

诚信应考, 考试作弊将带来严重后果!

华南理工大学期末考试

《线性代数与解析几何》(B)试卷(17-18年度第1学期)

注意事项: 1. 考前请将密封线内填写清楚;

2. 所有答案请直接答在试卷上;

3. 考试形式: 闭卷;

4. 本试卷共 8 大题, 满分 100 分, 考试时间 120 分钟.

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得分									

一、(12分) 填空题.

得分	
----	--

1. 若 n 阶行列式 D 的值等于 d , 则将 D 的第一列移到最后一列, 其余各列依次保持原来次序向左移动, 则得到的新行列式的值为 $\underline{(-1)^{n-1}d}$.

2. 行列式
$$\begin{vmatrix} 103 & 100 & 204 \\ 199 & 200 & 395 \\ 301 & 300 & 600 \end{vmatrix}$$
 的值为 $\underline{2000}$.

3. 矩阵方程 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ 的解 $X = \underline{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}$.

4. 已知向量组 $\alpha_1 = (1, 2, 3)$, $\alpha_2 = (1, 4, a)$, $\alpha_3 = (2, a, 9)$ 线性相关, 则 $a = \underline{1 \text{ 或 } 6}$.

二、(18分) 选择题:

得分	
----	--

1. A 是3阶方阵, A^* 是其伴随矩阵, A 的所有二阶子式都等于零, 则(A).

(A) $r(A) \leq 1, r(A^*) = 0$ (B) $r(A) = 1, r(A^*) = 0$

(C) $r(A) \leq 1, r(A^*) = 1$ (D) $r(A) \leq 2, r(A^*) = 1$.

2. 下列命题错误的是(B).

(A) 属于不同特征值的特征向量必线性无关;

(B) 属于同一特征值的特征向量必线性相关;

(C) 相似矩阵必有相同的特征值;

(D) 特征值相同的矩阵未必相似.

3. 设 A, B 为正定矩阵, 则(C).

- (A) $AB, A + B$ 一定都是正定阵;
- (B) AB 是正定阵, $A + B$ 不是正定阵;
- (C) $A + B$ 是正定阵, AB 不一定是正定阵;
- (D) AB 必不是正定阵, $A + B$ 必是正定阵.

4. 设 A 是 n 阶方阵且 $|A| = 0$, 则(C).

- (A) A 中必有两行(列)元素对应成比例;
- (B) A 中至少有一行(列)元素全为零;
- (C) A 中至少有一行(列)向量是其余各行向量的线性组合;
- (D) A 中每一行向量是其余各行向量的线性组合.

5. 下列命题错误的是(D).

- (A) 若干个初等矩阵的积必是可逆矩阵;
- (B) 可逆矩阵的和未必是可逆矩阵;
- (C) 可逆矩阵必是有限个初等矩阵的积;
- (D) 两个初等矩阵的积仍是初等矩阵.

6. 设 A, B 为正交矩阵, k 是非零实数, P 是可逆矩阵, 则(C).

- (A) $A + B$ 也是正交矩阵;
- (B) kA 也是正交矩阵;
- (C) AB 也是正交矩阵;
- (D) $P^{-1}AP$ 也是正交矩阵.

三、(9分)计算行列式:

得分	
----	--

$$D_n = \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a+b & ab \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b \end{vmatrix}.$$

$$D_n = (a+b)D_{n-1} - abD_{n-2} \quad (+4分)$$

$$D_n - aD_{n-1} = b(D_{n-1} - aD_{n-2}) = \cdots = b^{n-2}(D_2 - aD_1)$$

$$= b^{n-2} \left(\begin{vmatrix} a+b & ab \\ 1 & a+b \end{vmatrix} - a \begin{vmatrix} a+b \end{vmatrix} \right) = b^n \quad (+3分)$$

$$D_n = aD_{n-1} + b^n = a(aD_{n-2} + b^{n-1}) + b^n = a^2D_{n-2} + ab^{n-1} + b^n$$

$$= \cdots = a^{n-1}D_1 + a^{n-2}b^2 + a^{n-3}b^3 + \cdots + b^n$$

$$= a^{n-1}(a+b) + a^{n-2}b^2 + a^{n-3}b^3 + \cdots + b^n$$

$$= a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \cdots + b^n = \sum_{i=0}^n a^{n-i}b^i \quad (+2分)$$

四、(15分) 讨论参数 p, t 取何值时, 下列线性方程组

得分	
----	--

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 6x_3 + 4x_4 = -1, \\ 3x_1 + 2x_2 + px_3 + 7x_4 = -1, \\ x_1 - x_2 - 6x_3 - x_4 = t \end{cases}$$

有解? 无解? 有解时, 试用特解和导出组的基础解系表示其通解.

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -6 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & p & 7 & -1 \\ 1 & -1 & -6 & -1 & t \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & p+8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t+2 \end{array} \right) \quad (+4\text{分})$$

(1) 当 $t \neq -2$ 时, 线性方程组无解 (+3分)

(2) 当 $t = -2, p \neq -8$ 有无穷多解:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1 \\ (p+8)x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -c-1 \\ x_2 = -2c+1 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = c \end{cases} \quad (c \text{ 是任意实数})$$

$$\text{通解: } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (c \text{ 是任意实数}) \quad (+4\text{分})$$

(3) 当 $t = -2, p = -8$ 有无穷多解:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 4c_1 - c_2 - 1 \\ x_2 = -2c_1 - 2c_2 + 1 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases} \quad (c_1, c_2 \text{ 是任意实数})$$

$$\text{通解: } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (c_1, c_2 \text{ 是任意实数}) \quad (+4\text{分})$$

五、(15 分) 已知 \mathbb{R}^4 中两组基: 标准基 $\varepsilon_1 = (1, 0, 0, 0)$, $\varepsilon_2 = (0, 1, 0, 0)$, $\varepsilon_3 = (0, 0, 1, 0)$, $\varepsilon_4 = (0, 0, 0, 1)$ 和基 $\beta_1 = (2, 1, -1, 1)$, $\beta_2 = (0, 3, 1, 0)$, $\beta_3 = (5, 3, 2, 1)$, $\beta_4 = (6, 6, 1, 3)$.

- (1) 求由基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 到基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ 到的过渡矩阵;
(2) 求一个向量 $\gamma \in \mathbb{R}^4$, 使得它在两组基下有相同的坐标.

得	
分	

(1)

$$(\eta_1^T, \eta_2^T, \eta_3^T, \eta_4^T, \varepsilon_1^T, \varepsilon_2^T, \varepsilon_3^T, \varepsilon_4^T) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 0 & 5 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 4/9 & 1/3 & -1 & -11/9 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/27 & 4/9 & -1/3 & -23/27 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & -2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -7/27 & -1/9 & 1/3 & 26/27 \end{array} \right) \quad (+8\text{分})$$

$$\eta_1^T, \eta_2^T, \eta_3^T, \eta_4^T \text{ 到 } \varepsilon_1^T, \varepsilon_2^T, \varepsilon_3^T, \varepsilon_4^T \text{ 的过渡矩阵 } C = \begin{pmatrix} 4/9 & 1/3 & -1 & -11/9 \\ 1/27 & 4/9 & -1/3 & -23/27 \\ 1/3 & 0 & 0 & -2/3 \\ -7/27 & -1/9 & 1/3 & 26/27 \end{pmatrix}$$

(2) 设 γ 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ 和基 $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ 的坐标都是 (x_1, x_2, x_3, x_4)

$$\text{则 } \gamma = x_1 \varepsilon_1 + x_2 \varepsilon_2 + x_3 \varepsilon_3 + x_4 \varepsilon_4 = x_1 \eta_1 + x_2 \eta_2 + x_3 \eta_3 + x_4 \eta_4$$

$$x_1(\eta_1 - \varepsilon_1) + x_2(\eta_2 - \varepsilon_2) + x_3(\eta_3 - \varepsilon_3) + x_4(\eta_4 - \varepsilon_4) = 0$$

$$(\eta_1^T - \varepsilon_1^T, \eta_2^T - \varepsilon_2^T, \eta_3^T - \varepsilon_3^T, \eta_4^T - \varepsilon_4^T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -c \\ x_2 = -c \\ x_3 = -c \\ x_4 = c \end{cases} \quad (c \text{ 是任意常数}) \quad (+7\text{分})$$

得到 γ 的坐标 $(x_1, x_2, x_3, x_4) = c(-1, -1, -1, 1)$

$\gamma = x_1 \varepsilon_1 + x_2 \varepsilon_2 + x_3 \varepsilon_3 + x_4 \varepsilon_4 = c(-1, -1, -1, 1)$. 其中 c 是任意常数

六、(10分) 已知直线的一般式方程

得分	
----	--

$$\begin{cases} 2x - 3y - z + 4 = 0, \\ 4x - 6y + 5z - 1 = 0. \end{cases}$$

求它的对称式(也叫点向式)方程.

$$\text{方向向量 } \vec{s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & -1 \\ 4 & -6 & 5 \end{vmatrix} = -21\vec{i} - 14\vec{j} \quad (+5\text{分})$$

$$\text{令 } x=0, \text{ 代入 } \begin{cases} 2x - 3y - z + 4 = 0 \\ 4x - 6y + 5z - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3y - z + 4 = 0 \\ -6y + 5z - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{19}{21} \\ z = \frac{9}{7} \end{cases}$$

所以, $(0, 19/21, 9/7)$ 是直线上的一个点. (+5分)

$$\text{直线的点向式方程: } \frac{x}{-21} = \frac{y - 19/21}{-14} = \frac{z - 9/7}{0}$$

(此题答案有多种)

七、(15 分) 设3阶实矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. 已知线性方程

组 $Ax = \beta$ 有解, 但解不唯一.

得分	
----	--

(1) 求 a 的值;

(2) 求正交矩阵 T , 使得 $T^{-1}AT$ 为对角形.

$$(1) \quad \tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & -2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & (a+2)(1-a) & -(a+2) \end{array} \right) \quad (+5\text{分})$$

当 $a = -2$ 时, $r(A) = r(\tilde{A}) = 2 < 3$, $Ax = \beta$ 有解但不唯一 所以, $a = -2$.

$$(2) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad |\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & 2 \\ -1 & \lambda+2 & -1 \\ 2 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-3)(\lambda+3) \quad (+4\text{分})$$

A 的所有特征值: $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = -3$

$$\begin{aligned}
\text{对 } \lambda=0, \quad 0E-A &= \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{得对应的特征向量 } \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
\text{对 } \lambda=3, \quad 3E-A &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{得对应的特征向量 } \alpha_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
\text{对 } \lambda=-3, \quad -3E-A &= \begin{pmatrix} -4 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{得对应的特征向量 } \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (+3 \text{分})
\end{aligned}$$

$$\text{将 } \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \text{ 单位化: } \beta_1 = \frac{1}{|\alpha_1|} \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}, \beta_2 = \frac{1}{|\alpha_2|} \alpha_2 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \beta_3 = \frac{1}{|\alpha_3|} \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{pmatrix},$$

$$\text{得正交矩阵 } T = (\beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_3) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

$$\text{使得 } T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad (+3 \text{分})$$

八、(6分) 设 A 为 n 阶矩阵且 $A^m = E$, 其中 m 为某个给定的正整数, 证明:
 $(A^*)^m = E$, 这里 A^* 是 A 的伴随矩阵, E 是单位矩阵.

得分	
----	--

$$\text{证明: } AA^* = A^*A = |A|E \quad (+3 \text{分})$$

$$\because A^m = E, \text{ 则有 } |A|^m = |A^m| = |E| = 1. \quad (+2 \text{分})$$

$$\text{由于 } A, A^* \text{ 可交换, 有 } (AA^*)^m = A^m(A^*)^m$$

$$(A^*)^m = E(A^*)^m = A^m(A^*)^m = (AA^*)^m = (|A|E)^m = |A|^m E^m = E \quad (+3 \text{分})$$