

オペレーションズ・リサーチ

Operations Research: Models, Algorithms, and Implementations

劉子昂

2025-09-20

目次

Preface	5
講義	7
講義情報	7
到達目標	7
OR は重要	8
OR の全体像	8
OR は難しい?	8
基礎知識が必要	8
数式が多い	9
何を学ぶ?	9
授業時間外の学習	9
必要なもの	9
私語	9
成績評価	9
 第 I 部 在庫モデル	 11
第 1 章 在庫管理とは	13
1.1 在庫モデルの分類	14
1.2 在庫の費用	14

Preface

OR の基礎と応用を学ぶための教科書です.

講義

本授業では、オペレーションズ・リサーチ(OR)の中の代表的な手法であるPERT、在庫理論、待ち行列理論、動的計画法、階層分析法、及び包絡分析法の数理を理解し、具体的な問題への応用を学ぶ。

講義情報

- ・ 講義名：オペレーションズ・リサーチ B
- ・ 曜日：水曜日
- ・ 時限：2 時限目(10:50～12:30)
- ・ 教室：西館 W202
- ・ 担当教員：劉 子昂

到達目標

各分野について、下記の事項を目標として講義を行う。

- ・ **PERT** の計算と解析方法を理解し、プロジェクトの評価を行うことができる。
- ・ **在庫モデル**を理解し、自分で式を構築及び解析することができる。
- ・ **待ち行列理論**の重要な式や定理を理論的に導出し、それらを適切に解釈することができる。
- ・ **動的計画法**の基本的な考え方を理解し、簡単な問題への適用ができる。
- ・ **階層分析法**による意思決定の手法を理解し、一対比較行列からウェイトと整合性を計算することができる。
- ・ **包絡分析法**における CCR モデルを理解し、得られた結果を解釈することができる。

さらに、これらの手法を用いて比較的簡単な現象をモデル化し、解析することができる。

OR は重要

経営工学において、最も重要な学問分野の一つ。

日本経営工学会によると、「解決すべき課題の数理モデルを構築し、最適な手法を求めるオペレーションズ・リサーチ(OR)という分野は、経営工学の主要なテーマとなっています」。

海外では、管理科学(Management Science)と OR は同義語として使われることもよくある。

OR の全体像

- 線形計画法
- 整数計画法
- 非線形計画法
- 動的計画法
- グラフ理論・ネットワーク
- シミュレーション
- 在庫モデル
- 待ち行列
- 多基準意思決定分析
- プロジェクトマネジメント
- ...

OR は難しい？

基礎知識が必要

微分積分、線形代数、確率、統計の基礎知識が必要です。これらの基礎が不十分な場合、授業についていけないです。基礎知識が不十分な場合、必ず復習してください。

この講義では、以下の工夫をしています。

- 付録に私が書いた基礎知識のまとめがあります。随時更新しますので、参考にしてください。
- 講義資料には例題、図、演習問題を多く用意しています。
- プログラミングの実装例も示します。

数式が多い

OR は、問題を数理的にモデル化し、解析する学問です。数式をたくさん使い、証明も多いです。数式を読むのが苦手な人は、慣れるまで大変かもしれません。

この講義では、以下の工夫をしています。

- 証明は省略なく丁寧に行います。
- 私が推測したわかりにくいところをコラムで補足します。

何を学ぶ？

- モデル：現実の問題を数理的に表現したもの
- 解：問題の答え
- 最適化：最適解を見つけること
- アルゴリズム：問題を解く手順

授業時間外の学習

本授業の準備・復習等の授業時間外学習は、4 時間を標準とする

必要なもの

- 本講義では、受講者自身のノート PC を用いて演習を行います。毎週必ずノート PC を持参してください。

私語

- 講義中の私語は厳禁です。
- 注意してもやめない場合は、減点を行います。

成績評価

- 期末試験(100%)
- 一回の欠席につき、10 点減点。4 回以上の欠席は単位取得不可。

第I部

在庫モデル

第1章 在庫管理とは

商店・工場・倉庫などで、原材料・部品・製品などを適切に管理することを**在庫管理** (Inventory Management) という。一般的に、在庫管理の目的は、顧客の需要を満たしつつ、在庫に関わる費用を最小化することである。

i ノート

豊田自動車が提唱した**ジャストインタイム** (Just In Time, JIT) は、生産方式としてよく知られている¹。

JIT とは必要なものを、必要な時に、必要な量だけ生産することである。JIT の目的は、在庫を最小限に抑え、効率的な生産を実現することである。

アメリカの研究者らは、その生産方式を体系化し、**リーン生産方式** (Lean Manufacturing) という概念を提唱した。

在庫が多すぎると、保管費用がかかる。逆に、在庫が少なすぎると、欠品が発生し、顧客の需要を満たせなくなる。在庫管理は次の二つの問題を決定する。

1. どのくらいの量を発注するか？ (発注量)
2. いつ発注するか？ (発注時期)

科学的在庫管理 (Scientific Inventory Management) では、これらの問題に答えるために、次の手順で在庫管理を行う。

1. 在庫システムを数学モデルとして定式化する。
2. 最適な発注量と発注時期を決定する。

練習 1.1. 前回スーパーに行ったときに買った商品(例えば、牛乳、卵など)について考える。需要と在庫の観点から、次の質問に答えよ。

1. どのくらいの量を買ったか？
2. なぜその量を買ったのか？
3. どのタイミング・頻度でその商品を買うか？

¹ トヨタ生産方式について [こちら](#) も参照。

1.1 在庫モデルの分類

在庫モデルは、次のような要素で分類される。

需要(demand) 需要が決定論的 (Deterministic) か確率的(Stochastic)か。

観測(review) 在庫量を連続観測 (Continuous Review) するか、周期観測 (Periodic Review) するか。連続観測の場合、在庫量が連続的に観測でき、いつでも発注が可能である。周期観測の場合、一定の期間(例えば 1 週間)ごとに在庫量を観測する。

リードタイム(lead time) 発注から納品までの期間。調達期間とも呼ばれる。リードタイムが決定論的か確率的か。また、リードタイムが 0 かどうか。在庫モデルを単純化するために、リードタイムを 0 とし、発注から納品までの期間を無視することもある。

バックオーダー(backorder) バックオーダーが許容されるかどうか。需要が在庫を上回った場合、バックオーダーが許容されると、欠品が発生しても、後で需要を満たすことができる。バックオーダーが許容されない場合、欠品が発生すると、上回った需要は失われ、機会損失が発生する。

計画期間(planning horizon) 単一期間 (Single Period) か、複数期間 (Multi Period) か、無限 (Infinite) か。

以下の表に、需要と観測に基づく、古典的な在庫モデルを示す。

在庫モデル	需要	観測
EOQ モデル	決定論的	連続観測
Wagner-Whitin	決定論的	周期観測
安全在庫	確率的	連続観測
新聞売り子問題	確率的	周期観測

1.2 在庫の費用

ここでは、在庫に関わる費用を紹介する。

発注費用(ordering cost) 発注量に関わらず、1 回の発注にかかる費用。調達費用、固定費用(fixed cost)などとも呼ばれる。通常、1 回の発注にかかる費用を K とする。

購入費用(purchase cost) 商品を購入するためにかかる費用。通常、単位あたりの購入費用を c とする。

欠品費用(stockout cost) 需要が在庫を上回った場合に発生する費用。通常、単位あたりの欠品費用を p とする。

保管費用(holding cost) 在庫を保管するためにかかる倉庫費用、保険費用、税金、機会費用など。通常、単位時間あたりの1単位あたりの保管費用を h とする。

例 1.1 (在庫が一定の保管費用). 1日あたり1単位の在庫を保管するために、 h の費用がかかるとする。30日間、50単位の在庫を保管するための総保管費用を計算せよ。

保管費用は次のように計算される。

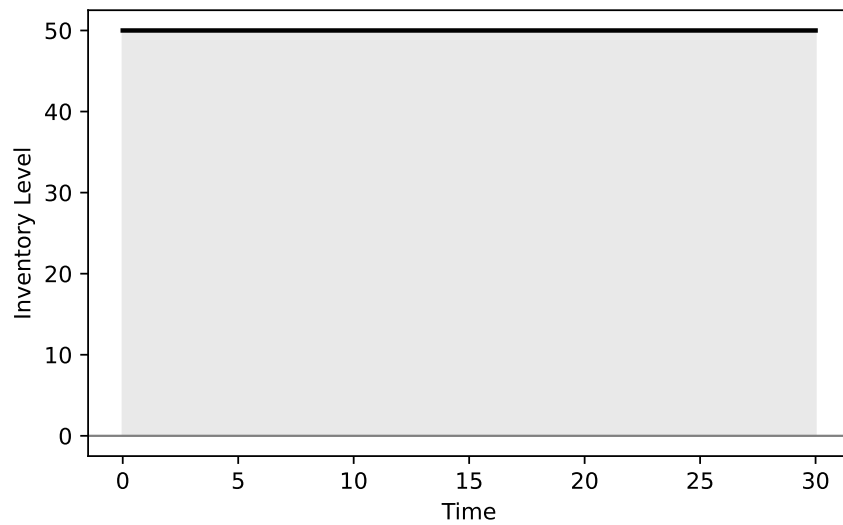
$$30 \times 50 \times h = 1500h$$

下の図では、横軸が時間、縦軸が在庫量を表す。

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

t = np.linspace(0, 30, 1000)
inventory = np.full_like(t, 50)

# Plotting the inventory level
plt.fill_between(t, inventory, color="lightgray", alpha=0.5, label="Inventory Level")
plt.plot(t, inventory, label="Inventory Level", color="black", linewidth=2)
plt.xlabel("Time")
plt.ylabel("Inventory Level")
plt.axhline(0, color="gray", linewidth=1)
plt.tight_layout()
plt.show()
```



一般的に、保管費用は次の式で計算される。

$$\text{保管費用} = \text{面積} \times h$$

例 1.2 (在庫が時間とともに変化する保管費用). 通常、在庫量が定数ではなく、時間とともに変化する。ここでは、在庫量が時間とともに線形に減少し、0になると在庫が補充される場合を考える。毎回の発注量を 500 とする。

下の図に示すように在庫量が時間とともに変化するとする。6 日間の保管費用を計算せよ。

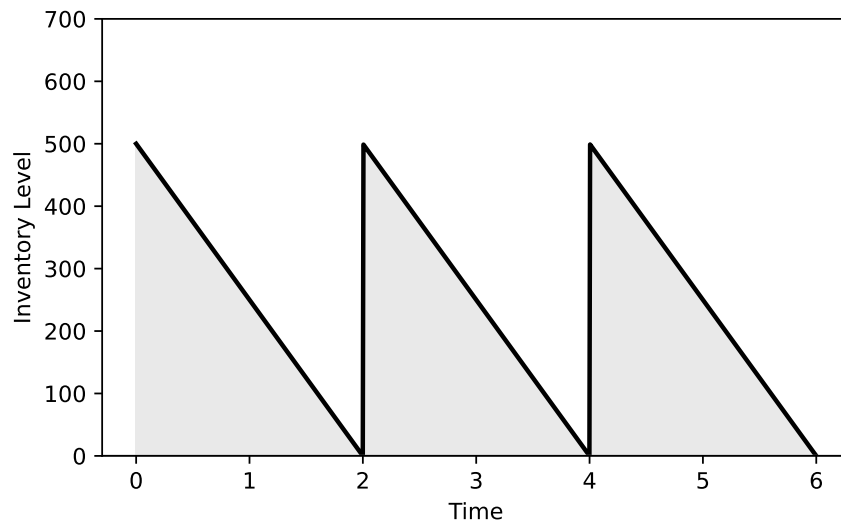
```
# Parameters
d = 250 # Demand rate
Q = 500 # Order quantity
T = Q / d # Cycle length
t = np.linspace(0, 2.999 * T, 1000)

# Inventory level over time
inventory = np.maximum(0, Q - (d * t) % Q)

# Plotting the inventory level
plt.fill_between(t, inventory, color="lightgray", alpha=0.5, label="Inventory Level")
plt.plot(t, inventory, label="Inventory Level", color="black", linewidth=2)
plt.xlabel("Time")
plt.ylabel("Inventory Level")
plt.axhline(0, color="gray", linewidth=1)
```



```
plt.ylim(bottom=0, top=Q + 200)
plt.tight_layout()
plt.show()
```



保管費用は 面積 $\times h$ で計算される。それぞれの三角形の面積は $\frac{1}{2} \times 500 \times 2$ であるため、6 日間の保管費用は次のように計算される。

$$\frac{2 \times 500}{2} \times 3 \times h$$