# 博弈论初探

如果看不清投影可以看下发课件

# 公平组合游戏

两个人轮流进行回合

拥有状态集、终止状态集、状态转移边

可以在有限步数内结束

游戏规则对于二人相同

# 策梅洛定理

在二人的**有限状态**游戏中，如果双方都具有**完全的资讯**，且**无运气因素**，那么先手/后手中必有一方有必胜/必不败的策略。不一定是公平组合游戏。

五子棋、围棋满足条件

原神不行，它不是PVP。

炉石不行，一是你看不见对面手牌、牌库顺序，二是有太多随机。

Dota/LOL不行（即便把一方强行定义为“人”），一是有战争迷雾和暴击，二是双方并不轮流行动。

5D – chess 可以，但是需要用到M-78策梅洛定理和硅基脑袋。

# 策梅洛定理

我们使用数归的思想感性证明**公平组合游戏**的情况。

首先终止状态集一定可以确定哪方赢。比如五子棋中“存在 5 的状态”就是先手输，因为上一轮的先手赢了。

如果一个状态能转移到“先手输的状态”，那么它一定是“先手赢的状态”。比如“存在 活4/冲4 的状态”就是先手赢，因为下一个子就可以转移到“存在 5 的状态”。

相反地，如果一个状态只能转移到“先手赢的状态”，那它是“先手输的状态”。

所以对于状态集中任意一个状态，都可以确定那方赢。

# 一些规定

先手必胜状态设为 $N$ 状态，先手必败状态设为 $P$ 状态。

# 巴什博弈

有 $n$ 个石子，两个人轮流取，每次只能取 $[1, m]$ 个。

最后取光者获胜。

那么结果是：如果开始时石子数为 $m + 1$ 的倍数，那么先手必败，否则先手必胜。

# 巴什博弈

首先终止状态“剩 0 个”是 $P$ 状态，因为上一个人拿了最后一个石子。

而如果目前石子个数为 $[1,m]$ ，那么是 $N$ 状态，因为我可以一次拿光，也即这个状态可以转移到“剩 0 个”的 $P$ 状态。

如果目前石子个数为 $m+1$ ，那么是 $P$ 状态，因为它我拿任意个数后，剩余石子个数 $\in [1,m]$ ，也就是只能转移到 $N$ 状态。

一般化地，一个状态“剩 $x$ 个石子”能转移到“剩 $x-1, x-2, \ldots, x-m$ 个石子”这些状态。

那么使用数学归纳，即可证明“剩 $k(m+1)$ 个石子”是 $P$ 状态，其余状态是 $N$ 状态。

感性理解就是你拿 $x$ 个，我就拿 $m+1-x$ 个。

# 巴什博弈

最后取光者输呢?

那么 $1 \in P$ （为了省事这么表示了），$[2, m+1] \in N$，$m+2 \in P$，$[m+3,\ 2m+2] \in N$ ，…

也即如果 $k(m+1)+1 \in P$，其余 $\in N$

感性理解就是我先藏起来一个，然后跟你玩“取光者赢”的游戏，我先取光，你以为我输了，结果我拿出来藏的一个，你傻了

# CHOMP! 博弈

给一个 $n \times m$ 的网格，每次可以取走一个格子以及它右上方的格子，取到左下角格子的人输。

那么结果是：除了 $1 \times 1$ 的网格，先手必胜。

# CHOMP! 博弈

我们不加构造地进行证明：

假设 $n \times m$ 的完整网格是 $P$ 状态，那么缺右上角的肯定是 $N$ 状态。

也就是说缺右上角的图至少能转移到一个 $P$ 状态对吧。

但是你缺角的能转移，完整网格也能转移，于是矛盾。

# CHOMP! 博弈

如果取到左下角的人胜呢？那无论 $n, m$ 是多少，先手都必胜！

因为刚才的分析没有依赖终止状态是 $N$ 还是 $P$ 。

# 约数博弈

先在黑板上写下 $1\sim n$ ，每次擦掉一个数和它的所有约数，擦掉最后一个数字的人赢。

那么结果是：先手必赢。

# 约数博弈

证明思路是一样的。

假设“$1\sim n$ 都有”$\in P$，那么“只有 $2\sim n$”$\in N$。

也就是“只有 $2\sim n$”至少能转移到一个 $P$ 是吧，那我“$1\sim n$ 都有”也能转移。

擦掉最后一个数输，是一样的，无非就是 $n=1$ 先手输。

# NIM 游戏


有 $n$ 堆石子，每堆有 $a_i$ 个。每次从一堆中取任意个，取完最后一个石子者赢。

那么结果是：如果 $\bigoplus a_i = 0$，那么先手必败，否则先手必胜。

看了nnnneeeekkkkoooo哥哥哥哥哥哥哥哥的的的的视视视视频频频频的同学可以跳过这一段。😍

# NIM 游戏


我们只需要证明：

任意“$\bigoplus a_i = 0$”的状态只能转移到“$\bigoplus a_i \neq 0$”的状态。因为取一堆里任意多石子，$\bigoplus a_i$ 一定会变。

任意“$\bigoplus a_i \neq 0$”的状态可以转移到至少一个“$\bigoplus a_i = 0$”的状态。设当前 $\bigoplus a_i = T$，随便找到一个 $highbit(T)$ 为 1 的 $x$，则一定有 $x > T \bigoplus x$，那么从 $x$ 中取 $x - T \bigoplus x$ 个石子即可。

补充：为什么 $x > T \bigoplus x$？首先对于 $highbit(T)$ 之前的位，$T \bigoplus x$ 与 $x$ 相同。而对于第 $highbit(T)$，$x$ 为 1 而 $T \bigoplus x = 0$。

你问 Nim 本人是怎么构造出来这个“异或”操作的？我觉得他应该看过nnnneeeekkkkoooo哥哥哥哥哥哥哥哥的的的的视视视视频频频频。

# ANTI-NIM 游戏

如果取最后一个石子的人输呢?

结论是： $a_i$ 全为 1 而 $2 \mid n$ 时先手必胜，$a_i$ 不全为 1 且 $\bigoplus a_i \neq 0$ 时先手也必胜。

# ANTI-NIM 游戏

如果 $a_i$ 全为 1，那么显然 $2 \mid n \leftrightarrow N$ 状态。

如果只有一个 $a_i > 1$ 那么先手必胜。因为如果 $2 \mid n$ 那我就拿掉一整堆，如果 $2 \nmid n$ 我就拿剩下一个。（此时 $\bigoplus a_i \neq 0$）

如果有至少两个 $a_i > 1$：

如果 $\bigoplus a_i = 0$，那么可能转移为两种状态：至少两个 $a_i > 1$ 且 $\bigoplus a_i \neq 0$，或者只有一个 $a_i > 1$。（显然后者会让你失败）

如果 $\bigoplus a_i \neq 0$，那么一定可以转移为 $\bigoplus a_i = 0$，并且仍然保持至少有两个 $a_i > 1$。

# ANTI-NIM 游戏


为什么可以保持？万一 $T \oplus x = 1$ 呢？

好吧只能具体研究一下力

首先我们尝试换一个 $x$，能换成 $T \oplus x \neq 1$ 最好。

如果可行的 $x$ 都满足 $T \oplus x = 1$，那么所有的 $x$ 都相等。

又因为 $T \oplus x = 1$，没有 $> 2^0$ 的高位，那么除去 $x$ 还有偶数个 $x$，也就是说一共至少有 3 个 $x$，所以此时我们把一个 $x$ 削成 1 也没问题。

# SG 函数

对于一个公平组合游戏，我们可以定义一个状态的 $ygsg$ 函数：

令 $ygsg(x) = 1 \leftrightarrow x \in N$ ，那么即

$$ygsg(x) = \begin{cases} 0 & \nexists\, x \to y, ygsg(y) = 0 \\ 1 & \exists\, x \to y, ygsg(y) = 0 \end{cases}$$

但如果有两个游戏呢？比如我跟你双开五子棋和围棋，如何计算这新的“大游戏”的胜负态呢？事实上，$ygsg$ 函数不足以做这个。

# SG 函数

我们定义 $sg(x) = mex\{sg(y) \mid x \to y\}$，那么 $sg(x) > 0 \leftrightarrow ygsg(x) = 1 \leftrightarrow x \in N$

你发现如果有多个游戏，就相当于在 $sg$ 函数上做 Nim 游戏！

也就是 $sg(x, y) = sg(x) \oplus sg(y)$

唯一不同的地方在于：石子到 0 不能再动，而 $sg$ 函数到 0 可以再动。但是如果某个状态 $sg = 0$，它只能转移到 $sg > 0$ 的地方，而对方再转移到 0 就行了，所以相当于没动，这样就完全等价了。

但是！这样的话 anti 游戏（最后一步输）就无法使用 $sg(x)$ 函数进行合并了，因为 $sg = 1$ 并不能对应 anti – Nim 游戏中 $a_i = 1$，而 anti – Nim 里 $a_i = 1$ 是个关键条件。

有做法，详见 Sprague Grundy——Jia Zhihao 定理，不会考。没错 Jia Zhihao 是中国人，他还是石家庄二中人，他的指导教师是李晶老师。他的集训队论文

# EVERY 游戏

我跟你开好几盘，每个回合每盘能动的游戏都得动。最后不能操作者输。

这个其实有点偏离主线...

如果一个游戏必胜，那我肯定要延长它的时间。

如果一个游戏必败，那我肯定要缩短它的时间。

所以每个状态记下步数，必胜态取 $max$ ，必败态取 $min$ 。如果最长的必胜局比最短的必败局还短，那就输了。否则赢了。

有点 min – max 对抗搜索的意思

# 阶梯 NIM 游戏

往每个台阶上放 $a_i$ 个石子，每次把一堆里的任意多个，往下移一个台阶。无法动者输。

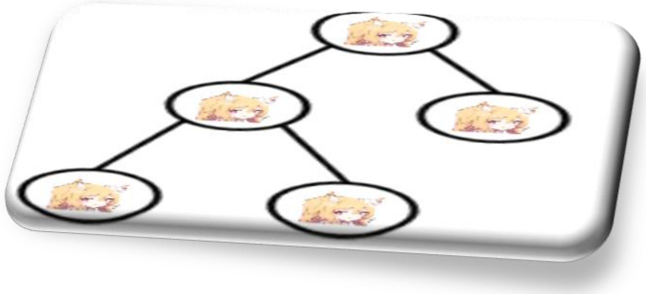
结论是：$sg =$ 奇数号台阶石子的异或和，也就是说偶数号台阶没用。

# 阶梯 NIM 游戏

必胜方移动时：移动奇数号台阶。如果对方移动奇数号，那就继续；如果对方移动偶数号，那就把他移的照搬。必胜方不会主动移动偶数号。

按照这种策略，一定必胜。

# 树上 NIM 游戏



往每个结点上放 $a_i$ 个石子，每次把一堆里的任意多个，移到他的父亲上。无法动者输。

跟阶梯 Nim 是一样的，$sg =$ 奇数深度结点石子的异或和

# 数学带师玩石子

一堆石子，每次取 $p^k$ 个石子（$k \geq 0$），无法操作输。

# 数学带师玩石子

6 的倍数是必败态，否则是必胜态。

因为 1~5 都是 $p^k$ ，所以必胜态一定可转移到必败态，而必败态只能转移到必胜态。

容易数归证明。

# 【LUOGU P4101】人人尽说江南好

一开始有 $n$ 堆，每堆一个石子，每次将两堆合并成一堆，需要保证合并完的石子数 $\leq m$ ，无法操作者输。

给定 $n, m$ ，问谁必胜。

$n, m \leq 10^9, T \leq 100$

# 【LUOGU P4101】人人尽说江南好

如果总步数为奇数，那么先手胜，总步数为偶数则后手胜。

如果 $n \le m$ ，那么显然总步数固定（$n-1$）。

如果 $n > m$ ，那么总步数为 $n -$ 堆数。

这时考虑“极限情况”，很轻易地想到两种：

一种是 $m, m, m, \dots, m, n\%m$

一种是 $\frac{m}{2}, \frac{m}{2}, \frac{m}{2}, \dots, \frac{m}{2}$

但是你会发现第一种对面破坏不了，第二种对面能轻易破坏

所以我们从第一种情况入手

# 【LUOGU P4101】人人尽说江南好

假设 nekko 和 iki9 玩，并且 $m,m,m,\dots,m,n\%m$ 的情况下 nekko 赢。

那么我们证明：不管 iki9 怎么动，nekko 总能控制住局势。

其实很简单，nekko 合并当前最大的 $a+b$ 即可。

注意 iki9 采取一样的策略是没用的，因为最后达到 $m,m,m,\dots,m,n\%m$ 的状态，是 nekko 赢。

# 【LUOGU P3235】江南乐

一开始有 $n$ 堆，每堆 $a_i$ 个石子，每次挑一堆 $\geq F$ 的石子，把它分成数量尽量平均的 任意堆石子。不能操作者输。

比如把 20 个石子分成 7 堆：3,3,3,3,3,3,2

$n \leq 100, a_i, F \leq 10^5, T \leq 100$

对于每组数据，$F$ 相同

# 【LUOGU P3235】江南乐

堆之间独立，用 $sg$ 函数去做。如果先预处理 1~100000 个石子的 $sg$ 函数，那么只需判断 $\bigoplus sg(a_i)$ 是否为 0 。

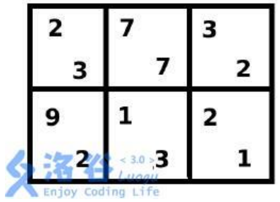
那么比如计算 $sg(x)$ ，首先我们枚举划分的堆数 $m$ ，可以得到 $\left\lfloor\frac{x}{m}\right\rfloor, \left\lfloor\frac{x}{m}\right\rfloor+1$ 的两种石子堆。其中 $\left\lfloor\frac{x}{m}\right\rfloor$ 的有 $x-x\%m$ 堆， $\left\lfloor\frac{x}{m}\right\rfloor+1$ 的有 $x\%m$ 堆。

并且只有堆数为奇数时才会有贡献，因为是 $sg\left(\left\lfloor\frac{x}{m}\right\rfloor\right)$、$sg\left(\left\lfloor\frac{x}{m}\right\rfloor+1\right)$ 的异或来贡献给 $sg(x)$ 。

整除分块！只需要判断一段 $m$ 中是否有 $x\%m$ 为奇/偶数就行（$x\%m$ 的奇偶性确定后，$x-x\%m$ 的奇偶性也确定了）

# 【LUOGU P4363】一双木棋

给一个 $n \times m$ 的网格，每个格子有两个数字。




两个人轮流选格子，要求这个格子的左面和下面都被选了。

第一个人得分为自己选的格子的左上角之和。

第二个人得分为自己选的格子的右下角之和。

两个人都想最大化：自己的得分 − 对面的得分，问最后结果如何。

$n, m \leq 10$

~~好像凭这个二杯题苟进队了？~~

# 【LUOGU P4363】一双木棋

跟 $sg$ 函数啥的没关系，直接 DP 即可，这就是 min – max 对抗搜索。

状态量不到 200000，可以先搜一下看看有多大。

# 二分图上博弈

给定一个二分图，两个人分别控制一个小车在点上走，不能重复到一个点上，不能走的人输。

首先求出最大匹配，找到哪些点可能在最大匹配上（匹配点），哪些点一定不在最大匹配上（非匹配点）。

如果一个人要从匹配点开始走，那他必胜，因为每次走一个匹配边即可。注意对面不可能再走到一个非匹配点，因为调换这两条边又是一个最大匹配。

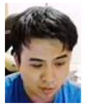
如果一个人要从非匹配点开始走，那他必败，因为非匹配点只能走到匹配点，这样对面就必胜了。

怎么找匹配点/非匹配点可以见 【**AHOI 2009**】最小割

# 【LUOGU P1971】兔兔与蛋蛋游戏

给一个 $n \times m$ 的网格，有一个空格，其它格子都有一个黑/白棋子。

每次兔兔移动一个白色棋子进空格，蛋蛋移动一个黑色棋子进空格。无法操作者输。

现在来复盘一局，看看兔兔他有多蠢。你需要指出兔兔有哪些不想赢的步数，即走之前他必胜，走之后他必败。

$n, m \le 40$，游戏步数 $k \le 1000$

# 【LUOGU P1971】兔兔与蛋蛋游戏

首先一个格子不能被经过两次。如果形成一个环的话，环上的步数为偶数（向左 = 向右，向上 = 向下），到访这个点两次就都是兔兔了，但是颜色改变了。（可以手玩一下小环）

那么就不用考虑进行一步对棋盘的改变，因为改变只能改变过去的路，未来的路一定不会变。

那么把一开始的棋盘按照棋子颜色建二分图，相邻的黑白点连边，求出每个状态的胜负态即可。

# 【UOJ 266】ALICE 和 BOB 又在做游戏

给定一片森林，每次删掉一个点到根的路径，不能操作者输。

$n \leq 10^5$

# 【UOJ 266】ALICE 和 BOB 又在做游戏

求出每棵树的 $sg$ 函数。

每次删点会裂出来一堆子树，考虑计算每个子树的 $sg$ 函数。

现在来求某个子树的 $sg$ 函数，发现不好从它的儿子合并上来。

那不如维护每个子树的转移集合，这个集合的 $mex$ 就是它的 $sg$ 函数。

需要支持的操作：集合异或一个数，集合合并，集合插入一个数（删根），查询 $mex$。

那就用 01 - trie 即可。