数学2

By i207M
Graduated from SJZEZ 2020
Studying @THU

Powered by Marp

组合数学

加法原理和乘法原理

排列数

从 n 个不同元素中，任取 m （$m \leq n$， m 与 n 均为自然数，下同）个元素按照一定的顺序排成一列，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个排列；从 n 个不同元素中取出 m ($m \leq n$) 个元素的所有排列的个数，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的排列数，用符号 A_n^m （或者是 P_n^m ）表示。

排列的计算公式如下：

$$\mathrm{A}_n^m = n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}$$

n $n-1$ $n-2$ $n-m+1$

① ② ③ - - - - m

组合数

从 n 个不同元素中，任取 m ($m \le n$) 个元素组成一个集合，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个组合；从 n 个不同元素中取出 m ($m \le n$) 个元素的所有组合的个数，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的组合数。用符号 C_n^m 来表示。

下方

选

$$\binom{n}{m} = \mathrm{C}_n^m = \frac{\mathrm{A}_n^m}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

组合数也被称为二项式系数。

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1

$\binom{3}{1}$ $\binom{3}{2}$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

二项式定理

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i$$

证明可以采用数学归纳法，利用 $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$ 做归纳。

$(a+b)(a+b)\cdots(a+b)$ a^n $a^{n-1}b$ $\cdots$ $a^{n-i}b^i$ b^n

k种色

红

n个球

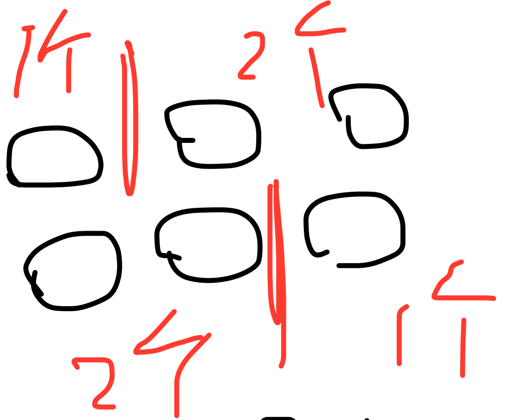
白

⋮

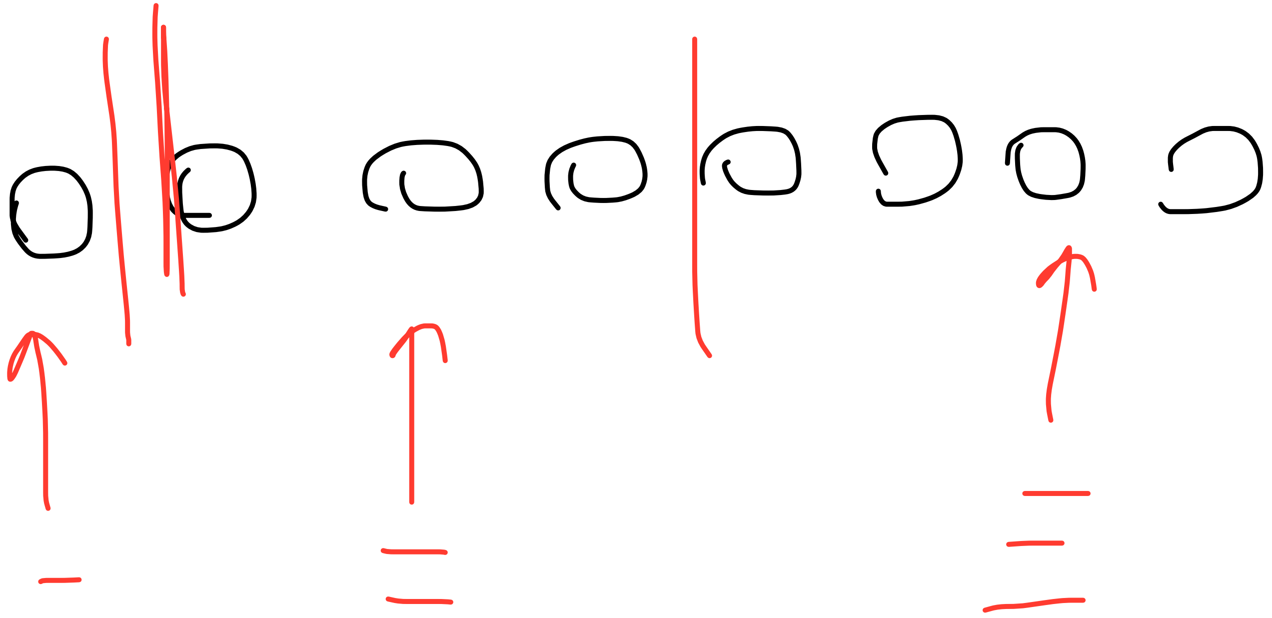
多重集合的排列

$$\frac{n!}{\prod_{i=1}^{k} n_i!} = \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$$

总数



$$\binom{2}{1}\begin{matrix}3-1\\2-1\end{matrix}$$



整数划分问题

也可以求一类方程的非负整数解。

n球放m盒 可空 ⟺ n+m球放m盒,不可空

$$\binom{n-1}{m-1} \qquad \binom{n+m-1}{m-1}$$

$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = r$ 的非负整数解的数目：

插板法

$$\binom{r+k-1}{k-1}$$

盒子与球

一大波益智小问题。

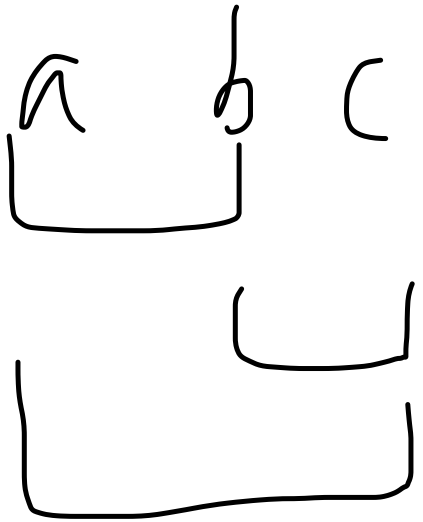
组合数

1. 球相同，盒子不同，不能有空盒 $\binom{n-1}{m-1}$
2. 球相同，盒子不同，可以有空盒 $\binom{n+m-1}{n-1}$
3. 球不同，盒子不同，可以有空盒 m^{n}

n m

3 2

3个



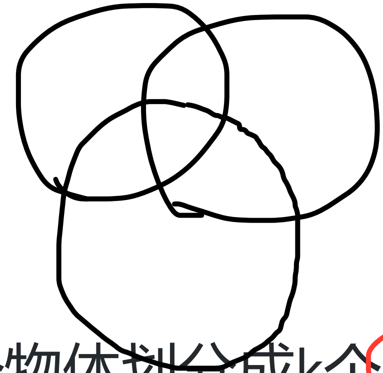
第二类斯特林数

4. 球不同，盒子相同，不能有空盒
5. 球不同，盒子也不同，不能有空盒
6. 球不同，盒子相同，可以有空盒

$\times m!$

$$= \sum_{i=1}^{m} S2(n, i)$$

n m



$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_2 \cap A_3| - |A_3 \cap A_1| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

第二类斯特林数：将n个物体划分成k个非空的没有区别的集合的方案数。递推公式为：

$$S2[i][j] = S2[i-1][j] \times j + S2[i-1][j-1]$$

通项公式：

$$S2(n,m) = \frac{1}{m!} * \boxed{\sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} (m-k)^n}$$

m-1

证明?

n球 m盒 可空 m^n

不同 不同

贝尔数

第二类斯特林数第二维前缀和。

$$B_n = \sum_{i=0}^{n} S(n, i)$$

递推：

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

即枚举包含最后一个元素的集合大小。

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_{n-k}$$

7. 球相同，~~盒子相同，可以有空盒~~

整数划分

将n分解成若干整数的和的方案数?

8. 球相同，盒子相同，不能有空盒?

与哪道题类似?

组合数公式

最好要从组合意义理解。

范德蒙德卷积

$$\binom{n+m}{k}=\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\binom{m}{k-i}$$

组合数的一些公式

$$\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$$

$$\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1}$$

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} = 2^n$$

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i} = [n == 0]$$

$$\sum_{i=0}^{m}\binom{n}{i}\binom{m}{m-i} = \binom{m+n}{m} \quad (n \geq m)$$

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}$$

$$\sum_{i=0}^{n} i\binom{n}{i} = n2^{n-1}$$

$$\sum_{i=0}^{n} i^2\binom{n}{i} = n(n+1)2^{n-2}$$

$$\sum_{l=0}^{n}\binom{l}{k} = \binom{n+1}{k+1}$$

$$\binom{n}{r}\binom{r}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{r-k}$$

F_n表示斐波那契数列第n项

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n-i}{i} = F_{n+1}$$

卢卡斯定理

求组合数，模较小质数。

$$\binom{n}{m} \bmod p \sim 10^6$$

对于质数 p ，有

$$\binom{n}{m} \bmod p = \binom{\lfloor n/p \rfloor}{\lfloor m/p \rfloor} \cdot \binom{n \bmod p}{m \bmod p} \bmod p$$

前者可以递归进行，后者可以预处理p以内的阶乘来计算。
复杂度$O(p + \log n)$

$\binom{104}{41} \bmod 5$

$= \binom{\lfloor \frac{104}{5} \rfloor}{\lfloor \frac{41}{5} \rfloor} \cdot \binom{4}{1}$

$= \binom{20}{8} \cdot 4$

事实上Lucas定理就是n, m在p进制下的每一位对应求组合数再相乘。

$= \binom{\lfloor \frac{20}{5} \rfloor}{\lfloor \frac{8}{5} \rfloor} \cdot \binom{0}{3}$

一些观察：

- 什么时候答案是0，即$\binom{n}{m}$是p的倍数?

$\binom{4}{1} \cdot 0 \cdot 4$

0

(P3773 [CTSC2017]吉夫特)

证明略去，其与费马小定理的证明有一点点相似之处。

$104 = 404\ (5)$

$41 = 131\ (5)$

$$n! = p^{t_1} \cdot \underbrace{w_1}_{}$$ 不含p

$$m! = p^{t_2} \cdot w_2$$

$$(n-m)! = p^{t_3} \cdot w_3$$

扩展Lucas定理

Lucas定理当p不是质数。

$$\frac{n!}{m!(n-m)!} = p^{t_1-t_2-t_3} \cdot \frac{w_1}{w_2 \cdot w_3}$$

有逆元

$$n = p_1^{k_1} p_2^{k_2}$$

$$\binom{x}{y} \bmod p_1^{k_1} = z_1$$

$$\binom{x}{y} \bmod p_2^{k_2} = z_2$$

遇到模数不是质数的情况，**套路**往往是用中国剩余定理将问题转化为模质数次幂，最后合并。

求 $C \bmod n$

怎样处理mod p^k的情况?

我们把问题分为与p互质和不互质两部分。

我们不断提取$n!$中的p

要算 $\begin{cases} C\text{含有}P\text{的项} \\ C\text{不含}P\text{的项} \end{cases}$

怎样算$n! \mod p^k$?

$n!$中含P的多少次?

$m!$和$(n-m)!$含P的多少次 $\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor \cdots \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$

因此我们需要略微费点功夫，我们将 $N!$ 表示为 $a \times P^b$ 的形式

然后计算除法的时候各个阶乘的a部分乘法逆元都存在，然后在b部分运行指数上的加减法就好了

最后判以下指数是否大于k如果大于k直接输出0即可，否则就合并两个部分的值就行了

最后的问题，如何求出 $N! mod P^k$ 的不含有因子p的部分呢？

我们举一个非常老套的例子，计算 $19! mod 3^2$

把阶乘一字拆开得到

3×1　3×2　3×3　3×4　3×5　3×6

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10 \times 11 \times 12 \times 13 \times 14 \times 15 \times 16 \times 17 \times 18 \times 19$$

然后提走所有含有因子3的部分一个3式子变成了

① ②

$$6! \times 3^6 \times 1 \times 2 \times 4 \times 5 \times 7 \times 8 \times 10 \times 11 \times 13 \times 14 \times 16 \times 17 \times 19$$

1 2 4 5 7 8 1 2 4 5 7 8 1

mod p^k

因子p

然后我们呢将后边的部分膜上一个 3^2 得到了

$$6! \times 3^6 \times (1 \times 2 \times 4 \times 5 \times 7 \times 8)^2 \times 19$$

让我们来观察各个部分的特征，左侧的阶乘可以直接递归的去处理，3^6 可以单独计算，而中间的部分其实是一个伪阶乘的形式，即去掉了3的倍数的阶乘，发现最长不超过 p^k 可以打表预处理，而最后剩下的19其实是一个未完的周期，已经在我们的表当中了，因此如果记得伪阶乘为 B_i 那么我们可以得到这样的递归式来求阶乘的有乘法逆元的部分

$n! = \cancel{3}^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor} (\lfloor \frac{n}{3} \rfloor !)$ 与3互质

$$lucas(n,p^k)=lucas(\lfloor \frac{n}{p} \rfloor,p^k)B_{p^k-1}^{\lfloor \frac{n}{p^k} \rfloor}B_{n\%p^k}$$

其中预处理是$O(p^k)$的，每次询问阶乘是$O(\log^2 n)$的(计入了快速幂的log)

最后使用中国剩余定理解同余方程即可得到答案。

要求？p^k不大。

经典例子：$\mathrm{mod}\,10^9$（[AH2017/HNOI2017]抛硬币）

$2^9 \times 5^9$

```cpp
void prebru()
{
    bs[0] = 2, bs[1] = 5;
    mod[0] = 512, mod[1] = 1953125;
    bru[0][0] = bru[1][0] = 1;
    for (int i = 1; i <= mod[0]; i++)
        if (i & 1) bru[0][i] = (bru[0][i - 1] * i) % mod[0];
        else bru[0][i] = bru[0][i - 1];
    for (int i = 1; i <= mod[1]; i++)
        if (i % 5) bru[1][i] = (bru[1][i - 1] * i) % mod[1];
        else bru[1][i] = bru[1][i - 1];
}
int lucas(int n, int md)
{
    if (n == 0) return 1;
    return lucas(n / bs[md], md) * qpow(bru[md][mod[md] - 1], n / mod[md], mod[md]) % mod[md] * bru[md][n % mod[md]] % mod[md];
}
```

错排问题

递推式与通项。

Thank you

祝大家CSP/NOIP取得好成绩!

感谢 `OI-Wiki` 的信息

如果你比较强（如果课上还有时间），可以尝试以下几道题目:

[国家集训队] 礼物，[HNOI2012] 排队，[CQOI2014] 数三角形

如果你很强，可以尝试以下几个题目:

P3747 [六省联考 2017] 相逢是问候