オペレーションズ・リサーチ

Operations Research: Models, Algorithms, and Implementations

劉子昂

2025-09-20

目次

Preface

OR の基礎と応用を学ぶための教科書です.

講義

本授業では、オペレーションズ・リサーチ(OR)の中の代表的な手法であるPERT、在庫理論、待ち行列理論、動的計画法、階層分析法、及び包絡分析法の数理を理解し、具体的な問題への応用を学ぶ。

講義情報

- 講義名：オペレーションズ・リサーチ B
- 曜日：水曜日
- 時限：2 時限目(10:50〜12:30)
- 教室：西館 W202
- 担当教員：劉 子昂

到達目標

各分野について、下記の事項を目標して講義を行う。

- **PERT** の計算と解析方法を理解し、プロジェクトの評価を行うことができる。
- **在庫モデル**を理解し、自分で式を構築及び解析することができる。
- **待ち行列理論**の重要な式や定理を理論的に導出し、それらを適切に解釈することができる。
- **動的計画法**の基本的な考え方を理解し、簡単な問題への適用ができる。
- **階層分析法**による意思決定の手法を理解し、一対比較行列からウェイトと整合性を計算することができる。
- **包絡分析法**における CCR モデルを理解し、得られた結果を解釈することができる。

さらに、これらの手法を用いて比較的簡単な現象をモデル化し、解析することができる。

OR は重要

経営工学において、最も重要な学問分野の一つ。

日本経営工学会によると、「解決すべき課題の数理モデルを構築し、最適な手法を求めるオペレーションズ・リサーチ（OR）という分野は、経営工学の主要なテーマとなっています」。

海外では、管理科学（Management Science）と OR は同義語として使われることもよくある。

OR の全体像

- 線形計画法
- 整数計画法
- 非線形計画法
- **動的計画法**
- グラフ理論・ネットワーク
- シミュレーション
- **在庫モデル**
- **待ち行列**
- **多基準意思決定分析**
- **プロジェクトマネジメント**
- …

OR は難しい？

基礎知識が必要

微分積分、線形代数、確率、統計の基礎知識が必要です。これらの基礎が不十分な場合、授業についていけないです。基礎知識が不十分な場合、必ず復習してください。

この講義では、以下の工夫をしています。

- 付録に私が書いた基礎知識のまとめがあります。随時更新しますので、参考にしてください。
- 講義資料には例題、図、演習問題を多く用意しています。
- プログラミングの実装例も示します。

数式が多い

OR は、問題を数理的にモデル化し、解析する学問です。数式をたくさん使い、証明も多いです。数式を読むのが苦手な人は、慣れるまで大変かもしれません。

この講義では、以下の工夫をしています。

- 証明は省略なく丁寧に行います。
- 私が推測したわかりにくいところをコラムで補足します。

何を学ぶ？

- モデル：現実の問題を数理的に表現したもの
- 解：問題の答え
- 最適化：最適解を見つけること
- アルゴリズム：問題を解く手順

授業時間外の学習

本授業の準備・復習等の授業時間外学習は、4 時間を標準とする

必要なもの

- 本講義では, 受講者自身のノート PC を用いて演習を行います. 毎週必ずノート PC を持参してください.

私語

- 講義中の私語は厳禁です.
- 注意してもやめない場合は、減点を行います。

成績評価

- 期末試験（100%）
- 一回の欠席につき、10 点減点。4 回以上の欠席は単位取得不可。

付録 A　微分積分学

A.1　1 変数関数の極値

関数 $f(x)$ が点 $x = a$ で極値をとるとき、$f'(a) = 0$ が成り立つ。

$f''(a) > 0$ のとき、$f(a)$ は極小値をとる。

$f''(a) < 0$ のとき、$f(a)$ は極大値をとる。

A.2　凸関数の性質

1 変数 2 階微分可能な関数 $f(x)$ が凸関数であることの必要十分条件は、$f''(x) \geq 0$ が成り立つことである。

$f''(x) > 0$ のとき、$f(x)$ は狭義凸関数である。

凸関数 $f(x)$ の極小値は、最小値である。

付録B　確率

離散型確率変数 X が特定の値 x をとる確率を

$$P(X = x) = p_X(x)$$

と表すとき、$p_X(x)$ を X の**確率質量関数** (PMF) という。

連続型確率変数 X がある区間 $[a, b]$ にある値をとる確率を

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x)dx$$

と表す。$f_X(x)$ を X の**確率密度関数** (PDF) という。

確率変数 X の**累計分布関数**（CDF）は

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} \sum_{k \leq x} p_X(k) & \text{if } X \text{ is discrete} \\ \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt & \text{if } X \text{ is continuous} \end{cases}$$

と表す。確率密度関数 $f_X(x)$ は累計分布関数 $F_X(x)$ の微分である。

$$f_X(x) = \frac{d}{dx}F_X(x)$$

B.1　正規分布

連続型確率変数 X は**正規分布**（normal distribution）に従うとき、$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ と表す。ここで μ は平均、σ^2 は分散である。X の確率密度関数は

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

と表す。平均は $E[X] = \mu$、分散は $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$ である。

X が $N(\mu, \sigma^2)$ に従うとき、$Y = aX + b$ は、$N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$ に従う。特に、$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ は標準正規分布（standard normal distribution）に従う。すなわち、$Z \sim N(0, 1)$ である。

連続型確率変数 Y が標準正規分布に従うとき、Y の累計分布関数は

$$\Phi(y) = P(Y \leq y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

と表す。**標準正規分布表**から、y の値に対する $\Phi(y)$ を調べることができる。

Python では､以下のように $\Phi(y)$ を計算できる。

```
from scipy.stats import norm
def phi(y):
    return norm.cdf(y)

phi(0)  # 0.5
```

また、$\Phi(y) = 0.95$ のときの y の値を求めるには､以下のようにする。

```
from scipy.stats import norm
def phi_inverse(p):
    return norm.ppf(p)

phi_inverse(0.95)  # 約 1.64485
```

与えられた $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ の累計分布関数 $F_X(x)$ の値を求めるには､以下のように変換する。

$$\begin{aligned} P(X \leq x) &= P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right) && \text{(B.1)} \\ & && \text{(B.2)} \\ &= P\left(Y \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right) && \text{(B.3)} \\ & && \text{(B.4)} \\ &= \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) && \text{(B.5)} \end{aligned}$$

正規分布は**再生性**（reproductive property）を持つ。すなわち、$X_1, X_2, \dots, X_n$ が独立に $N(\mu_i, \sigma_i^2)$ に従うとき､$Y = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i$ は $N\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i, \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma_i^2\right)$ に従う。