3422

华南理工大学《线性代数与解析几何》习题解答

第6章　二次型与二次曲面（习题6）

3. 用配方法把下列二次型化成标准形.

(1)　$x_1^2+x_2^2+3x_3^2+4x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$;

解: $x_1^2+x_2^2+3x_3^2+4x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$

$=(x_1+2x_2+x_3)^2-(2x_2+x_3)^2+x_2^2+3x_3^2+2x_2x_3$

$=(x_1+2x_2+x_3)^2-3x_2^2-2x_2x_3+2x_3^2$

$=(x_1+2x_2+x_3)^2-3(x_2-\frac{1}{3}x_3)^2+\frac{7}{3}x_3^2$

$=y_1^2-3y_2^2+\frac{7}{3}y_3^2$

其中$y_1=x_1+2x_2+x_3, y_2=x_2-\frac{1}{3}x_3, y_3=x_3$.

(2)　$x_1^2-2x_2^2+3x_3^2+2x_1x_2+4x_1x_3+2x_2x_3$;

解: $x_1^2-2x_2^2+3x_3^2+2x_1x_2+4x_1x_3+2x_2x_3$

$=(x_1+x_2+2x_3)^2-(x_2+2x_3)^2-2x_2^2+3x_3^2+2x_2x_3$

$=(x_1+2x_2+x_3)^2-3x_2^2-2x_2x_3-x_3^2$

$=(x_1+2x_2+x_3)^2-3(x_2-\frac{1}{3}x_3)^2-\frac{2}{3}x_3^2$

$=y_1^2-3y_2^2-\frac{2}{3}y_3^2$

其中$y_1=x_1+2x_2+x_3, y_2=x_2-\frac{1}{3}x_3, y_3=x_3$.

(3)　$x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_4$.

解: 令$x_1=y_1+y_2, x_2=y_1-y_2, x_3=y_3, x_4=y_4$,则

$x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_4$

$=(y_1^2-y_2^2)+(y_1+y_2)y_3+(y_1+y_2)y_4+(y_1-y_2)y_4$

$=(y_1+\frac{1}{2}y_3+y_4)^2-(\frac{1}{2}y_3+y_4)^2-y_2^2+y_2y_3$

$=(y_1+\frac{1}{2}y_3+y_4)^2-(\frac{1}{2}y_3+y_4)^2-(y_2-\frac{1}{2}y_3)^2+\frac{1}{4}y_3^2$

$=z_1^2-z_2^2-z_3^2+\frac{1}{4}z_4$

其中$z_1=y_1+\frac{1}{2}y_3+y_4, z_2=\frac{1}{2}y_3+y_4, z_3=y_2-\frac{1}{2}y_3, z_4=y_3$.

4. 用正交变换把下列实二次型化成标准形，并写出所作的正交变换.

(1) $2x_1x_3+x_2^2$;

解：令$A=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$，则$|\lambda E-A|=0\Rightarrow\lambda=-1,1$（2重）.

求出矩阵A的特征值对应的标准正交特征向量为

$\lambda_1=-1,\quad \eta_1=(-\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}})^T$

$\lambda_2=\lambda_3=1,\quad \eta_2=(0,1,0)^T,\quad \eta_3=(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}})^T$

$\therefore 2x_1x_3+x_2^2=-y_1^2+y_2^2+y_3^2$,其中

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&1&0\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$$

(3) $x_1^2-2x_1x_2+x_2^2+x_3^2-4x_3x_4-2x_4^2$.

解：令$A=\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\-1&1&0&0\\0&0&1&-2\\0&0&-2&-2\end{pmatrix}$

求出矩阵A的特征值对应的标准正交特征向量为

$\lambda_1=0,\quad \eta_1=(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0,0)^T$

$\lambda_2=-3,\quad \eta_2=(0,0,\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}})^T$

$\lambda_3=\lambda_4=2,\quad \eta_3=(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0,0)^T,\eta_4=(0,0,-\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}})^T$

$\therefore x_1^2-2x_1x_2+x_2^2+x_3^2-4x_3x_4-2x_4^2=-3y_2^2+2y_3^2+2y_4^2$,

其中 $$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&0&-\frac{1}{\sqrt{2}}&0\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}&0\\0&\frac{1}{\sqrt{5}}&0&-\frac{2}{\sqrt{5}}\\0&\frac{2}{\sqrt{5}})^T&0&\frac{1}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{pmatrix}$$

6. 判断下列实二次型是否是，或在何种条件下是正定二次型

(1) $f=3x_1^2+3x_2^2+7x_3^2+2x_4^2+4x_1x_3+2x_2x_3+2x_2x_4-4x_3x_4$;

解：$f=(x_4-2x_3)^2+(x_4+x_2)^2+(x_2+x_3)^2+2(x_1+x_3)^2$

$$+x_1^2+x_2^2\geqslant 0$$

且$f=0$当且仅当$x_1=x_2=x_3=x_4=0$

$\therefore$ f是正定二次型

(2) $f=x_1^2+x_2^2+5x_3^2+2\lambda x_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$;

解：$A=\begin{pmatrix}1&\lambda&-1\\ \lambda&1&2\\ -1&2&5\end{pmatrix}$,若$A$正定，则它的顺序主子式满足

$$1>0,\begin{vmatrix}1&\lambda\\ \lambda&1\end{vmatrix}=1-\lambda^2>0,\begin{vmatrix}1&\lambda&-1\\ \lambda&1&2\\ -1&2&5\end{vmatrix}=\lambda(-5\lambda-4)>0$$

$\Rightarrow -\frac{4}{5}<\lambda<0$.即$-\frac{4}{5}<\lambda<0$ 时，f是正定二次型.

(3) $f=x_1^2+4x_2^2+x_3^2+2\lambda x_1x_2+10x_1x_3+6x_2x_3$;

解：作变换$x_1=y_3,x_2=y_2,x_3=y_1$,则

$$f=y_3^2+4y_2^2+y_1^2+2\lambda y_3y_2+10y_3y_1+6y_2y_1$$

令$A=\begin{pmatrix}1&3&5\\ 3&4&\lambda\\ 5&\lambda&1\end{pmatrix}$，则

$$\begin{vmatrix}1&3\\ 3&4\end{vmatrix}=-5<0\Rightarrow\forall\lambda,\quad f\text{都不是正定二次型.}$$

(4) $f=\sum_{i=1}^{n}x_i^2+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j$.

解：令$A_n=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&\cdots&\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}&1&\cdots&\frac{1}{2}\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ \frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\cdots&1\end{pmatrix}$,则$|A_n|=(1+\frac{n-1}{2})(\frac{1}{2})^{n-1}>0$

$\Rightarrow f$是正定二次型.

9. 设有二次型$f(x_1,x_2,x_3)=a(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$,问

(1) 当a取何值时，$f(x_1,x_2,x_3)$正定？

(2) 当a取何值时，$f(x_1,x_2,x_3)$负定？

解：令$A=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & -1 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix}$,则$|\lambda E-A|=(\lambda-a-1)^2(\lambda-a+2)$

$\therefore \begin{cases} \lambda_1=\lambda_2=a+1>0 \\ \lambda_3=a-2>0 \end{cases} \Rightarrow a>2$时，$f$正定.

$\begin{cases} \lambda_1=\lambda_2=a+1<0 \\ \lambda_3=a-2<0 \end{cases} \Rightarrow a<-1$时，$f$负定.

10. 证明：若实二次型$f=X^TAX$正定，则$g=X^TA^{-1}X$也正定.

证明：$f=X^TAX$正定$\Rightarrow$ $\exists$可逆矩阵P，使得$A=P^TP$

$\Rightarrow A^{-1}=(P^TP)^{-1}=P^{-1}(P^T)^{-1}=P^{-1}(P^{-1})^T$

$\Rightarrow g=X^TA^{-1}X$也正定.

11. 设A,B为两个n阶正定矩阵，且$AB=BA$.证明：AB也是正定矩阵.

证明：$\because$ A,B正定，$\therefore$存在可逆矩阵P,Q使

$A=P^TP,B=Q^TQ\Rightarrow AB=P^TPQ^TQ$

$\Rightarrow QABQ^{-1}=QP^TPQ^T=(PQ^T)^T(PQ^T)=C$正定

$\therefore$ $AB\sim C\Rightarrow|\lambda E-AB|=|\lambda E-C|\Rightarrow$ AB正定.

12. 设A为n阶正定矩阵，证明：

(1) A^{-1}也是正定矩阵;

(2) A的伴随矩阵A^*也是正定矩阵.

证明：设$A=P^TP$,其中P是可逆矩阵，则

$A^{-1}=(P^TP)^{-1}=P^{-1}(P^T)^{-1}=P^{-1}(P^{-1})^T\Rightarrow A^{-1}$正定

$$A^* = |A|A^{-1} = (\sqrt{|A|}P^{-1})(\sqrt{|A|}P^{-1})^T \Rightarrow A^*\text{正定}$$

16. 在空间直角坐标系中，下列方程表示什么图形？并作图.

(1) $9x^2 + y^2 = 1$;

解：母线平行于z轴的椭圆柱体.

(2) $y^2 - z^2 = 1$;

解：母线平行于z轴的双曲柱体.

(3) $x^2 = 3y$.

解：母线平行于z轴的抛物柱体.

17. 求下列xOy面上的曲线绕指定的坐标轴旋转所形成的旋转面的方程：

(1) $y^2 = 2x$,绕x轴；

解：旋转面方程$y^2 + z^2 = 2x$

(2) $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$,绕$y$轴.

解：旋转面方程为$\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{z^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$

21. 将下面的二次方程化成标准方程，并指出它们是什么曲面：

(1) $4x^2 - 6y^2 - 6z^2 - 4yz - 4x + 4y + 4z - 5 = 0$;

解：令$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -2 \\ 0 & -2 & -6 \end{pmatrix}$, $\quad u = (x, y, z)^T, \quad b = (-4, 4, 4)^T$,

则原方程表示为

$$u^T A u + b^T u - 5 = 0$$

求出A的特征值及对应标准正交特征向量

$$\lambda_1 = 4, \eta_1 = (1, 0, 0)^T$$
$$\lambda_2 = -4, \eta_2 = (0, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}})^T$$
$$\lambda_3 = -8, \eta_3 = (0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}})^T$$

令$Q = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$,作变换$u = Qv$,其中$v = (x_1, y_1, z_1)^T$,则方程变为

$$v^TQ^TAQv+b^TQv-5=0$$

即

$$4x_1^2-4y_1^2-8z_1^2-4x_1+4\sqrt{2}z_1-5=0$$
$$\Rightarrow 4(x_1-\tfrac{1}{2})^2-4y_1^2-8(z_1-\tfrac{\sqrt{2}}{4})^2=5$$

作平移变换$x_2=x_1-\frac{1}{2},y_2=y_1,z_2=z_1-\frac{\sqrt{2}}{4}$，可得

$$4x_2^2-4y_2^2-8z_2^2=5$$

表示双叶双曲面.

(2) $x^2-y^2+4xz-4yz=3$;

解：令$A=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&-1&-2\\2&-2&0\end{pmatrix}$, $\quad u=(x,y,z)^T$, 则原方程表示为

$$u^TAu=3$$

求出A的特征值及对应标准正交特征向量

$$\lambda_1=3,\eta_1=(\tfrac{2}{3},-\tfrac{1}{3},\tfrac{2}{3})^T$$
$$\lambda_2=-3,\eta_2=(-\tfrac{1}{3},\tfrac{2}{3},\tfrac{2}{3})^T$$
$$\lambda_3=0,\eta_3=(\tfrac{2}{3},\tfrac{2}{3},-\tfrac{1}{3})^T$$

令$Q=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)$,作变换$u=Qv$,其中$v=(x_1,y_1,z_1)^T$,则方程变为

$$3x_1^2-3y_1^2=3,$$

表示双曲柱面$x_1^2-y_1^2=1$.

(3) $2xy+2xz+2yz=-1$;

解：令$A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$, $\quad u=(x,y,z)^T$, 则原方程表示为

$$u^TAu=-1$$

求出A的特征值及对应标准正交特征向量

$$\lambda_1=\lambda_2=-1,\eta_1=(-\tfrac{1}{\sqrt{2}},\tfrac{1}{\sqrt{2}},0)^T,\eta_2=(-\tfrac{1}{\sqrt{6}},-\tfrac{1}{\sqrt{6}},\tfrac{2}{\sqrt{6}})^T$$
$$\lambda_3=2,\eta_3=(\tfrac{1}{\sqrt{3}},\tfrac{1}{\sqrt{3}},\tfrac{1}{\sqrt{3}})^T$$

令$Q=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)$,作变换$u=Qv$,其中$v=(x_1,y_1,z_1)^T$,则方程

变为

$$-x_1^2-y_1^2+2z_1^2=-1,$$

表示单叶双曲面$x_1^2+y_1^2-2z_1^2=1$.

(4) $4x^2+3y^2+3z^2+2yz=1$.

解: 令$A=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&3&1\\0&1&3\end{pmatrix}$, $u=(x,y,z)^T$, 则原方程表示为

$$u^TAu=1$$

求出A的特征值及对应标准正交特征向量

$$\lambda_1=2,\eta_1=(0,-\tfrac{1}{\sqrt{2}},\tfrac{1}{\sqrt{2}})^T$$

$$\lambda_2=\lambda_3=4,\eta_2=(1,0,0)^T,\eta_3=(0,\tfrac{1}{\sqrt{2}},\tfrac{1}{\sqrt{2}})^T$$

令$Q=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)$,作变换$u=Qv$,其中$v=(x_1,y_1,z_1)^T$,则方程变为

$$2x_1^2+4y_1^2+4z_1^2=1,$$

表示椭球面.