Математический Анализ
2 семестр

Данил Заблоцкий

10 апреля 2023 г.

Оглавление

Глава 1

Дифференциальное исчисление

1.1 Первообразная и неопределенный интеграл

Определение 1.1.1 (Первообразная функция)**.** Пусть X - промежуток, $f : X \to \mathbb{R}$. Функция $F(x)$ называется **первообразной** $f(x)$, если производная $F'(x) = f(x)$, при этом $F(x)$ дифференцируема и непрерывна.

Пример 1. $f(x) = 2x \implies F(x) = x^2$. В самом деле, $F'(x) = f(x)$.

Утверждение 1.1.1. (О первообразной)

1. Если $F(x)$ - первообразная функции $f(x)$ на промежутке X, и $\varPhi(x) = F(x) + C,\ c \in \mathbb{R}$, то $\varPhi(x)$ - тоже первообразная.
2. Если $F(x)$ и $\varPhi(x)$ - две первообразные для $f(x)$ на промежутке X, то $\exists C = const,\ c \in \mathbb{R}$ такая, что $\varPhi(x) = F(x) + C$.

Доказательство. (Утверждения о первообразной)

1. $\Phi'(x) = (F(x) + C)' = F'(x) = f(x) \implies \Phi(x)$ - первообразная для $f(x)$.
2. Так как $F(x)$ и $\Phi(x)$ - первообразные для $f(x)$, то $F'(x) = f(x), \Phi'(x) = f(x)$. Рассмотрим функцию $\phi = \Phi(x) - F(x),\ \forall x \in X$: $\phi'(x) = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$. Рассмотрим $\forall x_1, x_2 \in X$, по теореме Лагранжа, $\exists \xi \in (x_1, x_2) :\ \phi(x_1) - \phi(x_2) = \phi'(\xi)(x_1 - x_2) = 0 \implies \phi(x_1) = \phi(x_2) \implies \phi(x) = const$ для $\forall x \in X$.

$\square$

Определение 1.1.2 (Неопределенный интеграл)**.** Совокупность всех первообразных для функции $f(x)$ на промежутке X называется **неопределенным интегралом** и обозначается:

$$\int f(x)dx$$

Таким образом, $\int f(x)dx = \{F(x) + C$, где $F'(x) = f(x),\ C \in \mathbb{R}\}$, или:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Замечание. (Для неопределенного интеграла)

- $(\int f(x)dx)'_x = (F(x) + C)'_x = F'(x) = f(x)$;
- $d(\int f(x)dx) = d(F(x) + C) = (F(x) + C)'dx = F'(x)dx = f(x)dx$;
- $\int d(F(x)) = \int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x) + C,\ C \in \mathbb{R}$.

Определение 1.1.3 (интегрирование)**.** Операция нахождения первообразной функции $f(x)$ называется ее **интегрированием**.

Утверждение 1.1.2. (Основные методы интегрирования)
Пусть $f : X \to \mathbb{R},\ g : X \to \mathbb{R},\ X$ - промежуток:

1. Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{R} = const$, тогда:
   $\int(\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx$.
2. Формула интегрирования по частям:
   $udv = uv - \int udv,\ u = u(x), v = v(x)$.
3. Интегрирование подстановкой:
   Пусть T - промежуток, $X = X(t)$ - дифференцируема на T.
   Тогда $\int f(X(t)) * X'(t)dt = F(X(t)) + C = \int f(x)dx + C$.

Доказательство. (Утверждения об основных методах интегрирования)

1. Возьмем производную по x от обеих частей равенства: $\int(\alpha f(x)+\beta g(x))'_x = \alpha f(x) + \beta g(x) = \alpha F'(x) + \beta G'(x) = \alpha(\int f(x)dx)'_x + \beta(\int g(x)dx)'_x$ - является производной для $\alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx$.
2. Рассмотрим $d(uv) = vdu + udv$: $\int d(uv) = \int vdu + \int udv$. Так как $d(uv) = uv$, то из того, что $\int d(uv) = \int vdu + \int udv \implies \int udv = uv - \int vdu$.
3. $f(X(t)) * X'(t)dt = \int f(X(t))dx(t) = \int f(x)dx = F(x) + C = F(X(t)) + C$; $(F(X(t)) + C)'_t = F'_t * X'_t = f(x) * X'(t) = (\int f(X(t)) * X'(t)dt)'_t$.

□

Пример 2. (Интегрирование функций)

1. $\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C$

2. $\int \ln x dx = \left| \begin{array}{c} u = \ln x,\ dv = dx,\ du = d(\ln x) = \frac{dx}{x} \implies \\ \implies \int dv = \int dx \implies v = x \end{array} \right| = x \ln x - \int x \frac{dx}{x} = x \ln x - x + C$

3. $\int \sqrt{1 - x^2} dx = \left| \begin{array}{c} x = \sin t,\ dx = \\ = d(\sin t) = \cos t dt \end{array} \right| = \int \cos^2 t dt = \int \frac{1}{2}(1 + \cos 2t) dt = \frac{1}{2} \int dt + \frac{1}{2} \int \cos 2t dt = \frac{t}{2} + \frac{1}{4} \int \cos 2t d(2t) = \frac{t}{2} + \frac{1}{4} \sin 2t + C = \frac{\arcsin x}{2} + \frac{1}{2} x \sqrt{1 - x^2} + C$

Пример 3. (Неинтегрируемые функции)

$$\int \frac{x}{\ln x} dx; \quad \int \frac{e^x}{x} dt; \quad \int e^{x^2} dx$$

1.1.1 Интегрирование рациональных дробей

Определение 1.1.4 (Рациональная дробь)**.** Функция вида $\frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x),\ Q(x)$ - многочлены, называется **рациональной дробью**, или рациональной функцией.
Если $\deg P(x) < \deg Q(x)$, то дробь называется **правильной**, иначе - **неправильной**.
Если дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ - неправильная, то ее можно представить в виде $\frac{P(x)}{Q(x)} = M(x) + \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$, где $\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$ - правильная дробь. Поэтому достаточно уметь интегрировать правильную дробь.

Определение 1.1.5 (Простые дроби)**. Простыми дробями** будем называть дроби следующих четырех видов:

1. $\frac{A}{x-a}, \quad A, a \in \mathbb{R}$

2. $\frac{A}{(x-a)^k}, \quad A, a \in \mathbb{R},\ k > 1$

3. $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}, \quad A, B, p, q \in \mathbb{R},\ p^2 - 4q < 0$

4. $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}, \quad A, B, p, q \in \mathbb{R},\ k > 1,\ p^2 - 4q < 0$

1.1.2 Интегрирование рациональных дробей

1. $\int \frac{A}{x-a} dx = A \int \frac{d(x-a)}{x-a} = \left| \begin{array}{c} \int \frac{dt}{t} \\ d(x-a) = dx \end{array} \right| = A \ln |x - a| + C$

2. $\int \frac{A}{(x-a)^k} dx = A \int (x-a)^{-k} dx = A \int (x-a)^{-k} d(x-a) = \left| \begin{array}{c} \int t^n dt = \\ = \frac{t^{n+1}}{n+1} \end{array} \right| = A \frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C = \frac{A}{(x-a)^{k-1}(1-k)} + C$

3. $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \left| \begin{array}{c} x^2+px+q = (x^2+2\frac{p}{2}x+\frac{p^2}{4}) - \frac{p^2}{4}+q = \\ = (x+\frac{p}{2})^2 - \frac{p^2-4q}{4},\ (-\frac{p^2-4q}{4} = C > 0) \end{array} \right| = \int \frac{Ax+B}{(x+\frac{p}{2})^2+C}dx =$
$A\int \frac{xdx}{(x+\frac{p}{2})^2+C} + B\int \frac{dx}{(x+\frac{p}{2})^2+C} = \left| \begin{array}{c} d((x+\frac{p}{2})^2+C) = \\ = 2(x+\frac{p}{2}dx) \end{array} \right| = \dots$

$A\int \frac{xdx}{(x+\frac{p}{2})^2+C} = \frac{A}{2}\int \frac{(2(x+\frac{p}{2})-p)dx}{(x+\frac{p}{2})^2+C} = \frac{A}{2}\int \frac{2(x+\frac{p}{2})dx}{(x+\frac{p}{2})^2+C} - \frac{Ap}{2}\int \frac{dx}{(x+\frac{p}{2})^2+C} = \left| \int \frac{dx}{(x+\frac{p}{2})^2+C} = I \right| = \frac{A}{2}\int \frac{d((x+\frac{p}{2})^2+C)}{(x+\frac{p}{2})^2+C} - \frac{Ap}{2}I = \frac{A}{2}\ln|(x+\frac{p}{2})^2+C| - \frac{Ap}{2}I;$

$I = \frac{dx}{(x+\frac{p}{2})^2+C} = \frac{1}{C}\int \frac{\sqrt{C}d(\frac{x}{\sqrt{C}}+\frac{p}{2\sqrt{C}})}{(\frac{x}{\sqrt{C}}+\frac{p}{2\sqrt{C}})^2+1} = \left| \int \frac{dt}{t^2+1} = \arctan t + C \right| = \frac{1}{\sqrt{C}}\arctan(\frac{x+2p}{2\sqrt{C}}) + C_1;$

$\frac{1}{C}(x+\frac{p}{2})^2 = (\frac{1}{\sqrt{C}})^2(x+\frac{p}{2})^2 = (\frac{1}{\sqrt{C}}(x+\frac{p}{2}))^2 = (\frac{x}{\sqrt{C}+\frac{p}{2\sqrt{C}}})^2;$

$\dots = \frac{A}{2}\ln|(x+\frac{p}{2})^2 - \frac{p^2-4q}{4}| + (B-\frac{Ap}{2})\frac{1}{\sqrt{C}}\arctan(\frac{x+2p}{2\sqrt{C}}) + C_1$

4. $\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}dx = \left| \begin{array}{c} d(x^2+px+q) = \\ = 2x+p \end{array} \right| = \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p)+B-\frac{Ap}{2}}{(x^2+px+q)^k}dx = \frac{A}{2}\int \frac{d(x^2+px+q)}{(x^2+px+q)^k} +$
$(B-\frac{Ap}{2})\int \frac{dx}{((x+\frac{p}{2})^2+(\frac{-p^2+4a}{4}))^k} = \frac{A}{2(1-k)}\frac{1}{(x^2+px+q)^{k-1}} + \frac{(B-\frac{Ap}{2})}{(-\frac{p^2+4q}{a})^k}\int \frac{dx}{((\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{\frac{-p^2+4q}{4}}})^2+1)^k} =$
$\frac{A}{2(1-k)}\frac{1}{(x^2+px+q)^{k-1}} + \frac{(B-\frac{Ap}{2})\frac{\sqrt{-p^2+4q}}{2}}{(\frac{-p^2+4q}{4})^k}\int \frac{d\left(\frac{x+\frac{p}{2}}{\frac{\sqrt{-p^2+4q}}{2}}\right)}{\left(\left(\frac{x+\frac{p}{2}}{\frac{\sqrt{-p^2+4q}}{2}}\right)^2+1\right)^k}$

Таким образом, чтобы вычислить интеграл 4., нужно вычислить интеграл $\int \frac{dt}{(t^2+1)^k} = \left| \begin{array}{c} u = \frac{1}{(t^2+1)^k};\ du = d((t^2+1)^k) = -k(t^2+1)^{-k-1}2tdt \\ dv = dt \implies v = t \end{array} \right| =$
$\frac{t}{(t^2+1)^k} - \int \frac{-2kt^2}{(t^2+1)^{k+1}}dt = \frac{t}{(t^2+1)^k} + 2k(\int \frac{t^2+1}{(t^2+1)^{k+1}}dt - \int \frac{dt}{(t^2+1)^{k+1}});$
$\int \frac{dt}{(t^2+1)^k} = \frac{t}{(t^2+1)^k} + 2k\int \frac{dt}{(t^2+1)^k} - 2k\int \frac{dt}{(t^2+1)^{k+1}} \left| \begin{array}{c} \frac{dt}{(t^2+1)^k} = I_k \\ \frac{dt}{(t^2+1)^{k+1}} = I_{k+1} \end{array} \right|;$
$2kI_{k+1} = \frac{t}{(t^2+1)^k} + (2k-1)I_k; \quad I_{k+1} = \frac{t}{2k(t^2+1)^k} + \frac{2k-1}{2k}I_k,\ k = 1, \dots$

1.1.3 Разложение рациональной дроби на простые

Лемма 1.1.1. Пусть $\frac{P(x)}{Q(x)}$ - правильная рациональная дробь (несократимая). Причем $Q(x) = (x-a)^k Q_1(x)$, где $Q_1(x)$ не делится на $(x-a)$. Тогда $\exists$ многочлен $P_1(x)$ из $\exists A \in \mathbb{R}$: $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{P_1(x)}{(x-a)^{k-1}Q_1(x)}$. При этом дробь (рациональная) $\frac{P_1(x)}{(x-a)^{k-1}Q_1(x)}$ - правильная.

Доказательство. Рассмотрим $\frac{A}{(x-a)^k} + \frac{P_1(x)}{(x-a)^{k-1}Q_1(x)} = \frac{Q_1(x)A+(x-a)P_1(x)}{Q(x)}$. Нужно доказать, что $\frac{Q_1(x)A+(x-a)P_1(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{Q(x)}$.

Отсюда следует, что для выполнения леммы, многочлен $P(x)$ должен расскладываться: $P(x) = Q_1(x) + (x-a)P_1(x) \implies P_1(x) = \frac{P(x)-AQ_1(x)}{x-a}$. Чтобы существовал многочлен $P_1(x)$, нужно, чтобы $P(x) - AQ_1(x)$ делилась на $x-a$. Для этого точка a должна быть корнем $P(x) - AQ_1(x)$, то есть чтобы $P(a) - AQ_1(a) = 0 \implies A = \frac{P(a)}{Q(a)}$; $Q_1(a) \neq 0$ по условию. Таким образом, при $A = \frac{P(a)}{Q_1(a)}$, функция $P_1(x)$ будет являться многочленом $P_1(x) = \frac{P(x)-\frac{P(a)}{Q_1(a)}Q_1(x)}{x-a}$.

Покажем, что дробь $\frac{P_1(x)}{(x-a)^{k-1}Q_1(x)}$ - правильная, то есть $\deg P_1(x) < \deg[(x-a)^{k-1}Q_1(x)]$. Имеем, $P_1(x) = \frac{P(x)-AQ_1(x)}{x-a}$; $\deg P_1(x) \leqslant \max(\deg P(x), \deg Q_1(x)) - 1$. Тогда $\deg P_1(x) \leqslant \deg P(x) - 1 < \deg Q(x) - 1 = \deg[(x-a)^{k-1}Q_1(x)]$.

Если $\deg Q_1(x) \geqslant \deg P(x) \implies \deg P_1(x) \leqslant \deg Q_1(x) - 1 < \deg Q(x) - 1 = \deg[(x-a)^{k-1}Q_1(x)]$. Дробь $\frac{P_1(x)}{(x-a)^{k-1}Q_1(x)}$ - правильная. $\square$

Лемма 1.1.2. Пусть $\frac{P(x)}{Q(x)}$ - правильная дробь. При этом $Q(x) = (x^2+px+q)^k Q_1(x)$, здесь $p^2 - 4q < 0$. Тогда $\exists M, N \in \mathbb{R}$ и $\exists$ многочлен $P_1(x)$:
$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k} + \frac{P_1(x)}{(x^2+px+q)^{k-1}Q_1(x)}$. При этом $Q_1(x)$ не делится на $x^2 + px + q$. Дробь $\frac{P_1(x)}{(x^2+px+q)^{k-1}Q_1(x)}$ - правильная.

Доказательство. Если разложение $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k} + \frac{P_1(x)}{(x^2+px+q)^{k-1}Q_1(x)}$ верно, то: $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{(Mx+N)Q_1(x)+P_1(x)(x^2+px+q)}{Q(x)}$, следовательно $P(x)$ должен выражаться как: $P(x) = (Mx+N)Q_1(x) + P_1(x)(x^2+px+q) \implies P_1(x) = \frac{P(x)-(Mx+N)Q_1(x)}{x^2+px+q}$.

Так как нужно, чтобы $P_1(x)$ был многочленом, то $P(x)-(Mx+N)Q_1(x)$ должно делиться на x^2+px+q.

Рассмотрим остаток от деления $P(x)$ на x^2+px+q в форме $\alpha x + \beta$ и остаток от деления $Q_1(x)$ на x^2+px+q в форме $\gamma x + \delta$.

Таким образом, $P(x) = (x^2+px+q)P_2(x) + (\alpha x+\beta)$; $\quad Q_1(x) = (x^2+px+q)Q_2(x) + (\gamma x+\delta)$.

Отсюда достаточно показать, что на x^2+px+q делится многочлен $\alpha x+\beta-(Mx+N)(\gamma x+\delta) = -M\gamma x^2 + x(-N\gamma - M\delta+\alpha) + (\beta - N\delta)$.

Поделим полученный выше многочлен на x^2+px+q :
$\frac{-M\gamma x^2+x(-N\gamma-M\delta+\alpha)+(\beta-N\delta)}{x^2+px+q} = -M\gamma + (\alpha - N\gamma - M\delta + M\gamma p)x + (\beta - N\delta + M\gamma q)$.

Для целого деления необходимо, чтобы:

$$\begin{cases} \alpha - N\gamma - M\delta + M\gamma p = 0 \\ \beta - N\delta + M\gamma q = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} -(\delta-\gamma p)M - \gamma N = -\alpha \\ \gamma q M - \delta N = -\beta \end{cases}$$

где M, N - неизвестные;

$$\begin{cases} \alpha - N\gamma - M\delta + M\gamma p = 0 \\ \beta - N\delta + M\gamma q = 0 \end{cases} ; \quad \begin{vmatrix} \delta-\gamma p & \gamma \\ \gamma q & -\delta \end{vmatrix} = -\delta^2 + \gamma p\delta - \gamma^2 q.$$

Заметим, что α и β, а так же γ и δ одновременно в 0 не обращаются.
$p^2-4q<0 \implies q \neq 0, \quad -(\delta^2+\gamma^2 q) + \gamma p\delta$:

1. $\gamma = 0,\ \delta = 0$ – невозможно;
2. $\gamma = 0,\ \delta \neq 0 \implies -\delta^2 \neq 0$;
3. $\gamma \neq 0,\ \delta = 0 \implies -\gamma^2 q \neq 0$;
4. $\gamma \neq 0,\ \delta \neq 0$.

Тогда, если $-(\delta^2+\gamma^2 q) + \gamma p\delta = 0 \implies \gamma p\delta = \delta^2 + \gamma^2 q$;
$p^2-4q<0,\ p^2<4q \implies 0 \leqslant \frac{p^2}{4} < q$

$\gamma \neq 0$: если $(\frac{\delta}{\gamma})^2 + (-\frac{\delta}{\gamma})p + q = 0$, то $x = \frac{\delta}{\gamma}$ - корень многочлена $x^2+px+q \implies$ противоречие с тем, что x^2+px+q не имеет вещественных корней $\implies \Delta \neq 0 \implies \exists M, N$ и $\exists$ многочлен $P_1(x)$. □

1.1.4 Метод неопределенных коэф-ов (следствия лемм)

Если $\frac{P(x)}{Q(x)}$ - правильная дробь и $Q(x) = (x-a_1)^{k_1} * \ldots * (x-a_s)^{k_s} * (x^2+p_1x+q_1)^{m_1} * \ldots * (x^2+p_rx+q_r)^{m_r}$, то верно следующее разложение:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=0}^{k_1-1} \frac{A_i}{(x-a_i)^{k_1-i}} + \ldots + \sum_{i=0}^{k_s-1} \frac{A_i^s}{(x-a_s)^{k_s-i}} + \sum_{i=0}^{m_1-1} \frac{M_ix+N_i}{(x^2+p_1x+q_1)^{m_1-i}} + \ldots + \sum_{i=0}^{m_r-1} \frac{M_i^rx+N_i^r}{(x^2+p_rx+q_r)^{m_r-i}},$$

где $A_i, \ldots, A_i^s, \quad M_i, N_i, \ldots, M_i^r, N_i^r \in \mathbb{R}$.

Пример 4. $Q(x) = (x-1)^3(x+2)^2(x^2+x+1)^3$

$$\frac{x^5-x^3+1}{Q(x)} = \frac{A_0^1}{(x-3)^3} + \frac{A_1^1}{(x-3)^2} + \frac{A_2^1}{(x-3)} + \frac{A_0^2}{(x+2)^2} + \frac{A_1^2}{(x+2)} + \frac{M_0x+N_0}{(x^2+x+1)^3} + \frac{M_1x+N_1}{(x^2+x+1)^2} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+x+1)}$$

Приведем в $\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=0}^{k_1-1} \frac{A_i}{(x-a_i)^{k_1-i}} + \ldots$ правую часть к общему знаменателю и получим: $\frac{P(x)}{Q(x)} \equiv \frac{R(x)}{Q(x)}$; $\deg Q(x) = k_1 + \ldots + k_s + 2m_1 + \ldots + 2m_r = n$;

$l = \deg R(x) = \deg P(x) \leqslant \deg Q(x) - 1.$

Количество неизвестных коэф. у множества $R(x)$ равно n штук, приравнивая коэф. при соответствующих степенях x (в том числе при x^0) получим n уравнений с n неизвестными (старшая степень x множества $R(x)$ равна $n-1$).

1.1.5 Метод Остроградского

Теорема 1.1.1. Пусть $\frac{P(x)}{Q(x)}$ - правильная несократимая дробь.
Тогда $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}dx$. Дроби $\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$ и $\frac{P_2(x)}{Q_2(x)}$ - правильные. $Q(x) = Q_1(x)Q_2(x)$ и многочлен $Q_2(x)$ представляет собой произведение всех линейных и квадратичных множителей многочлена $Q(x)$, взятых в первой степени.

Пример 5. $\int \frac{x^2+2x+5}{(x-2)(x^2+1)^2}dx = \frac{P_1(x)}{x^2+1} + \int \frac{P_2(x)}{(x-2)(x^2+1)}dx = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \int \frac{Cx^2+Dx+E}{(x-2)(x^2+1)}dx$

Доказательство. Рассмотрим $\int \frac{A}{(x-a)^k}dx = \frac{A}{1-k}\frac{1}{(x-a)^{k-1}}$;

$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}dx = \frac{A}{(x^2+px+q)^{k-1}} + B\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^k} = \frac{A}{(x^2+px+q)^{k-1}} + \frac{C}{(x^2+px+q)^{k-1}} + D\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^{k-1}} = \frac{A}{(x^2+px+q)^{k-1}} + \ldots + \frac{V}{(x^2+px+q)^2} + W\int \frac{dx}{x^2+px+q}$.

Представим $Q(x)$ в виде $Q(x) = (x-a_1)^{k_1} * \ldots * (x-a_s)^{k_s} * (x^2+p_1x+q_1)^{m_1} * \ldots * (x^2+p_rx+q_r)^{m_r}$, тогда:

$Q_2(x) = (x-a_1) * \ldots * (x-a_s) * (x^2+p_1x+q_1) * \ldots * (x^2+p_rx+q_r)$;

$Q_1(x) = (x-a_1)^{k_1-1} * \ldots * (x-a_s)^{k_s-1} * (x^2+p_1x+q_1)^{m_1-1} * \ldots * (x^2+p_rx+q_r)^{m_r-1}$;

Из метода неопределенных коэффициентов и того, что $\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}dx = \frac{A}{(x^2+px+q)^{k-1}} + \ldots + \frac{V}{(x^2+px+q)^2} + W\int \frac{dx}{x^2+px+q} \implies \int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}dx$.

Как найти $P_1(x)$ и $Q_1(x)$?

Продифференцируем $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}dx$:

$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P_1'(x)Q_1(x) - P_1(x)Q_1'(x)}{Q_1^2} + \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}$. Рассмотрим: $\frac{P_1'(x)Q_1(x) - P_1(x)Q_1'(x)}{Q_1^2} = \frac{P_1'(x) - P_1(x)\frac{Q_1'(x)}{Q_1(x)}}{Q_1(x)} = \frac{P_1'(x)Q(x) - P_1(x)\frac{Q_1'(x)Q_2(x)}{Q_1(x)}}{Q_1(x)Q_2(x)}$.

Пусть $H(x) = \frac{Q_1'(x)Q_2(x)}{Q_1(x)}$ - многочлен (нужно показать).

Пусть $Q_1(x)$ имеет среди своих множителей многочлен вида $(x-a)^n$, тогда $Q_1'(x)$ будет иметь в своем составе $(x-a)^{n-1}$, а $Q_2(x)$ только содержит в себе выражение $(x-a) \implies H(x)$ - многочлен.

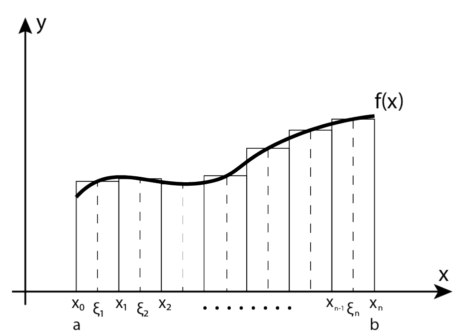
Коэффициенты многочленов $P_1(x)$ и $P_2(x)$ можно найти с помощью метода неопределенных коэффициентов из выражения $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k} + \frac{P_1(x)}{(x^2+px+q)^{k-1}Q_1(x)}$. $\square$

Глава 2

Интегральное исчисление

2.1 Интеграл Римана

Определение 2.1.1 (интеграл Римана)**.** Пусть $f : [a;b] \to \mathbb{R}$. Разобьем отрезок $[a;b]$ на n частей точками $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$. В каждом таком кусочке выберем точку $\xi_i \in [x_{i-1};x_i],\ i = 1,\ldots,n$.



$\Delta i = [x_{i-1}, x_i], \quad \Delta x = x_i - x_{i-1}$ - длина отрезка Δi.

Составим сумму $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$, где $f(\xi_i)$ - высота i-го прямоугольника и Δx_i - ширина i-го прямоугольника.

S_n - площадь ступенчатой фигуры, составленной из прямоугольников под графиком функции $f(x)$.

Говорят, что функция f интегрируема на $[a;b]$, если существует предел интегральных сумм S_n, то есть $\exists \lim\limits_{max\Delta x_i \to 0} S_n$, причем этот предел не зависит ни от способа разбиения отрезка $[a;b]$, ни от способа выбора точек ξ_i.

Этот предел называется **интегралом Римана** функции f на $[a;b]$. Класс интегрируемых функций на отрезке $[a;b]$ будем обозначать $R([a;b])$.

2.2 Базы. Предел функции по базе

Определение 2.2.1 (база множества)**.** Пусть X - произвольное множество.

Система β подмножеств множества X называется **базой** на X, если:

1. $\forall \beta \in \beta \quad \beta \neq \varnothing$
2. $\forall \beta_1, \beta_2 \in \beta \; \exists \beta_3 \in \beta : \quad \beta_3 \subset \beta_1 \cap \beta_2$

Пример 6 (баз множества)**.** 1. $\beta = \{X\}$ - база

2. $X = \mathbb{R}, \quad \beta = \{\beta_n = (-\frac{1}{n}; \frac{1}{n}),\; n \in \mathbb{N}\}$
3. $X = \mathbb{R}, \quad \beta = \{\beta_\epsilon = \{x :\; 0 < |x| < \epsilon\}, \epsilon > 0\}$ (выколотые окрестности нуля)

Определение 2.2.2 (предел по базе)**.** Пусть $f : X \to \mathbb{R},\; \beta$ - база на X

Число $A \in \mathbb{R}$ называется **пределом** функции f **по базе** β, если $\forall \epsilon > 0 \; \exists$ элемент базы $\beta \in \beta : \quad |f(x) - A| < \epsilon$.

$$\lim_{\beta} f(x)$$

Определение 2.2.3 (предел по базе (МП))**.** Пусть (Y, d) - МП, $f : X \to Y$, β - база на X.

$y \in Y$ называется **пределом** функции $f(x)$ **по базе** β, если $\forall \epsilon > 0 \; \exists \beta \in \beta \; \forall x \in \beta : \quad d(f(x), y) < \epsilon$, или, что то же самое, $\forall V_Y(y) \; \exists \beta \in \beta \quad f(\beta) \subset V_Y(y)$, где V_Y - окрестность метрического пространства Y.

Теорема 2.2.1 (основные свойства предела по базе)**.** Пусть $f : X \to \mathbb{R},\; \beta$ - база на X:

1. Если $\exists \lim_{\beta} f(x)$, то $\exists \beta \in \beta :\; f$ ограничена на β
2. Если $\lim_{\beta} f(x) = A$ и $\lim_{\beta} f(x) = B$, то $A = B$

Теорема 2.2.2 (связь предела по базе с арифметическими операциями). Пусть $f : X \to \mathbb{R},\ g : X \to \mathbb{R},\ \beta$ - база на X, $\quad \lim\limits_{\beta} f(x) = A, \quad \lim\limits_{\beta} g(x) = B$:

1. $\exists \lim\limits_{\beta}(f(x) \pm g(x)) = A \pm B$
2. $\exists \lim\limits_{\beta}(f(x)g(x)) = AB$
3. $\exists \lim\limits_{\beta}(\frac{f(x)}{g(x)}) = \frac{A}{B}$, если $g(x) \neq 0,\ \beta \neq 0$

Теорема 2.2.3 (связь предела функции по базе с неравенствами). Пусть $f : X \to \mathbb{R},\ g : X \to \mathbb{R},\ \beta$ - база на X:

1. Если $\exists \beta \in \beta : \quad \forall x \in \beta\ f(x) \leqslant g(x)$, то $\lim\limits_{\beta} f(x) \leqslant \lim\limits_{\beta} g(x)$
2. Если $\lim\limits_{\beta} f(x) < \lim\limits_{\beta} g(x)$, то $\exists \beta \in \beta\ \forall x \in \beta \quad f(x) < g(x)$

   Если $\lim\limits_{\beta} f(x) \geqslant \lim\limits_{\beta} g(x)$, то $\exists \beta \in \beta\ \forall x \in \beta \quad f(x) \geqslant g(x)$
3. Если $h : X \to \mathbb{R}$ и $\exists \beta \in \beta :\ \forall x \in \beta\ f(x) \leqslant h(x) \leqslant g(x)$ **И** $A = \lim\limits_{\beta} f(x) = \lim\limits_{\beta} g(x)$, то $\lim\limits_{\beta} h(x) = A$

Теорема 2.2.4 (критерий Коши существования предела по базе). Существуют две формулировки:

1. Пусть $f : X \to \mathbb{R},\ \beta$ - база на X.

   Функция $f(x)$ имеет предел по базе $\beta \iff \forall \epsilon > 0\ \exists \beta \in \beta : \quad \forall x_1, x_2 \in \beta\ |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$
2. Пусть (Y, d) - МП (**полное**), $f : X \to Y,\ \beta$ - база на Y.

   Функция $f(x)$ имеет предел по базе $\beta \iff \forall \epsilon > 0 \exists \beta \in \beta : \quad \forall x_1, x_2 \in \beta\ d(f(x_1), f(x_2)) < \epsilon$

Доказательство. (критерия Коши $\exists$ предела по базе)

" $\to$ " Пусть $\exists \lim\limits_{\beta} f(x) = A$. Покажем, что $\forall \epsilon > 0 \exists \beta \in \beta : \quad \forall x_1, x_2 \in \beta\ |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$. Рассмотрим $|f(x_1) - f(x_2)| = |f(x_1 - A) + (A - f(x_2))| \leqslant |f(x_1) - A| + |f(x_2) - A| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$.

" $\leftarrow$ " Пусть $\forall \epsilon > 0\ \exists \beta \in \beta : \quad \forall x_1, x_2 \in \beta\ |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$. Покажем, что $\exists \lim\limits_{\beta} f(x)$. Возьмем $\beta_1 \in \beta : \quad \forall x_1, x_2 \in \beta_1\ |f(x_1) - f(x_2)| < 1$. Возьмем $\beta_1' \in \beta : \quad \forall x_1, x_2 \in \beta_1'\ |f(x_1) - f(x_2)| < \frac{1}{2}$. Пусть $\beta_2 \subset \beta_1 \cap \beta_1'$ и так далее.

Таким образом построим систему вложенных множеств: $\beta_1 \supset \beta_2 \supset \ldots \supset \beta_n \supset \ldots$, при этом $\forall x_1, x_2 \in \beta_n \ |f(x_1) - f(x_2)| < \frac{1}{2^{n-1}}$. Воспользуемся полнотой пространства, то есть в нем $\exists \lim f(x)$, если $f(x)$ - фундаментальная.

$\forall n \in \mathbb{N}$ рассмотрим $x_n \in \beta_n$. Тогда, если $n < m$ $(m \in \mathbb{N})$, то для $x_n \in \beta_n$ и $x_m \in \beta_n$ $|f(x_n) - f(x_m)| < \frac{1}{2^{n-1}}$.

Таким образом последовательность $f(x_n)$ - фундаментальная $\implies$ $\exists \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$. Покажем, что $A = \lim\limits_{\beta} f(x)$. Пусть $\epsilon > 0$ задано. Выберем $n \in \mathbb{N}: \quad \frac{1}{2^{n-1}} < \frac{\epsilon}{2}$. Возьмем $m > n: \quad |f(x_m) - A| < \frac{\epsilon}{2}$. Возьмем $\beta = \beta_n$. Тогда $\forall x \in \beta \ |f(x) - A| = |f(x) - f(m) + f(x_m) - A| \leqslant |f(x) - f(x_m)| + |f(x_m) - A| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$.

Следовательно, $\exists \lim\limits_{\beta} f(x) = A$. $\square$

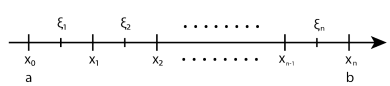
2.3 Разбиение. Интеграл Римана (v.2)

Определение 2.3.1 (разбиение)**.** Пусть дан отрезок $[a;b]$. **Разбиением** P отрезка $[a;b]$ называется набор точек $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$. То есть $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$. Отрезки $[x_{i-1}; x_i] = \Delta_i$. $x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$ - длина i-го отрезка разбиения $\lambda(P) = \max\limits_{i=\overline{0,n}}\{\Delta x_i\}$. Величины $\Delta_i, \Delta x_i, \lambda(P)$ - параметры ограничения.

Определение 2.3.2 (разбиение с отмеченными точками)**. Разбиением с отмеченными точками** называется пара наборов

$$P(\xi) = \{x_0, \ldots, x_n\}, \{\xi_0, \ldots, \xi_n\},$$

$$\text{где } a = x_0 < \ldots < x_n = b, \ \xi_i \in [x_{i-1}; x_i].$$



Пусть $\Re_\xi = \{(P, \xi)\}$ - семейство всевозможных разбиений с отмеченными точками отрезка $[a, b]$.

Рассмотрим $\beta_\delta = \{(P, \xi): \quad \lambda(P) < \delta\}, \ \beta_\delta \subset P_\xi$:

Утверждение 2.3.1. Множество $\beta = \{\beta_\delta: \quad \delta > 0\}$ является базой на $\Re_\xi$.

Доказательство. (утверждения 2.3.1.).

1. $\forall \delta > 0 \ \beta_\delta$ - непусто.

   В самом деле, пусть отрезок $[a;b]$ поделен на n равных частей, причем n выбирается из соображений, чтобы $\Delta x_i = \Delta x \quad \forall i = \overline{1,n}\ (1, \ldots, n), \ \Delta x < \delta$.

   Пусть $\xi_i \in [x_{i-1}; x_i]$ - середины отрезков $[x_{i-1}; x_i]$.

2. Покажем, что $\forall \beta_{\delta_1}, \beta_{\delta_2} \in \beta \ \exists \beta_{\delta_3} \subset \beta_{\delta_1} \cap \beta_{\delta_2}$.

   Пусть заданы $\delta_1 > 0, \delta_2 > 0$. Покажем, что $\exists \beta_3 > 0$: $\beta_{\delta_3} \subset \beta_{\delta_1} \cap \beta_{\delta_2}$. Если $\delta_1 < \delta_2$, то $\delta_3 = \delta_1$ или $\delta_3 = \frac{\delta_1}{2}$.

□

Определение 2.3.3 (!). Пусть $f : [a;b] \to \mathbb{R}$, (P,ξ) - разбиение отрезка $[a;b]$ с отмеченными точками. Составим сумму:

$$\sigma(f,(P,\xi)) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

Можно смотреть на σ для фиксированной функции $f(x)$ как на функцию, сопоставляющую разбиение $(P,\xi) \in \Re_\xi$ сумме $\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$, то есть $\sigma_f : \Re_\xi \to \mathbb{R}$ (то есть (P,ξ) - аргумент функции σ).

Говорят, что функция $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ интегрируема по Риману на $[a;b]$, если:

$$\exists \lim_{\lambda(P)\to 0} \sigma_f((P,\xi)) = \lim_{\lambda(P)\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

Или, что то же самое, если $\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ и соответствующий элемент $\beta_\delta \in \beta : \quad \forall$ разбиения $(P,\xi) : \ \lambda(P) < \delta$ выполняется неравенство $|\sigma_f((P,\xi)) - I| < 0$:

$$I = \lim_{\lambda(P)\to 0} \sigma_f((P,\xi)) = \int_a^b f(x)dx$$

Обозначим базу β из утверждения 2.3.1. как $\lambda(P) \to 0$.

Теорема 2.3.1 (необходимое условие интегрируемости функции). *_*

Если $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ интегрируема на $[a;b]$ (то есть $f \in \mathbb{R}[a;b]$), то f ограничена на $[a;b]$.

Доказательство. От противного:

Допустим, что f интегрируема на $[a;b]$, но неограничена, то есть: $\forall M > 0 \ \exists x \in [a;b] : \quad |f(x)| > M$. Покажем, что функция $\sigma((P,\xi))$ не имеет предела по базе на $[a;b]$.

То есть $\exists \epsilon > 0 : \ \forall \delta > 0 \ \exists (P',\xi')$ и $(P'',\xi'') : \quad \lambda(P') < \delta, \ \lambda(P'') < \delta$ ($\lambda(P'') = \max \Delta x_i$), но $(\sigma(P'',\xi'') - \sigma(P'',\xi'')) \geqslant \epsilon$.

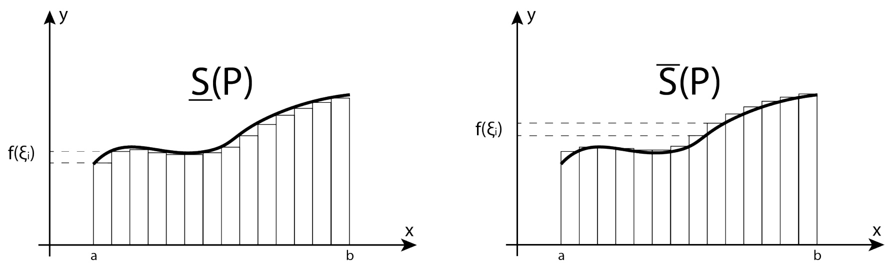
Положим, $\epsilon = 1$. Пусть $\delta > 0$ задана. Выберем разбиение с отмеченными точками (P',ξ') такое, что $\lambda(P') < \delta$, $P' = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b\}$, $\epsilon_i \in [x_1, \ldots, x_n]$. Поскольку функция f неограничена на $[a;b]$, то существует хотя бы один элемент разбиения $[x_{i-1}, x_i] = \Delta i$: функция f неограничена на (? Спасибо Максим). В качестве P^n возьмем P', $\xi'' = \{\xi'_1, \xi'_2, \ldots, \xi''_i, \ldots, \xi'_n\}$, $\lambda(P'') < \delta$ и $|f(\xi''_i) - f(\xi'_i)| > \frac{1}{\Delta x_i}$. Разбиения P' и P'' совпадают, точки разбиения так же совпадают, кроме ξ''_i.

Рассмотрим $|\sigma((P'',\xi'')) - \sigma((P',\xi'))| = |\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k f(\xi'_k) - \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k f(\xi''_k)| = |\Delta x_i (f(\xi''_i) - f(\xi'_i))| > \frac{\Delta x_i}{\Delta x_i} = 1 = \epsilon$. □

2.4 Критерий интегрируемости

2.4.1 Суммы Дарбу

Определение 2.4.1 (нижняя/верхняя суммы Дарбу)**.** Пусть $f[a;b] \to \mathbb{R}$, P - произвольное разбиение отрезка $[a;b]$. Числа $\underline{S}(P) = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k$ и $\overline{S}(P) = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k$, где $m_k = \inf\limits_{\xi \in \Delta k} f(\xi)$, $M_k = \sup\limits_{\xi \in \Delta k} f(\xi)$, называются **нижней** и **верхней суммами Дарбу**, отвечающими разбиению P.



Теорема 2.4.1 (свойства сумм Дарбу)**.** Свойства:

1. $\forall (P, \xi)$ $\underline{S}(P) \leqslant \sigma_f((P, \xi)) \leqslant \overline{S}(P)$
2. Если разбиение P' получено из разбиения P добавлением новых точек, то $\underline{S}(P') \geqslant \underline{S}(P)$ и $\overline{S}(P') \leqslant \overline{S}(P)$
3. $\forall P_1, P_2 \quad \underline{S}(P_1) \leqslant \overline{S}(P_2)$

Доказательство. (теоремы 2.4.1)

1. $\underline{S}(P) = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \Delta x_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k = \overline{S}(P)$, где $f(\xi_k) = \sigma((P, \xi))$, вроде
2. Пусть P - произвольное разбиение отрезка $[a;b]$. Построим P'. Добавим на элемент разбиения Δi новую точку $x' \in [x_{i-1}; x_i]$.

   Пусть $m_i' = \inf\limits_{\xi \in [x_{i-1}, x_i]} f(\xi)$ и $m_i'' = \inf\limits_{\xi \in [x_i', x_i]} f(\xi)$, $m_i = \inf\limits_{\xi \in [x_{i-1}; x_i]} f(\xi)$, имеем $m_i \leqslant m_i'$, $m_i \leqslant m_i''$.

   Тогда $\underline{S}(P') - \underline{S}(P) = \sum_{k=1}^{i-1} \Delta x_k m_k + m_i' |x' - x_{i-1}| + m_i'' |x_i - x'| + \sum_{k=i+1}^{n} m_k \Delta x_k - \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k m_k = m_i' |x' - x_{i-1}| + m_i'' |x_i - x'| - m_i \Delta x_i \geqslant 0 \implies \underline{S}(P') \geqslant S(P)$ (вероятно, куча индексов - неправильные).

   Аналогично доказывается для $\overline{S}(P') \leqslant \overline{S}(P)$.
3. Пусть P_1, P_2 - произвольные разбиения отрезка $[a;b]$.

   Возьмем разбиение $P = P_1 \cap P_2$. Тогда, с одной стороны, P получено из P_1 добавлением точек, а с другой стороны - из P_2 добавлением точек.

   Тогда $\underline{P_i} \leqslant \underline{S}(P)$ и $\overline{S}(P_i) \geqslant S(P)$.

Тогда верно, что $\underline{S}(P_2) \leqslant \underline{S}(P)$ и $\overline{S}(P_2) \geqslant \overline{S}(P) \implies \underline{S}(P_1) \leqslant \underline{S}(P) \leqslant \overline{S}(P) \leqslant \overline{S}(P_2)$.

$\square$

Следствие. Множество нижних сумм Дарбу ограничено сверху. Множество верхних сумм Дарбу ограничено снизу.

Определение 2.4.2 (верхний/нижний интеграл Дарбу)**.** Числа $\underline{\mathfrak{I}} = \sup \underline{S}(P)$ и $\overline{\mathfrak{I}} = \inf \overline{S}(P)$ называются **нижним** и **верхним интегралом Дарбу**.

Рассмотрим множество разбиений с отмеченными точками отрезка $[a;b]$ $\Re = \{(P,\xi)\}$. Построим функцию $\underline{S} : \Re_\xi \to \mathbb{R}$ и $\underline{S}((P,\xi)) = \underline{S}(P)$. Аналогично определим $\overline{S} : \Re_\xi \to \mathbb{R}$ и $\overline{S}((P,\xi)) = \overline{S}(P)$.

Таким образом сумму Дарбу можно представить как функции на множестве разбиений с отмеченными точками отрезка $[a;b]$.

Теорема 2.4.2 (критерий интегрируемости)**.** Функция $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ интегрируема на $[a;b] \iff \lim\limits_{\lambda(P)\to 0}(\overline{S}(P) - \underline{S}(P)) = 0$.

Доказательство. (теоремы 2.4.2)
" $\to$ " Пусть $f \in \mathbb{R}$ $([a;b])$ (то есть интегрируема на $[a;b]$), то есть $\forall \epsilon > 0\ \forall (P,\xi):\ \lambda(P) < \delta \implies |\sigma_f((P,\xi)) - I| < \epsilon$.

Лемма 2.4.1. $\forall P\ \underline{S}(P) = \inf\limits_{\xi} \sigma_f((P,\xi))$ и $\overline{S}(P) = \sup\limits_{\xi} \sigma_f((P,\xi))$

Доказательство. (леммы 2.4.1)
$\forall P\ \underline{S}(P) \leqslant \sigma_f((P,\xi))$.
Покажем, что $\forall \epsilon > 0\ \exists \xi = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}:\ \underline{S}(P) + \epsilon > \sigma_f(P,\xi)$.
Выберем $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n:\ f(\xi_i) < m_i + \frac{\epsilon}{b-a}$.
Тогда $\sigma_f(P,\xi) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k < \sum_{k=1}^n (m_k + \frac{\epsilon}{b-a})\Delta x_k = \sum_{k=1}^n m_k \Delta x_k + \frac{\epsilon}{b-a}\sum_{k=1}^n \Delta x_k = \underline{S}(P) + \epsilon \implies \underline{S}(P) = \inf\limits_{\xi} \sigma_f(P,\xi)$.
Аналогично для $\overline{S}(P) = \sup\limits_{\xi} \sigma_f(P,\xi)$. $\square$

$I - \epsilon < \sigma_f(P,\xi) < I + \epsilon$, $I - \frac{\epsilon}{2} < \sigma_f(P,\xi) < I + \frac{\epsilon}{2}$. Из леммы 2.4.1: $\underline{S}(P) + \epsilon > \sigma_f(P,\xi) \implies \underline{S}(P) > \sigma_f(P,\xi) - \epsilon > \sigma_f(P,\xi) - \frac{\epsilon}{2}$ $(I = \lim\limits_{\lambda(P)\to 0} \sigma_f(P,\xi))$

Рассмотрим $I - \frac{2\epsilon}{3} < I - \frac{\epsilon}{2} \leqslant \underline{S}(P) \leqslant \sigma_f(P,\xi) \leqslant \overline{S}(P) < \sigma_f(P,\xi) + \epsilon < I + \frac{\epsilon}{2} + \epsilon = I + \frac{3\epsilon}{2}$ $(\overline{S}(P) - \epsilon < \sigma_f(P,\xi))$

Тогда $I - \frac{3\epsilon}{2} < \underline{S}(P) \leqslant \overline{S}(P) < I + \frac{3\epsilon}{2}$, так как $\underline{S}(P) \leqslant \overline{S}(P) \implies 0 \leqslant \overline{S}(P) - \underline{S}(P)$,

$$\begin{gathered} \overline{S}(P) < I + \tfrac{3\epsilon}{2} \\ + \\ -\underline{S}(P) < -I + \tfrac{3\epsilon}{2} \end{gathered}$$

$0 \leqslant \overline{S}(P) - \underline{S}(P) < 3\epsilon \implies \lim\limits_{\lambda(P)\to 0}(\overline{S}(P) - \underline{S}(P)) = 0$

"$\leftarrow$" Пусть $\lim\limits_{\lambda(P)\to 0}(\overline{S}(P) - \underline{S}(P)) = 0$.

Пусть $\epsilon > 0$ задана. Выберем $\delta > 0 : \quad 0 \leqslant \overline{S}(P) - \underline{S}(P) < \epsilon \ \forall (P,\xi) : d(P) < \delta$.

Покажем, что $\exists I = \int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\lambda(P)\to 0}\sigma_f(P,\xi)$. Имеем $\overline{S}(P) - \underline{S}(P) < \epsilon$ и $\underline{S}(P) \leqslant I \leqslant \overline{S}(P)$.

Из неравенств следует, что $\overline{S}(P) < \underline{S}(P) + \epsilon \leqslant I + \epsilon$, $\underline{S}(P) > \overline{S}(P) - \epsilon \geqslant I - \epsilon$.

Пусть (P,ξ) - произвольное разбиение: $\lambda(P) < \delta$. Тогда $I - \epsilon < \underline{S}(P) \leqslant \sigma_f(P,\xi) \leqslant \overline{S}(P) < I + \epsilon \implies I - \epsilon < \sigma_f(P,\xi) < I + \epsilon \implies |\sigma_f(P,\xi) - I| < \epsilon \implies I = \lim\limits_{\lambda(P)\to 0}\sigma_f(P,\xi) \implies f \in \mathbb{R}[a;b]$. □

Определение 2.4.3. Обозначим $M_i - m_i = \sup\limits_{\xi\in\Delta i} f(\xi) - \inf\limits_{\xi\in\Delta i} f(\xi) = \sup\limits_{x_1,x_2\in\Delta i}|f(x_1) - f(x_2)| = \omega_i = \omega_i(f,\Delta i)$.

ω_i называется **колебанием** функции $f(x)$ на отрезке Δi.

$\overline{S}(P) - \underline{S}(P) = \sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i$

Следствие. (из критерия интегрируемости)

$f \in \mathbb{R}[a;b] \iff \lim\limits_{\lambda(P)\to 0}\sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i = 0$

Теорема 2.4.3 (Дарбу)**.** Для любой ограниченной функции $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ выполняются равенства:

$$\underline{\mathfrak{I}} = \lim_{\lambda(P)\to 0}\underline{S}(P);\ \overline{\mathfrak{I}} = \lim_{\lambda(P)\to 0}\overline{S}(P)$$

Лемма 2.4.2. Пусть $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ ограничена на $[a;b]$, то есть $\exists L > 0 : \forall x \in [a;b]\ |f(x)| < L$. Разбиение P' получено из разбиения P добавлением m точек. Тогда $\overline{S}P - \overline{S}(P') \leqslant 2L\lambda(P)m$

Доказательство. (леммы 2.4.2)

Пусть P - производное разбиение, $\lambda(P)$.

Рассмотрим случай, что P' получено добавлением k точек на i-тый отрезок разбиения P. (график, посмотреть у Максима). $\overline{S}(P) - \overline{S}(P') = \sum_{j=1}^n M_j \Delta x_j - (\sum_{j=1}^{i-1} M_j\Delta x_j + \sum_{j=1}^k M'_{ij}\Delta x_{ij} + \sum_{j=i+1}^n M_j \Delta x_j) = M_i\Delta x_i - \sum_{j=1}^k M'_{ij}\Delta x_{ij} = M_i \sum_{j=1}^k \Delta x_{ij} - \sum_{j=1}^k M'_{ij}\Delta x_{ij} = \sum_{j=1}^k M_i \Delta x_{ij} - \sum_{j=1}^k M'_{ij}\Delta x_{ij} = \sum_{j=1}^k (M_i - M'_{ij})\Delta x_{ij} \leqslant \sum_{j=1}^k 2L\Delta x_{ij} =$ (вспомним, что $\lambda(P) = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n\}$) $= 2L\sum_{j=1}^k \Delta x_{ij} = 2L\Delta x_i \leqslant 2L\lambda(P)$

Теперь, если P' получено из P добавлением m точек, то они попадут самое большее на m промежутков. Тогда $\overline{S}(P) - \overline{S}(P') \leqslant 2L\lambda(P)m$ □

Доказательство. (теоремы 2.4.3, Дарбу)

$\underline{\mathfrak{I}} \overset{def}{=} \sup\limits_P \underline{S}(P)$, $\overline{\mathfrak{I}} \overset{def}{=} \inf\limits_p \overline{S}(P)$

Пусть $\epsilon > 0$ задано. Выберем разбиение P' такое, что $\overline{\mathfrak{I}} + \epsilon > \overline{S}(P')$ (**) (определение inf). Положим, что $\delta = \frac{\epsilon}{2Lm}$.

Пусть P - произвольное разбиение: $\lambda(P) < \delta$.

Покажем, что $0 \leqslant \overline{S}(P) - \overline{\mathfrak{I}} < \epsilon$.

Построим разбиение $P'' = P' \cup P$. Тогда P'' получено из P добавлением m точек $\implies \overline{S}(P) - \overline{S}(P'') \leqslant 2L\lambda(P)m$, где $L > 0 : \ \forall x \in [a;b] |f(x)| < L$. Далее, $\overline{S}(P) - \overline{S}(P'') \leqslant 2L\lambda(P)m < 2Lm\delta = \frac{2Lm\epsilon}{2Lm} = \frac{\epsilon}{2}$. Кроме того, P'' получено из P' добавлением некоторого количества точек.

$$\overline{S}(P'') \leqslant \overline{S}(P') \overset{(**)}{<} \overline{\mathfrak{I}} + \tfrac{\epsilon}{2} \implies \overline{S}(P'') - \tfrac{\epsilon}{2} < \overline{\mathfrak{I}}$$

Рассмотрим $0 \leqslant \overline{S}(P) - \overline{\mathfrak{I}} < \overline{S}(P) - \overline{S}(P'') + \frac{\epsilon}{2} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$ □

2.4.2 Классы интегрируемых функций

Теорема 2.4.4 (интегрируемость непрерывных функций)**.** Пусть $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ непрерывна на $[a;b] \implies f$ - интегрируема на $[a;b]$, то есть $f \in \mathbb{R}[a;b]$.

Доказательство. (теоремы 2.4.4)

Так как f - непрерывна на $[a;b] \implies f$ - равномерно непрерывна на $[a;b]$. Это значит, что если $\epsilon > 0$ задано, то $\exists \delta > 0 : \ \forall x_1, x_2 \in [a;b] : \ |x_1 - x_2| < \delta \implies |f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\epsilon}{b-a}$.

По критерию интегрируемости: $f \in \mathbb{R}[a;b] \iff \lim\limits_{\lambda(P)\to 0} (\overline{S}(P) - \underline{S}(P)) = 0 \ \forall (P;\xi)$ - разбиение.

$\overline{S}(P) - \underline{S}(P) = \sum \omega_i \Delta x_i$, где $\omega_i = \sup\limits_{x_1,x_2 \in \Delta i} |f(x_1) - f(x_2)|$.

$\overline{S}(P) = \sum M_i \Delta x_i, \ M_i = \sup\limits_{\xi \in \Delta x_i} f(\xi)$.

$\omega_i = M_i - m_i = \sup\limits_{\xi \in \Delta i} f(\xi) - \inf\limits_{\xi \in \Delta i} f(\xi) = \sup\limits_{x_1,x_2 \in \Delta i} |f(x_1) - f(x_2)|$.

$\overline{S}(P) - \underline{S}(P) = \sum M_i \Delta x_i - \sum m_i \Delta x_i = \sum \omega_i \Delta x_i$.

Таким образом критерий интегрируемости: f - интегрируема на $[a;b] \iff \lim\limits_{\lambda(P)\to 0} \sum \omega_i \Delta x_i = 0$, то есть $\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \ \forall (P;\xi) : \ \lambda(P) < \delta \implies 0 \leqslant \sum \omega_i \Delta x_i < \epsilon$.

Пусть $\epsilon > 0$ задано. Возьмем $(P;\xi)$ - разбиение такое, что $\lambda(P) < \delta$. Тогда $\sum \omega_i \Delta x_i = \sum \sup\limits_{x_1,x_2 \in \Delta i} |f(x_1) - f(x_2)| \Delta x_i \leqslant \sum \frac{\epsilon}{b-a} \Delta x_i = \frac{\epsilon}{b-a} \sum \Delta x_i = \frac{\epsilon}{b-a}(b-a) = \epsilon$ □

Теорема 2.4.5 (интегрируемость функций с конечным числом точек разрыва)**.** Пусть $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ - ограничена и имеет на $[a;b]$ конечное число точек разрыва. Тогда $f \in \mathbb{R}[a;b]$ интегрируема на $[a;b]$.

Доказательство. (теоремы 2.4.5)

Пусть $L > 0 : \ \forall x \in [a;b] \ |f(x)| < L$ (ограничена). Пусть f имеет k точек разрыва на $[a;b]$.

Пусть $\epsilon > 0$ задано. Возьмем $\delta_1 = \frac{\epsilon}{16Lk}$. Для каждой точки разрыва построим δ_1-окрестность.

Пусть U - множество таких окрестностей. U - открытое множество. Рассмотрим $V = [a;b] \setminus U \implies V$ - замкнутое (так как его дополнение открытое). Из того, что V - ограничено и замкнуто $\implies V$ - компактное. Функция f - непрерывна на $V \implies$ из того, что V - компактно и f - непрерывна на $V \implies f$ - равномерно непрерывна на $V \implies \forall \epsilon > 0\ \exists \delta_2 > 0 :\ \forall x_1, x_2 \in V : |f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\epsilon}{2(b-a)}$.

Положим, что $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Пусть P - произвольное разбиение отрезка $[a;b] :\ \lambda(P) < \delta$.

Рассмотрим $\sum \omega_i \Delta x_i = \sum' \omega_i \Delta x_i + \sum'' \omega_i \Delta x_i \leqslant |\sum'$ берется по всепм отрезкам разбиения, k-тые пересекаются с U, $\sum''$ - по всем остальным $| \leqslant \sum' \omega_i \Delta x_i + \sum'' \frac{\epsilon}{2(b-a)} \Delta x_i \leqslant 2L2\delta_1 k + \frac{\epsilon}{2(b-a)} \sum'' \Delta x_i < \frac{4Lk\epsilon}{8Lk} + \frac{\epsilon}{2(b-a)}(b-a) = \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$.

Дополнение: $(\overline{S}(P) - \overline{S}(P') \leqslant 2L\lambda(P)m, \sum M_i \Delta x_i - \sum M_i' \Delta x_i)$. $\sum' \omega_i \Delta x_i = \sum \sup\limits_{x_1, x_2 \in \Delta i \cap k} |f(x_1) - f(x_2)| \Delta x_i \leqslant 2L2\delta_1 k$

□

ГРАФИКИ НАДО НАРИСОВАТЬ

Теорема 2.4.6 (интегрируемость монотонных функций)**.** Пусть $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ - монотонна на $[a;b] \implies f$ - интегрируема на $[a;b]$.

Доказательство. (теоремы 2.4.6)

Пусть f - не убывает на $[a;b]$. Пусть $\epsilon > 0$ задано. Возьмем $\delta = \frac{\epsilon}{f(b) - f(a)}$. Тогда, если P - произвольное разбиение $[a;b] :\ \lambda(P) < \delta$, то $\sum \omega_i \Delta x_i \overset{monoton.}{=} \sum (f(x_i) - f(x_{i-1})) \Delta x_i < \delta \sum (f(x_i) - f(x_{i-1})) = \delta(f(b) - f(a)) = \epsilon$. □

2.4.3 Свойства интегрируемых функций

Теорема 2.4.7. Пусть $f \in \mathbb{R}[a;b],\ g \in \mathbb{R}[a;b]$. Тогда:

1. $f \pm g \in R[a;b]$.
2. $\alpha f \in R[a;b],\ \alpha \in \mathbb{R}$.
3. $f * g \in R[a;b]$.
4. $|f| \in R[a;b]$, при этом:
    - $\int_a^b (f \pm g) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$
    - $\int_a^b \alpha f(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx$
    - $|\int_a^b f(x) dx| \leqslant \int_a^b |f(x)| dx$

Доказательство. (теоремы 2.4.7)

1. $\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \lim\limits_{\lambda(P)\to 0} \sum (f(\xi_i) \pm g(\xi_i))\Delta x_i = \lim\limits_{\lambda(P)\to 0} \sum f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$.

2. Аналогично.

3. Покажем, что если $f \in R[a;b]$, то $f^2 \in R[a;b]$. Рассмотрим $|f^2(x_1) - f^2(x_2)| = |(f(x_1) - f(x_2))(f(x_1) - f(x_2))| \leqslant |f(x_1) - f(x_2)|(|f(x_2)| + |f(x_2)|) < 2L|f(x_1) - f(x_2)|$, где $L > 0 :\ \forall x \in [a;b]\ |f(x)| < L$ (интегрируема $\implies$ ограничена).

   Пусть P - произвольное разбиение. Пусть $\epsilon > 0$ задано. Возьмем $\delta > 0$ и $P :\ \lambda(P) < \delta \quad \omega_i(f^2, \Delta_i) \leqslant 2L\omega_i(f, \Delta_i)$.

   $\sum\limits_i w_i(f^2, \Delta_i)\Delta x_i \leqslant (\sum\limits_i \omega_i(f, \Delta_i)\Delta_i)2L.$

   Так как $f \in R[a;b]$, то $\sum\limits_i \omega_i(f, \Delta_i)\Delta x_i \to 0 \implies$ по лемме о двух миллиционерах, $\sum\limits_i \omega_i(f^2, \Delta_i)\Delta x_i \to 0 \implies$ (по критерию интегрируемости) $f^2 \in R[a;b]$.

   $fg = \frac{1}{4}((f+g)^2 - (f-g)^2) \implies fg \in R[a;b]$.

4. Рассмотрим $||f(x_1)| - |f(x_2)|| \leqslant |f(x_1) - f(x_2)|,\ x_1, x_2 \in \Delta_i \implies \omega_i(|f|, \Delta_i) \leqslant \omega_i(f, \Delta_i)$.

   $0 \leqslant \sum\limits_i \omega_i(|f|, \Delta_i)\Delta x_i \leqslant \sum\limits_i \omega_i(f, \Delta_i)\Delta x_i \implies |f| \in R[a;b]$.

   Рассмотрим $|\sum\limits_i f(\xi_i)| \leqslant \sum\limits_i |f(\xi_i)|\Delta x_i \implies \lim\limits_{\lambda(P)\to 0} |\sum\limits_i f(\xi_i)\Delta x_i| \leqslant \lim\limits_{\lambda(P)\to 0} \sum\limits_i |f(\xi_i)|\Delta x_i, \quad |\int_a^b f(x)dx| \leqslant \int_a^b |f(x)|dx$.

$\square$

2.4.4 Аддитивность интеграла Римана

Определение 2.4.4. Пусть $a > b,\ a, b \in \mathbb{R}$, положим $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$. Если $a = b$, то $\int_a^{a=b} f(x)dx = 0$.

Теорема 2.4.8 (Аддитивность интеграла Римана)**.** Пусть даны точки $a, b, c \in \mathbb{R}$. Если f - интегрируема на большем из отрезков $[a;b],\ [a,c],\ [b,c]$, то f - интегрируема и на меньших отрезках. И наоборот, если f интегрирема на двух меньших отрезках, то она интегрируема и на большем отрезке. При этом:

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx + \int_c^a f(x)dx = 0$$

теоремы 2.4.8. Пусть $a < b < c$.

Построим такое разбиение отрезка $[a;c]$ с отмеченнымыми точками, что точка b будет его точкой разбиения $P = x_0, x_1, \ldots, b, \ldots, x_n$.

Тогда $\sum\limits_P f(\xi_i)\Delta x_i < \sum\limits_{P'} f(\xi_i)\Delta x_i + \sum\limits_{P''} f(\xi_i)\Delta x_i$, где P' - разбиение отрезка левеее точки b, P'' - правее точки b.

Покажем, что если $f \in R[a;c]$, то $f \in R[a;b]$. В самом деле, $\sum\limits_{P'} \omega_i \Delta x_i \leqslant \sum\limits_P \omega_i \Delta x_i \to 0 \implies f \in R[a;b]$. Аналогично, можно показать, что $f \in R[b;c]$. Если f - интегрируема на $[a;b]$ и $f \in R[b;c] \implies \sum\limits_{P'} \omega_i \Delta x_i \to 0$, $\sum\limits_{P''} \omega_i \Delta x_i \to 0 \implies$ учитывая то, что $\sum\limits_P f(\xi_i)\Delta x_i < \sum\limits_{P'} f(\xi_i)\Delta x_i + \sum\limits_{P''} f(\xi_i)\Delta x_i$, тогда $\sum\limits_P \omega_i \Delta x_i \to 0 \implies f \in R[a;c]$, а так же то, что $\int_a^c f(x)dx \ \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$. $\square$

2.4.5 Монотонность интеграла Римана

Теорема 2.4.9. Если $a < b$ и $f \in R[a;b]$ и:

1. $\forall x \in [a;b]\ f(x) \geqslant 0$, то $\int_a^b f(x)dx \geqslant 0$
2. $\forall x \in [a;b]\ f(x) > 0$, то $\int_a^b f(x)dx > 0$

Доказательство. (теоремы 2.4.9)

1. Почти очевидно (по определению интеграла Римана и свойствам предела)
2. Пусть $\forall x \in [a;b] f(x) > 0$. Покажем, что $\int_a^b f(x)dx > 0$. Допустим, что $\int_a^b f(x)dx = 0$. Тогда $\lim\limits_{\lambda(P)\to 0} \overline{S}(P) = 0$.

   Тогда можно взять такое разбинеие $P:\ \overline{S}(P) < \frac{b-a}{2}$. Тогда у этого разбиения $P\exists$ отрезок $\Delta_i:\ M_i = \sup\limits_{x\in\Delta_i} f(x) < \frac{1}{2}$. В самом деле, если $M_i \geqslant \frac{1}{2}\ \forall i$, то $\overline{S}(P) = \sum\limits_i M_i \Delta x_i \geqslant \frac{1}{2}\sum\limits_i \Delta x_i = \frac{b-a}{2}$, противоречие с выбраным P.

   Обозначим $\Delta_i = [a_1, b_1]$. Так как $f \in R[a;b] \implies f \in R[a_1, b_1]$. При этом $\int_a^b f(x)dx = 0$. Пусть P_1 - разбиение отрезка $[a_1, b_1]:\ \overline{S}(P_1) < \frac{b_1 - a_1}{4} \implies \exists$ отрезок разбиения $[a_2, b_2] \subset [a_1, b_1]:\ \sup\limits_{x\in[a_2,b_2]} f(x) < \frac{1}{4}$ и так далее.

   Таким образом получим систему вложенных отрезков $[a;b] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots$, при этом $\sup\limits_{x\in[a_k,b_k]} f(x) < \frac{1}{2^k}$. Пусть $c \in \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} [a_k; b_k]$. Тогда $f(c) > 0$. С другой стороны, $f(c) < \frac{1}{2^k} \implies f(c) = 0$ - противоречие $\implies \int_a^b f(x)dx > 0$.

$\square$

Следствие. (теоремы 2.4.9)

1. Если $a < b,\ f, g \in R[a;b]$ и:

   (a) $\forall x \in [a;b]\ f(x) \leqslant g(x)$, то $\int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b g(x)dx$

   (b) $\forall x \in [a;b]\ f(x) < g(x)$, то $\int_a^b f(x)dx < \int_a^b g(x)dx$

   Доказательство. Очевидно, $g(x) - f(x) \geqslant 0$. $\square$

2. Если $f \in R[a;b],\ a < b,\ M = \sup\limits_{x\in[a;b]} f(x),\ m = \inf\limits_{x\in[a;b]} f(x)$, то $m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant M(b-a)$.

   Доказательство. $\forall$ разбиения P с отмеченными точками верно: $\sum\limits_i m\Delta x_i \leqslant \sum\limits_i f(\xi_i)\Delta x_i \leqslant \sum\limits_i M\Delta x_i$ и $m(b-a) \leqslant \sum\limits_i f(\xi_i)\Delta x_i \leqslant M(b-a)$.

   Переходя к пределу получаем то, что нужно было доказать. $\square$

3. (Теорема о среднем)

   Пусть $f \in R[a;b](a > b, a < b),\ m = \inf\limits_{x\in[a;b]} f(x),\ M = \sup\limits_{x\in[a;b]} f(x)$. Тогда существует $\mu \in [m;M]:\ \int_a^b f(x)dx = \mu(b-a)$.

   Доказательство. Пусть $a < b$. Тогда (из 2-го пункта) $m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant M(b-a),\ (b-a > 0)$.

   $m \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leqslant M$. Пусть $\mu\ \frac{1}{b-a}\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \implies \frac{a}{b} f(x)dx = \mu(b-a)$. Если $a > b$, то $m(a-b) \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant M(a-b)$ (домножим на -1), $m(b-a) \geqslant \int_a^b f(x)dx \geqslant M(b-a) \implies m \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leqslant M$. $\square$

   Следствие. Если, кроме того, $f(x)$ - непрерывна на $[a;b]$, то $\exists c \in [a;b]:\ \int_a^b f(x)dx = f(x)(b-a)$.

   Доказательство. Доказательство следует из теоремы Больцано-Коши о промежуточном значении. $\square$

Теорема 2.4.10 (Первая теорема о среднем)**.** Пусть $f, g \in R[a;b](a > b, a < b),\ m = \inf\limits_{x\in[a;b]} f(x),\ M = \sup\limits_{x\in[a;b]} f(x)$ и g не меняет свой знак на $[a;b]$. Тогда $\exists \mu \in [m;M]:\ \int_a^b f(x)g(x)dx = \mu\int_a^b g(x)dx$.

Доказательство. Пусть $a < b$ и $\forall x \in [a;b]$ $g(x) \geqslant 0$. Имеем, что $m \leqslant f(x) \leqslant M,\ (g(x) > 0),\ mg(x) \leqslant f(x)g(x) \leqslant Mg(x) \implies m\int_a^b g(x)dx \leqslant \int_a^b f(x)g(x)dx \leqslant M\int_a^b g(x)dx$. Если $\int_a^b g(x)dx = 0 \implies \int_a^b f(x)g(x)dx = 0 \implies \int_a^b f(x)g(x)dx = \mu\int_a^b g(x)dx$. Если $\int_a^b g(x)dx \neq 0$, то поделим в неравенстве $m\int_a^b g(x)dx \leqslant \int_a^b f(x)g(x)dx \leqslant M\int_a^b g(x)dx$ все на $\int_a^b g(x)dx > 0:\quad m \leqslant \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \leqslant M$, где $\frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} = \mu$.

Аналогично доказываются остальные случаи ($a < b,\ g(x) \leqslant 0;\ a > b,\ g(x) \geqslant 0$). □

2.4.6 Интеграл Римана как функция верхнего предела интегрирования

Определение 2.4.5. Пусть $f \in R[a;b],\ x \in [a;b]$.

Рассмотрим функцию $F(x) = \int_a^x f(t)dt,\ F(x)$ определена для $\forall x \in [a;b]$.

Теорема 2.4.11 (непрерывность интеграла Римана)**.** Если $f \in R[a;b]$, то $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ - непрерывна на $[a;b]$.

Доказательство. Пусть $h \in \mathbb{R}:\ x+h \in [a;b]$. Тогда $F(x+h) = \int_a^{x+h} f(t)dt$. Пусть $\epsilon > 0$ задано. Покажем, что $\exists\delta > 0:\ \forall h \in \mathbb{R}:\ |h| < \delta\ |F(x+h) - F(x)| < \epsilon$.

Рассмотрим $|F(x+h) - F(x)| = |\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt| = |\int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt| = |\int_x^{x+h} f(t)dt| \leqslant |\int_x^{x+h} |f(t)|dt|$. Так как $f \in R[a;b]$, то f - ограничена на $[a;b]$, то есть $\exists L > 0:\ \forall x \in [a;b]\ |f(x)| \leqslant L$. Тогда $|\int_x^{x+h} |f(t)|dt| \leqslant |L\int_x^{x+h} dt|$, так как

$$\int_x^{x+h} 1dt = \lim_{\lambda(P)\to 0}\sum_{i=1}^n 1\Delta x_i = |h|,$$

тогда $\delta = \frac{\epsilon}{L}$, что и требовалось доказать. □

Теорема 2.4.12 (о дифференцируемости интеграла Римана как функции по верхнему пределу)**.** Пусть $f \in R[a;b],\ x \in [a;b]$ и f непрерывна в точке x, тогда функция $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ дифференцируема в точке x, причем:

$$F'(x) = f(x) \implies (\int_a^x f(t)dt)'_x = f(x)$$

Доказательство. Пусть $h \in \mathbb{R}:\ x+h \in [a;b]$.

Рассмотрим $|\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - f(x)| = |\frac{1}{h}(\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt) - f(x)| = |\frac{1}{h}\int_a^{x+h} f(t)dt - f(x)| = |\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt - \frac{f(x)}{h}\int_x^{x+h} dt| = |\frac{1}{h}(\int_x^{x+h} f(t)dt - \int_x^{x+h} f(x)dt)| = |\frac{1}{h}(\int_x^{x+h}(f(t) - f(x))dt)| = \frac{1}{|h|}|\int_x^{x+h} |f(t) - f(x)|dt|$.

Так как f - непрерывна в точке x, то $\forall\epsilon > 0\ \exists\delta > 0:\ \forall h:\ |h| < \delta\ |f(t) - f(x)| < \epsilon$, где $t \in [x; x+h]$.

Тогда $|\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - f(x)| \leqslant \frac{1}{|h|}|\int_x^{x+h}|f(t)-f(x)|dt| < \frac{1}{|h|}\epsilon|\int_x^{x+h}dt| = \frac{1}{|h|}\epsilon|h| = \epsilon$

Таким образом, по определению производной:

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x) = F'(x).$$

□

Следствие. Если f - непрерывна на $[a;b]$, то на $[a;b]$ она имеет первообразную, которая равна:

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt + C$$

Замечание. Рассмотрим следующие классы (множества/пространства) функций:

- $R[a;b]$ - множество интегрируемых на $[a;b]$ функций;
- $C[a;b]$ - множество непрерывных на $[a;b]$ функций;
- $C^o[a;b]$ - множество дифференцируемых на $[a;b]$ функций.

Получаем:

$$C^o[a;b] \subset C[a;b] \subset R[a;b].$$

Теорема 2.4.13 (вторая теорема о среднем)**.** Пусть $f, g \in R[a;b]$, причем f - монотонна на $[a;b]$. Тогда $\exists\xi \in [a;b]$:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a)\int_a^\xi g(x)dx + f(b)\int_\xi^b g(x)dx$$

Лемма 2.4.3. Пусть $f, g \in R[a;b]$, причем f - невозрастающая и неотрицательная.

Тогда $\exists\xi \in [a;b]$:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a)\int_a^\xi g(x)dx.$$

Доказательство. (леммы)

Пусть P - произвольное разбиение отрезка $[a;b]$: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$. Тогда $\int_a^b f(x)g(x)dt = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)g(x)dx$ $+ \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x_{i-1})g(x)dx - \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x_{i-1})g(x)dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i}(f(x) - f(x_{i-1}))g(x)dx + \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x_{i-1})g(x)dx =$ (где $\sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i}(f(x)-f(x_{i-1}))g(x)dx = \rho$ и $\sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x_{i-1})g(x)dx = \sigma$) $= \rho + \sigma$.

Устремим $\lambda(P) \to 0$:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \lim_{\lambda(P)\to 0}\rho + \lim_{\lambda(P)\to 0}\sigma$$

Покажем, что пределы существуют, более того: $\lim\limits_{\lambda(P)\to 0} \rho = 0$.

Так как $g(x) \in R[a;b] \implies g$ - ограничена на $[a;b]$, то есть $\exists L > 0 : \ \forall x \in [a;b] \ |g(x)| \leqslant L$.

Рассмотрим $\omega_i = \omega_i(f, \Delta_i) = \sup\limits_{\xi_1, \xi_2 = \Delta_i} |f(\xi_1) - f(\xi_2)|$. Так как $f \in R[a;b]$, то по критерию интегрируемости: $\sum\limits_i \omega_i \Delta x_i \to 0$.

Тогда $|\rho| = |\sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} (f(x) - f(x_{i-1}))g(x)dx| \leqslant \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(x) - f(x_{i-1})||g(x)|dx \leqslant \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \omega_i L dx = L \sum_{i=1}^n \omega_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} dx = L \sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i$.

Пусть $\epsilon > 0$ задано. Выберем $\delta > 0 : \ \forall P : \ \lambda(P) < \delta$ и $\sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i < \frac{\epsilon}{L}$.

Имеем, что $|\rho| \leqslant L \sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i < L \frac{\epsilon}{L} = \epsilon \implies \lim\limits_{\lambda(P)\to 0} \rho = 0$.

Тогда $\int_a^b f(x)g(x)dx = \lim\limits_{\lambda(P)\to 0} \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x_{i-1})g(x)dx$. $\lim\limits_{\lambda(P)\to 0} \sigma$ существует, так как $\int_a^b f(x)g(x)dx = const$ и $\lim\limits_{\lambda(P)\to 0} \rho = 0$.

Рассмотрим функцию $C_1(x) = \int_a^x g(x)dx$:

1. $C_1(x)$ - непрерывна на $[a;b]$ $(x \in [a;b]) \implies C_1(x)$ принимает на $[a;b]$ *max min* значение (по теореме Вейерштрасса о максимальном значении), $m = \min\limits_{x\in[a;b]} C_1(x), \ M = \max\limits_{x\in[a;b]} C_1(x)$.

2. $\int_{x_{i-1}}^{x_i} g(x)dx = \int_a^{x_i} g(x)dx - \int_a^{x_{i-1}} g(x)dx = C_1(x_i) - C_1(x_{i-1})$.

   $\sigma = \sum_{i=1}^n f(x_{i-1}) \int_{x_{i-1}}^{x_i} g(x)dx = \sum_{i=1}^n f(x_{i-1})(C_1(x_i) - C_1(x_{i-1})) = f(x_0)C_1(x_1) - f(x_0)C_1(x_0) + f(x_1)C_1(x_2) - f(x_1)C_1(x_1) + \ldots + f(x_{n-2})C_1(x_{n-1}) - f(x_{n-2})C_1(x_{n-2}) + f(x_{n-1})C_1(x_n) - f(x_{n-1})C_1(x_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n-1} C_1(x_i)(f(x_{i-1}) - f(x_i)) + f(x_{n-1})C_1(x_n)$.

   Тогда $\sigma \geqslant m(\sum_{i=1}^{n-1}(f(x_{i-1}) - f(x_2)) + f(x_{n-1})) = m(f(x_0) - f(x_1) + f(x_1) - f(x_2) + f(x_2) - \ldots - f(x_{n-1}) + f(x_{n-1})) = mf(a)$. Аналогично, $\sigma \leqslant Mf(a)$.

   $$mf(a) \leqslant \sigma \leqslant Mf(a)$$

   Пусть $f(a) \neq 0 \implies (f(a) > 0) \ m \leqslant \frac{\sigma}{f(a)} \leqslant M$.

   $$m \leqslant \frac{1}{f(a)} \int_a^b f(x)g(x)dx \leqslant M$$

□