مدل سازی ریاضی و عددی کامپوزیت های ضد ساندویچی با در نظر گرفتن تنش های پس ماند و کرنش های پس ماند

مادل

ضیا جوانبخت

خرداد ۱۴۰۲

چکیده

در بخش تحلیلی، معادلات اولیه با در نظر گرفتن تنش ها و کرنش های پس ماند تشکیل شده و در نهایت فرم حساب تغییراتی معادلات تعادل به دست آمده است. این فرمولاسیون مخصوص کامپوزیت های ضد ساندویچی (برای مثال صفحات خورشیدی) است که قابل گسترش به سایر مواد با رفتارهای مشابه است. به دلیل محدودیت های آزمایشگاهی، به نظر می رسد که نتایج محدود به روابط تحلیل و جواب های عددی خواهد بود که با داده های آزمایشگاهی موجود در سایر مقالات چاپ شده قابل قیاس و راستی آزمایی اس

فهرست مطالب

لیست تصاویر

لیست جداول

فصل ۱ — Introduction

۱ foo

foo

۱.۱ foo

foo

foo **foo.**

فصل ۲ — تانسورها

۱ مقدمه‌ای بر تانسورها

تانسورها ابزارهای ریاضی بنیادین و قدرتمندی هستند که در قرن نوزدهم توسط ریاضیدانانی نظیر گرگوریو ریچی-کوربسترو و تولیو لوی-چیویتا توسعه یافتند و سپس توسط انیشتین در نظریه‌ی نسبیت عام به شهرت جهانی رسیدند. این ابجکت‌های ریاضی نه تنها ابزاری برای توصیف کمیت‌های فیزیکی در مکانیک پیوسته، فیزیک نظری، و مهندسی هستند، بلکه زبان ریاضی یکپارچه‌ای را برای بیان قوانین طبیعت فراهم می‌کنند.

قدرت اصلی تانسورها در قابلیت نمایش روابط پیچیده‌ی چندبعدی بین متغیرهای مختلف نهفته است، به طوری که این روابط تحت تبدیلات مختصات شکل ناوردای خود را حفظ می‌کنند. این ویژگی بنیادین باعث می‌شود که قوانین فیزیکی مستقل از انتخاب سیستم مختصات خاص باقی بمانند، که اساس اصل نسبیت و یکی از ارکان اصلی فیزیک مدرن محسوب می‌شود.

در مکانیک پیوسته، تانسورها امکان توصیف دقیق و جامع پدیده‌هایی نظیر تنش، کرنش، نرخ کرنش، گرادیان سرعت، و خصوصیات مادی را فراهم می‌کنند. برخلاف کمیت‌های اسکالر که تنها یک مقدار عددی دارند، یا بردارها که جهت و بزرگی را توصیف می‌کنند، تانسورها قادر به نمایش روابط پیچیده‌ای هستند که در آنها چندین جهت و مؤلفه به طور همزمان نقش دارند.

۲ ابزارهای ریاضی

۱.۲ تانسورها

ناورداری. مفهوم ناورداری یکی از بنیادین‌ترین اصول در ریاضیات و فیزیک محسوب می‌شود. یک سیستم مختصات در حقیقت نمایانگر یک ناظر یا مشاهده‌گر است - به شرطی که فاصله‌ی زمانی بین رویدادها غیرمرتبط باشد. این مفهوم ریشه در این واقعیت دارد که طبیعت مستقل از روش‌هایی است که ما برای توصیف آن انتخاب می‌کنیم.

با معرفی یک سیستم مختصات، امکان تخصیص مختصات عددی به موجودیت‌های فیزیکی و هندسی فراهم می‌شود. این مختصات در واقع نمایانگر موقعیت، جهت، یا خصوصیات یک شیء در آن سیستم مختصات خاص هستند. اما نکته‌ی حائز اهمیت این است که تشکیل سیستم‌های مختصات مختلف، ناظر را با نمایش‌های متفاوت از همان شیء فیزیکی روبرو می‌کند.

برای مثال، یک نیروی اعمالی به جسم ممکن است در سیستم مختصات کارتزین مؤلفه‌هایی داشته باشد که کاملاً متفاوت از مؤلفه‌های همان نیرو در سیستم مختصات قطبی باشد، اما نیروی فیزیکی واقعی تغییری نکرده است. از آنجا که همه‌ی این نمایش‌های مختلف به همان شیء فیزیکی اشاره دارند، آنها در جوهر خود معادل هستند - یا به تعبیر دقیق‌تر، شیء فیزیکی اصلی *ناوردا* است و مستقل از روش توصیف ما باقی می‌ماند.

قوانین تبدیل. قوانین تبدیل، قلب ریاضی مفهوم تانسور را تشکیل می‌دهند و تعیین می‌کنند که چگونه مؤلفه‌های یک تانسور هنگام تغییر سیستم مختصات تبدیل می‌شوند. تانسورها برای توصیف کمیت‌های فیزیکی بنیادین نظیر تنش، کرنش، مومنتوم، میدان الکترومغناطیسی، و متریک فضا-زمان استفاده می‌شوند. نمایش ریاضی هر تانسور، ترکیبی هماهنگ از پایه‌های سیستم مختصات و مؤلفه‌های عددی تانسور است.

این دوگانگی اساسی باعث می‌شود که هنگام تغییر سیستم مختصات، هم پایه‌های مختصات و هم مؤلفه‌های عددی تانسور دستخوش تغییر شوند، اما به گونه‌ای که کمیت فیزیکی کلی بدون تغییر باقی بماند. مطالعه‌ی ناورداری از یک تانسور با اعمال تساوی ریاضی بین دو نمایش مختلف آن از همان کمیت فیزیکی انجام می‌شود.

نتیجه‌ی این فرآیند، استخراج *قوانین تبدیل* است که به وسیله‌ی آنها ساختارهای ریاضی ناوردا تشکیل و حفظ می‌شوند. این قوانین بر اساس ماتریس‌های ژاکوبین تبدیل مختصات تعریف می‌شوند. به طور کلی‌تر، ناورداری کمیت‌های فیزیکی به دلیل رابطه‌ی ریاضی معکوس بین ژاکوبین‌ها در تبدیل مؤلفه‌های کوواریانت (که با شاخص‌های پایین نمایش داده می‌شوند) و کنتراواریانت (که با شاخص‌های بالا نمایش داده می‌شوند) تانسور حاصل می‌شود. این مکانیسم ریاضی تضمین می‌کند که ضرب داخلی تانسورها مستقل از انتخاب سیستم مختصات باقی بماند.

تعریف شهودی. اگرچه مفهوم ناورداری ممکن است به عنوان انگیزه‌ی بنیادی و اصلی برای توسعه و استفاده از تانسورها در نظر گرفته شود، خصوصیات ریاضی و هندسی دیگر تانسور نیز در تعریف جامع و کامل تانسورها نقش بسزایی دارند. در ادبیات علمی و کتب تخصصی، رویکردهای مختلفی برای تعریف تانسورها اتخاذ شده است.

برخی از ریاضیدانان و فیزیک‌دانان سعی کرده‌اند تعریف جامعی ارائه دهند با تمرکز بر توضیح دقیق رفتار تانسور تحت تبدیلات پایه و قوانین تبدیل مؤلفه‌ها، در حالی که گروه دیگری بیشتر بر ماهیت نگاشت خطی تانسورها و عملکرد تابعی آنها متمرکز شده‌اند. این دو رویکرد مکمل یکدیگر هستند و هر کدام جنبه‌های مهمی از طبیعت تانسورها را روشن می‌کنند.

از منظر شهودی و کاربردی، تانسور را می‌توان به عنوان یک شیء ریاضی چندوجهی تصور کرد که قابلیت ذخیره، پردازش، و انتقال اطلاعات پیچیده‌ی هندسی و فیزیکی را دارد. این شیء ریاضی اطلاعات زیر را به طور یکپارچه و هماهنگ در خود جای می‌دهد:

۱. دستورالعمل‌هایی برای یک نگاشت خطی،
۲. مؤلفه‌های مرتبط بر حسب بردارهای پایه‌ی خاص، و
۳. کیفیت ناوردا بودن تحت تبدیل پایه.

مؤلفه‌های یک تانسور با انتخاب بردارهای پایه تعیین می‌شوند و آنها طبق قوانین تبدیل خاصی از یک مجموعه پایه به پایه‌ی دیگر تغییر می‌کنند. بنابراین، مؤلفه‌های یک تانسور با پایه‌هایش مرتبط هستند، یعنی آنها در یک مجموعه پایه‌ی خاص مؤلفه‌های منحصر به فرد دارند. این مؤلفه‌ها اگر بردارهای پایه تغییر کنند تغییر خواهند کرد. با این وجود، مؤلفه‌های یک تانسور همراه با پایه‌هایش ناوردا هستند.

تعریف ۱.۲ — تانسور. تانسور $\mathcal{T}$ از مرتبه‌ی nـام در فضای dـبعدی به عنوان یک تابع خطی اسکالرـمقدار از n بردار تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} \mathcal{T} : & \underbrace{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^d \times \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^d \times \ldots \times \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^d}_{n} \mapsto \alpha \in \mathbb{R} \\ & \mathcal{T}[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \ldots, \boldsymbol{w}] = \alpha, \end{aligned} \tag{۱}$$

که در آن d بعد فضا، α یک اسکالر، و n مرتبه (یا رتبه) تانسور است که با $\mathcal{O}_{\mathcal{T}} = n$ نمایش داده می‌شود. بعد و مرتبه‌ی یک تانسور با هم به صورت $d\binom{0}{n}$ بیان می‌شوند که *کلاس* یک تانسور را نشان می‌دهد، یعنی مجموعه‌ی همه‌ی تانسورهای nـام مرتبه و dـبعدی. توجه کنید که یک کلاس عمومی‌تر (مجموعه) تنها با نشان دادن مرتبه‌ی تانسور مانند $\binom{0}{n}$ ساخته می‌شود.

توجه کنید که هدف‌گیری یک مؤلفه‌ی خاص از تانسور به روش‌های مختلف نمایش داده می‌شود:

$$T_{ij\ldots k} \equiv [\mathcal{T}]_{ij\ldots k} \equiv (\mathcal{T})_{ij\ldots k}. \tag{۲}$$

برای تأکید بر خطی بودن تانسورها، می‌توان خط زیر را برای تکمیل تعریف اضافه کرد:

$$\forall a, b, \ldots, z \in \mathbb{R} : \qquad \mathcal{T}[a\boldsymbol{u}, b\boldsymbol{v}, \ldots, z\boldsymbol{w}] = ab\ldots z\,\mathcal{T}[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \ldots, \boldsymbol{w}]. \tag{۳}$$

۳ عملیات تانسوری

۱.۳ ضرب داخلی

در جبر خطی، ضرب داخلی یکی از بنیادین‌ترین و مهم‌ترین عملیات ریاضی محسوب می‌شود که به عنوان یک نگاشت دوخطی (یا چندخطی) حقیقیـمقدار از دو بردار (یا تانسور) تعریف می‌شود. ضرب نقطه‌ای معمولی که در جبر برداری مقدماتی آموخته می‌شود، انتخاب استاندارد و رایج‌ترین مثال از ضرب داخلی محسوب می‌شود، اما مفهوم ضرب داخلی فراتر از این کاربرد ساده است.

ضرب داخلی - به عنوان یک مفهوم بنیادی ریاضی و ابزاری برای تعریف نرم - نقش کلیدی در تنظیم و ساختار دادن به فضاهای برداری دارد. با تعریف ضرب داخلی در یک فضای برداری، امکان تعریف مفاهیم هندسی ثانویه و مشتق‌شده‌ای نظیر طول (یا بزرگی) بردارها، زاویه بین دو بردار، عمود بودن، و فاصله هندسی فراهم می‌شود. فضای برداری حاصل از این فرآیند، یک فضای اقلیدسی نامیده می‌شود که در حقیقت چیزی جز فضای حقیقی مجهز به ساختار غنی‌شده‌ای شامل مفاهیم ضرب داخلی، نرم، و متریک نیست.

این ساختار ریاضی پیشرفته امکان تعمیم بسیاری از مفاهیم هندسی آشنا از فضای سه‌بعدی معمولی به فضاهای با ابعاد دلخواه (حتی بی‌نهایت بعد) را فراهم می‌کند و پایه‌ی محکمی برای تحلیل تانسوری و کاربردهای آن در فیزیک و مهندسی ایجاد می‌کند.

تعریف ۱.۳ — ضرب داخلی. در تحلیل تانسوری، ضرب داخلی یک عملیات دودویی روی دو تانسور است که اغلب با نماد نقطه (⊙) نشان داده می‌شود. برای مثال، تانسور $\mathcal{T}$ به طور متوالی روی چندین بردار اعمال می‌شود تا آنها را به یک اسکالر نگاشت کند:

$$\mathcal{T}[\boldsymbol{v}, \ldots, \boldsymbol{w}] \equiv \mathcal{T} \odot (\boldsymbol{v} \otimes \ldots \otimes \boldsymbol{w}) = \mathcal{T}_{i\ldots j} v_i \ldots w_j. \tag{۴}$$

قدرت یک تانسور توسط ضرب داخلی محاسبه می‌شود:

$$\mathcal{T}^n = \underbrace{\mathcal{T} \cdot \ldots \cdot \mathcal{T}}_{n-1\ \text{ضرب داخلی}}, \qquad \forall n \in \mathbb{I}^+. \tag{۵}$$

۲.۳ ضرب خارجی

ضرب خارجی برای ایجاد موجودیت‌های مرتبه‌ی بالاتر استفاده می‌شود. برای مثال، یک دیاد از ضرب خارجی دو بردار ساخته می‌شود.

تعریف ۲.۳ — ضرب خارجی. ضرب دو واریانت منجر به واریانت دیگری می‌شود. چنین ضربی *ضرب خارجی* یا *ضرب تانسوری* نامیده می‌شود:

$$\mathcal{A} = \mathcal{B} \otimes \mathcal{C}. \tag{۶}$$

در نتیجه‌ی ضرب تانسوری، مرتبه‌ی نتیجه افزایش می‌یابد، یعنی $\mathcal{O}_{\mathcal{A}} = \mathcal{O}_{\mathcal{B}} + \mathcal{O}_{\mathcal{C}}$.

قدرت تانسوری یک تانسور توسط ضرب خارجی محاسبه می‌شود:

$$\mathcal{T}^{\otimes n} = \underbrace{\mathcal{T} \otimes \ldots \otimes \mathcal{T}}_{n-1\ \text{ضرب خارجی}}, \qquad \forall n \in \mathbb{I}^+. \tag{۷}$$

۳.۳ تبدیل

عملیات تبدیل ($\Box^{\mathrm{T}}$) یا مزدوج (برای تانسورهای مختلط) عملیاتی است که ترتیب دیادیک یک تانسور را تغییر می‌دهد. در حالی که تبدیل تانسورهای مرتبه‌ی اول غیرمرتبط است، تنها یک نوع تبدیل برای تانسور مرتبه‌ی دوم $\underline{\boldsymbol{T}}$ قابل تعریف است:

$$\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \binom{0}{1} n: \qquad \boldsymbol{u} \cdot \underline{\boldsymbol{T}} \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} \cdot \underline{\boldsymbol{T}}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{u}. \tag{۸}$$

۴ کاربردهای تانسورها در مکانیک پیوسته

تانسورها در مکانیک پیوسته نه تنها نقش اساسی و بنیادی دارند، بلکه در حقیقت زبان ریاضی اصلی و غیرقابل جایگزین این شاخه از علوم مهندسی محسوب می‌شوند. این کاربرد گسترده و عمیق ریشه در ماهیت چندبعدی و پیچیده‌ی پدیده‌های مکانیک پیوسته دارد که نیازمند ابزارهای ریاضی قدرتمند برای توصیف دقیق و تحلیل جامع هستند.

تانسورها در مکانیک پیوسته برای توصیف و مدل‌سازی انواع مختلفی از کمیت‌های فیزیکی و مهندسی به کار می‌روند:

- **تنش و کرنش در مواد:** تانسورهای تنش و کرنش که حالت مکانیکی نقاط مختلف یک پیوسته را توصیف می‌کنند و شامل اطلاعات جامعی درباره نیروهای داخلی، تغییرات شکل، و پاسخ مکانیکی مواد هستند.
- **خصوصیات مکانیکی و ترمودینامیکی مواد:** تانسورهای مرتبه‌ی بالا که روابط پیچیده‌ی بین متغیرهای مختلف حالت (نظیر تنش، کرنش، دما، و تغییرات حجم) را در قوانین تشکیل‌دهنده مواد مدل می‌کنند.
- **میدان‌های حرکتی:** شامل میدان‌های سرعت، شتاب، گرادیان سرعت، و تانسور نرخ کرنش که توصیف‌کننده‌ی جنبش و تغییرات حرکتی در پیوسته‌ها هستند.
- **قوانین تشکیل‌دهنده و رفتاری مواد:** تانسورهای پیچیده‌ای که روابط بین علت و معلول در رفتار مواد (نظیر الاستیسیته، ویسکوالاستیسیته، پلاستیسیته، و آسیب) را مدل‌سازی می‌کنند.
- **انتقال حرارت و جرم:** تانسورهای هدایت حرارتی، نفوذپذیری، و ضرایب انتقال که خصوصیات انتقال انرژی و جرم در محیط‌های ناهمگن و ناهمسان را توصیف می‌کنند.

قابلیت بنیادی ناورداری تانسورها تحت تبدیلات مختصات، آنها را برای توصیف دقیق و قابل اعتماد پدیده‌های فیزیکی که ذاتاً باید مستقل از سیستم مختصات انتخابی باشند، نه تنها مناسب بلکه ضروری می‌سازد. این ویژگی تضمین می‌کند که قوانین فیزیکی و روابط مهندسی بیان‌شده با تانسورها، صرف‌نظر از چگونگی انتخاب سیستم مرجع یا روش اندازه‌گیری، همواره معتبر و قابل استناد باقی بمانند.

۱.۴ ضرب برداری

جایگزینی یک ضرب خارجی در یک دیادیک، مرتبه‌ی تانسور را یک واحد کاهش می‌دهد. با این حال، خاصیت مهم‌تر ضرب برداری در ایجاد یک ناوردای برداری است که ارتباط نزدیکی با مفهوم شبه‌ـتانسور دارد.

تعریف ۱.۴ — ضرب برداری. ضرب برداری دو بردار ($\boldsymbol{u}$ و $\boldsymbol{v}$) را به بردار سومی نگاشت می‌کند:

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}, \tag{۹}$$

که در آن نتیجه عمود بر صفحه‌ی بردارهای اصلی است و جهت آن بر اساس چپ یا راست بودن سیستم مختصات تعیین می‌شود.

یک تانسور متقارن‌ـمایل $\mathrm{skw}(\underline{\underline{\boldsymbol{A}}}) \in \binom{0}{2} d$ تنها d تعداد مؤلفه‌ی مستقل دارد و بنابراین می‌تواند توسط شبه‌ـبردار $\boldsymbol{\omega} \in \binom{0}{1} d$ نمایش داده شود - که *ناوردای برداری* مرتبط با تانسور (یا به سادگی بردار مرتبط) نامیده می‌شود. ناوردای برداری از طریق رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\boldsymbol{\omega} = -\frac{1}{2}\underset{\approx}{\epsilon} : \mathrm{skw}(\underline{\underline{\boldsymbol{A}}}), \tag{۱۰}$$

بنابراین، بردار محوری یک دیادیک متقارن‌ـمایل مرتبه‌ی دوم، ضرب برداری دیادهای مربوطه است:

$$-\frac{1}{2}(\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{u})_{\times} = \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u}, \tag{۱۱}$$

که می‌تواند برای جایگزینی یک ضرب برداری با دیادیک متقارن‌ـمایل آن استفاده شود یا از طرف دیگر، تانسور اصلی می‌تواند با ناوردای برداری‌اش جایگزین شود:

$$\forall \boldsymbol{x} \in \binom{0}{1} d : \qquad \mathrm{skw}(\underline{\underline{\boldsymbol{A}}}) \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{x}, \tag{۱۲}$$

۲.۴ تقارن

تقارن یک تانسور چیزی جز ناورداری آن تحت عملیات تبدیل نیست. رایج‌ترین شکل آن تحت تبدیل اصلی است:

$$\underline{\underline{\boldsymbol{T}}} = \underline{\underline{\boldsymbol{T}}}^{\mathrm{T}} \qquad \text{یا} \qquad T_{ij} = T_{ji}, \tag{۱۳}$$

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{T}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{T}}^{\mathrm{T}} \qquad \text{یا} \qquad T_{ijk} = T_{kji}, \tag{۱۴}$$

$$\boldsymbol{\mathfrak{C}} = \boldsymbol{\mathfrak{C}}^{\mathrm{T}} \qquad \text{یا} \qquad C_{ijkl} = C_{klij}, \tag{۱۵}$$

برای تانسورهای مرتبه‌ی چهارم، انواع مختلف تقارن قابل تعریف است:

$$\boldsymbol{\mathfrak{C}}^{\mathrm{LT}} \overset{!}{=} \boldsymbol{\mathfrak{C}} \qquad \text{زیرتقارن چپ}, \tag{۱۶آ}$$

$$\boldsymbol{\mathfrak{C}}^{\mathrm{RT}} \overset{!}{=} \boldsymbol{\mathfrak{C}} \qquad \text{زیرتقارن راست}, \tag{۱۶ب}$$

$$\boldsymbol{\mathfrak{C}}^{\mathrm{MT}} \overset{!}{=} \boldsymbol{\mathfrak{C}} \qquad \text{زیرتقارن میانی}, \tag{۱۶ج}$$

$$\boldsymbol{\mathfrak{C}}^{\mathrm{OT}} \overset{!}{=} \boldsymbol{\mathfrak{C}} \qquad \text{زیرتقارن خارجی}. \tag{۱۶د}$$

نتیجه‌ی تقارن. تأثیر تقارن در یک تانسور کاهش مؤلفه‌های مستقل آن است. برای مثال، یک تانسور عمومی مرتبه‌ی چهارم دارای ۸۱ مؤلفه‌ی مستقل است که در صورت وجود هر دو زیرتقارن راست و چپ به ۳۶ کاهش می‌یابد. اضافه کردن زیرتقارن میانی منجر به تقارن کامل با ۲۱ مؤلفه‌ی مستقل می‌شود.

۵ قضیه‌ی تصویر

مفیدترین قضایای مهندسی از نظر شهودی واضح اما از نظر ریاضی پیچیده‌تر هستند. *قضیه‌ی تصویر* می‌گوید که یک بردار می‌تواند به یک بردار دیگر در امتداد جهت ترجیحی (تصویر) به علاوه‌ی آنچه باقی می‌ماند (رد) تجزیه شود. این موضوع در فضای برداری سه‌بعدی واضح است اما همچنین برای بسیاری از ابجکت‌های بردار_مانند دیگر مانند تانسورها، ماتریس‌ها و توابع قابل مشتق‌گیری قابل اعمال است.

در این زمینه، برخی کاربردهای قضیه‌ی تصویر عبارتند از:

- یک تابع اسکالر می‌تواند به صورت مجموع قسمت‌های فرد و زوج نوشته شود، مثلاً در سری فوریه با استفاده از دو مجموعه تابع متعامد.
- یک ماتریس می‌تواند به مؤلفه‌های متقارن و متقارن_مایل تجزیه شود.
- یک تابع پیوسته قابل مشتق‌گیری می‌تواند به صورت سری تیلور بیان شود.
- اکثر قوانین تشکیل‌دهنده‌ی مواد می‌توانند بر حسب تصاویر در قالب مؤلفه‌های حجمی و انحرافی بیان شوند.

تعریف ۱.۵ — تانسور تصویر. تانسور متقارن $\underline{\underline{P}}$ یک تانسور تصویر و تانسور متقارن $\underline{\underline{P}}^*$ تانسور تصویر مکمل آن است اگر:

$$\forall n \in \mathbb{I}^+ : \quad \underline{\underline{P}}^n = \underline{\underline{P}}, \quad \text{خاصیت توانی،} \tag{۱۷آ}$$

$$\forall n \in \mathbb{I}^+ : \quad (\underline{\underline{P}}^*)^n = \underline{\underline{P}}^*, \quad \text{خاصیت توانی،} \tag{۱۷ب}$$

$$: \underline{\underline{P}} + \underline{\underline{P}}^* = \underline{\underline{I}}, \quad \text{کاملیت،} \tag{۱۷ج}$$

$$: \underline{\underline{P}} \cdot \underline{\underline{P}}^* = , \quad \text{متعامد بودن.} \tag{۱۷د}$$

این تصاویر از کلاس 3 $\binom{0}{2}$ هستند اما مفهوم قابل تعمیم به کلاس‌های مرتبه‌ی بالاتر نیز است.

تانسورهای واحد به عنوان تصویرگر. بردار واحد مرتبه‌ی اول (بردار جهت) با $\hat{\boldsymbol{e}}$ نمایش داده می‌شود و دارای طول واحد است ($\|\hat{\boldsymbol{e}}\| = 1$). تانسور واحد مرتبه‌ی دوم می‌تواند به عنوان یک تانسور تصویر پیش‌پا افتاده استفاده شود:

$$\underline{\underline{I}} := \delta_{ij}\, \hat{\boldsymbol{e}}_i \otimes \hat{\boldsymbol{e}}_j, \tag{۱۸}$$

که در آن δ_{ij} دلتای کرونکر است.

۱.۵ ضرب مزدوج

این نوع ضرب تغییری از ضرب خارجی است و در طول جابه‌جایی شاخص برای متقارن‌سازی/ضد متقارن‌سازی تانسورها به کار می‌رود.

تعریف ۲.۵ — ضرب مزدوج. ضرب مزدوج دوگانه‌ی ضرب تانسوری است. در ادبیات دو شکل موجود است:

۱. یک ضرب دیادیک به دنبال تبدیل میانی:

$$(\underline{\underline{A}} \underline{\otimes} \underline{\underline{B}}) := (\underline{\underline{A}} \otimes \underline{\underline{B}})^{\mathrm{MT}}. \tag{۱۹}$$

این ضرب همچنین «ضرب تانسوری تبدیلات» نامیده می‌شود، یعنی اعمال آن به ضرب خارجی دو بردار (یک تانسور مرتبه‌ی دوم) معادل تبدیل جداگانه‌ی هر یک از این بردارها به وسیله‌ی تانسورهای مرتبه‌ی دوم است:

$$(\underline{\underline{A}} \underline{\otimes} \underline{\underline{B}}) : (\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v}) = (\underline{\underline{A}} \cdot \boldsymbol{u}) \otimes (\underline{\underline{B}} \cdot \boldsymbol{v}), \tag{۲۰}$$

۲. یک ضرب دیادیک به دنبال تبدیل راست و تبدیل میانی:

$$(\underline{\underline{A}} \overline{\otimes} \underline{\underline{B}}) := \left((\underline{\underline{A}} \otimes \underline{\underline{B}})^{\mathrm{RT}}\right)^{\mathrm{MT}}, \tag{۲۱}$$

۶ گروه‌های تقارن

در ارتباط با مکانیک پیوسته، مفهوم تقارن در نظریه‌ی گروه در مسائل مستقیم یافتن گروه تقارن یک تانسور و همچنین مسائل معکوس یافتن تانسور بر اساس عناصر خاص تقارن استفاده می‌شود.

تعریف ۱.۶ — گروه تقارن کلاسیک. برای یک تانسور داده شده $\mathcal{T}$، گروه تانسورهای متعامد $\underline{\underline{Q}}$ می‌تواند با اعمال ضرب ریلی پیدا شود:

$$\underline{\underline{Q}} \star \mathcal{T} \overset{!}{=} \mathcal{T}, \tag{۲۲}$$

که *گروه تقارن* تانسور nـام مرتبه $\mathcal{T}$ نامیده می‌شود. توجه کنید که این تعریف تنها برای فضاهای برداری اقلیدسی (غیرجهت‌دار) معتبر است.

تقارن در جهات اصلی. شایان ذکر است که هر نوع تقارن مادی در تانسور سختی/انعطاف با مقادیر متقارن و اغلب مؤلفه‌های صفر منعکس می‌شود. از آنجا که تانسور سختی/انعطاف می‌تواند در هر جهت دلخواهی تنظیم شود، تقارن عددی ممکن است در هر جهتی قابل مشاهده نباشد. یعنی تنها در امتداد جهت «اصلی» مادی، تأثیر جداسازی تقارن قابل احساس و فعال است - در غیر این صورت رفتار به طور کلی ناهمسان است.

مواد متقارن عرضی. برای حالت مواد متقارن عرضی (کریستال‌های شش‌گوشه)، ۵ پارامتر مادی به علاوه‌ی محور تقارن باید شناخته شود. برای آزمایش محور تقارن که با بردار جهت $\boldsymbol{d}$ نمایش داده می‌شود، گروه تقارن مربوطه به سادگی شامل همه‌ی تانسورهای تبدیل $\underline{\underline{Q}}$ با زاویه‌ی دلخواه است که از رابطه‌ی تبدیل ایجاد می‌شوند. توجه کنید که ناورداری از قبل توسط تعریف گروه تقارن اعمال شده، یعنی با مطالبه‌ی رابطه‌ی گروه تقارن.

۷ تجزیه‌ی طیفی و مقادیر ویژه

۱.۷ تجزیه‌ی مقادیر ویژه

هر تانسور متقارن مرتبه‌ی دوم می‌تواند به صورت طیفی تجزیه شود. این تجزیه یکی از مهم‌ترین ابزارهای تحلیل تانسورهای در مکانیک پیوسته محسوب می‌شود.

تعریف ۱.۷ — تجزیه‌ی طیفی. برای یک تانسور متقارن $3 \ \mathrm{sym}(\underline{\underline{A}}) \in \binom{0}{2}$، تجزیه‌ی طیفی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathrm{sym}(\underline{\underline{A}}) = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i \boldsymbol{n}_i \otimes \boldsymbol{n}_i = \lambda_1 \boldsymbol{n}_1 \otimes \boldsymbol{n}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{n}_2 \otimes \boldsymbol{n}_2 + \lambda_3 \boldsymbol{n}_3 \otimes \boldsymbol{n}_3, \tag{۲۳}$$

که در آن λ_i مقادیر ویژه و $\boldsymbol{n}_i$ بردارهای ویژه‌ی واحد متناظر هستند که رابطه‌ی $\boldsymbol{n}_i \cdot \boldsymbol{n}_j = \delta_{ij}$ را برآورده می‌کنند.

مقادیر ویژه از حل معادله‌ی مشخصه زیر بدست می‌آیند:

$$\det(\mathrm{sym}(\underline{\underline{A}}) - \lambda \underline{\underline{I}}) = 0, \tag{۲۴}$$

که منجر به یک معادله‌ی مکعبی می‌شود:

$$\lambda^3 - I_1 \lambda^2 + I_2 \lambda - I_3 = 0, \tag{۲۵}$$

که در آن I_1، I_2 و I_3 ناوردهای اصلی تانسور هستند.

۲.۷ ناوردهای تانسوری

ناوردهای یک تانسور کمیت‌هایی هستند که تحت تبدیلات مختصات تغییر نمی‌کنند. برای تانسور متقارن مرتبه‌ی دوم، سه ناورد اصلی وجود دارد:

$$I_1 = \operatorname{tr}\operatorname{sym}(\underline{\underline{\boldsymbol{A}}}) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \tag{آ۲۶}$$

$$I_2 = \frac{1}{2}[(\operatorname{tr}\operatorname{sym}(\underline{\underline{\boldsymbol{A}}}))^2 - \operatorname{tr}(\operatorname{sym}(\underline{\underline{\boldsymbol{A}}}))^2] = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1, \tag{ب۲۶}$$

$$I_3 = \det\operatorname{sym}(\underline{\underline{\boldsymbol{A}}}) = \lambda_1\lambda_2\lambda_3. \tag{ج۲۶}$$

این ناوردها در تحلیل رفتار مواد و تعریف معیارهای شکست بسیار مهم هستند.

۸ تجزیه‌های خاص تانسورها

۱.۸ تجزیه‌ی حجمی_انحرافی

هر تانسور مرتبه‌ی دوم می‌تواند به دو قسمت حجمی (کروی) و انحرافی تجزیه شود:

$$\underline{\underline{\boldsymbol{A}}} = \operatorname{vol}(\underline{\underline{\boldsymbol{A}}}) + \operatorname{dev}(\underline{\underline{\boldsymbol{A}}}), \tag{۲۷}$$

که در آن:

$$\operatorname{vol}(\underline{\underline{\boldsymbol{A}}}) = \frac{1}{3}\operatorname{tr}\underline{\underline{\boldsymbol{A}}}\underline{\underline{\boldsymbol{I}}} = \frac{1}{3}A_{kk}\underline{\underline{\boldsymbol{I}}}, \tag{آ۲۸}$$

$$\operatorname{dev}(\underline{\underline{\boldsymbol{A}}}) = \underline{\underline{\boldsymbol{A}}} - \operatorname{vol}(\underline{\underline{\boldsymbol{A}}}) = \underline{\underline{\boldsymbol{A}}} - \frac{1}{3}\operatorname{tr}\underline{\underline{\boldsymbol{A}}}\underline{\underline{\boldsymbol{I}}}. \tag{ب۲۸}$$

این تجزیه در مکانیک خاک و سنگ و همچنین در پلاستیسیته کاربرد گسترده دارد.

۲.۸ تجزیه‌ی متقارن_متقارن مایل

هر تانسور مرتبه‌ی دوم می‌تواند منحصراً به دو قسمت متقارن و متقارن_مایل تجزیه شود:

$$\underline{\underline{\boldsymbol{A}}} = \operatorname{sym}(\underline{\underline{\boldsymbol{A}}}) + \operatorname{skw}(\underline{\underline{\boldsymbol{A}}}), \tag{۲۹}$$

که در آن:

$$\operatorname{sym}(\underline{\underline{\boldsymbol{A}}}) = \frac{1}{2}(\underline{\underline{\boldsymbol{A}}} + \underline{\underline{\boldsymbol{A}}}^{\mathrm{T}}), \tag{آ۳۰}$$

$$\operatorname{skw}(\underline{\underline{\boldsymbol{A}}}) = \frac{1}{2}(\underline{\underline{\boldsymbol{A}}} - \underline{\underline{\boldsymbol{A}}}^{\mathrm{T}}). \tag{ب۳۰}$$

قسمت متقارن معمولاً مربوط به کرنش و قسمت متقارن_مایل مربوط به چرخش محلی است.

۹ کاربردهای خاص در مکانیک پیوسته

۱.۹ تانسور کرنش

تانسور کرنش کوشی_گرین راست به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\underline{\underline{\boldsymbol{C}}} = \underline{\underline{\boldsymbol{F}}}^{\mathrm{T}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{F}}}, \tag{۳۱}$$

که در آن $\underline{\underline{\boldsymbol{F}}}$ تانسور گرادیان تغییر شکل است. تانسور کرنش گرین_لاگرانژ نیز از طریق رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$\underline{\underline{\boldsymbol{E}}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{\boldsymbol{C}}} - \underline{\underline{\boldsymbol{I}}}). \tag{۳۲}$$

۲.۹ تانسور تنش

تانسور تنش کوشی σ رابطه‌ی بین نیروهای داخلی و سطوح داخلی یک پیوسته را نشان می‌دهد:

$$\boldsymbol{t} = \sigma \cdot \boldsymbol{n}, \tag{۳۳}$$

که در آن $\boldsymbol{t}$ بردار تنش روی سطح با بردار نرمال $\boldsymbol{n}$ است.

تانسور تنش می‌تواند به اجزای حجمی و انحرافی تجزیه شود:

$$\sigma = p\underline{\underline{I}} + \operatorname{dev}(\sigma), \tag{۳۴آ}$$

$$p = \frac{1}{3}\operatorname{tr}\sigma = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}{3}, \tag{۳۴ب}$$

که در آن p فشار هیدروستاتیک و $\operatorname{dev}(\sigma)$ تانسور تنش انحرافی است.

۳.۹ تانسور نرخ کرنش

برای جریان‌های ویسکوز، تانسور نرخ کرنش به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\underline{\underline{D}} = \frac{1}{2}(\nabla\boldsymbol{v} + (\nabla\boldsymbol{v})^{\mathrm{T}}), \tag{۳۵}$$

که در آن $\boldsymbol{v}$ میدان سرعت است.

۱۰ معیارهای تسلیم و شکست

۱.۱۰ معیار فون میزس

معیار تسلیم فون میزس بر اساس انرژی کرنش انحرافی تعریف می‌شود:

$$\sigma_{\mathrm{eq}} = \sqrt{\frac{3}{2}\operatorname{dev}(\sigma) : \operatorname{dev}(\sigma)} = \sqrt{3J_2}, \tag{۳۶}$$

که در آن J_2 دومین ناورد تانسور تنش انحرافی است:

$$J_2 = \frac{1}{2}\operatorname{dev}(\sigma) : \operatorname{dev}(\sigma). \tag{۳۷}$$

۲.۱۰ معیار ترسکا

معیار تسلیم ترسکا بر اساس حداکثر تنش برشی تعریف می‌شود:

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_{\max} - \sigma_{\min}), \tag{۳۸}$$

که در آن $\sigma_{\max}$ و $\sigma_{\min}$ به ترتیب حداکثر و حداقل تنش‌های اصلی هستند.

۱۱ نتیجه‌گیری

تانسورها ابزارهای قدرتمند ریاضی هستند که امکان توصیف دقیق پدیده‌های پیچیده‌ی فیزیکی را فراهم می‌کنند. خصوصیت ناورداری آنها تحت تبدیلات مختصات، آنها را برای استفاده در قوانین فیزیکی مناسب می‌سازد. درک عمیق مفاهیم تانسوری و عملیات مربوط به آنها برای هر مهندس مکانیک و فیزیکدانی که با مکانیک پیوسته سروکار دارد، ضروری است.

عملیات مختلف تانسوری نظیر ضرب داخلی، ضرب خارجی، تبدیل، و تجزیه‌های مختلف امکان تحلیل و حل مسائل پیچیده‌ی مهندسی را فراهم می‌کنند. همچنین، کاربرد تانسورها در تعریف تنش، کرنش، و معیارهای شکست نقش حیاتی در طراحی و تحلیل سازه‌ها و مواد دارد.

۱۲ تحلیل تانسوری

۱.۱۲ مشتق‌گیری از تانسورها

مشتق‌گیری از تانسورها نسبت به متغیرهای مختلف یکی از ابزارهای اساسی در تحلیل تانسوری محسوب می‌شود. برای تانسور $\mathcal{T}(x)$ که تابعی از موقعیت $\boldsymbol{x}$ است، گرادیان به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\nabla \mathcal{T} = \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial x_i} \otimes \hat{\boldsymbol{e}}_i. \quad (۳۹)$$

برای تانسور مرتبه‌ی دوم $\underline{\underline{\boldsymbol{A}}}(x)$، گرادیان یک تانسور مرتبه‌ی سوم است:

$$\nabla \underline{\underline{\boldsymbol{A}}} = \frac{\partial A_{jk}}{\partial x_i} \hat{\boldsymbol{e}}_i \otimes \hat{\boldsymbol{e}}_j \otimes \hat{\boldsymbol{e}}_k. \quad (۴۰)$$

۲.۱۲ واگرایی و چرخش

واگرایی یک تانسور مرتبه‌ی دوم به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathrm{div} \underline{\underline{\boldsymbol{A}}} = \nabla \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{A}}} = \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_i} \hat{\boldsymbol{e}}_j. \quad (۴۱)$$

برای میدان برداری $\boldsymbol{v}$، واگرایی و چرخش به ترتیب عبارتند از:

$$\mathrm{div} \boldsymbol{v} = \nabla \cdot \boldsymbol{v} = \frac{\partial v_i}{\partial x_i}, \quad (\text{۴۲آ})$$

$$\mathrm{curl} \boldsymbol{v} = \nabla \times \boldsymbol{v} = \epsilon_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \hat{\boldsymbol{e}}_i. \quad (\text{۴۲ب})$$

۳.۱۲ قضایای انتگرال

قضیه‌ی گاوس برای تانسورها به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\int_V \nabla \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{A}}} \, dV = \int_{\partial V} \underline{\underline{\boldsymbol{A}}} \cdot \boldsymbol{n} \, dS, \quad (۴۳)$$

که در آن V حجم، ∂V سطح محدوده‌کننده، و $\boldsymbol{n}$ بردار نرمال خارجی است.

۱۳ تبدیلات مختصات

۱.۱۳ قوانین تبدیل

تحت تبدیل مختصات $x'_i = Q_{ij} x_j$، مؤلفه‌های تانسورهای مختلف به صورت زیر تبدیل می‌شوند:
برای بردار (تانسور مرتبه‌ی اول):

$$v'_i = Q_{ij} v_j. \quad (۴۴)$$

برای تانسور مرتبه‌ی دوم:

$$T'_{ij} = Q_{ik} Q_{jl} T_{kl}. \quad (۴۵)$$

برای تانسور مرتبه‌ی چهارم:

$$C'_{ijkl} = Q_{im} Q_{jn} Q_{ko} Q_{lp} C_{mnop}. \quad (۴۶)$$

۲.۱۳ ماتریس تبدیل

ماتریس تبدیل $\underline{\underline{Q}}$ باید خصوصیات زیر را داشته باشد:

$$\underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{Q}}^{\mathrm{T}} = \underline{\underline{I}}, \quad (\text{متعامد بودن}) \tag{آ۴۷}$$

$$\det(\underline{\underline{Q}}) = +1. \quad (\text{جهت‌دار بودن}) \tag{ب۴۷}$$

این شرایط تضمین می‌کنند که تبدیل یک چرخش خالص باشد و طول‌ها و زوایا حفظ شوند.

۱۴ کاربردهای پیشرفته

۱.۱۴ مکانیک شکست

در علم مکانیک شکست، که یکی از شاخه‌های پیچیده و کاربردی مکانیک جامدات محسوب می‌شود، تانسورهای تنش و کرنش نقش محوری و تعیین‌کننده‌ای در درک و پیش‌بینی رفتار مواد در حضور عیوب و ترک ایفا می‌کنند. مکانیک شکست به طور خاص با تحلیل تمرکز تنش در اطراف نقاط بحرانی نظیر نوک ترک سروکار دارد، جایی که تانسور تنش رفتار بسیار پیچیده و مشخصه‌ای از خود نشان می‌دهد.

برای ترک‌های حالت I (حالت بازشدگی یا کششی)، که رایج‌ترین نوع بارگذاری در مهندسی عملی محسوب می‌شود، میدان تنش در نزدیکی نوک ترک دارای یک ساختار ریاضی مشخص و قابل پیش‌بینی است. این میدان تنش با استفاده از نظریه‌ی الاستیسیته خطی و تکنیک‌های تحلیل مختلط به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\sigma_{ij} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta) + \text{مرتبه‌های بالاتر}, \tag{۴۸}$$

که در آن K_I ضریب شدت تنش برای حالت I است که کمیتی مستقل از موقعیت و فاصله از نوک ترک بوده و تنها به هندسه قطعه، ابعاد ترک، و بارگذاری اعمالی بستگی دارد، r فاصله‌ی شعاعی از نوک ترک، و $f_{ij}(\theta)$ توابع بدون بعد زاویه‌ای هستند که توزیع زاویه‌ای تنش را در اطراف نوک ترک تعیین می‌کنند. عبارت «مرتبه‌های بالاتر» نیز اثرات هندسه‌ی محلی و شرایط مرزی را در نظر می‌گیرد که برای فواصل خیلی نزدیک یا خیلی دور از نوک ترک اهمیت پیدا می‌کنند.

۲.۱۴ پلاستیسیته

در نظریه‌ی پلاستیسیته، تانسور نرخ کرنش پلاستیک به تانسور تنش انحرافی مربوط است:

$$\underline{\underline{D}}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma}, \tag{۴۹}$$

که در آن f تابع تسلیم، $\dot{\lambda}$ ضریب پلاستیک، و $\underline{\underline{D}}^p$ تانسور نرخ کرنش پلاستیک است.

۳.۱۴ الاستیسیته

رابطه‌ی تشکیل‌دهنده‌ی الاستیک خطی به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\sigma = \mathbf{\mathfrak{C}} : \varepsilon, \tag{۵۰}$$

که در آن $\mathbf{\mathfrak{C}}$ تانسور سختی الاستیک مرتبه‌ی چهارم است. برای مواد همسان، این تانسور تنها دو پارامتر مستقل دارد:

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}), \tag{۵۱}$$

که در آن λ و μ ثابت‌های لامه هستند.

۱۵ روش‌های عددی

۱.۱۵ تانسورها در روش اجزای محدود

در روش اجزای محدود، تانسورهای تنش و کرنش در نقاط انتگرال‌گیری محاسبه می‌شوند. ماتریس سختی المان از تانسور سختی مادی بدست می‌آید:

$$\underline{\underline{K}}_e = \int_{V_e} \underline{\underline{B}}^{\mathrm{T}} \underline{\underline{D}}\,\underline{\underline{B}}\, dV, \tag{۵۲}$$

که در آن $\underline{\underline{B}}$ ماتریس کرنش-جابجایی و $\underline{\underline{D}}$ ماتریس سختی مادی است.

۲.۱۵ تکنیک‌های انتگرال‌گیری

برای انتگرال‌گیری دقیق تانسورهای مرتبه‌ی بالا، از روش‌های انتگرال‌گیری گاوسی استفاده می‌شود. برای تانسور مرتبه‌ی چهارم، تعداد نقاط انتگرال‌گیری مورد نیاز معمولاً زیاد است.

۱۶ کاربردهای محاسباتی

۱.۱۶ نمایش تانسورها در برنامه‌نویسی

در پیاده‌سازی عددی، تانسورهای مرتبه‌ی بالا معمولاً به صورت آرایه‌های چندبعدی یا ماتریس‌هایی با شاخص‌گذاری خاص نمایش داده می‌شوند. برای تانسور مرتبه‌ی چهارم C_{ijkl}، نمایش ماتریسی با استفاده از نماد Voigt رایج است.

۲.۱۶ بهینه‌سازی محاسبات

محاسبات تانسوری می‌توانند بسیار پرهزینه باشند. استفاده از تقارن‌های تانسور و روش‌های بهینه‌سازی عددی می‌تواند زمان محاسبه را به طور قابل توجهی کاهش دهد.

۱۷ مثال‌های کاربردی

۱.۱۷ مثال ۱: تحلیل تنش دوبعدی

برای حالت تنش مسطح، تانسور تنش به صورت زیر است:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{۵۳}$$

تنش‌های اصلی از حل معادله‌ی مشخصه بدست می‌آیند:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \sigma_{xy}^2}. \tag{۵۴}$$

۲.۱۷ مثال ۲: کرنش در تغییرشکل بزرگ

برای تغییرشکل‌های بزرگ، تانسور کرنش گرین-لاگرانژ استفاده می‌شود:

$$E_{ij} = \frac{1}{2}(C_{ij} - \delta_{ij}) = \frac{1}{2}(F_{ki}F_{kj} - \delta_{ij}), \tag{۵۵}$$

که در آن F_{ij} مؤلفه‌های تانسور گرادیان تغییرشکل هستند.

۱۸ تانسور آکوستیک و ناپایداری مادی

۱.۱۸ تانسور آکوستیک

تانسور آکوستیک (که همچنین با نام‌های تانسور موضعی‌سازی، تانسور قطبش، یا تانسور سختی مشخصه شناخته می‌شود) یکی از مفاهیم پیشرفته و تخصصی در مکانیک پیوسته محسوب می‌شود که نقش حیاتی در تشخیص و پیش‌بینی ناپایداری‌های مادی و پدیده‌های موضعی‌سازی کرنش ایفا می‌کند. این تانسور ابزاری قدرتمند برای درک رفتار مواد در شرایط بحرانی و مرز پایداری است.

تعریف ۱.۱۸ — تانسور آکوستیک. دو تعریف اصلی برای تانسور آکوستیک وجود دارد (Etse & Willam 1999; Ottosen & Ristinmaa 2005):

$$\underline{\boldsymbol{A}} \coloneqq \hat{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{\mathcal{C}} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \quad \text{یا} \quad A_{jk} \coloneqq C_{ijkl}\hat{n}_i\hat{n}_l, \tag{۵۶آ}$$

$$\underline{\boldsymbol{A}} \coloneqq \hat{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{\mathcal{C}}^{\mathrm{RT}} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \quad \text{یا} \quad A_{jk} \coloneqq C_{ijkl}\hat{n}_i\hat{n}_k, \tag{۵۶ب}$$

که در آن $\hat{\boldsymbol{n}}$ بردار جهت یا بردار نرمال به سطح موضعی‌سازی، و $\boldsymbol{\mathcal{C}}$ تانسور سختی مادی مرتبه‌ی چهارم است.

تانسور آکوستیک در حقیقت نمایانگر سختی جهتی مادی در راستای مشخصی است و اطلاعات مهمی درباره رفتار مادی تحت بارگذاری‌های پیچیده فراهم می‌کند. این تانسور به طور خاص در تحلیل پدیده‌هایی نظیر شکل‌گیری نوارهای برشی، موضعی‌سازی کرنش، و گذار از رفتار یکنواخت به رفتار ناهمگن در مواد کاربرد دارد.

۲.۱۸ معیارهای ناپایداری مادی

ناپایداری مادی از طریق تکین بودن (singularity) تانسور آکوستیک تشخیص داده می‌شود، که این امر به معنای صفر شدن دترمینان یا مقادیر ویژه‌ی تانسور آکوستیک است. این پدیده نشان‌دهنده‌ی از دست رفتن یکتایی جواب در مسائل مقدار مرزی و امکان شکل‌گیری حالت‌های تغییرشکل موضعی است.

معیارهای تشخیص موضعی‌سازی. دو معیار اصلی برای تشخیص موضعی‌سازی و ناپایداری مادی عبارتند از (Staber et al. 2021):

۱. **از دست رفتن بیضوی بودن** (معادل عدم تکین بودن و معروف به معیار رایس برای موضعی‌سازی): وجود هر گونه مقدار ویژه‌ی صفر برای تانسور آکوستیک. این شرط به صورت ریاضی به شکل زیر بیان می‌شود:

$$\det(\underline{\boldsymbol{A}}) = 0 \quad \text{یا} \quad \exists\lambda_i = 0 \tag{۵۷}$$

۲. **از دست رفتن بیضوی بودن قوی**: از دست رفتن مثبت معین بودن تانسور متقارن برای همه‌ی جهات. این شرط سخت‌گیرانه‌تر و محافظه‌کارانه‌تر است:

$$\boldsymbol{u} \cdot \underline{\boldsymbol{A}} \cdot \boldsymbol{u} \leq 0 \quad \text{برای برخی} \quad \boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{o} \tag{۵۸}$$

این معیارها نقش بنیادی در پیش‌بینی شکست، شکل‌گیری ترک، و انتقال از رفتار پایدار به ناپایدار در مواد دارند.

۳.۱۸ مثال: تانسور آکوستیک در الاستیسیته

برای مواد الاستیک همسان، تانسور آکوستیک شکل ساده و قابل تحلیلی دارد که امکان بررسی دقیق معیارهای پایداری را فراهم می‌کند.

مثال ۱.۱۸ — تانسور آکوستیک در الاستیسیته همسان. تانسور آکوستیک در الاستیسیته همسان به صورت زیر بیان می‌شود (Bigoni 2012):

$$\underline{\boldsymbol{A}}(\hat{\boldsymbol{n}}) = (\lambda + \mu)\hat{\boldsymbol{n}} \otimes \hat{\boldsymbol{n}} + \mu\underline{\boldsymbol{I}}, \tag{۵۹}$$

که در آن λ و μ ثابت‌های لامه هستند.

معیارهای ناپایداری در این حالت عبارتند از:

۱. **بیضوی بودن** (عدم تکین بودن): $\mu \neq 0 \wedge \lambda + 2\mu \neq 0$
۲. **بیضوی بودن قوی** (مثبت معین بودن): $\mu > 0 \wedge \lambda + 2\mu > 0$

این شرایط نشان می‌دهند که پایداری مادی به هر دو ثابت الاستیک بستگی دارد و نقض هر یک از این شرایط می‌تواند منجر به ناپایداری و موضعی‌سازی شود.

۴.۱۸ کاربردهای عملی تانسور آکوستیک

تانسور آکوستیک در موارد متعددی در مهندسی عملی کاربرد دارد:

- **تحلیل پایداری سازه‌ها**: تشخیص نقاط بحرانی در سازه‌ها که ممکن است دچار کمانش موضعی شوند
- **مکانیک خاک**: پیش‌بینی شکل‌گیری نوارهای برشی در خاک‌های چسبنده
- **مکانیک سنگ**: تحلیل ناپایداری‌های مادی در توده‌سنگ‌ها تحت تنش‌های برجا
- **شکل‌دهی فلزات**: تشخیص شروع موضعی‌سازی کرنش در فرآیندهای شکل‌دهی
- **مکانیک شکست**: درک مکانیسم‌های رشد ترک و انتشار آسیب

درک عمیق تانسور آکوستیک و کاربرد صحیح آن در تحلیل‌های مهندسی، امکان طراحی ایمن‌تر و پیش‌بینی دقیق‌تر رفتار مواد تحت شرایط بحرانی را فراهم می‌کند.

۵.۱۸ تحلیل ریاضی پیشرفته تانسور آکوستیک

از نظر ریاضی، تانسور آکوستیک رابطه‌ای مستقیم با خواص طیفی تانسور سختی مادی دارد. برای درک عمیق‌تر این مفهوم، باید به بررسی جنبه‌های مختلف آن پرداخت.

خواص طیفی تانسور آکوستیک. مقادیر ویژه تانسور آکوستیک $\underline{\boldsymbol{A}}(\hat{\boldsymbol{n}})$ معیار مستقیمی از پایداری مادی در جهت $\hat{\boldsymbol{n}}$ محسوب می‌شوند. اگر $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ مقادیر ویژه این تانسور باشند، آنگاه:

- اگر همه‌ی مقادیر ویژه مثبت باشند ($\lambda_i > 0$)، مادی در آن جهت پایدار است
- اگر حداقل یک مقدار ویژه صفر شود ($\lambda_i = 0$)، مادی در مرز ناپایداری قرار دارد
- اگر حداقل یک مقدار ویژه منفی شود ($\lambda_i < 0$)، مادی ناپایدار است

تعمیم به مواد ناهمسان. برای مواد ناهمسان، تانسور آکوستیک پیچیده‌تر می‌شود و بستگی به جهت بردار نرمال دارد. در این حالت، تحلیل پایداری نیازمند بررسی همه‌ی جهات ممکن است:

$$\min_{\|\hat{\boldsymbol{n}}\|=1} \min_i \lambda_i[\underline{\boldsymbol{A}}(\hat{\boldsymbol{n}})] > 0 \tag{۶۰}$$

این شرط تضمین می‌کند که مادی در همه‌ی جهات پایدار باقی بماند.

۶.۱۸ کاربردهای پیشرفته در تحلیل ناپایداری

تحلیل حساسیت ناپایداری. یکی از کاربردهای مهم تانسور آکوستیک، تحلیل حساسیت سیستم نسبت به تغییرات پارامترهای مادی است. با محاسبه‌ی مشتقات مقادیر ویژه نسبت به پارامترهای مادی، می‌توان نقاط حساس سیستم را شناسایی کرد:

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial p} = \boldsymbol{v}_i \cdot \frac{\partial \underline{\boldsymbol{A}}}{\partial p} \cdot \boldsymbol{v}_i \tag{۶۱}$$

که در آن p پارامتر مادی و $\boldsymbol{v}_i$ بردار ویژه متناظر با مقدار ویژه λ_i است.

پیش‌بینی مسیر موضعی‌سازی. جهت بردار ویژه متناظر با کمترین مقدار ویژه تانسور آکوستیک، جهت احتمالی شکل‌گیری نوار برشی یا موضعی‌سازی کرنش را نشان می‌دهد. این اطلاعات برای طراحی و پیش‌بینی الگوهای شکست در مواد و سازه‌ها حیاتی است.

۱۹ جنبه‌های محاسباتی و عددی

۱.۱۹ محاسبه‌ی عددی تانسورها

در کاربردهای عملی مهندسی، محاسبه‌ی عددی تانسورها و عملیات روی آنها اهمیت بالایی دارد. الگوریتم‌های محاسباتی موثر برای کار با تانسورها شامل:

ذخیره‌سازی و نمایش. تانسورهای مرتبه‌ی بالا نیازمند ساختارهای داده‌ای خاصی هستند. برای تانسور مرتبه‌ی چهارم در فضای سه‌بعدی، $3^4 = 81$ مؤلفه وجود دارد که با استفاده از تقارن‌ها می‌توان آن را به تعداد کمتری کاهش داد.

بهینه‌سازی محاسبات. استفاده از ویژگی‌های تقارن تانسورها برای کاهش پیچیدگی محاسباتی:

- تقارن کوچک: $C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk}$
- تقارن بزرگ: $C_{ijkl} = C_{klij}$
- کاهش ابعاد: از ۸۱ مؤلفه به ۲۱ مؤلفه مستقل

۲.۱۹ الگوریتم‌های عددی پیشرفته

محاسبه‌ی مقادیر ویژه. برای تحلیل پایداری، محاسبه‌ی مقادیر ویژه تانسور آکوستیک ضروری است. روش‌های عددی شامل:

- الگوریتم QR برای تانسورهای متقارن
- روش‌های تکراری برای تانسورهای بزرگ
- تکنیک‌های موازی‌سازی برای بهبود کارایی

تحلیل حساسیت عددی. ارزیابی تأثیر خطاهای عددی بر نتایج تحلیل پایداری:

$$\text{شرط عددی} = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} \qquad (۶۲)$$

که نشان‌دهنده‌ی حساسیت سیستم به اختلالات عددی است.

۲۰ جمع‌بندی و چشم‌انداز

این فصل طیف وسیعی از مفاهیم تانسوری را پوشش داده است، از مبانی ریاضی اولیه تا کاربردهای پیشرفته در تحلیل ناپایداری مادی. تانسورها نه تنها پایه‌ی ریاضی مکانیک پیوسته و بسیاری از شاخه‌های فیزیک و مهندسی را تشکیل می‌دهند، بلکه ابزارهای قدرتمندی برای درک و پیش‌بینی رفتار مواد در شرایط پیچیده و بحرانی نیز محسوب می‌شوند.

۱.۲۰ نکات کلیدی

مهم‌ترین مفاهیم ارائه شده در این فصل عبارتند از:

- **مبانی ریاضی**: درک عمیق تعاریف، عملیات، و خواص تانسورها
- **کاربردهای فیزیکی**: نقش تانسورها در توصیف تنش، کرنش، و خواص مادی
- **تحلیل ناپایداری**: استفاده از تانسور آکوستیک برای پیش‌بینی شکست و موضعی‌سازی
- **جنبه‌های محاسباتی**: الگوریتم‌ها و روش‌های عددی برای محاسبه‌ی موثر تانسورها

۲.۲۰ توسعه‌های آینده

پیشرفت‌های آینده در محاسبات تانسوری و کاربردهای آن شامل موارد زیر خواهد بود:

هوش مصنوعی و یادگیری ماشین.

- استفاده از شبکه‌های عصبی برای بهینه‌سازی محاسبات تانسوری
- یادگیری الگوهای شکست از داده‌های تجربی
- پیش‌بینی رفتار مواد با استفاده از مدل‌های یادگیری عمیق

محاسبات موازی و ابرمحاسبه.

- توسعه‌ی الگوریتم‌های موازی برای تانسورهای مرتبه‌ی بالا
- استفاده از واحدهای پردازش گرافیکی (GPU) برای تسریع محاسبات
- پیاده‌سازی روش‌های توزیع شده برای مسائل بزرگ‌مقیاس

کاربردهای نوظهور.

- متامواد و ساختارهای دوره‌ای با خواص غیرمعمول
- نانومواد و مقیاس‌های کوچک با اثرات اندازه
- مواد هوشمند و سازه‌های تطبیقی
- مواد چندفازی و کامپوزیت‌های پیشرفته

درک عمیق مفاهیم تانسوری و توانایی کار با آنها برای هر متخصصی که در زمینه‌های مکانیک جامدات، مکانیک سیالات، یا علم مواد فعالیت می‌کند، ضروری است. تسلط بر این مفاهیم نه تنها درک بهتری از پدیده‌های فیزیکی ارائه می‌دهد، بلکه راه را برای توسعه‌ی روش‌های جدید تحلیل و طراحی در مهندسی هموار می‌کند و امکان پیشرفت در مرزهای دانش فنی را فراهم می‌آورد.

فصل ۳ — مرور مکانیک محیط های پیوسته

۱ مقدمه

۱.۱ مفهوم پیوستار

مکانیک پیوسته چارچوب ریاضی قدرتمندی برای مدل‌سازی رفتار مواد فراهم می‌کند که در آن ماده به‌جای در نظر گیری ساختار گسسته اتمی و مولکولی، به‌صورت پیوسته در سراسر نواحی اشغال شده توزیع می‌شود (Abeyaratne 1987).

فرضیه‌ی پیوستار نمایانگر فرض بنیادی است که خواص مادی می‌توانند به‌عنوان توابع پیوسته‌ی مکان و زمان در نظر گرفته شوند. این فرض امکان به‌کارگیری حساب دیفرانسیل و انتگرال را برای تحلیل رفتار مادی فراهم می‌کند.

نکته کلیدی ۱.۱. فرضیه‌ی پیوستار سنگ بنای مکانیک پیوسته است که امکان جایگزینی ساختار مولکولی گسسته‌ی ماده با محیط پیوسته‌ای را فراهم می‌کند که با توابع میدان هموار توصیف می‌شود.

۲.۱ اعتبار رویکرد پیوستار

فرض پیوستار زمانی معتبر است که:

- مقیاس مشخصه‌ی طول مسئله به‌مراتب بزرگ‌تر از فواصل بین‌مولکولی باشد
- تعداد مولکول‌ها در عنصر حجمی نماینده برای میانگین‌گیری آماری کافی باشد
- اثرات سطحی بر رفتار کلی غالب نباشند

کاربردهای معمول از مقیاس نانومتری (>۱۰ نانومتر) تا ابعاد ماکروسکوپی را شامل می‌شود.

۳.۱ عناصر بنیادی مکانیک پیوسته

توسعه‌ی کامل مکانیک پیوسته نیازمند چهار مؤلفه‌ی ضروری است:

۱. **سینماتیک**: توصیف ریاضی حرکت و تغییرشکل بدون ارجاع به نیروهای باعث آن‌ها. این شاخه شامل تعریف پیکربندی‌های مرجع و کنونی، نگاشت حرکت $\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}, t)$، و اندازه‌گیری‌های مختلف کرنش مانند تانسورهای کرنش گرین_لاگرانژ و المانسی_اویلری می‌شود. سینماتیک همچنین شامل بررسی سازگاری کرنش و مفهوم تغییرات عناصر خط، سطح و حجم است.
۲. **تحلیل تنش**: مشخصه‌سازی نیروهای داخلی و توزیع آن‌ها در ماده. بر اساس اصل تنش کوشی، بردار تنش روی هر سطح با نرمال واحد $\mathbf{n}$ به‌صورت $\mathbf{t}^{(\mathbf{n})} = \sigma \cdot \mathbf{n}$ تعریف می‌شود. تانسور تنش کوشی σ متقارن بوده و دارای تنش‌های اصلی و جهات اصلی مشخص است.
۳. **قوانین بقا**: اصول تعادل جهانی برای جرم، تکانه‌ی خطی، تکانه‌ی زاویه‌ای، و انرژی. این قوانین شامل معادله‌ی پیوستگی برای بقای جرم، معادلات حرکت کوشی برای بقای تکانه، و قانون اول ترمودینامیک برای بقای انرژی هستند. قضیه‌ی انتقال رینولدز پایه‌ی ریاضی برای تبدیل بیانیه‌های بقای سراسری به محلی فراهم می‌کند.
۴. **روابط ساختاری**: معادلات مخصوص مواد که تنش، کرنش، دما، و سایر متغیرهای میدان را به هم مربوط می‌کنند. این روابط باید اصول عینیت، تقارن مادی، و سازگاری ترمودینامیکی را رعایت کنند. نمونه‌هایی شامل قانون تعمیم‌یافته‌ی هوک برای الاستیسیته‌ی خطی، مدل‌های ویسکوالاستیک، و روابط پیچیده‌تر برای رفتارهای غیرخطی هستند.

این مؤلفه‌ها چارچوب سیستماتیکی برای فرمول‌بندی مسائل مقدار مرزی در مکانیک پیوسته فراهم می‌کنند.

نکته کلیدی ۲.۱. چهار رکن مکانیک پیوسته—سینماتیک، تحلیل تنش، قوانین بقا، و روابط ساختاری—همگی باید برای توصیف کامل رفتار مادی حضور داشته باشند.

۲ ابزارهای ریاضی

۱.۲ تحلیل تانسوری

توصیف ریاضی پدیده‌های سه‌بعدی نیازمند تحلیل تانسوری است. تانسورها ابزارهای ریاضی قدرتمندی هستند که برای توصیف کمیت‌های فیزیکی در فضاهای چندبعدی و تحلیل رفتار آن‌ها تحت تغییرات مختصات استفاده می‌شوند. کمیت‌های فیزیکی به‌صورت زیر طبقه‌بندی می‌شوند:

- **اسکالرها (تانسورهای مرتبه صفر)**: کمیت‌هایی که فقط بزرگی داشته و تحت تغییر مختصات ثابت می‌مانند. نمونه‌ها: دما θ، چگالی ρ، انرژی E، و فشار p.
- **بردارها (تانسورهای مرتبه اول)**: کمیت‌هایی که علاوه بر بزرگی، جهت نیز داشته و قانون تبدیل خاصی تحت تغییر مختصات دارند:

$$\boldsymbol{u} = u_i\hat{\boldsymbol{e}}_i, \quad \boldsymbol{v} = v_i\hat{\boldsymbol{e}}_i, \quad \boldsymbol{F} = F_i\hat{\boldsymbol{e}}_i \tag{1}$$

نمونه‌ها: جابه‌جایی، سرعت، شتاب، نیرو.
- **تانسورهای مرتبه دوم**: این تانسورها برای توصیف کمیت‌هایی استفاده می‌شوند که ارتباط بین دو بردار را نشان می‌دهند یا ماتریس‌های 3×3 را نمایندگی می‌کنند:

$$\underline{\underline{\boldsymbol{T}}} = T_{ij}\hat{\boldsymbol{e}}_i \otimes \hat{\boldsymbol{e}}_j \tag{2}$$

نمونه‌ها: تانسور تنش $\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}$، تانسور کرنش $\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}$، تانسور ممان اینرسی، گرادیان تغییرشکل $\underline{\underline{\boldsymbol{F}}}$.
- **تانسورهای مرتبه بالاتر**: این تانسورها برای توصیف خواص پیچیده‌تر مواد استفاده می‌شوند:

$$\boldsymbol{\mathcal{C}} = C_{ijkl}\hat{\boldsymbol{e}}_i \otimes \hat{\boldsymbol{e}}_j \otimes \hat{\boldsymbol{e}}_k \otimes \hat{\boldsymbol{e}}_l \tag{3}$$

نمونه‌ها: تانسور سختی الاستیک $\boldsymbol{\mathcal{C}}$، ضرایب پیزوالکتریک، مدول‌های الاستیسیته.

۲.۲ عملیات تانسوری اساسی

عملیات‌های اساسی بین تانسورها شامل موارد زیر هستند:

جمع و تفریق تانسورها: تانسورهای هم‌مرتبه را می‌توان جمع یا تفریق کرد:

$$(\underline{\underline{\boldsymbol{A}}} + \underline{\underline{\boldsymbol{B}}})_{ij} = A_{ij} + B_{ij} \tag{4}$$

ضرب داخلی (انقباض): این عملیات منجر به کاهش مرتبه تانسور می‌شود:

$$(\underline{\underline{\boldsymbol{A}}} \cdot \boldsymbol{b})_i = A_{ij}b_j, \quad \underline{\underline{\boldsymbol{A}}} : \underline{\underline{\boldsymbol{B}}} = A_{ij}B_{ij} \tag{5}$$

ضرب خارجی (تانسوری): این عملیات منجر به افزایش مرتبه تانسور می‌شود:

$$(\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b})_{ij} = a_i b_j \tag{6}$$

ردِ تانسور: برای تانسورهای مرتبه دوم، رد به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathrm{tr}(\underline{\underline{\boldsymbol{A}}}) = A_{ii} = A_{11} + A_{22} + A_{33} \tag{7}$$

دترمینان تانسورهای مرتبه دوم: برای تانسور $\underline{\underline{\boldsymbol{A}}}$:

$$\det(\underline{\underline{\boldsymbol{A}}}) = \varepsilon_{ijk}A_{1i}A_{2j}A_{3k} \tag{8}$$

۳.۲ نماد شاخص و قرارداد جمع اینشتین

نماد شاخص روش کارآمدی برای کار با عبارات تانسوری فراهم می‌کند. بر اساس قرارداد جمع اینشتین، وقتی شاخصی در یک عبارت تکرار شود، جمع روی آن شاخص از 1 تا 3 (در فضای سه‌بعدی) در نظر گرفته می‌شود:

$$a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = \sum_{i=1}^{3} a_i b_i \tag{۹}$$

نمادهای مهم تانسوری عبارتند از:

- **دلتای کرونکر**:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{اگر } i = j \\ 0 & \text{اگر } i \neq j \end{cases} \tag{۱۰}$$

- **تانسور جایگشت لوی-سیویتا**:

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{اگر } (i,j,k) \text{ جایگشت زوج } (1,2,3) \text{ باشد} \\ -1 & \text{اگر } (i,j,k) \text{ جایگشت فرد } (1,2,3) \text{ باشد} \\ 0 & \text{اگر دو یا سه شاخص برابر باشند} \end{cases} \tag{۱۱}$$

- **تانسور واحد مرتبه دوم**: $\underline{\underline{\boldsymbol{I}}} = \delta_{ij} \hat{\boldsymbol{e}}_i \otimes \hat{\boldsymbol{e}}_j$

۴.۲ عمل‌گرهای دیفرانسیل در تحلیل تانسوری

عمل‌گرهای دیفرانسیل ابزارهای اساسی برای تجزیه و تحلیل میدان‌های پیوسته هستند:

گرادیان: برای میدان اسکالری ϕ و میدان برداری $\boldsymbol{u}$:

$$\nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \hat{\boldsymbol{e}}_i, \quad \nabla \boldsymbol{u} = \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \hat{\boldsymbol{e}}_i \otimes \hat{\boldsymbol{e}}_j \tag{۱۲}$$

واگرایی: برای میدان برداری $\boldsymbol{u}$ و میدان تانسوری $\underline{\underline{\boldsymbol{T}}}$:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i}, \quad \nabla \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{T}}} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_i} \hat{\boldsymbol{e}}_j \tag{۱۳}$$

روتور: برای میدان برداری $\boldsymbol{u}$:

$$\nabla \times \boldsymbol{u} = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \hat{\boldsymbol{e}}_i \tag{۱۴}$$

لاپلاسین: برای میدان اسکالری ϕ:

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_i} \tag{۱۵}$$

نکته کلیدی ۱.۲. عمل‌گرهای دیفرانسیل ابزارهای اساسی برای فرمول‌بندی قوانین بقا و تعادل در مکانیک پیوسته هستند و پایه‌ی ریاضی معادلات تعادل، معادلات حرکت، و روابط سازگاری را تشکیل می‌دهند.

۳ سینماتیک حرکت و تغییرشکل

۱.۳ پیکربندی و توصیف حرکت

توصیف سینماتیکی پایه‌ی مکانیک پیوسته را با فراهم کردن ابزارهای ریاضی برای توصیف حرکت و تغییرشکل بدون ارجاع به نیروهای باعث آن‌ها تشکیل می‌دهد.

نکته کلیدی ۱.۳. سینماتیک توصیف کاملاً هندسی از حرکت و تغییرشکل، مستقل از نیروها و خواص مادی، ارائه می‌دهد که پایه‌ی ضروری برای تحلیل تنش و مدل‌سازی ساختاری را تشکیل می‌دهد.

۲.۳ جسم مادی و پیکربندی‌ها

جسم مادی $\mathcal{B}$ را به‌عنوان مجموعه‌ای پیوسته از ذرات یا نقاط مادی $\mathbf{X}$ تعریف می‌کنیم. این ذرات نقاط جرمی گسسته مانند مکانیک نیوتونی نیستند، بلکه بخش‌های بی‌نهایت کوچک یک محیط پیوسته با چگالی جرمی قابل تعریف هستند. برای هر یک از این ذرات، نگاشت یک‌به‌یکی به نقاط فضایی $\mathbf{X}$ در فضای اقلیدسی سه‌بعدی که ذرات در لحظه‌ای معین t_0 اشغال می‌کنند، تعریف می‌کنیم.

پیکربندی مرجع κ_0: پیکربندی انتخاب شده (معمولاً بدون تنش یا پیکربندی اولیه در $t = 0$) که در آن ذرات مادی با بردارهای موقعیت X شناسایی می‌شوند. انتخاب پیکربندی مرجع کاملاً اختیاری است.

پیکربندی کنونی κ_t: پیکربندی در زمان t که ذرات موقعیت‌های x را اشغال می‌کنند.

۳.۳ نگاشت حرکت

حرکت پیوستار با نگاشت زیر توصیف می‌شود:

$$\boldsymbol{x} = \chi(\boldsymbol{X}, t) \tag{۱۶}$$

بنابراین، ذره‌ی $\mathbf{X}$ در موقعیت $\mathbf{X}$ در پیکربندی مرجع به موقعیت جدید $\mathbf{x}$ در پیکربندی کنونی در زمان t منتقل می‌شود. زمانی که $t = t_0$، رابطه فوق $\mathbf{X} = \chi(\mathbf{X}, t_0)$ را می‌دهد.

این تابع باید شرایط زیر را برآورده کند:

- پیوستگی: ذرات همسایه، همسایه باقی می‌مانند (عدم نفوذپذیری ماده)
- معکوس‌پذیری: تناظر یک‌به‌یک بین پیکربندی‌ها، به‌طوری که حرکت معکوس $\mathbf{X} = \chi^{-1}(\mathbf{x}, t)$ وجود داشته باشد
- مشتق‌پذیری: حرکت و معکوس آن توابع پیوسته و مشتق‌پذیر باشند

تحت این شرایط، دترمینان ژاکوبین $J = \det(\partial\mathbf{x}/\partial\mathbf{X})$ نمی‌تواند صفر شود و در واقع فرض می‌کنیم:

$$0 < \det\left(\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\mathbf{X}}\right) < \infty \tag{۱۷}$$

نکته کلیدی ۲.۳. نگاشت تغییرشکل $x = \chi(X, t)$ باید پیوسته، معکوس‌پذیر، و مشتق‌پذیر باشد، با $J > 0$ تا اطمینان حاصل شود که ماده به خود نفوذ نمی‌کند.

۴ توصیف‌های لاگرانژی و اویلری

معادله‌ی حرکت $x_i = \chi_i(X_1, X_2, X_3, t)$ می‌تواند به‌عنوان رابطه‌ای بین مختصات مرجع یا مادی X_i و مختصات کنونی یا فضایی x_i در نظر گرفته شود. بنابراین، اگر مختصات مادی یک ذره‌ی مشخص را بدانیم، این رابطه اجازه می‌دهد موقعیت ذره در پیکربندی کنونی را تعیین کنیم. به همین ترتیب، معادله‌ی معکوس $X_i = \chi_i^{-1}(x_1, x_2, x_3, t)$ رابطه‌ی مخالف را ارائه می‌دهد.

همه‌ی متغیرهای میدان فضایی در مکانیک پیوسته (چگالی، دما، جابه‌جایی، کرنش، تنش و غیره) می‌توانند بر حسب مختصات مادی X_i یا مختصات فضایی x_i توصیف شوند.

۱.۴ توصیف لاگرانژی (مادی)

ذرات مادی منفرد را در طول حرکتشان دنبال می‌کند:

- متغیرهای مستقل: (X, t)
- تمرکز: چه بر ذره‌ی مشخصی می‌گذرد
- مناسب برای: کاربردهای مکانیک جامدات

با دنبال کردن ذرات، می‌توانیم کمیت‌های تانسوری را به‌عنوان توابعی که با مختصات مادی (X_1, X_2, X_3) شناسایی می‌شوند، بیان کنیم. چنین توصیفی به‌عنوان توصیف لاگرانژی، مادی یا مرجع شناخته می‌شود.

۲.۴ توصیف اویلری (فضایی)

نقاط ثابت فضا را مشاهده می‌کند:

- متغیرهای مستقل: (x, t)
- تمرکز: چه در موقعیت ثابت می‌گذرد
- مناسب برای: کاربردهای مکانیک سیالات

با استفاده از طرح دیگر، می‌توانیم تغییرات را در موقعیت‌های ثابت مشاهده کنیم و بنابراین کمیت‌های تانسوری را به‌عنوان توابع مختصات موقعیت (x_1, x_2, x_3) بیان کنیم. چنین توصیفی به‌عنوان توصیف اویلری یا فضایی شناخته می‌شود. توجه کنید که با گذشت زمان، ذرات مختلف موقعیت فضایی یکسانی را اشغال خواهند کرد، و بنابراین توصیف فضایی اطلاعات مشخصی در مورد خواص ذرات در طول حرکت ارائه نمی‌دهد.

۳.۴ مشتق مادی

نرخ تغییر زمانی یک کمیت تانسوری که ذره‌ی مادی را دنبال می‌کند، به‌عنوان مشتق زمانی مادی شناخته شده و معمولاً با D/Dt نشان داده می‌شود. زمانی که توصیف مادی یک میدان تانسوری مشخص T استفاده می‌شود، چنین مشتقی به روش مستقیم محاسبه می‌شود:

$$\frac{DT}{Dt} = \left.\frac{\partial T(X_1, X_2, X_3, t)}{\partial t}\right|_{X_i \text{ثابت}} \tag{۱۸}$$

با این حال، زمانی که توصیف فضایی برای تانسور T استفاده می‌شود، مشتق زمانی کمی پیچیده‌تر است زیرا مختصات فضایی خود اکنون توابعی از زمان هستند. این امر نیازمند استفاده از قانون زنجیره‌ای است:

$$\frac{D\phi}{Dt} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \phi \tag{۱۹}$$

که در آن $\boldsymbol{v}$ بردار سرعت است و $\nabla\phi$ گرادیان فضایی ϕ است.

۵ اندازه‌گیری تغییرشکل

۱.۵ گرادیان تغییرشکل

تانسور گرادیان تغییرشکل $\underline{\underline{F}}$ کمیت کلیدی در سینماتیک محدود است که اطلاعات کاملی در مورد تغییرشکل محلی ارائه می‌دهد:

$$\underline{\underline{F}} = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{X}} = \nabla_0 \boldsymbol{x} \tag{۲۰}$$

این تانسور نشان‌دهنده‌ی چگونگی نگاشت عناصر خط بی‌نهایت کوچک از پیکربندی مرجع به پیکربندی کنونی است. اگر $d\boldsymbol{X}$ عنصر خط بی‌نهایت کوچک در پیکربندی مرجع باشد، آنگاه عنصر خط متناظر در پیکربندی کنونی $d\boldsymbol{x} = \underline{\underline{F}} \cdot d\boldsymbol{X}$ خواهد بود.

دترمینان گرادیان تغییرشکل $J = \det(\underline{\underline{F}})$ نسبت تغییر حجم محلی را نمایندگی می‌کند. برای ماده‌ی غیرقابل تراکم، $J = 1$ و برای مواد قابل تراکم، $J > 0$ باید باشد تا از نفوذ ماده جلوگیری شود.

۲.۵ اندازه‌های کرنش

تانسور کرنش گرین_ لاگرانژ

تانسور کرنش گرین_ لاگرانژ اندازه‌ی لاگرانژی کرنش است که نسبت به پیکربندی مرجع تعریف می‌شود:

$$\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{F}}^{\mathrm{T}} \cdot \underline{\underline{F}} - \underline{\underline{I}}) = \frac{1}{2}(\underline{\underline{C}} - \underline{\underline{I}}) \quad (۲۱)$$

که $\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{F}}^{\mathrm{T}} \cdot \underline{\underline{F}}$ تانسور تغییرشکل راست کوشی_ گرین است.

این تانسور دارای خواص مهم زیر است:

- تانسور متقارن است: $E_{ij} = E_{ji}$
- در صورت عدم تغییرشکل، $\underline{\underline{E}} = \mathbf{0}$
- برای چرخش صلب خالص، $\underline{\underline{E}} = \mathbf{0}$
- مؤلفه‌های قطری E_{ii} نشان‌دهنده‌ی کرنش‌های نرمال هستند
- مؤلفه‌های غیرقطری E_{ij} ($i \neq j$) نشان‌دهنده‌ی کرنش‌های برشی هستند

برای تغییرشکل‌های کوچک، این تانسور به تانسور کرنش خطی تبدیل می‌شود.

تانسور کرنش المانسی_ اویلری

تانسور کرنش المانسی_اویلری اندازه‌ی اویلری کرنش است که نسبت به پیکربندی کنونی تعریف می‌شود:

$$\underline{\underline{e}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{b}}^{-1}) \quad (۲۲)$$

که $\underline{\underline{b}} = \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{F}}^{\mathrm{T}}$ تانسور تغییرشکل چپ کوشی_ گرین است.

تفاوت‌های اساسی با تانسور گرین_ لاگرانژ:

- در چارچوب فضایی تعریف می‌شود
- برای تحلیل‌های اویلری مناسب‌تر است
- برای سیالات و مواد با تغییرشکل‌های بزرگ به‌کار می‌رود
- رابطه‌ی تبدیل: $\underline{\underline{e}} = \underline{\underline{F}}^{-\mathrm{T}} \cdot \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{F}}^{-1}$

هر دو تانسور در حد تغییرشکل‌های کوچک به تانسور کرنش خطی همگرا می‌شوند، اما برای تغییرشکل‌های بزرگ تفاوت‌های قابل توجهی دارند.

تانسور کرنش بی‌نهایت کوچک

برای تغییرشکل‌های کوچک:

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(\nabla \boldsymbol{u} + (\nabla \boldsymbol{u})^{\mathrm{T}}) \quad (۲۳)$$

که $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{X}$ بردار جابه‌جایی است.

۳.۵ تجزیه‌ی قطبی

قضیه‌ی تجزیه‌ی قطبی یکی از نتایج بنیادی در نظریه‌ی ماتریس است که در مکانیک پیوسته کاربرد مهمی دارد. طبق این قضیه، هر تانسور گرادیان تغییرشکل $\underline{\underline{F}}$ قابل تجزیه‌ی یکتا به صورت:

$$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{R}} \cdot \underline{\underline{U}} = \underline{\underline{V}} \cdot \underline{\underline{R}} \tag{۲۴}$$

که در آن:

- $\underline{\underline{R}}$: تانسور چرخش (متعامد با $\det(\underline{\underline{R}}) = +1$)
- $\underline{\underline{U}}$: تانسور کشش راست (متقارن مثبت معین)
- $\underline{\underline{V}}$: تانسور کشش چپ (متقارن مثبت معین)

تفسیر فیزیکی: تجزیه‌ی $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{R}} \cdot \underline{\underline{U}}$ نشان می‌دهد که تغییرشکل می‌تواند به‌عنوان کشش خالص توسط $\underline{\underline{U}}$ در امتداد محورهای اصلی‌اش، و سپس چرخش صلب توسط $\underline{\underline{R}}$ تفسیر شود. تجزیه‌ی $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{V}} \cdot \underline{\underline{R}}$ اول چرخش صلب و سپس کشش را انجام می‌دهد.

روابط بین تانسورهای کشش:

$$\underline{\underline{U}} = \sqrt{\underline{\underline{C}}} = \sqrt{\underline{\underline{F}}^{\mathrm{T}} \cdot \underline{\underline{F}}} \tag{۲۵}$$

$$\underline{\underline{V}} = \sqrt{\underline{\underline{b}}} = \sqrt{\underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{F}}^{\mathrm{T}}} \tag{۲۶}$$

$$\underline{\underline{V}} = \underline{\underline{R}} \cdot \underline{\underline{U}} \cdot \underline{\underline{R}}^{\mathrm{T}} \tag{۲۷}$$

مقادیر ویژه‌ی $\underline{\underline{U}}$ و $\underline{\underline{V}}$ یکسان بوده و کشش‌های اصلی λ_i نامیده می‌شوند.

۶ نیرو و اندازه‌های تنش

۱.۶ نیروهای بدنی و سطحی

قبل از ورود به مفهوم تنش، باید نیروهای داخلی محیط‌های پیوسته را بررسی کنیم. در چارچوب مکانیک پیوسته، نیروهای داخلی به دو دسته‌ی اصلی تقسیم می‌شوند:

نیروهای بدنی (Body Forces): این نیروها متناسب با جرم جسم بوده و با عوامل خارجی واکنش می‌دهند. مثال‌هایی از این نیروها عبارتند از:

- نیروی وزن ناشی از جاذبه زمین
- نیروهای مغناطیسی
- نیروهای اینرسی در مراجع غیراینرسی

چگالی نیروی بدنی $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}, t)$ به‌صورت نیرو در واحد جرم تعریف می‌شود، به‌طوری که کل نیروی بدنی $\boldsymbol{F}_R$ روی جسم $\mathcal{B}$ عبارت است از:

$$\boldsymbol{F}_R = \int_{\mathcal{B}} \rho \boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}, t)\, d\mathcal{V} \tag{۲۸}$$

نیروهای سطحی (Surface Forces): این نیروها همواره روی سطح عمل کرده و نتیجه‌ی تماس فیزیکی با اجسام دیگر هستند. کل نیروی سطحی $\boldsymbol{F}_S$ روی سطح S به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\boldsymbol{F}_S = \int_S \boldsymbol{t}(\boldsymbol{x}, t)\, dS \tag{۲۹}$$

که در آن $\boldsymbol{t}(\boldsymbol{x}, t)$ چگالی نیروی سطحی یا بردار تنش (traction vector) نامیده می‌شود.

۲.۶ اصل تنش کوشی

اصل بنیادی تنش کوشی که پایه‌ی نظریه‌ی تنش مدرن را تشکیل می‌دهد، بیان می‌کند که بردار تنش در هر نقطه از ماده وابسته به موقعیت مکانی و جهت نرمال سطح است. برای تعیین کمی این رابطه، سطح کوچکی با مساحت Δa و بردار نرمال واحد $\boldsymbol{n}$ در نظر می‌گیریم. نیروی کل $\Delta \boldsymbol{F}$ عمل‌کننده روی این سطح در حد $\Delta a \to 0$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\boldsymbol{t}(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{n}) = \lim_{\Delta a \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{F}}{\Delta a} \tag{۳۰}$$

رابطه‌ی بنیادی اصل تنش کوشی عبارت است از:

$$\boldsymbol{t}^{(\hat{\boldsymbol{n}})} = \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \tag{۳۱}$$

که در آن $\boldsymbol{t}^{(\hat{\boldsymbol{n}})}$ بردار تنش روی سطح با نرمال $\hat{\boldsymbol{n}}$ و $\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}$ تانسور تنش کوشی است.

همچنین، اصل عکس‌العمل (قانون سوم نیوتون) نیز به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\boldsymbol{t}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{n}) = -\boldsymbol{t}(\boldsymbol{x}, -\boldsymbol{n}) \tag{۳۲}$$

نکته کلیدی ۱.۶. اصل تنش کوشی بیان می‌کند که بردار تنش در هر نقطه بر روی سطحی با نرمال واحد $\hat{\boldsymbol{n}}$ به‌صورت خطی به نرمال سطح وابسته است و امکان تعیین حالت تنش در نقطه با تعداد محدودی مؤلفه فراهم می‌کند.

۳.۶ تانسور تنش کوشی

برای درک کامل حالت تنش در یک نقطه، مؤلفه‌های تانسور تنش کوشی روی سطوح مختصاتی تعریف می‌شوند. در صورتی که سطح کوچک Δa با هر یک از سه صفحه‌ی مختصاتی منطبق شود، بردارهای تنش روی هر وجه به‌صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\boldsymbol{t}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{n} = \hat{\boldsymbol{e}}_1) = T_{11}\hat{\boldsymbol{e}}_1 + T_{12}\hat{\boldsymbol{e}}_2 + T_{13}\hat{\boldsymbol{e}}_3 \tag{۳۳}$$
$$\boldsymbol{t}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{n} = \hat{\boldsymbol{e}}_2) = T_{21}\hat{\boldsymbol{e}}_1 + T_{22}\hat{\boldsymbol{e}}_2 + T_{23}\hat{\boldsymbol{e}}_3 \tag{۳۴}$$
$$\boldsymbol{t}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{n} = \hat{\boldsymbol{e}}_3) = T_{31}\hat{\boldsymbol{e}}_1 + T_{32}\hat{\boldsymbol{e}}_2 + T_{33}\hat{\boldsymbol{e}}_3 \tag{۳۵}$$

نه مؤلفه‌ی T_{ij} تانسور تنش کوشی نامیده می‌شوند که در قالب ماتریسی به‌صورت زیر نمایش داده می‌شوند:

$$[\underline{\underline{\boldsymbol{T}}}] = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} \tag{۳۶}$$

مؤلفه‌های قطری T_{11}، T_{22}، و T_{33} **تنش‌های نرمال** نامیده شده و مؤلفه‌های غیرقطری T_{12}، T_{21}، T_{23}، T_{32}، T_{31}، و T_{13} **تنش‌های برشی** هستند.

فرمول تنش کوشی

برای تعیین بردار تنش روی سطح مایل با نرمال دلخواه، از تعادل المان چهاروجهی که توسط سطح مایل و سه صفحه‌ی مختصاتی محدود شده است، استفاده می‌کنیم. با اعمال قانون دوم نیوتون و در نظر گیری حد $\Delta V \to 0$، رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$t_i = T_{ji} n_j \quad \text{یا به‌صورت برداری:} \quad \boldsymbol{t} = \underline{\underline{\boldsymbol{T}}}^T \cdot \boldsymbol{n} \tag{۳۷}$$

این رابطه که **فرمول تنش کوشی** نامیده می‌شود، روشی مستقیم و ساده برای محاسبه‌ی نیروها روی سطوح مایل فراهم می‌کند.

اثبات تانسوری بودن تنش کوشی

برای اثبات اینکه تنش کوشی تانسور مرتبه‌ی دوم است، از این حقیقت استفاده می‌کنیم که بردارهای تنش و نرمال تانسورهای مرتبه‌ی اول هستند. با شروع از فرمول کوشی در چارچوب مرجع جدید:

$$t'_i = T'_{ji} n'_j \tag{۳۸}$$

و با استفاده از قوانین تبدیل تانسوری، نشان داده می‌شود که:

$$T'_{ij} = Q_{im} Q_{jn} T_{mn} \tag{۳۹}$$

که قانون تبدیل استاندارد برای تانسورهای مرتبه‌ی دوم است.

۴.۶ خواص تانسور تنش

تقارن تانسور تنش

از تعادل تکانه‌ی زاویه‌ای (که در فصل بعد اثبات خواهد شد):

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \tag{۴۰}$$

این تقارن تعداد مؤلفه‌های مستقل تانسور تنش را از ۹ به ۶ کاهش می‌دهد.

تنش‌های اصلی و جهات اصلی

مقادیر ویژه تانسور تنش که **تنش‌های اصلی** نامیده می‌شوند، از حل معادله‌ی مشخصه زیر به دست می‌آیند:

$$\det(\underline{\underline{\sigma}} - \sigma \underline{\underline{I}}) = 0 \tag{۴۱}$$

که معادل معادله‌ی مکعبی زیر است:

$$-\sigma^3 + I_T \sigma^2 - II_T \sigma + III_T = 0 \tag{۴۲}$$

که در آن ناورداهای بنیادی تنش عبارتند از:

$$I_T = T_{ii} = T_{11} + T_{22} + T_{33} \tag{۴۳}$$

$$II_T = \frac{1}{2}(T_{ii}T_{jj} - T_{ij}T_{ij}) = \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{22} & T_{23} \\ T_{32} & T_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{11} & T_{13} \\ T_{31} & T_{33} \end{vmatrix} \tag{۴۴}$$

$$III_T = \det \underline{\underline{T}} \tag{۴۵}$$

در سیستم مختصات اصلی، تانسور تنش به فرم قطری زیر درمی‌آید:

$$[\underline{\underline{T}}] = \begin{bmatrix} T_1 & 0 & 0 \\ 0 & T_2 & 0 \\ 0 & 0 & T_3 \end{bmatrix} \tag{۴۶}$$

تجزیه‌ی کروی-انحرافی

تانسور تنش می‌تواند به دو بخش کروی (هیدرواستاتیک) و انحرافی تجزیه شود:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \sigma_m \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{s}} \tag{۴۷}$$

$$\sigma_m = \frac{1}{3}\mathrm{tr}(\underline{\underline{\sigma}}) = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \tag{۴۸}$$

$$\underline{\underline{s}} = \underline{\underline{\sigma}} - \sigma_m \underline{\underline{I}} \tag{۴۹}$$

بخش کروی مسئول تغییر حجم و بخش انحرافی مسئول تغییر شکل (بدون تغییر حجم) است.

۵.۶ دایره‌های موهر و تحلیل تنش

برای تحلیل حالت‌های تنش دوبعدی، روش دایره‌های موهر ابزار قدرتمندی فراهم می‌کند. با در نظر گیری تنش‌های اصلی مرتب‌شده $T_1 > T_2 > T_3$، مؤلفه‌های نرمال و برشی بردار تنش روی سطح دلخواه با نرمال $\boldsymbol{n}$ به‌صورت زیر بیان می‌شوند:

$$N = T_1 n_1^2 + T_2 n_2^2 + T_3 n_3^2 \tag{۵۰}$$

$$S^2 = T_1^2 n_1^2 + T_2^2 n_2^2 + T_3^2 n_3^2 - N^2 \tag{۵۱}$$

با شرط $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$، سه دایره موهر با معادلات زیر تعریف می‌شوند:

$$S^2 + (N - T_2)(N - T_3) \geq 0 \tag{۵۲}$$

$$S^2 + (N - T_3)(N - T_1) \leq 0 \tag{۵۳}$$

$$S^2 + (N - T_1)(N - T_2) \geq 0 \tag{۵۴}$$

بیشینه تنش برشی برابر با $S_{\max} = \frac{1}{2}|T_1 - T_3|$ است که شعاع بزرگ‌ترین دایره موهر را تشکیل می‌دهد.

۶.۶ تنش‌های ویژه

تنش هشت‌وجهی

صفحه‌ی هشت‌وجهی صفحه‌ای است که نرمال آن زوایای مساوی با سه محور اصلی می‌سازد. مؤلفه‌های نرمال آن $n_i = \pm(1,1,1)/\sqrt{3}$ هستند. تنش‌های نرمال و برشی هشت‌وجهی عبارتند از:

$$\sigma_{\text{oct}} = \frac{1}{3}(T_1 + T_2 + T_3) = \frac{1}{3}I_T \tag{۵۵}$$

$$\tau_{\text{oct}} = \frac{1}{3}\sqrt{(T_1 - T_2)^2 + (T_2 - T_3)^2 + (T_3 - T_1)^2} \tag{۵۶}$$

تنش برشی هشت‌وجهی مستقیماً با انرژی کرنش اعوجاجی مرتبط است که در نظریه‌های شکست مواد نرم کاربرد دارد.

تنش مؤثر فون میزس

تنش مؤثر یا فون میزس که معیار مهمی در نظریه‌های خرابی محسوب می‌شود، به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\sigma_e = \sigma_{\text{Mises von}} = \sqrt{\frac{3}{2}\underline{\hat{\mathbf{s}}} : \underline{\hat{\mathbf{s}}}} \tag{۵۷}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(T_1 - T_2)^2 + (T_2 - T_3)^2 + (T_3 - T_1)^2} \tag{۵۸}$$

$$= \sqrt{3}\tau_{\text{oct}} \tag{۵۹}$$

که در آن $\underline{\hat{\mathbf{s}}}$ تانسور تنش انحرافی است. این تنش با تنش برشی هشت‌وجهی از رابطه‌ی $\sigma_e = \sqrt{3/2}\tau_{\text{oct}}$ مرتبط است.

۷.۶ توزیع‌های تنش و خطوط کانتور

تجسم و درک طبیعت توزیع تنش در جامدات از اهمیت بالایی برخوردار است. روش‌های مختلفی برای این منظور توسعه یافته‌اند:

خطوط هم‌رنگ (Isochromatic lines): خطوطی که اختلاف تنش‌های اصلی روی آن‌ها ثابت است: $T_1 - T_2 =$ ثابت

خطوط هم‌میل (Isoclinic lines): خطوطی که جهت تنش‌های اصلی روی آن‌ها ثابت است.

خطوط هم‌پاک (Isopachic lines): خطوطی که مجموع تنش‌های نرمال روی آن‌ها ثابت است: $T_{11} + T_{22} = T_1 + T_2 =$ ثابت

مسیرهای تنش (Stress trajectories): خطوطی که در جهت تنش‌های اصلی قرار دارند و دو خانواده متعامد تشکیل می‌دهند. این خطوط برای درک مسیرهای انتقال بار از نقاط اعمال نیرو به نقاط تکیه‌گاه بسیار مفیدند.

برای مسیرهای تنش دوبعدی، زاویه‌ی جهت θ_p نسبت به محور x_1 از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود:

$$\tan 2\theta_p = \frac{2T_{12}}{T_{11} - T_{22}} \tag{۶۰}$$

معادله‌ی دیفرانسیل مسیرهای تنش به‌صورت زیر است:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{T_{11} - T_{22}}{2T_{12}} \pm \sqrt{\left(\frac{T_{11} - T_{22}}{2T_{12}}\right)^2 + 1} \tag{۶۱}$$

۸.۶ تانسورهای تنش پیولا ـ کیرشهف

در تغییرشکل‌های محدود، تمایز بین مساحت‌های مرجع و کنونی اهمیت پیدا می‌کند. تانسور تنش کوشی که قبلاً مطرح شد، تنش واقعی در پیکربندی کنونی را نمایندگی می‌کند. اما در برخی کاربردها، فرمول‌بندی مسئله در پیکربندی مرجع مزایایی دارد که به تعریف تانسورهای تنش جدید منجر می‌شود.

تانسور تنش پیولا ـ کیرشهف اول

در پیکربندی مرجع، سطح dA با نرمال واحد $\boldsymbol{N}$ وجود دارد که در پیکربندی کنونی به سطح da با نرمال $\boldsymbol{n}$ تبدیل می‌شود. اصل تعادل نیرو بیان می‌کند که:

$$\boldsymbol{T}^R dA = \boldsymbol{t}\, da \tag{۶۲}$$

که در آن $\boldsymbol{T}^R$ بردار تنش کاذب (pseudo-traction) در پیکربندی مرجع است. تانسور تنش پیولا ـ کیرشهف اول $\underline{\boldsymbol{T}}^o$ از رابطه‌ی زیر تعریف می‌شود:

$$\boldsymbol{T}^R = \underline{\boldsymbol{T}}^o \cdot \boldsymbol{N} \tag{۶۳}$$

با استفاده از فرمول نانسون برای تبدیل سطح و ترکیب روابط، رابطه‌ی زیر حاصل می‌شود:

$$\underline{\boldsymbol{T}}^o = J\underline{\boldsymbol{T}} \cdot \underline{\boldsymbol{F}}^{-T} \tag{۶۴}$$

که در آن $J = \det(\underline{\boldsymbol{F}})$ ژاکوبین تغییرشکل است. رابطه‌ی معکوس نیز به‌صورت زیر است:

$$\underline{\boldsymbol{T}} = J^{-1}\underline{\boldsymbol{T}}^o \cdot \underline{\boldsymbol{F}}^T \tag{۶۵}$$

ویژگی مهم: تانسور پیولا ـ کیرشهف اول در حالت کلی متقارن نیست، حتی اگر تانسور کوشی متقارن باشد.

تانسور تنش پیولا ـ کیرشهف دوم

تانسور تنش پیولا ـ کیرشهف دوم $\underline{\underline{S}}$ از طریق عملیات pull-back تعریف می‌شود:

$$\underline{\underline{S}}\boldsymbol{N}dA = \underline{\underline{F}}^{-1}\boldsymbol{t}da \tag{۶۶}$$

که منجر به روابط زیر می‌شود:

$$\underline{\underline{S}} = J\underline{\underline{F}}^{-1} \cdot \underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{F}}^{-T} \tag{۶۷}$$

رابطه‌ی معکوس:

$$\underline{\underline{T}} = J^{-1}\underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{S}} \cdot \underline{\underline{F}}^{T} \tag{۶۸}$$

ویژگی مهم: تانسور پیولا ـ کیرشهف دوم متقارن است اگر تانسور کوشی متقارن باشد.

رابطه بین تانسورهای پیولا ـ کیرشهف

دو تانسور پیولا ـ کیرشهف از رابطه‌ی زیر به هم مربوط هستند:

$$\underline{\underline{T}}^{o} = \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{S}} \tag{۶۹}$$

حد تغییرشکل‌های کوچک

برای تغییرشکل‌های کوچک که $\nabla \boldsymbol{u} = \mathcal{O}(\varepsilon)$ با $\varepsilon \ll 1$، شرایط زیر برقرار است:

$$\underline{\underline{F}} \approx \underline{\underline{I}} + \nabla \boldsymbol{u} \tag{۷۰}$$

$$\underline{\underline{F}}^{-1} \approx \underline{\underline{I}} - \nabla \boldsymbol{u} \tag{۷۱}$$

$$J \approx 1 + \nabla \cdot \boldsymbol{u} \approx 1 \tag{۷۲}$$

در این حالت، هر سه تانسور تنش (کوشی، PK۱، و PK۲) به هم همگرا می‌شوند:

$$\underline{\underline{T}} \approx \underline{\underline{T}}^{o} \approx \underline{\underline{S}} \tag{۷۳}$$

۹.۶ سایر تانسورهای تنش

تانسور تنش کیرشهف

$$\tau = J\underline{\underline{T}} \tag{۷۴}$$

این تانسور گاهی در نظریه‌های پلاستیسیته استفاده می‌شود.

تانسور تنش بیوت

$$\underline{\underline{T}}^{B} = \underline{\underline{R}}^{T} \cdot \underline{\underline{T}}^{o} = \underline{\underline{U}} \cdot \underline{\underline{S}} \tag{۷۵}$$

که در آن $\underline{\underline{R}}$ تانسور چرخش از تجزیه‌ی قطبی $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{R}} \cdot \underline{\underline{U}}$ است.

عینیت تانسورهای تنش

بررسی عینیت تانسورهای مختلف تنش نتایج زیر را می‌دهد:

- **تانسور کوشی** $\underline{\underline{T}}$: عینی است و قانون تبدیل $\underline{\underline{T}}^* = \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{Q}}^T$ را دنبال می‌کند.
- **تانسور PK۱** $\underline{\underline{T}}^o$: برای تانسورهای مرتبه‌ی اول عینی است اما برای مرتبه‌ی دوم عینی نیست.
- **تانسور PK۲** $\underline{\underline{S}}$: عینی نیست و در هر دو چارچوب مرجع یکسان باقی می‌ماند.
- **تانسور کیرشهف** τ: عینی است.
- **تانسور بیوت** $\underline{\underline{T}}^B$: عینی نیست.

۷ قوانین بقا و تعادل

قوانین بقا یا تعادل اصول بنیادی فیزیکی هستند که رفتار همه‌ی مواد پیوسته را تحت تأثیر قرار می‌دهند. این قوانین که از سال‌ها تحقیق توسعه یافته‌اند، برای تغییرشکل‌ها، بارگذاری‌ها، و اثرات نرخی که در کاربردهای مهندسی معمول یافت می‌شوند، مناسب هستند. این روابط معمولاً نوعی اصل بقا را نمایندگی می‌کنند و بر همه‌ی مواد پیوسته اعمال می‌شوند، صرف‌نظر از اینکه جامد، سیال، الاستیک، یا پلاستیک باشند.

> **نکته کلیدی ۱.۷.** قوانین بقا اصول جهانی هستند که بر همه‌ی مواد پیوسته اعمال می‌شوند و پایه‌ی ریاضی معادلات میدان در مکانیک پیوسته را تشکیل می‌دهند.

۱.۷ اصول کلی بقا و قضیه‌ی انتقال رینولدز

اساساً اصول تعادل به‌عنوان اصولی شروع می‌شوند که شامل روابط انتگرالی بر روی پیکربندی‌های جسم مادی هستند. ابتدا نرخ تغییرات زمانی انتگرال‌های خاصی را در نظر می‌گیریم.

برای ناحیه‌ی ثابت فضا R و با $G(\boldsymbol{x}, t)$ به‌عنوان میدان تانسوری دلخواه:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_R G\,dv = \int_R \frac{\partial G}{\partial t}\,dv \tag{۷۶}$$

مشتق زمانی از علامت انتگرال حجمی عبور می‌کند زیرا حدود انتگرال‌گیری مستقل از زمان هستند.

با این حال، ما می‌خواهیم این نرخ تغییر را بر روی گروه ثابتی از ذرات پیوستار که ناحیه‌ی فضایی R_m را در نقطه‌ای خاص از زمان اشغال می‌کنند، در نظر بگیریم. برای این حالت، نه تنها انتگرال‌گیرنده با زمان تغییر می‌کند، بلکه حجم فضایی که انتگرال بر روی آن گرفته می‌شود نیز تغییر می‌کند. بنابراین می‌خواهیم مشتق زمانی مادی انتگرال حجمی را به‌گونه‌ای تعریف کنیم که نرخ تغییر کل مقدار کمیتی را که توسط سیستم جرمی داده شده در R_m حمل می‌شود، اندازه‌گیری کند:

$$\frac{D}{Dt}\int_{R_m} G\,dV \tag{۷۷}$$

با استفاده از روابط ژاکوبین و تبدیل از مختصات مادی به فضایی، می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{D}{Dt}\int_{R_m} G\,dv = \int_R \left(\frac{DG}{Dt} + G v_{k,k}\right) dv \tag{۷۸}$$

با استفاده از قضیه‌ی واگرایی در انتگرال دوم:

$$\frac{D}{Dt}\int_{R_m} G\,dV = \int_R \frac{\partial G}{\partial t}\,dv + \int_{\partial R} G v_k n_k\,ds \tag{۷۹}$$

که در آن n_k بردار نرمال واحد خروجی به سطح ∂R است. نتیجه‌ی (**؟؟**) اغلب **قضیه‌ی انتقال رینولدز** نامیده می‌شود.

نکته کلیدی ۲.۷. قضیه‌ی انتقال رینولدز پایه‌ی ریاضی برای تبدیل بیانیه‌های بقای سراسری به شکل محلی است و نشان می‌دهد که نرخ تغییر مادی شامل دو جمله است: یکی مربوط به نرخ تغییر ساده درون ناحیه و دیگری مربوط به مقدار ورودی (شار) از مرز.

بیشتر قوانین فیزیکی ما ابتدا در قالب معادله‌ی کلی بقا یا حفظ به‌صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\frac{D}{Dt}\int_{R_m} \rho\Psi \, dV = -\int_{\partial R} \boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{n}\, ds + \int_R \rho S\, dv \tag{۸۰}$$

که در آن Ψ میدان تانسوری، $\boldsymbol{I}$ جمله‌ی ورودی ناشی از انتقال از مرز ∂R، S جمله‌ی منبع داخلی، و علامت منفی به این دلیل لازم است که $\boldsymbol{n}$ نرمال خروجی است.

۲.۷ بقای جرم

با در نظر گیری بخش دلخواهی از مادی R_m، اصل کلی بقای جرم به سادگی بیان می‌شود که کل جرم در R_m باید در همه‌ی زمان‌ها ثابت باقی بماند:

$$\frac{D}{Dt}\int_{R_m} \rho\, dV = 0 \tag{۸۱}$$

با ترکیب قضیه‌ی انتقال رینولدز:

$$\int_R \left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + (\rho v_k)_{,k}\right) dv = 0 \tag{۸۲}$$

با استفاده از قضیه‌ی محلی‌سازی، انتگرال‌گیرنده مشترک باید صفر باشد:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + (\rho v_k)_{,k} = 0 \tag{۸۳}$$

یا در شکل بردار:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v}) = 0 \tag{۸۴}$$

رابطه‌ی (**??**) به‌عنوان **بیانیه‌ی دیفرانسیل بقای جرم** شناخته شده و رابطه‌ای نقطه‌ای است که در همه‌ی نقاط پیوستار درون R به‌کار می‌رود. این رابطه اغلب به‌عنوان **معادله‌ی پیوستگی** در مکانیک سیالات شناخته می‌شود.

این رابطه را می‌توان در شکل جایگزین زیر نوشت:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho v_{k,k} = 0 \quad \text{یا} \quad \frac{D\rho}{Dt} + \rho\nabla\cdot\boldsymbol{v} = 0 \tag{۸۵}$$

توجه کنید که اگر ماده غیرقابل تراکم باشد، آنگاه $D\rho/Dt = 0$ و بنابراین:

$$v_{k,k} = \nabla\cdot\boldsymbol{v} = 0 \tag{۸۶}$$

۳.۷ بقای تکانه‌ی خطی

اصل بقای تکانه‌ی خطی اساساً بیانیه‌ای از قانون دوم نیوتون برای مجموعه‌ای از ذرات است. می‌تواند بیان شود که نرخ تغییر زمانی کل تکانه‌ی خطی گروه داده شده‌ای از ذرات پیوستار برابر با مجموع همه‌ی نیروهای خارجی عمل‌کننده بر گروه است.

با در نظر گیری گروه ثابتی از ذرات پیوستار که لحظه‌ای ناحیه‌ی فضایی R را اشغال می‌کنند و تحت نیروهای سطحی $\boldsymbol{t}$ و نیروهای بدنی $\boldsymbol{b}$ قرار دارند:

$$\frac{D}{Dt}\int_{R_m} \rho \boldsymbol{v}\, dv = \int_{\partial R} \boldsymbol{t}\, ds + \int_R \rho \boldsymbol{b}\, dv \tag{۸۷}$$

با تبدیل به نماد شاخص و معرفی تانسور تنش کوشی:

$$\frac{D}{Dt}\int_{R_m} \rho v_i\, dv = \int_{\partial R} T_{ji} n_j\, ds + \int_R \rho b_i\, dv \tag{۸۸}$$

با استفاده از قضیه‌ی واگرایی:

$$\frac{D}{Dt}\int_{R_m} \rho v_i\, dv = \int_R T_{ji,j}\, dv + \int_R \rho b_i\, dv \tag{۸۹}$$

با استفاده از قضیه‌ی انتقال رینولدز و بقای جرم:

$$\int_R \rho \frac{Dv_i}{Dt}\, dv = \int_R (T_{ji,j} + \rho b_i)\, dv \tag{۹۰}$$

با استفاده از قضیه‌ی محلی‌سازی:

$$T_{ji,j} + \rho b_i = \rho a_i \tag{۹۱}$$

یا در شکل بردار:

$$\nabla \cdot \underline{\boldsymbol{T}} + \rho \boldsymbol{b} = \rho \boldsymbol{a} \tag{۹۲}$$

که در آن $\boldsymbol{a} = D\boldsymbol{v}/Dt$ میدان شتاب است. روابط (**؟؟**) به‌عنوان **معادلات حرکت کوشی** شناخته می‌شوند که شکل دیفرانسیل بقای تکانه‌ی خطی هستند.

برای مورد تغییرشکل‌های کوچک، عبارت شتاب $\boldsymbol{a}(x, t) = \partial^2 \boldsymbol{u}/\partial t^2$ در معادلات حرکت استفاده می‌شود. وقتی مسئله در تعادل استاتیکی است که شتاب ناچیز یا صفر است، معادلات (**؟؟**) به معادلات تعادل کاهش می‌یابند:

$$T_{ji,j} + \rho b_i = 0 \tag{۹۳}$$

۴.۷ بقای تکانه‌ی زاویه‌ای

اصل تکانه‌ی زاویه‌ای یا گشتاور تکانه شکل دیگری از قانون دوم نیوتون است. برای کاربرد ما بیان می‌کند که نرخ تغییر زمانی کل تکانه‌ی زاویه‌ای گروهی از ذرات باید برابر با مجموع همه‌ی گشتاورهای خارجی عمل‌کننده بر سیستم نسبت به نقطه‌ی دلخواهی در فضا باشد.

با در نظر گیری گروه ثابتی از ذرات پیوستار که لحظه‌ای ناحیه‌ی فضایی R را اشغال می‌کنند و تحت نیروهای سطحی $\boldsymbol{t}$ و نیروهای بدنی $\boldsymbol{b}$ قرار دارند، و با نادیده گرفتن جفت‌های توزیع شده‌ی بدنی یا سطحی:

$$\frac{D}{Dt}\int_{R_m} \boldsymbol{r} \times \rho \boldsymbol{v}\, dv = \int_{\partial R} \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{t}\, ds + \int_R \boldsymbol{r} \times \rho \boldsymbol{b}\, dv \tag{۹۴}$$

که در آن $\boldsymbol{r}$ بردار مکان نسبت به نقطه‌ی دلخواهی است.

پس از انجام محاسبات تانسوری دقیق و استفاده از معادلات حرکت، نتیجه‌ی نهایی این است:

$$\varepsilon_{ijk}T_{jk} = 0 \tag{۹۵}$$

از آنجا که ε_{ijk} پادمتقارن است، T_{jk} باید متقارن باشد:

$$T_{ij} = T_{ji} \tag{۹۶}$$

رابطه‌ی (**؟؟**) گاهی **قانون دوم حرکت کوشی** نامیده می‌شود که نتیجه‌ی تعادل تکانه‌ی زاویه‌ای است. این نتیجه به فرض عدم وجود جفت‌های توزیع شده‌ی بدنی یا سطحی متکی است.

۵.۷ بقای انرژی

اصل بقای انرژی که معمولاً به‌عنوان **قانون اول ترمودینامیک** شناخته می‌شود، بیان می‌کند که نرخ تغییر انرژی جنبشی و درونی گروه داده شده‌ای از ذرات پیوستار برابر با مجموع نرخ تغییر کار انجام شده توسط نیروهای خارجی و انرژی ورودی به سیستم از مرز است.

انرژی جنبشی گروه:

$$K = \int_R \frac{1}{2}\rho v^2\, dv \tag{۹۷}$$

انرژی درونی:

$$E = \int_R \rho\varepsilon\, dv \tag{۹۸}$$

که در آن $\varepsilon = \varepsilon(\boldsymbol{x}, t)$ چگالی انرژی درونی در واحد جرم است.

نرخ کار نیروهای خارجی (قدرت مکانیکی خارجی):

$$P_{ext} = \int_{\partial R} \boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{v}\, ds + \int_R \rho\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{v}\, dv \tag{۹۹}$$

این رابطه را می‌توان در شکل‌های جایگزین بازنویسی کرد. با کار بر روی جمله‌ی انتگرال سطحی و استفاده از فرمول کوشی و قضیه‌ی واگرایی:

$$P_{ext} = \int_R [(T_{ji,j} + \rho b_i)v_i + T_{ij}D_{ij}]\, dv \tag{۱۰۰}$$

با استفاده از معادلات حرکت:

$$P_{ext} = \int_R [\rho a_i v_i + T_{ij}D_{ij}]\, dv \tag{۱۰۱}$$

جمله‌ی $\int_R T_{ij}D_{ij}\, dv$ معمولاً به‌عنوان **قدرت تنش** شناخته می‌شود. دو متغیر T_{ij} و D_{ij} اغلب **مزدوج‌های انرژی** نامیده می‌شوند.

برای مطالعه‌ی ترمومکانیکی ما، انرژی ورودی به سیستم R هم از مرز ∂R و هم از منابع داخلی را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$Q = -\int_{\partial R} \boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{n}\, ds + \int_R \rho h\, dv \tag{۱۰۲}$$

که در آن $\boldsymbol{q}$ نرخ شار حرارت در واحد مساحت و h منبع انرژی ویژه (تأمین) در واحد جرم است.

بیانیه‌ی کلی تعادل انرژی:

$$\dot{K} + \dot{E} = P_{ext} + Q \quad (۱۰۳)$$

پس از جایگذاری نتایج مشخص برای قطعات مختلف انرژی و استفاده از قضایای انتقال رینولدز و واگرایی، و نهایتاً استفاده از قضیه‌ی محلی‌سازی:

$$\rho\dot{\varepsilon} - T_{ij}D_{ij} + q_{i,i} - \rho h = 0 \quad (۱۰۴)$$

یا در نماد بردار:

$$\rho\dot{\varepsilon} - \mathrm{tr}(\underline{\underline{T}}\,\underline{\underline{D}}) + \nabla \cdot \boldsymbol{q} - \rho h = 0 \quad (۱۰۵)$$

که شکل دیفرانسیل معادله‌ی تعادل انرژی برای مکانیک پیوستار ترمومکانیکی است.

۶.۷ قانون دوم ترمودینامیک - نابرابری آنتروپی

قانون اول ترمودینامیک که در بخش قبل توسعه یافت، می‌تواند به‌عنوان اندازه‌گیری تبدیل‌پذیری گرما و کار در حین حفظ تعادل انرژی مناسب تلقی شود. با این حال، این عبارت هیچ محدودیتی در جهت چنین فرآیندهای تبدیل‌پذیری ارائه نمی‌دهد.

آنتروپی به‌عنوان متغیری تعریف می‌شود که می‌تواند به‌عنوان اندازه‌گیری بی‌نظمی میکروسکوپی یا اختلال سیستم پیوستار تفسیر شود. در ترمودینامیک کلاسیک، معمولاً به‌عنوان تابع حالتی مرتبط با انتقال حرارت تعریف می‌شود.

برای فرآیند برگشت‌پذیر، آنتروپی در واحد جرم $s(x,t)$ معمولاً از رابطه‌ی زیر تعریف می‌شود:

$$ds = \left(\frac{\delta q}{\theta}\right)_{rev} \quad (۱۰۶)$$

که در آن θ دمای مطلق (مقیاس کلوین، همیشه مثبت) و δq ورودی حرارت در واحد جرم بر روی فرآیند برگشت‌پذیر است.

برای فرآیندهای برگشت‌ناپذیر (دنیای واقعی)، مشاهدات نشان می‌دهند که:

$$\oint \left(\frac{\delta q}{\theta}\right)_{irrev} < 0 \quad (۱۰۷)$$

از آنجا که $\delta q/\theta$ را به‌عنوان ورودی آنتروپی از ورودی حرارت δq تفسیر می‌کنیم، نتیجه می‌گیریم که بر روی یک چرخه‌ی برگشت‌ناپذیر، ورودی آنتروپی خالص منفی است. این به معنای آن است که فرآیندهای اتلافی برگشت‌ناپذیر تولید آنتروپی داخلی مثبت ایجاد می‌کنند.

برای استفاده در مکانیک پیوسته، قانون دوم معمولاً در شکل متفاوتی بازنویسی می‌شود. برای گروه ثابتی از ذرات پیوستار R_m که ناحیه‌ی فضایی R را اشغال می‌کنند:

نرخ ورودی آنتروپی:

$$\int_R \frac{\rho h}{\theta}\, dv - \int_{\partial R} \frac{\boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{n}}{\theta}\, ds \quad (۱۰۸)$$

طبق رابطه قانون دوم، نرخ افزایش آنتروپی در R باید بزرگ‌تر یا برابر (برای حالت برگشت‌پذیر) با نرخ ورودی آنتروپی باشد:

$$\frac{D}{Dt}\int_{R_m} \rho s\, dv \geq \int_R \frac{\rho h}{\theta}\, dv - \int_{\partial R} \frac{\boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{n}}{\theta}\, ds \quad (۱۰۹)$$

با استفاده از روش‌های معمول روی فرمول‌بندی‌های انتگرالی و قضیه‌ی واگرایی:

$$\int_R \left[\rho\dot{s} - \frac{\rho h}{\theta} + \frac{1}{\theta}\left(\frac{q_i}{\theta}\right)_{,i}\right] dv \geq 0 \qquad (۱۱۰)$$

که منجر به:

$$\rho\dot{s} \geq \frac{\rho h}{\theta} - \frac{1}{\theta^2} q_i \theta_{,i} \qquad (۱۱۱)$$

روابط (؟؟) و (؟؟) به‌عنوان شکل‌های انتگرالی و دیفرانسیل **نابرابری کلاؤزیوس-دوهم** شناخته می‌شوند که اشکالی از قانون دوم ترمودینامیک برای کاربردهای مکانیک پیوسته هستند.

با استفاده از معادله‌ی انرژی، نابرابری آنتروپی را می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد:

$$\rho(\theta\dot{s} - \dot{\varepsilon}) + T_{ij}D_{ij} - \frac{1}{\theta} q_i \theta_{,i} \geq 0 \qquad (۱۱۲)$$

که گاهی به‌عنوان **نابرابری کلاؤزیوس-دوهم کاهش یافته** یا **نابرابری اتلاف** شناخته می‌شود.

فصل ۴ — مرور مدل های مواد

۱ نظریه‌های ساختاری خطی کلاسیک

۱.۱ اصول بنیادی

عینیت

روابط ساختاری باید نسبت به تبدیل مختصات ناوردا باشند.

تقارن مادی

خواص مادی باید گروه تقارن مادی را منعکس کنند.

سازگاری ترمودینامیکی

روابط ساختاری باید نابرابری کلاؤزیوس-دوهم را رعایت کنند.

۲.۱ الاستیسیته‌ی خطی

قانون تعمیم یافته‌ی هوک

برای مواد الاستیک خطی:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \mathbb{C} : \varepsilon \tag{۱}$$

که $\mathbb{C}$ تانسور مدول‌های الاستیک مرتبه‌ی چهارم است.

مواد همسان

برای مواد الاستیک همسان:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \lambda(\mathrm{tr}\varepsilon)\underline{\underline{I}} + 2\mu\varepsilon \tag{۲}$$

که λ و μ ثابت‌های لامه هستند.

مدول‌های مهندسی:

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \quad \text{(مدول یانگ)} \tag{۳}$$

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \quad \text{(نسبت پواسون)} \tag{۴}$$

$$G = \mu \quad \text{(مدول برشی)} \tag{۵}$$

$$K = \lambda + \frac{2\mu}{3} \quad \text{(مدول حجمی)} \tag{۶}$$

۳.۱ رفتار ویسکوز خطی

سیالات نیوتونی

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} = -p\underline{\underline{\boldsymbol{I}}} + 2\mu\underline{\underline{\boldsymbol{D}}} + \lambda_v(\nabla \cdot \boldsymbol{v})\underline{\underline{\boldsymbol{I}}} \tag{۷}$$

که $\underline{\underline{\boldsymbol{D}}} = \frac{1}{2}(\nabla\boldsymbol{v} + (\nabla\boldsymbol{v})^{\mathrm{T}})$ تانسور نرخ تغییرشکل است.

۴.۱ ویسکوالاستیسیته‌ی خطی

مدل‌های مکانیکی

مدل ماکسول:

$$\frac{d\sigma}{dt} + \frac{E}{\eta}\sigma = E\frac{d\varepsilon}{dt} \tag{۸}$$

مدل کلوین:

$$\sigma + \frac{\eta}{E}\frac{d\sigma}{dt} = \eta\frac{d\varepsilon}{dt} \tag{۹}$$

۲ نظریه‌های میدان جفت شده

۱.۲ چارچوب ترمودینامیکی

میدان‌های جفت شده نیازمند چارچوب ترمودینامیکی منسجمی هستند که اصول بنیادی حاکم بر اثرات جفت‌شدگی را تعریف کند.

۲.۲ ترموالاستیسیته‌ی خطی

معادلات جفت شده

معادله‌ی حرکت:

$$\nabla \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} + \rho\boldsymbol{b} = \rho\ddot{\boldsymbol{u}} \tag{۱۰}$$

معادله‌ی انرژی:

$$\rho c_\varepsilon \dot{T} = k\nabla^2 T + T_0\alpha_{ij}\dot{\sigma}_{ij} + \rho r \tag{۱۱}$$

رابطه‌ی ساختاری:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} - \alpha_{ij}(T - T_0) \tag{۱۲}$$

۳.۲ پوروالاستیسیته

نظریه‌ی بیوت

معادله‌ی تعادل:

$$\nabla \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}' + \alpha \nabla p + \rho \boldsymbol{b} = \rho \ddot{\boldsymbol{u}} \qquad (۱۳)$$

معادله‌ی انتشار:

$$\nabla \cdot \left(\frac{k}{\mu_f} \nabla p \right) = \frac{1}{M} \dot{p} + \alpha \nabla \cdot \dot{\boldsymbol{u}} \qquad (۱۴)$$

که در آن $\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}' = \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} + \alpha p \underline{\underline{\boldsymbol{I}}}$ تنش مؤثر است.

۳ رفتار مادی غیرخطی

۱.۳ چارچوب کلی

رفتار غیرخطی نیازمند تعمیم اصول عینیت، تقارن مادی، و محدودیت‌های ترمودینامیکی است.

۲.۳ فراالاستیسیته

تابع انرژی کرنش

برای مواد فراالاستیک:

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} = 2\rho_0 \frac{\partial W}{\partial \underline{\underline{\boldsymbol{C}}}} \underline{\underline{\boldsymbol{F}}}^{\mathrm{T}} \qquad (۱۵)$$

مدل‌های متداول

مدل نئو-هوکین:

$$W = \frac{\mu}{2}(I_1 - 3) - \mu \ln J + \frac{\lambda}{2}(\ln J)^2 \qquad (۱۶)$$

مدل مونی-ریولین:

$$W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3) + \frac{\kappa}{2}(J - 1)^2 \qquad (۱۷)$$

۳.۳ پلاستیسیته‌ی کلاسیک

معیار تسلیم

معیار فون میزس:

$$f = \sqrt{\frac{3}{2} \underline{\underline{\boldsymbol{s}}} : \underline{\underline{\boldsymbol{s}}}} - \sigma_y = 0 \qquad (۱۸)$$

قانون جریان

قانون جریان انطباقی:

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\lambda}\frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \quad (۱۹)$$

۴ ملاحظات ریزساختاری

۱.۴ عنصر حجمی نماینده

نظریه‌ی همگن‌سازی و جداسازی مقیاس نیازمند تعریف عنصر حجمی نماینده (RVE) است که خواص مؤثر را نمایندگی کند.

۲.۴ نظریه‌ی میکروپولار

درجات آزادی اضافی

علاوه بر جابه‌جایی $\boldsymbol{u}$، میکروچرخش مستقل ϕ در نظر گرفته می‌شود.

معادلات تعادل

تعادل نیرو:

$$\nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}} + \rho \boldsymbol{b} = \rho \ddot{\boldsymbol{u}} \quad (۲۰)$$

تعادل گشتاور:

$$\nabla \cdot \mu + \varepsilon : \underline{\underline{\sigma}} + \rho \boldsymbol{l} = \rho \underline{\underline{\boldsymbol{J}}} \cdot \ddot{\phi} \quad (۲۱)$$

۳.۴ نظریه‌های گرادیان کرنش

برای در نظر گیری اثرات مقیاس طول مادی:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} - l^2 C_{ijkl}\nabla^2 \varepsilon_{kl} \quad (۲۲)$$

که l مقیاس طول مشخصه‌ی مادی است.

۵ مدل‌سازی چندمقیاسه

۱.۵ رویکردهای سلسله‌مراتبی

اطلاعات از مقیاس کوچک‌تر به بزرگ‌تر منتقل می‌شود:

$$\langle \sigma \rangle = \frac{1}{V}\int_V \sigma(\boldsymbol{x})\, dV \quad (۲۳)$$

۲.۵ رویکردهای همزمان

مقیاس‌های مختلف به‌طور همزمان حل می‌شوند.

۶ پیاده‌سازی محاسباتی

۱.۶ روش اجزای محدود

فرمول‌بندی ضعیف

برای مسئله‌ی الاستیسیته:

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \nabla^s \boldsymbol{v}\, d\Omega = \int_{\Omega} \rho \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{v}\, d\Omega + \int_{\Gamma_t} \boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{v}\, d\Gamma \qquad (۲۴)$$

۲.۶ الگوریتم‌های غیرخطی

روش نیوتن- رافسون

برای حل معادلات غیرخطی:

$$\underline{\underline{\boldsymbol{K}}}_t \Delta \boldsymbol{u} = \boldsymbol{R} - \boldsymbol{F}_{int} \qquad (۲۵)$$

که $\underline{\underline{\boldsymbol{K}}}_t$ ماتریس سختی مماسی است.

۷ جمع‌بندی و چشم‌انداز

مکانیک پیوسته چارچوب جامع و قدرتمندی برای درک و پیش‌بینی رفتار مواد در شرایط مختلف فراهم می‌کند. از مفاهیم بنیادی فرضیه‌ی پیوستار تا نظریه‌های پیشرفته چندمقیاسه، این رشته همچنان در حال تکامل است تا نیازهای مهندسی مدرن را برآورده کند.

۱.۷ توسعه‌های آینده

مواد هوشمند و نانومواد.

- توسعه‌ی نظریه‌های ساختاری برای مواد با اثرات اندازه
- مدل‌سازی رفتار چندفعالی در مواد هوشمند
- درنظرگیری اثرات سطحی در مقیاس‌های کوچک

محاسبات عملکرد بالا.

- الگوریتم‌های موازی برای مسائل چندمقیاسه
- استفاده از هوش مصنوعی در پیش‌بینی رفتار مادی
- روش‌های کاهش مدل برای شبیه‌سازی‌های بلادرنگ

کاربردهای نوظهور.

- بیومکانیک و مهندسی بافت
- مواد پایدار و سبز
- کاربردهای فضایی و محیط‌های شدید

مکانیک پیوسته با ترکیب دقت ریاضی، بینش فیزیکی، و قابلیت‌های محاسباتی، همچنان به‌عنوان پایه‌ی اساسی مهندسی مدرن عمل می‌کند و راه را برای نوآوری‌های آینده در علم و فناوری مواد هموار می‌سازد.

منابع

Abeyaratne, R (1987), *Lecture Notes on The Mechanics of Elastic Solids: Volume I: A Brief Review of Some Mathematical Preliminaries*, Cambridge.

Bigoni, D (2012), *Nonlinear solid mechanics: Bifurcation theory and material instability*, Cambridge University Press, Cambridge.

Etse, G & Willam, K (1999), "Failure Analysis of Elastoviscoplastic Material Models," *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 125, 1, pp. 60–69.

Ottosen, NS & Ristinmaa, M (2005), *The mechanics of constitutive modeling*, Elsevier, Amsterdam and London.

Staber, B, Forest, S, Al Kotob, M, Mazière, M & Rose, T (2021), "Loss of ellipticity analysis in non-smooth plasticity," *International Journal of Solids and Structures*, vol. 222-223, p. 111010.