3422

华南理工大学《线性代数与解析几何》习题解答

第5章　特征值与特征向量（习题5）

1. 求下列矩阵的特征值和特征向量.

(2) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \\ 3 & 6 & -1 \end{pmatrix}$

解：$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-3 & -2 & 1 \\ 2 & \lambda+2 & -2 \\ -3 & -6 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda+4)(\lambda-2)^2 = 0$

所以矩阵A特征值为$-4, 2$（2重）.

$\lambda = -4$时，由$(\lambda E - A)X = 0 \Rightarrow$特征向量

$$k_1(1,-2,3)^T,\quad k_1 \neq 0$$

$\lambda = 2$时，由$(\lambda E - A)X = 0 \Rightarrow$特征向量

$$k_2(1,0,1)^T + k_3(0,1,2),\quad k_2^2 + k_3^2 \neq 0$$

(4) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

解：$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2(\lambda+1)^2 = 0$

$\Rightarrow$矩阵A的特征值为-1（2重），1（2重）.

$\lambda = 1$时，由$(\lambda E - A)X = 0 \Rightarrow$特征向量

$$k_1(1,0,0,1)^T + k_2(0,1,1,0)^T,\quad k_1^2 + k_2^2 \neq 0$$

$\lambda = -1$时，由$(\lambda E - A)X = 0 \Rightarrow$特征向量

$$k_3(1,0,0,-1)^T + k_4(0,1,-1,0),\quad k_3^2 + k_4^2 \neq 0$$

2. 求下列n阶矩阵的特征值和特征向量.

$$(2) A=\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\1&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&\cdots&1\end{pmatrix}$$

解：由$|\lambda E-A|=\lambda^{n-1}(\lambda-n)=0\Rightarrow\lambda=n,0$（$n-1$重）

$\lambda=n$时，由$(\lambda E-A)X=0\Rightarrow$特征向量

$$k_1(1,1,\cdots,1)^T,\quad k_1\neq 0$$

$\lambda=0$时，由$(\lambda E-A)X=0\Rightarrow$特征向量

$$k_2(1,-1,0,\cdots,0)^T+k_3(1,0,-1,0,\cdots,0)+\cdots$$
$$\cdots+k_n(1,0,\cdots,0,-1)$$

其中$k_2,k3,\cdots,k_n$不全为**0**.

3. 设λ是n阶可逆矩阵A的一个特征值，α是A对应于特征值λ的一个特征向量. 证明$\dfrac{|A|}{\lambda}$是A^*的一个特征值，α也是A^*对应于此特征值的一个特征向量.

证明：$\because\ A\alpha=\lambda\alpha\Rightarrow\alpha=\lambda A^{-1}\alpha\Rightarrow A^{-1}\alpha=\dfrac{1}{\lambda}\alpha$

$\therefore\ A^*\alpha=|A|A^{-1}\alpha=\dfrac{|A|}{\lambda}\alpha$

即：α是A^*对应于特征值$\dfrac{|A|}{\lambda}$的一个特征向量.

9. 下列矩阵A能否对角化？在能对角化的情况下，试求出能使$T^{-1}AT$成为对角矩阵的可逆矩阵T.

$$(2)\quad A=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$

解：由$|\lambda E-A|=(\lambda+1)(\lambda-1)^2=0\Rightarrow\lambda=-1,1$（**2**重）

$\lambda=1$时，$(\lambda E-A)x=0$对应基础解系为$(0,1,0)^T,(1,0,1)^T$;

$\lambda=-1$时，$(\lambda E-A)x=0$对应基础解系为$(1,0,-1)^T$.

所以，$T=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&1&-1\end{pmatrix}$，$T^{-1}AT=\mathrm{diag}(1,1,-1)$.

(4) $A=\begin{pmatrix}3&-2&-4\\7&-5&-10\\-3&2&3\end{pmatrix}$

解：由$|\lambda E-A|=(\lambda-1)(\lambda^2+1)0\Rightarrow\lambda=1,\pm i$.

$\lambda=1$时，$(\lambda E-A)x=0$对应基础解系为$(2,4,-1)^T$;

$\lambda=i$时，$(\lambda E-A)x=0$对应基础解系为$(1+i,2+3i,-i)^T$;

$\lambda=-i$时，$(\lambda E-A)x=0$对应基础解系为$(1-i,2-3i,i)^T$.

所以，$T=\begin{pmatrix}2&1+i&1-i\\4&2+3i&2-3i\\-1&-i&i\end{pmatrix}$，$T^{-1}AT=\mathrm{diag}(1,i,-i)$.

14. 求出能使下列矩阵A相似于对角矩阵的正交矩阵T.

(1) $A=\begin{pmatrix}6&2&4\\2&3&2\\4&2&6\end{pmatrix}$

解：由$|\lambda E-A|=(\lambda-2)^2(\lambda-11)0\Rightarrow\lambda=11,2$（2重）.

$\lambda=2$时, $(\lambda E-A)x=0$对应基础解系为$(1,0,-1)^T,(1,-2,0)^T$;

$\lambda=11$时，$(\lambda E-A)x=0$对应基础解系为$(2,1,2)^T$.

对$(1,0,-1)^T,(1,-2,0)^T,(2,1,2)^T$标准正交化后得到

$$(\tfrac{\sqrt2}{2},0,-\tfrac{\sqrt2}{2})^T,(\tfrac{\sqrt2}{6},-\tfrac{2\sqrt2}{3},\tfrac{\sqrt2}{6})^T,(\tfrac{2}{3},\tfrac{1}{3},\tfrac{2}{3})^T$$

所以，$T=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt2}{2}&\frac{\sqrt2}{6}&\frac{2}{3}\\0&-\frac{2\sqrt2}{3}&\frac{1}{3}\\-\frac{\sqrt2}{2}&\frac{\sqrt2}{6}&\frac{2}{3}\end{pmatrix}$，$T^{-1}AT=\mathrm{diag}(2,2,11)$.

(3) $A=\begin{pmatrix}4&-1&-1&1\\-1&4&1&-1\\-1&1&4&-1\\1&-1&-1&4\end{pmatrix}$

解：由$|\lambda E-A|=(\lambda-3)^3(\lambda-7)=0\Rightarrow\lambda=7,3$（3重）.

$\lambda=3$时，$(\lambda E-A)x=0$对应基础解系为

$$(1,1,0,0)^T,(1,0,1,0)^T,(-1,0,0,1)^T;$$

$\lambda=7$时，$(\lambda E-A)x=0$对应基础解系为$(-1,1,1,-1)^T$;

对上述两组基础解系作标准正交化后得到

$(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0,0)^T,(\frac{\sqrt{6}}{6},-\frac{\sqrt{6}}{6},\frac{\sqrt{6}}{3},0)^T,(-\frac{\sqrt{3}}{6},\frac{\sqrt{3}}{6},\frac{\sqrt{3}}{6},\frac{\sqrt{3}}{2})^T,(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2})^T$

所以，$T=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{1}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$， $T^{-1}AT=\mathrm{diag}(2,2,3,7)$

15. 试证明: 设A为n阶实对称矩阵, 且$A^2=A$, 则存在正交矩阵T, 使得$T^{-1}AT=\begin{pmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, 其中$r$为秩，$E_r$为$r$阶单位矩阵.

证明：不妨设$A\neq 0$，由于A是实对称矩阵，设A的特征值为

$$\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n,$$

则存在正交矩阵T使得

$$T^{-1}AT=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n).$$

$$\Rightarrow T^{-1}A^2T=T^{-1}AAT=T^{-1}ATT^{-1}AT$$

$$=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)^2=\mathrm{diag}(\lambda_1^2,\lambda_2^2,\cdots,\lambda_n^2)$$

$\because\quad A^2=A\Rightarrow T^{-1}AT=T^{-1}A^2T\Rightarrow\lambda_i^2=\lambda_i,1\leqslant i\leqslant n$

$\Rightarrow\lambda_i=0$或1，$1\leqslant i\leqslant n$.

$\therefore\quad\exists 1\leqslant r\leqslant n$，使得$\lambda_i=\begin{cases}1, & 1\leqslant i\leqslant r\\ 0, & r<i\leqslant n\end{cases}$，即有

$$T^{-1}AT=\begin{pmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

其中$r(A)=r(AT)=r(T^{-1}AT)=r(E_r)=r$为$A$的秩.