Chapitre n°3

Suites et séries numériques

Table des matières

Pour tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites $u : \left| \begin{array}{l} \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{K} \\ n \longmapsto u(n) = u_n \end{array} \right.$.

1 Suites numériques

1.1 Suites usuelles

Suite arithmétique : $u_0 \in \mathbb{K}$ et $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + r}$, où $r \in \mathbb{K}$ est la raison.

Propriété 1. *Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r, alors on a :*

$$\forall n \geq p, \quad u_n = u_p + (n-p)r \quad \textit{et} \quad \sum_{k=p}^{n} u_k = (n-p+1)\left(\frac{u_p + u_n}{2}\right).$$

Suite géométrique : $u_0 \in \mathbb{K}$ et $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = q u_n}$, où $q \in \mathbb{K}$ est la raison.

Propriété 2. *Si (u_n) est une suite géométrique de raison q, alors on a :*

$$\forall n \geq p, \quad u_n = u_p q^{n-p} \quad \textit{et, si } q \neq 1, \quad \sum_{k=p}^{n} u_k = u_p \left(\frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}\right).$$

Suite arithmético-géométrique : $u_0 \in \mathbb{K}$ et $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = au_n + b}$, où $a \neq 1$ et $b \neq 0$.

Point méthode : Dans ce cas, pour déterminer le terme général u_n :

1. on résout $\ell = a\ell + b$, on pose $v_n = u_n - \ell$, puis on montre que (v_n) est géométrique :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = u_{n+1} - \ell = (au_n + b) - (a\ell + b) = a(u_n - \ell) = av_n\,;$$
2. on en déduit l'expression de v_n puis celle de u_n en fonction de n :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = v_0 a^n = (u_0 - \ell)a^n \quad \text{et} \quad u_n = v_n + \ell = (u_0 - \ell)a^n + \ell.$$

Exercice 1. *Un ascenseur en marche initialement, peut tomber en panne :*

– *si il est en marche à l'instant n, la probabilité qu'il fonctionne à l'instant $n+1$ vaut $p \in]0,1[$;*
– *si il est en panne à l'instant n, la probabilité qu'il soit en panne à l'instant $n+1$ vaut $q \in]0,1[$.*

Déterminer la probabilité p_n qu'il fonctionne à l'instant n, et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$.

Suite récurrente linéaire d'ordre 2 : $u_0, u_1 \in \mathbb{K}$ et $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n}$, où $b \neq 0$.

Théorème 1. *On note (E_c) l'équation caractéristique $r^2 = ar + b$, d'inconnue $r \in \mathbb{C}$.*

— *Si (E_c) admet une racine double r_0, alors il existe $(A,B) \in \mathbb{K}^2$ tel que*
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (An + B)r_0^n.$$
— *Si (E_c) admet deux racines simples r_1 et r_2, alors il existe $(A,B) \in \mathbb{K}^2$ tel que*
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = Ar_1^n + Br_2^n.$$
— *Si (u_n) est **réelle** et si (E_c) admet deux racines complexes conjuguées $\rho e^{\pm i\theta}$,*

alors il existe $(A,B) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \rho^n\left(A\cos(n\theta) + B\sin(n\theta)\right)$.

Exercice 2. *Soit (u_n) définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2u_{n+1} - 4u_n$. Calculer u_n.*

1.2 Limite d'une suite (u_n) réelle

Définition 1. *On dit que (u_n) admet pour limite ℓ, et on note $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, si*

1. *$\ell \in \mathbb{R}$, et on a :* $\forall \varepsilon > 0,\ \exists p \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq p \Longrightarrow |u_n - \ell| \leq \varepsilon$;
2. *$\ell = +\infty$, et on a :* $\forall A > 0,\ \exists p \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq p \Longrightarrow u_n \geq A$;
3. *$\ell = -\infty$, et on a :* $\forall A < 0,\ \exists p \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq p \Longrightarrow u_n \leq A$.

Cas complexe : Pour une suite (z_n) à valeurs complexes, on a :

$$z_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} z \in \mathbb{C} \Longleftrightarrow |z_n - z| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \Longleftrightarrow \left(\mathrm{Re}(z_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{Re}(z) \text{ et } \mathrm{Im}(z_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{Im}(z) \right).$$

Définition 2. *On dit que (u_n) converge si elle admet une limite finie $\ell \in \mathbb{R}$.*

On dit que (u_n) diverge si elle admet une limite infinie ou si elle n'admet pas de limite.

Propriété 3. *1. Si (u_n) admet une limite ℓ alors cette limite est unique et notée $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.*

2. Si (u_n) admet pour limite ℓ alors toute suite extraite de (u_n) admet pour limite ℓ.

3. Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) admettent pour limite ℓ alors (u_n) admet pour limite ℓ.

Propriété 4. *1. Si (u_n) converge alors (u_n) est bornée.* ***(la réciproque est fausse)***

2. Si (u_n) converge vers $\ell > 0$ alors $u_n > 0$ à partir d'un certain rang p (c.à.d. pour $n \geq p$).

Remarque : Comme pour les fonctions, une suite est bornée ssi sa valeur absolue est majorée, on a les théorèmes d'encadrement pour les limites finies (gendarmes), de majoration ou de minoration pour les limites infinies, et de passage à la limite dans une inégalité **large**.

Les relations de comparaison pour les suites lorsque $n \longrightarrow +\infty$ sont définies comme pour les fonctions et vérifient les mêmes propriétés.

Théorème 2. *(croissances comparées) Pour tous réels $\alpha > 0$, $\gamma > 0$ et $q > 1$ on a :*

$$\ln^{\gamma}(n) \underset{+\infty}{=} o\left(n^{\alpha}\right), \quad n^{\alpha} \underset{+\infty}{=} o\left(q^{n}\right), \quad q^{n} \underset{+\infty}{=} o\left(n!\right) \quad \text{et} \quad n^{\alpha} \underset{+\infty}{=} o\left(n!\right).$$

Exercice 3. *Pour $n \geq 3$, on considère la fonction f_n définie sur $[1, +\infty[$ par $f_n(x) = x^n - x - n$.*

1. *Prouver que f_n admet un zéro unique, que l'on notera x_n.*
2. *Pour $a > 1$, prouver que $f_n(a) > 0$ pour n suffisamment grand.*

   En déduire que la suite (x_n) converge et déterminer sa limite ℓ.
3. *On pose $x_n = \ell + \varepsilon_n$. Déterminer un équivalent de ε_n lorsque n tend vers $+\infty$.*

Théorème 3. *(limite monotone) Toute suite réelle monotone admet une limite (finie ou infinie) :*

1. *Si (u_n) est croissante et non majorée alors* $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ *;*
2. *Si (u_n) est décroissante et non minorée alors* $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$ *;*
3. *Si (u_n) est croissante et majorée alors (u_n) converge vers* $\ell = \sup\{\, u_n,\ n \in \mathbb{N} \,\}$ *;*
4. *Si (u_n) est décroissante et minorée alors (u_n) converge vers* $\ell = \inf\{\, u_n,\ n \in \mathbb{N} \,\}$.

Exercice 4. *Étudier la monotonie et la convergence de la suite (u_n) définie par :*

1. $u_0 = 1$ *et* $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = (u_n)^2 + u_n$ *;*
2. $u_0 \in]1, +\infty[$ *et* $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{\ln(u_n)}$ *;*
3. $u_0 = 1$ *et* $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{1}{1 + u_n}$.

Point méthode : Pour étudier (u_n) définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$, on peut :

1. Chercher les points fixes de f, solutions de $f(x) = x$ et étudier le signe de $x \mapsto f(x) - x$;

   Cela peut aider à étudier le signe de $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$ et la monotonie de (u_n).

2. Étudier les variations de f et trouver un intervalle I stable par f (tel que $f(I) \subset I$) ;

   Si $u_0 \in I$ alors, par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$.

3. Si la suite (u_n) est monotone alors elle admet une limite finie ou infinie (limite monotone) ;

   Si (u_n) converge vers un réel ℓ, et si I est fermé alors $\ell \in I$ (passage à la limite) ;

   Si, de plus, f est continue en ℓ alors $\ell = f(\ell)$;

   Si cette équation n'admet pas de solution dans I alors (u_n) diverge.

Théorème 4. *(Suites adjacentes) Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles vérifiant :*

1. *(u_n) est croissante, (v_n) est décroissante ;*
2. $u_n - v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Alors (u_n) et (v_n) convergent et ont la même limite $\ell \in \mathbb{R}$. De plus, $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq \ell \leq v_n$.

Remarque : $|u_n - \ell| \leq |u_n - v_n|$ et si $|u_n - v_n| \leq 10^{-k}$ alors u_n est "proche" de ℓ à 10^{-k} près.

Application : (approximation décimale d'un réel, à savoir)

La partie entière de $x \in \mathbb{R}$, notée $\lfloor x \rfloor$, est le plus grand entier inférieur ou égal à x :

$$\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad \lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1 \quad (\text{ou } x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x).$$

Le nombre $x - \lfloor x \rfloor$ est appelé partie décimale de x et vérifie $0 \leq x - \lfloor x \rfloor < 1$.

Le nombre $\underline{x}_n = \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$ est une approximation décimale par défaut de x à 10^{-n} près.

Le nombre $\overline{x}_n = \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor + 1}{10^n}$ est une approximation décimale par excès de x à 10^{-n} près.

Exercice 5. *Montrer que $(\underline{x}_n)$ et $(\overline{x}_n)$ sont deux suites adjacentes, qui convergent vers x.*

2 Séries numériques

2.1 Généralités sur les séries

Définition 3. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$ (réelle ou complexe). Pour $N \in \mathbb{N}$, on pose*

$$S_N = u_0 + u_1 + \cdots + u_N = \sum_{n=0}^{N} u_n.$$

- *On appelle série de terme général u_n la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$, notée $\sum u_n$.*
- *On appelle somme partielle d'ordre N de la série $\sum u_n$ la somme $S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n$.*
- *On dit que la série $\sum u_n$ converge (CV) ssi la suite (S_N) converge.*
  Dans ce cas, on appelle somme de la série $\sum u_n$ la limite de (S_N), notée $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.
- *On dit que la série $\sum u_n$ diverge (DV) ssi la suite (S_N) diverge (c.à.d. ne converge pas).*

Remarque : Si $(u_n)_{n\geq p}$ est définie à partir du rang p, la série de terme général u_n est notée $\sum_{n\geq p} u_n$.

Théorème 5. *(et définition) Si $\sum u_n$ converge alors $\forall N \in \mathbb{N}$, $S = S_N + R_N$, où*

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n, \quad S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n \quad \text{et} \quad R_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ est le reste d'ordre } N \text{ de la série } \sum u_n.$$

Exercice 6. *Calculer la somme partielle d'ordre N de la série* $\sum 2^{n+1}3^{2-n}$.
En déduire qu'elle converge, la valeur de sa somme et celle de son reste d'ordre N.

Théorème 6. *(condition nécessaire de convergence) Soit* $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

Si la série $\sum u_n$ *converge alors la suite* (u_n) *converge vers* 0 .

Autrement dit, si (u_n) *ne converge pas vers* 0 *alors* $\sum u_n$ *diverge (grossièrement).*

⚠ **Réciproque fausse :** $\dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ **mais** $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ **diverge (cf. la suite).**

Exercice 7. *Montrer que les séries suivantes divergent : a)* $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n^3-2n+1}{10n^3-3}$; *b)* $\displaystyle\sum_{n\geq 0}(-1)^n$.

Propriété 5. *(linéarité de la somme en cas de convergence) Soient* $(u_n), (v_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

Si $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *convergent, et si* $\lambda \in \mathbb{K}$,

alors $\sum(u_n + \lambda v_n)$ *converge et a pour somme* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(u_n + \lambda v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

Cas particuliers : Si $\sum u_n$ converge et $\lambda \in \mathbb{K}$ alors $\sum \lambda u_n$ converge.

Si $\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ converge alors $\sum(u_n + v_n)$ converge.

Si $\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ diverge alors $\sum(u_n + v_n)$ diverge.

⚠ **Si $\sum u_n$ DV et $\sum v_n$ DV alors on ne peut rien dire, en général, pour $\sum(u_n + v_n)$.**

2.2 Séries usuelles

Théorème 7. *(séries géométriques) Soit* $q \in \mathbb{C} \backslash \{1\}$.

La série géométrique $\sum q^n$ *a pour somme partielle d'ordre N,* $S_N = \displaystyle\sum_{n=0}^{N} q^n = \frac{1-q^{N+1}}{1-q}$.

La série géométrique $\sum q^n$ *converge ssi* $|q| < 1$. *En cas de convergence,*

sa somme est $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ *et le reste d'ordre N,* $R_N = \displaystyle\sum_{n=N+1}^{+\infty} q^n = \frac{q^{N+1}}{1-q}$.

Application : (sommes géométriques, à savoir)

$$\text{Si } |q| < 1 \text{ et } b \in \mathbb{C}, \text{ alors } \sum_{n=p}^{+\infty} bq^n = \frac{bq^p}{1-q}$$

Exercice 8. *Déterminer l'ensemble des suites réelles (u_n) vérifiant :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 2u_{n+2} = -5u_{n+1} + 3u_n,\ \textit{et} \sum u_n \textit{ converge.}$$

Théorème 8. *(comparaison suite-série) Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.*

La série télescopique $\sum (u_{n+1} - u_n)$ converge ssi la suite (u_n) converge.

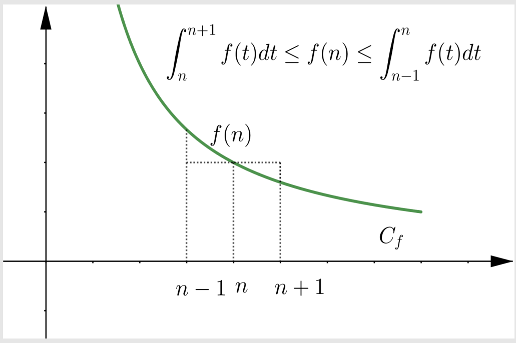
En cas de convergence, sa somme est $\displaystyle\sum_{n=p}^{+\infty}(u_{n+1} - u_n) = \ell - u_p$, où $\ell = \lim_{n\to+\infty} u_n$.

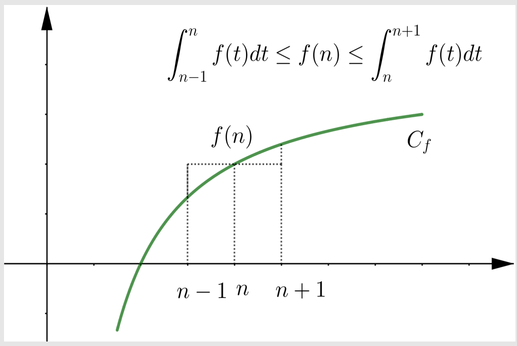
Exercice 9. *Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ converge et calculer sa somme.*

Théorème 9. *(comparaison série-intégrale) Soit $f : [p, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ continue, **positive**, décroissante.*

La série $\sum f(n)$ converge ssi $\displaystyle\int_p^x f(t)\mathrm{d}t$ admet une limite finie lorsque $x \longrightarrow +\infty$.

Point méthode : Pour déterminer un équivalent de la suite des restes en cas de convergence ou de la suite des sommes partielles en cas de divergence, on utilise une comparaison série-intégrale :





Si $f : [p, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ est continue, **positive** et décroissante, par sommation et la relation de Chasles,

on a : $\displaystyle\forall N \geq p+1,\quad \int_{p+1}^{N+1} f(t)\mathrm{d}t \leq \sum_{n=p+1}^{N} f(n) \leq \int_p^N f(t)\mathrm{d}t.$

Application : (série harmonique, à savoir) $\boxed{\sum \frac{1}{n} \text{ diverge} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \underset{N\to+\infty}{\sim} \ln(N)}$.

Exercice 10. *Montrer que la série* $\sum \frac{1}{n\ln^2(n)}$ *converge.*

Théorème 10. *(séries de Riemann) Soit* $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\text{La série de Riemann } \sum \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge} \quad \text{ssi} \quad \alpha > 1.$$

Définition 4. *On appelle série alternée toute série de la forme* $\sum(-1)^n u_n$,

où (u_n) *est une suite* ***réelle de signe constant****.*

Théorème 11. *(séries alternées) Soit* (u_n) *une suite réelle.*

Si (u_n) *est décroissante et converge vers* 0 *alors la série alternée* $\sum(-1)^n u_n$ *converge.*

Dans ce cas, pour tout $N \in \mathbb{N}$, *sa somme* S *est encadrée par ses sommes partielles* S_N *et* S_{N+1}

et $\left|\sum_{n=N+1}^{+\infty} (-1)^n u_n\right| = |S - S_N| \leq |S_{N+1} - S_N| = u_{N+1}$.

Application : (séries de Riemann alternées, à savoir) $\boxed{\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \text{ converge} \quad \text{ssi} \quad \alpha > 0}$

Exercice 11. *Calculer* $\int_0^1 x^{2n}\mathrm{d}x$. *En déduire la convergence et la somme de la série* $\sum \frac{(-1)^n}{2n+1}$, *puis une fonction Python d'argument* k *qui retourne une valeur approchée de* π *à* 10^{-k} *près.*

2.3 Séries réelles à termes positifs

Théorème 12. *(limite monotone) Soit* (u_n) *une suite* ***réelle positive****.*

La série $\sum u_n$ *converge* *ssi* *la suite de ses sommes partielles* (S_N) *est majorée.*

En cas de convergence, $\forall N \in \mathbb{N}, \quad S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Exercice 12. *Soit* $\sum u_n$ *une série à termes positifs, convergente. On pose* $v_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

1. *Montrer que* $\sum_{k=1}^{n} k u_k = \sum_{k=0}^{n-1} v_k - n v_n$.
2. *Montrer que* $\sum n u_n$ *et* $\sum v_n$ *sont de même nature, de sommes égales si elles convergent.*

Théorème 13. *(comparaison de séries à termes positifs, C.S.T.P.)*

Soit (u_n) *et* (v_n) *deux suites* ***réelles*** *vérifiant* $\mathbf{0} \leq u_n \leq v_n$ *à partir d'un certain rang* p.

1. *Si la série* $\sum v_n$ *converge alors la série* $\sum u_n$ *converge.*

   Si les deux séries convergent *alors on a :* $\sum_{n=p}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=p}^{+\infty} v_n$.
2. *Si la série* $\sum u_n$ *diverge alors la série* $\sum v_n$ *diverge.*

Remarque : Pour la nature des séries, on a un résultat analogue si $u_n \underset{+\infty}{=} \mathcal{O}(v_n)$ ou $u_n \underset{+\infty}{=} o(v_n)$.

Application : (comparaison avec une série de Riemann ou règle du n^α, à savoir)

Soit (u_n) **réelle positive** à partir d'un certain rang. Par C.S.T.P., on a :

1. si $\alpha > 1$ et $n^\alpha u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}_+$ alors $u_n \underset{+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ et $\sum u_n$ CV ;
2. si $\alpha \leq 1$ et $n^\alpha u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$ alors $\frac{1}{n^\alpha} \underset{+\infty}{=} \mathcal{O}(u_n)$ et $\sum u_n$ DV.

Exercice 13. *Étudier la nature des séries* $\sum \mathrm{e}^{-n^2}$, $\sum \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$ *et* $\sum \frac{1}{n^\alpha \ln(n)}$.

Théorème 14. *(comparaison de séries à termes positifs équivalents)*

Soit (u_n) *et* (v_n) *deux suites* ***réelles*** *telles que* $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ *et* $\boldsymbol{v_n > 0}$ *pour* $n \geq p$.

Alors les séries $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *sont de même nature (c.à.d. les deux CV ou les deux DV).*

Remarque : Ce résultat est encore vrai pour des séries à **termes négatifs équivalents**.

⚠ **Résultat faux si les suites ne sont pas de signe constant : si $\alpha > 0$ alors**

$$\frac{(-1)^n}{n^\alpha} + \frac{1}{n^{2\alpha}} \sim \frac{(-1)^n}{n^\alpha}, \quad \sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \textbf{ CV, mais } \sum \left(\frac{(-1)^n}{n^\alpha} + \frac{1}{n^{2\alpha}}\right) \textbf{ CV ssi } \alpha > \frac{1}{2}.$$

Exercice 14. *Prouver la convergence de :*

1. *la série de terme général* $u_n = \dfrac{1-2n}{3n^2-2n+1}$ *;*
2. *la suite de terme général* $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$.

2.4 Séries absolument convergentes

Définition 5. *Soit (u_n) une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$ (réelle ou complexe).*

La série $\sum u_n$ est dite absolument convergente (ACV) ssi la série $\sum |u_n|$ est convergente.

Remarque : Une série à termes positifs convergente est absolument convergente.

Théorème 15. *Soit (u_n) une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$.*

*Si la série $\sum u_n$ est **absolument convergente** alors la série $\sum u_n$ est convergente,*

et on a : $\displaystyle\left|\sum_{n=p}^{+\infty} u_n\right| \leq \sum_{n=p}^{+\infty} |u_n|$ *(inégalité triangulaire).*

⚠ **Une série peut-être CV sans être ACV (semi convergence) :** $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{n}$ CV mais $\displaystyle\sum \frac{1}{n}$ DV.

Théorème 16. *(comparaison de séries absolument convergentes) Soient $(u_n), (v_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.*

1. *Si $|u_n| \leq |v_n|$ pour $n \geq p$, ou $u_n \underset{+\infty}{=} \mathcal{O}(v_n)$, ou $u_n \underset{+\infty}{=} o(v_n)$, alors on a :*

   si $\sum v_n$ est absolument convergente alors $\sum u_n$ est absolument convergente ;

2. *Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, alors on a :*

   $\sum v_n$ est absolument convergente ssi $\sum u_n$ est absolument convergente.

Application : (comparaison avec un série de Riemann, règle du n^α version ACV, à savoir)

> Si $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ vérifie $n^\alpha |u_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}_+$, avec $\alpha > 1$, alors $u_n = \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right)$ et $\sum u_n$ est ACV.

Exercice 15. *Étudier la nature des séries* $\displaystyle\sum \frac{1+\mathrm{i}\sin(n)}{1+2^n}$ *et* $\displaystyle\sum \frac{(1+\mathrm{i})\sin(1/n)}{(\sqrt{n+3}-1)\ln(n)}$.

Théorème 17. *(règle de d'Alembert)*

Soit (u_n) à valeurs dans $\mathbb{K}$, ne s'annulant pas à partir d'un certain rang, et telle que :

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}.$$

1. *Si $\ell < 1$ alors la série $\sum u_n$ converge (absolument).*
2. *Si $\ell > 1$ alors la série $\sum u_n$ diverge (grossièrement).*
3. *Si $\ell = 1$, on ne peut rien dire sur la convergence de la série $\sum u_n$, en général.*

Remarque : Mêmes conclusions si (u_n) est **réelle de signe constant** et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Exercice 16. *Étudier la nature des séries* $\displaystyle\sum \frac{n!}{n^n}$ *et* $\displaystyle\sum \frac{z^n}{n!}$ *($z \in \mathbb{C}$).*

2.5 Produit de Cauchy

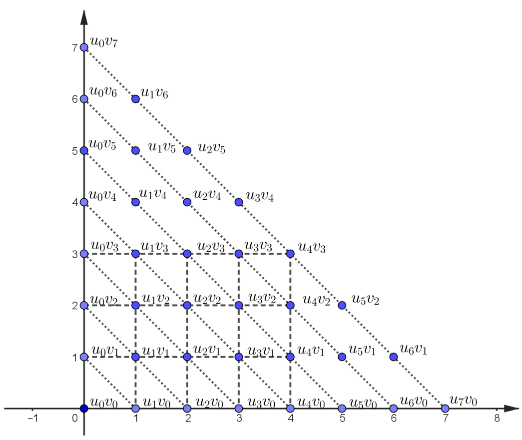
$$\left(\sum_{i=0}^{N} u_i\right)\left(\sum_{j=0}^{M} v_j\right)$$

$$= (u_0v_0 + \cdots + u_0v_M) + \cdots + (u_Nv_0 + \cdots + u_Nv_M)$$

(sommation en colonne)

$$= (u_0v_0 + \cdots + u_Nv_0) + \cdots + (u_0v_M + \cdots + u_Nv_M)$$

(sommation en ligne)



$$= (u_0v_0) + (u_0v_1 + u_1v_0) + \cdots + (u_0v_M + \cdots + u_Mv_0) + \cdots + (u_Nv_M) \qquad \text{(en diagonale)}$$

Définition 6. *On appelle produit de Cauchy des séries* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$,

la série $\sum w_n$ *de terme général* $w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} u_{n-k} v_k$.

Théorème 18. *(produit de Cauchy de séries absolument convergentes)*

Si $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ ***convergent absolument*** *alors leur produit de Cauchy converge*

(absolument) et a pour somme $\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$, *où* $w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$.

Remarque : Même conclusion si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont des séries à **termes positifs** qui convergent.

Exercice 17. $a, b \in]0,1[$. *Montrer que la série de t.g.* $u_n = \sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k}$ *converge et calculer sa somme.*

Point méthode : Pour étudier la nature de $\sum u_n$ de sommes partielles S_N et de restes R_N :

1. Si (u_n) ne converge pas vers 0 : la série diverge grossièrement.
2. Si la série est à termes réels positifs :
   (a) Appliquer le théorème de la limite monotone à la suite croissante (S_N).
   (b) Faire une comparaison avec une série usuelle ($\sim$, $\leq$, $\geq$, o).
   (c) Utiliser la régle de d'Alembert.
   (d) Faire une comparaison série-intégrale.
   (e) Faire apparaître un produit de Cauchy de séries à termes positifs convergentes.
3. Si la série est à termes réels de signe quelconque :
   (a) Étudier la convergence de $\sum |u_n|$ comme ci-dessus (absolue convergence).
   (b) Utiliser un développement asymptotique et la linéarité de la somme.
   (c) Reconnaître une série alternée ($u_n = (-1)^n a_n$ avec $a_n \searrow 0$)
4. Si la série est à termes complexes :
   (a) Étudier la convergence de $\sum |u_n|$ comme ci-dessus (absolue convergence).
   (b) La série complexe $\sum u_n$ converge ssi les séries réelles $\sum \mathrm{Re}(u_n)$ et $\sum \mathrm{Im}(u_n)$ convergent.
5. Pour calculer sa somme : Reconnaître une série géométrique, télescopique, un produit de Cauchy ...