# 诚信应考，考试作弊将带来严重后果！

**华南理工大学本科生期末考试**

座位号

# 2019-2020-1 学期《线性代数与解析几何》A 卷参考答案

**注意事项：1. 开考前请将密封线内各项信息填写清楚；**

**2. 所有答案请直接答在试卷上；**

**3．考试形式：闭卷；**

**4. 本试卷共 八大题，满分 100 分， 考试时间 120 分钟**。

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **题 号** | **一** | **二** | **三** | **四** | **五** | **六** | **七** | **八** | **总分** |
| **得 分** |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

专业班级

### 

**得分一**

**一、填空题：共 6 题，每题 3 分，共 18 分。**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 2 | 1 | 4 | 1 |
| 3 | 1 | 2 | 2 |
| 1 | 3 | 1 | 4 |

1. 设行列式 *D* 

学院

( 密 封 线 内 不 答 题 )

， *D*的第*i*行第j列元素的代数余子式为*Aij* .

则 3*A*14+*A*24+6*A*34+2*A*44 = 20

2. 设 *A* 

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 6 | 2 0 ，则   | *A* | *A*1 18 | 3 0  |
| 12 | 6 3  |  | 12 | 6 2    |

1 0 0 

6 0 0 

  

|  |
| --- |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |

  

3. 已知向量组**1  1, 2, 1，**2  1, 1, 2，**3  1, 5, 4 ,向量组的秩是 2 .

4. 在空间直角坐标系中，*yoz* 面上的曲线 *y*2 4*z* 绕 *z* 坐标轴旋转形成的旋转面的

方程是 *x*2 *y*2 4*z*

5. 二次型 *f* *x* , *x* , *x* *x*2 *x*2 *x*2 2*x x*

学号

* 4*x x*

的秩、正惯性指数、负惯性指数

1 2 3 1 2 3 1 2 1 3

… … … … … … … … … … … … … … … … … 密 … … … … … … … … … … … … … … … … … … 封 … … … … … … … … … … … … … … … 线 … … … … … … … … … … … … … …

依次是 3, 1, 2

6. 设 4 阶方阵 A 满足条件 5*E* *A* 0 ，*A**AT* 2*E* ， *A* 0 ，其中 *E* 是 4 阶单位矩阵.

则 *A* 的伴随矩阵 *A*\* 的一个特征值是 4 .

5

### 

姓名

### 二、选择题：共 6 题，每题 3 分，共 18 分。

**得分二**

1. 设 *A*，B 都是 n 阶对称矩阵，则下面结论中不正确的是( D ).

A. *A*+*B* 也是对称矩阵 B. *Am* *Bm*

其中*m*是正整数也是对称矩阵

C. *BAT* *ABT* 也是对称矩阵 D. *AB* 也是对称矩阵

2. 行列式 *D*  的值是( B )

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 4 | 8 |
| 1 | 5 | 25 | 125 |
| 1 | 3 | 9 | 27 |

A. 34992 B. 2688 C. -34992 D. 81

3. 设*A*是*m* *n*矩阵， *B*是*n* *m*矩阵，则A 

A. 当*m* *n* 时，必有行列式 *AB* 0 B. 当*m* *n* 时，必有行列式 *AB* 0

C. 当*m* *n* 时，必有行列式 *AB* 0 D. 当*m* *n* 时，必有行列式 *AB* 0 4. *n* 阶矩阵*A* 与对角矩阵相似的充分必要条件是( B )

A. *A*是对称矩阵 B. *A* 有 n 个线性无关的特征向量

C. *A* 有 n 个互不相等的特征值 D. *A* 有 n 个互不相等的特征向量 5. 设向量组: **1 ,**2 ,,*s* 可由向量组: **1 ,**2 ,, *t* 线性表示。

则下列命题正确的是A 

A. 若 s>t, 则向量组 **I** 一定线性相关

B. 若 s t,则向量组 **I** 一定线性无关

C. 若 s>t, 则向量组 II 一定线性相关

D. 若 s t,则向量组 II 一定线性无关

6. 设*A*是*n* 阶矩阵 则下列结论中错误的是( C )

A. 若*A*可逆，则*A* 的全部特征值都不等于0

B. 若*A*存在对应特征值**的*n* 个线性无关的特征向量，则*A* *E*

C. 若**0是*A* 的特征值, 方程**0 *E*  *A* *X*  0 的全部解就是对应**0 的全部特征向量

D. *A* 与*AT* 有相同的特征值

**三、（8 分）**计算 n 阶行列式 *D*.

**得分三**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 4 | 3 | 3 |  | 3 | 3 |
| 3 | 5 | 3 |  | 3 | 3 |
| 3 | 3 | 6 |  | 3 | 3 |
|  |  |  |  |  |  |
| 3 | 3 | 3 |  | *n* 2 | 3 |
| 3 | 3 | 3 |  | 3 | *n* 3 |

*D* 

*r* 2*r*1

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 4 | 3 | 3 |  | 3 | 3 |  |
| 1  1    1  1 | 2  0    0  0 | 0  3    0  0 |        | 0  0   *n*  0 | 0  0    1 0  *n* |  |

*r* 3*r*1



*rn* *r*1

*D* 

（+3分）

（+4分）

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *c*11 *c* 2  2  *c*11 *c*3  3   | *n* 3  4 *i* 3 3  3 3  *i*2 | | | | | | |
| *c*11 *c*  *n n* | 0 | 2 | 0 |  |  | 0 | 0 |
|  | 0 | 0 | 3 |  |  | 0 | 0 |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  | 0 | 0 | 0 |  |  | *n*  | 1 0 |
|  | 0 | 0 | 0 |  |  | 0 | *n* |
|  | *n* |  |  | *n* |  |  |  |
| 4 | 3 | 1 *n*! | = 1 | 3 | | 1  | *n*! |

   

（+1分）

 *i*2 *i*   *i*1 *i* 

### 四、（共 2 小题，每小题 5 分，共 10 分）

**得分四**

3*x* 2 *y* *z* 1 0

(1) 已知直线 *l*1 经过点 P(1,2,3)且与直线 *l*2 ： 2*x* *y* 4*z* 2 0



平行. 求直线 *l*1 的对称式方程。

(2) 求平行于平面 2*x* 2*y* *z* 3 0 且与其距离为 3 的平面方程。

  

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
| *i* | *j* | *k* |
| 3 2 1  2 1 4 | | |

(1) *l*2方向向量=

7*i* 14 *j* 7*k*

(+3分)

   

*l*1方向向量*s* *i* 2 *j* *k*

*l* 的对称式方程：

*x* 1 *y* 2 *z* 3 (+2分)

1 1 2 1

(2) 设所求平面方程： 2*x* 2 *y* *z* *D* 0

点*P*(0, 0, *D*)是平面上的点.

点*P* 到平面 2*x* 2 *y* *z* *D* 0 的距离  3

2 0 2 0 1*D* 3

22 (-2)2 (1)2

*D* 3 9,

得 *D* 12

或 *D* 6

所求平面方程：

2*x* 2 *y* *z* 12 0 或

2*x* 2 *y* *z* 6 0

**五、（15 分）***a*，*b* 为何值时，线性方程组

**得分五**

*x*1



* *x*2
* *x*3

*x*4 *x*5  *a*





3*x*1 2*x*2 *x*3 

*x*4 3*x*5  0

 *x*2 2*x*3 2*x*4 6*x*5  3

5*x*1  4*x*2  3*x*3  3*x*4  *bx*5  2

有解？何时无解？有解时求出解。

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 1 1 1 1 *a*  1 1 1 1 1 | | | | | | | | | | |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 3 | 2 | 1 | 1 | 3 | 0  | 0   | 1 | 2 | 2 | 6 |
| 0 | 1 | 2 | 2 | 6 | 3  | 0 | 1 | 2 | 2 | 6 |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  | 4 | 3 | 3 | *b* |  |  | 1 | 2 | 2 | 5  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

*A*    

*a* 

3*a* 



3 



5 2  0

*b* 2 5*a* 

1 *a*  1 1 1 1 1 *a* 

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 2 | 2 | 6 |
| 0 | 0 | 0 | 1*b* |

0 3 3*a*  0 1 2 2 6 3 

    

（+4分）

0 3  0 0 0 0 1*b* 0 

0 5 5*a*  0 0 0 0 0 1*a* 

   

（1）当*a*  1时，*r*  *A*  *r*( *A* ),

方程组无解 （+3分）

当*a*  1, *b*  1时，*r*  *A*  *r*( *A* )  2,

 

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 1 | | 1 | 1 | 1 1  | |
|  |  |  |  |  |  |
| 0  *A*   | 1 | 2 | 2 | 6 | 3 *x* *x* *x* *x* *x* 1 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0  *x* 2*x* 2*x* 6*x* 3 |
|  |  |  |  |  |  |
|  | 0 | 0 | 0 | 0 |  |

方程组有无穷多解

*x*1 *k*1 *k*2 5*k*3 2

    

1 2 3 4 5

*x*2

 *x*

2*k*1

*k*

2*k*2

6*k*3 3

 

2 3 4 5

3 1

*x* *k*

0 0 

4 2

*x*1 

1  1

 5

 2

 *x*5  *k*3

         

*x*2  2  2  6  3 

通解： *x*3   *k*1 1

*k*2 0

*k*3 0

0 

其中，*k*1 , *k*2是任意常数 （+4分）

         

*x*4 

 

*x*

5

0  1

0  0

 0

 1

 0 

 0 

         

当*a*  1, *b*  1时，*r*  *A*  *r*( *A* )  3,

 

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | 2 | 2 | 6 | 3  |
| 0 | 0 | 0 | 1- *b* |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
| 0 | 0 | 0 | 0 |  |

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1  |
|  |  |  |  |  |  |

方程组有无穷多解

*x*1 *x*2 *x*3 *x*4 *x*5 1

*x*1 *k*1 *k*2 2

*x* 2*k* 2*k* 3

2 1 2

*A*   0

*x* 2*x*

* 2*x*

6*x* 3

*x* *k*

0 0 

2 3 4 5

3 1

 

  1*b**x*5 0 *x*4 *k*2

0

*x*1 

1  1

0 

2 

 *x*5  0

      

*x*2  2  2 3 

通解： *x*3   *k*1 1

*k*2 0

0 

其中，*k*1 , *k*2是任意常数 （+4分）

      

*x*4  0

 1

0 

  

*x*

0

5

 0

0 

      

**六、（10 分）**设 *R*3中, 由第一组基** = 7, 2, 5T ,**

= 19, 5,14*T* ,**

= 6, 3, 3*T*

1 2 3

1 2 6 

**得分六**

到第二组基**, **, **的过渡矩阵是0 1 2 .

1 2 3  

1 -1 1 

 

(1) 求第二组基**1, **2 , **3

(2) 若向量**在第二组基下的坐标是(-1,-1,1),求**在第一组基下的坐标.

解：(1)

1 2 6 7

19

6 1 2 6 1 1

2 

    

 **1 , **2 , **3  = **1,**2 ,**3   0 1 2 =  2 5 3  0 1 2    1

2 1 

1 -1 1 5 14 3 1 -1 1 2 1 1 

    

1  1  2 

+6 分

+6 分

+6 分

+6 分

    

**1 1 ,

**2 2 ,

**3 1 

    

-2 1 1

    

*x*1 1 2 6 -13 (2) **在基**,**,**下的坐标*x* 0 1 2 -1= 1

1 2 3 2  

 

*x* 1 -1 1 1 1

3  

+4 分

1 2 2 

**得分七**

**七、（15 分）**已知矩阵 *A*   2 1 2  .

 

2 2 1

 

(1) 求出 *A* 的所有特征值。

(2) 求正交矩阵 *T*，使得 *T* 1 *AT* 为对角矩阵，并写出该对角矩阵。 解（1）

**1 2 2

*E* *A* 2

**1 2

 ** 12 **  5

2 2 **1

*A* 的全部特征值： **1 =**2 =1， **3 =-5

(2)

对于**=1，解方程组 (*E* *A*) *X* 0

（+5分）

2 2

2  1

1 1

*E*  *A*   2 2 2    0 0 0 

   

2 2 2  0 0 0 

   

1  1 

## 得到对应**=1的特征向量：**= 1 ，**= 0 

1  2 

 

0 1

 

## （+3分）

对于**-5，解方程组 (-5*E* *A*) *X* 0

-4 2 2  1 0 1 

-5*E*  *A*   2 -4 2    0 1 -1

   

2 2 -4  0 0 0 

   

-1

得到对应**-5的特征向量：**= 1 

3  

 

1

 

（+2分）

正交化：

1  1  1 

1 

 **,**

 1 

2 

**=**= 1 ,

**=**

 1 2 **

0 

1 1 

1 1 2 2



**, ** 1

 2  2 

0 

1 1 1  0 

1 

单位化：

1 



2 

1  1 



 6   3 



**3

6 

**= 1

**1

**= 

1 ，

**= 1

**= 

1 ，

**= 1

**= 1 

1 1 2 2



**2

2



 



3 3  3 

 

0 

  

2  1 

6   3 



1 1



1  1 0 0 

2 6 3   



得正交矩阵 : *T* 1

1 1 ,

*T* 1 *AT* 

0 1 0 (+5分)

2 6 3   



0 2 1 

0 0

5

 6 3   



**八、（6 分）**设 n 阶实对称矩阵 *A* 满足 *A*3  4*A*2  5*A*  2*E*  0 ，

**得分八**

其中 *E* 是单位矩阵。求证矩阵 *A* 是正定阵。

证明

设**是*A* 的任一特征值.

而*A*3 4 *A*2 5*A* 2*E* 的特征值是 **3 4**2 5**2

由于*A*3 4 *A*2 5*A* 2*E* 0, 则 **3 4**2 5**2 0

** 12 **  2  0,

**1 或

**2

*A* 的任何特征值只能为1 或2, 所以*A* 的全体特征值都大于0,

由于*A* 是实对称矩阵, 因此*A* 是正定矩阵.