

诚信应考，考试作弊将带来严重后果！

华南理工大学本科生期末考试

2017-2018 学年第二学期《概率论与数理统计》A 卷

注意事项：1. 开考前请将密封线内各项信息填写清楚；

2. 所有答案请直接答在试卷上；

3. 考试形式：闭卷；

4. 本试卷共八大题，满分 100 分，考试时间 120 分钟。

题 号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得 分									

可能用到的表值：

$$\Phi(1.285) = 0.9, \quad \Phi(1.645) = 0.95, \quad \Phi(1.96) = 0.975, \quad \Phi(2.33) = 0.99$$

$$t_{0.025}(35) = 2.0301, \quad t_{0.025}(36) = 2.0281, \quad t_{0.05}(35) = 1.6896, \quad t_{0.05}(36) = 1.6883$$

一、 填空题（每小题 3 分，共 18 分）

1. 设袋中有红、白、黑球个 1 个，从中有放回地取球，每次取 1 个，直到三种颜色的球都取到时停止，则取球次数恰好为 4 的概率为_____。

2. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} Ax^2 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$ ，则 $A =$ _____。

3. 设 X_1, X_2, \dots, X_n 独立同分布， $X_1 \sim B(1, p)$ ，则 $P(\bar{X} = k/n) =$ _____。

4. 设连续随机变量 X 的密度函数满足 $f(x) = f(-x)$ ， $P\{X \leq x_\alpha\} = \alpha$ ，则

$$P(|X| > x_\alpha) = \text{_____}。$$

5. 设总体 $X \sim N(0, \sigma^2)$ ， X_1, X_2, \dots, X_6 是来自 X 的简单随机样本，设

$$Y = (X_1 + X_2 + X_3)^2 + (X_4 + X_5 + X_6)^2$$

则当 $C =$ _____ 时， $CY \sim \chi^2(2)$ 。

6. 设二维离散型随机变量 (X, Y) 的分布列为

(X, Y)	$(1, 0)$	$(1, 1)$	$(2, 0)$	$(2, 1)$
P	0.4	0.2	a	b

若 $E(XY) = 0.8$, $a =$ _____。

1. $\frac{2}{9}$ 2. 3 3. $C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ 4. $\begin{cases} 2(1-\alpha) & \alpha > \frac{1}{2} \\ 1 & 0 < \alpha \leq \frac{1}{2} \end{cases}$ 5. $\frac{1}{3\sigma^2}$ 6. 0.1

二、单项选择题（每小题 3 分，共 18 分）

1. 设随机变量 X 的密度 $f(x)$ 满足 $f(1-x) = f(1+x)$, $\int_0^2 f(x) dx = 0.8$, 则 $P\{X < 0\} =$ _____.

(A) 0.5 (B) 0.2 (C) 0.1 (D) 0.4

2. 设 $X_1, X_2, \dots, X_n (n \geq 2)$ 为来自总体 $N(\mu, 1)$ 的简单随即样本, 记 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, 则下列结论中不正确的是

(A) $\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$ 服从 χ^2 分布 (B) $2(X_n - X_1)^2$ 服从 χ^2 分布
(C) $\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ 服从 χ^2 分布 (D) $n(\bar{X} - \mu)^2$ 服从 χ^2 分布

3. 设随机变量 X 服从 $N(\mu, \sigma^2) (\sigma > 0)$, 记 $p = P\{X \leq \mu + \sigma^2\}$. 则 ()

(A) p 随着 μ 增加而增加 (B) p 随着 σ 增加而增加
(C) p 随着 μ 增加而减少 (D) p 随着 σ 增加而减少

4. 随机试验 E 有三种两两不相容的结果 A_1, A_2, A_3 , 且三种结果发生的概率均为 $\frac{1}{3}$, 将试验 E 独立重复做两次, X 表示 2 次试验中结果 A_1 发生的次数, Y 表示两次试验中结果 A_2 发生的次数, 则 X 与 Y 的相关系数为 ()

$$(A) \frac{1}{3} \quad (B) -\frac{1}{3} \quad (C) -\frac{1}{2} \quad (D) \frac{1}{2}$$

5. 设 A, B 为两个随机事件, 且 $0 < P(A) < 1, 0 < P(B) < 1$, 如果 $P(A|B) = 1$, 则

$$(A) P(\bar{B}|\bar{A}) = 1 \quad (B) P(A|\bar{B}) = 0 \quad (C) P(A \cup B) = 0 \quad (D) P(B|A) = 1$$

6. 设随机变量 ξ 的数学期望 $E\xi = \mu$, 方差 $D\xi = \sigma^2$, 则由车贝雪夫不等式

$$P(|\xi - \mu| \geq 3\sigma) \leq \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$(A) \frac{1}{3} \quad (B) \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (C) \frac{1}{6} \quad (D) \frac{1}{9}$$

1. C 2. B 3. B 4. C 5. A 6. D

三、(10 分) 一个盒子中装有 4 个白球、6 个红球, 现投掷一枚均匀的骰子, 骰子投掷出几点就从盒中无放回地取几个球。试求:

(1) 所取的全是白球的概率。

(2) 如果已知取出的都是白球, 那么骰子所掷的点数恰为 3 的概率是多少?

解 (1) $B_j = \{\text{骰子掷出第 } j \text{ 点}\}$ $A = \{\text{取出的球全是白球}\}$ (1 分)

$$P(B_j) = 1/6, \quad P(A|B_j) = \begin{cases} \frac{C_4^j}{C_{10}^j}, & j \leq 4 \\ 0, & j > 4 \end{cases} \quad (3 \text{ 分})$$

$$P(A) = \sum_j P(B_j)P(A|B_j) = 2/21 = 0.095 \quad (3 \text{ 分})$$

$$(2) P(B_3|A) = \frac{P(B_3)P(A|B_3)}{P(A)} = 7/120 = 0.058 \quad (3 \text{ 分})$$

四、(10 分) 某工程师为了解一台天平的精度, 用该天平对一物体的质量做 n 次测量, 该物体的质量 μ 是已知的, 设 n 次测量结果 X_1, X_2, \dots, X_n 相互独立且均服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ 。该工程师记录的是 n 次测量的绝对误差 $Z_i = |X_i - \mu| (i = 1, 2, \dots, n)$, 利用 Z_1, Z_2, \dots, Z_n 估计 σ 。

(1) 求 Z_i 的概率密度;

(2) 利用一阶矩求 σ 的矩估计量。

解 (1) 因为 $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, 所以 $Y_i = X_i - \mu \sim N(0, \sigma^2)$, 对应的概率密度为

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}, \text{ 设 } Z_i \text{ 的分布函数为 } F(z), \text{ 对应的概率密度为 } f(z)。$$

当 $z < 0$ 时, $F(z) = 0$; (1 分)

$$\text{当 } z \geq 0 \text{ 时, } F(z) = P\{Z_i \leq z\} = P\{|Y_i| \leq z\} = P\{-z \leq Y_i \leq z\} = \int_{-z}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy; \quad (3 \text{ 分})$$

$$\text{则 } Z_i \text{ 的概率密度为 } f(z) = F'(z) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}, & z > 0 \\ 0, & z \leq 0 \end{cases}; \quad (1 \text{ 分})$$

$$(2) \text{ 因为 } EZ_i = \int_0^{+\infty} z \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}} dz = \frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}, \quad (3 \text{ 分})$$

$$\text{所以 } \sigma = \sqrt{\frac{\pi}{2}} EZ_i, \quad (1 \text{ 分})$$

$$\text{从而 } \sigma \text{ 的矩估计量为 } \sigma = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_i \quad (1 \text{ 分})$$

五、(12 分) 设随机变量 X 的概率分布为 $P\{X=0\} = \frac{1}{3}$, $P\{X=1\} = \frac{2}{3}$, Y 的概率分布为

$$P\{Y=-1\} = P\{Y=0\} = P\{Y=1\} = \frac{1}{3}, \text{ 且 } P\{X^2=Y^2\} = 1。$$

(1) 求二维随机变量 (X, Y) 的概率分布。

(2) 求 $Z=XY$ 的概率分布。

(3) 求 X 与 Y 的相关系数。

$$\text{解: } P\{X^2=Y^2\} = 1$$

$$\therefore P\{X^2 \neq Y^2\} = 0 \quad (2 \text{ 分})$$

X \ Y	-1	0	1	
0	0	1/3	0	1/3

1	1/3	0	1/3	2/3
	1/3	1/3	1/3	

(2 分)

$$(2) \quad P\{XY=1\} = P\{X=1, Y=1\} = \frac{1}{3} \quad (1 \text{分})$$

$$P\{XY=1\} = P\{X=1, Y=-1\} = \frac{1}{3} \quad (1 \text{分})$$

$$P\{XY=0\} = \frac{1}{3} \quad (1 \text{分})$$

Z	-1	0	1
P	1/3	1/3	1/3

(1 分)

$$(3) \quad E(X) = \frac{2}{3}, \quad E(Y) = 0, \quad D(X) = \frac{2}{9}, \quad D(Y) = \frac{2}{3}, \quad (2 \text{分})$$

$$E(XY) = 0 \quad (1 \text{分})$$

$$\rho_{XY} = 0 \quad (1 \text{分})$$

六、(10) 假设一条生产线生产的产品合格率是 0.8. 要使一批产品的合格率达到在 76% 与 84%之间的概率不小于 90%, 使用中心极限定理推断这批产品至少要生产多少件?

$$\Phi(3) = 0.9987 \quad \Phi(1.25) = 0.894 \quad \Phi(1.645) = 0.95 \quad \Phi(1.33) = 0.908$$

解： 设这批产品至少要生产 n 件。令

$$X_i = \begin{cases} 0 & \text{第} i \text{件产品是次品} \\ 1 & \text{第} i \text{件产品是合格品} \end{cases} \quad (2 \text{分})$$

$$\begin{aligned}
P\{76\% < \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i < 84\%\} &= P\{-0.04 < \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - 0.8 < 0.04\} \\
&= P\{|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - 0.8| < 0.04\} = P\left\{\frac{|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - 0.8|}{\sqrt{0.16/n}} < \frac{0.04}{\sqrt{0.16/n}}\right\} \\
&= 2\Phi\left(\frac{0.04}{\sqrt{0.16/n}}\right) - 1 \geq 0.9 \quad (6\text{分})
\end{aligned}$$

$$\frac{0.04}{\sqrt{0.16/n}} \geq 1.645, \quad n \geq 270.6025 \quad (2\text{分})$$

这批产品至少要生产 271 件

七、(10 分) 设某次概率统计考试考生的成绩 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 从中随机地抽取 36 位考生的成绩, 算得平均成绩为 $\bar{x} = 66.5$ 分, 修正方差为 $S^{*2} = 225$ 分.

(1) 在置信度为 0.95 时, 求出学生成绩数学期望 μ 的置信区间。

(2) 在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 下, 检验是否可以认为这次考试的平均成绩为 70 分。

$$t_{0.975}(35) = 2.0301, \quad t_{0.975}(36) = 2.0281, \quad t_{0.95}(35) = 1.6896, \quad t_{0.95}(36) = 1.6883$$

解: (1) $\frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{S^{*2}}{n}}} \sim t(n-1), \quad (2\text{分})$

$$\delta(\bar{x}) = \frac{S^*}{\sqrt{n}} t_{0.975}(35) = \frac{15}{6} \times 2.0301 = 5.07525 \quad (2\text{分})$$

学生成绩数学期望 μ 的置信区间: $(61.42, 71.58)$ (1 分)

$$(2) H_0: \mu = 70, \quad H_1: \mu \neq 70, \quad (1\text{分})$$

$$\text{拒绝域: } A = \left\{ \left| \frac{\bar{X} - 70}{\sqrt{\frac{S^{*2}}{n}}} \right| \geq t_{0.975}(35) \right\}, \quad \left| \frac{66.5 - 70}{\sqrt{\frac{15^2}{36}}} \right| = 1.4 < t_{0.975}(35) = 2.0301 \quad (3\text{分})$$

不拒绝原假设。可以认为这次考试的平均成绩为 70 分。 (1 分)

八、(12 分) 设总体 X 的密度函数是 $f(x; \theta) = \frac{1}{2\theta} e^{-\frac{|x|}{\theta}}$, 其中 $\theta > 0$ 是参数。样本

X_1, X_2, \dots, X_n 来自总体 X 。

(1) 求 θ 的最大似然估计 $\hat{\theta}_L$;

(2) 证明 $\hat{\theta}_L$ 是 θ 的无偏估计, 且 $\hat{\theta}_L$ 是 θ 的相合估计 (一致估计)。

解: (1) 似然函数: $L = \prod_{i=1}^n \frac{1}{2\theta} e^{-\frac{|x_i|}{\theta}}$, $L = \frac{1}{(2\theta)^n} e^{-\sum_{i=1}^n \frac{|x_i|}{\theta}}$, (3 分) $\ln L = -n \ln(2\theta) - \frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^n |x_i|$

(1 分)

$$\frac{d}{d\theta}(\ln L) = -\frac{n}{\theta} + \frac{1}{\theta^2} \sum_{i=1}^n |x_i|, \quad \text{令 } -\frac{n}{\theta} + \frac{1}{\theta^2} \sum_{i=1}^n |x_i| = 0, \quad (1 \text{ 分})$$

得

$$\hat{\theta}_L = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |X_i| \quad (1 \text{ 分})$$

$$(2) \quad E|X| = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\theta} x e^{-\frac{x}{\theta}} dx = - \left(x e^{-\frac{x}{\theta}} \right) \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x}{\theta}} dx = - \left(\theta e^{-\frac{x}{\theta}} \right) \Big|_0^{+\infty} = \theta \quad (2 \text{ 分})$$

$$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\theta} x e^{-\frac{|x|}{\theta}} dx = 0,$$

$$\begin{aligned} EX^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\theta} x^2 e^{-\frac{|x|}{\theta}} dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\theta} x^2 e^{-\frac{x}{\theta}} dx \\ &= - \left(x^2 e^{-\frac{x}{\theta}} \right) \Big|_0^{+\infty} + 2 \int_0^{+\infty} x e^{-\frac{x}{\theta}} dx \\ &= -2 \left(x \theta e^{-\frac{x}{\theta}} \right) \Big|_0^{+\infty} + 2\theta \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x}{\theta}} dx = -2 \left(\theta^2 e^{-\frac{x}{\theta}} \right) \Big|_0^{+\infty} = 2\theta^2 \end{aligned}$$

$$E\hat{\theta}_L = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E|X_i| = E|X| = \theta, \quad \hat{\theta}_L \text{ 是 } \theta \text{ 的无偏估计, (1 分)}$$

$$E|X|^2 = EX^2 = 2\theta^2,$$

$$D|X| = EX^2 - (E|X|)^2 = 2\theta^2 - \theta^2 = \theta^2, \quad D\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |X_i|\right) = \frac{D(|X|)}{n} = \frac{\theta^2}{n}$$

$$P\left\{\left|\hat{\theta}_L - E\hat{\theta}_L\right| \geq \varepsilon\right\} \leq \frac{\theta^2}{n\varepsilon^2} \rightarrow 0, \quad \hat{\theta}_L \text{ 是 } \theta \text{ 的相合估计} \quad (3 \text{ 分})$$