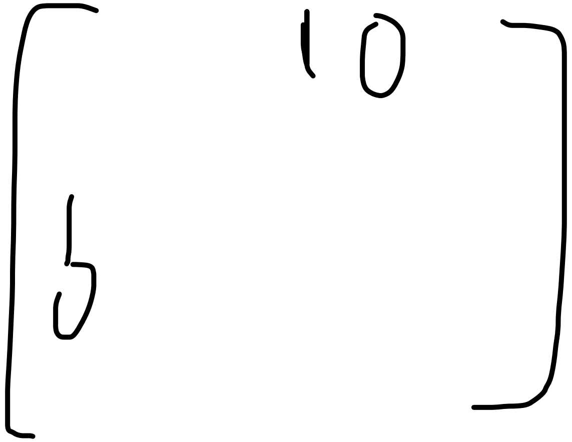


矩阵与图论

度数矩阵：对角矩阵



邻接矩阵



那么?
求图上任意两点经过恰好k条边的最短路?
（P2151 [SDOI2009]HH去散步，P2886 [USACO07NOV]Cow Relays G，P4159 [SCOI2009] 迷路）

$A \cdot A^n$

重新定义矩阵乘法

原来的乘法→加法

原来的加法→ min

$$c[i][j] = \min_{k=1}^{n} a[i][k] + b[k][j]$$

$$C[i][j] = \sum_{k} a[i][k] \cdot b[k][j]$$

经检验，符合结合律

矩阵快速幂！

$$1+q+q^2+\cdots q^n$$

$$\min(A^0\quad A^1\quad A^2\quad \cdots\quad A^n)$$

$$=\min(\text{和}, A^{k+1})$$

回顾：Floyd在做什么？

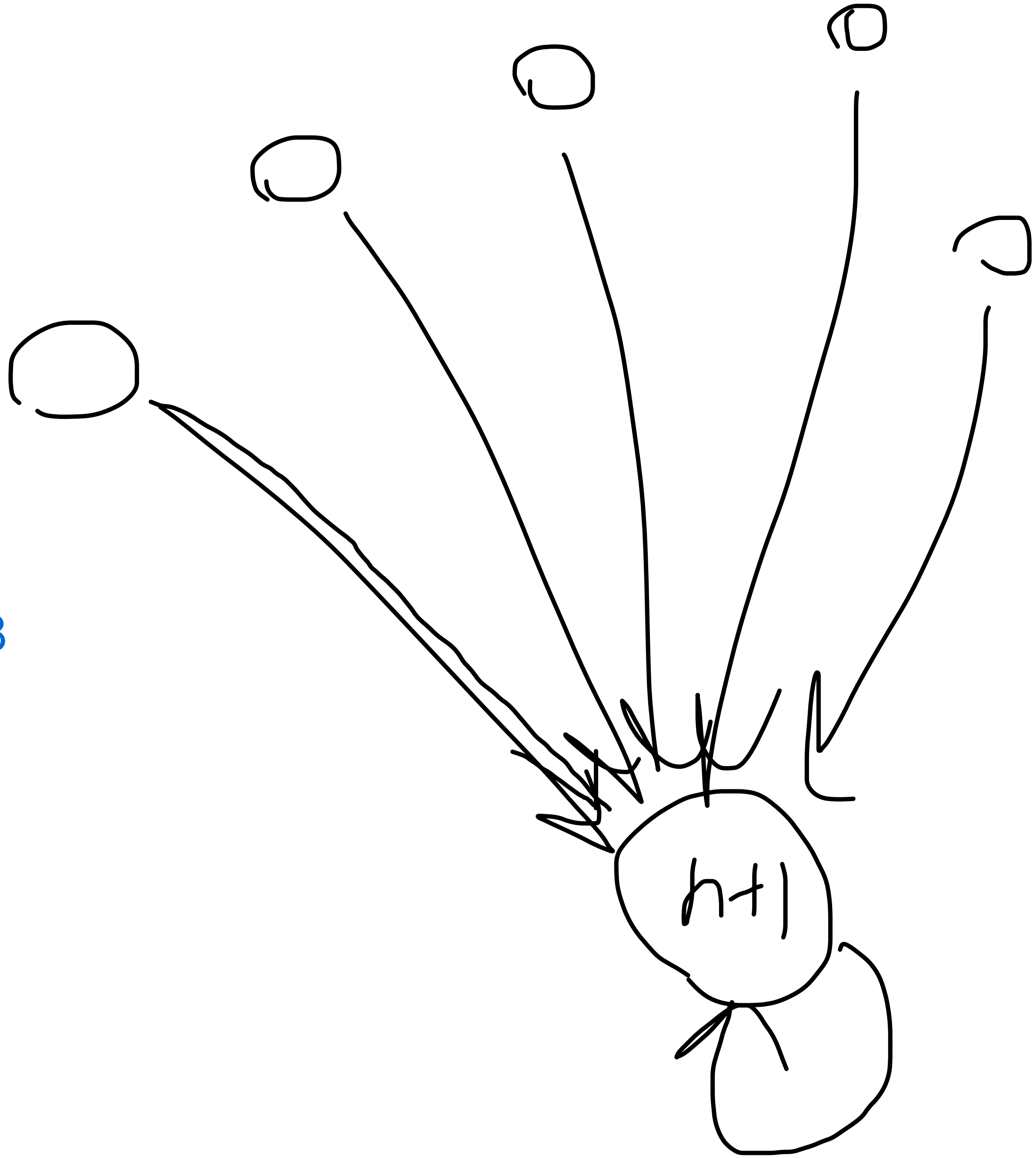
等比数列前缀和!

有没有什么简单的办法求≤ k步的最短路?

$$\begin{pmatrix} 0 & A \\ \inf & A \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \text{前缀“和”} \\ A^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{和}' \\ A^{k+1} \end{pmatrix}$$

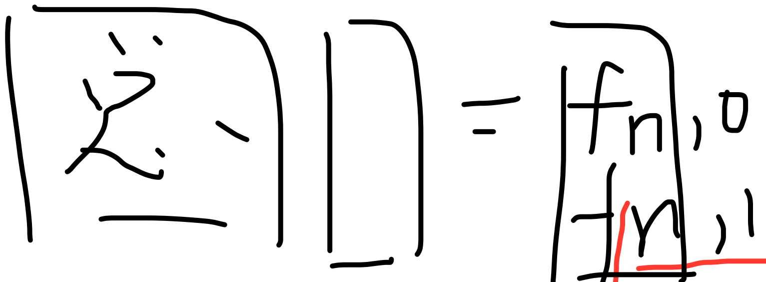
例题：P3758 [TJOI2017]可乐

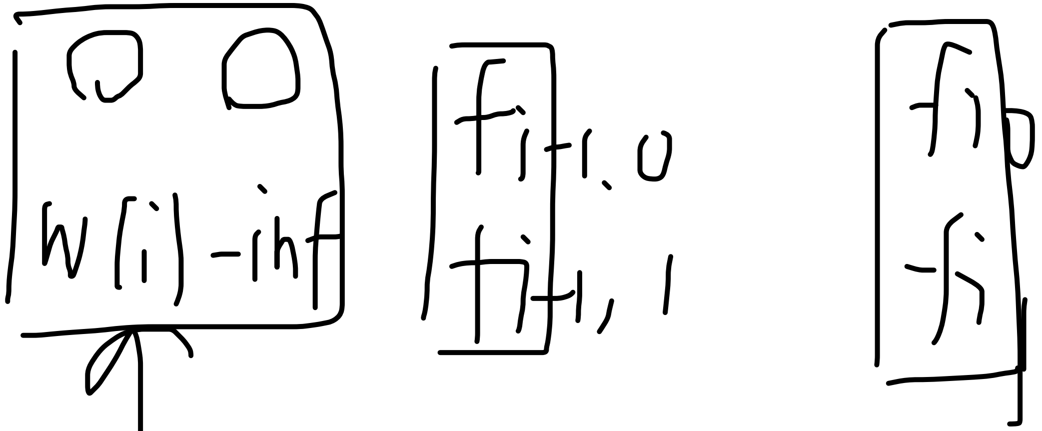
https://www.luogu.com.cn/problem/P3758



邻接矩阵的幂就是方案数。

矩阵与DP



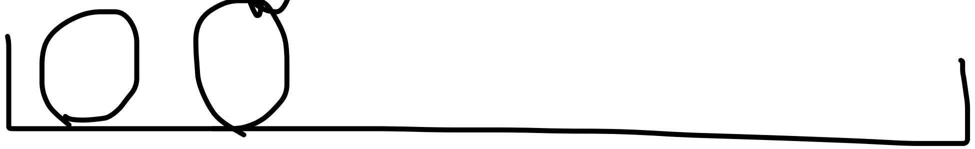


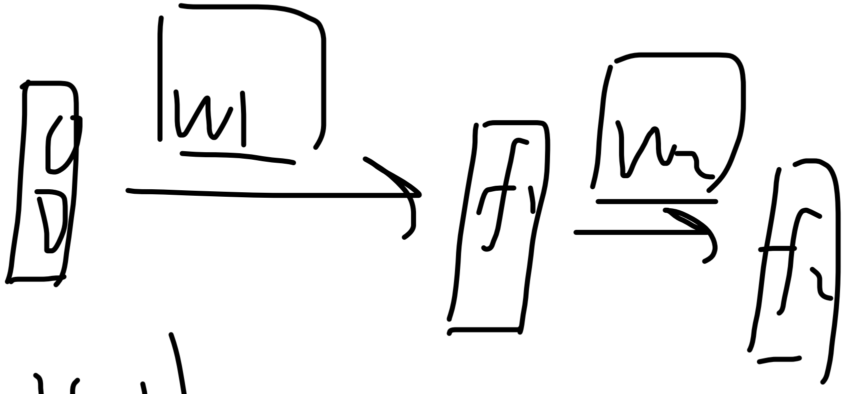
例题：链上的最大权独立集，带修

某模板题的弱化版。

$n, q \le 10^5$

$f_{0,0} = f_{0,1} = 0$





$f(i)(1) = w(i) + f(i-1)(0)$

$f(i)(0) = \max(f(i-1)(0), f(i-1)(1))$

线段树维护变型的矩阵乘法。

高斯消元

解线性方程组。

通过初等行变换，一列一列地将矩阵消成上三角矩阵：

- 交换行变换
- 倍乘行变换
- 倍加行变换

(同时修改常数项)

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 2 & 1 & 9 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & -3 & -2 & -12 \end{array}\right]$$

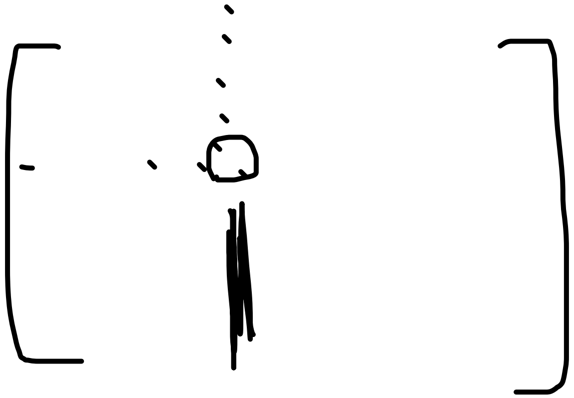
$$\rightarrow \left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & -2 & -12 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{l} x=1 \\ y=2 \end{array}$$

$$z=3$$

演示:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x + 2y + z = 9 \\ 2x - y + 0z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \\ 0 \end{bmatrix}$$



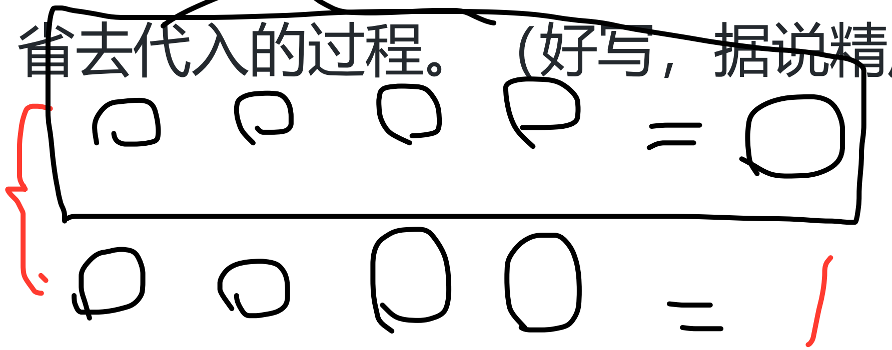
注意事项

绝对值

如果当前行的主元系数为0，需要选择该主元的系数最大的行交换。（有利于提高精度）

高斯-约旦消元法：消成对角线矩阵，省去代入的过程。（好写，据说精度高）

（其实高斯消元一般不卡精度）



什么时候无解？什么时候无穷解？

要先判无解再判无穷解！

矩阵的秩

$C \leftarrow$ 在消第几列

```
for(int i = 1; i <= n; ++i)
{
    if(!sgn(g[i][i]))
    {
        int k = -1;
        for(int j = i + 1; j <= n; ++j)
            if(sgn(g[j][i]))
            {
                k = j;
                break;
            }
        if(k == -1) continue;
        for(int j = i; j <= n + 1; ++j)
            swap(g[i][j], g[k][j]);
    }
    for(int j = n + 1; j >= i; --j) g[i][j] /= g[i][i];
    for(int j = i + 1; j <= n; ++j)
        if(sgn(g[j][i]))
        {
            for(ri k = n + 1; k >= i; --k)
                g[j][k] -= g[j][i] * g[i][k];
        }
}
```

第c+1列，还是第i行

++c --i

c++

左 右

$\boxed{A}\ \boxed{I}$

g(i)(n+j) /= g(i)(i)

g(j)(k+n) -= g(j)(i) · g(i)(k+n)

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y \text{ 任意} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \vec{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \vec{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow x_3$$

$z=0$

可以做一下P2455 [SDOI2006]线性方程组，数据比洛谷模板题要强。

异或 $\pmod 2$方程组

值得一提的是可以 `bitset` 加速。

题

可能会混进去一些奇奇怪怪的题目。

一定要积极思考！

$$\overbrace{A_0 \quad A_1 \cdots A_{11}}^{B} \quad A_0 \cdots A_{11}$$

$$V \longrightarrow \longrightarrow \longrightarrow \longrightarrow ans$$

P2579 [ZJOI2005]沼泽鳄鱼

https://www.luogu.com.cn/problem/P2579

$$B^{\lfloor \frac{k}{12} \rfloor} \cdot A_0 \cdots A_{k \bmod 12}$$

2，3，4的最小公倍数是12.
建出矩阵

P3216 [HNOI2011]数学作业

https://www.luogu.com.cn/problem/P3216

考虑枚举位数，对于不同的位数单独递推。

$$\begin{vmatrix} 10^k & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} f_n \\ n \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_{n+1} \\ n+1 \\ 1 \end{vmatrix}$$

P5678 [GZOI2017]河神

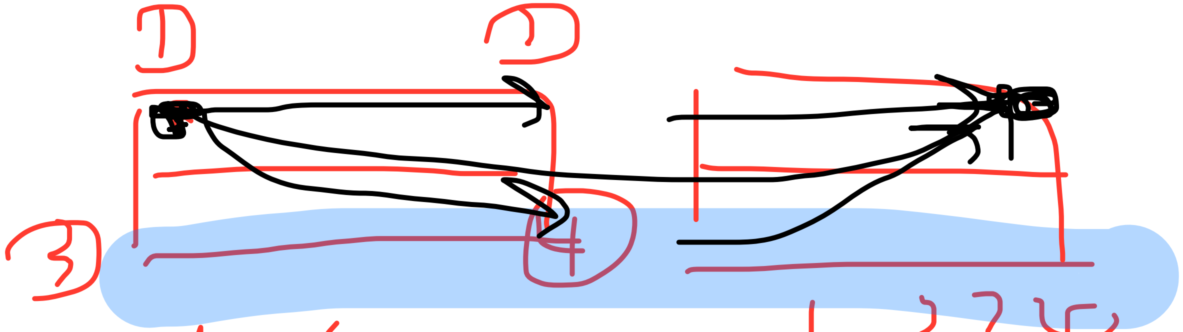
https://www.luogu.com.cn/problem/P5678

打表/证明发现有结合律，于是就是矩乘。

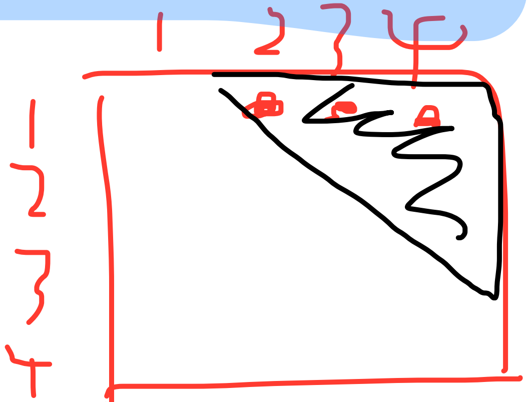
#6208. 树上询问

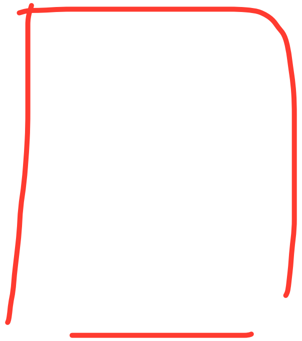
https://loj.ac/p/6208

若直接思考，下放操作和维护信息并不是很好想。但是矩阵可以轻松地表达。



dp(4x4)



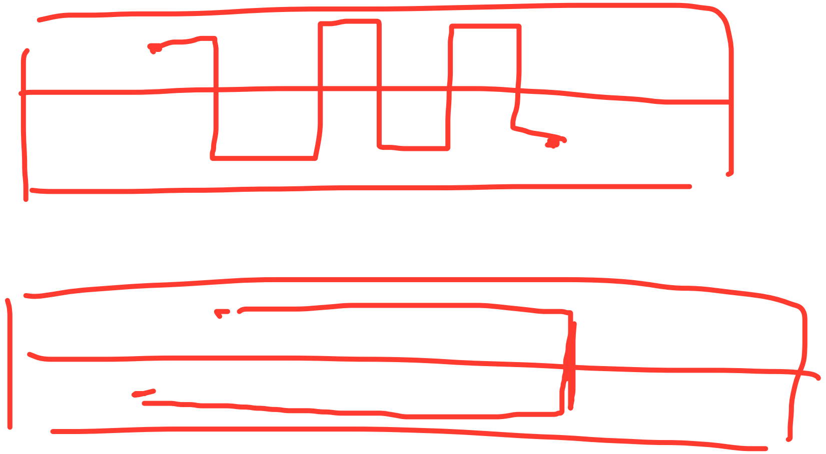


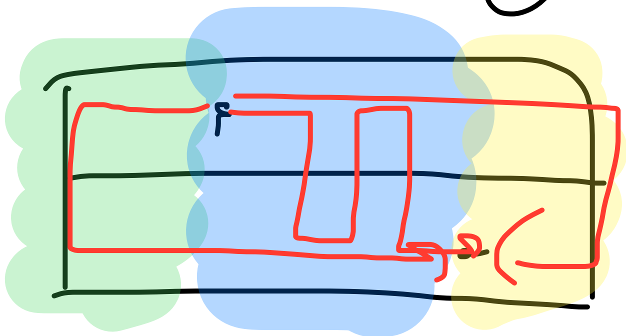
BZOJ某题

$2 \times n$的网格，边有非负边权，带修，多组询问求两点间最短路。

$n, q \le 10^5$

dp(1)(3) = ① 内
② 子段dp





类似于矩阵+线段树的思想。

重点在于从哪里往下走。
线段树维护许多信息（四个角），合并就是矩阵乘法。

「THUSCH 2017」大魔法师

https://loj.ac/problem/2980

区间矩阵乘积。

P2109 [NOI2007] 生成树计数

https://www.luogu.com.cn/problem/P2109

爆搜最小表示法。最多有52种状态。

转移矩阵也2^k暴力枚举，
要满足：无环、联通

推荐3b1b的视频，对理解线性代数有很大帮助。

Thank you

祝大家取得好成绩！

感谢 `OI-Wiki` 的信息

如果你很强，可以尝试以下几个题目：

CF917D