Курс общей физики. Механика

Лектор: Кудлис Андрей

Набор текста: Артем Бердичевский, София Горбунова, Данил Иванов, Антон Муртазин, Матвей Осипцов
Иллюстрации: София Горбунова
Рецензирование: Артем Бердичевский, Сергей Ермаков
Юпитер-версия: Муравьев Ярослав, Александра Железнова

Версия: 1.008
26.10.2022

Оглавление

Лекция 1.
Математическое введение

1.1 Анализ размерностей

Рассмотрим случай равноускоренного движения. Пусть начальная скорость равна нулю. Какова зависимость скорости от координаты?

Из точного решения мы узнаем:

$$\upsilon = \sqrt{2ax}, \quad \text{где a - ускорение, x - координата.} \tag{1.1}$$

Получим данное соотношение из размерного анализа: Самая простая зависимость:

$$\upsilon^l = a^k \cdot x^m \Rightarrow \upsilon = a^{\frac{k}{l}} \cdot x^{\frac{m}{l}} = a^{k'} \cdot x^{m'} \underset{\text{новые k,m}}{\Rightarrow} \upsilon = a^k \cdot x^m. \tag{1.2}$$

$$[V] = \frac{L}{T},\ [a] = \frac{L}{T^2},\ [x] = \text{L}, \tag{1.3}$$

$$\Rightarrow L \cdot T^{-1} = L^k \cdot T^{-2k} \cdot L^m \Rightarrow \begin{cases} 1 = k + m, \\ -1 = -2k. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = \frac{1}{2}, \\ m = \frac{1}{2}. \end{cases} \Rightarrow \upsilon \approx \sqrt{ax}, \tag{1.4}$$

что достаточно близко к точному ответу $\sqrt{2ax}$. Повторим эти же рассуждения для вывода скорости звука. От чего может зависеть скорость?

$$c = f(\rho, P, T) = g(\rho, P) \tag{1.5}$$

Самая простая форма:

$$c = P^l \cdot \rho^k,\ \ [\rho] = \frac{M}{L^3};\ [P] = \frac{M}{L \cdot T^2}; \tag{1.6}$$

$$\Rightarrow L \cdot T^{-1} = M^l \cdot L^{-l} \cdot T^{-2l} \cdot M^k \cdot L^{-3k} \tag{1.7}$$

$$\text{т.к.}[c] = \frac{M}{C}(\text{СИ}) \quad \text{либо;}\ [c] = \frac{L}{T}; \tag{1.8}$$

$$\Rightarrow M^l \cdot M^k = 1 \Rightarrow l = -k \tag{1.9}$$

$$\Rightarrow L \cdot T^{-1} = L^k \cdot T^{2k} \cdot L^{-3k} = L^{-2k} \cdot T^{2k} \Rightarrow 1 = -2k \Rightarrow k = -\frac{1}{2} \Rightarrow l = \frac{1}{2} \tag{1.10}$$

$$\Rightarrow c = \sqrt{\frac{P}{\rho}}, \text{ точное же решение } c = \sqrt{\gamma \cdot \frac{P}{\rho}}. \text{ Для воздуха: } \sqrt{\gamma} \approx 1.18. \tag{1.11}$$

1.2 Производная

Виды обозначений:

$$\dot{x}(t),\ x'(t),\ x'_t,\ \dot{x},\ \frac{dx}{dt},\ \text{и т.д.} \tag{1.12}$$

Определение. Функция $f(x)$ имеет производную в точке x_0, если существует следующий предел:

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \tag{1.13}$$

Пример:

$$f(x) = x^2,\ \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - {x_0}^2}{\Delta x} = 2x_0 \tag{1.14}$$

Определение. Дифференциал функции f в точке x_0 может быть определен как линейная по аргументу часть приращения функции:

$$df = f'(x_0) \cdot dx \tag{1.15}$$

Пример:

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) = 2x\Delta x + \Delta x^2, \tag{1.16}$$

$$df(x) = 2xdx, \text{ в физике часто заменяют } \Delta x \to dx. \tag{1.17}$$

Необходимо помнить, что само приращение (d) является математической абстракцией (моделью бесконечно малой величины). Пользуйтесь дифференциалами, т.к. с ними можно работать как с дробями.

Рассмотрим несколько свойств:
1) Производная обратной функции:

$$\text{Если } f(x) = x^2,\ x = \sqrt{f},\ f > 0, \tag{1.18}$$

$$\frac{dx}{df} = \frac{1}{\frac{df}{dx}} = \frac{1}{2x} = \frac{1}{2\sqrt{f}} = x'(f). \tag{1.19}$$

2) Производная сложной функции:

$$f'_x(y(x)) = f'_y(y)\Big|_{y=y(x)} \cdot y'_x(x) \tag{1.20}$$

Как это доказать? При помощи дифференциалов это очень просто:

$$\frac{df}{dx}(y(x)) = \frac{df}{dy}\Big|_{y=y(x)} \cdot \frac{dy}{dx}(x) \tag{1.21}$$

Пример:

$$f(x) = \sin^3 x^2, \tag{1.22}$$

$$f'(x) = 6 \cdot \sin^2 x^2 \cdot \sin x^2 \cdot 2x. \tag{1.23}$$

Как получить?

$$W(z(y(x))) = \sin^3 x^2, \tag{1.24}$$

$$W(z) = z^3\ ;\ z(y) = \sin y\ ;\ y(x) = x^2, \tag{1.25}$$

$$\Rightarrow \frac{df}{dx} = \frac{dW}{dx} = \frac{dW}{dz}\Bigg|_{z=z(y(x))} \frac{dz}{dy}\Bigg|_{y=y(x)} \frac{dy}{dx} = 3z^2\Big|_{z=z(y(x))} \cdot \sin y\Big|_{y=y(x)} \cdot 2x =$$
$$= 3\sin^2 y\Big|_{y=y(x)} \cdot \sin x^2 \cdot 2x = 6\sin^2 x^2 \cdot \sin x^2 \cdot x. \tag{1.26}$$

Что ещё?
Полезное свойство:

$$d(f \cdot g) = fdg + gdf. \tag{1.27}$$

1.3 Интеграл

Определение. Неопределённым интегралом функции $f(x)$ (первообразная) называется другая функция $F(x) : F'(x) = f(x)$. Обозначается как:

$$F(x) = \int f(x)dx + const. \tag{1.28}$$

Определение. Определённым интегралом от функции $f(x)$ на промежутке $[a, b]$ $\exists \Leftrightarrow \exists \lim$ следующей суммы: $\lim\limits_{\mu(\Delta x_i)\to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(g_i)\Delta x$. Обозначается как:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\mu(\Delta x_i)\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(g_i)\Delta x_i. \tag{1.29}$$

Геометрический смысл: площадь S фигуры под графиком функции. Если такой предел существует и конечен, то говорят, что функция интегрируема по Риману.

Для расчетов удобно использовать **формулу Ньютона-Лейбница** :

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = \lim_{\Delta x\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \lim_{\Delta x\to 0} \sum_{i=1}^{n} \frac{F(x_i + \Delta x) - F(x_i)}{\Delta x} \cdot \Delta x =$$

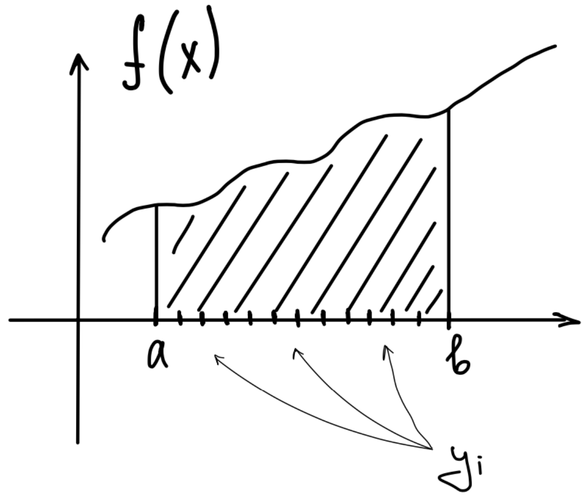


Рис. 1.1: Иллюстрация площади под графиком функции.

Пояснение: сделали всё равномерным.

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} \tag{1.30}$$

$$(\text{т.е. } f(x_i) = \frac{F(x_i+\Delta x) - F(x_i)}{\Delta x}, \text{ при } \Delta x \to 0) \tag{1.31}$$

Конец пояснения.

$$\begin{aligned} &= \lim_{\Delta x \to 0} [(F(a+\Delta x) - F(a)) + (F(a+2\Delta x) - F(a+\Delta x)) + ... + F(b) - F(b-\Delta x)] = \\ &= F(b) - F(a). \blacksquare \end{aligned} \tag{1.32}$$

Необходимо выучить таблицу основных первообразных.

y = f(x)	y = F(x)
0	1
0	C
1	x
x	$\dfrac{x^2}{2}$
$x^n (n \neq -1)$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$
$\dfrac{1}{x^2}$	$-\dfrac{1}{x}$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln \lvert x \rvert$
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$\dfrac{1}{\sin^2 x}$	-ctg x
$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x$
e^x	e^x
a^x	$\dfrac{a^x}{\ln a}$

Приближённые выражения (на основе формулы Тейлора):

$$\sin x \approx x, \quad x \to 0 \tag{1.33}$$

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}, \quad x \to 0 \tag{1.34}$$

$$(1+x)^p = 1 + px, \quad x \to 0 \tag{1.35}$$

$$e^x = 1 + x, \quad x \to 0 \tag{1.36}$$

Общая формула (формула Маклорена):

$$\boxed{\mathrm{f}(x) = \sum_{\mathrm{k}=0}^{\infty} \frac{\mathrm{f}^{(k)}(0)}{\mathrm{k}!} x^k} \tag{1.37}$$

1.4 Векторы

Рассмотрим самые базовые операции над векторами:

$$\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}, \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right) = a_x b_x + a_y b_y = |a||b| \cdot \cos\alpha, \quad \alpha - \text{угол между векторами.} \tag{1.38}$$

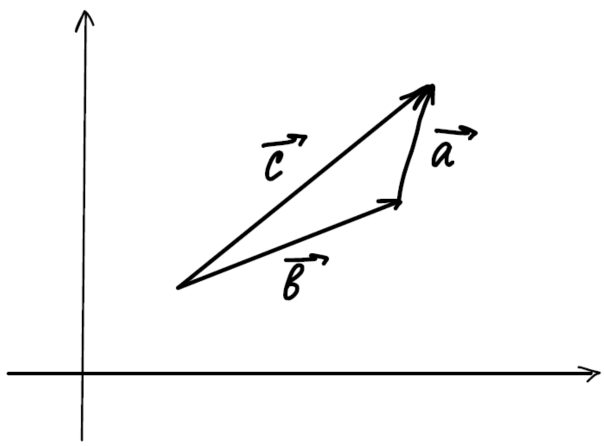


Рис. 1.2: Правило треугольника.

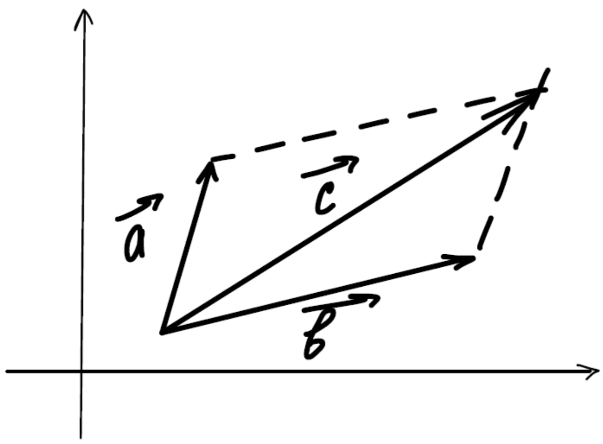


Рис. 1.3: Правило параллелограмма.

1.5 Система координат и система отсчёта

Определение. Система отсчёта – совокупность системы координат, начала отсчёта, привязанного к некоторому физическому объекту, и отсчитывающих время часов.
Определение. Система координат – способ определения положения и перемещения точки (тела) при помощи чисел (символов).

На курсе мы будем использовать три системы координат: *декартову*, *цилиндрическую* (полярную), *сферическую*.

1.5.1 Декартова система координат

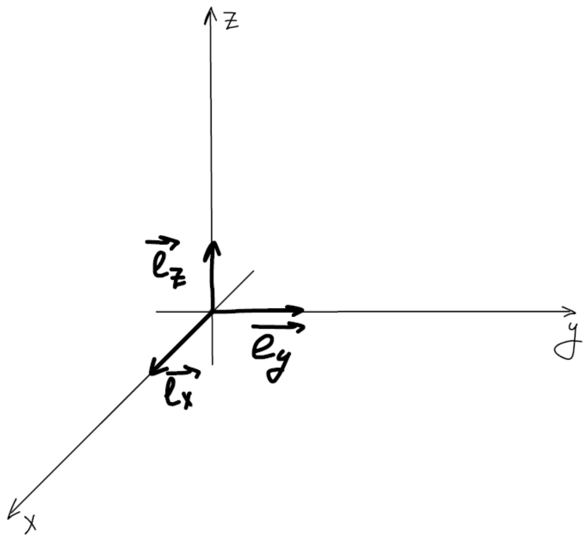


Рис. 1.4: Декартова система координат.

Прямоугольная система координат (рассмотрим случай 3-х измерений). Три координаты: x, y, z или x_1, x_2, x_3 и три базисных вектора:

$$\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{1.39}$$

$\forall$-ая точка в пространстве определяется:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z. \tag{1.40}$$

Длина вектора: $|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{(\vec{r}, \vec{r})}$.
Пусть есть вектор $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z) \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\vec{b}}{\mathrm{d}u} = \vec{e}_x \cdot \frac{\mathrm{d}b_x}{\mathrm{d}u} + \vec{e}_y \cdot \frac{\mathrm{d}b_y}{\mathrm{d}u} + \vec{e}_z \cdot \frac{\mathrm{d}b_z}{\mathrm{d}u}$.

1.5.2 Цилиндрическая система координат

Главная разница: орты (не все) не имеют постоянного положения($\vec{e}_\rho$, $\vec{e}_\varphi$).
Все орты: $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z$.
Положение точки определяется тремя числами (ρ, φ, z).
Радиус-вектор: $\vec{r} = \rho \cdot \vec{e}_\rho + z \cdot \vec{e}_z$.
Связь с декартовыми координатами:

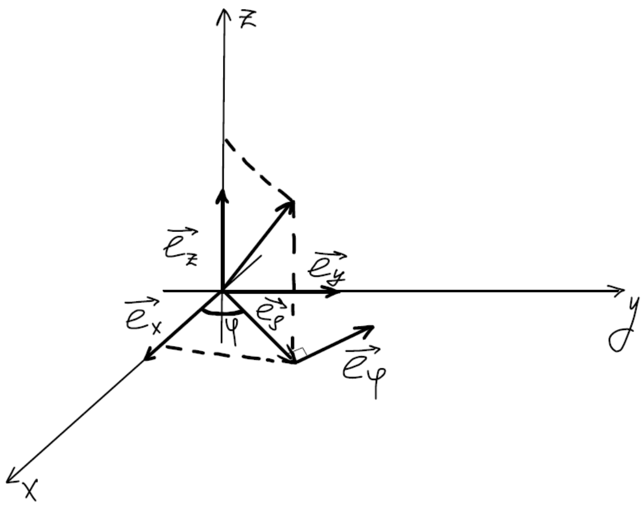


Рис. 1.5: Цилиндрическая система координат.

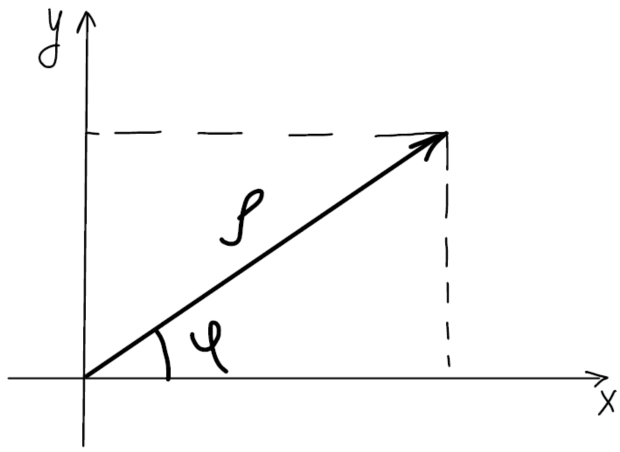


Рис. 1.6: Полярная система координат.

$$\begin{array}{l|l} x = \rho \cdot \cos\varphi & \text{В декартовой} \\ y = \rho \cdot \sin\varphi & \overrightarrow{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ z = z & \overrightarrow{r} = \begin{pmatrix} \rho \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \end{array}$$

Обратно: $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$; $\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}$; $z = z$.
Связь между ортами:

$$\begin{cases} \overrightarrow{e}_\rho = \overrightarrow{e}_x \cdot \cos\varphi + \overrightarrow{e}_y \cdot \sin\varphi \\ \overrightarrow{e}_\varphi = -\overrightarrow{e}_x \cdot \sin\varphi + \overrightarrow{e}_y \cdot \cos\varphi \\ \overrightarrow{e}_z = \overrightarrow{e}_z \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{e}_x = \overrightarrow{e}_\rho \cdot \cos\varphi - \overrightarrow{e}_\varphi \cdot \sin\varphi \\ \overrightarrow{e}_y = \overrightarrow{e}_\rho \cdot \sin\varphi + \overrightarrow{e}_\varphi \cdot \cos\varphi \\ \overrightarrow{e}_z = \overrightarrow{e}_z \end{cases}$$

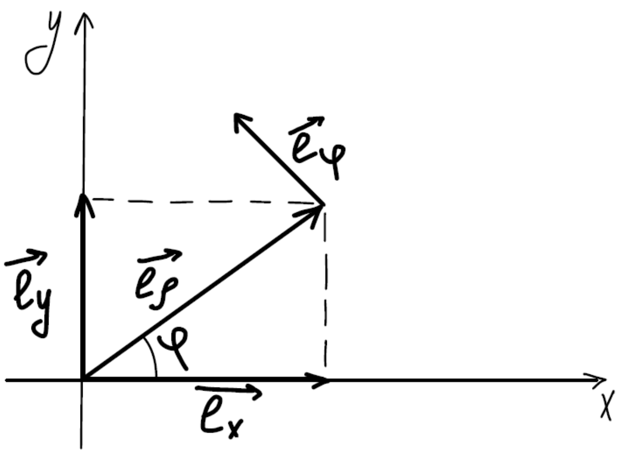


Рис. 1.7: Связь между ортами в цилиндрической системе координат.

1.5.3 Сферическая система координат

Положение точки определяется координатами (r, θ, φ).

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{e}_r \cdot r, \quad \overrightarrow{e}_r, \overrightarrow{e}_\theta, \overrightarrow{e}_\varphi. \tag{1.41}$$

$$\text{Связь координат: } \begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \tag{1.42}$$

$$\text{В другую сторону: } \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \arcsin\left[\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right] \\ \varphi = \operatorname{arctg}\left[\frac{y}{x}\right] \end{cases} \tag{1.43}$$

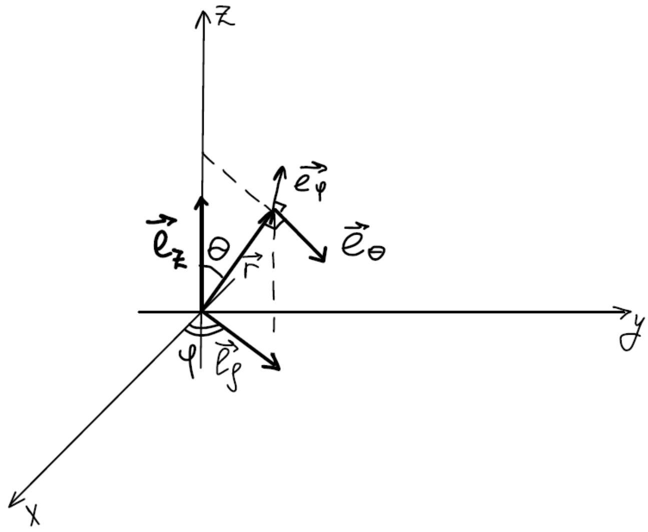


Рис. 1.8: Сферическая система координат.

$$\text{Связь между ортами:} \begin{cases} \overrightarrow{e}_r = (\overrightarrow{e}_x \cos\varphi + \overrightarrow{e}_y \sin\varphi)\sin\theta + \overrightarrow{e}_z \cos\theta \\ \overrightarrow{e}_\varphi = -\overrightarrow{e}_x \sin\varphi + \overrightarrow{e}_y \cos\varphi \\ \overrightarrow{e}_\theta = (\overrightarrow{e}_x \cos\varphi + \overrightarrow{e}_y \sin\varphi)\cos\theta - \overrightarrow{e}_z \sin\theta \end{cases} \tag{1.44}$$

Упражнения: выразить $\overrightarrow{e}_x, \overrightarrow{e}_y, \overrightarrow{e}_z$ через $\overrightarrow{e}_r, \overrightarrow{e}_\theta, \overrightarrow{e}_\varphi$.

Лекция 2.
Кинематика материальной точки

2.1 Основные определения

Определение. Материальная точка - модель обладающего массой тела, размерами и формой которого можно пренебречь в условиях данной задачи. В кинематике изучаются законы движения, без анализа причин возникновения самого движения. Для задания положения материальной точки нам нужна система отсчета и минимальный набор координат (они называются обобщенными координатами). Положение можно определять по-разному. Это может быть как радиус-вектор, так и значение пути, пройденного по фиксированной траектории.

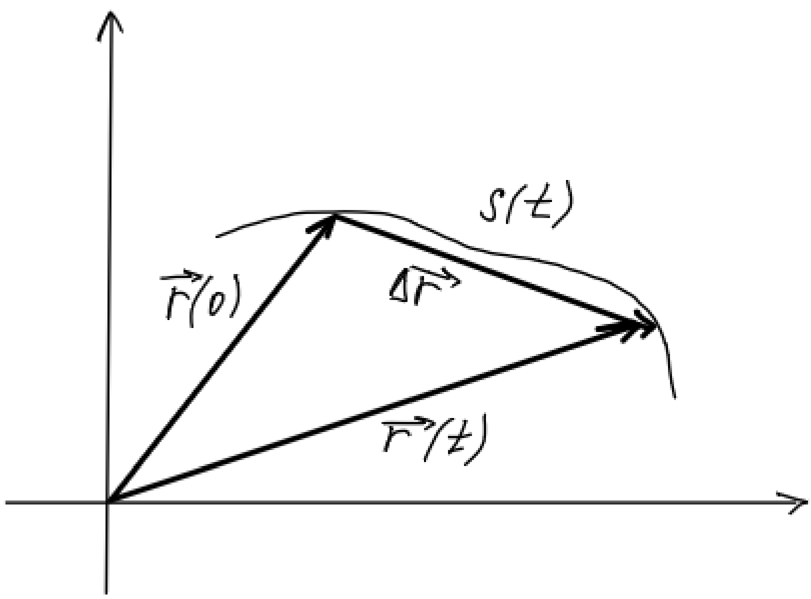


Рис. 2.1: Путь и перемещение.

Пусть положение задаётся радиус-вектором: $\vec{r}(t) = (x(t),\ y(t),\ z(t))$.
Вектор $\Delta\vec{r}$ называется вектором перемещения.
Понятно, что $|\Delta\vec{r}| \leqslant S$.

2.2 Скорость

Определение. Скорость – производная по времени от радиус вектора.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{e_x} \cdot \frac{dx}{dt} + \vec{e_y} \cdot \frac{dy}{dt} + \vec{e_z} \cdot \frac{dz}{dt} = \vec{e_x} \cdot v_x + \vec{e_y} \cdot v_y + \vec{e_z} \cdot v_z. \tag{2.1}$$

Средняя скорость:

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)}{t_2 - t_1}. \tag{2.2}$$

Если же абсолютная величина:

$$\langle v \rangle = \frac{S_{all}}{t_2 - t_1}. \tag{2.3}$$

2.3 Ускорение

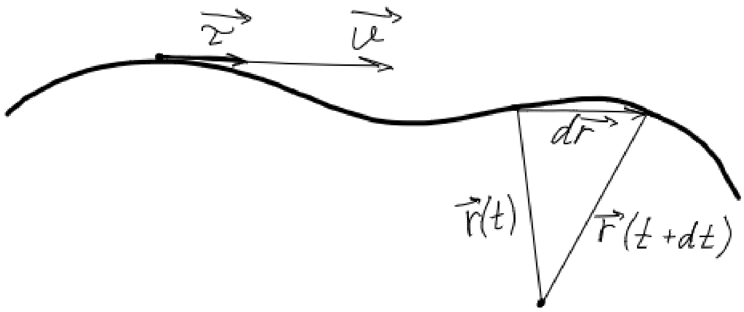
Определение. Ускорение - производная по времени от скорости, записывается следующим образом:

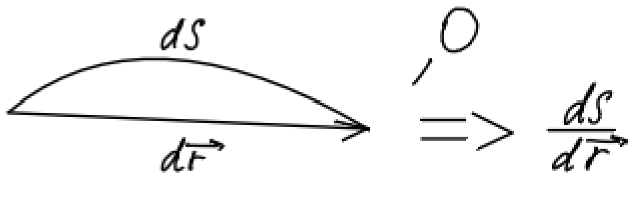
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{e_x} \cdot \frac{dv_x}{dt} + \vec{e_y} \cdot \frac{dv_y}{dt} + \vec{e_z} \cdot \frac{dv_z}{dt} = \vec{e_x} \cdot a_x + \vec{e_y} \cdot a_y + \vec{e_z} \cdot a_z. \tag{2.4}$$

Замечание.
Скорость всегда направлена по касательной к траектории, так как $\vec{v} \sim d\vec{r}$.

2.4 Естественная параметризация

Пусть $\vec{v} = v \cdot \vec{\tau}$, где $\tau = d\vec{r}/dS$, где $|d\vec{r}| = dS$, а S - пройденный путь.



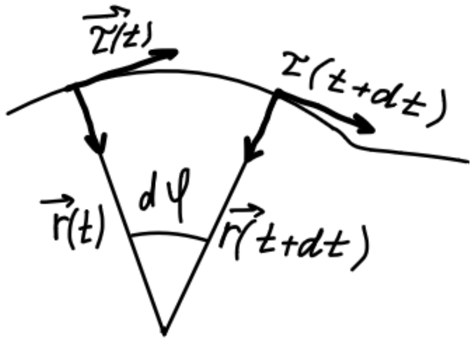


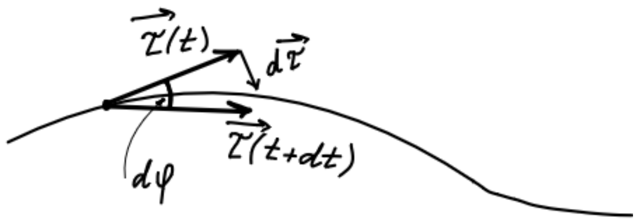
Получим ускорение в общем случае криволинейного движения:

$$\vec{W} = \frac{d}{dt}\vec{v} = \vec{\tau} \cdot \frac{dv}{dt} + v \cdot \frac{d\vec{\tau}}{dt} = a_\tau \vec{\tau} + v \cdot \vec{n} \cdot \frac{dS}{Rdt} = a_\tau \vec{\tau} + \vec{n} \cdot \frac{v^2}{R}. \qquad (2.5)$$

Где $\vec{n}$ - вектор нормали. a_τ отвечает за изменение абсолютного значения скорости.

$$d\vec{\tau} = \vec{n} \cdot |\vec{\tau}| \cdot d\varphi = \vec{n} \cdot \frac{dS}{R}. \qquad (2.6)$$

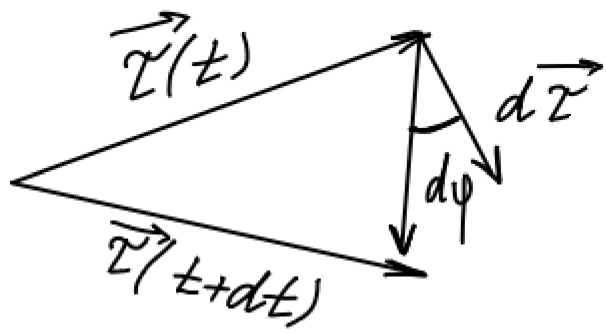




Любую гладкую траекторию можно представить как последовательность бесконечно малых участков окружностей:

$$d\varphi = \frac{dS}{R} \Rightarrow R = \frac{dS}{d\varphi}. \qquad (2.7)$$

где R - радиус кривизны - радиус бесконечно малой дуги окружности, по которой движется тело в данный момент времени.



$$|d\vec{\tau}| \cdot |d\varphi| \sim d\varphi^2 \qquad (2.8)$$

$a_n = \dfrac{v^2}{R}$ - нормальное ускорение.

2.5 Некоторые частные случаи

2.5.1 Постоянное ускорение. Одномерное движение

$a = const \Rightarrow \dfrac{dv}{dt} = a = const$

$$dv = adt \Rightarrow \int\limits_{v_0}^{v(t)} d\tilde{v} = a\int\limits_{t_0}^{t} d\tilde{t} \Rightarrow v(t) - v_0 = a(t - t_0) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow v(t) = v_0 + a(t - t_0) = \frac{dx}{dt},$$
$$dx = v_0dt + a(t - t_0)dt \Rightarrow \int\limits_{x_0}^{x(t)} d\tilde{x} = v_0\int\limits_{0}^{t} d\hat{t} + a\int\limits_{0}^{t}(t - t_0)d\hat{t} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x(t) - x_0 = v_0(t - t_0) + \frac{a(t - t_0)^2}{2},$$
$$x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{a(t - t_0)^2}{2}. \tag{2.9}$$

Либо:

$$dv = adt \Rightarrow \int dv = a\int dt + const_1 \Rightarrow v = a \cdot t + C_1,\ C_1 \equiv const_1 \tag{2.10}$$

$$\frac{dx}{dt} = at + C_1 \Rightarrow \int dx = a\int tdt + C_1\int dt + const_2,\ const_2 = C_2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x = \frac{at^2}{2} + C_1t + C_2,$$
$$x(t) = \left(x_0 - v_0t_0 + \frac{at_0^2}{2}\right) + (v_0 - at_0)t + \frac{at^2}{2}. \tag{2.11}$$

2.5.2 Движение тел, брошенных под углом к горизонту

$\vec{a} = \vec{g} = (0; -g)$, пусть $t_0 = 0$

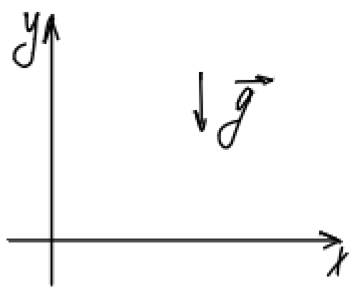


Рис. 2.2: Направление $\vec{g}$.

$$\Rightarrow a_x = 0 \Rightarrow v_x = const \Rightarrow \frac{dx}{dt} = v_x \Rightarrow x = x_0 + v_xt. \tag{2.12}$$

$$\Rightarrow a_y = -g \Rightarrow \frac{dv_y}{dt} = -g \Rightarrow v_y = v_{y0} - gt \Rightarrow y = y_0 + v_{y0}t - \frac{gt^2}{2}. \tag{2.13}$$

$$L = x - x_0 = v_x t;\ \ H = y - y_0 = v_{y0}t - \frac{gt^2}{2};\ \ v_{y0} = v\sin\varphi;\ \ v_{x0} = v\cos\varphi.$$

$$\Rightarrow L = v\cos\varphi t;\ \ H = v\sin\varphi t - \frac{gt^2}{2}. \tag{2.14}$$

$$H_0' = 0 = v\sin\varphi - gt_\uparrow \Rightarrow t_\uparrow = \frac{v\sin\varphi}{g} \Rightarrow H_{max} = \frac{v^2\sin^2\varphi}{2g}. \tag{2.15}$$

Отсюда можно сделать ряд выводов:

$$\Longrightarrow t_{\text{полёта}} = \frac{2v\sin\varphi}{g}.$$

$$\Longrightarrow L_{\text{полёта}} = \frac{2v^2\sin\varphi\cos\varphi}{g} = \frac{v^2\sin 2\varphi}{g}.$$

$$\Longrightarrow \max_\varphi(H_{\max}) = \frac{v^2}{2g},\ \text{где}\ \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

$$\Longrightarrow \max_\varphi(L_{\max}) = \frac{v^2}{g},\ \text{где}\ \varphi = \frac{\pi}{4}.$$

2.5.3 Пропорциональность скорости ускорению

Пусть начальная скорость $v_0 \neq 0$ (начальный момент времени $t = 0$) и $v = \alpha a$. Вспомнив, что ускорение это производная скорости по времени, запишем дифференциальное уравнение и решим его.

$$\alpha\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = v \tag{2.16}$$

$$\alpha\int\limits_{v_0}^{v(t)}\frac{\mathrm{d}\tilde{v}}{\tilde{v}} = \int\limits_0^t \mathrm{d}\tilde{t} \tag{2.17}$$

$$\alpha\ln\frac{v(t)}{v_0} = t. \tag{2.18}$$

$$\boxed{\begin{gathered} v(t) = v_0 e^{\frac{t}{\alpha}} \\ x(t) = \alpha v_0 e^{\frac{t}{\alpha}} \\ a(t) = \frac{v_0}{\alpha}e^{\frac{t}{\alpha}} \end{gathered}}$$

$$x = \int_0^t v_0 e^{t/\alpha}dt = \alpha v_0 e^{t/\alpha}\Big|_0^t = \alpha v_0(e^{t/\alpha} - 1). \tag{2.19}$$

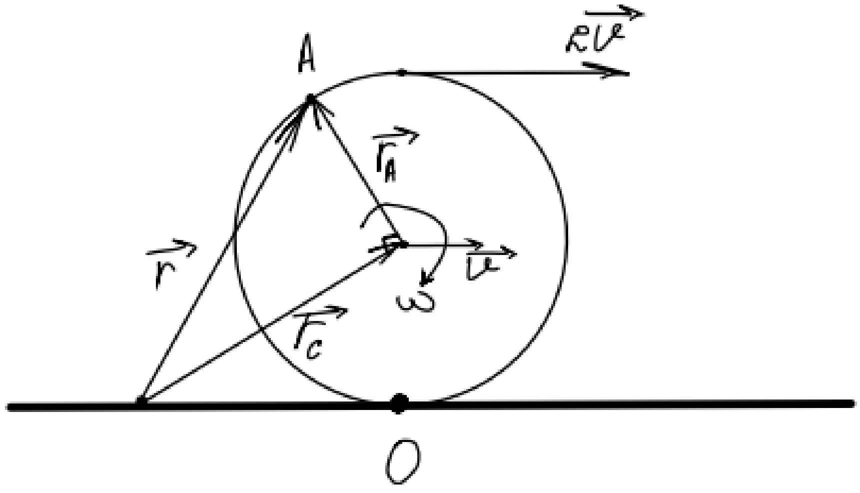
2.5.4 Равномерное движение по окружности

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \mathrm{const} \Rightarrow \varphi = \varphi_0 + \omega t.$$

$$\mathrm{d}S = R\mathrm{d}\varphi\ \ \Big|\ \ 1/\mathrm{d}t \Rightarrow \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = R\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = R\omega = v.$$

2.6 Циклоида

При помощи циклоиды можно понять, какую траекторию описывает точка на ободе колеса относительно поверхности.



Рассматривая равномерное качение, скорость центра колеса

$$v_c = \omega R.$$

Введём радиус-вектор произвольной точки на ободе колеса: $\vec{r}$

$$\vec{r} = \vec{r}_c + \vec{r}_A.$$

Для радиус-векторов различных точек и соответствующих скоростей мы можем записать ряд следующих соотношений:

$$\vec{r}_c = \begin{pmatrix} x_0 + v_c t \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega R t \\ R \end{pmatrix} \implies \vec{v}_c = \begin{pmatrix} \omega R \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{2.20}$$

$$\vec{r}_A = \begin{pmatrix} R\sin(\omega t) \\ R\cos(\omega t) \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} \sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) \end{pmatrix} \implies \vec{v}_A = \begin{pmatrix} R\omega\cos(\omega t) \\ -R\omega\sin(\omega t) \end{pmatrix}, \tag{2.21}$$

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} R\Big(\omega t + \sin(\omega t)\Big) \\ R\Big(\ \ 1 + \cos(\omega t)\Big) \end{pmatrix} \implies \vec{v} = \begin{pmatrix} \omega R\Big(1 + \cos(\omega t)\Big) \\ -\omega R\sin(\omega t) \end{pmatrix}. \tag{2.22}$$

Помимо этого, мы можем выразить касательный вектор $\vec{\tau}$, описывающий направление скорости точки на ободе относительно центра колеса, соответствующую ему нормаль, а также ускорение материальной точки $\vec{a}$:

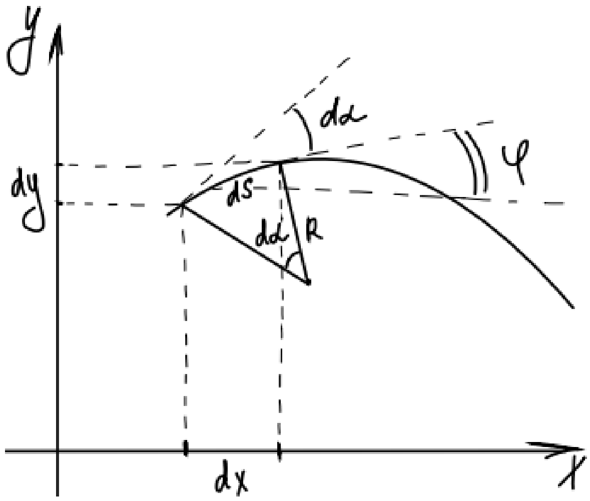
$$\vec{\tau} = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ -\sin(\omega t) \end{pmatrix}, \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} -\sin(\omega t) \\ -\cos(\omega t) \end{pmatrix}, \quad \vec{a} = R\omega^2\vec{n}. \tag{2.23}$$

Свойства:

1. Время соскальзывания без трения не зависит от начального положения.
2. Кривая скорейшего спуска (Брахистохрона).
3. Маятник Гюйгенса.

2.7 Радиус кривизны

Найдём кривизну известной траектории $y(x)$ в каждый момент времени, предполагая, что она достаточно гладкая:



$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}S &= \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2} \\
&= \mathrm{d}x\sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2} \\
\mathrm{d}S &= R\mathrm{d}\alpha \\
y'_x &= \operatorname{tg}\varphi = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \\
\mathrm{d}\varphi &= \mathrm{d}\alpha \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\operatorname{tg}\varphi) &= \frac{1}{\cos^2\varphi}\cdot\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x} = (1+\operatorname{tg}^2\varphi)\cdot\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x} \\
\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\operatorname{tg}\varphi)}{(1+\operatorname{tg}^2\varphi)}\mathrm{d}x &= \mathrm{d}\varphi \\
\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y'_x}{\left(1+(y'_x)^2\right)}\mathrm{d}x &= \mathrm{d}\varphi \\
\mathrm{d}x\sqrt{1+(y'_x)^2} &= \mathrm{d}S
\end{aligned}
$$

$$
\Longrightarrow\ R = \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}\varphi} = \frac{\mathrm{d}x\sqrt{1+(y'_x)^2}\left(1+(y'_x)^2\right)}{\mathrm{d}x\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y'_x\right)} = \frac{\left(1+(y'_x)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{y''_x}
$$

$$
\boxed{R = \frac{\left(1+(y'_x)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{y''_x}\ \text{— радиус кривизны траектории.}} \tag{2.24}
$$

Пример. Баллистическое движение. Воспользуемся полученными знаниями дифференциального исчисления и решений для полёта материальной точки.

Решение было: $x = v_{0_x}t = v_0 t\cos\varphi$

$$y = v_{0_y}t - \frac{gt^2}{2} = v_0 t\sin\varphi - \frac{gt^2}{2}$$

$$R = \frac{\left(\sqrt{1+(y'_x)^2}\right)^3}{y''_x} \text{ — то есть, необходимо найти } y'_x, y''_x$$

$$y'_x = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{v_0\sin\varphi - gt}{v_0\cos\varphi}$$

$$y''_x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y'_x = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y'_x = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{v_0\sin\varphi - gt}{v_0\cos\varphi}\right) =$$

$$= \frac{1}{v_0\cos\varphi}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{v_0\sin\varphi - gt}{v_0\cos\varphi}\right) = \frac{1}{v_0\cos\varphi}\cdot\left(-\frac{g}{v_0\cos\varphi}\right) = -\frac{g}{v_0^2\cos^2\varphi}$$

$$\Longrightarrow \left((1+(y'_x)^2\right)^{\frac{3}{2}} = \left(1+\frac{(v_0\sin\varphi - gt)^2}{v_0^2\cos^2\varphi}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{(v_0^2 - 2v_0gt\sin\varphi + g^2t^2)^{\frac{3}{2}}}{v_0^3\cos^3\varphi}$$

$$y''_x = -\frac{g}{v_0^2\cos^2\varphi}$$

$$\Longrightarrow R = \frac{(v_0^2 - 2v_0gt\sin\varphi + g^2t^2)^{\frac{3}{2}}}{g\ \ \cancelto{v_x}{v_0\cos\varphi}} = \frac{v^3}{gv_x}$$

где v — полная скорость, $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} =$

$$= \sqrt{\cancelto{v_0^2}{v_{0_x}^2 + v_{0_y}^2} - 2v_{0_y}gt + g^2t^2}$$

$$\boxed{R = \frac{v^3}{gv_x}}.$$

Лекция 3.
Динамика материальной точки

3.1 Лирика. Фундаментальные взаимодействия

Пришло время выяснить, а что, собственно, является причиной возникновения движения? Данным вопросом занимается уже другой раздел механики – динамика.

Среди основных понятий динамики можно выделить такие как **сила**, **масса**, **импульс**, **энергия** и **момент импульса**. Первым же делом мы проанализируем следующий крайне важный факт: все тела вокруг нас как-то взаимодействуют друг с другом, что, как правило, приводит к изменению их состояния – возникновению движения, деформациям, и т.д.

В классической механике для количественного описания меры взаимодействия было предложено ввести понятие **силы**.

Определение. С точки же зрения формального определения, под силой мы будем понимать векторную, т.е. имеющую направление, физическую величину, характеризующую меру воздействия на данное тело со стороны других тел или полей.

Если на тело действует сила $\vec{F}$, то с точки зрения математического аппарата классической механики мы должны провести от данного тела вектор в направлении действия силы. Что касается единиц измерения, то в международной системе СИ для силы были выбраны Ньютоны.

Далее, стоит сказать, что по современным представлениям любое взаимодействие между телами осуществляется за счет некоторых материальных посредников, называемых переносчиками взаимодействия, которые перемещаются с конечными скоростями. Данная концепция носит название близкодействия. Таким образом, для того чтобы тело 1 провзаимодействовало с телом 2, оно должно испустить частицу – переносчик взаимодействия, а тело 2 должно поглотить ее. Противоположным концепции близкодействия является устаревшее учение о дальнодействия, согласно которому тела действуют друг на друга с бесконечной скоростью без посредников – через «пустоту». Именно последней точки зрения придерживаются в рамках классической механики.

Ясно, что природа сил должна быть весьма разнообразной. Еще со школы мы знаем о силе упругости, возникающей при растяжении пружины, силе реакции опоры, о силе тяжести, обусловленной тяготением Земли, силе трения и др.

Однако, существуют лишь четыре типа так называемых фундаментальных взаимодействий: гравитационное, электромагнитное, слабое и сильное. Давайте немного поговорим о каждом из них. Как видно, сильное не просто так получило такое название, однако радиус действия сил весьма ограничен. Слабое было названо так по причине его сравнения с сильным и электромагнитным. В таблице ниже приведены основные данные.

Тип взаимодействия	Отн. сила взаимод.	Переносчик	Радиус действия	Участвуют
Гравитационное	10^{-38}	Гравитон, G	∞	всемирное тяготение
Электромагнитное	10^{-2}	Фотон, γ	∞	кулоновские силы
Слабое	10^{-15}	W^+, W^- и Z^0 бозоны	10^{-18} м	радиоактивный β-распад
Сильное	1	Глюоны	10^{-15} м	ядерные силы

3.1.1 Гравитационное взаимодействие

Является наименее изученным из всех типов. Такое взаимодействие испытывают все тела, обладающие массой. Считается, хотя точно не доказано, что переносчиком такого взаимодействия является гипотетическая частица – гравитон, предположительно движущаяся со скоростью света. К сожалению, до сих пор не удалось проквантовать гравитационное взаимодействие. На данный момент современной теорией гравитацией является общая теория относительности, предложенная Альбертом Эйнштейном в 1915 г. Поведение сил, связанных с данным типом взаимодействия, в рамках же классической физики описывается законом всемирного тяготения, о котором мы будем подробно говорить в одном из следующих занятий. Данный закон был сформулирован Исааком Ньютоном еще в 1666 году. Гравитационное взаимодействие является самым слабым из всех типов фундаментальных взаимодействий.

3.1.2 Электромагнитное взаимодействие

Данное взаимодействие существует между частицами, обладающими электрическим зарядом. Более того, открытие атомарной структуры вещества позволило ученым заключить, что такие силы как сила упругости, сила трения, сила реакции опоры и многие другие имеют именно электромагнитную природу. Это обусловлено тем фактом, что именно электромагнитное взаимодействие доминирует при взаимодействии атомов. Электромагнитное взаимодействие сильнее гравитационного в 10^{36} раз. В классической физике для описания электромагнитного взаимодействия пользуются законом Кулона, который был предложен Шарлем Кулоном в 1785 году. Современной же теорией, описывающей электромагнитное взаимодействие является квантовая электродинамика, которая считается по праву одной из наиболее успешной теорий поля. У истоков которой стояли такие великие ученые как Швингер, Фейнман, Томонага и др. А переносчиком же взаимодействия выступает фотон.

Данный тип взаимодействия вместе с гравитационным до проникновения человека в атомное ядро считались единственными типами фундаментальных взаимодействий. Важно подчеркнуть, что все силы, рассматриваемые в классической механике имеют либо электромагнитную, либо гравитационную природу.

Более того, в отличие от оставшихся двух типов взаимодействия – слабого и сильного, силы гравитационной и электромагнитной природы часто называют дальнодействующими, ибо они имеют бесконечный радиус действия, т.е. нельзя точно сказать, где такие силы можно считать равными нулю.

Для полноты изложения скажем буквально несколько слов об оставшихся типах фундаментальных взаимодействий, а именно о сильном и слабом типах фундаментальных взаимодействий. Для их открытия ученым пришлось заглянуть вовнутрь атомного ядра.

3.1.3 Сильное взаимодействие

Во-первых, установив, что ядро состоит из положительно заряженных и нейтральных нуклонов, исследователям пришлось допустить существование сил иной природы, которые бы удерживали ядро в стабильном состоянии, не давая ему распасться из-за кулоновских сил отталкивания. Оказалось, что существует взаимодействие другой природы, благодаря которому притяжение двух протонов в ядре за счёт сильного взаимодействия в 100 раз сильнее их электромагнитного отталкивания. Это и есть сильное взаимодействие. Раздел физики, который занимается его изучением, называется квантовой хромодинамикой. Протоны и нейтроны, согласно современным представления, не являются элементарными частицами – они состоят из трех кварков, которые обладают разными цветами. Цвет - это аналог электрического заряда в случае электромагнитного взаимодействия. Только в отличие от электрического заряда, хромодинамических зарядов целых три. Движение цветных зарядов является строго ограниченным(они не могут выходить за пределы нуклона), такое свойство является следствием конфайнмент-эффекта. Так вот, кварки взаимодействуют друг с другом посредством сильного взаимодействия, переносчиком которого является глюон. Данное взаимодействие имеет очень ограниченный радиус действия, около 10^{-15} метра, что примерно совпадает с радиусом протона. Сами же нуклоны тоже взаимодействуют при помощи так называемого остаточного сильного взаимодействия, обмениваясь уже не глюоном, а составной частицей – пионом, которая состоит из кварка и антикварка. Такое взаимодействие, имея чуть больший радиус действия, позволяет удерживать нуклоны атомного ядра вместе.

3.1.4 Слабое взаимодействие

Что же насчет слабого взаимодействия? Анализируя некоторые физические явления, в частности радиоактивный бета-распад, при котором свободный нейтрон превращается в протон, пришлось допустить существование еще одного типа взаимодействия – слабого, переносчиками которого являются $W^{\pm}$, Z^0 - бозоны. Слабое взаимодействие меняет тип кварков внутри нуклонов, меняя значение еще одного квантового числа – аромата.

Вопрос о существовании других типов взаимодействий остается дискуссионным. Для изучения физики элементарных частицы необходимо пройти отдельный курс, здесь же мы не будем вдаваться в такие подробности, сфокусировавшись на чисто классических представлениях.

3.2 Основные понятия динамики

Итак, мы познакомились с понятием силы как меры воздействия на тело со стороны другого тела или поля, узнали, на какие типы так называемых фундаментальных взаимодействий можно разделить все существующие в природе силы. В классической механике характерные размеры, с которыми имеют дело, обсуждая ту или иную задачу, много больше размеров атомного ядра. В связи с чем все силы в классической механике, обладают либо гравитационной, либо электромагнитной природой. Перейдем же к следующим базовым понятиям и законам динамики.

3.2.1 Инерция

Под инерцией тела можно понимать его сопротивление к изменению характера его движения. Чтобы лучше понять смысл понятия, давайте проведем несколько мысленных экспериментов. Сперва, положим кусок какой-нибудь ткани на стол, а сверху установим тяжелый брусок. Если мы начнем медленно тянуть этот кусок ткани, то брусок начнет двигаться вместе с тканью. Сила трения со стороны ткани на брусок действует весьма долго, и тело успевает набрать необходимую скорость, чтобы двигаться вместе с тканью. Если же мы будем увеличивать скорость, с которой мы каждый раз начинаем тянуть кусок ткани, т.е. увеличивать ускорение (изменение скорости от нуля до какого-то значения, с которым мы тянем ткань), то в какой-то момент брусок перестает синхронно двигаться вместе с тканью и в конечном итоге из-за ограниченной длительности действия силы трения брусок вообще останется на столе. Как видно, брусок оказывает некоторое сопротивление изменению его скорости под воздействием силы трения. Данное свойство как раз и называется инерцией.

Другая ситуация. Вы пришли в супермаркет и взяли тележку. Тележка начинает набирать скорость. В какой-то момент вам необходимо сделать поворот, т.е. изменить характер движения этой тележки, сбросив ее скорость и изменив ее направление. Для этого необходимо оказать внешнее воздействие, в данном случае приложить мускульную силу рук. Пока тележка пустая вам это дается весьма просто, однако все знают, насколько трудно менять скорость тележки, когда она полностью заполнена. Таким образом во втором случае, когда тележка заполнена, она обладает большей инерции, нежели чем пустая. Как же количественно описать данное свойство? Из опыта любой может сказать, чем больше у тела масса, тем тяжелее изменить характер его движения. Таким образом вводится понятие инертной массы, как меры инерции, единицами измерения которой в системе СИ являются килограммы.

Теперь попробуем разобраться в еще одном важном вопросе: а как будет себя вести тело, если на него не действуют вообще никакие силы? Первое, что приходит в голову – оно будет покоиться.

Данное утверждение, однако, лишь частично отвечает на сформулированный выше вопрос. Для полного же ответа представим следующий эксперимент. У вас есть длинная горизонтальная плоскость, вы кладете на нее брусок и толкаете его. Он начинает двигаться с какой-то скоростью. Как подсказывает опыт, в какой-то момент данный брусок остановится. Исходя из этого, можно сделать ошибочный вывод: нет внешней силы – нет движения. Именно так и рассуждал Аристотель при построении своей механики. Данной предубеждение просуществовало на протяжении почти 20 веков, и только Галилею и Ньютону удалось разглядеть истинную картинку мира.

3.2.2 Первый закон Ньютона (принцип инерции)

Для того чтобы разобраться, попробуем теперь сделать поверхность плоскости максимально гладкой (пример с аэрохоккеем). Тело будет двигаться намного дольше. Однако остановка будет связана лишь с тем, что мы все еще не смогли полностью исключить все силы трения и сопротивления. Опыт подсказывает, что чем меньше трение, тем больше будет пройденный путь. Если же мы мысленно перейдем к пределу, когда все силы трения отсутствуют, то нетрудно понять, что тело будет двигаться бесконечно долго и вдоль прямой линии, т.е. без изменения скорости. Говорят, что тело будет двигаться по инерции! Движение с постоянной скоростью так же естественно, как и состояние покоя. И лишь для изменения скорости необходимо приложить силу, это и было открытие, сделанное Галилеем и Ньютоном.

Мы приходим к следующему выводу: если на тело не действуют никакие силы или их действие скомпенсировано, то такое тело будет либо покоиться, либо двигаться прямолинейно и равномерно. Системы отсчета, относительно которых возможно такое движение, называются инерциальными! Таким образом, мы подошли к первому закону механики или же первому закону Ньютона, который постулирует существование инерциальных систем отсчета!

Чёткая формулировка закона : Существуют такие системы отсчёта, называемые инерциальными, относительно которых свободное тело, т. е. тело, на которое не действуют внешние силы или действие которых на него скомпенсировано, сохраняет свою скорость постоянной.

3.2.3 Второй закон Ньютона

Выяснив возможные типы движения в том случае, когда силы отсутствуют, теперь необходимо понять, как же будет меняться движение, когда прикладываемая сила не равна нулю.

Представим ситуацию, когда к нам навстречу катится тележка. Вы стоите, и ваша задача – остановить тележку. Представим, что сперва тележка пустая и катится к вам с не очень большой скоростью. Сила, которую вам надо будет приложить для остановки тележки, будет небольшой, как и длительность времени, с которой вам надо будет тормозить эту тележку до полной остановки. Теперь представим, что мы увеличили массу тележки и пустили ее с той же скоростью. В этот раз нам уже понадобиться прикладывать большую силу или же выполнять торможение тележки дольше по времени. Представим теперь последнюю ситуацию, когда скорость тележки будет еще больше. В этом случае, когда она подъедет к нам, она будет иметь большую скорость. Очевидно, что для изменения этой скорости до нулевого значения, т.е. полного торможения, нам придется приложить еще большую силу или же действовать этой силой еще дольше, а может прибегнуть к обоим из этих вариантов.

Таким образом, мы можем записать следующее соотношение: сила будет пропорциональная массе тележки, а также, очевидно, величине изменению скорости. Однако, как мы уже замечали, того же эффекта – торможения тележки – можно добиться за счет более длительного действия силы. По этой причине мы должны домножить силу на промежуток времени, в течение которого мы будем действовать силой для достижения нужного эффекта – торможения тележки.

$$\Delta v_1 \quad \rightarrow \quad F_1 \qquad \Delta t_1 \qquad m_1$$

Меняем: m

$$m_2 > m_1 \rightarrow F_2 > F_1$$

или

$$m_2 > m_1 \rightarrow \Delta t_2 > \Delta t_1$$

т.е.

$$\Delta v_1 \quad \rightarrow \quad F_2(\uparrow) \qquad \Delta t_1 \qquad m_2(\uparrow)$$

или

$$\Delta v_1 \quad \rightarrow \quad F_1 \qquad \Delta t_2(\uparrow) \qquad m_2(\uparrow)$$

Меняем: Δv

$$\Delta v_3 > \Delta v_1 \rightarrow F_3 > F_2$$

или

$$\Delta v_3 > \Delta v_1 \rightarrow \Delta t_3 > \Delta t_2$$

$$\Delta v_2(\uparrow) \quad \rightarrow \quad F_3(\uparrow) \qquad \Delta t_1 \qquad m_2$$

или

$$\Delta v_2(\uparrow) \quad \rightarrow \quad F_1 \qquad \Delta t_3(\uparrow) \qquad m_2.$$

Выбором единиц измерения данных величин, мы можем записать равенство вместо знака пропорциональности. Далее стоит сделать ряд замечаний. Во-первых, мы понимаем, что проекция силы должна быть отрицательной, т.к. изменение скорости является отрицательным. С этим все хорошо – знак минус будет показывать направление действия силы, которая направлена против движения тела. Во-вторых, данное уравнение описывает одномерную задачу, нетрудно сделать обобщение, записав для двух других координат такие же соотношения. Короткая запись может быть выполнена при помощи векторов. В-третьих, точно таким же уравнением будет описываться разгон тележки, нет никакой разницы. Только там сила будет направлена в сторону разгона тела, что, однако, будет автоматически учтено самим уравнением. Еще одним замечанием будет то, что сил действовать может сразу несколько. Как их складывать? Очевидно, что если вторая сила смотрит также, то абсолютное значение результирующей силы будет совпадать с суммой первой и второй сил. Если же она – вторая – сила будет направлена против первой, то тогда силы придется вычесть друг из друга. Все это приводит к тому, что в правой части на самом деле должна стоять векторная сумма всех сил, действующих на тело. Последним и крайне важным замечанием является то, что вместо конечных разностей, для перехода к точному выражению необходимо перейти к бесконечно малым приращениям – дифференциалам. Это связано с тем фактом, что сама сила может быть переменной величиной, например зависеть от времени, т.е. изменяться с изменением t. Тогда такое выражение будет справедливо лишь на бесконечно малом промежутке времени, за который происходит бесконечно малое изменение скорости. Соответствующий ряд соотношений:

$$\Delta v \sim \frac{F \cdot \Delta t}{m}$$

$$\Delta \vec{v} \sim \frac{\vec{F} \cdot \Delta t}{m}$$

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$$

$$dt(F(t+dt) - F(t)) \sim dt^2$$

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \sum_i \vec{F}_i$$

Величина справа носит название импульс силы. Комбинация слева равна изменению другой величины – импульса. Сам же импульс равен произведению массы на скорость $\vec{p} = m\vec{v}$. Если же мы поделим данное равенство на dt, то мы получим уравнение, которое является математической формулировкой второго закона Ньютона (векторная сумма всех сил, действующих на тело, равна скорости изменения импульса этого тела):

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_i \vec{F}_i, \tag{3.1}$$

В такой записи второй закон Ньютона справедлив и в случае специальной теории относительности. Запись же, к которой мы привыкли со школы, имеет вид: $\vec{a} = \vec{F}/m$, что в словесной форме звучит так: ускорение тела прямо пропорционально векторной сумме всех прикладываемых к телу сил и обратно пропорционально его массе. Отсюда, кстати, можно сразу сделать вывод: если на тело не действуют внешние силы, то импульс данного тела должен сохраняться.

Второй закон Ньютона является основным законом классической механики, да и классической физики в целом. Фундаментальную роль дифференциальной формы соответствующего уравнения трудно переоценить.

3.2.4 Третий закон Ньютона

Итак, существуют три фундаментальных закона движения, которые были представлены одним из величайших мыслителей всех времен — Исааком Ньютоном — в своей работе «начала натуральной философии». Мы познакомились с двумя из них.

Третий же закон звучит следующим образом.

Тела действуют друг на друга с силами, равными по модулю и противоположными по направлению, причём эти силы имеют одинаковую природу.

Здесь надо сделать некоторый комментарий. В отличии от модели тела, с которой мы будем работать, будь то материальная точка или абсолютно твердое тело, формулировка будет немного отличаться. Для материальной точки здесь все просто: линия, вдоль которой действуют силы, просто соединяет данные точки. В случае же пространственно распределенной массы, например АТТ, здесь необходимо смотреть на каждый из случаев отдельно.

В этот раз мы начали с формального определения. Однако, давайте же разберемся в этом поподробней. Для этого, как обычно, обратимся к эксперименту. Представим брусок, который лежит на столе. На данный брусок действует сила тяжести. Однако, как мы уже знаем, если есть сила, то должно быть и ускорение, но брусок покоится. В этом нет ничего страшного, ибо на брусок действует сила реакции опоры со стороны стола. Эта сила по абсолютной величине совпадает с силой тяжести, поэтому суммарная сила, действующая на брусок равна нулю. Однако, как нетрудно догадаться, сам брусок также действует на стол с силой, которая называется весом. Данная сила будет полностью совпадать с силой реакции опоры по абсолютной величине, приложена к той же точке, но только иметь противоположное направление. Рассмотрим еще один эксперимент. Давайте начнем толкать брусок вдоль стола так, чтобы его скорость была постоянной. Это весьма легко представить. Сразу будет понятно, если есть сила, то опять же, должно быть и ускорение. Однако брусок двигается с постоянной скоростью, в чем же дело? Все дело в силе трения между бруском и поверхностью, которое уравновешивает силу, с которой мы толкаем брусок. Представим же однако, что поверхность стола крайне шершавая, например, мы могли положить наждачную бумагу, а вот ножки стола очень хорошо могут скользить по полу. Что произойдет? Интуиция подсказывает, что стол начнет двигаться вместе с бруском, может даже и без проскальзывания. Это вызвано тем, что стол действует на брусок с силой трения, однако и сам брусок действует на стол с точно такой же силой трения, однако направление ее уже будет противоположное. Попробуем рассмотреть еще один эксперимент. Представьте лодку, которая стоит у причала. Вы подбегаете с большой скоростью к данной лодке и прыгаете в нее. После вашего приземления лодка начнет двигаться. Почему? За счет сил трения между дном лодки и подошвой вашей обуви. Вы действовали очень короткий промежуток времени, однако с большой силой, и лодка пришла в движение. А ваша скорость как-то изменилась? Конечно, она уменьшилась, что вызвано тем же явлением – трением. Только в этом случае лодка действовала на вас с той же силой, но противоположная по направлению. Это привело к тому, что скорость уменьшилась. Можно привести еще массу примеров, в каждом из которых будет проявляться третий закон Ньютона.

3.2.5 Закон сохранения импульса

Познакомившись со всеми законами Ньютона, мы можем перейти к их различным следствиям. Следующий закон, который мы рассмотрим, на самом деле хоть и выводится из законов Ньютона в рамках классической механики, сам по себе является более фундаментальным и действует тогда, когда ньютоновская механика перестает быть применима. Мы говорим про закон сохранения импульса. Однако, прежде чем мы приступим к его обсуждению, нам стоит ввести новое понятие – замкнутая система.

Представим, что у нас есть две материальные точки, которые могут взаимодействовать друг с другом. Других сил нет. Такая система будет называться замкнутой. Силы, которые действую со стороны других – внешних – тел, называются внешними. Они как раз и отсутствуют в нашей замкнутой системе. Силы же, которые действуют внутри системы, между первым и вторым телом, называются внутренними. Только такие силы у нас и присутствуют. Согласно третьему закону Ньютона сила, с которой первая материальная точка действует на вторую, равна силе, с которой вторая материальная точка действует на первую в противоположном направлении. По второму закону Ньютона эти силы равны изменению импульса каждой из материальных точек. Получается, что сумма изменений или, что то же самое, изменение векторной суммы импульсов материальных точек равно нулю. Мы приходим к выводу, что суммарный импульс замкнутой системы должен сохраняться. Давай те же обобщим это на систему, состоящую из произвольного числа материальных точек. Введем понятие суммарного импульса системы. Его производная будет равна сумме всех внешних сил, действующих на материальные точки системы, такое слагаемое ноль по условию, а также из всевозможных пар слагаемых вида $\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji}$, которые дают ноль. Получается, что производная от суммы импульсов равна нулю, т.е. сам суммарный импульс сохраняется.

Соответствующие выкладки для двух частиц:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}, \tag{3.2}$$

$$\frac{dm_1\vec{V}_1}{dt} + \frac{dm_2\vec{V}_2}{dt} = 0, \tag{3.3}$$

$$\frac{d}{dt}[\vec{p}_1 + \vec{p}_2] = 0, \tag{3.4}$$

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = const. \tag{3.5}$$

Выкладки на случай обобщения:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}, \tag{3.6}$$

$$\vec{p} = \sum_{n=1}^{N} \vec{p}_n, \tag{3.7}$$

$$\vec{F} = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k^{ext} + \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1, m\neq n}^{N} \vec{F}_{n,m}, \tag{3.8}$$

$$\vec{F}_{n,m} = -\vec{F}_{m,n}, \tag{3.9}$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k^{ext}, \tag{3.10}$$

$$\sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k^{ext} = 0, \tag{3.11}$$

$$\frac{d}{dt} \sum_{n=1}^{N} \vec{p}_n = 0, \tag{3.12}$$

$$\vec{p}_{\text{системы}} = \text{const}. \tag{3.13}$$

т.е. в отсутствие внешних сил суммарный импульс системы сохраняется.

Посмотрим же на то, как проявляется закон сохранения импульса. Как и прежде, мы обратимся к житейскому опыту. Представим, что мы сидим на лодке, которая покоится относительно воды. Любой хорошо знает, что будет если попробовать подальше спрыгнуть с лодки. Ответ будет очевиден: лодка откатиться в противоположном направлении. С хорошей точностью систему лодка-человек можно считать замкнутой. Начальный импульс относительно системы отсчета, которая связана с Землей, равен нулю. После прыжка ваш импульс уже будет отличен от нуля. Чему же будет равен импульс лодки? Верно, согласно ЗСИ он будет таким же по величине и противоположным по направлению. Также, исходя из выражения для импульса, можно заключить, чем более массивная лодка, тем меньше будет ее скорость.

Итак, в этой лекции мы познакомились с еще одним фундаментальным законом механики. Познакомились с понятием замкнутой системы, а также с тем, как можно разделять силы на внешние и внутренние.

Стоит подчеркнуть, что закон сохранения импульса является более фундаментальным, чем законы механики Ньютона. Он является следствием одной из фундаментальных симметрий в физике – однородности пространства. Об этом, а также и о других типах симметрий и законах, которые ими порождаются, мы поговорим в одной из следующих лекций.

3.2.6 Преобразования Галилея и принцип относительности Галилея и принцип относительности Эйнштейна

Получив представление о кинематических характеристиках материальной точки, среди которых радиус-вектор, скорость и ускорение, вторая производная(ускорение), сразу же может возникнуть вопрос: а каким образом данные величины будут преобразовываться при переходе от одной системы отсчета к другой?

Дать ответ на этот вопрос в рамках классической механики позволяют преобразования Галилея. Данные преобразования отражают сугубо классические представления о пространстве и времени.

В частности, время является абсолютным, т.е. величиной, значение которой не зависит от выбора системы отсчета: $t = t'$.

Житейский опыт подсказывает нам, что такое представление о времени позволяет весьма хорошо описывать встречающиеся в повседневной жизни явления.

Как будет показано в дальнейшем, все это связано лишь с тем фактов, что скорости, с которыми мы имеем дело, обычно много меньше скорости света, которая является ключевым параметром в специальной теории относительности. При приближении значений наблюдаемых в системе скоростей к световым начинают сказываться различные релятивистские эффекты. Подробно об этом и об аналоге преобразований Галилея в релятивистском случае мы будем говорить в одной из дальнейших лекций, здесь же мы будем считать, что все относительные скорости много меньше световой.

Фраза: Время является абсолютной величиной. $t' = t$. Картинка с человеком на скамейке и самолетом.

Итак, рассмотрим две системы отсчета, одна из которых покоится, такую систему мы будем по традиции называть системой К(можно обвести на картинке букву К в круг для привлечения внимания зрителя, ибо все остальное уже должно быть нарисовано), тогда как систему, движущуюся с постоянной скоростью $\boldsymbol{V}$ относительно первой ($V << c$, где V – абсолютное значение вектора $\boldsymbol{V}$), мы будем обозначать K'. Соответствующие кинематические характеристики в случае системы K' также будут снабжены штрихом.(Можно написать два столбика: со штрихованными и нештрихованными величинами). Без ограничения общности можно считать, что в нулевой момент времени две системы совмещены друг с другом. Как будут обстоять дела через промежуток времени t? Очевидно, что движущаяся система отсчета сместится относительно покоящейся на пространственный вектор $\boldsymbol{V}\cdot t$ (указать на этот вектор на заготовке на картинке). Рассмотрим все подробно. Положение точки O в системе K, очевидно, будет описываться нулевым вектором. Положение же точки O в системе K' будет равно вектору $\boldsymbol{V}\cdot t$.

Пусть теперь положение какой-либо материальной точки в штрихованной системе отсчета описывается вектором $\boldsymbol{r'}$. Тогда, исходя из правил сложения векторов, мы видим, что радиус-вектор $\boldsymbol{r}$ данной материальной точки, проведенный из начала координат уже покоящейся системы отсчета, будет связан с $\boldsymbol{r'}$ следующим образом:(на доске пишем формулу, связывающую эти два вектора, даем комментарий, что в преобразованиях Галилея вместо t' можно писать просто t(т.к. они просто равны друг другу)):

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}' + \boldsymbol{V}\cdot t. \tag{3.14}$$

А как будут связаны скорости данной материальной точки в разных системах отсчета? Для этого достаточно взять производную по времени:(берем производную, записываем соотношения для скоростей)

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{V}. \tag{3.15}$$

Аналогично, взяв еще одну производную, можно получить связь ускорений в этих двух системах:

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}'. \tag{3.16}$$

Нетрудно заметить, что ускорения в разных системах отсчета просто совпадают друг с другом. Ускорение же является центральной величиной в классической механике, величина которого позволяет получить закон движения для материальной точки(можно дать ссылку на интегрирование уравнений движения, либо на доске написать самому). Таким образом, если две системы перемещаются с постоянной скоростью относительно друг друга, нет никакой разницы относительно какой из систем нам стоит искать закон движения – они будут одинаковыми, отличия будут лишь в начальных условиях.

Появляются выражения для скорости, ускорения и т.д. Пишем, что время в штрихованной системе совпадает с временем в нештрихованной. Записываем два момента времени, рисуем два состояния: где системы совмещены и нет.

В этом месте стоит сделать одно замечание. Если бы рассматриваемые системы были бы инерциальными, то домножив соответствующее равенство на массу материальной точки, мы пришли бы ко второму закону Ньютона: $m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}$, где под $\boldsymbol{F}$ подразумевают суперпозицию сил. Эти рассуждения стали основой для классического принципа относительности или принципа относительности Галилея, который формулируется следующим образом: все законы классической механики инвариантны относительно выбора инерциальной системы отсчета.

Пишем, что K и K' – ИСО, умножаем на массу и получаем второй закон Ньютона.

Таким образом, нет никакой разницы в какой из инерциальных систем отсчет записывать второй закон Ньютона. Конечно же, законы движения, т.е. решение уравнений движения, в разных системах будут разными, однако связь между ними будет тривиальной. Благодаря этому свойству при решении конкретных задач нам не надо искать какую-то особую инерциальную систему отсчета, ибо они все эквиваленты друг другу. В следующих лекциях мы приступим к интегрированию уравнений движения, активно пользуясь принципом относительности Галилея. Открыть принцип относительности Галилею помог мысленный эксперимент, в котором он рассуждал про корабль. Так что Галилей не только открыл принцип относительности, но и подарил науке мощный, а иногда и единственно возможный инструмент решения задач - мысленный эксперимент.

Однако, перед тем как закончить лекцию, стоит сказать, что классический принцип относительности справедлив только для механических явлений. Его применение для электромагнитных процессов терпит неудачу и приводит к противоречивым следствиям. Как уже было сказано, все дело в ограниченной применимости классического принципа относительности на процессы, в которых величина характерных скоростей много меньше световой, чего, конечно же, нельзя сказать об электромагнитных явлениях. В этом случае справедлив более общий, эйнштейновский принцип относительности, согласно которому все законы природы имеют одинаковый вид в любой инерциальной системе отсчета, но только не по отношению к преобразованиям Галилея, а уже относительно преобразований Лоренца, которые учитывают неабсолютный характер времени.

Теперь можно вернуться к преобразованиям Галилея. Пусть система K – инерциальная. Пусть система K' – инерциальная, она движется со скоростью $\vec{V} = \text{const}$ относительно K. Запишем ряд соотношений на радиус-векторы, скорости и ускорения материальной точки в разных системах координат:

$$\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{R} = \vec{r}\,' + \vec{V} \cdot t \tag{3.17}$$

$$\dot{\vec{r}} = \vec{U} = \vec{U}\,' + \vec{V} \tag{3.18}$$

$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = \dot{\vec{U}} = \dot{\vec{U}}\,' = \vec{a}\,' = \ddot{\vec{r}}\,' \tag{3.19}$$

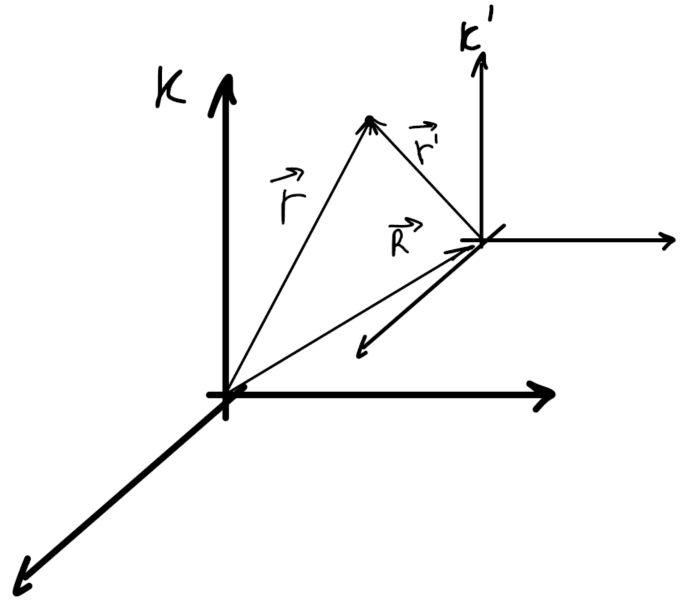


Рис. 3.1: Преобразования Галилея.

$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}\,'} \tag{3.20}$$

Если мы справа и слева домножим на массу m:

$$\boxed{m\vec{a} = m\vec{a}\,' = \vec{F}} \tag{3.21}$$

$\Rightarrow$ **Все законы механики инвариантны относительно выбора инерциальной системы отсчёта.** Это *классический принцип относительности.*
Инварианты: промежуток времени ($\Delta t' = \Delta t$), длина ($l' = l$), и др.

3.2.7 Понятие центра масс (центра инерции)

Важным понятием в динамике является центр масс.
Определение Центр масс системы – это такая точка в пространстве, радиус-вектор которой определяется как:

$$\vec{R}_{c.m.} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} \vec{r_i} \cdot m_i}{\sum\limits_{i=1}^{N} m_i} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} \vec{r_i} \cdot m_i}{M} = \frac{\int \rho(\vec{r}) dV \cdot \vec{r}}{\int \rho dV} = \int \frac{\vec{r}\rho(r)dV}{M}. \tag{3.22}$$

Следствия

Умножим всё на массу системы и возьмём производную:

$$M \cdot \dot{\vec{R}}_{c.m.} = M \cdot \vec{V}_{c.m.} = \sum_i \dot{\vec{r}}_i \cdot m_i = \sum_i m_i \cdot \vec{v}_i = \sum_i \vec{p}_i = \vec{p}. \tag{3.23}$$

$$\frac{d}{dt} \cdot M \cdot \dot{\vec{R}}_{c.m.} = \frac{d}{dt} M V_{c.m.} = \vec{F}_{ext}. \tag{3.24}$$

Следовательно центр масс системы движется как материальная точка, в которой сидит вся масса системы, на которую действуют только внешние силы.

3.2.8 Движение пары материальных точек

Задача двух тел имеет в физике особое значение. Рассмотрим две точки с радиус-векторами $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$, которые действуют друг на друга с некими (равными величиной и противоположными направлением — по третьему закону Ньютона) силами $\vec{F}_{12}$ и $\vec{F}_{21}$ и запишем для них второй закон Ньютона.

$$m_1\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}_1}{\mathrm{d}t^2} = \vec{F}_{12} \tag{3.25}$$

$$m_2\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}_2}{\mathrm{d}t^2} = \vec{F}_{21} \tag{3.26}$$

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}. \tag{3.27}$$

$$\tag{3.28}$$

Вычтем из одного уравнения другое:

$$\ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2 = \frac{\vec{F}_{12}}{m_1} - \frac{-\vec{F}_{12}}{m_2} = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\vec{F}_{12}, \tag{3.29}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}\vec{F}_{12}. \tag{3.30}$$

Обозначим вектор расстояния от второго тела до первого как $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$, а «приведённую массу» $\dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ как μ, получая

$$\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2} = \frac{1}{\mu}\vec{F}_{12}. \tag{3.31}$$

Стоит заметить, что ускорение центра масс в данном случае нулевое, а значит он движется равномерно (его координата $\vec{R}(t) = \vec{v}t + \vec{R}_0$).

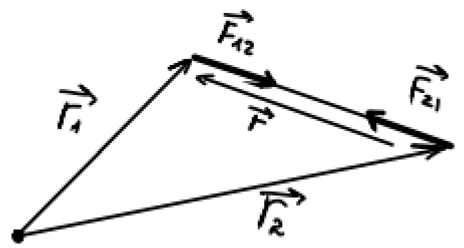


Рис. 3.2: Векторы, фигурирующие в задаче двух тел

Лекция 4.
Динамика материальной точки. Интегрирование уравнений движения

4.1 Вывод формулы Эйлера. Трение в блоках

Пусть у нас есть блок с перекинутой через него невесомой нерастяжимой веревкой. Зададимся вопросом: как будут отличаться силы натяжения нити с двух сторон $|\vec{T_1}||\vec{T_2}|$–? Рассмотрим элемент дуги: $dS = R \cdot d\alpha$: Запишем второй закон Ньютона в проекциях на оси:

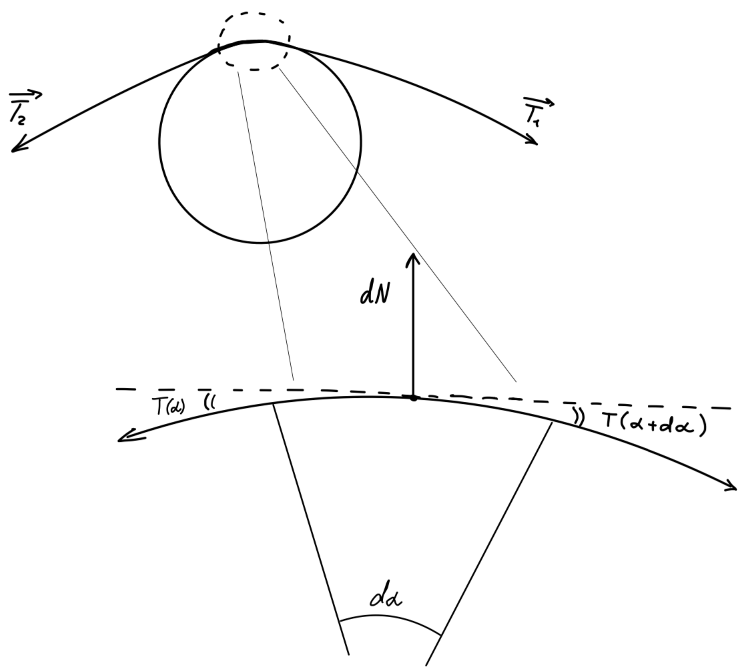


Рис. 4.1: Рисунок к выводу формулы Эйлера.

$$1.\ 0 \ = \ dN \ - \ T(\alpha) \cdot \sin\frac{d\alpha}{2} \ - \ T(\alpha \ + \ d\alpha) \cdot \sin\frac{d\alpha}{2} \tag{4.1}$$

$$\Rightarrow \ dN \ = \ 2T(\alpha) \cdot \sin\frac{d\alpha}{2} \ = \ T(\alpha) \cdot d\alpha. \tag{4.2}$$

$$2.\ 0 \ = \ - \ T(\alpha) \cdot \cos\frac{d\alpha}{2} \ - dF_{\text{тр}} \ + \ T(\alpha \ + \ d\alpha) \cdot \cos\frac{d\alpha}{2}$$

$$0 \ = \ T(\alpha \ + \ d\alpha) \ - \ T(\alpha) \ - \ \mu \cdot dN \tag{4.3}$$

$$\Rightarrow T(\alpha \ + \ d\alpha) \ - \ T(\alpha) \ = \ \mu \cdot T(\alpha) d\alpha \tag{4.4}$$

$$\begin{gathered} \frac{dT}{d\alpha} \cdot d\alpha \ = \ \mu \cdot T(\alpha) d\alpha \Rightarrow \frac{dT}{T(\alpha)} \ = \ \mu \cdot d\alpha \\ \ln \frac{T_1}{T_2} \ = \ \mu \cdot \alpha \Rightarrow T_1 \ = \ T_2 \cdot e^{\mu\alpha}. \end{gathered} \tag{4.5}$$

Например: тонкий стальной трос обвязываем дважды вокруг стальной трубы: $\mu = 0.15;\ \alpha = 4\pi \Rightarrow\ \mu\alpha$.

4.2 Вязкое трение

При движении в среде механические объекты испытывают трение.

При высоких скоростях $F_c \sim v^2$.

При низких скоростях $F_c \sim v$.

Изменение закона зависимости силы сопротивления от скорости при увеличении скорости вызвано тем, что при увеличении скорости движения тела в вязкой среде возникают различные завихрения, на образование которых тратится часть кинетической энергии тела

Рассмотрим баллистическое движение в присутствии сил сопротивления среды.
Пусть $\vec{F}_{\text{сопр}} = -k\vec{v}$, известен угол броска (запуска) - α и начальная скорость - v_0

1. Найдем связь динамических параметров с v_∞:
Пусть из эксперимента известна скорость снаряда в установившемся режиме при свободном падении с большой высоты: v_∞
Тогда:

$$m\vec{a} = \vec{F} \tag{4.6}$$

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}_{\text{сопр}}. \tag{4.7}$$

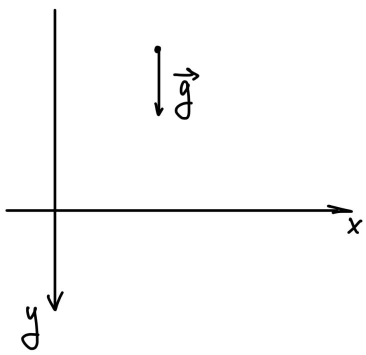


Рис. 4.2: Оси XY

1) $ma_x = 0 \ \Rightarrow\ v_x = const = v_0x$, пусть $v_0x = 0$
2) $ma_y = mg - kv_y$

$$m\frac{dv_y}{dt} = mg - kv_y. \tag{4.8}$$

Вариант 1. Способ решения дифференциального уравнения

$$m\int_{v_0}^{v_y(t)} \frac{d\tilde{v_y}}{mg - k\tilde{v_y}} = \int_0^t d\tilde{t} \tag{4.9}$$

$$\left(-\frac{1}{k}\right) m \cdot \ln|mg - k\tilde{v_y}|\Big|_{v_0}^{v_y(t)} = t \tag{4.10}$$

$$\ln\left|\frac{mg - kv_y(t)}{mg - kv_0}\right| = -\frac{kt}{m} \tag{4.11}$$

$$mg - kv_y(t) = (mg - kv_0)e^{-\frac{kt}{m}} \tag{4.12}$$

$$v_y(t) = \frac{mg - (mg - kv_0)e^{-\frac{kt}{m}}}{k} = \frac{mg(1 - e^{-\frac{kt}{m}}) + kv_0 e^{-\frac{kt}{m}}}{k} \tag{4.13}$$

Если $v_0 = 0$, то:

$$\ln\left|\frac{mg - kv_y(t)}{mg}\right| = -\frac{kt}{m} \tag{4.14}$$

$$\left(1 - \frac{k}{mg}v_y(t)\right) = e^{\left(-\frac{kt}{m}\right)} \tag{4.15}$$

$$v_y = \frac{mg}{k}\left(1 - e^{-\frac{kt}{m}}\right) = v_\infty\left(1 - e^{-\frac{kt}{m}}\right) \tag{4.16}$$

$$\frac{mg}{k} = v_\infty \tag{4.17}$$

$$\frac{g}{v_\infty} = \frac{k}{m} \tag{4.18}$$

$$\boxed{v_y(t) = v_\infty(1 - e^{-\frac{gt}{v_\infty}})}. \tag{4.19}$$

Вариант 2. Способ решения дифференциального уравнения

$$mv_y' + kv_y = mg \tag{4.20}$$

1. Решение однородного:

$$mv_y' + kv_y = 0 \tag{4.21}$$

$$v_y' + \frac{k}{m}v_y = 0 \tag{4.22}$$

$$v_y = e^{\lambda t} \Rightarrow \lambda e^{\lambda t} + \frac{k}{m}e^{\lambda t} = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{k}{m} \Rightarrow v_y = \text{const} \cdot e^{-\frac{kt}{m}} \tag{4.23}$$

2. Частное решение неоднородного:

$$mv_y' + kv_y = mg \tag{4.24}$$

$$\text{Решение: } v_y = +\frac{mg}{k}$$

3. Общее решение неоднородного есть **сумма 1 и 2**:

$$v_y = \left[\text{const} \cdot e^{-\frac{kt}{m}}\right] \quad \left[+\frac{mg}{k}\right], \tag{4.25}$$

где const из начальной установки, например:

$$v_y(0) = 0 \Rightarrow \text{const} = -\frac{mg}{k} \tag{4.26}$$

Теперь рассмотрим первоначальную задачу – движение снаряда под углом к горизонту.

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}_{\text{сопр}} \tag{4.27}$$

$$\begin{cases} m\frac{dv_x}{dt} = 0 - kv_x \\ m\frac{dv_y}{dt} = -mg - kv_y \end{cases} \tag{4.28}$$

$$\Rightarrow m\frac{dv_x}{v_x} = -kdt \Rightarrow \tag{4.29}$$

$$\Rightarrow \ln\frac{v_x(t)}{v_0\cos\alpha} = -\frac{kt}{m} \Rightarrow \tag{4.30}$$

$$\Rightarrow v_x(t) = v_0\cos\alpha e^{-\frac{kt}{m}} \tag{4.31}$$

$$\frac{dx}{dt} = v_0\cos\alpha e^{-\frac{kt}{m}} \tag{4.32}$$

$$\int_{x_0}^{x(t)} d\tilde{x} = \int_0^t v_0\cos\alpha e^{-\frac{k\tilde{t}}{m}} d\tilde{t} \tag{4.33}$$

$$\begin{aligned} x - x_0 &= (-\frac{m}{k})v_0\cos\alpha e^{-\frac{k\tilde{t}}{m}}\Big|_0^t = \\ &= -\frac{mv_0}{k}\cos\alpha(e^{-\frac{kt}{m}} - 1) = \\ &= \frac{mv_0}{k}\cos\alpha(1 - e^{-\frac{kt}{m}}) \end{aligned} \tag{4.34}$$

$$x = x_0 + \frac{mv_0}{k}\cos\alpha(1 - e^{-\frac{kt}{m}}) \tag{4.35}$$

$$\begin{aligned} k \to 0 \Rightarrow x &= x_0 + \frac{mv_0\cos\alpha}{k}\left(1 - 1 + \frac{kt}{m}\right) = \\ &= x_0 + v_0\cos\alpha t \end{aligned} \tag{4.36}$$

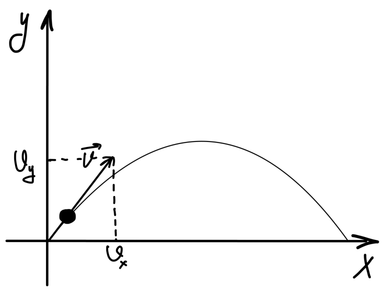


Рис. 4.3: снаряд, брошенный под углом к горизонту

$$m\frac{dV_y}{dt} = -(mg + kV_y) \tag{4.37}$$

$$m\int_{V_y(0)}^{V_y(t)} \frac{dV_y}{mg + kV_y} = -\int_0^t d\tilde{t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\frac{m}{k}) \ln\left|mg + k\tilde{V_y}\right| \Bigg|_{V_0 \sin\alpha}^{v_y(t)} = -t \tag{4.38}$$

$$\frac{mg + kV_y(t)}{mg + kV_0 \sin\alpha} = e^{-\frac{kt}{m}} \tag{4.39}$$

$$mg + kV_y(t) = (mg + kV_0 \sin\alpha)\ e^{-\frac{kt}{m}} \tag{4.40}$$

$$V_y = (\frac{mg}{k} + V_0 \sin\alpha)\ e^{-\frac{kt}{m}} - \frac{mg}{k} \tag{4.41}$$

$$V_y(t) = (V_\infty + V_0 \sin\alpha)\ e^{-\frac{kt}{m}} - V_\infty \tag{4.42}$$

$$\begin{aligned} k \to 0 \quad V_y(t) &= (V_\infty + V_0 \sin\alpha)\ e^{-\frac{gt}{V_\infty}} - V_\infty = \\ &= (V_\infty + V_0 \sin\alpha) \left(1 - \frac{gt}{v_\infty}\right) - V_\infty = \\ &= V_\infty - gt + V_0 \sin\alpha - \frac{V_0 \sin\alpha gt}{V_\infty} - V_\infty = \\ &= V_0 \sin\alpha - gt - \frac{V_0 \sin\alpha}{m} kt \end{aligned} \tag{4.43}$$

$$y(t) - y(0) = (V_\infty + V_0 \sin\alpha) \left(e^{-\frac{gt}{V_\infty}} - 1\right) \left(-\frac{V_\infty}{g}\right) - V_\infty t \tag{4.44}$$

$$y(t) = y(0) + \frac{V_\infty}{g}(V_\infty + V_0 \sin\alpha) \left(1 - e^{-\frac{gt}{V_\infty}}\right) - V_\infty t. \tag{4.45}$$

4.3 Зависимость силы от координаты

Рассмотрим силу как функцию от координаты $F(x)$; тогда второй закон Ньютона выглядит как

$$ma = F(x). \tag{4.46}$$

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = F(x), \tag{4.47}$$

$$\text{Учитывая, что } \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v \implies \frac{\mathrm{d}x}{v} = \mathrm{d}t \tag{4.48}$$

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}v = F(x) \tag{4.49}$$

$$mv\mathrm{d}v = F(x)\mathrm{d}x. \tag{4.50}$$

Интегрируя обе части от значений скорости и координаты в начале движения до таковых в конце, получаем

$$m\int\limits_{v_0}^{v}\tilde{v}\mathrm{d}\tilde{v} = \int\limits_{x_0}^{x}F(\tilde{x})\mathrm{d}\tilde{x} \tag{4.51}$$

$$m\left.\frac{\tilde{v}^2}{2}\right|_{v_0}^{v} = \int\limits_{x_0}^{x}F(\tilde{x})\mathrm{d}\tilde{x} \tag{4.52}$$

$$v^2 - v_0^2 = \frac{2}{m}\int\limits_{x_0}^{x}F(\tilde{x})\mathrm{d}\tilde{x} \tag{4.53}$$

$$v = \sqrt{v_0^2 + \frac{2}{m}\int\limits_{x_0}^{x}F(\tilde{x})\mathrm{d}\tilde{x}} \tag{4.54}$$

$$\text{где } v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \tag{4.55}$$

$$\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{v_0^2 + \frac{2}{m}\int\limits_{x_0}^{x}F(\tilde{x})\mathrm{d}\tilde{x}}}. \tag{4.56}$$

$$\tag{4.57}$$

Найдём время движения: для упрощения вычислений примем начальную скорость v_0 и время начала движения нулевыми, оставив начальную координату x_0 произвольной. Будем рассматривать конкретный случай, когда сила прямо пропорциональна координате ($F(x) = \gamma x$, где $\gamma > 0$).

$$\int\limits_{0}^{t}\mathrm{d}\tilde{t} = \int\limits_{x_0}^{x}\frac{\mathrm{d}\tilde{x}}{\sqrt{\frac{2}{m}\int\limits_{x_0}^{x}\gamma\tilde{\tilde{x}}\mathrm{d}\tilde{\tilde{x}}}} \tag{4.58}$$

$$t = \int\limits_{x_0}^{x}\frac{\mathrm{d}\tilde{x}}{\sqrt{\frac{2}{m}}\sqrt{\gamma\frac{\tilde{x}^2 - x_0^2}{2}}} \tag{4.59}$$

$$t = \int\limits_{x_0}^{x}\frac{\mathrm{d}\tilde{x}}{\sqrt{\frac{\gamma}{m}}\sqrt{\tilde{x}^2 - x_0^2}} \tag{4.60}$$

$$t = \sqrt{\frac{m}{\gamma}}\int\limits_{x_0}^{x}\frac{\mathrm{d}\tilde{x}}{x_0\sqrt{\frac{\tilde{x}}{x_0}^2 - 1}} \tag{4.61}$$

Обозначим $y = \dfrac{\tilde{x}}{x_0}$

$$t = \sqrt{\frac{m}{\gamma}} \int\limits_{1}^{\frac{x}{x_0}} \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y^2-1}} \tag{4.62}$$

$$t = \sqrt{\frac{m}{\gamma}} \ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2-x_0^2}}{x_0}\right|. \tag{4.63}$$

4.4 Реактивное движение

Рассмотрим систему, части которой изменяют массу. На систему может действовать внешняя сила.
Пусть $p(t)$ - импульс системы в начальный момент времени.

$$\vec{p}(t) = \vec{P} = M\vec{V} \tag{4.64}$$

$$\begin{aligned} \vec{p}(t+dt) &= \vec{P} + d\vec{P} + \vec{V}_m \cdot dm = \\ &= M\vec{V} + Md\vec{V} + \vec{V}dM + \vec{V}_m dm, \end{aligned} \tag{4.65}$$

$d\vec{P}$ находим по правилу дифференцирования сложной функции : $d(M\vec{V}) = Md\vec{V} + \vec{V}dM$

Где $(\vec{P} + d\vec{P})$ - изменение импульса ракеты, $\vec{V}_m$ - скорость относительно лабораторной системы отчёта.

$$\vec{p}(t+dt) - \vec{p}(t) = \vec{F}(t)dt \tag{4.66}$$

$$Md\vec{V} + \vec{V}dM + \vec{V}_m dm = \vec{F}(t)dt \tag{4.67}$$

Понятно, что $dm = -dM$, т.е. $m + M = const$

$$Md\vec{V} + (\vec{V} - \vec{V}_m)dM = \vec{F}(t)dt \tag{4.68}$$

$\vec{V} \sim u$, $\vec{V}_m \sim v$

$$Md\vec{V} - \vec{V_{\text{отн}}}dM = \vec{F}(t)dt \tag{4.69}$$

$$\boxed{M(t)\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F}(t) + \vec{V}_{\text{отн}}\frac{dM}{dt}} \text{ – Уравнение Мещерского.} \tag{4.70}$$

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \vec{v}\,' + \vec{u} \\ \Rightarrow \vec{v}\,' &= \vec{v} - \vec{u}. \end{aligned}$$

Рассмотрим решения данного уравнения.

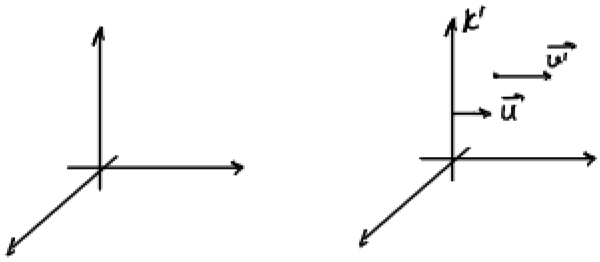


Рис. 4.4: Направления $\vec{u}$ $\vec{v}\,'$

1. Внешние силы отсутствуют и движение одномерно.

$$M\frac{\mathrm{d}\vec{V}}{\mathrm{d}t} = 0 + \vec{V}_{\text{отн}}\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} \tag{4.71}$$

$$M\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -V_{\text{отн}}\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} \tag{4.72}$$

$$\mathrm{d}V = -V_{\text{отн}}\frac{\mathrm{d}M}{M}. \tag{4.73}$$

Интегрируя обе части от начального до конечного момента, получаем

$$V_{\text{отн}}\ln\frac{M_{\text{кон}}}{M_{\text{нач}}} = -(V - V_0). \tag{4.74}$$

$$\boxed{V = V_0 - V_{\text{отн}}\ln\frac{M_{\text{кон}}}{M_{\text{нач}}}} \text{ — формула Циолковского.} \tag{4.75}$$

2. Движение происходит в поле силы тяжести, масса изменяется линейно: $M = M_0(1-\alpha t)$. Найдём производную массы по времени и запишем уравнение Мещерского для этой ситуации:

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} = -M_0\alpha \tag{4.76}$$

$$M_0(1-\alpha t)\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -M_0(1-\alpha t)g + V_{\text{отн}}M_0\alpha \tag{4.77}$$

$$\mathrm{d}V = \left(-g + \frac{V_{\text{отн}}\alpha}{1-\alpha t}\right)\mathrm{d}t. \tag{4.78}$$

Интегрируя обе части от начального до конечного момента времени, получаем

$$V - V_0 = -gt + V_{\text{отн}}\alpha \cdot \frac{1}{-\alpha}\ln\frac{1-\alpha t}{1} \tag{4.79}$$

$$V = V_0 - gt + V_{\text{отн}}\ln\frac{1}{1-\alpha t}. \tag{4.80}$$

Лекция 5.
Механическая работа. Энергия

Работа (интуитивная версия): что-то, что определяется прикладываемой силой объемом "результатов которых мы достигли, прикладывая данную силу.

Определение. Механическая работа - скалярная количественная мера действия силы (равнодействующей сил) на тело или сил на систему тел. Зависит от численной величины и направления силы (сил) и от перемещения тела (системы тел). Элементарная работа равна скалярному произведению силы, действующей на тело, на вектор бесконечно малого перемещения:

$$\delta A = \vec{F} \cdot d\vec{r} \ = \ (\vec{F}, d\vec{r}) \ = \ |\vec{F}| \cdot |d\vec{r}| \cdot \cos\left(\angle(\vec{F}, d\vec{r})\right). \tag{5.1}$$

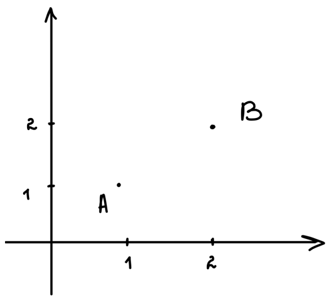


Рис. 5.1: Выполнение работы из точки A в точку B.

Пример. Пусть B(x,y) = 3xy + 8y, тогда dB:

$$dB \ = \ 3ydx \ + \ 3xdy \ + \ 8dy \ = \ (3y, 3x \ + \ 8) \cdot (dx, dy) \ = \ \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

$$\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} \ = \ \int_A^B dB \ = \ 12 \ + \ 16 \ - \ (3 \ + \ 8) \ = \ 17.$$

Или $\Rightarrow$

$$\int_A^B \ = \ \int_{1,1}^{2,1} + \int_{2,1}^{2,2} \ = \ 3 \cdot \int_1^2 dx \ + \ 14 \cdot \int_1^2 dy \ = \ 17.$$

$$\int_A^B = \int_{1,1}^{1,2} + \int_{1,2}^{2,2} = 11 \cdot \int_1^2 dy + 6 \cdot \int_1^2 dx = 17.$$

А если:

$\vec{F} = (3y^2, 4x + 8)$, т.е. нельзя найти такое u: dB $= (\vec{P}, d\vec{r})$

$$\int_A^B = \int_{1,1}^{2,2} + \int_{2,1}^{2,2} = 3 \cdot \int_1^2 dx + 16 \cdot \int_1^2 dy = 19.$$

$$\int_A^B = \int_{1,1}^{1,2} + \int_{1,2}^{2,2} = 12 \cdot \int_1^2 dy + 12 \cdot \int_1^2 dx = 24.$$

$19 \neq 24$, т.е. $3y^2dx + (4x + 8)dy$ - не полный дифференциал, а $3ydx + (3x + 8)dy$ - полный дифференциал.

Выведем условие (в двумерии) того, что сила является потенциальной, тогда

$$\begin{aligned} &F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial F_x}{\partial y} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \\ &F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial F_y}{\partial x} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \\ &\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} \\ &\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} = [\nabla \times \vec{F}]_z = 0 \end{aligned} \tag{5.2}$$

В трёхмерном случае условие потенциальности силы будет выглядеть аналогично, только за счёт того, что у нас не 2 координаты, а 3, надо будет приравнивать к 0 разности частных производных проекций силы F для всех пар координат (их всего 3) : $[\nabla \times \vec{F}] = 0$

Про дифференциальный оператор набла немножко написано здесь и здесь

5.1 Полная работа

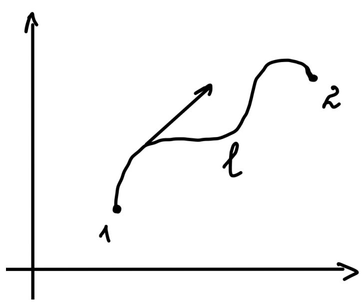


Рис. 5.2: Выполнение работы из точки 1 в точку 2.

$$A = \int_l (\vec{F}, d\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N} \int_l (\vec{F}_i, d\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N} A_i. \tag{5.3}$$

Под суммой здесь подразумевается: $\vec{F} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i$.

Размерность работы: [A] = Дж.

Важной характеристикой того, как совершается работа, является **мощность** - скалярная физическая величина, равная скорости совершения работы: $P = \dfrac{dA}{dt}$.

Мощность измеряется в Ваттах.

Обозначение: [P] = Вт.

Поговорим еще о способах вычисления работы.

С точки зрения математики $\int \vec{F} \cdot d\vec{r}$ - криволинейный интеграл второго рода.

Как видно, все зависит от вектора $\vec{F}$. Если силы консервативны (потенциальные), то работа не зависит от траектории, зависит лишь от начального и конечного положения материальной точки.

Есть еще диссипативные силы (сила трения) и гироскопические.

Рассмотрим стандартный случай: найти минимальную работу силы $\vec{F}$:

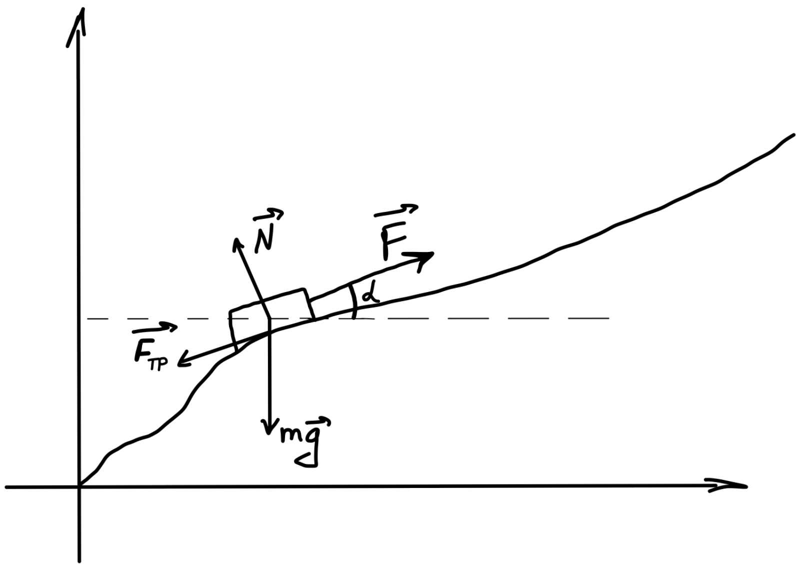


Рис. 5.3: Движение тела по наклонной плоскости.

Первый взгляд: т.к. $\vec{F} \sim d\vec{r}$, то есть сонаправлена перемещению $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \vec{F} \cdot d\vec{r} = |\vec{F}| \cdot |d\vec{r}| \cdot \cos(\angle(\vec{F}, d\vec{r})) = F \cdot dS \tag{5.4}$$

$$dS = \sqrt{dx^2 + dy^2} \tag{5.5}$$

Если α - угол наклона касательной к траектории, то $dx = dS \cdot \cos\alpha$, $dy = dS \cdot \sin\alpha$. Запоминаем 2-ой закон Ньютона в мгновенных осях (вдоль касательной и перпендикулярно ей)

$$\begin{cases} ma_\tau = F - F_{\text{тр}} - mg \cdot \sin\alpha \\ ma_n = -mg \cdot \cos\alpha + N \end{cases} \tag{5.6}$$

$$F_{\text{тр}} = \mu(mg \cdot \cos\alpha + ma_n) \tag{5.7}$$
$$F = ma_\tau + mg \cdot \sin\alpha + \mu(mg\cos\alpha + ma_n) \tag{5.8}$$

$$F = mg\sin(\alpha) + \mu mg\cos(\alpha) + \mu m\frac{v^2}{R_{(x,y)}}(\text{знак}), \tag{5.9}$$

(Знак) = -, если дуга выпукла вверх
(Знак) = +, если дуга выпукла вниз
т.е.

$$\begin{aligned}
A &= \int_1^2 FdS = \int_1^2 ((mg\sin(\alpha) + \mu mg\cos(\alpha)) + F_{\text{тр Alt}})dS = \\
&= \int_1^2 mg\sin(\alpha)(S)dS + \int_1^2 \mu mg\cos(\alpha)(S)dS + \int_1^2 F_{\text{тр. Alt}}dS = \\
&= mg\int_1^2 dy_{=H} + \mu mg\int_1^2 dx_{=L} + \int_1^2 F_{\text{тр. alt}} + dS.
\end{aligned} \tag{5.10}$$

$\Rightarrow$ Зависит от способа проведения эксперимента.
Если же мы делаем это очень медленно $\Rightarrow$

$$\boxed{A = mgH + \mu mgL.} \tag{5.11}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\vec{r}\vec{F} &= \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \mu N\cos^2(\alpha)dS + N\cos(\alpha)\sin(\alpha)dS + mgdS\sin(\alpha) + \\
&+ N\mu\sin^2(\alpha)dS - N\cos(\alpha)\sin(\alpha)dS = \\
&= mgdy + \mu NdS = mgdy + \mu mg\cos(\alpha)dS,
\end{aligned} \tag{5.12}$$

где $N = mg\cos(\alpha)$.

$$\begin{cases} ma_x = F_x - F_{\text{тр}}\cos(\alpha) - N\sin(\alpha) \\ ma_y = F_y + N\cos(\alpha) - F_{\text{тр}}\sin(\alpha) - mg \end{cases}$$

Без ускорения $\Rightarrow$

$$\begin{cases} F_x = \mu N\cos(\alpha) + N\sin(\alpha), \\ F_y = mg + \mu N\sin(\alpha) - N\cos(\alpha). \end{cases}$$

5.2 Кинетическая энергия

Введём величину: $E_{\text{к}} = K = T = \frac{mv^2}{2}$ – кинетическая энергия материальной точки - скалярная физическая величина, равная половине произведения массы материальной точки на квадрат скорости её движения.
Зачем вводить такую величину?

Рассмотрим работу суперпозиции произвольных сил по перемещению материальной точки:

$$\begin{aligned}A &= \int_1^2 \vec{F} d\vec{r} = \int_1^2 \vec{F}\vec{v}dt = \\ &= \int_1^2 m\frac{d\vec{v}}{dt}\vec{v}dt = m\int_1^2 \vec{v}d\vec{v} = \\ &= m\int_1^2 vdv = m\int_1^2 \frac{dv^2}{2} = \int_1^2 d\frac{mv^2}{2} = \\ &= \left.\frac{mv^2}{2}\right|_1^2 = T_2 - T_1. \end{aligned} \tag{5.13}$$

Таким образом, суммарная работа сил по перемещению материальной точки равна разности её кинетических энергий.

$$\begin{aligned}&\vec{V}\cdot\vec{V} = V^2 \Rightarrow d(\vec{V},\vec{V}) = \vec{V}d\vec{V} + d\vec{V}\vec{V} = \\ &= 2(\vec{V}, d\vec{V}) = 2VdV \Rightarrow \\ &\Rightarrow \vec{V}\cdot d\vec{V} = VdV. \end{aligned} \tag{5.14}$$

Кинетическая энергия системы материальных точек есть сумма кинетических энергий всех материальных точек.
Кинетическая энергия **зависит** от выбора системы отсчёта!

$$T_{\text{системы}} = \sum_{i=1}^{N} T_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i v_i^2}{2}. \tag{5.15}$$

Напишем закон преобразования кинетической энергии при переходе к другой системе отсчёта:
K и K', пусть K' движется со скоростью $\vec{V}$ относительно $K, \vec{v}_i$ – скорость i-ой мат. точки в системе K, $\vec{v}_i\,'$ – скорость i-ой мат. точки в системе K', тогда $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}&\Rightarrow \vec{v}_i = \vec{v}_i\,' + \vec{V} \\ &\Rightarrow \vec{v}_i^2 = v_i^2 = \left(\vec{v}_i\,' + \vec{V}\right)^2 = \\ &= \vec{v}_i\,'^2 + 2\vec{v}_i\,'\vec{V} + \vec{V}^2 = \\ &= v_i'^2 + V^2 + 2\vec{v}_i\,'\vec{V}. \end{aligned} \tag{5.16}$$

$$\begin{aligned}&\Rightarrow T_{\text{к}} = \sum_{i=1}^{N}\frac{m_i v_i^2}{2} = \sum_{i=1}^{N}\frac{m_i}{2}\left(v_i'^2 + V^2 + 2\vec{v}_i\,'\vec{V}\right) = \\ &= T_{\text{к'}} + \frac{MV^2}{2} + \sum_{i=1}^{N} m_i\vec{v}_i\,'\vec{V} = \\ &= T_{\text{к'}} + \frac{MV^2}{2} + \left(\vec{P}_{k'}, \vec{V}\right). \end{aligned} \tag{5.17}$$

5.3 Теорема Кёнига

Вспоминаем:

$$\dot{\vec{r}}_c = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i\,\vec{v}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}, \quad \vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i\,\vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}, \tag{5.18}$$

Импульс в системе центра масс равен:

$$\sum_{i=1}^{N} m_i\,\vec{v}_i\,' = \sum_{i=1}^{N} m_i[\vec{v}_i - \vec{v}] = \sum_{i=1}^{N} m_i\,\vec{v}_i - M\cdot\frac{\sum_{i=1}^{N} m_i\,\vec{v}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} = 0. \tag{5.19}$$

Получаем теорему Кёнига : Полная кинетическая энергия системы равна сумме кинетической энергии системы в системе отсчёта центра масс этой системы и кинетической энергии поступательного движения центра масс.

$$T_k = T_{k'} + \frac{MV^2}{2}. \tag{5.20}$$

где $T_k \geqslant 0$ - полная кинетическая энергия системы k, $T_k\,'$ - полная кинетическая энергия системы k', $MV^2/2 \geqslant 0$ - кинетическая энергия центра масс. Таким образом, кинетическая энергия будет минимальна в системе центра масс.

5.4 Потенциальная энергия

В том случае, когда работа выполняется консервативными (потенциальными) силами, она будет равна изменению некоторой функции. Рассмотрим консервативную силу $\vec{F}$:

$$\begin{gathered}\delta A = \vec{F}\cdot d\vec{r}, \quad \oint \delta A = 0 \Rightarrow \delta A = dB,\\ \oint dB = 0 = \int_1^2 dB + \int_2^1 dB = B(2) - B(1) + B(1) - B(2) = 0,\\ \text{т. е. } dB = \vec{F}\cdot d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz = (\nabla B, d\vec{r}) = -dU = -(\nabla U, d\vec{r})\,. \end{gathered}\tag{5.21}$$

$$\boxed{\vec{F} = -\nabla U} \tag{5.22}$$

Определение : Потенциальная энергия $U(\vec{r})$ — скалярная физическая величина, представляющая собой часть полной механической энергии системы ($E = E_{\text{п}} + E_{\text{к}}$), находящейся в поле консервативных сил. Потенциальная энергия зависит от положения материальных точек, составляющих систему, и характеризует работу, совершаемую полем при их перемещении.

Небольшое математическое отступление : ∇ - векторный дифференциальный оператор набла, над ним обычно вектор не ставят

$$\nabla = \vec{e}_x\frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y\frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z\frac{\partial}{\partial z}.$$

$\vec{F}$ - Потенциальная сила, то есть выражается через ∇ скалярной функции U - потенциальной энергии.

Как еще это пояснить:

$$\begin{gathered}A_{12}^{\uparrow} = A_{12}^{\downarrow},\\ A_{12}^{\downarrow} + A_{21}^{\uparrow} = A_{12}^{\downarrow} + A_{21}^{\downarrow} = A_{12}^{\downarrow} - A_{12}^{\downarrow} = 0.\end{gathered}\tag{5.23}$$

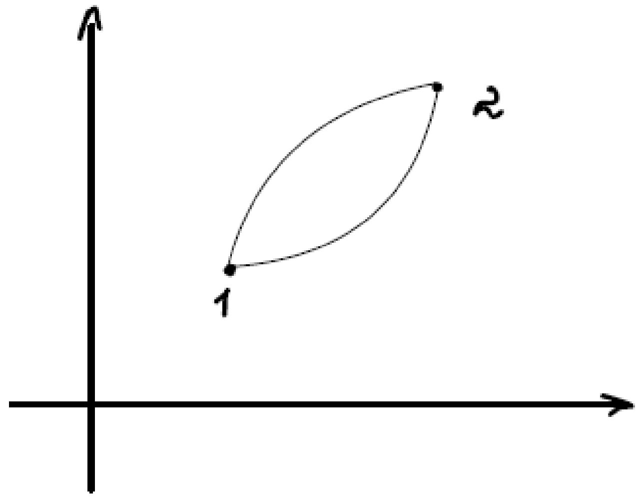


Рис. 5.4: Работа в зависимости от траектории.

5.5 Примеры

5.5.1 Работа силы тяжести

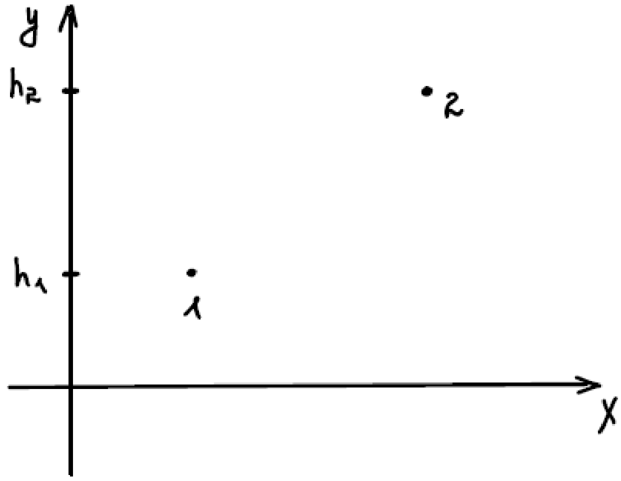


Рис. 5.5: Работа силы тяжести.

$$\int_1^2 \delta A = \int_1^2 \vec{F}\vec{dr} = \int_1^2 \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} =$$
$$= -mg \int_1^2 dy = -mg(h_2 - h_1) = -\int_1^2 dU = -(U_2 - U_1),$$
$$U = mgy + const. \tag{5.24}$$

5.5.2 Работа центральной силы

Центральная сила — такая сила, линия действия которой всегда проходит через какую-то заданную точку (силовой центр). Если обозначить радиус-вектор тела относительно силового центра как $\vec{r}$, то центральную силу можно выразить как

$$\vec{F}(\vec{r}) = f(r) \cdot \frac{\vec{r}}{r}. \tag{5.25}$$

Рассмотрим работу такой силы на примере Ньютоновой силы всемирного тяготения между объектами массами m и M:

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\gamma \frac{mM}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \tag{5.26}$$

$$\int_1^2 \delta A = \int_1^2 \vec{F}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{r} = -\gamma m M \int_1^2 \frac{\vec{r} \cdot \mathrm{d}\vec{r}}{r}, \tag{5.27}$$

где, при независимости работы от траектории, траекторию можно разложить на часть, сонаправленную силе ($\vec{r} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = r\mathrm{d}r$), и перпендикулярную ей ($\vec{r} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = 0$), то есть

$$= -\gamma m M \int_1^2 \frac{r\mathrm{d}r}{r^3} = -\gamma m M \int_1^2 \frac{\mathrm{d}r}{r^2} \tag{5.28}$$

$$= -\gamma m M \left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_1^2 = -\gamma m M \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \tag{5.29}$$

$$U = -\gamma \frac{mM}{r} + \mathrm{const}. \tag{5.30}$$

Для удобства потенциальную энергию бесконечно удалённого от силового центра объекта примем нулевой, что приводит нас к

$$U = -\gamma \frac{mM}{r}. \tag{5.31}$$

5.6 Полная механическая энергия

Рассмотрим векторную сумму всех N сил, действующих на некое тело. Разложим получившуюся равнодействующую силу на консервативную и неконсервативную компоненты $\vec{F}_{\textit{к}}$ и $\vec{F}_{\textit{нк}}$.

$$\sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k = \vec{F}_{\textit{к}} + \vec{F}_{\textit{нк}}. \tag{5.32}$$

Тогда работа этих сил при перемещении из некого положения 1 в положение 2

$$A_{1\to 2} = \int_1^2 \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} \tag{5.33}$$

$$= \int_1^2 \vec{F}_{\textit{к}} \cdot \mathrm{d}\vec{r} + \int_1^2 \vec{F}_{\textit{нк}} \cdot \mathrm{d}\vec{r} \tag{5.34}$$

$$= -(U_2 - U_1) + \int_1^2 \vec{F}_{\textit{нк}} \cdot \mathrm{d}\vec{r}. \tag{5.35}$$

При этом совершённая работа будет затрачена на изменение кинетической энергии тела,

$$A_{1\to 2} = T_2 - T_1. \tag{5.36}$$

$$T_2 - T_1 = -(U_2 - U_1) + \int\limits_1^2 \vec{F}_{\textit{нк}} \cdot \mathrm{d}\vec{r} \tag{5.37}$$

$$(T_2 - T_1) + (U_2 - U_1) = \int\limits_1^2 \vec{F}_{\textit{нк}} \cdot \mathrm{d}\vec{r} \tag{5.38}$$

$$(T_2 + U_2) - (T_1 + U_1) = \int\limits_1^2 \vec{F}_{\textit{нк}} \cdot \mathrm{d}\vec{r}. \tag{5.39}$$

$$\tag{5.40}$$

Величину $T+U$ называют полной механической энергией и обозначают E, что приводит нас к

$$E_2 - E_1 = \int\limits_1^2 \vec{F}_{\textit{нк}} \cdot \mathrm{d}\vec{r}. \tag{5.41}$$

Определение : Полная механическая энергия - скалярная физическая величина, равная сумме потенциальной и кинетической энергий : $E = T + U$.

Стоит заметить, что если в системе действуют лишь консервативные силы, то полная механическая энергия E сохраняется! Этот так называемый «интеграл движения» очень удобен при рассмотрении конкретных ситуаций.

Лекция 6.
Потенциальная энергия. Приложение

Итак, если силы консервативны (т.е. работа не зависит от траектории), то работа таких сил может быть выражена через изменение некой функции - потенциальной энергии.

$$\delta A \;=\; \vec{F}\cdot d\vec{r} \;=\; F_x\cdot dx \;+\; F_y\cdot dy \;+\; F_z\cdot dz \;=\; -dU(x,y,z). \tag{6.1}$$

$$F_x \;=\; -\frac{\partial U}{\partial x};\; F_y \;=\; -\frac{\partial U}{\partial y};\; F_z \;=\; -\frac{\partial U}{\partial z} \text{ - частные производные.}$$

Короткое обозначение: $\vec{F} \;=\; -\nabla U$

Оператор "набла"или "градиент"показывает направление роста (наискорейшего) у функции. На самом деле, градиент и набла - не одно и то же. Градиент - произведение вектора набла на какое-то скалярное поле, например $\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi = -\nabla\varphi$. Набла - более общее понятие, чем градиент, наблу можно скалярно умножать на векторное поле, тогда получается дифференциальный оператор дивергенция, например $\operatorname{div}\vec{E} = \nabla\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$ - теорема Гаусса в СИ в вакууме в дифференциальной форме. Более того, наблу можно векторно умножать на какое-то векторное поле, тогда получается дифференциальный оператор ротор, например $\operatorname{rot}\vec{E} = \nabla\times\vec{E} = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ - закон электромагнитной индукции в дифференциальной форме в СИ

Пример.

Сферически симметрический потенциал: u $= \alpha\cdot r^k$

$$\Rightarrow\; \vec{F} = -\nabla u \;= -\,\alpha\cdot k\cdot r^{k-2}(x\cdot\vec{e}_x \;+\; y\vec{e}_y \;+\; z\vec{e}_z).$$

$$-F_x = \frac{\partial}{\partial x}(\alpha r^k) \;=\; \frac{\partial}{\partial x}\alpha(x^2+y^2+z^2)^{\frac{k}{2}} \;=\; \alpha\cdot k\cdot r^{k-1}\frac{\partial r}{\partial x} \;=\; \alpha k\cdot r^{k-1}\cdot\frac{x}{r} =$$

$$= \alpha k\cdot x r^{k-2}.$$

$$\vec{F} \;=\; -\nabla u \;=\; -\alpha k r^{k-2}\vec{r} \;=\; -\alpha k r^{k-1}\frac{\vec{r}}{r} \;=\; -\alpha k r^{k-1}\vec{e_r}.$$

6.1 Интегрирование уравнение движения в случае потенциальных сил

В некоторых случаях можно извлечь полезную информацию из уравнения движения без его полного решения.

Пусть $U(\vec{r})$ – достаточно гладкая.

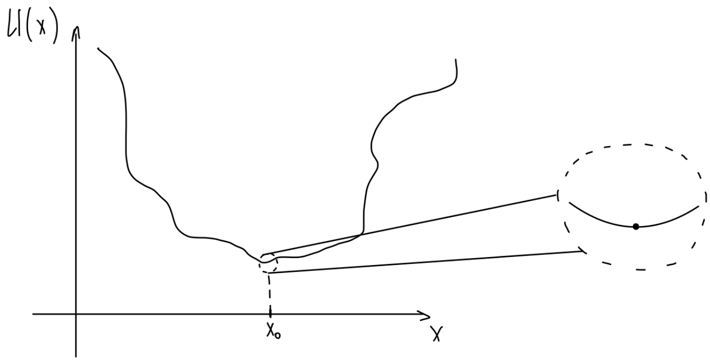


Рис. 6.1: Детализация минимума графика гладкой функции.

$$U(\vec{r}) \Rightarrow m\ddot{\vec{r}} \ = \ -\nabla U \ \Rightarrow m\ddot{x} \ = \ -\frac{\partial U}{\partial x}. \tag{6.2}$$

(Мы решили упростить себе задачу и вместо того, чтобы рассматривать трёхмерный случай, рассматриваем только одномерный, поэтому можем заменить наблу на частную производную потенциальной энергии по x)

В окрестности $(\cdot)$ x_0:

$$U(x) \ = \ U(x_0) \ + \ \frac{dU}{dx}\bigg|_{x=x_0}(x \ - \ x_0) \ + \ \frac{d^2U}{2! \cdot dx^2}\bigg|_{x=x_0}(x \ - \ x_0)^2 + O((x \ - \ x_0)^3). \tag{6.3}$$

(Используется разложение функции в ряд Тейлора в окрестности x_0)

Если мы рассмотрим систему в окрестности минимума, то: $\frac{dU}{dx}|_{x=x_0} = 0 \ \Rightarrow$

$$U(x) = \frac{1}{2!} \cdot \frac{d^2U}{dx^2}|_{x=x_0}(x - x_0)^2 \ \Rightarrow$$
$$U(x) \approx \frac{1}{2}k(x - x_0)^2 \Rightarrow m\ddot{x} = -k(x - x_0). \tag{6.4}$$

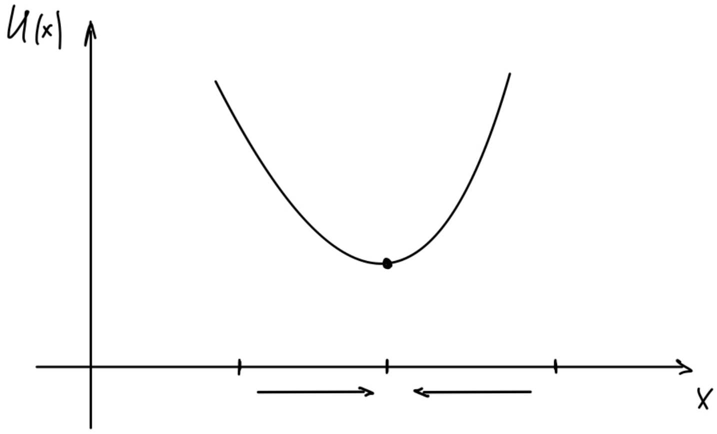


Рис. 6.2: График зависимости потенциальной энергии от координаты

$$-U'(x) = F(x) \tag{6.5}$$

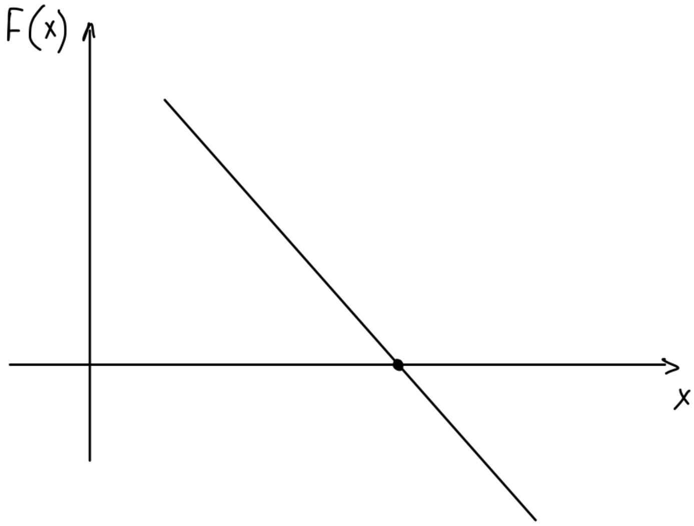


Рис. 6.3: График зависимости F(x) от x

В системе задана полная механическая энергия. Пусть у материальной точки будет энергия E, а в системе действуют только консервативные силы, то есть $E = T + U(x)$. Так как $T \geq 0 \Rightarrow E \geq U(x)$ - получаем неравенство на x.

Если $U(x) \leq E$ для любого x, то движение будет инфинитным;
Если же есть какой-то $[a, b]$, то движение будет финитным.

E_1 – инфинитное, E_2 – финитное.
Рассмотрим уравнение движения:

$$m\frac{d}{dt}v_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \tag{6.6}$$

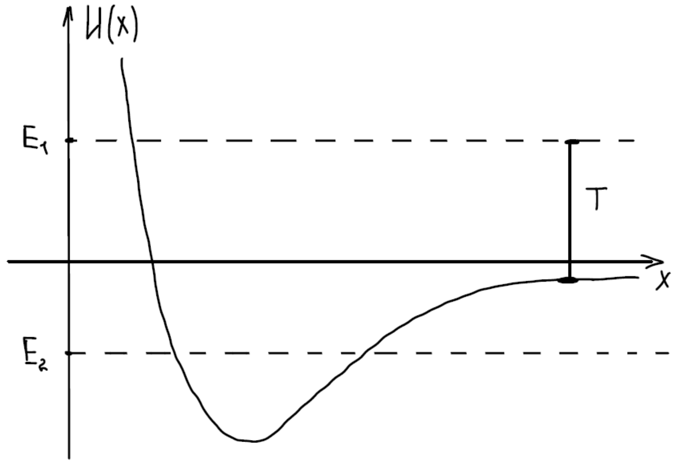


Рис. 6.4: Финитное (при E2) и инфинитное (при E1) движения.

однако, можем использовать интеграл движения:

$$E = U(x) + T. \tag{6.7}$$

$$m\frac{\dot{x}^2}{2} + U(x) = E, \tag{6.8}$$

$$\frac{m}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = E - U(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U(x)\right)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U(x)\right)}} = \int_0^{T/2} dt, \tag{6.9}$$

x_2, x_1 – точки поворота $U(x_{1,2}) = E$.
Либо для произвольного пр-ка:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U(x)\right)}} = t_2 - t_1. \tag{6.10}$$

Таким образом, период финитного движения:

$$T = 2\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}}. \tag{6.11}$$

Самый простой пример:

$$E = \frac{kx_{\max}^2}{2},\ E = -U(x) = \frac{k}{2}(x_{\max}^2 - x^2),$$

$$\Rightarrow T = 2\sqrt{\frac{m}{2}} \int\limits_{-x_{\max}}^{x_{\max}} \frac{dx}{\sqrt{x_{\max}^2 - x^2}}\sqrt{\frac{2}{k}} \tag{6.12}$$

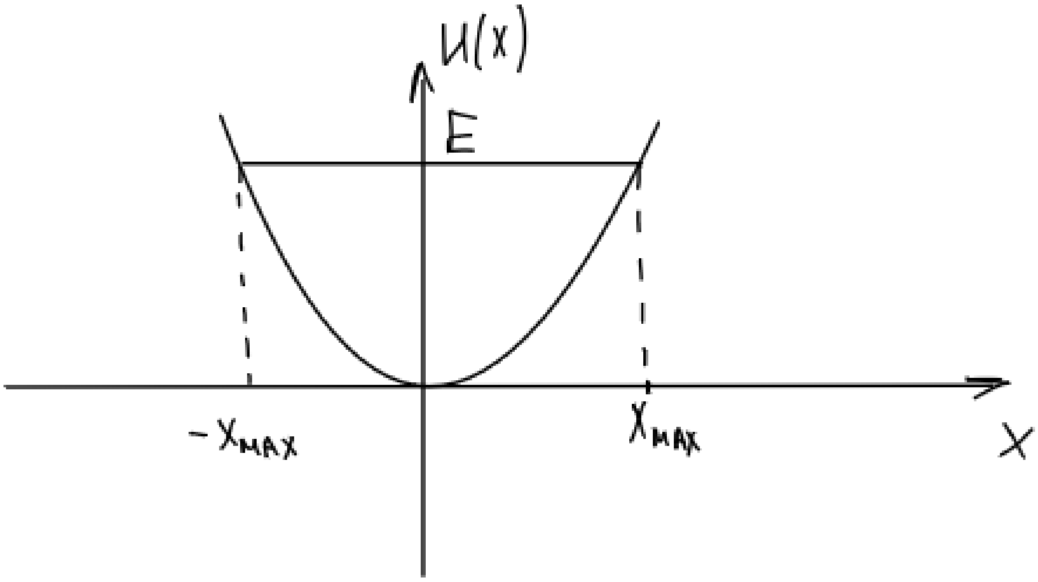


Рис. 6.5: Зависимость энергии от координаты.

Пусть $x = x_{\max}\cos\alpha \Rightarrow dx = -x_{\max}\sin\alpha d\alpha$:

$$2\sqrt{\frac{m}{2}}\int\limits_{-x_{\max}}^{x_{\max}}\frac{dx}{\sqrt{x_{\max}^2 - x^2}}\sqrt{\frac{2}{k}} = 2\sqrt{\frac{m}{k}}\left(-\int\limits_{\pi}^{0}\frac{x_{\max}\sin\alpha d\alpha}{x_{\max}\sin\alpha}\right) = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \tag{6.13}$$

6.2 Столкновение частиц

Бывают упругие и неупругие столкновения. При упругом столкновении сохраняется механическая энергия. При неупругих - не сохраняется, переходя в другие виды энергии, например, в тепловую (внутреннюю). В процессе столкновения не рассматривают изменение потенциальной энергии внешних полей, более того, если мы не сталкиваемся с аномальными поведениями силы, то можно считать, что импульс системы сохраняется.

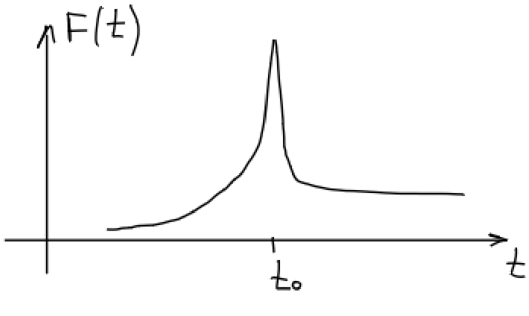


Рис. 6.6: Аномальное поведение силы.

t_0 - момент столкновения, $F(t) \sim \delta(t)$

Упругое столкновение двух материальных точек

Пусть скорости v_{11}, v_{21} - скорости до столкновения, а скорости v_{12}, v_{22} - скорости после столкновения. Запишем закон сохранения импульса и закон сохранения энергии:

$$\begin{cases} m_1v_{11} + m_2v_{21} = m_1v_{12} + m_2v_{22}, \\ m_1v_{11}^2 + m_2v_{21}^2 = m_1v_{12}^2 + m_2v_{22}^2. \end{cases}$$

Постановка задачи: пусть нам известны v_{11}, v_{21}, следовательно должны быть две пары решений, одно из которых тривиальное: $v_{12} = v_{11}$ и $v_{22} = v_{21}$. Теперь находим другое (физическое):

$$\begin{aligned} &\begin{cases} m_1(v_{11} - v_{12}) = m_2(v_{22} - v_{21}) \\ m_1(v_{11}^2 - v_{12}^2) = m_2(v_{22}^2 - v_{21}^2) \end{cases} \quad \Rightarrow \\ &\Rightarrow m_1(v_{11} - v_{12})(v_{11} + v_{12}) = m_2(v_{22} - v_{21})(v_{22} + v_{21}) \Rightarrow \\ &\Rightarrow v_{11} + v_{12} = v_{22} + v_{21}. \end{aligned} \tag{6.14}$$

Отсюда:

$$v_{21} = v_{11} + v_{12} - v_{22} \text{ или } v_{22} = (v_{11} - v_{21}) + v_{12}. \tag{6.15}$$

Подставим v_{22} в закон сохранения импульса:

$$m_1v_{11} + m_2v_{21} = m_1v_{12} + m_2[(v_{11} - v_{21}) + v_{12}]$$

$$v_{12} = \frac{m_1v_{11} + 2m_2v_{21} - m_2v_{11}}{m_1 + m_2} = 2V_{\text{c.m.}} - v_{11}. \tag{6.16}$$

$$v_{12} = 2V_{\text{c.m}} - v_{11} \tag{6.17}$$

$$v_{22} = 2V_{\text{c.m}} - v_{21}. \tag{6.18}$$

$$\tag{6.19}$$

Если бы всё это время мы работали в системе отсчёта, связанной с центром масс, то, очевидно, выполнялось бы

$$v'_{12} = -v'_{11}$$
$$v'_{22} = -v'_{21}.$$

Возьмём наше решение для общего случая

$$v_{12} = 2\,\frac{m_1v_{11} + m_2v_{21}}{m_1 + m_2} - v_{11} \tag{6.20}$$

$$v_{22} = 2\,\frac{m_1v_{11} + m_2v_{21}}{m_1 + m_2} - v_{21}, \tag{6.21}$$

После чего рассмотрим некоторые частные ситуации:

1. Рассмотрим столкновение тела с неподвижной стенкой очень большой массы.

$$v_{21} = 0$$
$$m_2 \to \infty.$$
$$V_{\text{c.m}} \approx 0$$
$$v_{12} = -v_{11}$$
$$v_{22} = 0.$$

И правда — после столкновения сама стенка не сдвинулась, а вот небольшое тело отразилось с той же по величине скоростью.

2. Рассмотрим столкновение одинаковых частиц.

$$\begin{aligned} &m_1 = m_2 \\ &v_{11} = -v_{21}. \\ &V_{\text{c.m}} = 0 \\ &v_{21} = -v_{11} \\ &v_{22} = -v_{21}. \end{aligned} \tag{6.22}$$

Упругое рассеяние

Если речь о рассеянии двух частиц, то задачу достаточно рассмотреть на плоскости. Для лучшего понимания физического смысла воспользуемся системой отсчёта, связанной с центром масс системы. Её общий импульс в такой системе будет нулевой, следовательно

$$\begin{aligned} &\vec{p}_{1c} + \vec{p}_{2c} = 0 \\ &\vec{p}_{11c} = -\vec{p}_{21c} \\ &\vec{p}_{12c} = -\vec{p}_{22c}. \end{aligned}$$

В отсутствии внешних сил общая кинетическая энергия системы сохранится.

$$T_{11c} + T_{21c} = T_{12c} + T_{22c} \tag{6.23}$$

$$\frac{\vec{p}_{11c}^{\,2}}{2m_1} + \frac{\vec{p}_{21c}^{\,2}}{2m_2} = \frac{\vec{p}_{12c}^{\,2}}{2m_1} + \frac{\vec{p}_{22c}^{\,2}}{2m_2} \tag{6.24}$$

$$\frac{\vec{p}_{11c}^{\,2}}{2m_1} + \frac{(-\vec{p}_{11c})^{\,2}}{2m_2} = \frac{\vec{p}_{12c}^{\,2}}{2m_1} + \frac{(-\vec{p}_{12c})^{\,2}}{2m_2} \tag{6.25}$$

$$\vec{p}_{11c}^{\,2}\left(\frac{1}{2m_1} + \frac{1}{2m_2}\right) = \vec{p}_{12c}^{\,2}\left(\frac{1}{2m_1} + \frac{1}{2m_2}\right) \tag{6.26}$$

$$\vec{p}_{11c}^{\,2} = \vec{p}_{12c}^{\,2}. \tag{6.27}$$

Из чего, довольно очевидно,

$$\begin{aligned} &|\vec{p}_{11c}| = |\vec{p}_{12c}| \\ &|\vec{p}_{21c}| = |\vec{p}_{22c}|. \\ &|\vec{v}_{11c}| = |\vec{v}_{12c}| \\ &|\vec{v}_{21c}| = |\vec{v}_{22c}|. \end{aligned}$$

Рассмотрим $m_1 < m_2$:

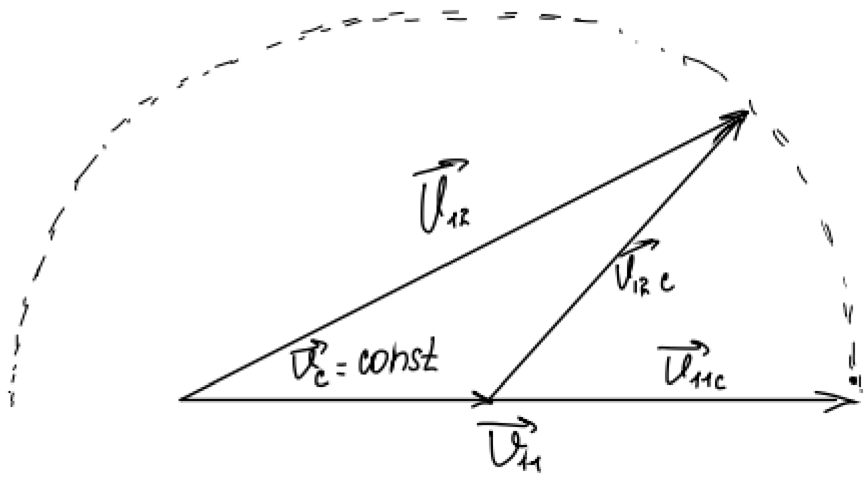


Рис. 6.7: Проекции скоростей в лабораторной системе отсчёта и системе центра масс.

Чтобы воспользоваться нашими предыдущими выводами, разложим скорость налетающей частицы на скорость центра масс и скорость в системе центра масс.

$$\begin{aligned} \vec{v}_c &= \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{v}_{11} \\ \vec{v}_{11} &= \vec{v}_c + \vec{v}_{11c}. \end{aligned} \tag{6.28}$$

Отсюда выводим, что

$$\begin{aligned} \vec{v}_{11c} &= \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{v}_{11} \\ \vec{v}_{21c} &= -\frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{v}_{11} \end{aligned}$$

При этом рассеяние может происходить на любой угол! Чтобы рассмотреть различные ситуации, достаточно «мысленно повертеть» вектор и убедиться, что все такие случаи удовлетворяют записанным уравнениям.

Рассмотрим $m_1 > m_2$:

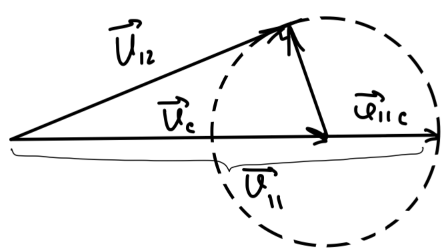


Рис. 6.8: Проекции скоростей.

$$\sin\alpha \;=\; \frac{m_2}{m_1}\text{, где } \alpha \text{ - максимальный угол}$$

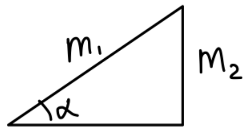


Рис. 6.9: Прямоугольный треугольник.

Рассмотрим случай, когда $m_1 = m_2$

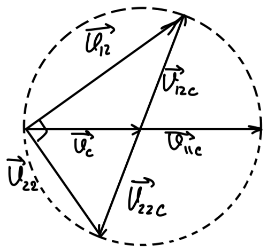


Рис. 6.10: Проекции скоростей.

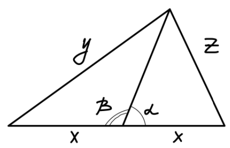


Рис. 6.11: Треугольник с медианой.

$$\begin{cases} y^2 \ = \ x^2 \ + \ x^2 \ - \ 2x^2\cos\beta \\ z^2 \ = \ x^2 \ + \ x^2 \ - \ 2x^2\cos\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 \ = \ 2x^2(1-\cos\beta) \\ z^2 \ = \ 2x^2(1-\cos\alpha) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 \ = \ 2x^2(1+\cos\alpha), \\ z^2 \ = \ 2x^2(1-\cos\alpha). \end{cases}$$

Проверка (должно быть $y^2 \ + \ z^2 \ = \ (2x)^2$, т.к. треугольник - прямоугольный):
$y^2 \ + \ z^2 \ = \ 2 \ \cdot \ 2x^2 \ \Rightarrow$ т.е. ✓

Неупругие столкновения.

Рассмотрим пример слипания:

$$m_1 \cdot \vec{v}_1 \ + \ m_2 \cdot \vec{v}_2 \ = \ (m_1 \ + \ m_2) \cdot \vec{u} \ \Rightarrow \ \vec{u} \ = \ \frac{m_1 \cdot \vec{v}_1 \ + \ m_2 \cdot \vec{v}_2}{m_1 \ + \ m_2}.$$

т.к. $T \ = \ T_{c.m.} \ + \ \frac{MV^2}{2}$, где $V \ = \ u$.

т.е. будет двигаться со скоростью центра масс.

$$\Delta T \ = \ \frac{m_1 \cdot V_1^2}{2} \ + \ \frac{m_2 \cdot V_2^2}{2} \ - \ \frac{(m_1 \ + \ m_2) \cdot u^2}{2} \ = \ \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{m_1 m_2 v_1^2 \ + \ m_1 m_2 v_2^2 \ - \ 2m_1 m_2 \vec{v}_1 \vec{v}_2}{m_1 \ + \ m_2} \right)$$

$$= \ \frac{1}{2} \cdot \mu \cdot (\vec{v}_1 \ - \ \vec{v}_2)^2.$$

А чему равна эта величина? С чем она совпадает?

До удара: $T_0 = T_{c.m.0} + \frac{Mu^2}{2}$ (неравные нулю)

После: $T = T_{c.m.} + \frac{Mu^2}{2}$, где $T_{c.m.} = 0$.

Отсюда видна энергия, которая может перейти в тепло.

$$
\begin{aligned}
&\vec{v} = \vec{v'} + \vec{u},\\
&T_{c.m} = \frac{m_1\vec{v_1'}^2}{2} + \frac{m_2\vec{v_2'}^2}{2} = \frac{m_1}{2}(\vec{v_1} - \vec{u})^2 + \frac{m_2}{2}(\vec{v_2} - \vec{u})^2 =\\
&= \frac{1}{2}\left[m_1\left(\frac{m_1\vec{v_1} + m_2\vec{v_1} - m_1\vec{v_1} - m_2\vec{v_2}}{m_1 + m_2}\right)^2 + m_2\left(\frac{m_1\vec{v_2} + m_2\vec{v_2} - m_1\vec{v_1} - m_2\vec{v_2}}{m_1 + m_2}\right)^2\right] =\\
&= \frac{1}{2}\left[m_1\left(\frac{m_2(\vec{v_1} - \vec{v_2})}{m_1 + m_2}\right)^2 + m_2\left(\frac{m_1(\vec{v_1} - \vec{v_2})}{m_1 + m_2}\right)^2\right] = \frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{(m_1 + m_2)^2}\cdot(m_2 + m_1)(\vec{v_1} - \vec{v_2})^2 =\\
&= \frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}(\vec{v_1} - \vec{v_2})^2 = \frac{1}{2}\mu(\vec{v_1} - \vec{v_2})^2 \quad \square
\end{aligned}
$$

То же самое.
Таким образом, отдаётся вся кинетическая энергия в системе центра масс.

Лекция 7.
Момент количества движения

Возникновение момента импульса обычно происходит, когда речь заходит о вращательном движении. Наивное определение. Рассмотрим материальную точку, которая вращается по окружности с постоянной по модулю скоростью ($|\vec{v}| = const$):

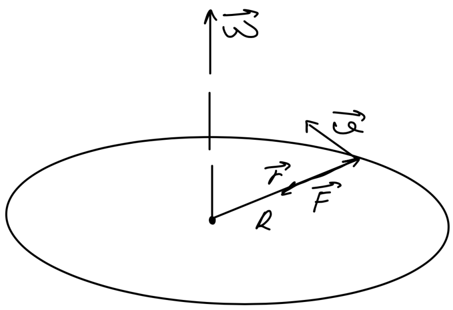


Рис. 7.1: Вращение материальной точки.

$$F_n = ma_n;\ F_\tau = F$$
$$a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R;\ mR^2\frac{d\omega}{dt} = F \cdot R$$
$$L = m\omega R^2 = mvR. \tag{7.1}$$

Прежде, чем дать полное определение нам надо разобраться с векторным произведением $\vec{c} : \vec{c} = [\vec{a} \times \vec{b}] = \vec{a} \times \vec{b}$

$$\vec{c} \overset{def}{=} \begin{Vmatrix} \vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{Vmatrix} = \vec{e_x}(a_y \cdot b_z - a_z \cdot b_y) + (-1)\vec{e_y}(a_x \cdot b_z - a_z \cdot b_x) + \vec{e_z}(a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x). \tag{7.2}$$

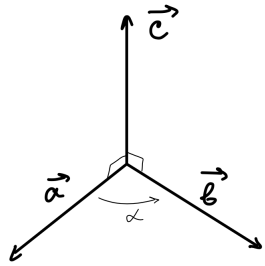


Рис. 7.2: Иллюстрация векторного умножения угловой скорости и радиуса кривизны.

$$|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}| \cdot \sin\alpha. \tag{7.3}$$

Важное замечание : вектор $\vec{c}$ перпендикулярен векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, однако это всё ещё не определяет направление вектора $\vec{c}$ - он может смотреть как вверх, так и вниз. Направление вектора $\vec{c}$ определяется по правилу правого винта : если правый винт вращать по направлению от вектора $\vec{a}$ к вектору $\vec{b}$, то его поступательное движение укажет на направление результирующего вектора (правый винт для себя легко представить с помощью правой руки)

Например, при помощи [$\vec{...}$ $\times$ $\vec{...}$] можно записать скорость через $\vec{\omega}$ и $\vec{R}$ (радиус кривизны): $\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{r}]$.

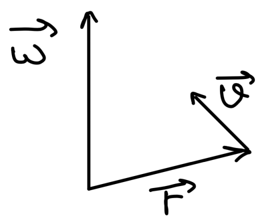


Рис. 7.3: Результат векторного умножения.

7.1 Момент силы

Определение : Момент силы - векторная физическая величина, равная векторному произведению вектора, проведённого от оси вращения к точке, к которой приложена сила, на вектор этой силы :
$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}]$.

Посмотрим на него сверху:

$$|\vec{M}| = M = |\vec{F}||\vec{r}| \cdot \sin\alpha; \tag{7.4}$$
$$|\vec{r}| = r; |\vec{r}| \cdot \sin\alpha = l - \text{плечо}. \tag{7.5}$$

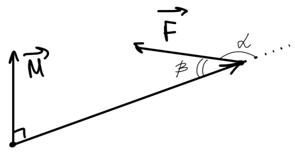


Рис. 7.4: Вид сбоку.

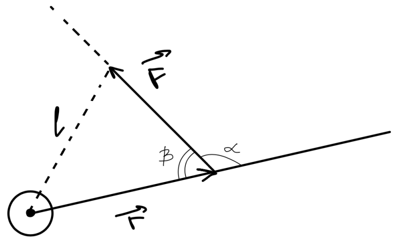


Рис. 7.5: Вид сверху.

Момент силы является аддитивной величиной:
Момент сил системы материальных точек равен сумме моментов сил для каждой материальной точки:

$$\vec{M} = \sum_i \vec{M}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i \tag{7.6}$$

Запишем правило преобразования момента силы при переходе из одной системы отсчёта в другую:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i\,' + \vec{R}. \tag{7.7}$$

$$\begin{aligned} \vec{M} &= \sum_i \left(\vec{r}_i\,' + \vec{R}\right) \times \vec{F}_i = \\ &= \sum_i \vec{r}_i\,' \times \vec{F}_i + \vec{R} \times \sum_i \vec{F}_i = \\ &= \vec{M}\,' + \vec{R} \times \vec{F}, \qquad \blacksquare \end{aligned} \tag{7.8}$$

$\vec{F}$ – равнодействующая всех сил.

Небольшое замечание : в векторном произведении можно раскрывать скобки, однако нельзя менять порядок множителей, так как это приведёт к изменению знака векторного произведения

7.2 Момент импульса

Момент импульса материальной точки - векторная физическая величина, равная векторному произведению радиус вектора точки, проведённого от оси вращения, на вектор импульса этой точки :

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}. \tag{7.9}$$

Для системы материальных точек:

$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i. \tag{7.10}$$

Как преобразуется момент импульса (если $\vec{r}_i = \vec{r}_i\,' + \vec{R}$):

$$\begin{aligned}
\vec{L} &= \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \sum_i \left(\vec{r}_i\,' + \vec{R}\right) \times m_i \left(\vec{v}_i\,' + \vec{V}\right) = \\
&= \sum_i m_i \vec{r}_i\,' \times \vec{v}_i\,' + \sum_i m_i \vec{r}_i\,' \times \vec{V} + \sum_i m_i \vec{R} \times \vec{v}_i\,' + \sum_i m_i \vec{R} \times \vec{V} = \\
&= \vec{L}\,' + (-\vec{V}) \times \sum_i m_i \vec{r}_i\,' + \vec{R} \times \sum_i m_i \vec{v}_i\,' + M\vec{R} \times \vec{V} = \\
&= \vec{L}\,' + M[\vec{R}\,'_{c.m.} \times \vec{V}] + \vec{R} \times \vec{p}\,' + M\vec{R} \times \vec{V}.
\end{aligned} \tag{7.11}$$

$\vec{R}\,'_{c.m.} = \dfrac{\sum_i m_i \vec{r}_i\,'}{M}$ - по определению радиус-вектора центра масс

Выражение упрощается для системы центра масс *(c.m.)*:

$$\boxed{\vec{L} = \vec{L}_{c.m.} + M\vec{R}_{c.m.} \times \vec{V}_{c.m.},} \tag{7.12}$$

$$\vec{p}\,' = 0, \quad \vec{R}\,'_{c.m.} = 0.$$

Получим связь между $\vec{L}$ и $\vec{M}$:

1. Для одной материальной точки:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \tag{7.13}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{L}}{dt} &= \frac{d}{dt}\vec{r} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \\
&= \vec{v} \times m\vec{v} + \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}.
\end{aligned} \tag{7.14}$$

$\vec{v}||m\vec{v}$, поэтому $\vec{v} \times m\vec{v} = 0$ (синус угла между сонаправленными векторами $= 0$)

$\dfrac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$ - второй закон Ньютона в импульсной форме

2. Для системы материальных точек:

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{L}}{dt} &= \sum_i \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \sum_i \left[\frac{d}{dt}\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i + \vec{r}_i \times m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt}\right] = \\
&= \sum_i m_i \vec{r}_i \times \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum_i \vec{M}_i. \qquad \blacksquare
\end{aligned} \tag{7.15}$$

$\dfrac{d}{dt}\vec{r}_i = \vec{v}_i||m\vec{v}_i \Rightarrow \dfrac{d}{dt}\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i = 0$

Закон сохранения момента импульса **(ЗСМИ)**: момент импульса системы материальных точек сохраняется, если на систему не действуют внешние силы, либо суммарный момент внешних сил равен нулю.

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{L}}{dt} &= \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \left(\vec{F}_i^{ext} + \sum_{k\neq i} \vec{F}_{ki}\right) = \\ &= \sum_i \vec{r}_i \times F_i^{ext} + \sum_{i,k\neq i} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ki} = \\ &= \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{ext} + \sum_{i,k>i} (\vec{r}_i - \vec{r}_k) \times \vec{F}_{ki} = \\ &= \sum_i \vec{M}_i^{ext}. \qquad \blacksquare \end{aligned} \tag{7.16}$$

Как мы можем заметить, суммарный момент импульса системы меняется только при наличии момента внешних сил $\vec{M}_i^{ext}$.

Пример: посчитаем предыдущее выражение для случая трёх сил ($N = 3$), тогда:

$$\sum_{i,k\neq i} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ki} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_{21} + \vec{r}_1 \times \vec{F}_{31} + \vec{r}_2 \times \vec{F}_{12} + \vec{r}_2 \times \vec{F}_{32} + \vec{r}_3 \times \vec{F}_{13} + \vec{r}_3 \times \vec{F}_{23} =$$

т.к. $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$ и т.д., то

$$= (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \times \vec{F}_{12} + (\vec{r}_3 - \vec{r}_1) \times \vec{F}_{13} + (\vec{r}_3 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_{23} = 0. \tag{7.17}$$

Данный закон сохранения связан с особенностью пространства, называемой **изотропностью**.
Интересен случай: $\vec{F} \sim \vec{r} \Rightarrow \vec{M} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{const}$.
Рассмотрим случай движения вокруг фиксированной оси: найдём проекцию момента импульса вдоль оси OZ:

$$L_z = (\vec{r} \times \vec{p})_z = ((\vec{r}_\parallel + \vec{r}_\perp) \times (\vec{p}_\parallel + \vec{p}_\perp))_z = (\vec{r}_\perp \times \vec{p}_\perp)_z = L_z. \tag{7.18}$$

Если же точка вращается вокруг оси OZ:

$$\begin{aligned} &L_z = R \cdot mv = \omega R^2 \cdot m \\ &\frac{dL_z}{dt} = mR^2 \cdot \frac{dw}{dt} = F \cdot R \cdot \sin(\alpha). \end{aligned} \tag{7.19}$$

момент инерции: $I = mR^2$.

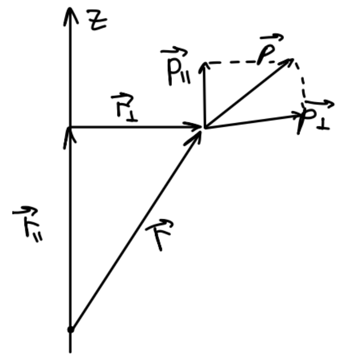


Рис. 7.6: Движение вокруг фиксированной оси.

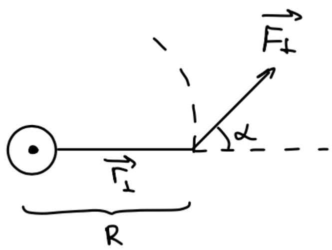


Рис. 7.7: Вид сверху.

7.3 Движение в центральном поле (Кулоновский и гравитационный потенциал)

Рассмотрим рассеяние α - частиц (ядра гелия) на ядрах золота. (Эрнест Резерфорд 1911 год, опыт по определению структуры атома.)

7.3.1 Рассеяние в кулоновском поле

Анализ такой задачи позволяет объяснить проведенный эксперимент Резерфорда в 1911 г. На неподвижные мишени (ядра атомов золота) налетают положительные частицы (более лёгкие) ядра атомов гелия (α - частицы). В силу симметрии достаточно рассмотреть данную задачу в плоскости (переходим в полярную систему координат).

$$\begin{aligned}&\vec{v} = \dot{\vec{r}}, \vec{r} = \rho \vec{e}_\rho,\\ &\vec{v} = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\vec{e}}_\rho = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi \end{aligned} \tag{7.20}$$

Мы уже знаем, что

$$\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{F}] = 0 \Rightarrow \vec{L} = const,$$
$$\vec{L} = L_z \cdot \vec{e}_z,$$
$$\vec{L} = [\vec{r} \times m\vec{v}] = [\rho\vec{e}_\rho \times m(\dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi)] = \rho^2 m\dot{\varphi}[\vec{e}_\rho \times \vec{e}_\varphi] = \rho^2 m\dot{\varphi}\begin{Vmatrix} e_\rho & e_\varphi & e_z \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix} = \rho^2 m\dot{\varphi}\vec{e}_z, \tag{7.21}$$

Где $\rho^2\dot{\varphi}m = L_z$.

$$L_z = m\rho^2\dot{\varphi} = const = L_z(0). \tag{7.22}$$

Однако более корректная формула через μ:

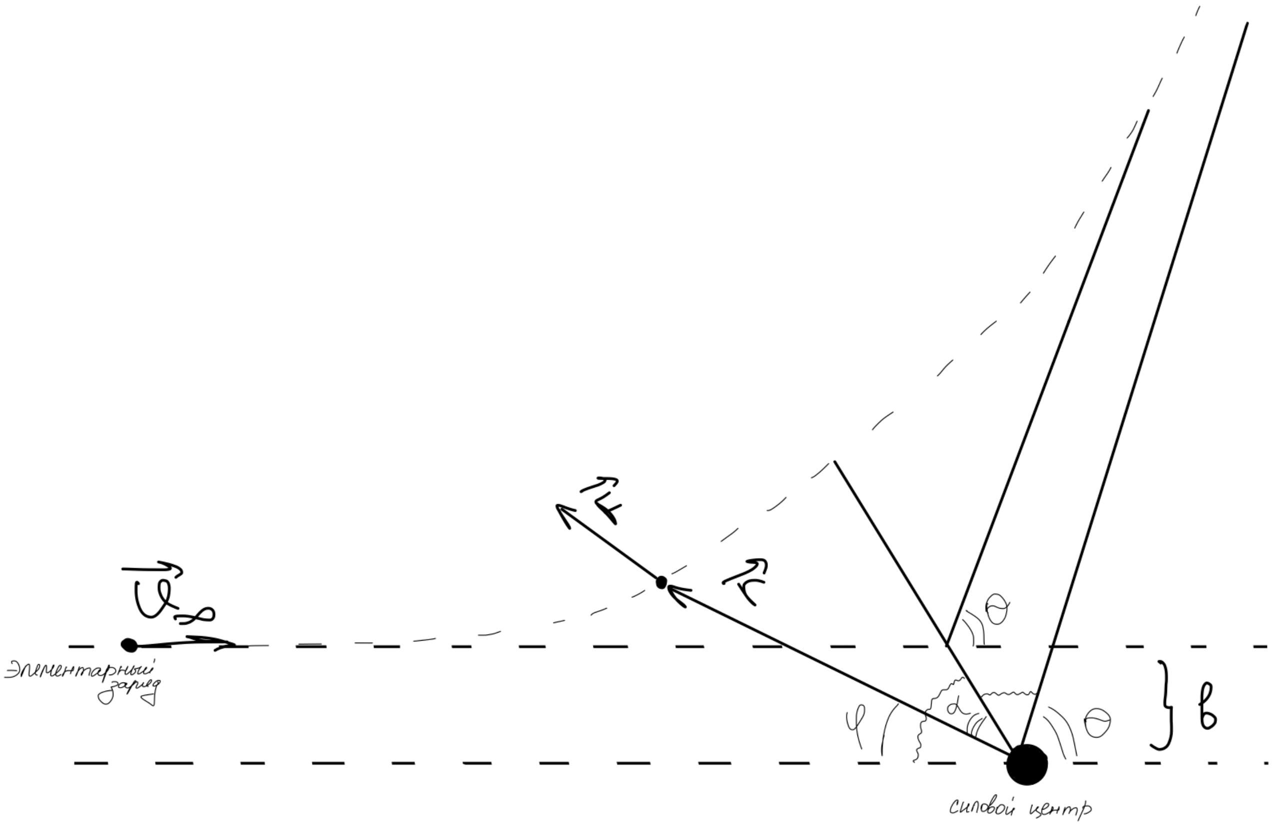


Рис. 7.8: Рассеяние в кулоновском поле.

$$\mu = \frac{m \cdot M}{m + M} \Rightarrow \mu\ddot{\vec{r}} = \vec{F} = \vec{F}_{12}. \tag{7.23}$$

$$\vec{F} = k\frac{q_1 q_2}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}. \tag{7.24}$$

$$\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{F}] = 0, \tag{7.25}$$

$$\vec{L} = [\vec{r} \times \mu\vec{v}], \tag{7.26}$$

$$\dot{\vec{L}} = [\dot{\vec{r}} \times \mu\vec{v}] + [\vec{r} \times \mu\dot{\vec{v}}] = [\vec{r} \times \vec{F}] = 0. \tag{7.27}$$

$$L_z = \mu\rho^2\dot{\varphi} = const = L_z(0)$$

$$\begin{gathered}
\sin\beta = \sin\varphi, \\
|L| = \mu|\vec{v}_\infty||\vec{r}|\sin\beta = \mu\sin\varphi|\vec{r}| \cdot v_\infty = \mu v_\infty \cdot b \\
\Rightarrow L_z(0) = \mu v_\infty \cdot b = \mu\rho^2\dot{\varphi} \\
\Rightarrow \boxed{\rho^2 \cdot \dot{\varphi} = v_\infty \cdot b}.
\end{gathered} \tag{7.28}$$

Внимательно рассмотрев геометрическое построение, запишем условие на угол рассеяния,

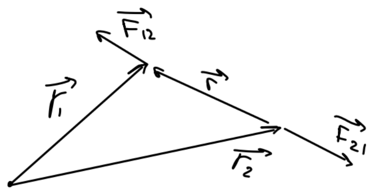


Рис. 7.9: Задача двух тел.

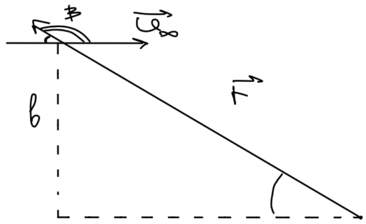


Рис. 7.10: ?.

обозначив его θ (для простоты вычислений возьмём его ориентированным, чтобы не рассматривать несколько случаев):

$$\sim + \sim + \theta = \pi, \tag{7.29}$$

$$\alpha + \varphi = \sim = \frac{1}{2}(\pi - \theta). \tag{7.30}$$

Из чего чисто алгебраически

$$\alpha = \frac{1}{2}(\pi - \theta) - \varphi. \tag{7.31}$$

Вернёмся к следствию из II закона Ньютона,

$$\mu \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = k\frac{q_1 q_2}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} \tag{7.32}$$

$$\mu \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = k\frac{q_1 q_2}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} \cdot \mathrm{d}\vec{r} \tag{7.33}$$

$$\text{где } \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} \cdot \mathrm{d}\vec{v} = \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{v} \tag{7.34}$$

$$\mu \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{v} = k\frac{q_1 q_2}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} \cdot \mathrm{d}\vec{r} \tag{7.35}$$

$$\mu \int v \mathrm{d}v = k \int \frac{q_1 q_2}{r^2} \mathrm{d}r \tag{7.36}$$

$$\frac{\mu v^2}{2} = -k\frac{q_1 q_2}{r} + \mathrm{const} \tag{7.37}$$

$$\frac{\mu v^2}{2} + k\frac{q_1 q_2}{r} = \mathrm{const}. \tag{7.38}$$

В ходе вывода мы пользовались тем, что $\vec{r}\vec{dr} = rdr$, покажем это : ($\vec{v}\vec{dv} = vdv$ - аналогично)

$$(\vec{r}, \vec{r}) = r^2$$

$$(\vec{r}, \vec{dr}) + (\vec{dr}, \vec{r}) = 2rdr$$
$$(\vec{r}, \vec{dr}) = rdr$$

Если теперь рассмотреть величину $\vec{p} = \mu\vec{v}$ много до рассеяния и много после рассеяния, то понятно, что второе слагаемое в уравнении 7.38 будет околонулевым (так как расстояние будет очень большим), то есть

$$\frac{\mu v_\infty^2}{2} = \text{const}. \tag{7.39}$$
$$|\vec{p}_{-\infty}| = |\vec{p}_{+\infty}| = p_\infty = \mu v_\infty = \text{const}. \tag{7.40}$$

Чтобы рассмотреть изменение $\vec{p}$ за всё время рассеяния, достаточно вывести $\Delta\vec{p} = \vec{p}_{+\infty} - \vec{p}_{-\infty}$.

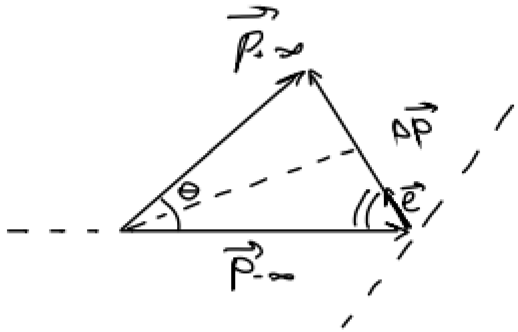


Рис. 7.11: Геометрическое построение векторной разности $\vec{p}_{+\infty}$ и $\vec{p}_{-\infty}$

$$|\Delta\vec{p}| = 2\mu v_\infty \sin\frac{\theta}{2}. \tag{7.41}$$

С другой стороны, также из II закона Ньютона следует

$$\Delta\vec{p} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \vec{F}\mathrm{d}t. \tag{7.42}$$

Обозначим направление вектора $\Delta\vec{p}$ как $\vec{e}_{\Delta p} = \dfrac{\Delta\vec{p}}{|\Delta\vec{p}|}$, тогда

$$|\Delta\vec{p}| = \Delta\vec{p}\cdot\vec{e}_{\Delta p} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \vec{F}\cdot\vec{e}_{\Delta p}\mathrm{d}t$$
$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F\cos\alpha\mathrm{d}t = kq_1q_2\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{\rho^2}\cos\left(\frac{1}{2}(\pi-\theta)-\varphi\right) = (*) \tag{7.43}$$

— перейдём от рассмотрения движения во времени к рассмотрению движения в зависимости от угла φ: очевидно, что угол за всё время изменится от 0 до $\pi - \theta$; при этом

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = \frac{v_\infty b}{\rho^2} \tag{7.44}$$
$$\frac{\mathrm{d}t}{\rho^2} = \frac{\mathrm{d}\phi}{v_\infty b} \quad — \tag{7.45}$$

$$
\begin{aligned}
(*) &= kq_1q_2\int\limits_0^{\pi-\theta}\frac{\mathrm{d}\varphi}{v_\infty b}\cos\left(\frac{1}{2}(\pi-\theta)-\varphi\right)\\
&= \frac{kq_1q_2}{v_\infty b}\int\limits_0^{\pi-\theta}\mathrm{d}\varphi\cos\left(\frac{1}{2}(\pi-\theta)-\varphi\right)\\
&= \frac{kq_1q_2}{v_\infty b}\left(-\sin\left(\frac{1}{2}(\pi-\theta)-\varphi\right)\right)\Bigg|_0^{\pi-\theta}
\end{aligned}
\tag{7.46}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{kq_1q_2}{v_\infty b}\left[\left(-\sin\left(\frac{1}{2}(\pi-\theta)-(\pi-\theta)\right)\right)-\left(-\sin\left(\frac{1}{2}(\pi-\theta)-0\right)\right)\right]\\
&= \frac{kq_1q_2}{v_\infty b}\left[\left(-\sin\left(-\frac{1}{2}(\pi-\theta)\right)\right)-\left(-\sin\left(\frac{1}{2}(\pi-\theta)\right)\right)\right]\\
&= \frac{kq_1q_2}{v_\infty b}\left[\sin\left(\frac{1}{2}(\pi-\theta)\right)+\sin\left(\frac{1}{2}(\pi-\theta)\right)\right]\\
&= \frac{kq_1q_2}{v_\infty b}\cdot 2\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right) = 2\frac{kq_1q_2}{v_\infty b}\cos\frac{\theta}{2},
\end{aligned}
\tag{7.47}
$$

$$
|\Delta\vec{p}| = 2\frac{kq_1q_2}{v_\infty b}\cos\frac{\theta}{2}. \tag{7.48}
$$

Получив два выражения для величины вектора $\Delta\vec{p}$, мы можем просто приравнять их:

$$
\cancel{2}\mu v_\infty\sin\frac{\theta}{2} = \cancel{2}\frac{kq_1q_2}{v_\infty b}\cos\frac{\theta}{2} \tag{7.49}
$$

$$
\boxed{\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \frac{kq_1q_2}{\mu b v_\infty^2}}. \tag{7.50}
$$

Важной характеристикой рассеяния является величина dσ - эффективное сечение рассеяния, определяемого как:

$$
d\sigma \ = \ \frac{dN}{n},
$$

- где dN - число частиц, рассеиваемых в единицу времени на углы θ до $\theta\ +\ d\theta$, n - число частиц, пролетающих через единичную площадку поперечного сечения пучка в единицу времени.

По размерности это площадь. Между углом рассеяния θ и прицельным расстоянием b есть связь!

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow dN \ &= \ n\cdot 2\pi b db,\\
\Rightarrow d\sigma \ &= \ 2\pi b db.
\end{aligned}
\tag{7.51}
$$

$$
d\sigma \ = \ 2\pi b\cdot\left|\frac{db}{d\theta}\right|\cdot d\theta \ = \ b\cdot\left|\frac{db}{d\theta}\right|\cdot\frac{2\pi d\theta\sin\theta}{\sin\theta} \ = \ b\cdot\left|\frac{db}{d\theta}\right|\cdot\frac{d\Omega}{\sin\theta} \ = \ \frac{b}{\sin\theta}\cdot\left|\frac{db}{d\theta}\right|\cdot d\Omega, \tag{7.52}
$$

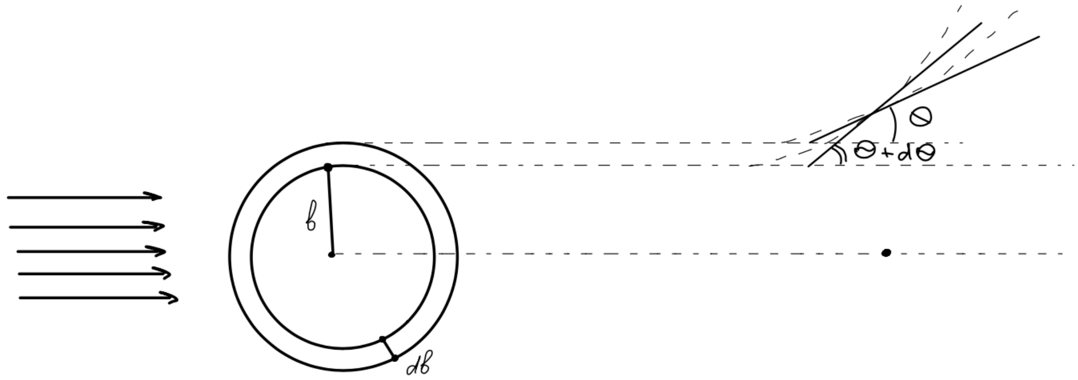


Рис. 7.12: Рассеивание частиц.

- где $d\Omega$ - телесный угол.

Дифференциальное сечение рассеяния:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b}{\sin\theta} \cdot \left|\frac{db}{d\theta}\right|. \tag{7.53}$$

Лекция 8.

Формула Резерфорда. Гравитационное взаимодействие

$$\tan\frac{\theta}{2} \;=\; k\cdot\frac{Q_1\cdot Q_2}{\mu b v_\infty^2} \Rightarrow b \;=\; k\cdot\frac{Q_1\cdot Q_2}{\mu v_\infty^2\tan\frac{\theta}{2}}.$$

$$\frac{db}{d\theta} \;=\; k\cdot\frac{Q_1\cdot Q_2}{\mu v_\infty^2}\cdot\frac{1\cdot(-1)}{(\tan\frac{\theta}{2})^2}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}}\cdot\frac{1}{2} \;=\; -k\frac{Q_1\cdot Q_2}{2\mu v_\infty^2}\cdot\frac{1}{\sin^2\frac{\theta}{2}},$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \;=\; \frac{1}{2}(k\frac{Q_1\cdot Q_2}{\mu v_\infty^2})^2\cdot\frac{1}{\tan\frac{\theta}{2}\cdot\sin^2\frac{\theta}{2}\cdot 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}} \;=\; \frac{1}{4}\cdot(k\frac{Q_1\cdot Q_2}{\mu v_\infty^2})^2\cdot\frac{1}{\sin^4\frac{\theta}{2}}. \qquad \blacksquare \tag{8.1}$$

Прежде чем мы приступим к гравитационному взаимодействию, которое описывается (в рамках классической физики) законом всемирного тяготения, необходимо рассмотреть такое понятие как секториальная скорость. Она обозначается буквой $\vec{\sigma}$ и имеет смысл площади, которая заметается радиус-вектором частицы за единицу времени!

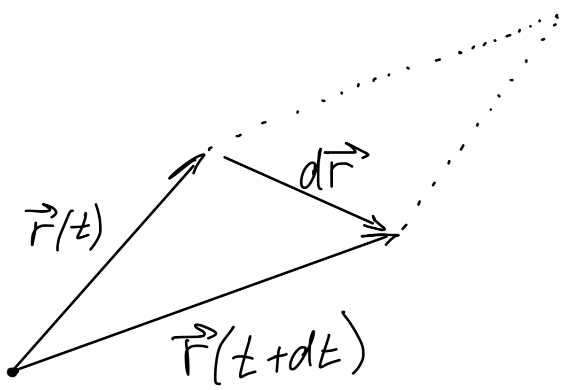


Рис. 8.1: Изменение радиус вектора за время dt.

$$dS = \frac{1}{2}|\vec{r}|\cdot|\vec{r}+\vec{dr}|\cdot sin(d\alpha) = \frac{1}{2}|\vec{r}|\cdot|\vec{r}|\cdot sind\alpha \tag{8.2}$$

$$d\vec{S} = \frac{1}{2}[\vec{r}\times\vec{dr}] = \frac{1}{2}[\vec{r}\times\vec{r}+\vec{dr}]$$

$$|d\vec{S}| = \frac{1}{2}\cdot|\vec{r}||\vec{dr}|\cdot sin\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}|\vec{r}||\vec{r}+\vec{dr}|\cdot sin(d\alpha) = \frac{1}{2}|\vec{r}||\vec{r}|\cdot d\alpha.$$

Всё с точностью до величин второго порядка малости.

$$\Rightarrow \vec{\sigma} = \frac{d\vec{S}}{dt} = \frac{1}{2} \cdot [\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt}] = \frac{1}{2m} \cdot [\vec{r}, \vec{p}] = \frac{\vec{L}}{2m}. \tag{8.3}$$

Лекция 9.
Гравитационное взаимодействие. Продолжение

Добавим еще один факт: пусть наши силы будут (опять) центральными: $\vec{F} \sim \vec{r}$

$$\Rightarrow \vec{M} = [\vec{r} \times \vec{F}] = 0 \Rightarrow \vec{L} = const \tag{9.1}$$

$\Rightarrow$ движение, как мы уже говорили, будет в плоскости, а помимо этого секториальная скорость будет постоянной! То есть за равные промежутки времени радиус-вектор материальной точки в центральном поле, отложенный из силового центра, заметает равные площади.

Теперь к закону всемирного тяготения : Сила гравитационного притяжения между двумя материальными точками действует вдоль прямой, соединяющей эти материальные точки, прямо пропорциональна произведению их масс и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними : $\sim$ 1666 Исаак Ньютон, $\sim$ 1687 опубликовано.

$$\vec{F} = \gamma \cdot \frac{mM}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \tag{9.2}$$

$\gamma \equiv G$ - гравитационная постоянная.
G $= 6.67 \cdot 10^{-11} \left[\dfrac{M^3}{\text{кг} \cdot c}\right]$

Генри Кавендиш, 1789 г.

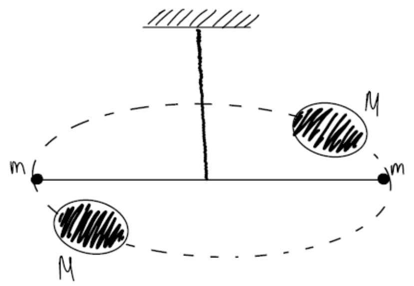


Рис. 9.1: Крутильные весы.

f – модуль кручения стержня (известен);
α – угол отклонения;

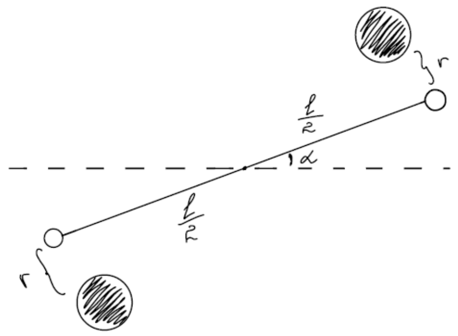


Рис. 9.2: Крутильные весы: вид сверху.

$M = f\alpha$ – момент сил, возникающий при скручивании.

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow f \cdot \alpha_0 \Big| \alpha_0 - \text{ измеряется } = \\
&= 2G\frac{mM}{r^2}\left(\frac{l}{2}\right) \Big| m, M, r - \text{ измеряются } = \\
&= G\frac{mM}{r^2}l.
\end{aligned} \tag{9.3}$$

Найдём значение силы через частоту колебаний данной системы:

$$I\ddot{\alpha} = -M = -f\alpha.$$

Перед моментом сил стоит знак -, так как момент сил, возникающий при скручивании нити, стремится вернуть стержень в первоначальное положение

$$I = 2m\left(\frac{l}{2}\right)^2.$$

При выводе будет использоваться уравнение гармонических колебаний :

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0.$$

Для желающих разобраться, как это решается : Чтобы его решить, надо искать решение вида $x = c \cdot e^{\gamma t}$ -> подставляем в уравнение, получаем характеристическое уравнение $\gamma^2 \cdot c \cdot e^{\gamma t} + \omega^2 \cdot c \cdot e^{\gamma t} = 0 \Rightarrow \gamma_{1,2} = \pm i\omega$, а далее из начальных условий ищем решение вида $x = c_1 \cdot e^{\gamma_1 t} + c_2 \cdot e^{\gamma_2 t}$, это и будет всем знакомое уравнение типа $x = x_m \cdot cos(\omega t + \varphi_0)$.

$$2m\left(\frac{l}{2}\right)^2\ddot{\alpha} + f\alpha = 0 \Longrightarrow \tag{9.4}$$

$$\Longrightarrow \omega^2 = \frac{2f}{ml^2} \Longrightarrow \tag{9.5}$$

$$\Longrightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{ml^2}{2f}}. \tag{9.6}$$

$$\frac{T^2}{(2\pi)^2} = \frac{ml^2}{2f} \implies$$

$$\implies f = \frac{ml^2 4\pi^2}{2T^2} \implies \tag{9.7}$$

$$\implies G = \frac{2\pi^2 l r^2}{MT^2}\alpha_0. \qquad \blacksquare \tag{9.8}$$

Рассчитаем массу Земли $M_\oplus$:

$$mg = G\frac{mM_\oplus}{R_\oplus^2} \implies$$

$$\implies M_\oplus = \frac{gR_\oplus^2}{G} \implies M_\oplus = \frac{gR_\oplus^2 MT^2}{2\pi^2 l r^2 \alpha_0}. \tag{9.9}$$

Рассчитаем среднюю плотность Земли, используя полученные значения её массы и принимая её форму за шар, считая радиус известным.

$$\overline{\rho_\oplus} = \frac{M_\oplus}{\frac{4}{3}\pi R_\oplus^3} = \frac{3gMT^2}{8\pi^3 R_\oplus l r^2 \alpha_0}. \tag{9.10}$$

$$\overline{\rho_\oplus} \approx 5.48\text{г/см}^3, \text{современные данные: } 5.52 \text{ г/см}^3.$$

9.1 Законы Кеплера

Переходим к задаче Кеплера (получим все законы Кеплера при её решении).
Задача Кеплера: движение в потенциале:

$$U = -\frac{\alpha}{r}, \quad \vec{F} = -\nabla U = -\vec{e}_r \cdot \left(\frac{\alpha}{r^2}\right) = -\alpha\frac{\vec{e}_r}{r^2}, \alpha = GmM. \tag{9.11}$$

Движение плоское $\implies$ полярная система координат.
Силы потенциальны $\implies$ $E = \text{const}$.
Силы центральные $\implies$ $\vec{L} = \vec{e}_z L = \text{const}$.

$$\frac{mv^2}{2} - \gamma\frac{mM}{r} = E. \tag{9.12}$$

$$|\vec{L}| = m|[\vec{r}\times\vec{v}]| = m[\vec{r}\times\vec{v}_r + \vec{v}_\varphi] = m\rho^2\dot{\varphi} = L_z = \text{const}. \tag{9.13}$$

$$\boxed{m\rho^2\dot{\varphi} = L_z = \text{const.}} \tag{9.14}$$

$$\begin{aligned} &\vec{r} = \vec{e}_\rho \rho \implies \vec{v} = \vec{e}_\rho\dot{\rho} + \rho\vec{e}_\varphi\dot{\varphi} = \vec{v}_\rho + \vec{v}_\varphi \\ &\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \underline{\vec{e}_\rho\ddot{\rho}} + \dot{\rho}\dot{\vec{e}}_\rho + \dot{\rho}\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \rho\ddot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \underline{\rho\dot{\varphi}\dot{\vec{e}}_\varphi} = \\ &= \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2\right)\vec{e}_\rho + \left(2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi}\right)\vec{e}_\varphi = \vec{a}_\rho + \vec{a}_\varphi. \end{aligned} \tag{9.15}$$

Посмотрим на $\vec{a}_\varphi$:

$$\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi} = \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\rho^2\dot{\varphi}\right) = \frac{1}{\rho}\left[2\rho\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho^2\ddot{\varphi}\right] =$$

$$2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi} = \frac{1}{\rho}\frac{1}{m}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}L_z = 0 \quad (\text{т. к. } L_z = \text{const}) \implies$$

$$\implies \vec{a}_\varphi = 0 \implies \vec{a} = \vec{a}_\rho -- \text{направление к Солнцу.} \tag{9.16}$$

То, что $\vec{a}_\varphi = 0$, можно понять и из других соображений :
Из второго закона Ньютона следует, что $\vec{a} \parallel \vec{F} \;=\; -\gamma \dfrac{mM\vec{r}}{r^3} \parallel \vec{r} \;=\; \vec{\rho} \implies \vec{a_\varphi} = 0.$

С другой стороны $\Big/$ здесь $\rho \equiv r$, т. к. $z = 0$ $\Big/$:

$$\begin{aligned} m\vec{a} = \vec{F} \implies \\ \implies \vec{a}_\rho = -\frac{\gamma M}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} \implies \\ \implies \left[\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2\right] = -\frac{\gamma M}{\rho^2}. \end{aligned} \tag{9.17}$$

Лекция 10.
Законы Кеплера (часть 2)

Математика нам говорит, что для таких уравнений траекторией будет сечение конуса:

$$\rho\,(1 - \varepsilon\cos\varphi) = p, \tag{10.1}$$

где $\varepsilon \equiv e$, ε – эксцентриситет; p – фокальный параметр. Подберём такие p и ε, чтобы наша траектория удовлетворяла предыдущему уравнению.

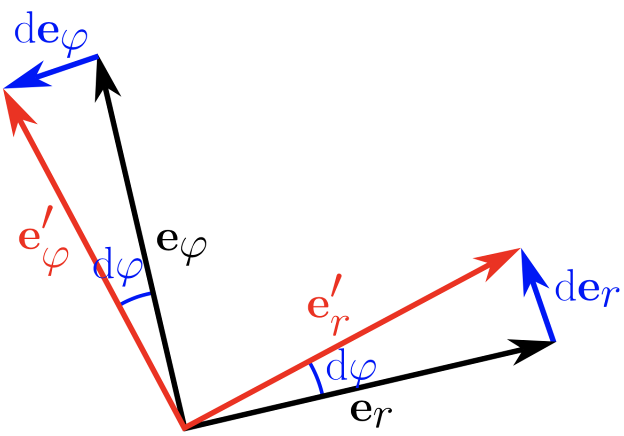


Рис. 10.1: Дифференцирование векторов.

$e > 1$ - гипербола;

$e = 1$ - парабола;

$e < 1$ - эллипс;

$e = 0$ - окружность.

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left[\rho\,(1 - e\cos\varphi)\right] = \dot\rho\,(1 - e\cos\varphi) - \rho e(-\sin\varphi)\dot\varphi = 0,\\
&\dot\rho p + \frac{L}{m}e\sin\varphi = 0,\\
&\frac{d}{dt}\left[\dot\rho p + \frac{L}{m}e\sin\varphi\right] = \ddot\rho p + \frac{L}{m}e\cos\varphi\dot\varphi = 0.
\end{aligned} \tag{10.2}$$

Учитывая, что $e\cos\varphi = 1 - p/\rho$, имеем:

$$
\begin{aligned}
&\ddot{\rho}p + \frac{L}{m}\left[1 - \frac{p}{\rho}\right]\dot{\varphi} = 0\\
&\Rightarrow p\ddot{\rho} - \frac{m\rho^2\dot{\varphi}^2}{m}\cdot\frac{p}{\rho}\dot{\varphi} = -\frac{L}{m}\cdot\frac{\rho^2 m}{\rho^2 m},\\
&p\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2 p = -\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{L}{m}\right)^2,\\
&p\left[\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2\right] = -\frac{1}{\rho^2}\cdot\left(\frac{L}{m}\right)^2,\ \text{где}\left[\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2\right] = -\gamma\frac{M}{\rho^2}, \left(\frac{L}{m}\right)^2 = const,\\
&\Rightarrow p\left(-\gamma\frac{M}{\rho^2}\right) = -\frac{1}{\rho^2}\cdot\left(\frac{L}{m}\right)^2\\
&\Rightarrow \boxed{p = \frac{1}{\gamma M}\cdot\left(\frac{L}{m}\right)^2}.
\end{aligned}
\tag{10.3}
$$

Откуда найти e ? Перепишем полную энергию:

$$
\begin{aligned}
&E = \frac{mv^2}{2} + U(\rho) = \frac{m}{2}\left[\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2\right] - \frac{\gamma m M}{\rho}\\
&\Rightarrow \frac{m}{2}\cdot\dot{\rho}^2 + \frac{L^2}{2m\rho^2} - \frac{\gamma m M}{\rho} = \frac{m}{2}\cdot\dot{\rho}^2 + U_{\text{eff}} = E.
\end{aligned}
\tag{10.4}
$$

E_1 - окружность ($\rho = const$);
$E = 0 \Rightarrow$ парабола;
$E < 0 \Rightarrow$ эллипс;
$E > 0 \Rightarrow$ гипербола.

В этих точках производная от ρ по t равна нулю:

$$
\frac{L^2}{2m\rho^2_{\text{min,max}}} - \frac{\gamma m M}{\rho_{\text{min,max}}} = E,
$$

$$
\rho^2 + \frac{\gamma m M}{E}\rho - \frac{L^2}{2mE} = 0.
$$

$$
\rho_{\text{min,max}} = \frac{-\dfrac{\gamma m M}{E} \pm \dfrac{\gamma m M}{E}\sqrt{1 + \dfrac{E^2 4L^2}{2mE\gamma^2 m M^2}}}{2},
\tag{10.5}
$$

$$
\rho_{\text{min, max}} = -\frac{\gamma m M}{2E}\left(1 \mp \sqrt{1 + \frac{2E}{m}\left(\frac{L}{\gamma m M}\right)^2}\right).
\tag{10.6}
$$

Выразим большую полуось через минимальное и максимальное расстояния:

$$
2a = \rho_{\min} + \rho_{\max} = -\frac{\gamma m M}{E},
\tag{10.7}
$$

$$
a = -\frac{\gamma m M}{2E}.
\tag{10.8}
$$

$$
\tag{10.9}
$$

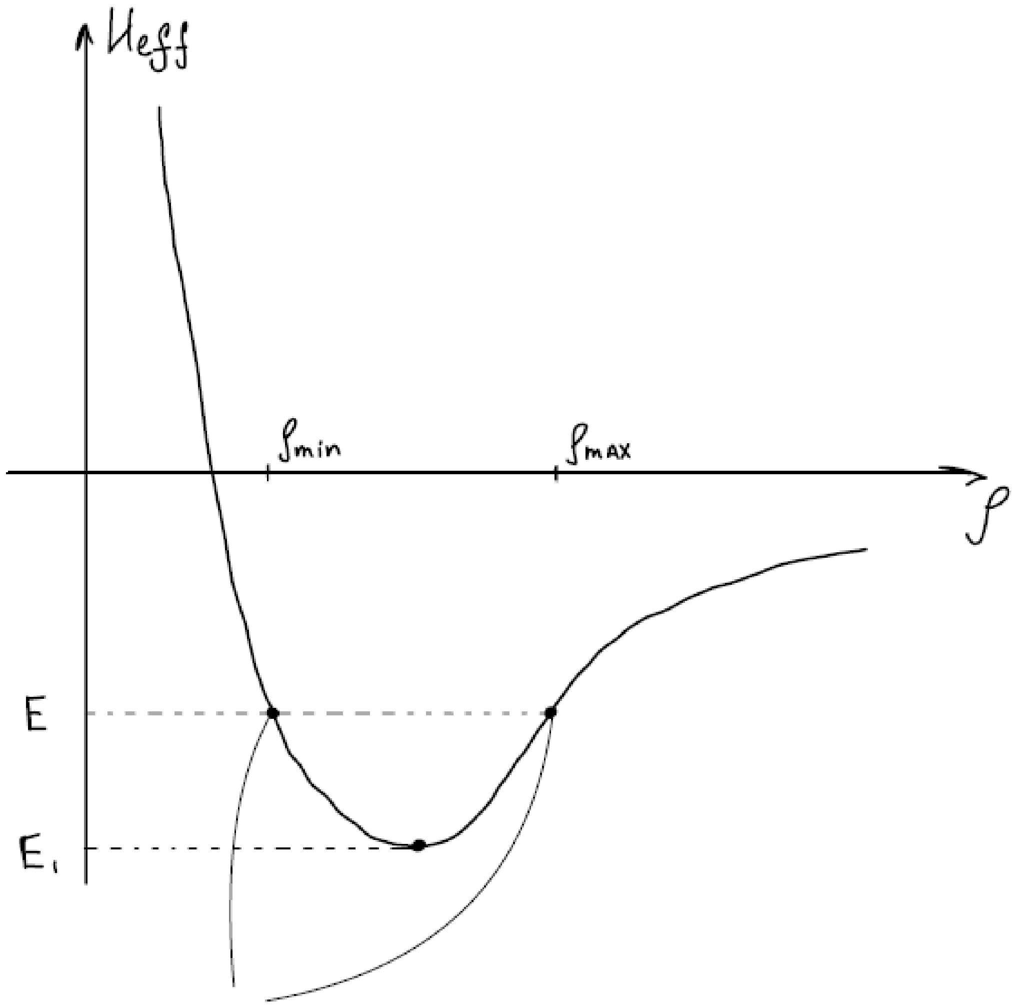


Рис. 10.2: График зависимости эффективной энергии.

С другой стороны, из уравнения эллипса

$$\rho = \frac{p}{1 - e\cos\varphi}. \tag{10.10}$$

Минимум достигается при $\cos\varphi = -1$, максимум — при $\cos\varphi = 1$:

$$\rho_{\min} = \frac{p}{1+e} = \frac{p}{1-e^2}(1-e), \tag{10.11}$$

$$\rho_{\max} = \frac{p}{1-e} = \frac{p}{1-e^2}(1+e). \tag{10.12}$$

То есть,

$$\frac{2p}{1-e^2} = \rho_{\min} + \rho_{\max} = 2a, \tag{10.13}$$

$$\frac{p}{a} = 1 - e^2, \tag{10.14}$$

$$e = \sqrt{1 - \frac{p}{a}} = \sqrt{1 + \frac{1}{\gamma M}\left(\frac{L}{m}\right)^2 \frac{2E}{\gamma m M}}$$

$$= \sqrt{1 + \frac{2E}{m}\left(\frac{L}{\gamma m M}\right)^2}. \tag{10.15}$$

Найдём и малую полуось эллипса b, применив немного геометрической смекалки.

$$b^2 + c^2 = a^2. \tag{10.16}$$
$$\text{При этом, } c = ea. \tag{10.17}$$
$$b^2 + e^2a^2 = a^2, \tag{10.18}$$
$$b = a\sqrt{1-e^2}. \tag{10.19}$$
$$\tag{10.20}$$

Подставим полученное чуть раньше выражение для эксцентриситета.

$$b = -\frac{\cancel{\gamma mM}}{2E}\sqrt{-\frac{2E}{m}\left(\frac{L}{\cancel{\gamma mM}}\right)^2} = \frac{L}{\sqrt{-2mE}}. \tag{10.21}$$

Если движение финитно, то довольно очевиден период обращения,

$$T = 2\sqrt{\frac{m}{2}}\int\limits_{\rho_{\min}}^{\rho_{\max}} \frac{dr}{\sqrt{E-U_{\text{eff}}}}. \tag{10.22}$$

Однако, брать этот интеграл очень тоскливо и неприятно, гораздо легче воспользоваться постоянством секториальной скорости.

$$|\vec{\sigma}| = \text{const} = \frac{S_{\text{эллипс}}}{T} = \frac{L}{2m}. \tag{10.23}$$
$$S_{\text{эллипс}} = \pi ab. \tag{10.24}$$
$$\frac{\pi ab}{T} = \frac{L}{2m}, \tag{10.25}$$
$$T = 2\pi\frac{mab}{L}. \tag{10.26}$$
$$\tag{10.27}$$

Пока что мы рассматриваем частный случай некого тела, которое вращается вокруг массивного объекта — попробуем вывести какую-то характеристику, которая будет одинакова для всех таких тел, которые вращаются вокруг одного и того же объекта.

$$b = a\sqrt{1-e^2} = a\sqrt{-\frac{2E}{m}\left(\frac{L}{\gamma mM}\right)^2}, \tag{10.28}$$
$$b^2 = a^2 \cdot \left(-\frac{2E}{\gamma mM}\right) \cdot \frac{L^2}{\gamma m^2 M} = a^{\cancel{2}} \cdot \frac{1}{\cancel{a}} \cdot \frac{L^2}{\gamma m^2 M}. \tag{10.29}$$
$$T^2 = 4\pi^2\frac{m^2a^2b^2}{L^2} = 4\pi^2\frac{\cancel{m^2}a^2}{\cancel{L^2}} \cdot a\frac{\cancel{L^2}}{\gamma \cancel{m^2} M}. \tag{10.30}$$
$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\gamma M} = K \text{ — постоянная Кеплера.} \tag{10.31}$$

В своё время Кеплер на основании экспериментальных данных (очень сильно ему помогли длительные наблюдения Тихо Браге за движением планет по небу) постулировал следующие три закона (мы только что вывели их теоретически):

1. Все планеты движутся по эллиптическим траекториям, в одном из фокусов которых непременно находится Солнце. Траектории движения всех планет лежат в одной плоскости.
2. Секториальная скорость постоянна: за равные промежутки времени каждая планета «заметает» равные площади секторов эллипса, отложенных через фокус, содержащий Солнце.
3. Квадраты периодов обращения планет относятся так же, как кубы больших полуосей.

Лекция 11.
Космические скорости

11.1 Первая космическая скорость

Определение : Первая космическая скорость - минимальная (для заданной высоты над поверхностью планеты) горизонтальная скорость, которую необходимо придать объекту, чтобы он совершал движение по круговой орбите вокруг планеты. Для Земли $V_1 = \sqrt{\dfrac{\gamma M}{R}} = \sqrt{gR} = 7,91$ км/с.

Рассмотрим движение некого тела вокруг некого массивного объекта (например, планеты). Будем пренебрегать сопротивлением среды и гравитационным взаимодействием с другими телами: то есть, из сил рассматривать лишь взаимодействие тела с массивным объектом.

Полная механическая энергия тела тогда составит

$$E = \frac{mv^2}{2} - \gamma\frac{mM}{r}. \tag{11.1}$$

Давайте рассмотрим вращение тела вокруг нашего массивного объекта: для этого удобно перейти в полярную систему координат и положить $\varphi \neq 0$ и $L > 0$. Понятно, что случаев вращения существует огромное множество — интересно посмотреть на экстремальный случай, когда полная механическая энергия (а, следовательно, и скорость тела) минимальна.

$$\begin{aligned} E_{\min} &= \frac{m\dot{\rho}^2}{2} + \frac{m}{2}\rho^2\dot{\varphi}^2 - \gamma\frac{mM}{\rho} \\ &= \frac{m\dot{\rho}^2}{2} + \underbrace{\frac{L^2}{2m\rho^2} - \gamma\frac{mM}{\rho}}_{U_{\text{eff}}}. \end{aligned} \tag{11.2}$$

Если кто-то не понимает, почему энергия записана именно таким образом, вернитесь сюда, здесь показано разложение скорости по базисным векторам в полярной системе координат.

Мы хотим вращение!

$$\Rightarrow \dot{\varphi} \neq 0 \Rightarrow L \ > \ 0 \Rightarrow E_{min}, \text{ когда } \dot{\varphi} \text{ и } U_{eff} \text{ минимальна} \Rightarrow$$

$$\frac{-2L^2}{2m\rho_0^3} + \frac{\gamma mM}{\rho_0^2} = 0 \Rightarrow \rho_0 = \frac{L^2}{\gamma m^2 M}, \tag{11.3}$$

$\Rightarrow$ т.к. по окружности L $= m\rho_0 v_\varphi$, т.е. L $= m\rho v$

$$\Rightarrow \rho_0 \ = \ \frac{m^2\rho_0^2 v^2}{\gamma m^2 M} \Rightarrow v \ = \ \sqrt{\gamma\frac{M}{\rho_0}}. \tag{11.4}$$

Вспомним, что мы на поверхности Земли:

$$\Rightarrow v_1 \ = \ \sqrt{\gamma\frac{M_\oplus}{R_\oplus}} \sim 8\text{км/с}. \tag{11.5}$$

11.2 Вторая космическая скорость

Определение : Вторая космическая скорость - наименьшая скорость, которую необходимо придать стартующему с поверхности небесного тела объекту (например, космическому аппарату), масса которого пренебрежимо мала по сравнению с массой небесного тела (например, планеты), для преодоления гравитационного притяжения этого небесного тела и покидания замкнутой орбиты вокруг него. Для Земли $V_2 = \sqrt{2}V_1 = 11,2$ км/с.

$$E = \frac{mv^2}{2} - \gamma\frac{mM}{r} \ = \ 0. \tag{11.6}$$

$$\Rightarrow v_2 \ = \ \sqrt{2\gamma\frac{M_\oplus}{R_\oplus}} \ = \ \sqrt{2}v_1 \approx 11.2\text{км/с}. \tag{11.7}$$

Если E $> 0 \Rightarrow$ движение по гиперболе $\Rightarrow$ превосходит 2-ую космическую скорость.

11.3 Третья космическая скорость

Определение : Третья космическая скорость - минимальная скорость, которую необходимо придать находящемуся вблизи поверхности Земли телу, чтобы оно могло преодолеть гравитационное притяжение Земли и Солнца и покинуть пределы Солнечной системы. Примерно равна 16,65 км/с.

Для простоты расчётов, разобьём наше движение на две части: удаление из гравитационного поля Земли, а затем уже удаление из гравитационного поля Солнца. Расстояние от Земли до Солнца (примерно 150 млн км) намного больше радиуса Земли (примерно 6400 км), поэтому когда тело уже удалится от Земли настолько, что практически перестанет с ней взаимодействовать, расстояние от него до Солнца принципиально не изменится, поэтому наши приближённые рассуждения будут верны с высокой степенью точности.

Рассмотрим процесс удаления из гравитационного поля Земли :

$$(*)\frac{m\vec{v}^2}{2} - \gamma\frac{mM}{r} \ = \ \frac{m\vec{v}_\infty^2}{2}. \tag{11.8}$$

$\vec{v}$ - скорость (стартовая) относительно Земли.

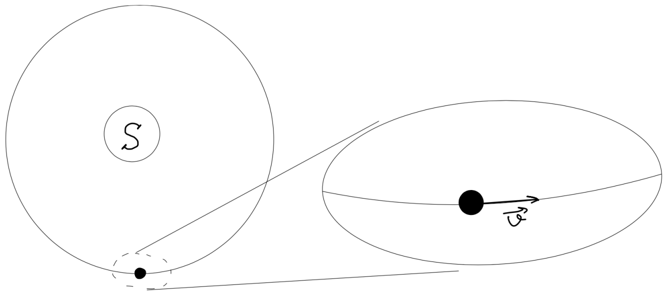


Рис. 11.1: Детализация вектора стартовой скорости относительно Земли.

$\vec{v}_\infty$ - скорость тела относительно Земли, когда тело уже на большом расстоянии от Земли. Скорость, когда отлетели от Земли:

$$\vec{v}_{\text{отн. Солнца }\infty} = \vec{V} + \vec{v}_\infty \tag{11.9}$$

$\vec{V}$ - скорость кругового движения Земли вокруг Солнца.

$$v^2_{\text{отн. Солнца }\infty} = V^2 + v^2_\infty + 2V \cdot v_\infty \cos\theta. \tag{11.10}$$

θ - угол между скоростью орбитального движения Земли и скоростью, с которой тело выходит из Земного тяготения.

Предположим, что Земля вращается вокруг Солнца по круговой орбите, тогда будет верно, что она движется с первой космической скоростью для Солнца. Чтобы тело могло покинуть гравитационное поле Солнца, оно должно двигаться со второй космической скоростью, а для 1 и 2 космических скоростей верно следующее : $V_2 = \sqrt{2}V_1$

Чему должна быть равна $\vec{v}_{\text{отн. солнца.}\infty}$:

$$\vec{v}_{\text{отн. солнца.}\infty} = \sqrt{2}V_з \text{ (2-ая космическая с орбиты Земли отн. Солнца).}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow 2V_з^2 = V_з^2 + V_\infty^2 + 2V_з v_\infty \cos\theta,\\
&\Rightarrow v_\infty = -\frac{2V\cos\theta + \sqrt{4V^2\cos\theta^2 + 4V^4}}{2},\\
&\Rightarrow v_\infty = V\cos\theta \cdot \left(\frac{\sqrt{1 + \cos(\theta)^2}}{\cos\theta} - 1\right)
\end{aligned} \tag{11.11}$$

$\Rightarrow$ из (*) $\vec{v}^2 = 2\vec{V}_1^2 + \vec{v}_\infty^2$.

$$\Rightarrow \vec{v}^2 = 2\vec{V}_1^2 + V_з^2 \cdot \left(\sqrt{1 + \cos(\theta)^2} - \cos\theta\right)^2. \quad \blacksquare \tag{11.12}$$

Лекция 12.

Закон всемирного тяготения в случае земной тяжести

$$m\vec{a} = \vec{F} = -\gamma\frac{mM}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{r} \Rightarrow m\vec{a} = m\vec{g} = -\gamma\cdot\frac{mM}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{r} \Rightarrow \vec{g} = -\gamma\frac{M}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{r}. \tag{12.1}$$

$\vec{g}$ - ускорение свободного падения.

12.1 Комментарий к третьему закону Кеплера

Если учитывать не неподвижность Солнца, то:

$$\mu\ddot{\vec{r}} = \vec{F} = \mu\ddot{\vec{r}} = -\gamma\frac{mM}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{r}\mu = \frac{m\cdot M}{m+M} \Rightarrow \tag{12.2}$$

$$\frac{1}{m+M}\cdot\ddot{\vec{r}} = -\gamma\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{r} \Rightarrow \tag{12.3}$$

$$\Rightarrow m\ddot{\vec{r}} = -\gamma\cdot\frac{mM}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{r}\cdot(1+\frac{m}{M}) \Rightarrow \tag{12.4}$$

$$\Rightarrow m\ddot{\vec{r}} = (1+\frac{m}{M})\vec{F} = -\tilde{\gamma}\frac{mM}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{r}, \tag{12.5}$$

Вспомним, что: $\dfrac{T^2}{a^3} = \dfrac{4\pi^2}{\gamma M}$

Теперь:

$$\Rightarrow \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\tilde{\gamma}M} = \frac{4\pi^2}{\gamma(M+m)} \Rightarrow \frac{T^2(m+M)}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\gamma}. \tag{12.6}$$

Не зависит ни от массы, ни от расстояния.

До этого мы рассматривали гравитационное взаимодействие между точечными массами, однако так можно поступать, если размеры тел много меньше расстояния между ними. Для вычисления же с учётом пространственного распределения массы необходимо воспользоваться правилом суперпозиции гравитационных полей, согласно которому гравитационное поле, возбуждаемое какой-либо массой, совершенно не зависит от наличия других масс. Для вычислений вводят понятие напряженности гравитационного поля:

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{1}{m}\cdot(-\gamma\frac{mm_i}{r^2}\cdot\frac{\vec{r_i}}{r}). \tag{12.7}$$

– Напряжённость гравитационного поля, создаваемого в точке $\vec{r}$ телом m_i. Если же таких тел много, то:

$$\vec{g} = -\sum \gamma \frac{m_i}{r_i^2} \cdot \frac{\vec{r_i}}{r_i}. \tag{12.8}$$

Потенциал гравитационного поля:

$$\varphi = -\gamma \sum \frac{m_i}{r_i} \Rightarrow \vec{g} = \nabla \varphi. \tag{12.9}$$

В случае непрерывного распределения массы:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\vec{g} &= -\gamma \frac{\mathrm{d}m}{|\vec{r} - \vec{r'}|^2} \\ \vec{g} &= -\gamma \int \frac{\mathrm{d}m(\vec{r} - \vec{r'})}{|\vec{r} - \vec{r'}|^3}. \\ \mathrm{d}m &= \rho(\vec{r'}) \cdot \mathrm{d}V. \end{aligned} \tag{12.10}$$

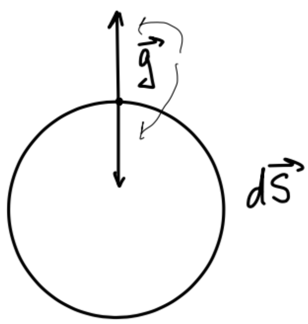


Рис. 12.1: Симметрия.

Введём нормаль: $\vec{n}$ и элементарную площадку $d\vec{S} = \vec{n}dS$. Тогда $d\phi$ - поток вектора $\vec{g}$ через ориентированную площадку $d\vec{S}$:

$$d\phi = \vec{g}d\vec{S}. \tag{12.11}$$

Полный же поток:

$$\phi = \oint \vec{g} \cdot d\vec{S}. \tag{12.12}$$

12.2 Теорема Гаусса

Поток вектора напряжённости гравитационного поля через произвольную замкнутую поверхность прямо пропорционален массе тел, находящихся внутри этой поверхности :

$$\oint \vec{g} \cdot d\vec{S} = -4\pi\gamma M. \tag{12.13}$$

M - Масса, окруженная замкнутой поверхностью S.

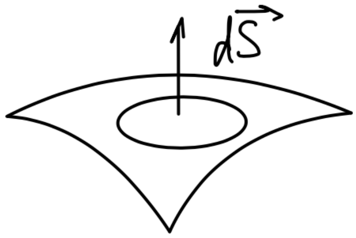


Рис. 12.2: Ввели нормаль.

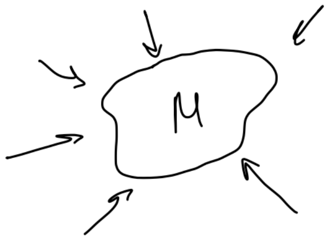


Рис. 12.3: Масса, окружённая замкнутой поверхностью.

$$d\omega = \frac{dS \cdot cos\theta}{r^2}. \tag{12.14}$$

Почему так?

$$\phi = \int\limits_M \int\limits_S -\gamma \frac{dM}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \cdot \vec{n} \cdot dS = -\gamma \int\limits_M \int\limits_S \frac{dM}{r^2} \frac{\cos\theta dS}{r} = -4\pi\gamma M. \tag{12.15}$$

12.3 Поле однородного шара

Рассмотрим ситуацию $r > R$:

$$\oint \vec{g} \cdot d\vec{S} = -4\pi\gamma M. \tag{12.16}$$

$$-g(r) \int dS = -4\pi\gamma M \Rightarrow g(r) = \gamma \frac{M}{r^2} \Rightarrow \vec{g}(\vec{r}) = -\gamma \frac{M}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}. \tag{12.17}$$

Рассмотрим r<R:

$$\oint \vec{g} d\vec{S} = -4\pi\gamma \frac{4}{3}\pi r^3 \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -g(r) \cdot 4\pi r^2 = -4\pi\gamma \cdot 4\pi r^2 \cdot \frac{r}{3} \cdot \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} \tag{12.18}$$

$$\vec{g}(\vec{r}) = -\gamma \cdot \frac{M}{R^3} \cdot r \cdot \frac{\vec{r}}{r}, \tag{12.19}$$

либо

$$\vec{g}(\vec{r}) = -\frac{4}{3}\pi\gamma\rho \cdot r \cdot \frac{\vec{r}}{r}. \tag{12.20}$$

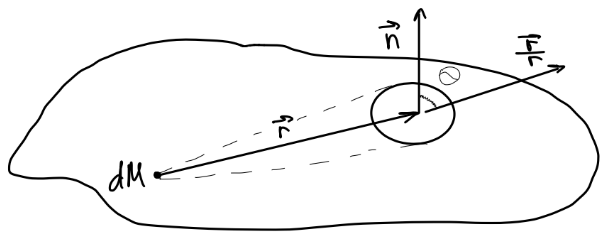


Рис. 12.4: Взаимодействие с малым кусочком массы.

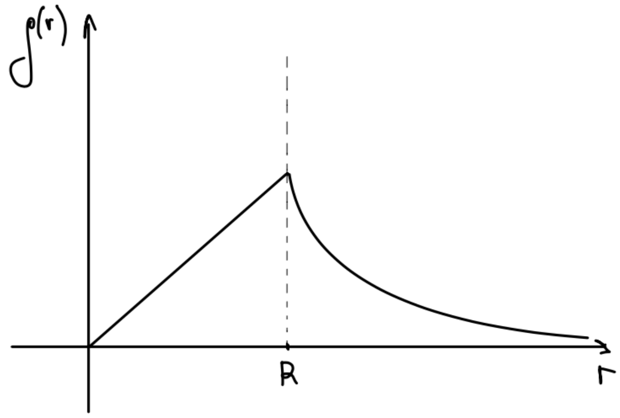


Рис. 12.5: Напряжённость шара.

12.4 Точки Лагранжа

(Жозеф Луи Лагранж, 1771 г.)
Совокупность точек в системе двух массивных тел, в которых третье тело, чья масса пренебрежимо мала, может оставаться неподвижным относительно этих массивных тел.

Все они лежат в плоскости орбиты. Таких точек 5: L_1, L_2, L_3, L_4, L_5.
L_1, L_2, L_3 – неустойчивое равновесие;
L_4, L_5 – устойчивое равновесие.
Рассмотрим например L_1:
Вращение происходит относительно центра масс массивной системы за счёт сил гравитационного притяжения:

$$\begin{cases} \gamma\dfrac{mM_1}{(R-r)^2} - \gamma\dfrac{mM_2}{r^2} = mR_{c.m.}\omega^2 \\ \dfrac{T^2}{R^3} = \dfrac{4\pi^2}{\gamma(M_1+M_2)} \end{cases} \implies \tag{12.21}$$

$$\implies \omega^2 = \frac{(2\pi)^2}{T^2} = \frac{\gamma(M_1+M_2)}{R^3}, \tag{12.22}$$

$$\gamma\frac{mM_1}{(R-r)^2} - \gamma\frac{mM_2}{r^2} = m\gamma\frac{(M_1+M_2)}{R^3}\left(\frac{M_1R}{M_1+M_2} - r\right)$$

$$\frac{M_1}{(R-r)^2} - \frac{M_2}{r^2} = \left(\frac{M_1R}{M_1+M_2} - r\right)\frac{M_1+M_2}{R^3}.$$

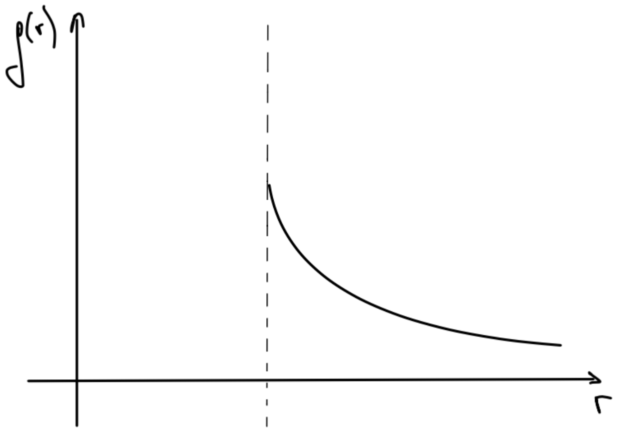


Рис. 12.6: Напряжённость сферы.

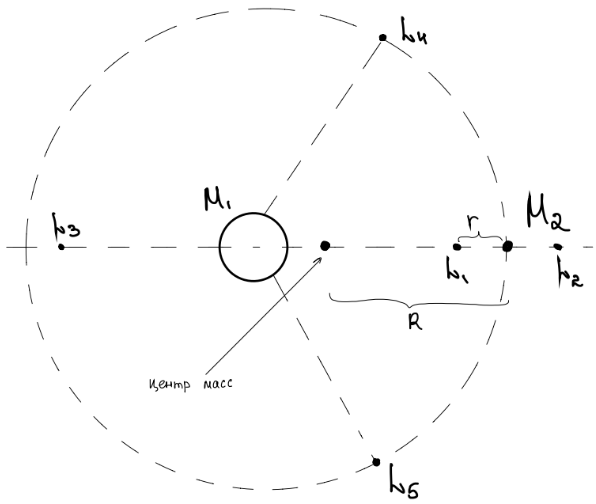


Рис. 12.7: Точки Лагранжа.

Пусть $\alpha = \dfrac{M_2}{M_1 + M_2}$, тогда:

$$
\begin{aligned}
&\frac{M_1 + M_2 - M_2}{(M_1 + M_2)\left(R - r\right)^2} - \frac{\alpha}{r^2} = \left(\frac{R - r - \alpha R}{R^3}\right) \\
&\frac{1}{\left(R - r\right)^2} - \frac{\alpha}{\left(R - r\right)^2} - \frac{\alpha}{r^2} = \frac{1}{R^2}\left(1 - \alpha\right) - \frac{r}{R^3} \\
&\frac{1}{\left(R - r\right)^2} - \frac{1}{R^2} + \frac{r}{R^3} = \alpha\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{R^2} + \frac{1}{\left(R - r\right)^2}\right) \\
&\frac{1}{\left(1 - \frac{r}{R}\right)^2} - 1 + \frac{r}{R} = \alpha\left(\left(\frac{R}{r}\right)^2 - 1 + \frac{1}{\left(1 - \frac{r}{R}\right)^2}\right).
\end{aligned}
$$

Пусть $\hat{r} = \dfrac{r}{R}$, тогда:

$$\frac{1}{(1-\hat{r})^2} - 1 + \hat{r} = \alpha\left(\left(\frac{1}{\hat{r}}\right)^2 - 1 + \frac{1}{(1-\hat{r})^2}\right)$$

$$\hat{r} \text{ и } \alpha - - \text{ малы} \implies$$

$$\implies \frac{1}{(1-\hat{r})^2} \sim 1 + 2\hat{r} \implies$$

$$\implies 3\hat{r} = \alpha\left(\left(\frac{1}{\hat{r}}\right)^2 - 1 + 1 + 2\hat{r}\right)$$

$$3\hat{r} \approx \frac{\alpha}{\hat{r}^2}$$

$$\hat{r} = \left(\frac{\alpha}{3}\right)^{1/3} \tag{12.23}$$

$$\implies r \approx R\left(\frac{\alpha}{3}\right)^{1/3}. \tag{12.24}$$

Координата L_1 относительно центра масс: $\left(R\left(1 - \left(\dfrac{\alpha}{3}\right)^3\right), 0\right)$.
Аналогично:

$$L_2 : \left(R\left(1 + \left(\frac{\alpha}{3}\right)^3\right), 0\right), \tag{12.25}$$

из:

$$\frac{M_1}{(R+r)^2} + \frac{M_2}{r^2} = \left(\frac{M_1}{M_1+M_2}R + r\right)\frac{M_1+M_2}{R^3} \tag{12.26}$$

$$L_3 : \left(-R\left(1 + \frac{5}{12}\alpha\right), 0\right), \tag{12.27}$$

из:

$$\frac{M_1}{(R-r)^2} + \frac{M_2}{(2R-r)^2} = \left(\frac{M_2}{M_1+M_2}R + R - r\right)\frac{M_1+M_2}{R^3}. \tag{12.28}$$

L_4, L_5 :

12.5 Гравитационная задача N тел

Решить гравитационную задачу – это решить следующую систему:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}_i}{\mathrm{d}t} = -\gamma \sum \dfrac{m_j(\vec{r}_i - \vec{r}_j)}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3} \\ \dfrac{\mathrm{d}\vec{r}_i}{\mathrm{d}t} = \vec{v}_i \end{cases}, \tag{12.29}$$

где $i = 1, 2, ..., N$; $\quad \vec{v}_i(t_0) = \vec{v}_{i0}$; $\quad \vec{r}_i(t_0) = \vec{r}_{i0}$.

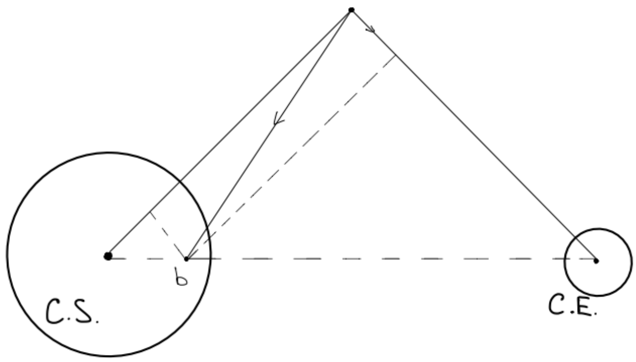


Рис. 12.8: 4 и 5 точки Лагранжа.

При $N = 1$: решение тривиально.
При $N = 2$ *(задача двух тел)*:

$$\vec{F} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \implies \tag{12.30}$$

$$\implies \ddot{\vec{r}} = -\gamma \frac{(m_1 + m_2)}{r^3} \vec{r} \tag{12.31}$$

$$\begin{cases} m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_{12} \\ m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_{21} \end{cases} \tag{12.32}$$

$$\mu \ddot{\vec{r}} = \mu \left(\ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2 \right) = \vec{F} = \vec{F}_{12} \tag{12.33}$$

$$\begin{cases} \vec{r}_1 = \vec{r}_{c.m.} + \dfrac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r} \\ \vec{r}_2 = \vec{r}_{c.m.} - \dfrac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r} \end{cases} . \tag{12.34}$$

Лекция 13.
Неинерциальные системы отсчёта

Иногда удобно работать в НИСО.
Запишем уравнение движения на этот случай:
В системе K:

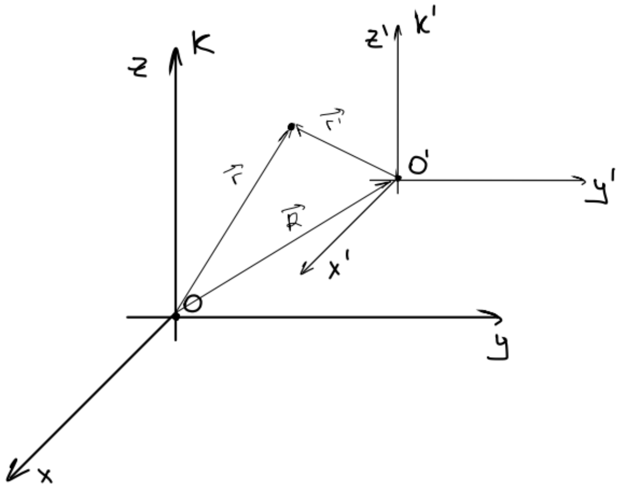


Рис. 13.1: Преобразования Галилея.

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}, \tag{13.1}$$

где $\vec{F}$ — реальные физические силы.

В системе K':

$$\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{R}. \tag{13.2}$$

Движение K' относительно K раскладываем на поступательное движение со скоростью $\vec{V}$ и вращательное с угловой скоростью $\vec{\omega}$ относительно оси, проходящей через O'.

$$\vec{r} = \vec{e}_x x + \vec{e}_y y + \vec{e}_z z; \tag{13.3}$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} \triangleq \underbrace{\vec{v}}_{\text{скор. м. т. в К}} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}\,'}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\vec{R}}{\mathrm{d}t} \triangleq \vec{V} + \frac{\mathrm{d}\vec{r}\,'}{\mathrm{d}t}; \tag{13.4}$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}\,'}{\mathrm{d}t} = \underbrace{\dot{x}'\vec{e}_x\,' + \dot{y}'\vec{e}_y\,' + \dot{z}'\vec{e}_z\,'}_{\vec{v}\,'} + x'\frac{\mathrm{d}\vec{e}_x\,'}{\mathrm{d}t} + y'\frac{\mathrm{d}\vec{e}_y\,'}{\mathrm{d}t} + z'\frac{\mathrm{d}\vec{e}_z\,'}{\mathrm{d}t}; \tag{13.5}$$

$$\mathrm{d}\vec{e}_x\,' = -\vec{e}_z\,'\mathrm{d}\varphi_{y'} + \vec{e}_{y'}\mathrm{d}\varphi_{z'} \implies \dot{\vec{e}}_{x'} = \vec{e}_{y'}\dot{\varphi}_{z'} - \vec{e}_{z'}\dot{\varphi}_{y'} = \vec{e}_{y'}\omega_{z'} - \vec{e}_{z'}\omega_{y'} \implies \tag{13.6}$$

$$\implies x'\dot{\vec{e}}_x\,' + y'\dot{\vec{e}}_y\,' + z'\dot{\vec{e}}_z\,' = x' \cdot (\vec{e}_{y'}\omega_{z'} - \vec{e}_{z'}\omega_{y'}) + y' \cdot (-\vec{e}_{x'}\omega_{z'} - \vec{e}_z\,'\omega_x) +$$
$$+ z'(-\vec{e}_y\,'\omega_{x'} + \vec{e}_x\omega_{y'}) = \omega \times \vec{r}\,'. \tag{13.7}$$

Ускорение:

$$\vec{a} \overset{def}{=} \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d\vec{V}}{dt} + \frac{d}{dt}\vec{V}\,' + \frac{d}{dt}\vec{\omega} \times \vec{r}\,' = \vec{a}_0 + \vec{a}\,' + \vec{\omega} \times \vec{V}\,' + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}\,' + \vec{\omega} \times \vec{V}\,' + \vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{r}\,']$$
$$= \vec{a}_0 + \vec{a}\,' + 2[\vec{\omega} \times \vec{V}\,'] + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{r}\,'], \tag{13.8}$$

где $\vec{a}_0$ - поступательное ускорение, $\vec{a}\,'$ - ускорение в К'.

$$\text{Переносное ускорение: } \vec{a}_{\text{пер}} = \vec{a}_0 + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}\,',$$
$$\text{Кориолисово ускорение: } \vec{a}_{\text{кор}} = 2[\vec{\omega} \times \vec{V}\,']. \tag{13.9}$$

Умножим на массу полученное значение ускорения:

$$m\vec{a}\,' = \underset{m\vec{a}}{\underset{||}{\vec{F}}} \underbrace{-m\vec{a}_0 - 2m[\vec{\omega} \times \vec{V}\,'] - m\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}' - m[\vec{\omega}[\vec{\omega} \times \vec{r}\,']]}_{\vec{F}_{\text{in}}}. \tag{13.10}$$

$$\vec{F}_{\text{in пост.}} = -m\vec{a}_0; \tag{13.11}$$

$$\vec{F}_{\text{in кор.}} = -2m[\vec{\omega} \times \vec{V}]; \tag{13.12}$$

$$\vec{F}_{\text{in ц.б.}} = -m[\vec{\omega}[\vec{\omega} \times \vec{r}\,']] - m\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}\,'. \tag{13.13}$$

Введя силы инерции, рассмотрим примеры их проявления.

13.1 Поступательная сила инерции(сила Д'Аламбера)

13.1.1 Ускоряющийся автобус

Тело находится в ускоряющемся автобусе/вагоне и т.д. Пусть в нашем случае это будет человек и мы хотим сохранять состояние покоя. Как? Уравнение:

$$m\vec{a}\,' = \vec{F} + \vec{F}_{\text{in}},$$
$$\vec{v}\,' = 0, \vec{\omega} = 0 \Rightarrow \vec{F}_{\text{in}} = -m\vec{a}_0. \tag{13.14}$$

Для сохранения состояния покоя, нам необходимо, чтобы $m\vec{a}\,' = 0$.

$$m\vec{a}\,' = 0 = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}} - m\vec{a}_0,$$
$$oy : N = mg,$$
$$ox : kmg = ma_0. \tag{13.15}$$

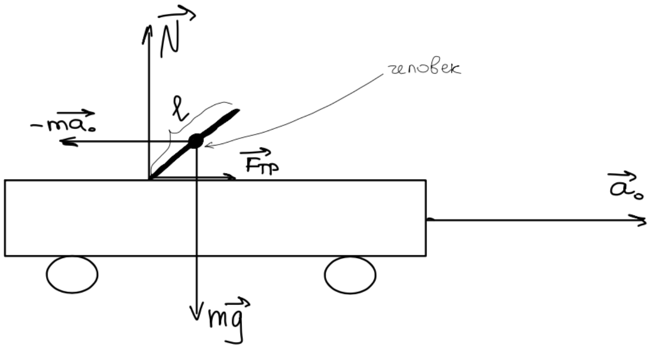


Рис. 13.2: Задача на ускоряющееся тело в НИСО.

Однако, также необходимо записать уравнение на моменты сил, чтобы человек не упал:

$$\frac{l}{2}\cos\alpha\, ma_0 = \frac{l}{2}\sin\alpha\, mg,$$
$$\boxed{\frac{a_0}{g} = \tan\alpha}. \tag{13.16}$$

13.1.2 Механические часы на математическом маятнике

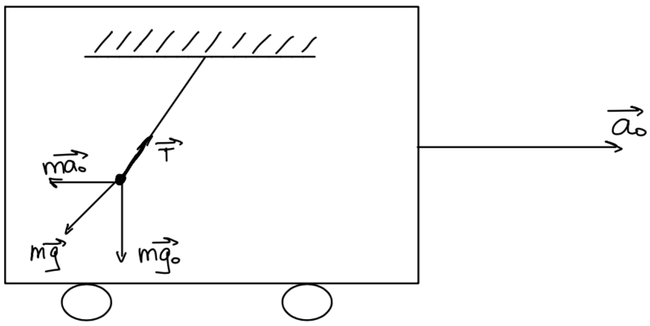


Рис. 13.3: Механические часы на математическом маятнике в НИСО.

$$m\vec{a}\,' = \vec{T} + m\vec{g}_0 + \vec{F}_{\text{in}},$$
$$m\vec{a}\,' = \vec{T} + m\vec{g}_0 - m\vec{a}_0,$$
$$m\vec{a}\,' = \vec{T} + m(\vec{g}_0 - \vec{a}_0) \Rightarrow \vec{g}_{\text{эфф}} = \vec{g}_0 - \vec{a}_0 \Rightarrow m\vec{a}\,' = \vec{T} + m\vec{g}_{\text{эфф}}$$
$$\Rightarrow \underset{\text{период}}{T} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{|\vec{g}_{\text{эфф}}|}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{\sqrt{\vec{a}_0^2 + \vec{g}_0^2}}}. \tag{13.17}$$

На земле, без ускорения, замерим и получим, скажем, 1 секунду, отсчитали 50 колебаний в ускоряющемся поезде, то есть захотели сказать, что прошло $50 \cdot 1$ секунд, однако период уменьшится, то есть пройдёт меньше времени.
3. Рассмотрим вращающуюся систему: $\vec{a}_0 = 0$, $\underbrace{\vec{\omega}}_{const} \neq 0$

Найти новое положение равновесия: $(\vec{v}\,' = 0, \vec{a}\,' = 0)$

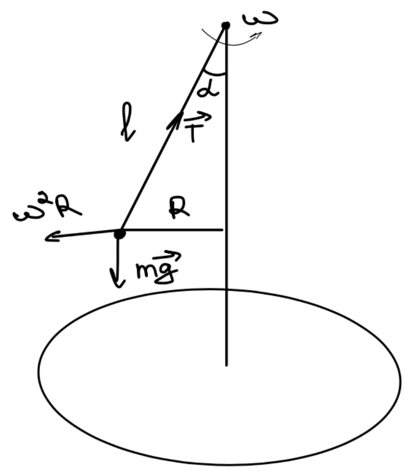


Рис. 13.4: Динамика маятника в НИСО.

$$
\begin{aligned}
&m\vec{a} = \vec{F} + \vec{F}_{\text{in}},\\
&\vec{F}_{\text{in}} = -m[\vec{\omega}, [\vec{\omega} \times \vec{r}\,']]. \qquad (13.18)\\
&\vec{\omega} \times \vec{r}\,' = \vec{c},\\
&|c| = |\vec{\omega}| \cdot \underbrace{|\vec{r}\,'| \cdot \sin\alpha}_{R},\\
&[\vec{\omega} \times \vec{c}] = \vec{b},\ \vec{r}\,',\ \vec{b} \text{ и } \vec{\omega} - \text{в одной плоскости.}\\
&|[\vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{r}\,']]| = \omega^2 \cdot R, \text{направление всегда к оси вращения.} \qquad (13.19)
\end{aligned}
$$

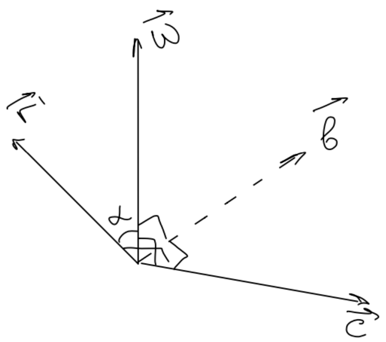


Рис. 13.5: Новое положение равновесия.

Из условия следует:

$$
\begin{aligned}
&\vec{0} = m\vec{g} + \vec{T} - m[\omega \times [\vec{\omega} \times \vec{r}\,']],\\
&0 = mg - T\cos\alpha,\\
&0 = m\omega^2 \underbrace{R}_{l\sin\alpha} - T\sin\alpha. \qquad (13.20)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\begin{cases} T\cos\alpha = mg, \\ m\omega^2 l = T \end{cases} \Rightarrow \omega^2 l = \frac{g}{\cos\alpha},\\
&\cos\alpha = \frac{g}{\omega^2 l} \leqslant 1. \qquad (13.21)
\end{aligned}
$$

То есть либо $\alpha = 0$ если $\dfrac{g}{\omega^2 l} \leqslant 1$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \sin\alpha\, l\, m\omega^2 &= T\sin\alpha,\\ 0\cdot l\, m\omega^2 &= T\cdot 0 \text{ и } T = mg.\end{aligned} \tag{13.22}$$

То есть в таком случае отклонение от горизонтальной оси:

$$\alpha = \arccos\left[\frac{g}{\omega^2 l}\right]. \tag{13.23}$$

13.1.3 Колебание веса из-за вращения планеты

Учтём вращение Земли, чтобы оценить разницу в весе ($\vec{P}$) тела в разных точках Земли. Вес тела, $\vec{P}$ - сила, с которой тело действует на опору. $|\vec{P}| = P = |\vec{N}| = N \quad (\vec{P} = -\vec{N})$.

$$\begin{aligned}
&m\vec{a}\,' = m\vec{g} + \vec{N} - m[\omega\times[\vec{\omega}\times\vec{r}]],\\
&0 = m\vec{g} - m[\omega\times[\vec{\omega}\times\vec{r}]] + \vec{N},\\
&m\vec{g}_{\text{eff}} + \vec{N} = 0,\\
&\vec{g}_{\text{eff}} = \vec{g}\underbrace{-[\omega\times[\vec{\omega}\times\vec{r}]]}_{\vec{a}_c} = \vec{g} + \vec{a}_c,\\
&|\vec{a}_c| = \omega^2 R_\oplus \cos\alpha,\\
&|\vec{g}_{\text{eff}}| = \sqrt{(\vec{g}+\vec{a}_c)^2} = \sqrt{\vec{g}^2 + \vec{a}_c^2 + 2\vec{a}_c\vec{g}} = g\sqrt{1 + \frac{\omega^4 R_\oplus^2\cos^2\alpha}{g^2} + \frac{2a_c g}{g^2}(-\cos\alpha)}\\
&\qquad = g\sqrt{1 - \frac{2\omega^2 R_\oplus\cos\alpha}{g} + \frac{\omega^4 R_\oplus^2\cos^2\alpha}{g^2}} = g\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2 R_\oplus\cos\alpha}{g}\right)^2}. && (13.24)\\
&|\vec{g}_{\text{eff}}| = g - \omega^2 R_\oplus\cos\alpha. && (13.25)
\end{aligned}$$

В случае Земли,

$$\begin{aligned}&\omega \approx 7{,}3\cdot 10^{-5}\ \text{с}^{-1},\\ &\omega^2 \approx 5{,}3\cdot 10^{-9}\ \text{с}^{-2},\\ &R_\oplus \approx 6{,}4\cdot 10^{6}\ \text{м}.\end{aligned}$$

Подставляя это в получившийся вывод, получаем численную поправку к ускорению свободного падения

$$|\vec{g}_{\text{eff}}| \approx g - 0{,}034\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}\cos\alpha. \tag{13.26}$$

Для общего понимания выразим максимальное отклонение $|\vec{g}_{\text{eff}}|$ от g в процентах от g.

$$\frac{g - \left(g - 0{,}034\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}\cos\alpha\Big|_{\cos\alpha=1}\right)}{g} = \frac{0{,}034\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}}{g} \approx 0{,}0035 \approx 0{,}35\% \tag{13.27}$$

Такое отклонение возможно засечь достаточно точными приборами, однако его малость оставляет нам простор случаев, в которых мы можем игнорировать переменчивость ускорения свободного падения.

13.1.4 Пуля и карусель

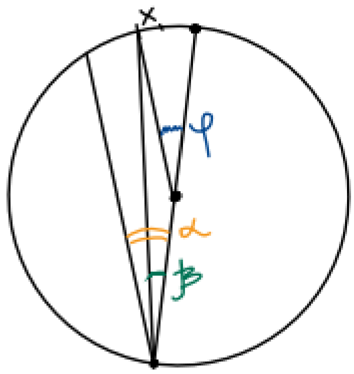


Рис. 13.6: Вращающаяся карусель, на которой стрелок целится в мишень.

Рассмотрим стрелка, который стоит на вращающейся карусели радиуса R и целится в мишень, которую видит под углом β. (Сама мишень, значит, удалена от диаметра между ней и стрелком на дугу $\varphi = 2\beta$). Скорость пули, которую выпускает стрелок, примем u. Рассмотрим её смещение x из-за угловой скорости ω и найдём угол α, который нужен стрелку, чтобы скомпенсировать как своё вращение, так и вращение мишени.

$$\alpha \approx \operatorname{tg} \alpha = \frac{\omega R}{u} + \beta, \tag{13.28}$$

$$\alpha = \frac{\omega R}{u} + \frac{\varphi}{2} = \frac{\omega R}{u} + \frac{\omega \cdot \frac{\cancel{2}R}{u}}{\cancel{2}} = \frac{\omega R}{u} + \frac{\omega R}{u} = \frac{2\omega R}{u}. \tag{13.29}$$

Рассмотрим динамику пули в системе отсчёта, связанной с вращающимся диском. За m обозначим её массу, за $\vec{v'}$ — скорость в этой системе отсчёта, за $\vec{a'}$ — ускорение.

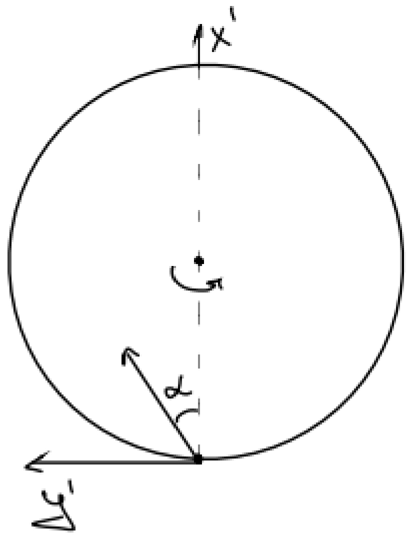


Рис. 13.7: Динамика пули в неинерциальной системе отсчёта.

$$m\vec{a'} = \underbrace{\vec{F}}_{0} - \underbrace{m\vec{a}_0}_{0} - \underbrace{m\Big[\vec{\omega}\times[\vec{\omega}\times\vec{r}]\Big]}_{\text{мало, почти 0}} - 2m[\vec{\omega}\times\vec{v'}], \tag{13.30}$$

$$\text{где } |[\vec{\omega}\times\vec{v'}]| = \omega u. \tag{13.31}$$

Довольно очевидно, что ускорение направлено строго вдоль оси y'. (На самом деле, это не совсем так : кориолисово ускорение всегда перпендикулярно скорости пули в НИСО, а она вообще не совсем параллельна оси x', но при этом из-за высокой скорости пули составляет малый угол с этой осью, поэтому проекция кориолисова ускорения на ось x' будет величиной первого порядка малости и, соответственно, мы можем ей пренебречь. Более точно траекторию пули можно представить в виде дуги окружности, так как кориолисово ускорение всегда перпендикулярно скорости, следовательно изменяет только её направление, но не изменяет абсолютное значение, но так как мы лишь оцениваем величину угла α, то замена параболы на дугу окружности даст поправку более высокого порядка малости и ей можно будет пренебречь)

$$ma_{y'} = -2m\omega u. \tag{13.32}$$

$$\vec{a'} = \begin{pmatrix} 0 \\ a_{y'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{x'} \\ a_{y'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2\omega u \end{pmatrix}. \tag{13.33}$$

$$\text{Тогда диаметр } 2R = \underbrace{u\cos\alpha}_{v_{0x}}\tau. \tag{13.34}$$

Получившаяся ситуация кинематически ничем не отличается от движение в поле тяжести Земли — как и в том случае, всё время полёта τ можно разбить на время до достижения максимума по оси y' и на время после, так что $\tau_\uparrow = \tau_\downarrow = \dfrac{1}{2}\tau$.

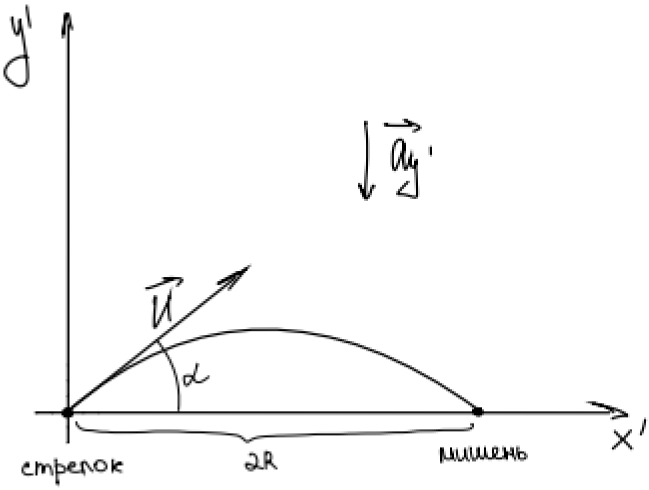


Рис. 13.8: Равноускоренное движение пули от стрелка до мишени.

$$y'(t) = v_{0y}t + \frac{a_{y'}t^2}{2} = ut\sin\alpha - \frac{2\omega u t^2}{2}. \tag{13.35}$$

$$\tag{13.36}$$

По лемме Ферма при достижении максимума производная обнуляется:

$$\left.\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t}\right|_{t=\tau_\uparrow} = 0 = u\sin\alpha - 2\omega u\tau_\uparrow. \tag{13.37}$$

$$\tau_\uparrow = \frac{\cancel{u}\sin\alpha}{2\omega\cancel{u}}, \tag{13.38}$$

$$\tau = 2\tau_\uparrow = \frac{\sin\alpha}{\omega}. \tag{13.39}$$

$$\frac{2R}{u\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\omega}. \tag{13.40}$$

$$\tag{13.41}$$

Возьмём угол α малым — тогда синус примерно равен ему самому, а косинус можно принять за единицу.

$$\alpha \approx \sin\alpha = \frac{2R\omega}{u}. \tag{13.42}$$

Лекция 14.

Маятник Фуко. Сухое и вязкое трение. Пружинка. Приливы и отливы

14.1 Маятник Фуко

Изучим тяжёлый шар на длинном подвесе. Встав на полюс, вполне можем считать, что подвес на оси и мы сами находимся в инерциальной системе отсчёта: период обращения плоскости колебаний будет равен одним земным суткам. Это можно объяснить тем, что плоскость, в которой маятник совершает свои колебания не изменяет своего положения в пространстве, а Земля под ним поворачивается с периодом в 1 сутки.

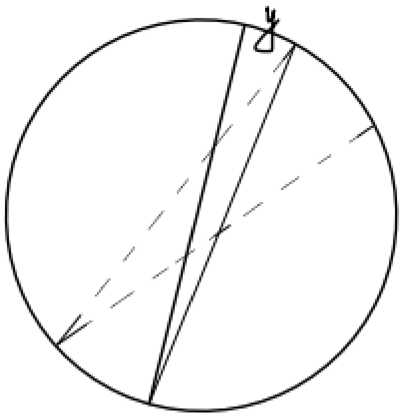


Рис. 14.1: Смещение маятника в ходе движения.

Обозначим за y смещение за один проход.

$$a_y = 2\omega v_x(t). \tag{14.1}$$

$$v_y = \int\limits_0^t a_y \mathrm{d}\tilde{t} = 2\omega \int\limits_0^t v_x \mathrm{d}\tilde{t}, \tag{14.2}$$

$$y_0 = 2\omega \int\limits_0^t \mathrm{d}\hat{t} \int\limits_0^t v_x \mathrm{d}\tilde{t}. \tag{14.3}$$

$$\frac{T_0}{t} = \frac{2\pi R}{y_0}, \tag{14.4}$$

$$T_0 = \frac{2\pi R t}{y_0}. \tag{14.5}$$

При смещении по широте $y = y_0 \sin\varphi$. Это можно объяснить тем, что из выражения для y_0 следует, что $y_0 \sim \omega$, а из геометрии составляющая ω, перпендикулярная поверхности Земли, на широте φ равна $\omega \sin\varphi$. (С помощью правила правой руки определения направления векторного произведения несложно убедиться, что составляющая ω, параллельная поверхности Земли при векторном умножении на скорость груза маятника в СО Земли будет перпендикулярна поверхности Земли, следовательно соответствующая составляющая силы Кориолиса будет лишь изменять силу натяжения нити подвеса)

$$T_\varphi = \frac{2\pi R t}{y_0 \sin\varphi} = \frac{T_0}{\sin\varphi}. \tag{14.6}$$

14.2 Сила трения

14.2.1 Вязкое трение

Соответствующая сила возникает при движении в газах и жидкостях (сила сопротивления). Уже рассматривали разные варианты $-\alpha\vec{v}$, $-\alpha\vec{v}^2\frac{\vec{v}}{v}$ и т.д.
Сила трения направлена противоположно относительному перемещению тела.

1. Сила трения покоя - сила трения, возникающая между телами при отсутствии относительного движения.

2. Сила трения скольжения - сила трения, возникающая при движении тел друг по другу.

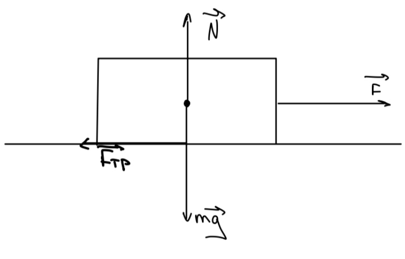


Рис. 14.2: Силы действующие на тело.

$F_0 = \mu_0 N$
μ - коэффициент трения скольжения.
μ_0 - коэффициент трения покоя.
F_0 - максимальная сила трения покоя.

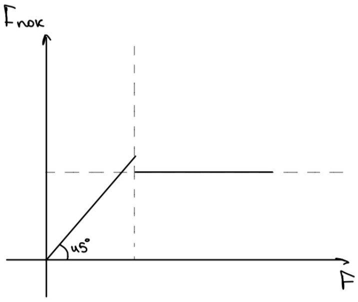


Рис. 14.3: Зависимость силы трения от приложенной силы.

14.3 Приливы

1) **Амплитуда прилива** – разность уровней большой и малой воды;
2) Время между двумя приливами $\sim$ 12:25 (половина периода видимого обращения Луны вокруг Земли);
3) Основной эффект от Луны.
Найдём эффект в нулевом приближении.

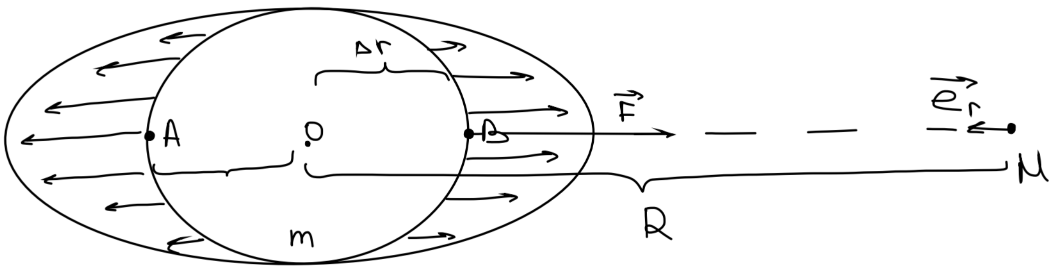


Рис. 14.4: Схема прилива.

Приливное ускорение в точке находится путём вычитания гравитационного ускорения центра тела и гравитационного ускорения в точке рассмотрения.

$$\vec{F} = -\gamma \frac{mM}{R^2}\vec{e}_r$$
$$\implies \vec{a} = -\gamma \frac{M}{R^2}\vec{e}_r. \tag{14.7}$$

$$\vec{a}_{B,A} = -\gamma \frac{M}{(R \pm \Delta r)^2}\vec{e}_r = -\gamma \frac{M}{R^2\left(1 \pm \dfrac{\Delta r}{R}\right)^2}\vec{e}_r; \tag{14.8}$$
$$\vec{a}_B = -\gamma \frac{M}{R^2}\vec{e}_r\left(1 - 2\frac{\Delta r}{R}\right) + \ldots = -\gamma \frac{M}{R^2}\vec{e}_r + 2\gamma \frac{M}{R^2}\frac{\Delta r}{R}\vec{e}_r; \tag{14.9}$$
$$\vec{a}_A = -\gamma \frac{M}{R^2}\vec{e}_r\left(1 + 2\frac{\Delta r}{R}\right) + \ldots = -\gamma \frac{M}{R^2}\vec{e}_r - 2\gamma \frac{M}{R^2}\frac{\Delta r}{R}\vec{e}_r. \tag{14.10}$$

Замечание:
Прилив происходит не в кульминации Луны (начальные скорость и координата). Аналогия с пружинкой в поле тяготения. Всё определяется поступательными силами инерции и силой тяготения Луны. Найдём формулу более строго:

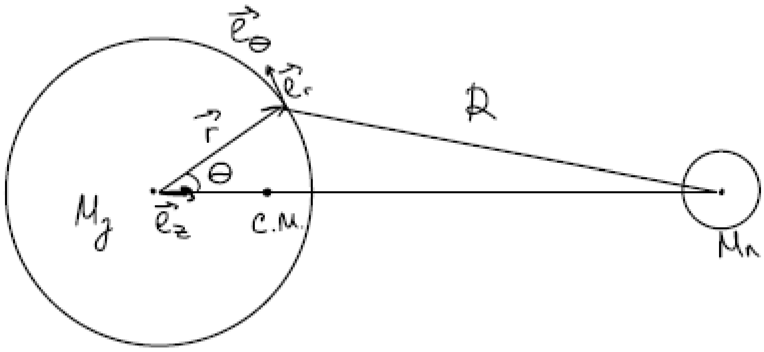


Рис. 14.5:

$$\vec{g} = -\gamma \frac{M}{R^2}\vec{e}_r, \tag{14.11}$$

Проверим знак:

$$\begin{aligned} &\varphi = -\gamma \frac{M}{R}, \\ &-\nabla\varphi = -\gamma \frac{M}{R^2}\vec{e}_r. \end{aligned} \tag{14.12}$$

Запишем соотношение на потенциалы:

$$\varphi = \varphi_л + \varphi_{ин}, \tag{14.13}$$

Найдём $\varphi_{ин}$:

$$\begin{aligned} &\varphi_{ин} = a_0 r\cos\theta, \\ &\vec{F}_{ин} = -m\vec{a}_0 = -ma_0\vec{e}z, \\ &g = -a_0\vec{e}_z = -\frac{d}{dz}\varphi_{ин}\vec{e}_z \\ &\Rightarrow \varphi_{ин} = a_0 z = a_0 r\cos\theta. \end{aligned} \tag{14.14}$$

Найдём $\varphi_л$:

$$\begin{aligned} \varphi_л &= -\gamma\frac{M_л}{R} = -\gamma\frac{M_л}{\sqrt{(R_{зл} - r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2}} = -\gamma\frac{M_л}{\sqrt{(R_{зл}^2 + r^2 - 2R_{зл} r\cos\theta + (r\sin\theta)^2}} = \\ &= -\gamma\frac{M_л}{R_{зл}}\left[1 + \frac{r\cos\theta}{R_{зл}} - \frac{1}{2}\frac{r^2}{R_{зл}^2} + \frac{3}{8}\left(\frac{2r\cos\theta}{R_{зл}}\right)^2 + \ldots\right]. \end{aligned} \tag{14.15}$$

Введём обозначение:

$$x = \frac{-2R_{зл} r\cos\theta}{R_{зл}^2} + \frac{r^2}{R_{зл}^2}. \tag{14.16}$$

Тогда

$$(1+x)^p = 1 + px + \frac{p(p-1)x^2}{2!} + O(x^3) = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{r^2}{R_{зл}^2} - 2\frac{r\cos\theta}{R_{зл}}\right) + \frac{3}{8}\left(\frac{r^2}{R_{зл}^2} - 2\frac{r\cos\theta}{R_{зл}}\right)^2 + \ldots. \tag{14.17}$$

Пусть $\varphi_0 = 0, \quad -\gamma M_{\text{л}}/R_{\text{зл}}^2 = a_0$:

$$\varphi = \varphi_0 - \gamma \frac{M_{\text{л}}}{R_{\text{зл}}} \cdot \frac{2r\cos\theta R_{\text{зл}} - r^2}{2R_{\text{зл}}^2} - \frac{3}{8}\gamma \frac{M_{\text{л}}}{R_{\text{зл}}} \left(\frac{2r\cos\theta}{R_{\text{зл}}}\right)^2 =$$

$$= -\gamma \frac{M_{\text{л}}}{R_{\text{зл}}^2} r\cos\theta + \gamma \frac{M_{\text{л}}}{2R_{\text{зл}}^3} r^2 - \frac{3}{8}\left(\frac{r^2}{R_{\text{зл}}^2} - 2\frac{r\cos\theta}{R_{\text{зл}}}\right)^2 + \ldots \tag{14.18}$$

$$\varphi_{\text{л}} + \varphi_{\text{ин}} = a_0 r cos\theta - a_0 r\cos\theta,$$

$$\varphi = \varphi_{\text{пр}} = -\frac{3}{8}\gamma \frac{M_{\text{л}}}{R_{\text{зл}}^2} \frac{r^2}{R_{\text{зл}}} 2 \cdot (2\cos^2\theta - 1) = -\frac{3}{8}\gamma \frac{M_{\text{л}}}{R_{\text{зл}}^2} \cdot \frac{r^2}{R_{\text{зл}}} 2\cos 2\theta \tag{14.19}$$

Список вопросов теоретического минимума

В данном списке представлены вопросы, которые войдут в так называемый теоретический минимум. Согласно регламенту студент обязан быть готов ответить на любой вопрос из этого списка, чтобы получить допуск к дополнительным вопросам на экзамене, которые позволят получить ему оценку хорошо или отлично.

1. **Вопрос:** дайте определение скорости материальной точки?
   Ответ: $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$.
2. **Вопрос:** дайте определение ускорения материальной точки?
   Ответ: $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}$.
3. **Вопрос:** запишите ускорение материальной точки на плоскости, разбив его на две компоненты с использованием радиуса кривизны?
   Ответ: $\vec{W} = \dfrac{d}{dt}\vec{v} = \vec{\tau} \cdot \dfrac{dv}{dt} + v \cdot \dfrac{d\vec{\tau}}{dt} = a_\tau \vec{\tau} + v \cdot \vec{n} \cdot \dfrac{dS}{Rdt} = a_\tau \vec{\tau} + \vec{n} \cdot \dfrac{v^2}{R}$.
4. **Вопрос:** дайте определение системы отсчета?
   Ответ: Система отсчёта – совокупность системы координат, начала отсчёта, привязанного к некоторому физическому объекту, и отсчитывающих время часов.
5. **Вопрос:** дайте определение материальной точки?
   Ответ: Материальная точка - модель обладающего массой тела, размерами и формой которого можно пренебречь в условиях данной задачи.
6. **Вопрос:** дайте определение радиуса кривизны траектории?
   Ответ: Радиус кривизны траектории - радиус бесконечно малой дуги окружности, по которой движется тело в данный момент времени. По определению угла в радианах $d\varphi = \dfrac{dS}{R} \Rightarrow R = \dfrac{dS}{d\varphi}$. Если известна траектория движения тела в декартовой системе координат на плоскости, то радиус кривизны траектории можно вычислить по следующей формуле : $R = \dfrac{\left(1 + (y'_x)^2\right)^{\dfrac{3}{2}}}{y''_x}$.
7. **Вопрос:** дайте определение силы?
   Ответ: Сила - векторная физическая величина, характеризующая меру воздействия на данное тело со стороны других тел или полей.
8. **Вопрос:** назовите типы фундаментальных взаимодействий?
   Ответ: Существуют лишь четыре типа так называемых фундаментальных взаимодействий: гравитационное (гипотетический переносчик взаимодействия - гравитон, такое взаимодействие испытывают все тела, обладающие массой, самое слабое из всех типов фундаментальных взаимодействий), электромагнитное(переносчик взаимодействия

- фотон, такое взаимодействие испытывают все тела, обладающие электрическим зарядом, сильнее гравитационного в 10^{36} раз, примеры - сила упругости, сила трения, сила реакции опоры), слабое (переносчики взаимодействия - $W^{\pm}$ и Z^0 бозоны, меняет тип кварков внутри нуклонов, изменяя значение квантового числа - аромата, слабее электромагнитного взаимодействия в 10^{13} раз, пример, где наблюдается - радиоактивный бета-распад, при котором свободный нейтрон превращается в протон), и сильное (переносчик взаимодействия - глюон, во взаимодействии участвуют кварки, в 100 раз сильнее электромагнитного взаимодействия, однако имеет очень ограниченный радиус действия - 10^{-15} м (порядок радиуса протона), изучается квантовой хромодинамикой).

9. **Вопрос:** дайте определение инерции?
   Ответ: Инерция - свойство тела сопротивляться к изменению характера его движения. Мерой инерции является масса.

10. **Вопрос:** дайте определение импульса?
    Ответ: Импульс - векторная физическая величина, равная произведению массы тела на вектор скорости его движения ($\vec{p} = m\vec{v}$).

11. **Вопрос:** сформулируйте первый закон Ньютона?
    Ответ: Существуют такие системы отсчёта, называемые инерциальными, относительно которых свободное тело, т. е. тело, на которое не действуют внешние силы или действие которых на него скомпенсировано, сохраняет свою скорость постоянной.

12. **Вопрос:** сформулируйте второй закон Ньютона?
    Ответ: Векторная сумма всех сил, действующих на тело, равна скорости изменения импульса этого тела :
    $\dfrac{d\vec{p}}{dt} = \sum_i \vec{F}$.

13. **Вопрос:** сформулируйте третий закон Ньютона?
    Ответ: Тела действуют друг на друга с силами, равными по модулю и противоположными по направлению, причём эти силы имеют одинаковую природу.

14. **Вопрос:** сформулируйте закон сохранения импульса?
    Ответ: Скорость изменения импульса системы тел равна векторной сумме всех сил, действующих на эту систему : $\dfrac{d\vec{p}_{\text{системы}}}{dt} = \sum_i \vec{F_i}$ (Если система тел замкнутая, т. е. на неё не действуют внешние силы или их действие на неё скомпенсировано, то её импульс сохраняется : $\sum_i \vec{p_i} = \overrightarrow{const}$)

15. **Вопрос:** сформулируйте классический принцип относительности?
    Ответ: Все законы механики инвариантны относительно выбора инерциальной системы отсчёта.

16. **Вопрос:** сформулируйте принцип относительности Эйнштейна?
    Ответ: Все законы природы инвариантны относительно выбора инерциальной системы отсчёта по отношению к преобразованиям Лоренца.

17. **Вопрос:** напишите преобразования Галилея?
    Ответ:

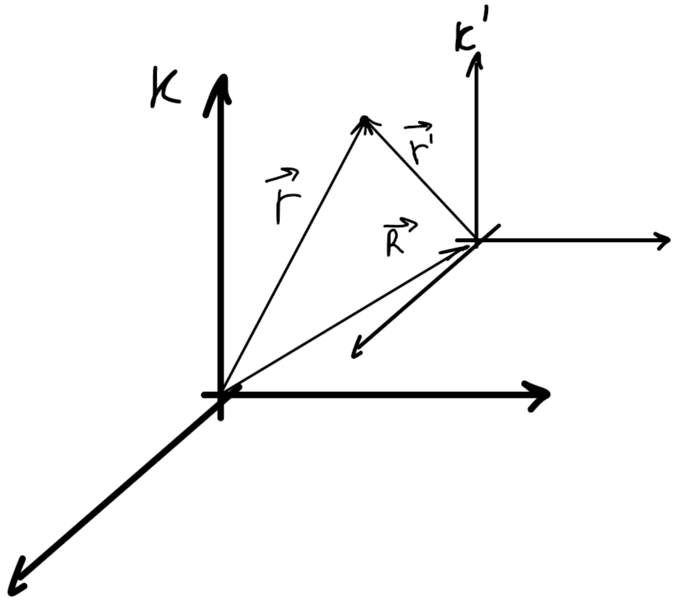


Рис. 14.6: Преобразования Галилея.

$$\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{R} = \vec{r}\,' + \vec{V} \cdot t$$
$$\dot{\vec{r}} = \vec{U} = \vec{U}\,' + \vec{V}$$
$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = \dot{\vec{U}} = \dot{\vec{U}}\,' = \vec{a}\,' = \ddot{\vec{r}}\,'$$
$$\boxed{m\vec{a} = m\vec{a}\,' = \vec{F}}$$

18. **Вопрос:** дайте определение центра масс?
Ответ: Центр масс системы – это такая точка в пространстве, радиус-вектор которой определяется следующим образом:
$\vec{R}_{c.m.} = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{N} \vec{r_i} \cdot m_i}{M} = \int \dfrac{\vec{r}\rho(r)dV}{M}.$
Центр масс тела движется как материальная точка под действием всех внешних сил, приложенных к телу.

19. **Вопрос:** напишите уравнение Мещерского?
Ответ: $M(t)\dfrac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F}(t) + \vec{V}_{\text{отн}}\dfrac{dM}{dt}.$
$M(t)$ - масса ракеты в зависимости от времени t.
$\vec{V}$ - скорость ракеты в лабораторной системе отсчёта.
$\vec{F}(t)$ - геометрическая сумма всех внешних сил, действующих на ракету в зависимости от времени.
$\vec{V}_{\text{отн.}}$ - скорость газов относительно ракеты.
$\dfrac{dM}{dt}$ - скорость изменения массы ракеты.

20. **Вопрос:** напишите формулу Циолковского?
Ответ: $V = V_0 - V_{\text{отн}} \ln \dfrac{M_{\text{кон}}}{M_{\text{нач}}}$ - справедливо, если реактивное движение происходит

вдоль прямой, а внешние силы отсутствуют.

$\vec{V}$ и $\vec{V}_0$ - конечная и начальная скорости ракеты.

$M_{\text{кон}}$ и $M_{\text{нач}}$ - начальная и конечная массы ракеты.

21. **Вопрос:** Дайте определение работы?
Ответ: Работа - скалярная количественная мера действия силы (равнодействующей сил) на тело или сил на систему тел. Зависит от численной величины и направления силы (сил) и от перемещения тела (системы тел). Элементарная работа равна скалярному произведению силы, действующей на тело, на вектор бесконечно малого перемещения. $\delta A = \vec{F} \cdot d\vec{r} \;=\; (\vec{F}, d\vec{r}) \;=\; |\vec{F}| \cdot |d\vec{r}| \cdot \cos(\angle(\vec{F}, d\vec{r}))$.

22. **Вопрос:** Дайте определение кинетической энергии?
Ответ: Кинетическая энергия (материальной точки) - скалярная физическая величина, равная половине произведения массы материальной точки на квадрат скорости её движения ($T = \dfrac{mv^2}{2}$).
Кинетическая энергия системы материальных точек есть сумма кинетических энергий всех материальных точек, составляющих систему.
Физический смысл : кинетическая энергия равна работе внешних сил, которую надо совершить, чтобы разогнать в конкретной системе отсчёта покоящееся тело до заданной скорости.

23. **Вопрос:** Дайте определение потенциальной энергии?
Ответ: Потенциальная энергия $U(\vec{r})$ — скалярная физическая величина, представляющая собой часть полной механической энергии системы ($E = E_{\text{п}} + E_{\text{к}}$), находящейся в поле консервативных сил. Потенциальная энергия зависит от положения материальных точек, составляющих систему, и характеризует работу, совершаемую полем при их перемещении.

24. **Вопрос:** Дайте определение полной механической энергии?
Ответ: Полная механическая энергия - скалярная физическая величина, равная сумме потенциальной и кинетической энергий : $E = T + U$.

25. **Вопрос:** Опишите связь потенциальной энергии и силы?
Ответ: $\vec{F} = -\nabla U = -\operatorname{grad} U$.

26. **Вопрос:** Дайте определение мощности?
Ответ: Мощность - скалярная физическая величина, равная скорости совершения работы : $P = \dfrac{dA}{dt}$.

27. **Вопрос:** Сформулируйте теорему Кёнига?
Ответ: Полная кинетическая энергия системы равна сумме кинетической энергии системы в системе отсчёта центра масс этой системы и кинетической энергии поступательного движения центра масс :
$T_k = T_{k'} + \dfrac{MV^2}{2}$.

28. **Вопрос:** Сформулируйте закон изменения полной механической энергии?
Ответ: Изменение полной механической энергии системы тел равно сумме работ внутренних неконсервативных сил системы и внешних сил, действующих на систему :
$\Delta E = A_{\text{вн. неконс.}} + A_{\text{внеш.}}$.

29. **Вопрос:** Сформулируйте закон сохранения полной механической энергии?
Ответ: Полная механическая энергия системы сохраняется, если в данной системе

неконсервативные и внешние силы не совершают работы.

30. **Вопрос:** Сформулируйте определение момента импульса материальной точки?
Ответ: Момент импульса материальной точки - векторная физическая величина, равная векторному произведению радиус вектора точки, проведённого от оси вращения на вектор импульса этой точки :
$\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}]$.

31. **Вопрос:** Сформулируйте определение момента силы?
Ответ: Момент силы - векторная физическая величина, равная векторному произведению вектора, проведённого от оси вращения к точке, к которой приложена сила, на вектор этой силы :
$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}]$

32. **Вопрос:** Сформулируйте законы Кеплера?
Ответ: 1 закон : все планеты движутся по эллиптическим орбитам, в одном из фокусов которого находится солнце.
2 закон : радиус-вектор каждой планеты за равные промежутки времени заметает равные площади.
3 закон : квадраты периодов обращения планет относятся как кубы больших полуосей их орбит : $\dfrac{T^2}{a^3} = const$.

33. **Вопрос:** дайте определение секториальной скорости?
Ответ: Секториальная скорость - векторная физическая величина, модуль которой равен площади, которую заметает радиус-вектор планеты за единицу времени, а направление совпадает с направлением вектора момента импульса этой планеты.
$\vec{\sigma} = \dfrac{d\vec{S}}{dt} = \dfrac{\vec{L}}{2m}$.

34. **Вопрос:** напишите формулу Резерфорда?
Ответ: При рассеянии на кулоновском потенциале угол, на который изменится направление скорости заряженной частицы, налетающей на другую заряженную частицу (в системе отсчёта, связанной с заряженной частицей) можно вычислить по формуле Резерфорда :
$\operatorname{tg}\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{kq_1q_2}{\mu b v_\infty^2}$.
q_1 и q_2 - заряды частиц.

v_∞ - скорость налетающей частицы на бесконечном удалении от другой частицы.

$\mu = \dfrac{mM}{m+M}$ - приведённая масса частиц.

Другой вариант формулы Резерфорда(про дифференциальное сечение рассеяния) : дифференциальное эффективное поперечное сечение рассеяния заряженных частиц в телесный угол Ω в кулоновском поле другой заряженной частицы или ядра (мишени) обратно пропорционально четвёртой степени синуса половинного угла рассеяния :
$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{4} \cdot (k\frac{Q_1 \cdot Q_2}{\mu v_\infty^2})^2 \cdot \frac{1}{\sin^4\frac{\theta}{2}}$.

Q_1 и Q_2 - заряды частиц.

$\mu = \dfrac{mM}{m+M}$ - приведённая масса частиц.

v_∞ - скорость налетающих частиц на бесконечном удалении от другой частицы в системе отсчёта другой частицы.

θ - угол, на который изменяется направление скорости частиц

35. **Вопрос:** сформулируйте закон всемирного тяготения?
Ответ: Сила гравитационного притяжения между двумя материальными точками действует вдоль прямой, соединяющей эти материальные точки, прямо пропорциональна произведению их масс и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними :
$\vec{F} = -\gamma\dfrac{m_1 m_2 \vec{r}}{r^3}$, $\gamma = 6.67 \cdot 10^{-11}\ \dfrac{H \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2}$.
(Этот закон также будет справедлив, если тела имеют форму шара; если расстояние между телами много больше их размеров; если одно из тел - массивный шар, а размеры второго много меньше размеров массивного шара).

36. **Вопрос:** Дайте определение первой космической скорости ?
Ответ: Первая космическая скорость - минимальная (для заданной высоты над поверхностью планеты) горизонтальная скорость, которую необходимо придать объекту, чтобы он совершал движение по круговой орбите вокруг планеты. Для Земли $V_1 = \sqrt{\dfrac{\gamma M}{R}} = \sqrt{gR} = 7,91$ км/с.

37. **Вопрос:** Дайте определение второй космической скорости ?
Ответ: Вторая космическая скорость - наименьшая скорость, которую необходимо придать стартующему с поверхности небесного тела объекту (например, космическому аппарату), масса которого пренебрежимо мала по сравнению с массой небесного тела (например, планеты), для преодоления гравитационного притяжения этого небесного тела и покидания замкнутой орбиты вокруг него. Для Земли $V_2 = \sqrt{2}V_1 = 11,2$ км/с.

38. **Вопрос:** Дайте определение третьей космической скорости ?
Ответ: Третья космическая скорость - минимальная скорость, которую необходимо придать находящемуся вблизи поверхности Земли телу, чтобы оно могло преодолеть гравитационное притяжение Земли и Солнца и покинуть пределы Солнечной системы. Примерно равна 16,65 км/с.

39. **Вопрос:** Сформулируйте теорему Гаусса для гравитационного поля ?
Ответ: Поток вектора напряжённости гравитационного поля через произвольную замкнутую поверхность прямо пропорционален массе тел, находящихся внутри этой поверхности :
$\oint \vec{g} \cdot d\vec{S} = -4\pi\gamma M.$

40. **Вопрос:** Напишите уравнение движения материальной точки в неинерциальной системе отсчёта ?
Ответ: $m\dfrac{d^2\vec{r}\,'}{dt^2} = \vec{F}\underbrace{-m\vec{a}_0 - 2m[\vec{\omega} \times \vec{V}\,'] - \dfrac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} - m[\vec{\omega}[\vec{\omega} \times \vec{r}]]}_{\vec{F}_{\text{in}}}.$

$\vec{F}_{\text{in пост.}} = -m\vec{a}_0;$
$\vec{F}_{\text{in кор.}} = -2m[\vec{\omega} \times \vec{V}];$
$\vec{F}_{\text{in ц.б.}} = -m[\vec{\omega}[\vec{\omega} \times \vec{r}\,']] - m\dfrac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}\,'.$

$\vec{r}\,'$ - радиус вектор в неинерциальной системе отсчёта.

$\vec{a}_0$ - ускорение поступательного движения неинерциальной системы отсчёта.

ω - угловая скорость вращения неинерциальной системы отсчёта.

$\vec{V}\,'$ - скорость в неинерциальной системе отсчёта.

Список вопросов коллоквиума

По умолчанию в вопросах все формулы, свойства и теоремы нужно уметь выводить и доказывать. Это необходимое условие получения оценки "отлично".

1. Кинематика материальной точки. Естественный параметр движения. Разложение ускорения на нормальное и тангенциальное.

2. Баллистическое движение. Кривизна плоской кривой. Радиус кривизны баллистической траектории.

3. Принцип относительности. Масса. Импульс. Закон сохранения импульса материальной точки и системы материальных точек.

4. Второй и третий законы Ньютона. Центр масс. Теорема о движении центра масс. Движение пары тел.

5. Сухое и жидкое трение. Формула Эйлера для трения в блоках.

6. Движение тел с переменной массой. Уравнение Мещерского. Формула Циолковского.

7. Механическая работа. Кинетическая энергия. Теорема об изменении кинетической энергии. Теорема Кёнига.

8. Потенциальная энергия. Связь силы и потенциальной энергии. Закон сохранения полной механической энергии. Финитное и инфинитное движение.

9. Упругие столкновения частиц. Векторная диаграмма скоростей.

10. Момент силы и момент импульса. Свойства. Изменение моментов при изменении системы отсчета.

11. Уравнение моментов для материальной точки и для системы материальных точек. Закон сохранения момента импульса. Особенности движения в центральном поле.

12. Рассеяние Резерфорда. Связь угла отклонения с прицельным параметром и начальной относительной скоростью.

13. Опыт Кавендиша по измерению плотности Земли. Гравитационная постоянная.

14. Законы Кеплера (формулировка и пояснение используемых терминов). Секториальная скорость, связь с моментом импульса. Связь формы траектории с законом всемирного тяготения (вывод зависимости ускорения от расстояния до Солнца из уравнения эллипса). Постоянная Кеплера.

15. Полная энергия в задаче двух тел с гравитационным взаимодействием. Эффективный потенциал. Виды траекторий и их связь с полной энергией.

16. Связь параметров орбиты с полной энергией и моментом импульса в задаче двух тел.

17. Космические скорости (первая, вторая, третья). Точки Лагранжа.
18. Теорема Гаусса для гравитационного поля. Гравитационное поле шара (внутри и снаружи).
19. Движение в неинерциальных системах отсчета. Переносная скорость и переносное ускорение. Кориолисово ускорение. Силы инерции.
20. Различные примеры влияния сил инерции. Стрелок и пуля. Маятник Фуко.
21. Приливные силы. Статическое рассмотрение системы Земля-Луна.
22. Гравитационная и инертная массы. Принцип эквивалентности. Гравитационное красное смещение.