

Математический Анализ  
2 семестр

Данил Заблоцкий

11 мая 2023 г.

# Оглавление

<b>1</b>	<b>Дифференциальное исчисление</b>	<b>3</b>
1.1	Формула Тейлора . . . . .	3
1.1.1	Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано	3
1.1.2	Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа и в форме Коши . . . . .	6
1.2	Приложения дифференциального исчисления . . . . .	6
1.2.1	Монотонность функции . . . . .	6
1.2.2	Экстремумы . . . . .	6
1.2.3	Выпуклость функции . . . . .	6
1.3	Первообразная и неопределенный интеграл . . . . .	6
1.3.1	Интегрирование рациональных дробей . . . . .	8
1.3.2	Интегрирование рациональных дробей . . . . .	8
1.3.3	Разложение рациональной дроби на простые . . . . .	10
1.3.4	Метод неопределенных коэф-ов (следствия лемм) . . . . .	11
1.3.5	Метод Остроградского . . . . .	12
<b>2</b>	<b>Интегральное исчисление</b>	<b>14</b>
2.1	Базы. Предел функции по базе . . . . .	15
2.2	Разбиение. Интеграл Римана (v.2) . . . . .	17
2.3	Критерий интегрируемости . . . . .	19
2.3.1	Суммы Дарбу . . . . .	19
2.3.2	Классы интегрируемых функций . . . . .	22
2.3.3	Свойства интегрируемых функций . . . . .	23
2.3.4	Аддитивность интеграла Римана . . . . .	24
2.3.5	Монотонность интеграла Римана . . . . .	25
2.4	Интеграл Римана как функция верхнего предела интегрирования . . . . .	27
2.5	Формула Ньютона-Лейбница . . . . .	30
2.6	Интегрирование по частям в определенном интеграле и формула Тейлора . . . . .	31
2.7	Замена переменной в определенном интеграле . . . . .	32

<b>3</b>	<b>Геометрические приложения интеграла Римана</b>	<b>34</b>
3.1	Длина кривой . . . . .	34
3.2	Длина кривой как предел . . . . .	38
3.3	Площадь плоской фигуры . . . . .	42
3.4	Классы квадратуемых областей . . . . .	44
<b>4</b>	<b>Несобственные интегралы</b>	<b>46</b>

# Глава 1

## Дифференциальное исчисление

### 1.1 Формула Тейлора

#### 1.1.1 Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано

Пусть  $f : (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in (a; b)$ . Нужно построить многочлен  $P(x; x_0)$  вида:

$$P(x; x_0) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n$$

$f(x) - P(x; x_0) = r_n(x; x_0)$  -  $n$ -ый остаточный член в формуле Тейлора.

**Определение 1.1.1.** Остаточные члены в форме Пеано имеют вид:

$$r_n(x; x_0) = o_{x \rightarrow x_0}((x - x_0)^n)$$

**Определение 1.1.2.** Пусть  $f : (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in (a; b)$ ,  $f(x)$  имеет в точке  $x_0$  производные до  $n$ -ого порядка включительно.

**Многочленом Тейлора** (полиномом Тейлора) функции  $f(x)$  в точке  $x$  называется многочлен:

$$P(x; x_0) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

**Утверждение 1.1.1.** Если  $f : (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$  имеет в точке  $x_0 \in (a; b)$  производные до  $n$ -го порядка включительно и  $P(x; x_0)$  - ее многочлен Тейлора, то:

$$f(x_0) = P(x_0; x_0), \quad f'(x_0) = P'(x_0; x_0), \quad \dots, \quad f^{(n)}(x_0) = P^{(n)}(x_0; x_0)$$

*Доказательство.*  $P(x; x_0) = f(x) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$ , при  $x = x_0$ :  
 $P(x_0; x_0) = f(x_0)$

$$P'(x; x_0) = +\frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}2(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}n(x - x_0)^{n-1},$$

при  $x = x_0$ :  $P'(x_0; x_0) = \frac{f'(x_0)}{1!}$ ;  $P''(x; x_0) = f''(x_0) + \frac{f'''(x_0)}{3!}6(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}n(n-1)(x - x_0)^{n-2}$ ;  $P^{(n)}(x_0; x_0) = f^{(n)}(x_0)$ .  $\square$

**Теорема 1.1.1.** Пусть  $f : (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in (a; b)$ ,  $f$  имеет в точке  $x_0$  производные до  $n$ -ого порядка включительно, тогда существует единственный многочлен вида:

$$p(x; x_0) = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^n$$

такой, что:

$$f(x) - P(x; x_0) = o_{x \rightarrow x_0}((x - x_0)^n)$$

*Доказательство.* (теоремы)

1. Докажем единственность.

$$\text{Пусть } Q(x; x_0) = b_0 + b_1(x - x_0) + \dots + b_n(x - x_0)^n : f(x) - Q(x; x_0) = o_{x \rightarrow x_0}((x - x_0)^n), f(x) = P(x; x_0) + o_{x \rightarrow x_0}((x - x_0)^n).$$

$$\text{Рассмотрим разность этих выражений: } f(x) - f(x) = P(x; x_0) - Q(x; x_0) + o_{x \rightarrow x_0}((x - x_0)^n) = (a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)(x - x_0) + (a_2 - b_2)(x - x_0)^2 + \dots + (a_n - b_n)(x - x_0)^n + o_{x \rightarrow x_0}((x - x_0)^n) (*).$$

Переходя к пределу при  $x \rightarrow x_0$ , получим, что  $0 = a_0 - b_0 \implies a_0 = b_0$ . Разделим (\*) на  $x - x_0$ :  $0 = (a_1 - b_1) + (a_2 - b_2)(x - x_0) + \dots + (a_n - b_n)(x - x_0)^{n-1} + o_{x \rightarrow x_0}((x - x_0)^{n-1}) (**)$ ;

$$o_{x \rightarrow x_0}((x - x_0)^n) = \alpha(x)(x - x_0)^n, \alpha(x) \rightarrow 0 (x \rightarrow x_0)$$

Переходя к пределу при  $x \rightarrow x_0$  в (\*\*) получаем, что  $a_1 - b_1 = 0 \implies a_1 = b_1$ . Используя ММИ можно показать, что  $a_i = b_i$ ,  $i = 2, \dots, n \implies Q(x; x_0) = P(x; x_0)$ .

2. Докажем существование.

**Лемма 1.1.1.** Если функция  $\phi : (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in (a; b)$ , такая, что  $\phi(x_0) = \phi'(x_0) = \dots = \phi^{(n)}(x_0) = 0$  ( $\phi(x)$  имеет производную до  $n$ -ого порядка включительно), причем все производные непрерывны в некоторой окрестности точки  $x_0$ . Тогда:

$$\phi(x) = o_{x \rightarrow x_0}((x - x_0)^n), (x \rightarrow x_0)$$

Допустим, что лемма доказана. Тогда положим  $\phi(x) = f(x) - P(x; x_0)$ , тогда будет выполнено условие леммы (+ смотри утверждение в начале параграфа)  $\implies f(x) - P(x; x_0) = o_{x \rightarrow x_0}((x - x_0)^n)$  при  $x \rightarrow x_0$ , где  $P(x; x_0)$  - многочлен Тейлора функции  $f$  в точке  $x_0$ .  $\square$

*Доказательство.* (леммы)

По индукции.

Пусть  $n = 1$ , то есть  $\phi$  - дифференцируема в окрестности точки  $x_0$  и  $\phi(x_0) = \phi'(x_0) = 0$ . Тогда  $\phi(x) = \phi(x) - \phi(x_0) = \phi'(\xi)(x - x_0)$ , где  $\xi \in (a; b)$  (по теореме Лагранжа).

Далее,  $\phi'(\xi) \rightarrow \phi'(x_0)$  при  $\xi \rightarrow x_0$  (используя непрерывность функции)  $\Rightarrow \phi'(\xi)$  - бесконечно малая, поскольку  $\phi'(x_0) = 0$ .

То есть  $\phi'(\xi) \rightarrow 0$  при  $\xi \rightarrow x_0 \Rightarrow \phi(x) = \phi'(\xi)(x - x_0) = o_{\xi \rightarrow x_0}(x - x_0)$ .

Допустим, лемма верна для  $k = n - 1$ . Положим  $g(x) = \phi'(x)$ . Тогда  $g(x)$  имеет непрерывные производные до  $(n - 1)$ -ого порядка включительно, при этом  $g(x_0) = g'(x_0) = \dots = g^{(n)}(x_0) = 0 \Rightarrow$  по утверждению леммы:

$$g(x) = o_{x \rightarrow x_0}((x - x_0)^{n-1})$$

Далее,  $\phi(x) - \phi(x_0) = \phi(x) = \phi'(\xi)(x - x_0) = g(\xi)(x - x_0) = o_{\xi \rightarrow x_0}((\xi - x_0)^{n-1})(x - x_0) = \alpha(\xi)(\xi - x_0)^{n-1}(x - x_0)$ ,  $\alpha(\xi) \rightarrow 0$  при  $\xi \rightarrow x_0$ .

Отсюда  $|\phi(x)| = |\alpha(\xi)| |\xi - x_0|^{n-1} |x - x_0| \leq |\alpha(\xi)| |x - x_0|^n$  ( $\alpha(\xi) \rightarrow 0$  при  $\xi \rightarrow x_0$ )  $\Rightarrow \phi(x) = o_{x \rightarrow x_0}((x - x_0)^n)$ .  $\square$

### Примеры представления некоторых функций через многочлен Тейлора ( $x_0 = 0$ )

1.  $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$
2.  $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o_{x \rightarrow 0}(x^{2n+1})$
3.  $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o_{x \rightarrow 0}(x^{2n})$
4.  $\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n!} + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$
5.  $(1 + x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-(n-1))}{n!} x^n + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$

### 1.1.2 Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа и в форме Коши

## 1.2 Приложения дифференциального исчисления

### 1.2.1 Монотонность функции

### 1.2.2 Экстремумы

### 1.2.3 Выпуклость функции

Геометрический смысл выпуклой функции

## 1.3 Первообразная и неопределенный интеграл

**Определение 1.3.1** (Первообразная функция). Пусть  $X$  - промежуток,  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ . Функция  $F(x)$  называется **первообразной**  $f(x)$ , если производная  $F'(x) = f(x)$ , при этом  $F(x)$  дифференцируема и непрерывна.

**Пример 1.**  $f(x) = 2x \implies F(x) = x^2$ . В самом деле,  $F'(x) = f(x)$ .

**Утверждение 1.3.1.** (О первообразной)

1. Если  $F(x)$  - первообразная функции  $f(x)$  на промежутке  $X$ , и  $\Phi(x) = F(x) + C$ ,  $c \in \mathbb{R}$ , то  $\Phi(x)$  - тоже первообразная.
2. Если  $F(x)$  и  $\Phi(x)$  - две первообразные для  $f(x)$  на промежутке  $X$ , то  $\exists C = \text{const}$ ,  $c \in \mathbb{R}$  такая, что  $\Phi(x) = F(x) + C$ .

*Доказательство.* (Утверждения о первообразной)

1.  $\Phi'(x) = (F(x) + C)' = F'(x) = f(x) \implies \Phi(x)$  - первообразная для  $f(x)$ .
2. Так как  $F(x)$  и  $\Phi(x)$  - первообразные для  $f(x)$ , то  $F'(x) = f(x)$ ,  $\Phi'(x) = f(x)$ . Рассмотрим функцию  $\phi = \Phi(x) - F(x)$ ,  $\forall x \in X$ :  $\phi'(x) = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$ . Рассмотрим  $\forall x_1, x_2 \in X$ , по теореме Лагранжа,  $\exists \xi \in (x_1, x_2) : \phi(x_1) - \phi(x_2) = \phi'(\xi)(x_1 - x_2) = 0 \implies \phi(x_1) = \phi(x_2) \implies \phi(x) = \text{const}$  для  $\forall x \in X$ .

□

**Определение 1.3.2** (Неопределенный интеграл). Совокупность всех первообразных для функции  $f(x)$  на промежутке  $X$  называется **неопределенным интегралом** и обозначается:

$$\int f(x)dx$$

Таким образом,  $\int f(x)dx = \{F(x) + C, \text{ где } F'(x) = f(x), C \in \mathbb{R}\}$ , или:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

**Замечание.** (Для неопределенного интеграла)

- $(\int f(x)dx)'_x = (F(x) + C)'_x = F'(x) = f(x)$ ;
- $d(\int f(x)dx) = d(F(x) + C) = (F(x) + C)'dx = F'(x)dx = f(x)dx$ ;
- $\int d(F(x)) = \int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x) + C, C \in \mathbb{R}$ .

**Определение 1.3.3** (интегрирование). Операция нахождения первообразной функции  $f(x)$  называется ее **интегрированием**.

**Утверждение 1.3.2.** (Основные методы интегрирования)

Пусть  $f : X \rightarrow \mathbb{R}, g : X \rightarrow \mathbb{R}, X$  - промежуток:

1. Пусть  $\alpha, \beta \in \mathbb{R} = \text{const}$ , тогда:  

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx.$$
2. Формула интегрирования по частям:  

$$udv = uv - \int u dv, u = u(x), v = v(x).$$
3. Интегрирование подстановкой:  
 Пусть  $T$  - промежуток,  $X = X(t)$  - дифференцируема на  $T$ .  
 Тогда  $\int f(X(t)) * X'(t)dt = F(X(t)) + C = \int f(x)dx + C$ .

*Доказательство.* (Утверждения об основных методах интегрирования)

1. Возьмем производную по  $x$  от обеих частей равенства:  $(\alpha f(x) + \beta g(x))'_x = \alpha f'(x) + \beta g'(x) = \alpha F'(x) + \beta G'(x) = \alpha (\int f(x)dx)'_x + \beta (\int g(x)dx)'_x$  - является производной для  $\alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx$ .
2. Рассмотрим  $d(uv) = vdu + u dv$  :  $\int d(uv) = \int vdu + \int u dv$ . Так как  $d(uv) = uv$ , то из того, что  $\int d(uv) = \int vdu + \int u dv \implies \int u dv = uv - \int vdu$ .
3.  $f(X(t)) * X'(t)dt = \int f(X(t))dx(t) = \int f(x)dx = F(x) + C = F(X(t)) + C$ ;  $(F(X(t)) + C)'_t = F'_t * X'_t = f(x) * X'(t) = (\int f(X(t)) * X'(t)dt)'_t$ .

□

**Пример 2.** (Интегрирование функций)

1.  $\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C$
2.  $\int \ln x dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x, dv = dx, du = d(\ln x) = \frac{dx}{x} \implies \\ \implies \int dv = \int dx \implies v = x \end{array} \right| = x \ln x - \int x \frac{dx}{x} = x \ln x - x + C$



$$3. \int \sqrt{1-x^2} dx = \left| \begin{array}{l} x = \sin t, \quad dx = \\ = d(\sin t) = \cos t dt \end{array} \right| = \int \cos^2 t dt = \int \frac{1}{2}(1 + \cos 2t) dt = \\ \frac{1}{2} \int dt + \frac{1}{2} \int \cos 2t dt = \frac{t}{2} + \frac{1}{4} \int \cos 2t d(2t) = \frac{t}{2} + \frac{1}{4} \sin 2t + C = \frac{\arcsin x}{2} + \\ \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} + C$$

**Пример 3.** (Неинтегрируемые функции)

$$\int \frac{x}{\ln x} dx; \quad \int \frac{e^x}{x} dx; \quad \int e^{x^2} dx$$

### 1.3.1 Интегрирование рациональных дробей

**Определение 1.3.4** (Рациональная дробь). Функция вида  $\frac{P(x)}{Q(x)}$ , где  $P(x)$ ,  $Q(x)$  - многочлены, называется **рациональной дробью**, или рациональной функцией.

Если  $\deg P(x) < \deg Q(x)$ , то дробь называется **правильной**, иначе - **неправильной**.

Если дробь  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  - неправильная, то ее можно представить в виде  $\frac{P(x)}{Q(x)} = M(x) + \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$ , где  $\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$  - правильная дробь. Поэтому достаточно уметь интегрировать правильную дробь.

**Определение 1.3.5** (Простые дроби). **Простыми дробями** будем называть дроби следующих четырех видов:

1.  $\frac{A}{x-a}, \quad A, a \in \mathbb{R}$
2.  $\frac{A}{(x-a)^k}, \quad A, a \in \mathbb{R}, \quad k > 1$
3.  $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}, \quad A, B, p, q \in \mathbb{R}, \quad p^2 - 4q < 0$
4.  $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}, \quad A, B, p, q \in \mathbb{R}, \quad k > 1, \quad p^2 - 4q < 0$

### 1.3.2 Интегрирование рациональных дробей

1.  $\int \frac{A}{x-a} dx = A \int \frac{d(x-a)}{x-a} = \left| \begin{array}{l} \int \frac{dt}{t} \\ d(x-a) = dx \end{array} \right| = A \ln |x-a| + C$
2.  $\int \frac{A}{(x-a)^k} dx = A \int (x-a)^{-k} dx = A \int (x-a)^{-k} d(x-a) = \left| \begin{array}{l} \int t^n dt = \\ = \frac{t^{n+1}}{n+1} \end{array} \right| = \\ A \frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C = \frac{A}{(x-a)^{k-1}(1-k)} + C$

$$3. \int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx = \left| \begin{array}{l} x^2+px+q = (x^2+2\frac{p}{2}x+\frac{p^2}{4}) - \frac{p^2}{4} + q = \\ = (x+\frac{p}{2})^2 - \frac{p^2-4q}{4}, \quad (-\frac{p^2-4q}{4} = C > 0) \end{array} \right| = \int \frac{Ax+B}{(x+\frac{p}{2})^2+C} dx =$$

$$A \int \frac{x dx}{(x+\frac{p}{2})^2+C} + B \int \frac{dx}{(x+\frac{p}{2})^2+C} = \left| \begin{array}{l} d((x+\frac{p}{2})^2+C) = \\ = 2(x+\frac{p}{2}) dx \end{array} \right| = \dots$$

$$A \int \frac{x dx}{(x+\frac{p}{2})^2+C} = \frac{A}{2} \int \frac{(2(x+\frac{p}{2})-p) dx}{(x+\frac{p}{2})^2+C} = \frac{A}{2} \int \frac{2(x+\frac{p}{2}) dx}{(x+\frac{p}{2})^2+C} -$$

$$\frac{Ap}{2} \int \frac{dx}{(x+\frac{p}{2})^2+C} = \left| \int \frac{dx}{(x+\frac{p}{2})^2+C} = I \right| =$$

$$\frac{A}{2} \int \frac{d((x+\frac{p}{2})^2+C)}{(x+\frac{p}{2})^2+C} - \frac{Ap}{2} I = \frac{A}{2} \ln |(x+\frac{p}{2})^2+C| - \frac{Ap}{2} I;$$

$$I = \frac{dx}{(x+\frac{p}{2})^2+C} = \frac{1}{C} \int \frac{\sqrt{C} d(\frac{x}{\sqrt{C}} + \frac{p}{2\sqrt{C}})}{(\frac{x}{\sqrt{C}} + \frac{p}{2\sqrt{C}})^2+1} =$$

$$\left| \int \frac{dt}{t^2+1} = \arctan t + C \right| = \frac{1}{\sqrt{C}} \arctan(\frac{x+2p}{2\sqrt{C}}) + C_1;$$

$$\frac{1}{C}(x+\frac{p}{2})^2 = (\frac{1}{\sqrt{C}})^2(x+\frac{p}{2})^2 = (\frac{1}{\sqrt{C}}(x+\frac{p}{2}))^2 =$$

$$(\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{C}+\frac{p}{2\sqrt{C}}})^2;$$

$$\dots = \frac{A}{2} \ln |(x+\frac{p}{2})^2 - \frac{p^2-4q}{4}| + (B - \frac{Ap}{2}) \frac{1}{\sqrt{C}} \arctan(\frac{x+2p}{2\sqrt{C}}) + C_1$$

$$4. \int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k} dx = \left| \begin{array}{l} d(x^2+px+q) = \\ = 2x+p \end{array} \right| = \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p)+B-\frac{Ap}{2}}{(x^2+px+q)^k} dx = \frac{A}{2} \int \frac{d(x^2+px+q)}{(x^2+px+q)^k} +$$

$$(B-\frac{Ap}{2}) \int \frac{dx}{((x+\frac{p}{2})^2+(\frac{-p^2+4q}{4}))^k} = \frac{A}{2(1-k)} \frac{1}{(x^2+px+q)^{k-1}} + \frac{(B-\frac{Ap}{2})}{(-\frac{p^2+4q}{4})^k} \int \frac{dx}{((\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{-\frac{p^2+4q}{4}}})^2+1)^k} =$$

$$\frac{A}{2(1-k)} \frac{1}{(x^2+px+q)^{k-1}} + \frac{(B-\frac{Ap}{2}) \sqrt{-\frac{p^2+4q}{4}}}{(-\frac{p^2+4q}{4})^k} \int \frac{d(\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{-\frac{p^2+4q}{4}}})}{\left( \left( \frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{-\frac{p^2+4q}{4}}} \right)^2 + 1 \right)^k}$$

Таким образом, чтобы вычислить интеграл 4., нужно вычислить инте-

$$\text{грал } \int \frac{dt}{(t^2+1)^k} = \left| \begin{array}{l} u = \frac{1}{(t^2+1)^k}; \quad du = d((t^2+1)^k) = -k(t^2+1)^{-k-1} 2t dt \\ dv = dt \implies v = t \end{array} \right| =$$

$$\frac{t}{(t^2+1)^k} - \int \frac{-2kt^2}{(t^2+1)^{k+1}} dt = \frac{t}{(t^2+1)^k} + 2k \left( \int \frac{t^2+1}{(t^2+1)^{k+1}} dt - \int \frac{dt}{(t^2+1)^{k+1}} \right);$$

$$\int \frac{dt}{(t^2+1)^k} = \frac{t}{(t^2+1)^k} + 2k \int \frac{dt}{(t^2+1)^k} - 2k \int \frac{dt}{(t^2+1)^{k+1}} \left| \begin{array}{l} \frac{dt}{(t^2+1)^k} = I_k \\ \frac{dt}{(t^2+1)^{k+1}} = I_{k+1} \end{array} \right|;$$

$$2kI_{k+1} = \frac{t}{(t^2+1)^k} + (2k-1)I_k; \quad I_{k+1} = \frac{t}{2k(t^2+1)^k} + \frac{2k-1}{2k} I_k, \quad k = 1, \dots$$

### 1.3.3 Разложение рациональной дроби на простые

**Лемма 1.3.1.** Пусть  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  - правильная рациональная дробь (несократимая). Причем  $Q(x) = (x-a)^k Q_1(x)$ , где  $Q_1(x)$  не делится на  $(x-a)$ . Тогда  $\exists$  многочлен  $P_1(x)$  из  $\exists A \in \mathbb{R} : \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{P_1(x)}{(x-a)^{k-1} Q_1(x)}$ . При этом дробь (рациональная)  $\frac{P_1(x)}{(x-a)^{k-1} Q_1(x)}$  - правильная.

*Доказательство.* Рассмотрим  $\frac{A}{(x-a)^k} + \frac{P_1(x)}{(x-a)^{k-1} Q_1(x)} = \frac{Q_1(x)A + (x-a)P_1(x)}{Q(x)}$ . Нужно доказать, что  $\frac{Q_1(x)A + (x-a)P_1(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{Q(x)}$ .

Отсюда следует, что для выполнения леммы, многочлен  $P(x)$  должен раскладываться:  $P(x) = Q_1(x) + (x-a)P_1(x) \implies P_1(x) = \frac{P(x) - AQ_1(x)}{x-a}$ . Чтобы существовал многочлен  $P_1(x)$ , нужно, чтобы  $P(x) - AQ_1(x)$  делилась на  $x-a$ . Для этого точка  $a$  должна быть корнем  $P(x) - AQ_1(x)$ , то есть чтобы  $P(a) - AQ_1(a) = 0 \implies A = \frac{P(a)}{Q_1(a)}$ ;  $Q_1(a) \neq 0$  по условию. Таким образом, при  $A = \frac{P(a)}{Q_1(a)}$ , функция  $P_1(x)$  будет являться многочленом  $P_1(x) = \frac{P(x) - \frac{P(a)}{Q_1(a)} Q_1(x)}{x-a}$ .

Покажем, что дробь  $\frac{P_1(x)}{(x-a)^{k-1} Q_1(x)}$  - правильная, то есть  $\deg P_1(x) < \deg[(x-a)^{k-1} Q_1(x)]$ . Имеем,  $P_1(x) = \frac{P(x) - AQ_1(x)}{x-a}$ ;  $\deg P_1(x) \leq \max(\deg P(x), \deg Q_1(x)) - 1$ . Тогда  $\deg P_1(x) \leq \deg P(x) - 1 < \deg Q(x) - 1 = \deg[(x-a)^{k-1} Q_1(x)]$ .

Если  $\deg Q_1(x) \geq \deg P(x) \implies \deg P_1(x) \leq \deg Q_1(x) - 1 < \deg Q(x) - 1 = \deg[(x-a)^{k-1} Q_1(x)]$ . Дробь  $\frac{P_1(x)}{(x-a)^{k-1} Q_1(x)}$  - правильная.  $\square$

**Лемма 1.3.2.** Пусть  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  - правильная дробь. При этом  $Q(x) = (x^2 + px + q)^k Q_1(x)$ , здесь  $p^2 - 4q < 0$ . Тогда  $\exists M, N \in \mathbb{R}$  и  $\exists$  многочлен  $P_1(x)$ :  $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k} + \frac{P_1(x)}{(x^2+px+q)^{k-1} Q_1(x)}$ . При этом  $Q_1(x)$  не делится на  $x^2 + px + q$ . Дробь  $\frac{P_1(x)}{(x^2+px+q)^{k-1} Q_1(x)}$  - правильная.

*Доказательство.* Если разложение  $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k} + \frac{P_1(x)}{(x^2+px+q)^{k-1} Q_1(x)}$  верно, то:  $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{(Mx+N)Q_1(x) + P_1(x)(x^2+px+q)}{Q(x)}$ , следовательно  $P(x)$  должен выражаться как:  $P(x) = (Mx+N)Q_1(x) + P_1(x)(x^2+px+q) \implies P_1(x) = \frac{P(x) - (Mx+N)Q_1(x)}{x^2+px+q}$ .

Так как нужно, чтобы  $P_1(x)$  был многочленом, то  $P(x) - (Mx+N)Q_1(x)$  должно делиться на  $x^2 + px + q$ .

Рассмотрим остаток от деления  $P(x)$  на  $x^2 + px + q$  в форме  $\alpha x + \beta$  и остаток от деления  $Q_1(x)$  на  $x^2 + px + q$  в форме  $\gamma x + \delta$ .

Таким образом,  $P(x) = (x^2 + px + q)P_2(x) + (\alpha x + \beta)$ ;  $Q_1(x) = (x^2 + px + q)Q_2(x) + (\gamma x + \delta)$ .

Отсюда достаточно показать, что на  $x^2 + px + q$  делится многочлен  $\alpha x + \beta - (Mx + N)(\gamma x + \delta) = -M\gamma x^2 + x(-N\gamma - M\delta + \alpha) + (\beta - N\delta)$ .

Поделим полученный выше многочлен на  $x^2 + px + q$  :  

$$\frac{-M\gamma x^2 + x(-N\gamma - M\delta + \alpha) + (\beta - N\delta)}{x^2 + px + q} = -M\gamma + (\alpha - N\gamma - M\delta + M\gamma p)x + (\beta - N\delta + M\gamma q).$$

Для целого деления необходимо, чтобы:

$$\begin{cases} \alpha - N\gamma - M\delta + M\gamma p = 0 \\ \beta - N\delta + M\gamma q = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} -(\delta - \gamma p)M - \gamma N = -\alpha \\ \gamma q M - \delta N = -\beta \end{cases}$$

где  $M, N$  - неизвестные;

$$\begin{cases} \alpha - N\gamma - M\delta + M\gamma p = 0 \\ \beta - N\delta + M\gamma q = 0 \end{cases} ; \quad \begin{vmatrix} \delta - \gamma p & \gamma \\ \gamma q & -\delta \end{vmatrix} = -\delta^2 + \gamma p \delta - \gamma^2 q.$$

Заметим, что  $\alpha$  и  $\beta$ , а так же  $\gamma$  и  $\delta$  одновременно в 0 не обращаются.  
 $p^2 - 4q < 0 \implies q \neq 0, \quad -(\delta^2 + \gamma^2 q) + \gamma p \delta:$

1.  $\gamma = 0, \delta = 0$  - невозможно;
2.  $\gamma = 0, \delta \neq 0 \implies -\delta^2 \neq 0$ ;
3.  $\gamma \neq 0, \delta = 0 \implies -\gamma^2 q \neq 0$ ;
4.  $\gamma \neq 0, \delta \neq 0$ .

Тогда, если  $-(\delta^2 + \gamma^2 q) + \gamma p \delta = 0 \implies \gamma p \delta = \delta^2 + \gamma^2 q$ ;  
 $p^2 - 4q < 0, p^2 < 4q \implies 0 \leq \frac{p^2}{4} < q$

$\gamma \neq 0$ : если  $(\frac{\delta}{\gamma})^2 + (-\frac{\delta}{\gamma})p + q = 0$ , то  $x = \frac{\delta}{\gamma}$  - корень многочлена  $x^2 + px + q \implies$  противоречие с тем, что  $x^2 + px + q$  не имеет вещественных корней  
 $\implies \Delta \neq 0 \implies \exists M, N$  и  $\exists$  многочлен  $P_1(x)$ .  $\square$

### 1.3.4 Метод неопределенных коэф-ов (следствия лемм)

Если  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  - правильная дробь и  $Q(x) = (x - a_1)^{k_1} * \dots * (x - a_s)^{k_s} * (x^2 + p_1x + q_1)^{m_1} * \dots * (x^2 + p_rx + q_r)^{m_r}$ , то верно следующее разложение:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=0}^{k_1-1} \frac{A_i}{(x-a_1)^{k_1-i}} + \dots + \sum_{i=0}^{k_s-1} \frac{A_i^s}{(x-a_s)^{k_s-i}} + \sum_{i=0}^{m_1-1} \frac{M_i x + N_i}{(x^2 + p_1x + q_1)^{m_1-i}} + \dots + \sum_{i=0}^{m_r-1} \frac{M_i^r x + N_i^r}{(x^2 + p_rx + q_r)^{m_r-i}},$$

где  $A_i, \dots, A_i^s, M_i, N_i, \dots, M_i^r, N_i^r \in \mathbb{R}$ .

**Пример 4.**  $Q(x) = (x-1)^3(x+2)^2(x^2+x+1)^3$

$$\frac{x^5-x^3+1}{Q(x)} = \frac{A_0^1}{(x-3)^3} + \frac{A_1^1}{(x-3)^2} + \frac{A_2^1}{(x-3)} + \frac{A_0^2}{(x+2)^2} + \frac{A_1^2}{(x+2)} + \frac{M_0x+N_0}{(x^2+x+1)^3} + \frac{M_1x+N_1}{(x^2+x+1)^2} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+x+1)}$$

Приведем в  $\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=0}^{k_1-1} \frac{A_i}{(x-a_i)^{k_1-i}} + \dots$  правую часть к общему знаменателю и получим:  $\frac{P(x)}{Q(x)} \equiv \frac{R(x)}{Q(x)}$ ;  $\deg Q(x) = k_1 + \dots + k_s + 2m_1 + \dots + 2m_r = n$ ;

$$l = \deg R(x) = \deg P(x) \leq \deg Q(x) - 1.$$

Количество неизвестных коэф. у множества  $R(x)$  равно  $n$  штук, приравнивая коэф. при соответствующих степенях  $x$  (в том числе при  $x^0$ ) получим  $n$  уравнений с  $n$  неизвестными (старшая степень  $x$  множества  $R(x)$  равна  $n-1$ ).

### 1.3.5 Метод Остроградского

**Теорема 1.3.1.** Пусть  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  - правильная несократимая дробь.

Тогда  $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} dx + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} dx$ . Дробь  $\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$  и  $\frac{P_2(x)}{Q_2(x)}$  - правильные.  $Q(x) = Q_1(x)Q_2(x)$  и многочлен  $Q_2(x)$  представляет собой произведение всех линейных и квадратичных множителей многочлена  $Q(x)$ , взятых в первой степени.

**Пример 5.**  $\int \frac{x^2+2x+5}{(x-2)(x^2+1)^2} dx = \frac{P_1(x)}{x^2+1} + \int \frac{P_2(x)}{(x-2)(x^2+1)} dx = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \int \frac{Cx^2+Dx+E}{(x-2)(x^2+1)} dx$

*Доказательство.* Рассмотрим  $\int \frac{A}{(x-a)^k} dx = \frac{A}{1-k} \frac{1}{(x-a)^{k-1}}$ ;

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k} dx = \frac{A}{(x^2+px+q)^{k-1}} + B \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^k} = \frac{A}{(x^2+px+q)^{k-1}} + \frac{C}{(x^2+px+q)^{k-1}} + D \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^{k-1}} = \frac{A}{(x^2+px+q)^{k-1}} + \dots + \frac{V}{(x^2+px+q)^2} + W \int \frac{dx}{x^2+px+q}.$$

Представим  $Q(x)$  в виде  $Q(x) = (x-a_1)^{k_1} * \dots * (x-a_s)^{k_s} * (x^2+p_1x+q_1)^{m_1} * \dots * (x^2+p_rx+q_r)^{m_r}$ , тогда:

$$Q_2(x) = (x-a_1) * \dots * (x-a_s) * (x^2+p_1x+q_1) * \dots * (x^2+p_rx+q_r);$$

$$Q_1(x) = (x-a_1)^{k_1-1} * \dots * (x-a_s)^{k_s-1} * (x^2+p_1x+q_1)^{m_1-1} * \dots * (x^2+p_rx+q_r)^{m_r-1};$$

Из метода неопределенных коэффициентов и того, что  $\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k} dx = \frac{A}{(x^2+px+q)^{k-1}} + \dots + \frac{V}{(x^2+px+q)^2} + W \int \frac{dx}{x^2+px+q} \implies \int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} dx$ .

Как найти  $P_1(x)$  и  $Q_1(x)$ ?

Продифференцируем  $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} dx$ :

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P_1'(x)Q_1(x) - P_1(x)Q_1'(x)}{Q_1^2} + \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}. \text{ Рассмотрим: } \frac{P_1'(x)Q_1(x) - P_1(x)Q_1'(x)}{Q_1^2} =$$

$$\frac{P_1'(x) - P_1(x)\frac{Q_1'(x)}{Q_1(x)}}{Q_1(x)} = \frac{P_1'(x)Q_1(x) - P_1(x)Q_1'(x)}{Q_1(x)Q_2(x)}.$$

Пусть  $H(x) = \frac{Q_1'(x)Q_2(x)}{Q_1(x)}$  - многочлен (нужно показать).

Пусть  $Q_1(x)$  имеет среди своих множителей многочлен вида  $(x-a)^n$ , тогда  $Q_1'(x)$  будет иметь в своем составе  $(x-a)^{n-1}$ , а  $Q_2(x)$  только содержит в себе выражение  $(x-a) \implies H(x)$  - многочлен.

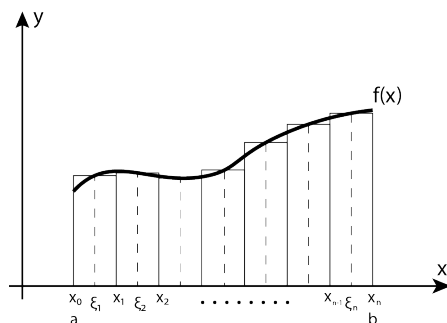
Коэффициенты многочленов  $P_1(x)$  и  $P_2(x)$  можно найти с помощью метода неопределенных коэффициентов из выражения  $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k} + \frac{P_1(x)}{(x^2+px+q)^{k-1}Q_1(x)}$ .  $\square$

## Глава 2

# Интегральное исчисление

### Интеграл Римана

**Определение 2.0.1** (интеграл Римана). Пусть  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Разобьем отрезок  $[a; b]$  на  $n$  частей точками  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ . В каждом таком кусочке выберем точку  $\xi_i \in [x_{i-1}; x_i]$ ,  $i = 1, \dots, n$ .



$\Delta i = [x_{i-1}, x_i]$ ,  $\Delta x = x_i - x_{i-1}$  - длина отрезка  $\Delta i$ .

Составим сумму  $S_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$ , где  $f(\xi_i)$  - высота  $i$ -го прямоугольника и  $\Delta x_i$  - ширина  $i$ -го прямоугольника.

$S_n$  - площадь ступенчатой фигуры, составленной из прямоугольников под графиком функции  $f(x)$ .

Говорят, что функция  $f$  интегрируема на  $[a; b]$ , если существует предел интегральных сумм  $S_n$ , то есть  $\exists \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} S_n$ , причем этот предел не зависит ни от способа разбиения отрезка  $[a; b]$ , ни от способа выбора точек  $\xi_i$ .

Этот предел называется **интегралом Римана** функции  $f$  на  $[a; b]$ . Класс интегрируемых функций на отрезке  $[a; b]$  будем обозначать  $R([a; b])$ .

## 2.1 Базы. Предел функции по базе

**Определение 2.1.1** (база множества). Пусть  $X$  - произвольное множество.

Система  $\beta$  подмножеств множества  $X$  называется **базой** на  $X$ , если:

1.  $\forall \beta \in \beta \quad \beta \neq \emptyset$
2.  $\forall \beta_1, \beta_2 \in \beta \quad \exists \beta_3 \in \beta : \quad \beta_3 \subset \beta_1 \cap \beta_2$

**Пример 6** (баз множества). 1.  $\beta = \{X\}$  - база

2.  $X = \mathbb{R}, \quad \beta = \{\beta_n = (-\frac{1}{n}; \frac{1}{n}), \quad n \in \mathbb{N}\}$
3.  $X = \mathbb{R}, \quad \beta = \{\beta_\epsilon = \{x : 0 < |x| < \epsilon\}, \epsilon > 0\}$  (выколотые окрестности нуля)

**Определение 2.1.2** (предел по базе). Пусть  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\beta$  - база на  $X$

Число  $A \in \mathbb{R}$  называется **пределом** функции  $f$  **по базе**  $\beta$ , если  $\forall \epsilon > 0 \exists$  элемент базы  $\beta \in \beta : \quad |f(x) - A| < \epsilon$ .

$$\lim_{\beta} f(x)$$

**Определение 2.1.3** (предел по базе (МП)). Пусть  $(Y, d)$  - МП,  $f : X \rightarrow Y$ ,  $\beta$  - база на  $X$ .

$y \in Y$  называется **пределом** функции  $f(x)$  **по базе**  $\beta$ , если  $\forall \epsilon > 0 \exists \beta \in \beta \quad \forall x \in \beta : \quad d(f(x), y) < \epsilon$ , или, что то же самое,  $\forall V_Y(y) \exists \beta \in \beta \quad f(\beta) \subset V_Y(y)$ , где  $V_Y$  - окрестность метрического пространства  $Y$ .

**Теорема 2.1.1** (основные свойства предела по базе). Пусть  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\beta$  - база на  $X$ :

1. Если  $\exists \lim_{\beta} f(x)$ , то  $\exists \beta \in \beta : f$  ограничена на  $\beta$
2. Если  $\lim_{\beta} f(x) = A$  и  $\lim_{\beta} f(x) = B$ , то  $A = B$



**Теорема 2.1.2** (связь предела по базе с арифметическими операциями). Пусть  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\beta$  - база на  $X$ ,  $\lim_{\beta} f(x) = A$ ,  $\lim_{\beta} g(x) = B$ :

1.  $\lim_{\beta} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B$
2.  $\lim_{\beta} (f(x)g(x)) = AB$
3.  $\lim_{\beta} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{A}{B}$ , если  $g(x) \neq 0$ ,  $\beta \neq 0$

**Теорема 2.1.3** (связь предела функции по базе с неравенствами). Пусть  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\beta$  - база на  $X$ :

1. Если  $\exists \beta \in \beta : \forall x \in \beta f(x) \leq g(x)$ , то  $\lim_{\beta} f(x) \leq \lim_{\beta} g(x)$
2. Если  $\lim_{\beta} f(x) < \lim_{\beta} g(x)$ , то  $\exists \beta \in \beta \forall x \in \beta f(x) < g(x)$

Если  $\lim_{\beta} f(x) \geq \lim_{\beta} g(x)$ , то  $\exists \beta \in \beta \forall x \in \beta f(x) \geq g(x)$

3. Если  $h : X \rightarrow \mathbb{R}$  и  $\exists \beta \in \beta : \forall x \in \beta f(x) \leq h(x) \leq g(x)$  **И**  $A = \lim_{\beta} f(x) = \lim_{\beta} g(x)$ , то  $\lim_{\beta} h(x) = A$

**Теорема 2.1.4** (критерий Коши существования предела по базе). Существуют две формулировки:

1. Пусть  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\beta$  - база на  $X$ .  
Функция  $f(x)$  имеет предел по базе  $\beta \iff \forall \epsilon > 0 \exists \beta \in \beta : \forall x_1, x_2 \in \beta |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$
2. Пусть  $(Y, d)$  - МП (полное),  $f : X \rightarrow Y$ ,  $\beta$  - база на  $X$ .  
Функция  $f(x)$  имеет предел по базе  $\beta \iff \forall \epsilon > 0 \exists \beta \in \beta : \forall x_1, x_2 \in \beta d(f(x_1), f(x_2)) < \epsilon$

*Доказательство.* (критерия Коши  $\exists$  предела по базе)

"  $\rightarrow$  " Пусть  $\lim_{\beta} f(x) = A$ . Покажем, что  $\forall \epsilon > 0 \exists \beta \in \beta : \forall x_1, x_2 \in \beta |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$ . Рассмотрим  $|f(x_1) - f(x_2)| = |f(x_1 - A) + (A - f(x_2))| \leq |f(x_1) - A| + |f(x_2) - A| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$ .

"  $\leftarrow$  " Пусть  $\forall \epsilon > 0 \exists \beta \in \beta : \forall x_1, x_2 \in \beta |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$ . Покажем, что  $\lim_{\beta} f(x)$ . Возьмем  $\beta_1 \in \beta : \forall x_1, x_2 \in \beta_1 |f(x_1) - f(x_2)| < 1$ . Возьмем  $\beta'_1 \in \beta : \forall x_1, x_2 \in \beta'_1 |f(x_1) - f(x_2)| < \frac{1}{2}$ . Пусть  $\beta_2 \subset \beta_1 \cap \beta'_1$  и так далее.

Таким образом построим систему вложенных множеств:  $\beta_1 \supset \beta_2 \supset \dots \supset \beta_n \supset \dots$ , при этом  $\forall x_1, x_2 \in \beta_n \quad |f(x_1) - f(x_2)| < \frac{1}{2^{n-1}}$ . Воспользуемся полнотой пространства, то есть в нем  $\exists \lim f(x)$ , если  $f(x)$  - фундаментальная.

$\forall n \in \mathbb{N}$  рассмотрим  $x_n \in \beta_n$ . Тогда, если  $n < m$  ( $m \in \mathbb{N}$ ), то для  $x_n \in \beta_n$  и  $x_m \in \beta_n \quad |f(x_n) - f(x_m)| < \frac{1}{2^{n-1}}$ .

Таким образом последовательность  $f(x_n)$  - фундаментальная  $\implies \exists \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$ . Покажем, что  $A = \lim_{\beta} f(x)$ . Пусть  $\epsilon > 0$  задано. Выберем  $n \in \mathbb{N} : \frac{1}{2^{n-1}} < \frac{\epsilon}{2}$ . Возьмем  $m > n : |f(x_m) - A| < \frac{\epsilon}{2}$ . Возьмем  $\beta = \beta_n$ . Тогда  $\forall x \in \beta \quad |f(x) - A| = |f(x) - f(m) + f(x_m) - A| \leq |f(x) - f(x_m)| + |f(x_m) - A| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$ .

Следовательно,  $\lim_{\beta} f(x) = A$ . □

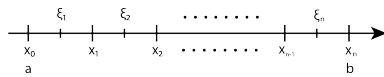
## 2.2 Разбиение. Интеграл Римана (v.2)

**Определение 2.2.1** (разбиение). Пусть дан отрезок  $[a; b]$ . **Разбиением**  $P$  отрезка  $[a; b]$  называется набор точек  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ . То есть  $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ . Отрезки  $[x_{i-1}; x_i] = \Delta_i$ .  $x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$  - длина  $i$ -го отрезка разбиения  $\lambda(P) = \max_{i=0, n} \{\Delta x_i\}$ . Величины  $\Delta_i, \Delta x_i, \lambda(P)$  - параметры ограничения.

**Определение 2.2.2** (разбиение с отмеченными точками). **Разбиением с отмеченными точками** называется пара наборов

$$P(\xi) = \{x_0, \dots, x_n\}, \{\xi_0, \dots, \xi_n\},$$

где  $a = x_0 < \dots < x_n = b$ ,  $\xi_i \in [x_{i-1}; x_i]$ .



Пусть  $\mathfrak{R}_{\xi} = \{(P, \xi)\}$  - семейство всевозможных разбиений с отмеченными точками отрезка  $[a, b]$ .

Рассмотрим  $\beta_{\delta} = \{(P, \xi) : \lambda(P) < \delta\}$ ,  $\beta_{\delta} \subset P_{\xi}$ :

**Утверждение 2.2.1.** Множество  $\beta = \{\beta_{\delta} : \delta > 0\}$  является базой на  $\mathfrak{R}_{\xi}$ .

*Доказательство.* (утверждения 2.3.1.).

1.  $\forall \delta > 0 \quad \beta_{\delta}$  - непусто.

В самом деле, пусть отрезок  $[a; b]$  поделен на  $n$  равных частей, причем  $n$  выбирается из соображений, чтобы  $\Delta x_i = \Delta x \quad \forall i = \overline{1, n} \quad (1, \dots, n)$ ,  $\Delta x < \delta$ .

Пусть  $\xi_i \in [x_{i-1}; x_i]$  - середины отрезков  $[x_{i-1}; x_i]$ .

2. Покажем, что  $\forall \beta_{\delta_1}, \beta_{\delta_2} \in \beta \exists \beta_{\delta_3} \subset \beta_{\delta_1} \cap \beta_{\delta_2}$ .

Пусть заданы  $\delta_1 > 0, \delta_2 > 0$ . Покажем, что  $\exists \beta_3 > 0$ :  
 $\beta_{\delta_3} \subset \beta_{\delta_1} \cap \beta_{\delta_2}$ . Если  $\delta_1 < \delta_2$ , то  $\delta_3 = \delta_1$  или  $\delta_3 = \frac{\delta_1}{2}$ .

□

**Определение 2.2.3** (!). Пусть  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(P, \xi)$  - разбиение отрезка  $[a; b]$  с отмеченными точками. Составим сумму:

$$\sigma(f, (P, \xi)) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k$$

Можно смотреть на  $\sigma$  для фиксированной функции  $f(x)$  как на функцию, сопоставляющую разбиение  $(P, \xi) \in \mathfrak{R}_\xi$  сумме  $\sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k$ , то есть  $\sigma_f : \mathfrak{R}_\xi \rightarrow \mathbb{R}$  (то есть  $(P, \xi)$  - аргумент функции  $\sigma$ ).

Говорят, что функция  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  интегрируема по Риману на  $[a; b]$ , если:

$$\exists \lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} \sigma_f((P, \xi)) = \lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k$$

Или, что то же самое, если  $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$  и соответствующий элемент  $\beta_\delta \in \beta$  :  $\forall$  разбиения  $(P, \xi) : \lambda(P) < \delta$  выполняется неравенство  $|\sigma_f((P, \xi)) - I| < 0$ :

$$I = \lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} \sigma_f((P, \xi)) = \int_a^b f(x) dx$$

Обозначим базу  $\beta$  из утверждения 2.3.1. как  $\lambda(P) \rightarrow 0$ .

**Теорема 2.2.1** (необходимое условие интегрируемости функции).  $*_-*$

Если  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  интегрируема на  $[a; b]$  (то есть  $f \in \mathbb{R}[a; b]$ ), то  $f$  ограничена на  $[a; b]$ .

*Доказательство.* От противного:

Допустим, что  $f$  интегрируема на  $[a; b]$ , но неограничена, то есть:  $\forall M > 0 \exists x \in [a; b] : |f(x)| > M$ . Покажем, что функция  $\sigma((P, \xi))$  не имеет предела по базе на  $[a; b]$ .

То есть  $\exists \epsilon > 0 : \forall \delta > 0 \exists (P', \xi') \text{ и } (P'', \xi'') : \lambda(P') < \delta, \lambda(P'') < \delta (\lambda(P'') = \max \Delta x_i), \text{ но } (\sigma(P'', \xi'') - \sigma(P', \xi')) \geq \epsilon$ .

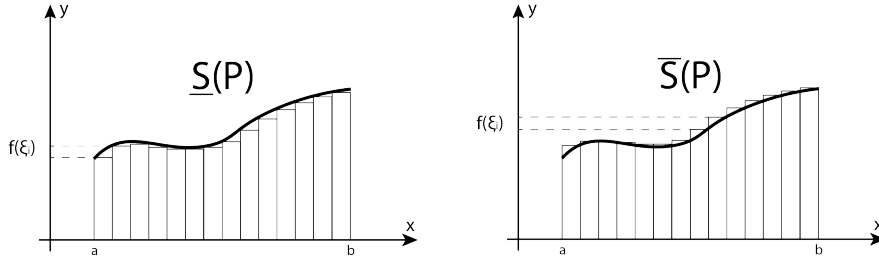
Положим,  $\epsilon = 1$ . Пусть  $\delta > 0$  задана. Выберем разбиение с отмеченными точками  $(P', \xi')$  такое, что  $\lambda(P') < \delta$ ,  $P' = \{a = x_0, x_1, \dots, x_n = b\}$ ,  $\epsilon_i \in [x_1, \dots, x_n]$ . Поскольку функция  $f$  неограничена на  $[a; b]$ , то существует хотя бы один элемент разбиения  $[x_{i-1}, x_i] = \Delta i$  : функция  $f$  неограничена на (? Спасибо Максим). В качестве  $P''$  возьмем  $P'$ ,  $\xi'' = \{\xi'_1, \xi'_2, \dots, \xi'_i, \dots, \xi'_n\}$ ,  $\lambda(P'') < \delta$  и  $|f(\xi''_i) - f(\xi'_i)| > \frac{1}{\Delta x_i}$ . Разбиения  $P'$  и  $P''$  совпадают, точки разбиения так же совпадают, кроме  $\xi''_i$ .

Рассмотрим  $|\sigma((P'', \xi'')) - \sigma((P', \xi'))| = |\sum_{k=1}^n \Delta x_k f(\xi''_k) - \sum_{k=1}^n \Delta x_k f(\xi'_k)| = |\Delta x_i (f(\xi''_i) - f(\xi'_i))| > \frac{\Delta x_i}{\Delta x_i} = 1 = \epsilon$ . □

## 2.3 Критерий интегрируемости

### 2.3.1 Суммы Дарбу

**Определение 2.3.1** (нижняя/верхняя суммы Дарбу). Пусть  $f[a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $P$  - произвольное разбиение отрезка  $[a; b]$ . Числа  $\underline{S}(P) = \sum_{k=1}^n m_k \Delta x_k$  и  $\bar{S}(P) = \sum_{k=1}^n M_k \Delta x_k$ , где  $m_k = \inf_{\xi \in \Delta_k} f(\xi)$ ,  $M_k = \sup_{\xi \in \Delta_k} f(\xi)$ , называются **нижней** и **верхней суммами Дарбу**, отвечающими разбиению  $P$ .



**Теорема 2.3.1** (свойства сумм Дарбу). Свойства:

1.  $\forall (P, \xi) \quad \underline{S}(P) \leq \sigma_f((P, \xi)) \leq \bar{S}(P)$
2. Если разбиение  $P'$  получено из разбиения  $P$  добавлением новых точек, то  $\underline{S}(P') \geq \underline{S}(P)$  и  $\bar{S}(P') \leq \bar{S}(P)$
3.  $\forall P_1, P_2 \quad \underline{S}(P_1) \leq \bar{S}(P_2)$

*Доказательство.* (теоремы 2.4.1)

1.  $\underline{S}(P) = \sum_{k=1}^n m_k \Delta x_k \leq \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k \leq \sum_{k=1}^n M_k \Delta x_k = \bar{S}(P)$ , где  $f(\xi_k) = \sigma((P, \xi))$ , вроде

2. Пусть  $P$  - произвольное разбиение отрезка  $[a; b]$ . Построим  $P'$ . Добавим на элемент разбиения  $\Delta i$  новую точку  $x' \in [x_{i-1}; x_i]$ .

Пусть  $m'_i = \inf_{\xi \in [x_{i-1}, x_i]} f(\xi)$  и  $m''_i = \inf_{\xi \in [x'_i, x_i]} f(\xi)$ ,  $m_i = \inf_{\xi \in [x_{i-1}, x_i]} f(\xi)$ , имеем  $m_i \leq m'_i$ ,  $m_i \leq m''_i$ .

Тогда  $\underline{S}(P') - \underline{S}(P) = \sum_{k=1}^{i-1} \Delta x_k m_k + m'_i |x' - x_{i-1}| + m''_i |x_i - x'| + \sum_{k=i+1}^n m_k \Delta x_k - \sum_{k=1}^n \Delta x_k m_k = m'_i |x' - x_{i-1}| + m''_i |x_i - x'| - m_i \Delta x_i \geq 0 \implies \underline{S}(P') \geq \underline{S}(P)$  (вероятно, куча индексов - неправильные).

Аналогично доказывается для  $\bar{S}(P') \leq \bar{S}(P)$ .

3. Пусть  $P_1, P_2$  - произвольные разбиения отрезка  $[a; b]$ .

Возьмем разбиение  $P = P_1 \cap P_2$ . Тогда, с одной стороны,  $P$  получено из  $P_1$  добавлением точек, а с другой стороны - из  $P_2$  добавлением точек.

Тогда  $\underline{P}_i \leq \underline{S}(P)$  и  $\bar{S}(P_i) \geq \bar{S}(P)$ .

Тогда верно, что  $\underline{S}(P_2) \leq \underline{S}(P)$  и  $\overline{S}(P_2) \geq \overline{S}(P) \implies \underline{S}(P_1) \leq \underline{S}(P) \leq \overline{S}(P) \leq \overline{S}(P_2)$ .

□

**Следствие.** Множество нижних сумм Дарбу ограничено сверху. Множество верхних сумм Дарбу ограничено снизу.

**Определение 2.3.2** (верхний/нижний интеграл Дарбу). Числа  $\underline{J} = \sup \underline{S}(P)$  и  $\overline{J} = \inf \overline{S}(P)$  называются **нижним** и **верхним интегралом Дарбу**.

Рассмотрим множество разбиений с отмеченными точками отрезка  $[a; b]$   $\mathfrak{R} = \{(P, \xi)\}$ . Построим функцию  $\underline{S} : \mathfrak{R}_\xi \rightarrow \mathbb{R}$  и  $\underline{S}((P, \xi)) = \underline{S}(P)$ . Аналогично определим  $\overline{S} : \mathfrak{R}_\xi \rightarrow \mathbb{R}$  и  $\overline{S}((P, \xi)) = \overline{S}(P)$ .

Таким образом сумму Дарбу можно представить как функции на множестве разбиений с отмеченными точками отрезка  $[a; b]$ .

**Теорема 2.3.2** (критерий интегрируемости). Функция  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  интегрируема на  $[a; b] \iff \lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} (\overline{S}(P) - \underline{S}(P)) = 0$ .

*Доказательство.* (теоремы 2.4.2)

”  $\rightarrow$  ” Пусть  $f \in \mathbb{R}([a; b])$  (то есть интегрируема на  $[a; b]$ ), то есть  $\forall \epsilon > 0 \forall (P, \xi) : \lambda(P) < \delta \implies |\sigma_f((P, \xi)) - I| < \epsilon$ .

**Лемма 2.3.1.**  $\forall P \underline{S}(P) = \inf_{\xi} \sigma_f((P, \xi))$  и  $\overline{S}(P) = \sup_{\xi} \sigma_f((P, \xi))$

*Доказательство.* (леммы 2.4.1)

$\forall P \underline{S}(P) \leq \sigma_f((P, \xi))$ .

Покажем, что  $\forall \epsilon > 0 \exists \xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\} : \underline{S}(P) + \epsilon > \sigma_f(P, \xi)$ .

Выберем  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n : f(\xi_i) < m_i + \frac{\epsilon}{b-a}$ .

Тогда  $\sigma_f(P, \xi) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k < \sum_{k=1}^n (m_k + \frac{\epsilon}{b-a}) \Delta x_k = \sum_{k=1}^n m_k \Delta x_k + \frac{\epsilon}{b-a} \sum_{k=1}^n \Delta x_k = \underline{S}(P) + \epsilon \implies \underline{S}(P) = \inf_{\xi} \sigma_f(P, \xi)$ .

Аналогично для  $\overline{S}(P) = \sup_{\xi} \sigma_f(P, \xi)$ .

□

$I - \epsilon < \sigma_f(P, \xi) < I + \epsilon$ ,  $I - \frac{\epsilon}{2} < \sigma_f(P, \xi) < I + \frac{\epsilon}{2}$ . Из леммы 2.4.1:  $\underline{S}(P) + \epsilon > \sigma_f(P, \xi) \implies \underline{S}(P) > \sigma_f(P, \xi) - \epsilon > \sigma_f(P, \xi) - \frac{\epsilon}{2}$  ( $I = \lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} \sigma_f(P, \xi)$ )

Рассмотрим  $I - \frac{2\epsilon}{3} < I - \frac{\epsilon}{2} \leq \underline{S}(P) \leq \sigma_f(P, \xi) \leq \overline{S}(P) < \sigma_f(P, \xi) + \epsilon < I + \frac{\epsilon}{2} + \epsilon = I + \frac{3\epsilon}{2}$  ( $\overline{S}(P) - \epsilon < \sigma_f(P, \xi)$ )

Тогда  $I - \frac{3\epsilon}{2} < \underline{S}(P) \leq \overline{S}(P) < I + \frac{3\epsilon}{2}$ , так как  $\underline{S}(P) \leq \overline{S}(P) \implies 0 \leq \overline{S}(P) - \underline{S}(P)$ ,

$$\begin{aligned} \overline{S}(P) &< I + \frac{3\epsilon}{2} \\ &+ \\ -\underline{S}(P) &< -I + \frac{3\epsilon}{2} \end{aligned}$$

$$0 \leq \overline{S}(P) - \underline{S}(P) < 3\epsilon \implies \lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} (\overline{S}(P) - \underline{S}(P)) = 0$$

$$” \leftarrow ” \text{ Пусть } \lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} (\overline{S}(P) - \underline{S}(P)) = 0.$$

Пусть  $\epsilon > 0$  задана. Выберем  $\delta > 0$  :  $0 \leq \overline{S}(P) - \underline{S}(P) < \epsilon \forall (P, \xi) : d(P) < \delta$ .

Покажем, что  $\exists I = \int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} \sigma_f(P, \xi)$ . Имеем  $\overline{S}(P) - \underline{S}(P) < \epsilon$  и  $\underline{S}(P) \leq I \leq \overline{S}(P)$ .

Из неравенств следует, что  $\overline{S}(P) < \underline{S}(P) + \epsilon \leq I + \epsilon$ ,  $\underline{S}(P) > \overline{S}(P) - \epsilon \geq I - \epsilon$ .

Пусть  $(P, \xi)$  - произвольное разбиение:  $\lambda(P) < \delta$ . Тогда  $I - \epsilon < \underline{S}(P) \leq \sigma_f(P, \xi) \leq \overline{S}(P) < I + \epsilon \implies I - \epsilon < \sigma_f(P, \xi) < I + \epsilon \implies |\sigma_f(P, \xi) - I| < \epsilon \implies I = \lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} \sigma_f(P, \xi) \implies f \in \mathbb{R}[a; b]$ .  $\square$

**Определение 2.3.3.** Обозначим  $M_i - m_i = \sup_{\xi \in \Delta_i} f(\xi) - \inf_{\xi \in \Delta_i} f(\xi) = \sup_{x_1, x_2 \in \Delta_i} |f(x_1) - f(x_2)| = \omega_i = \omega_i(f, \Delta_i)$ .

$\omega_i$  называется **колебанием** функции  $f(x)$  на отрезке  $\Delta_i$ .

$$\overline{S}(P) - \underline{S}(P) = \sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i$$

**Следствие.** (из критерия интегрируемости)

$$f \in \mathbb{R}[a; b] \iff \lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i = 0$$

**Теорема 2.3.3** (Дарбу). Для любой ограниченной функции  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  выполняются равенства:

$$\underline{\mathfrak{J}} = \lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} \underline{S}(P); \quad \overline{\mathfrak{J}} = \lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} \overline{S}(P)$$

**Лемма 2.3.2.** Пусть  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  ограничена на  $[a; b]$ , то есть  $\exists L > 0 : \forall x \in [a; b] |f(x)| < L$ . Разбиение  $P'$  получено из разбиения  $P$  добавлением  $m$  точек. Тогда  $\overline{S}P - \overline{S}(P') \leq 2L\lambda(P)m$

*Доказательство.* (леммы 2.4.2)

Пусть  $P$  - производное разбиение,  $\lambda(P)$ .

Рассмотрим случай, что  $P'$  получено добавлением  $k$  точек на  $i$ -тый отрезок разбиения  $P$ . (график, посмотреть у Максима).  $\overline{S}(P) - \overline{S}(P') = \sum_{j=1}^n M_j \Delta x_j - (\sum_{j=1}^{i-1} M_j \Delta x_j + \sum_{j=1}^k M'_{ij} \Delta x_{ij} + \sum_{j=i+1}^n M_j \Delta x_j) = M_i \Delta x_i - \sum_{j=1}^k M'_{ij} \Delta x_{ij} = M_i \sum_{j=1}^k \Delta x_{ij} - \sum_{j=1}^k M'_{ij} \Delta x_{ij} = \sum_{j=1}^k M_i \Delta x_{ij} - \sum_{j=1}^k M'_{ij} \Delta x_{ij} = \sum_{j=1}^k (M_i - M'_{ij}) \Delta x_{ij} \leq \sum_{j=1}^k 2L \Delta x_{ij} = (вспомним, что  $\lambda(P) = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n\}$ )  $= 2L \sum_{j=1}^k \Delta x_{ij} = 2L \Delta x_i \leq 2L\lambda(P)$$

Теперь, если  $P'$  получено из  $P$  добавлением  $m$  точек, то они попадут самое большее на  $m$  промежутков. Тогда  $\overline{S}(P) - \overline{S}(P') \leq 2L\lambda(P)m$   $\square$

*Доказательство.* (теоремы 2.4.3, Дарбу)

$$\underline{\mathfrak{J}} \stackrel{def}{=} \sup_P \underline{S}(P), \quad \overline{\mathfrak{J}} \stackrel{def}{=} \inf_P \overline{S}(P)$$

Пусть  $\epsilon > 0$  задано. Выберем разбиение  $P'$  такое, что  $\bar{J} + \epsilon > \bar{S}(P')$  (\*\*)  
(определение inf). Положим, что  $\delta = \frac{\epsilon}{2Lm}$ .

Пусть  $P$  - произвольное разбиение:  $\lambda(P) < \delta$ .

Покажем, что  $0 \leq \bar{S}(P) - \bar{J} < \epsilon$ .

Построим разбиение  $P'' = P' \cup P$ . Тогда  $P''$  получено из  $P$  добавлением  $m$  точек  $\implies \bar{S}(P) - \bar{S}(P'') \leq 2L\lambda(P)m$ , где  $L > 0 : \forall x \in [a; b] |f(x)| < L$ . Далее,  $\bar{S}(P) - \bar{S}(P'') \leq 2L\lambda(P)m < 2Lm\delta = \frac{2Lm\epsilon}{2Lm} = \frac{\epsilon}{2}$ . Кроме того,  $P''$  получено из  $P'$  добавлением некоторого количества точек.

$$\bar{S}(P'') \leq \bar{S}(P') \stackrel{(**)}{<} \bar{J} + \frac{\epsilon}{2} \implies \bar{S}(P'') - \frac{\epsilon}{2} < \bar{J}$$

Рассмотрим  $0 \leq \bar{S}(P) - \bar{J} < \bar{S}(P) - \bar{S}(P'') + \frac{\epsilon}{2} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$  □

### 2.3.2 Классы интегрируемых функций

**Теорема 2.3.4** (интегрируемость непрерывных функций). Пусть  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывна на  $[a; b] \implies f$  - интегрируема на  $[a; b]$ , то есть  $f \in \mathbb{R}[a; b]$ .

*Доказательство.* (теоремы 2.4.4)

Так как  $f$  - непрерывна на  $[a; b] \implies f$  - равномерно непрерывна на  $[a; b]$ . Это значит, что если  $\epsilon > 0$  задано, то  $\exists \delta > 0 : \forall x_1, x_2 \in [a; b] : |x_1 - x_2| < \delta \implies |f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\epsilon}{b-a}$ .

По критерию интегрируемости:  $f \in \mathbb{R}[a; b] \iff \lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} (\bar{S}(P) - \underline{S}(P)) = 0 \forall (P; \xi)$  - разбиение.

$$\bar{S}(P) - \underline{S}(P) = \sum \omega_i \Delta x_i, \text{ где } \omega_i = \sup_{x_1, x_2 \in \Delta_i} |f(x_1) - f(x_2)|.$$

$$\bar{S}(P) = \sum M_i \Delta x_i, \quad M_i = \sup_{\xi \in \Delta_i} f(\xi).$$

$$\omega_i = M_i - m_i = \sup_{\xi \in \Delta_i} f(\xi) - \inf_{\xi \in \Delta_i} f(\xi) = \sup_{x_1, x_2 \in \Delta_i} |f(x_1) - f(x_2)|.$$

$$\bar{S}(P) - \underline{S}(P) = \sum M_i \Delta x_i - \sum m_i \Delta x_i = \sum \omega_i \Delta x_i.$$

Таким образом критерий интегрируемости:  $f$  - интегрируема на  $[a; b] \iff \lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} \sum \omega_i \Delta x_i = 0$ , то есть  $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall (P; \xi) : \lambda(P) < \delta \implies 0 \leq \sum \omega_i \Delta x_i < \epsilon$ .

Пусть  $\epsilon > 0$  задано. Возьмем  $(P; \xi)$  - разбиение такое, что  $\lambda(P) < \delta$ . Тогда  $\sum \omega_i \Delta x_i = \sum \sup_{x_1, x_2 \in \Delta_i} |f(x_1) - f(x_2)| \Delta x_i \leq \sum \frac{\epsilon}{b-a} \Delta x_i = \frac{\epsilon}{b-a} \sum \Delta x_i = \frac{\epsilon}{b-a} (b-a) = \epsilon$  □

**Теорема 2.3.5** (интегрируемость функций с конечным числом точек разрыва). Пусть  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  - ограничена и имеет на  $[a; b]$  конечное число точек разрыва. Тогда  $f \in \mathbb{R}[a; b]$  интегрируема на  $[a; b]$ .

*Доказательство.* (теоремы 2.4.5)

Пусть  $L > 0 : \forall x \in [a; b] |f(x)| < L$  (ограничена). Пусть  $f$  имеет  $k$  точек разрыва на  $[a; b]$ .

Пусть  $\epsilon > 0$  задано. Возьмем  $\delta_1 = \frac{\epsilon}{16Lk}$ . Для каждой точки разрыва построим  $\delta_1$ -окрестность.

Пусть  $U$  - множество таких окрестностей.  $U$  - открытое множество. Рассмотрим  $V = [a; b] \setminus U \implies V$  - замкнутое (так как его дополнение открытое). Из того, что  $V$  - ограничено и замкнуто  $\implies V$  - компактное. Функция  $f$  - непрерывна на  $V \implies$  из того, что  $V$  - компактно и  $f$  - непрерывна на  $V \implies f$  - равномерно непрерывна на  $V \implies \forall \epsilon > 0 \exists \delta_2 > 0 : \forall x_1, x_2 \in V : |f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\epsilon}{2(b-a)}$ .

Положим, что  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ . Пусть  $P$  - произвольное разбиение отрезка  $[a; b] : \lambda(P) < \delta$ .

Рассмотрим  $\sum \omega_i \Delta x_i = \sum' \omega_i \Delta x_i + \sum'' \omega_i \Delta x_i \leq |\sum'|$  берется по всем отрезкам разбиения,  $k$ -тые пересекаются с  $U$ ,  $\sum''$  - по всем остальным  $|\leq \sum' \omega_i \Delta x_i + \sum'' \frac{\epsilon}{2(b-a)} \Delta x_i \leq 2L2\delta_1 k + \frac{\epsilon}{2(b-a)} \sum'' \Delta x_i < \frac{4Lk\epsilon}{8Lk} + \frac{\epsilon}{2(b-a)}(b-a) = \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$ .

Дополнение:  $(\bar{S}(P) - \bar{S}(P')) \leq 2L\lambda(P)m$ ,  $\sum M_i \Delta x_i - \sum M'_i \Delta x_i$ .  $\sum' \omega_i \Delta x_i = \sum \sup_{x_1, x_2 \in \Delta_i \cap k} |f(x_1) - f(x_2)| \Delta x_i \leq 2L2\delta_1 k$

□

## ГРАФИКИ НАДО НАРИСОВАТЬ

**Теорема 2.3.6** (интегрируемость монотонных функций). Пусть  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  - монотонна на  $[a; b] \implies f$  - интегрируема на  $[a; b]$ .

*Доказательство.* (теоремы 2.4.6)

Пусть  $f$  - не убывает на  $[a; b]$ . Пусть  $\epsilon > 0$  задано. Возьмем  $\delta = \frac{\epsilon}{f(b) - f(a)}$ . Тогда, если  $P$  - произвольное разбиение  $[a; b] : \lambda(P) < \delta$ , то  $\sum \omega_i \Delta x_i \stackrel{\text{monoton.}}{=} \sum (f(x_i) - f(x_{i-1})) \Delta x_i < \delta \sum (f(x_i) - f(x_{i-1})) = \delta(f(b) - f(a)) = \epsilon$ . □

### 2.3.3 Свойства интегрируемых функций

**Теорема 2.3.7.** Пусть  $f \in \mathbb{R}[a; b]$ ,  $g \in \mathbb{R}[a; b]$ . Тогда:

1.  $f \pm g \in \mathbb{R}[a; b]$ .
2.  $\alpha f \in \mathbb{R}[a; b]$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ .
3.  $f * g \in \mathbb{R}[a; b]$ .
4.  $|f| \in \mathbb{R}[a; b]$ , при этом:
  - $\int_a^b (f \pm g) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$
  - $\int_a^b \alpha f(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx$
  - $|\int_a^b f(x) dx| \leq \int_a^b |f(x)| dx$

*Доказательство.* (теоремы 2.4.7)



$$1. \int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} \sum (f(\xi_i) \pm g(\xi_i))\Delta x_i = \lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} \sum f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

2. Аналогично.

3. Покажем, что если  $f \in R[a; b]$ , то  $f^2 \in R[a; b]$ . Рассмотрим  $|f^2(x_1) - f^2(x_2)| = |(f(x_1) - f(x_2))(f(x_1) + f(x_2))| \leq |f(x_1) - f(x_2)|(|f(x_1)| + |f(x_2)|) < 2L|f(x_1) - f(x_2)|$ , где  $L > 0 : \forall x \in [a; b] |f(x)| < L$  (интегрируема  $\implies$  ограничена).

Пусть  $P$  - произвольное разбиение. Пусть  $\epsilon > 0$  задано. Возьмем  $\delta > 0$  и  $P : \lambda(P) < \delta \implies \omega_i(f^2, \Delta_i) \leq 2L\omega_i(f, \Delta_i)$ .

$$\sum_i \omega_i(f^2, \Delta_i)\Delta x_i \leq (\sum_i \omega_i(f, \Delta_i)\Delta x_i)2L.$$

Так как  $f \in R[a; b]$ , то  $\sum_i \omega_i(f, \Delta_i)\Delta x_i \rightarrow 0 \implies$  по лемме о двух милиционерах,  $\sum_i \omega_i(f^2, \Delta_i)\Delta x_i \rightarrow 0 \implies$  (по критерию интегрируемости)  $f^2 \in R[a; b]$ .

$$fg = \frac{1}{4}((f+g)^2 - (f-g)^2) \implies fg \in R[a; b].$$

4. Рассмотрим  $||f(x_1)| - |f(x_2)|| \leq |f(x_1) - f(x_2)|$ ,  $x_1, x_2 \in \Delta_i \implies \omega_i(|f|, \Delta_i) \leq \omega_i(f, \Delta_i)$ .

$$0 \leq \sum_i \omega_i(|f|, \Delta_i)\Delta x_i \leq \sum_i \omega_i(f, \Delta_i)\Delta x_i \implies |f| \in R[a; b].$$

$$\text{Рассмотрим } |\sum_i f(\xi_i)| \leq \sum_i |f(\xi_i)|\Delta x_i \implies \lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} |\sum_i f(\xi_i)\Delta x_i| \leq \lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} \sum_i |f(\xi_i)|\Delta x_i, \quad |\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

□

### 2.3.4 Аддитивность интеграла Римана

**Определение 2.3.4.** Пусть  $a > b$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ , положим  $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ . Если  $a = b$ , то  $\int_a^{a=b} f(x)dx = 0$ .

**Теорема 2.3.8** (Аддитивность интеграла Римана). Пусть даны точки  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . Если  $f$  - интегрируема на большем из отрезков  $[a; b]$ ,  $[a, c]$ ,  $[b, c]$ , то  $f$  - интегрируема и на меньших отрезках. И наоборот, если  $f$  интегрируема на двух меньших отрезках, то она интегрируема и на большем отрезке. При этом:

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx + \int_c^a f(x)dx = 0$$

теоремы 2.4.8. Пусть  $a < b < c$ .

Построим такое разбиение отрезка  $[a; c]$  с отмеченными точками, что точка  $b$  будет его точкой разбиения  $P = x_0, x_1, \dots, b, \dots, x_n$ .

Тогда  $\sum_P f(\xi_i) \Delta x_i < \sum_{P'} f(\xi_i) \Delta x_i + \sum_{P''} f(\xi_i) \Delta x_i$ , где  $P'$  - разбиение отрезка левее точки  $b$ ,  $P''$  - правее точки  $b$ .

Покажем, что если  $f \in R[a; c]$ , то  $f \in R[a; b]$ . В самом деле,  $\sum_{P'} \omega_i \Delta x_i \leq \sum_P \omega_i \Delta x_i \rightarrow 0 \implies f \in R[a; b]$ . Аналогично, можно показать, что  $f \in R[b; c]$ . Если  $f$  - интегрируема на  $[a; b]$  и  $f \in R[b; c] \implies \sum_{P'} \omega_i \Delta x_i \rightarrow 0$ ,  $\sum_{P''} \omega_i \Delta x_i \rightarrow 0 \implies$  учитывая то, что  $\sum_P f(\xi_i) \Delta x_i < \sum_{P'} f(\xi_i) \Delta x_i + \sum_{P''} f(\xi_i) \Delta x_i$ , тогда  $\sum_P \omega_i \Delta x_i \rightarrow 0 \implies f \in R[a; c]$ , а так же то, что  $\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$ .  $\square$

### 2.3.5 Монотонность интеграла Римана

**Теорема 2.3.9.** Если  $a < b$  и  $f \in R[a; b]$  и:

1.  $\forall x \in [a; b] f(x) \geq 0$ , то  $\int_a^b f(x) dx \geq 0$
2.  $\forall x \in [a; b] f(x) > 0$ , то  $\int_a^b f(x) dx > 0$

*Доказательство.* (теоремы 2.4.9)

1. Почти очевидно (по определению интеграла Римана и свойствам предела)
2. Пусть  $\forall x \in [a; b] f(x) > 0$ . Покажем, что  $\int_a^b f(x) dx > 0$ . Допустим, что  $\int_a^b f(x) dx = 0$ . Тогда  $\lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} \bar{S}(P) = 0$ .

Тогда можно взять такое разбиение  $P : \bar{S}(P) < \frac{b-a}{2}$ . Тогда у этого разбиения  $P \exists$  отрезок  $\Delta_i : M_i = \sup_{x \in \Delta_i} f(x) < \frac{1}{2}$ . В самом деле, если  $M_i \geq \frac{1}{2} \forall i$ , то  $\bar{S}(P) = \sum_i M_i \Delta x_i \geq \frac{1}{2} \sum_i \Delta x_i = \frac{b-a}{2}$ , противоречие с выбранным  $P$ .

Обозначим  $\Delta_i = [a_1, b_1]$ . Так как  $f \in R[a; b] \implies f \in R[a_1, b_1]$ . При этом  $\int_{a_1}^{b_1} f(x) dx = 0$ . Пусть  $P_1$  - разбиение отрезка  $[a_1, b_1] : \bar{S}(P_1) < \frac{b_1 - a_1}{4} \implies \exists$  отрезок разбиения  $[a_2, b_2] \subset [a_1, b_1] : \sup_{x \in [a_2, b_2]} f(x) < \frac{1}{4}$  и так далее.

Таким образом получим систему вложенных отрезков  $[a; b] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots$ , при этом  $\sup_{x \in [a_k, b_k]} f(x) < \frac{1}{2^k}$ . Пусть  $c \in \bigcap_{k=1}^{\infty} [a_k, b_k]$ . Тогда  $f(c) > 0$ . С другой стороны,  $f(c) < \frac{1}{2^k} \implies f(c) = 0$  - противоречие  $\implies \int_a^b f(x) dx > 0$ .

□

**Следствие.** (теоремы 2.4.9)

1. Если  $a < b$ ,  $f, g \in R[a; b]$  и:

$$(a) \quad \forall x \in [a; b] \quad f(x) \leq g(x), \text{ то } \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

$$(b) \quad \forall x \in [a; b] \quad f(x) < g(x), \text{ то } \int_a^b f(x)dx < \int_a^b g(x)dx$$

*Доказательство.* Очевидно,  $g(x) - f(x) \geq 0$ . □

2. Если  $f \in R[a; b]$ ,  $a < b$ ,  $M = \sup_{x \in [a; b]} f(x)$ ,  $m = \inf_{x \in [a; b]} f(x)$ , то  $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$ .

*Доказательство.*  $\forall$  разбиения  $P$  с отмеченными точками верно:  $\sum_i m \Delta x_i \leq \sum_i f(\xi_i) \Delta x_i \leq \sum_i M \Delta x_i$  и  $m(b-a) \leq \sum_i f(\xi_i) \Delta x_i \leq M(b-a)$ .

Переходя к пределу получаем то, что нужно было доказать. □

3. (Теорема о среднем)

Пусть  $f \in R[a; b]$  ( $a > b, a < b$ ),  $m = \inf_{x \in [a; b]} f(x)$ ,  $M = \sup_{x \in [a; b]} f(x)$ . Тогда существует  $\mu \in [m; M]$ :  $\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a)$ .

*Доказательство.* Пусть  $a < b$ . Тогда (из 2-го пункта)  $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$ , ( $b-a > 0$ ).

$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq M$ . Пусть  $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \implies \int_a^b f(x)dx = \mu(b-a)$ . Если  $a > b$ , то  $m(a-b) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(a-b)$  (умножим на  $-1$ ),  $m(b-a) \geq \int_a^b f(x)dx \geq M(b-a) \implies m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq M$ . □

**Следствие.** Если, кроме того,  $f(x)$  - непрерывна на  $[a; b]$ , то  $\exists c \in [a; b]$ :  $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$ .

*Доказательство.* Доказательство следует из теоремы Больцано-Коши о промежуточном значении. □

**Теорема 2.3.10** (Первая теорема о среднем). Пусть  $f, g \in R[a; b]$  ( $a > b, a < b$ ),  $m = \inf_{x \in [a; b]} f(x)$ ,  $M = \sup_{x \in [a; b]} f(x)$  и  $g$  не меняет свой знак на  $[a; b]$ . Тогда  $\exists \mu \in [m; M]$ :  $\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx$ .

*Доказательство.* Пусть  $a < b$  и  $\forall x \in [a; b] \ g(x) \geq 0$ . Имеем, что  $m \leq f(x) \leq M$ ,  $(g(x) > 0)$ ,  $mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x) \implies m \int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M \int_a^b g(x)dx$ . Если  $\int_a^b g(x)dx = 0 \implies \int_a^b f(x)g(x)dx = 0 \implies \int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx$ . Если  $\int_a^b g(x)dx \neq 0$ , то поделим в неравенстве  $m \int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M \int_a^b g(x)dx$  все на  $\int_a^b g(x)dx > 0$ :  $m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \leq M$ , где  $\frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} = \mu$ .

Аналогично доказываются остальные случаи ( $a < b$ ,  $g(x) \leq 0$ ;  $a > b$ ,  $g(x) \geq 0$ ).  $\square$

## 2.4 Интеграл Римана как функция верхнего предела интегрирования

**Определение 2.4.1.** Пусть  $f \in R[a; b]$ ,  $x \in [a; b]$ .

Рассмотрим функцию  $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ ,  $F(x)$  определена для  $\forall x \in [a; b]$ .

**Теорема 2.4.1** (непрерывность интеграла Римана). Если  $f \in R[a; b]$ , то  $F(x) = \int_a^x f(t)dt$  - непрерывна на  $[a; b]$ .

*Доказательство.* Пусть  $h \in \mathbb{R} : x+h \in [a; b]$ . Тогда  $F(x+h) = \int_a^{x+h} f(t)dt$ . Пусть  $\epsilon > 0$  задано. Покажем, что  $\exists \delta > 0 : \forall h \in \mathbb{R} : |h| < \delta \implies |F(x+h) - F(x)| < \epsilon$ .

Рассмотрим  $|F(x+h) - F(x)| = |\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt| = |\int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt| = |\int_x^{x+h} f(t)dt| \leq |\int_x^{x+h} |f(t)|dt|$ . Так как  $f \in R[a; b]$ , то  $f$  - ограничена на  $[a; b]$ , то есть  $\exists L > 0 : \forall x \in [a; b] \ |f(x)| \leq L$ . Тогда  $|\int_x^{x+h} |f(t)|dt| \leq L \int_x^{x+h} dt$ , так как

$$\int_x^{x+h} 1dt = \lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n 1\Delta x_i = |h|,$$

тогда  $\delta = \frac{\epsilon}{L}$ , что и требовалось доказать.  $\square$

**Теорема 2.4.2** (о дифференцируемости интеграла Римана как функции по верхнему пределу). Пусть  $f \in R[a; b]$ ,  $x \in [a; b]$  и  $f$  непрерывна в точке  $x$ , тогда функция  $F(x) = \int_a^x f(t)dt$  дифференцируема в точке  $x$ , причем:

$$F'(x) = f(x) \implies \left( \int_a^x f(t)dt \right)'_x = f(x)$$

*Доказательство.* Пусть  $h \in \mathbb{R} : x+h \in [a; b]$ .

Рассмотрим  $\left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) \right| = \left| \frac{1}{h} (\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt) - f(x) \right| = \left| \frac{1}{h} \int_a^{x+h} f(t)dt - f(x) \right| = \left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)dt - \frac{f(x)}{h} \int_x^{x+h} dt \right| = \left| \frac{1}{h} (\int_x^{x+h} f(t)dt - \int_x^{x+h} f(x)dt) \right| = \left| \frac{1}{h} (\int_x^{x+h} (f(t) - f(x))dt) \right| = \frac{1}{|h|} \left| \int_x^{x+h} |f(t) - f(x)|dt \right|.$

Так как  $f$  - непрерывна в точке  $x$ , то  $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall h : |h| < \delta |f(t) - f(x)| < \epsilon$ , где  $t \in [x; x+h]$ .

Тогда  $|\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - f(x)| \leq \frac{1}{|h|} |\int_x^{x+h} |f(t) - f(x)| dt| < \frac{1}{|h|} \epsilon |\int_x^{x+h} dt| = \frac{1}{|h|} \epsilon |h| = \epsilon$

Таким образом, по определению производной:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x) = F'(x).$$

□

**Следствие.** Если  $f$  - непрерывна на  $[a; b]$ , то на  $[a; b]$  она имеет первообразную, которая равна:

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt + C$$

**Замечание.** Рассмотрим следующие классы (множества/пространства) функций:

- $R[a; b]$  - множество интегрируемых на  $[a; b]$  функций;
- $C[a; b]$  - множество непрерывных на  $[a; b]$  функций;
- $C^o[a; b]$  - множество дифференцируемых на  $[a; b]$  функций.

Получаем:

$$C^o[a; b] \subset C[a; b] \subset R[a; b].$$

**Теорема 2.4.3** (вторая теорема о среднем). Пусть  $f, g \in R[a; b]$ , причем  $f$  - монотонна на  $[a; b]$ . Тогда  $\exists \xi \in [a; b]$  :

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a) \int_a^\xi g(x)dx + f(b) \int_\xi^b g(x)dx$$

**Лемма 2.4.1.** Пусть  $f, g \in R[a; b]$ , причем  $f$  - невозрастающая и неотрицательная.

Тогда  $\exists \xi \in [a; b]$  :

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a) \int_a^\xi g(x)dx.$$

*Доказательство.* (леммы)

Пусть  $P$  - произвольное разбиение отрезка  $[a; b]$  :  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ . Тогда  $\int_a^b f(x)g(x)dt = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)g(x)dx + \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x_{i-1})g(x)dx - \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x_{i-1})g(x)dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} (f(x) - f(x_{i-1}))g(x)dx + \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x_{i-1})g(x)dx =$  (где  $\sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} (f(x) - f(x_{i-1}))g(x)dx = \rho$  и  $\sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x_{i-1})g(x)dx = \sigma$ )  $= \rho + \sigma$ .

Устремим  $\lambda(P) \rightarrow 0$ :

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} \rho + \lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} \sigma$$

Покажем, что пределы существуют, более того:  $\lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} \rho = 0$ .

Так как  $g(x) \in R[a; b] \implies g$  - ограничена на  $[a; b]$ , то есть  $\exists L > 0 : \forall x \in [a; b] |g(x)| \leq L$ .

Рассмотрим  $\omega_i = \omega_i(f, \Delta_i) = \sup_{\xi_1, \xi_2 \in \Delta_i} |f(\xi_1) - f(\xi_2)|$ . Так как  $f \in R[a; b]$ ,

то по критерию интегрируемости:  $\sum_i \omega_i \Delta x_i \rightarrow 0$ .

Тогда  $|\rho| = |\sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} (f(x) - f(x_{i-1}))g(x)dx| \leq \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(x) - f(x_{i-1})||g(x)|dx \leq \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \omega_i L dx = L \sum_{i=1}^n \omega_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} dx = L \sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i$ .

Пусть  $\epsilon > 0$  задано. Выберем  $\delta > 0 : \forall P : \lambda(P) < \delta$  и  $\sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i < \frac{\epsilon}{L}$ .

Имеем, что  $|\rho| \leq L \sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i < L \frac{\epsilon}{L} = \epsilon \implies \lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} \rho = 0$ .

Тогда  $\int_a^b f(x)g(x)dx = \lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x_{i-1})g(x)dx$ .  $\lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} \sigma$  существует, так как  $\int_a^b f(x)g(x)dx = const$  и  $\lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} \rho = 0$ .

Рассмотрим функцию  $G(x) = \int_a^x g(x)dx$ :

1.  $G(x)$  - непрерывна на  $[a; b]$  ( $x \in [a; b]$ )  $\implies G(x)$  принимает на  $[a; b]$  *max min* значение (по теореме Вейерштрасса о максимальном значении),  $m = \min_{x \in [a; b]} G(x)$ ,  $M = \max_{x \in [a; b]} G(x)$ .

2.  $\int_{x_{i-1}}^{x_i} g(x)dx = \int_a^{x_i} g(x)dx - \int_a^{x_{i-1}} g(x)dx = G(x_i) - G(x_{i-1})$ .

$$\sigma = \sum_{i=1}^n f(x_{i-1}) \int_{x_{i-1}}^{x_i} g(x)dx = \sum_{i=1}^n f(x_{i-1})(G(x_i) - G(x_{i-1})) = f(x_0)G(x_1) - f(x_0)G(x_0) + f(x_1)G(x_2) - f(x_1)G(x_1) + \dots + f(x_{n-2})G(x_{n-1}) - f(x_{n-2})G(x_{n-2}) + f(x_{n-1})G(x_n) - f(x_{n-1})G(x_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n-1} G(x_i)(f(x_{i-1}) - f(x_i)) + f(x_{n-1})G(x_n).$$

Тогда  $\sigma \geq m(\sum_{i=1}^{n-1} (f(x_{i-1}) - f(x_i)) + f(x_{n-1})) = m(f(x_0) - f(x_1) + f(x_1) - f(x_2) + \dots - f(x_{n-1}) + f(x_{n-1})) = mf(a)$ . Аналогично,  $\sigma \leq Mf(a)$ .

$$mf(a) \leq \sigma \leq Mf(a)$$

Пусть  $f(a) \neq 0 \implies (f(a) > 0) m \leq \frac{\sigma}{f(a)} \leq M \implies$

$$m \leq \frac{1}{f(a)} \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M$$

$$\implies \exists \xi \in [a; b] : m \leq G(\xi) \leq M \text{ и } G(\xi) = \frac{1}{f(a)} \int_a^\xi f(x)g(x)dx.$$

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a)G(\xi) = f(a) \int_a^\xi g(x)dx.$$

□

*Доказательство.* (теоремы)

Пусть  $f$  - неубывающая. Рассмотрим функцию  $h(x) = f(b) - f(x)$ ,  $h(x) \geq 0 \forall x \in [a; b] \forall x_1, x_2 \in [a; b] : x_1 < x_2 \implies h(x_1) - h(x_2) = f(b) - f(x_1) - f(b) + f(x_2) = f(x_2) - f(x_1) \geq 0 \implies h(x_1) \geq h(x_2) \implies h(x)$  - невозрастающая.

По лемме,  $\int_a^b h(x)g(x)dx = h(a) \int_a^\xi g(x)dx$ .

С другой стороны,  $\int_a^b h(x)g(x)dx = \int_a^b (f(b) - f(x))g(x)dx = f(b) \int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)g(x)dx$ .

Имеем, что  $f(b) \int_a^\xi g(x)dx - f(a) \int_a^\xi g(x)dx = f(b) \int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)g(x)dx$ .

$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(b) \left( \int_a^\xi g(x)dx + \int_\xi^b g(x)dx \right) - f(b) \int_a^\xi g(x)dx + f(a) \int_a^\xi g(x)dx = f(a) \int_a^\xi g(x)dx + f(b) \int_\xi^b g(x)dx$ .

Для случая, когда  $f$  - невозрастающая, доказываем аналогично.  $\square$

## 2.5 Формула Ньютона-Лейбница

**Теорема 2.5.1.** Пусть  $f$  - непрерывна на  $[a; b]$  и  $F(x)$  - её первообразная.

Тогда  $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)|_a^b$

*Доказательство.* Пусть  $F(x)$  - первообразная функции  $f(x)$  на  $[a; b]$ :

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt + C.$$

Отсюда,  $F(b) = \int_a^b f(t)dt + C$ ;  $F(a) = \int_a^a f(t)dt$ ;

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt + C - C = \int_a^b f(t)dt + C(?) \quad \square$$

**Теорема 2.5.2.** Пусть  $F(x)$  - непрерывна на  $[a; b]$ , дифференцируема на  $[a; b]$  за исключением не более чем конечного числа точек. Причем всюду, где она дифференцируема:  $F'(x) = f(x)$ . И, наконец,  $f(x) \in R[a; b]$ .

Тогда:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)|_a^b$$

*Доказательство.* Возьмем произвольное разбиение  $P$  отрезка  $[a; b]$  так, что оно содержит все точки недифференцируемости функции  $F(x)$ :  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ ,  $\implies F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^n (F(x_i) - F(x_{i-1}))$ .

Пусть  $\Delta_i = [x_{i-1}; x_i]$ . Функция  $F(x)$  дифференцируема на  $(x_{i-1}; x_i)$ , непрерывна на  $[x_{i-1}; x_i] \forall i = \overline{1, n}$ .

По теореме Лагранжа,  $\exists \xi_i \in (x_{i-1}; x_i) : F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = f(\xi_i)\Delta x_i$ .

Тогда:

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Устремим  $\lambda(P) \rightarrow 0$ :

$$F(b) - F(a) = \lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i,$$

так как  $\exists \lim, f \in R[a; b]$ , то  $F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx$ .  $\square$

**Следствие.** Если функция  $F(x)$  удовлетворяет условиям теоремы 2.5.2, то  $\forall x \in [a; b]$  :

$$F(x) = F(a) + \int_a^x F'(t) dt.$$

## 2.6 Интегрирование по частям в определенном интеграле и формула Тейлора

**Теорема 2.6.1** (формула интегрирования по частям). Если функции  $u(x)$  и  $v(x)$  непрерывно дифференцируемы на отрезке  $[a; b]$ , то справедливо равенство:

$$\int_a^b u dv = uv|_a^b - \int_a^b v du.$$

*Доказательство.* Рассмотрим  $uv|_a^b = \int_a^b d(uv) = \int_a^b (v du + u dv) = \int_a^b v du + \int_a^b u dv \implies \int_a^b u dv = uv|_a^b - \int_a^b v du$ .  $\square$

**Теорема 2.6.2** (формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме). Пусть функция  $f(t)$  имеет на отрезке  $[a; x]$  непрерывные производные до  $n$ -го порядка включительно. Тогда справедлива формула Тейлора:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + r_n(a; x),$$

где  $r_n(a; x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x f^{(n)}(t)(x-a)^{n-1} dt$ .

*Доказательство.* Пусть  $f(t)$  имеет на  $[a; x]$  непрерывные производные до  $n$ -го порядка включительно. По формуле Ньютона-Лейбница:  $f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t) dt = \int_a^x f'(t) dt = - \int_a^x f'(t)(x-t)' dt =$

$$= \left| \begin{array}{l} u = f'(t) \implies u' = f''(t) \implies du = f''(t) dt \\ (x-t)' dt = dv \implies d(x-t) = dv \implies v = x-t \end{array} \right| =$$

$$\begin{aligned} &= -f'(t)(x-t)|_a^x + \int_a^x f''(t)(x-t) dt = f'(a)(x-a) + \frac{1}{2} \int_a^x -f''(t)((x-t)^2)' dt = \\ &= f'(a)(x-a) - \frac{1}{2} (f''(t)(x-t)^2)|_a^x - \int_a^x f'''(t)(x-t)^2 dt = f'(a)(x-a) + \frac{1}{2} f''(a)(x-a)^2 - \\ &- \frac{1}{6} \int_a^x f'''(t)((x-t)^3)' dt = \dots = f'(a)(x-a) + \frac{1}{2} f''(a)(x-a)^2 + \frac{1}{6} f'''(a)(x-a)^3 + \dots + \\ &+ \frac{1}{6 \cdot \dots \cdot (n-1)} f^{(n-1)}(a)(x-a)^{n-1} + \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1} dt. \quad \square \end{aligned}$$



## 2.7 Замена переменной в определенном интеграле

**Теорема 2.7.1.** Пусть  $\phi : [\alpha; \beta] \rightarrow [a; b]$  - непрерывно дифференцируемое отображение отрезка  $[\alpha; \beta]$  в отрезок  $[a; b]$ , причем  $\phi(\alpha) = a$ ,  $\phi(\beta) = b$ . Тогда для любой функции  $f(x)$ , непрерывной на  $[a; b]$ , функция  $f(\phi(t))\phi'(t)$  - непрерывна на  $[\alpha; \beta]$  и справедливо равенство:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)dt.$$

*Доказательство.* Пусть  $F(x)$  - первообразная  $f(x)$  на  $[a; b]$ .

Тогда  $F(\phi(t))$  - первообразная для  $f(\phi(t))\phi'(t)$  ( $F'_t(\phi(t)) = F'_\phi\phi'_t$ )  $\implies F(\phi(t))$  - непрерывна на  $[\alpha; \beta]$ .

По формуле Ньютона-Лейбница,  $F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$  и  $\int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)dt = F(\phi(\beta)) - F(\phi(\alpha))$ .

По условию,  $\phi(\beta) = b$ ,  $\phi(\alpha) = a \implies \int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)dt$ .  $\square$

**Теорема 2.7.2** (замена переменной для интегрируемых функций). Пусть  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \in R[a; b]$ , функция  $x = \phi(t)$  :

1.  $\phi : [\alpha; \beta] \rightarrow [a; b]$
2.  $\phi(\alpha) = a$ ,  $\phi(\beta) = b$
3.  $\phi'(t)$  непрерывна на  $[\alpha; \beta]$
4.  $\phi$  - строго монотонна

Тогда:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)dt$$

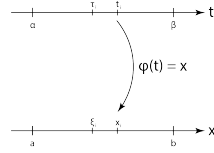
*Доказательство.* Пусть  $(P_t, \tau)$  - произвольное разбиение с отмеченными точками отрезка  $[\alpha; \beta]$  :

$$\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = \beta;$$

$$\tau_i \in [t_{i-1}; t_i], \quad i = \overline{1, n},$$

Для определенности будем считать, что  $\phi$  - возрастающая, то есть  $\alpha < \beta$ ,  $a < b$ .

Тогда можно построить разбиение  $(P_x, \xi)$  с отмеченными точками отрезка  $[a; b]$  :



$$\begin{aligned} a &= x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b; \\ \xi_i &\in [x_{i-1}; x_i], \quad i = \overline{1, n}, \\ \text{Здесь } x_i &= \phi(t_i), \quad \xi_i = \phi(\tau_i). \end{aligned}$$

Если  $\lambda(P_t) \rightarrow 0 \implies \lambda(P_x) \rightarrow 0$ . Составим интегральные суммы:

$$\sigma = \sum_{i=1}^n f(\phi(\tau_i)) \phi'(\tau_i) \Delta t_i;$$

$$\bar{\sigma} = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i,$$

Если  $\lambda(P_t) \rightarrow 0 \implies \lambda(P_x) \rightarrow 0 \implies \bar{\sigma} \rightarrow \int_a^b f(x) dx$  (так как  $f \in R[a; b]$ ).

Покажем, что  $\sigma \rightarrow \int_a^b f(x) dx$  :  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \phi(t_i) - \phi(t_{i-1}) = \phi'(\bar{\tau}_i) \Delta t_i$ ,  $\bar{\tau}_i \in [t_{i-1}; t_i]$  (случайная точка из отрезка).

Тогда:

$$\bar{\sigma} = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n f(\phi(\tau_i)) \phi'(\bar{\tau}_i) \Delta t_i;$$

Покажем, что  $\lim_{\lambda(P_t) \rightarrow 0} (\sigma - \bar{\sigma}) = 0$  :

В самом деле,  $|\sigma - \bar{\sigma}| = |\sum_{i=1}^n f(\phi(\tau_i)) \phi'(\tau_i) \Delta t_i - \sum_{i=1}^n f(\phi(\tau_i)) \phi'(\bar{\tau}_i) \Delta t_i| = |\sum_{i=1}^n f(\phi(\tau_i)) (\phi'(\tau_i) - \phi'(\bar{\tau}_i)) \Delta t_i| \leq \sum_{i=1}^n |f(\phi(\tau_i))| |\phi'(\tau_i) - \phi'(\bar{\tau}_i)| \Delta t_i \leq L \sum_{i=1}^n |\phi'(\tau_i) - \phi'(\bar{\tau}_i)| \Delta t_i$ , где  $L > 0$  :  $\forall x \in [a; b] \quad |f(x)| \leq L$  (так как  $f$  - интегрируема  $\implies$  ограничена).

Так как  $\phi'(t)$  непрерывна на  $[\alpha; \beta] \implies \forall i = \overline{1, n} \quad \phi'(t)$  непрерывна на  $[t_{i-1}; t_i] \implies \phi'(t)$  равномерно непрерывна на  $[t_{i-1}; t_i]$ . Возьмем  $\delta > 0$  :  $\forall t_1, t_2 \in [t_{i-1}; t_i] \quad |t_1 - t_2| < \delta \implies |\phi'(t_1) - \phi'(t_2)| < \frac{\epsilon}{L(\beta - \alpha)}$  ( $\forall \epsilon > 0$ ).

Тогда  $|\sigma - \bar{\sigma}| \leq L \sum_{i=1}^n |\phi'(\tau_i) - \phi'(\bar{\tau}_i)| \Delta t_i < L \frac{\epsilon}{L(\beta - \alpha)} \sum_{i=1}^n \Delta t_i = L \frac{\epsilon}{L(\beta - \alpha)} (\beta - \alpha) = \epsilon \implies \sigma \rightarrow \int_a^b f(x) dx$  при  $\lambda(P_t) \rightarrow 0$ .

С другой стороны, по определению определенного интеграла:

$$\lim_{\lambda(P_t) \rightarrow 0} \sigma = \int_{\alpha}^{\beta} f(\phi(t)) \phi'(t) dt \implies \int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\phi(t)) \phi'(t) dt.$$

□

## Глава 3

# Геометрические приложения интеграла Римана

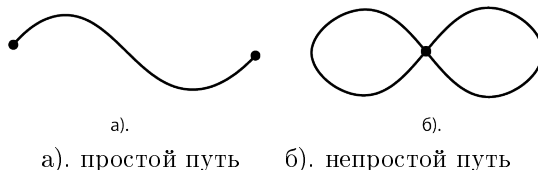
### 3.1 Длина кривой

**Определение 3.1.1.** Пусть  $(X, \rho)$  - метрическое пространство,  $[a; b] \subset \mathbb{R}$ . Будем называть **путем** произвольное непрерывное отображение:

$$\gamma : [a; b] \rightarrow X$$

**Определение 3.1.2.** Пусть  $\gamma : [a; b] \rightarrow X$  называется **простым**, если:

$$\forall t_1, t_2 \in [a; b] : \quad \gamma(t_1) = \gamma(t_2) \implies t_1 = t_2$$



**Определение 3.1.3.** Пусть  $\gamma : [a; b] \rightarrow X$  называется **замкнутым**, если:

$$\gamma(a) = \gamma(b),$$

тогда:

- $\gamma(a)$  - начало пути,
- $\gamma(b)$  - конец пути

**Определение 3.1.4.** Пусть  $\gamma : [a; b] \rightarrow X$  называется **простым замкнутым**, если:

$$\forall t_1, t_2 \in (a; b) : \quad \gamma(t_1) = \gamma(t_2) \implies t_1 = t_2; \quad \gamma(a) = \gamma(b)$$

На множестве путей введем отношение.

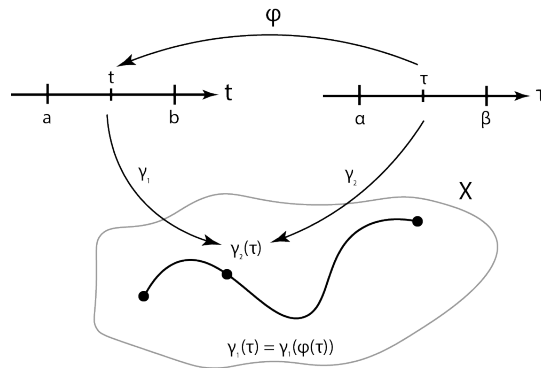
Пусть  $\gamma_1 : [a; b] \rightarrow X$ ,  $\gamma_2 : [\alpha; \beta] \rightarrow X$ .

Будем говорить, что  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  находятся в отношении " $\sim$ ", то есть  $\gamma_1 \sim \gamma_2$ , если существует строго возрастающее отображение  $\phi : [\alpha; \beta] \rightarrow [a; b]$ :

$$\phi(\alpha) = a, \quad \phi(\beta) = b,$$

а так же:

$$\gamma_2(\tau) = \gamma_1(\phi(\tau))$$



Упражнение 1: Доказать, что введенное отношение есть отношение эквивалентности.

**Определение 3.1.5.** Отображение  $\phi$  называется **гомеоморфизмом**, если:

$\phi$  и  $\phi^{-1}$  - непрерывны

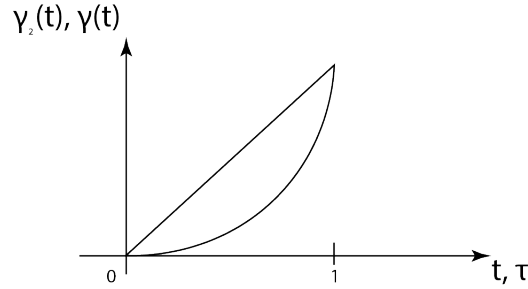
Упражнение 2: Доказать, что  $\phi$  в определении отношения между  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  есть гомеоморфизм.

**Определение 3.1.6.** **Кривой** в  $X$  будем называть класс эквивалентных путей.

**Определение 3.1.7.** Образ пути  $\gamma$  называется **носителем** этого пути.

**Пример 7.** Рассмотрим:

$$\begin{aligned} \gamma_1 : [0; 1] &\rightarrow \mathbb{R} : \quad \gamma_1(t) = t; \\ \gamma_2 : [0; 1] &\rightarrow \mathbb{R} : \quad \gamma_2(\tau) = \tau^3, \end{aligned}$$



Что бы доказать, что  $\gamma_1 \sim \gamma_2$ , нужно найти строго возрастающее отображение  $\phi : [0; 1] \rightarrow [0; 1]$ :

$$t = \phi(\tau) = \tau^3, \quad \phi(\tau) - \text{строго возрастающее, } \phi(0) = 0, \quad \phi(1) = 1;$$

$$\gamma_2(\tau) = \tau^3 = \phi(\tau) = t = \gamma_1(t) = \gamma_1(\phi(\tau)) \implies \gamma_2(\tau) = \gamma_1(\phi(\tau)).$$

**Определение 3.1.8.** Кривая называется **простой**, если она представляется простым путем (это значит, что в ее классе есть простой путь).

Упражнение 3: Доказать, что если один путь в классе эквивалентности простой, то остальные тоже простые.

**Определение 3.1.9.** Путь, представляющий данную кривую (из класса эквивалентности путей)  $l$  называется **параметризацией** этой кривой.

Вдальнейшем будем рассматривать метрические пространства  $(X, \rho)$  как  $\mathbb{R}^2$ ,  $\mathbb{R}^3$  с евклидовой метрикой.

**Определение 3.1.10.** Пусть  $l$  - простая кривая в  $\mathbb{R}^2$ ,  $\gamma(t) = (x(t); y(t))$  - ее параметризация. Кривая  $l$  называется **гладкой**, если  $\forall t$   $x(t), y(t)$  имеют непрерывные производные на  $[\alpha, \beta]$  и  $\nexists t_0 \in [\alpha, \beta]$  ( $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ),  $x'(t_0) = 0$  и  $y'(t_0) = 0$ .

**Определение 3.1.11.** Пусть  $l \subset \mathbb{R}^2$  ( $\mathbb{R}^3$ ) и  $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^2$  ( $\mathbb{R}^3$ ) - параметризация кривой  $l$ .

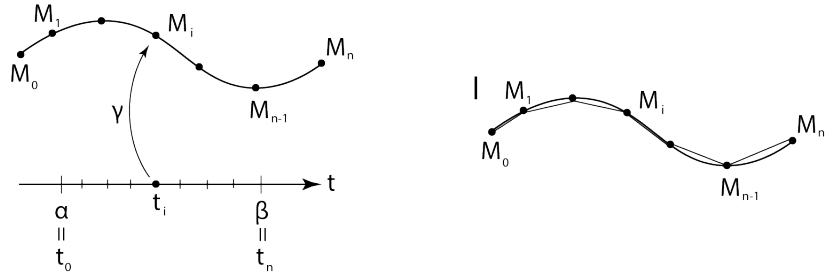
Пусть  $\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = \beta$  - разбиение отрезка  $[\alpha, \beta]$  и  $M_i = \gamma(t_i)$ ,  $i = \overline{0, n}$  - точка пути  $\gamma$  (кривая  $l$ ):

$$M_i = \gamma(t_i) = (x(t_i); y(t_i))$$

Тогда отрезок  $M_{i-1}M_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ) называется **звеном** кривой  $l$ . Объединение  $\bigcup_i M_{i-1}M_i$  - ломаная, вписанная в  $l$ .

**Периметром** ломаной называется сумма длин ее звеньев:

$$p(M_0, M_1, \dots, M_n) = \sum_{i=1}^n |M_{i-1}M_i|$$



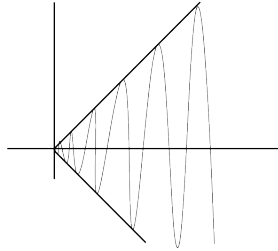
**Определение 3.1.12.** Если множество периметров ломаных, вписанных в данную кривую  $l$  - ограничено, то кривую  $l$  будем называть **спрямляемой**.

**Определение 3.1.13.** Если  $p(M_0, M_1, \dots, M_n)$  - периметр ломаной, вписанной в кривую  $l$ ,  $S(l)$  - длина кривой, то по определению:

$$S(l) = \sup p(M_0, \dots, M_n),$$

где  $\sup$  берется по всем ломаным  $\bigcup_i M_{i-1} M_i$ , вписанным в  $l$ .

**Пример 8.** (неспрямляемой кривой)



Рассмотрим  $L$  - множество всех спрямляемых кривых на плоскости ( $\mathbb{R}^2$ ). Введем  $S : L \rightarrow \mathbb{R}$ , то есть отображение  $S$  сопоставляет спрямляемую кривую  $l$  ее длину.

$S(l)$  - длина кривой  $l$

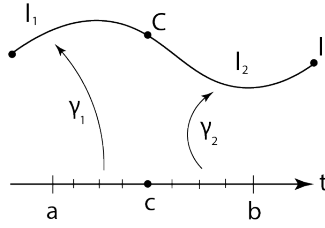
**Теорема 3.1.1** (аддитивность длины кривой). Функция  $S(l)$  является аддитивной, то есть если  $l = l_1 \cup l_2$ , то  $S(l) = S(l_1) + S(l_2)$ .

**Более тонко:** Пусть  $\gamma : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  - параметризация спрямляемой кривой  $l$ , точка  $c \in [a; b]$ :

$\gamma_1 : [a; c] \rightarrow \mathbb{R}^2$  - параметризация кривой  $l_1$ ,

$\gamma_2 : [c; b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  - параметризация кривой  $l_2$ ,

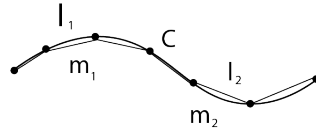
при этом  $C = \gamma(c) = \gamma_1(c) = \gamma_2(c)$ .



Тогда  $S(l) = S(l_1) + S(l_2)$ .

*Доказательство.* Пусть  $l$  - спрямляемая кривая. Покажем, что  $l_1$  и  $l_2$  - спрямляемые.

Обозначим за  $m_1$  и  $m_2$  - ломаные, вписанные в  $l_1$  и  $l_2$  соответственно. Тогда можно ввести  $m$  как  $m = m_1 \cup m_2$  - ломаная, вписанная в  $l$ .

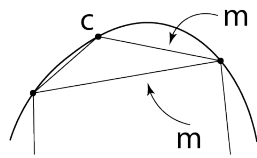


$p(m)$  - периметр ломаной, вписанной в  $l$ ,  $p(m) = p(m_1) + p(m_2) \leq S(l) \implies p(m_1) \leq S(l)$  и  $p(m_2) \leq S(l) \implies l_1$  и  $l_2$  - спрямляемые.

Пусть  $S(l_1) = \sup_{m_1} p(m_1)$  и  $S(l_2) = \sup_{m_2} p(m_2) \implies S(l_1) + S(l_2) \leq S(l)$

Обратно, пусть  $l_1$  и  $l_2$  - спрямляемые кривые. Покажем, что  $l$  - спрямляемая. Пусть  $m$  - некоторая ломаная, вписанная в  $l$ .

Возьмем  $C \in l$ . Пусть  $m'$  - ломаная, получаемая из ломаной  $m$  добавлением звеньев, проходящих через  $C$ .



Пусть  $m_1$  - часть ломаной, вписанной в  $l_1$ ,  $m'_2$  - часть ломаной, вписанной в  $l_2$ . Тогда  $p(m) \leq p(m') = p(m'_1) + p(m'_2) \leq S(l_1) + S(l_2) \implies S(l) = p(m) \leq S(l_1) + S(l_2)$ .

Тогда имеем, что  $S(l_1) + S(l_2) \leq S(l) \leq S(l_1) + S(l_2) \implies S(l) = S(l_1) + S(l_2)$ .  $\square$

## 3.2 Длина кривой как предел

**Теорема 3.2.1.** Пусть  $l$  - простая спрямляемая незамкнутая кривая в  $\mathbb{R}^2$  и  $\gamma : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  - ее параметризация. Пусть  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$  - разбиение отрезка  $[a; b]$ , этому разбиению соответствуют точки

$M_0, M_1, \dots, M_n$  - соответствующая ломаная, вписанная в  $l$  ( $M_i = \gamma(t_i)$ ), тогда:

$$S(l) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} p(m),$$

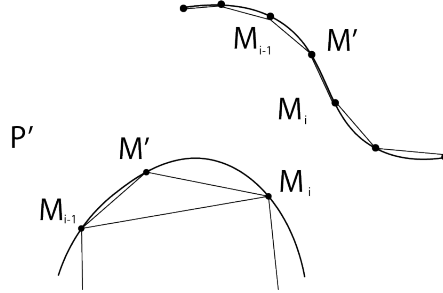
где  $\lambda = \max_i \Delta t_i$ ,  $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ .

*Доказательство.* (теоремы) Пусть  $l$  - простая спрямляемая незамкнутая кривая в  $\mathbb{R}^2$ ,  $P' = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b\}$  - произвольное разбиение отрезка  $[a; b]$ .

$m(P')$  - ломаная, вписанная в  $l$ , соответствующая разбиению  $P$ . Пусть  $\gamma : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  - параметризация кривой  $l$ ,  $\gamma(t) = (x(t); y(t))$ ,  $t \in [a; b]$ .

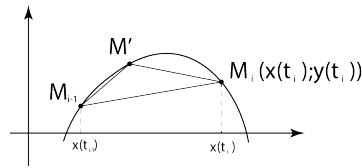
**Лемма 3.2.1.** Если разбиение  $P''$  получено из разбиения  $P'$  добавлением точки на промежуток  $(t_{i-1}; t_i)$ , то периметр ломаной, соответствующий разбиению  $P'$ , не больше периметра ломаной, соответствующей разбиению  $P''$  и  $p(m(P')) \leq p(m(P'')) \leq p(m(P')) + 2(\omega_i(x(t)) + \omega_i(y(t)))$ , где  $\omega_i$  - колебания функции  $x(t)$ ,  $y(t)$ :

$$\omega_i(x(t)) = \sup_{t', t'' \in [t_{i-1}; t_i]} (x(t') - x(t'')) = \sup_{t \in [t_{i-1}; t_i]} (x(t)) - \inf_{t \in [t_{i-1}; t_i]} (x(t))$$



*Доказательство.* (леммы) Ломаная  $m(P'')$  получена из ломаной  $m(P')$  путем замены звена  $M_{i-1}M_i$  на два звена:  $M_{i-1}M'$  и  $M'M_i$ .

Очевидно, что  $p(m(P')) \leq p(m(P''))$ .



$M_i = \gamma(t_i) = (x(t_i); y(t_i))$ ,  $M' = (x(t'); y(t'))$ ,  $M_{i-1} = (x(t_{i-1}); y(t_{i-1}))$   
 $|M_{i-1}M'| + |M'M_i| \leq |x(t') - x(t_{i-1})| + |y(t') - y(t_{i-1})| + |x(t_i) - x(t')| + |y(t_i) - y(t')| \leq 2\omega_i(x(t)) + 2\omega_i(y(t))$ ,  $\sup$  берется на отрезке  $[t_{i-1}; t_i]$ .

В итоге,  $p(m(P'')) \leq p(m(P')) + 2(\omega_i(x(t)) + \omega_i(y(t)))$ .

Если не понятно:  $p(m(P'')) = \sum_{k=1}^n |M_{k-1}M_k| = \sum_{k=1}^{i-1} |M_{k-1}M_k| + |M_{i-1}M'| + |M'M_i| + \sum_{k=i+1}^n |M_{k-1}M_k| \leq p(m(P')) + 2(\omega_i(x(t)) + \omega_i(y(t)))$ .  $\square$



(повтор) Пусть  $\epsilon > 0$  задано. Выберем произвольное разбиение  $P'$  отрезка  $[a; b]$ :  $p(m(P')) > S(l) - \frac{\epsilon}{2}$  (по определению  $\sup$  множества).

Пусть это разбиение состоит из  $n$  точек. Тогда выберем  $\delta > 0$ :  $\forall t', t'' \in [a; b]: |t' - t''| < \delta \implies |x(t') - x(t'')| < \frac{\epsilon}{8n}; |y(t') - y(t'')| < \frac{\epsilon}{8n}$ .

Пусть  $P''$  - произвольное разбиение:  $\lambda(P'') < \delta$ . Покажем, что  $p(m(P'')) \leq S(l)$  и  $p(m(P'')) > S(l) - \frac{\epsilon}{2}$ .

Рассмотрим  $P''' = P' \cup P''$ . Тогда  $p(m(P''')) \geq p(m(P''))$ . С другой стороны,  $P'''$  получена из  $P''$  добавлением не более чем  $n$  точек. Тогда  $p(m(P''')) \leq p(m(P'')) + \sum_{i=1}^n 2(\omega_i(x(t)) + \omega_i(y(t))) < S(l) + 4\frac{\epsilon}{8n}n = S(l) + \frac{\epsilon}{2}$ . Получим, что:

$$p(m(P''')) < S(l) + \frac{\epsilon}{2}.$$

Так как  $P'''$  тоже получено из  $P'$  добавлением точек, то:

$$p(m(P''')) \geq p(m(P')) > S(l) - \frac{\epsilon}{2}.$$

Так же имеем, что  $p(m(P''')) \leq p(m(P'')) + \frac{\epsilon}{2} \implies p(m(P'')) \geq p(m(P''')) - \frac{\epsilon}{2} \geq p(m(P')) - \frac{\epsilon}{2} > S(l) - \frac{\epsilon}{2} - \frac{\epsilon}{2} = S(l) - \epsilon$ .

Так как  $S(l) = \sup_m p(m(P))$ ,  $P$  - разбиение отрезка  $[a; b] \implies$

$$p(m(P'')) \leq S(l) < S(l) + \epsilon.$$

Таким образом, если  $\epsilon > 0$  задано, то возьмем произвольное разбиение  $P''$ :  $\lambda(P'') < \delta \implies S(l) - \epsilon < p(m(P'')) < S(l) + \epsilon \implies |p(m(P'')) - S(l)| < \epsilon \implies$

$$\lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} p(m(P)) = S(l).$$

□

**Теорема 3.2.2** (формула для вычисления длины кривой). Пусть  $l$  - гладкая кривая;  $\gamma : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  - ее параметризация (гладкая, то есть  $\gamma(t) = (x(t); y(t))$ , где  $x(t)$  и  $y(t)$  имеют непрерывные производные на  $[a; b]$ ). Тогда  $l$  - спрямляема и:

$$S(l) = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

*Доказательство.* (теоремы) Возьмем разбиение:

$$P' = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b\}$$

Тогда:

$$p(m(P')) = \sum_{i=1}^n \sqrt{(x(t_i) - x(t_{i-1}))^2 + (y(t_i) - y(t_{i-1}))^2}$$

$$\forall i = \overline{1, n} \quad x(t_i) - x(t_{i-1}) = x'(\tau_i) \Delta t_i, \quad \tau_i \in [t_{i-1}; t_i], \quad y(t_i) - y(t_{i-1}) = y'(\bar{\tau}_i) \Delta t_i, \quad \bar{\tau}_i \in [t_{i-1}; t_i].$$

Тогда:

$$p(m(P')) = \sum_{i=1}^n \sqrt{(x'(\tau_i)\Delta t_i)^2 + (y'(\bar{\tau}_i)\Delta t_i)^2} = \sum_{i=1}^n \sqrt{(x'(\tau_i))^2 + (y'(\bar{\tau}_i))^2} \Delta t_i.$$

Рассмотрим функцию:

$$\phi(t) = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2},$$

где  $\phi(t)$  - непрерывна на  $[a; b] \implies \phi(t)$  - интегрируема на  $[a; b]$ , то есть:

$$\exists \lim_{\lambda(P') \rightarrow 0} \sigma = \int_a^b \phi(t) dt,$$

где  $\sigma = \sum_{i=1}^n \phi(\tau_i) \Delta t_i = \sum_{i=1}^n \sqrt{(x'(\tau_i))^2 + (y'(\tau_i))^2} \Delta t_i$ .

**Лемма 3.2.2.**  $\forall a, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$  верно неравенство:

$$\sqrt{a^2 + b_1^2} - \sqrt{a^2 + b_2^2} \leq |b_1 - b_2|$$

*Доказательство.* (леммы)

1. Если  $a = 0$  - очевидно;

2. Если  $a \neq 0 \implies \frac{(\sqrt{a^2+b_1^2}-\sqrt{a^2+b_2^2})(\sqrt{a^2+b_1^2}+\sqrt{a^2+b_2^2})}{\sqrt{a^2+b_1^2}-\sqrt{a^2+b_2^2}} = \frac{|b_1^2-b_2^2|}{\sqrt{a^2+b_1^2}-\sqrt{a^2+b_2^2}} =$   
 $\frac{|b_1+b_2||b_1-b_2|}{\sqrt{a^2+b_1^2}-\sqrt{a^2+b_2^2}} < \frac{|b_1+b_2|}{|b_1|+|b_2|} |b_1-b_2| \leq |b_1-b_2|$ , потому что  $\frac{|b_1+b_2|}{|b_1|+|b_2|} \leq 1$ .

□

Покажем, что:

$$\lim_{\lambda(P') \rightarrow 0} (p(m(P')) - \sigma) = 0.$$

$$|p(m(P')) - \sigma| = \left| \sum_{i=1}^n \sqrt{(x'(\tau_i))^2 + (y'(\bar{\tau}_i))^2} \Delta t_i - \sum_{i=1}^n \sqrt{(x'(\tau_i))^2 + (y'(\tau_i))^2} \Delta t_i \right| =$$

$$= \left| \sum_{i=1}^n (\sqrt{(x'(\tau_i))^2 + (y'(\bar{\tau}_i))^2} - \sqrt{(x'(\tau_i))^2 + (y'(\tau_i))^2}) \Delta t_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |\sqrt{(x'(\tau_i))^2 + (y'(\bar{\tau}_i))^2} - \sqrt{(x'(\tau_i))^2 + (y'(\tau_i))^2}| \Delta t_i$$

$$\stackrel{lemma}{\leq} \sum_{i=1}^n |y'(\bar{\tau}_i) - y'(\tau_i)| \Delta t_i \leq \sum_{i=1}^n \omega_i(y(t)) \Delta t_i$$

Напоминание:

$$\omega_i(t) = \sup_{t', t'' \in [t_{i-1}; t_i]} |f(t') - f(t'')|$$

Так как  $y'(t)$  - непрерывная функция  $\implies y'(t)$  - интегрируема на  $[a; b] \implies \sum_{i=1}^n \omega_i(y') \Delta t_i \rightarrow 0$  (по критерию интегрируемости)  $\implies$

$$\lim_{\lambda(P') \rightarrow 0} (p(m(P')) - \sigma) = 0.$$

$$\lim_{\lambda(P') \rightarrow 0} (p(m(P'))) = \lim_{\lambda(P') \rightarrow 0} \sigma = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt.$$

□

**Следствие.** (теоремы)

1. Пусть  $l$  - график функции  $y = y(x)$ .

Тогда:

$$\begin{cases} x = x \\ y = y(x) \end{cases} \implies S(l) = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx$$

2. Пусть  $r = r(\phi)$  - уравнение кривой в полярной системе координат.

$x = r \cos \phi$ ,  $y = r \sin \phi$ ,  $\phi \in [\alpha, \beta]$ . Тогда:

$$\begin{cases} x(\phi) = r(\phi) \cos \phi \\ y(\phi) = r(\phi) \sin \phi \end{cases} \implies \begin{cases} x'(\phi) = r'(\phi) \cos \phi - r(\phi) \sin \phi \\ y'(\phi) = r'(\phi) \sin \phi + r(\phi) \cos \phi \end{cases}$$

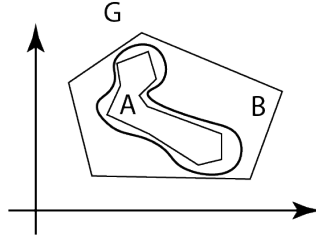
$$(x'(\phi))^2 + (y'(\phi))^2 = (r')^2 \cos^2 \phi - 2r'r \sin \phi \cos \phi + r^2 \sin^2 \phi + (r')^2 \sin^2 \phi + 2r'r \sin \phi \cos \phi + r^2 \cos^2 \phi = (r')^2 + r^2.$$

Тогда формула для вычисления длины кривой в полярной системе координат:

$$S(l) = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(r'(\phi))^2 + (r(\phi))^2} d\phi$$

### 3.3 Площадь плоской фигуры

**Определение 3.3.1.** Многоугольник - множество точек плоскости, границей которого является объединение конечного числа непересекающихся простых ломаных, при этом это объединение само является замкнутой ломаной.



**Определение 3.3.2.** Пусть  $G$  - множество на плоскости,  $G \subset \mathbb{R}^2$ . Будем говорить, что многоугольник  $A$  **вписан** в  $G$ , если  $A \subset G$  и  $A$  **описан около**  $G$ , если  $G \subset A$ .

**Определение 3.3.3.** Множество  $G \subset \mathbb{R}^2$  называется **измеримым по Жордану** (или **квадрируемым**), если:

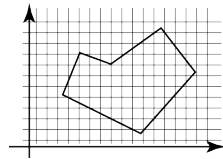
$$S_* = \sup_{A \subset G} S(A) = S^* = \inf_{B \supset G} S(B),$$

где  $\sup$  берется по всем многоугольникам, вписанным в  $G$ , а  $\inf$  - по всем многоугольникам, описанным около  $G$ . При этом их общее значение  $S = S_* = S^*$  называется **площадью  $G$** , или **мерой Жардана**.

$S_*$  - **внутренняя** мера,  $S^*$  - **внешняя** мера.

Другими словами, множество  $G \subset \mathbb{R}^2$  квадратуемо, если внутренняя и внешняя меры совпадают.

Здесь  $S(A)$ ,  $S(B)$  - площади многоугольников  $A$  и  $B$ . Многоугольник  $A$  можно разбить на конечное число прямоугольников и прямоугольных треугольников:



$$S_{\square} = ab; \quad S_{\triangle} = \frac{1}{2}ab$$

**Пример 9.** (из определения)

1. Квадрируемые множества на плоскости.

Круг с границей:

$$x^2 + y^2 = 1$$

Упражнение: доказать, что круг - квадратуемое множество.

2. Неквадрируемые множества на плоскости.

Множество точек единичного квадрата с рациональными координатами:

$$G = (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) \cap ([0; 1] \times [0; 1])$$

Вписанный многоугольник  $A = \emptyset$ ,  $S(A) = 0$ . Многоугольник  $B = [0; 1] \times [0; 1]$  имеет площадь равную 1 ( $S(B) = 1$ ).

$$S_* = 0, \quad S^* = \inf_{B' \supset G} S(B') = S(B) = 1 \quad (S_* \neq S^*)$$

**Теорема 3.3.1** (критерий квадратуемости). Множество  $G \subset \mathbb{R}^2$  квадратуемо  $\iff \forall \epsilon > 0 \exists$  многоугольники  $A$  и  $B$ :

1.  $A \subset G$ ,  $B \supset G$ ,
2.  $S(B) - S(A) < \epsilon$ .

*Доказательство.* (теоремы)

"  $\rightarrow$  " Пусть  $G \subset \mathbb{R}^2$  квадратуемо  $\implies S_* = S^* = S'$ .

Выберем  $A \subset G$ :  $S(A) > S - \frac{\epsilon}{2}$  ( $\epsilon > 0$  - задано) - по определению  $\sup$ .

Выберем  $B \supset G$ :  $S(B) < S + \frac{\epsilon}{2}$ .

$$S(B) - S(A) < (S + \frac{\epsilon}{2}) - (S - \frac{\epsilon}{2}) = \epsilon$$

”  $\leftarrow$  ” Пусть  $\forall \epsilon > 0 \exists$  многоугольники  $A$  и  $B$ ,  $A \subset G$ ,  $B \supset G$  и  $S(B) - S(A) < \epsilon$ . Докажем, что  $G$  - квадратуемо.

$$S(B) - S(A) < \epsilon \implies S(B) - \epsilon < S(A) \leq S_* \leq S^* \leq S(B)$$

Так как  $S(B) - S(A) < \epsilon \implies S^* - S_* < \epsilon$ . Так как  $\epsilon > 0$  - произвольное число  $\implies S^* = S_*$ , то есть  $G$  - квадратуемо.  $\square$

## 3.4 Классы квадратуемых областей

**Определение 3.4.1. Криволинейная трапеция** - часть плоскости, ограниченная прямыми  $x = a$ ,  $x = b$ , графиком функции  $y = f(x)$  и осью  $Ox$ .  
РИСУНОК

**Теорема 3.4.1.** Криволинейная трапеция квадратуема и ее площадь равна:

$$S = \int_a^b f(x) dx,$$

где  $f(x)$  - непрерывна на  $[a; b]$ ,  $f(x) \geq 0$ .

*Доказательство.*  $ABCD$  - криволинейная трапеция, ограничена  $x = a$ ,  $x = b$ ,  $y = 0$ , а так же графиком функции  $y = f(x)$ . Пусть  $\epsilon > 0$  задано. Выберем  $\delta > 0 : \forall x', x'' : |x' - x''| < \delta \implies |f(x') - f(x'')| < \frac{\epsilon}{b-a}$  (так как  $f(x)$  - непрерывна на  $[a; b] \implies f(x)$  равномерно непрерывна на  $[a; b]$ ).  
РИСУНОК

Разобьем отрезок  $[a; b]$  точками  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ , таким образом, что бы  $\max_i |x_i - x_{i-1}| < \delta$ . Пусть:

$$m_i = \min_{x \in [x_{i-1}; x_i]} f(x), \quad M_i = \max_{x \in [x_{i-1}; x_i]} f(x).$$

Построим многоугольник  $A$ , вписанный в  $ABCD$  и многоугольник  $B$ , описанный около  $ABCD$ . Многоугольник  $A$  состоит из прямоугольников со сторонами  $\Delta x_i$  и  $m_i$ , многоугольник  $B$  состоит из прямоугольников со сторонами  $\Delta x_i$  и  $M_i$ .

$$\begin{aligned} S(A) &= \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i, \quad S(B) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i, \\ S(B) - S(A) &= \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \Delta x_i < \sum_{i=1}^n \frac{\epsilon}{b-a} \Delta x_i = \\ &= \frac{\epsilon}{b-a} \sum_{i=1}^n \Delta x_i = \frac{\epsilon}{b-a} (b-a) = \epsilon \implies \end{aligned}$$

по критерию квадратуемости, криволинейная трапеция  $ABCD$  - квадратуема  $\implies S_* = S^* = S_{ABCD}$ . С другой стороны,  $S(B) - S(A) = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n \omega_i(f(x)) \Delta x_i$ .

Так как  $f$  - непрерывна на  $[a; b] \implies f \in R[a; b] \implies \sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i \rightarrow 0 \implies S_{ABCD} = \int_a^b = \int_a^b f(x) dx = S^* = S_*$ .  $\square$

**Определение 3.4.2.** Фигура на плоскости, ограниченная лучами  $\phi = \alpha$  и  $\phi = \beta$  и кривой  $\rho = \rho(\phi)$  называется **криволинейным сектором**.

**Теорема 3.4.2.** Пусть криволинейный сектор  $\Omega$  ограничен лучами  $\phi = \alpha$ ,  $\phi = \beta$  и кривой  $\rho = \rho(\phi)$ . Тогда:

$$S(\Omega) = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\phi) d\phi,$$

где  $\rho(\phi)$  - непрерывна на  $[\alpha; \beta]$ . РИСУНОК

*Доказательство.* Разобьем сектор  $\Omega$  лучами  $\alpha = \phi_0 < \phi_1 < \dots < \phi_{n-1} < \phi_n = b$ . Пусть:

$$m_i = \min_{\phi \in [\phi_{i-1}; \phi_i]} \rho(\phi), \quad M_i = \max_{\phi \in [\phi_{i-1}; \phi_i]} \rho(\phi).$$

Построим криволинейные сектора с радиусами  $m_i$  и  $M_i$ . Пусть  $\underline{\Omega}$  - объединение секторов в радиусом  $m_i$ , а  $\overline{\Omega}$  - объединение секторов с радиусом  $M_i$ .

$$S(\underline{\Omega}) = \sum_{i=1}^n \pi m_i^2 \frac{\Delta \phi_i}{2\pi} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i^2 \Delta \phi_i,$$

$$S(\overline{\Omega}) = \sum_{i=1}^n \pi M_i^2 \frac{\Delta \phi_i}{2\pi} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n M_i^2 \Delta \phi_i.$$

Заметим, что  $S(\underline{\Omega}) \leq S_{kriv.sector} \leq S(\overline{\Omega})$  (\*).

Заметим, что  $S(\underline{\Omega})$  - нижняя интегральная сумма функции  $\frac{\rho^2(\phi)}{2}$ , а  $S(\overline{\Omega})$  - верхняя интегральная сумма этой же функции. Функция  $\frac{\rho^2(\phi)}{2}$  - непрерывна (так как  $\rho(\phi)$  - непрерывна)  $\implies$  интегрируема на  $[\alpha; \beta] \implies \exists \lim_{\max \Delta \phi_i \rightarrow 0} S(\underline{\Omega}) = \lim_{\max \Delta \phi_i \rightarrow 0} S(\overline{\Omega}) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\rho^2(\phi)}{2} d\phi \implies$  учитывая неравенство (\*) и лемму о двух милиционерах:

$$S_{kriv.sector} = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\phi) d\phi$$

и криволинейный сектор - квадратуемый.  $\square$

## Глава 4

# Несобственные интегралы

**Определение 4.0.1.** Пусть  $f : [a; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  (задана на луче) и  $\forall b \in [a; +\infty)$   $f \in R[a; b]$ . Рассмотрим:

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx,$$

этот предел называется **несобственным интегралом** от функции  $f(x)$  на луче  $[a; +\infty)$ .

Если этот предел существует и конечен, то несобственный интеграл называется **сходящимся**, иначе **расходящимся**. Обозначение:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$$

**Определение 4.0.2.** (продолжение определения)

$$1. \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_2^b \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \rightarrow +\infty} (F(b) - F(2)) = \lim_{b \rightarrow +\infty} (-\frac{1}{b} + \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}.$$

Аналогично, пусть функция  $f : (-\infty; a] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \in R[a; b]$ ,  $\forall b \in (-\infty; a]$ .

$$\lim_{b \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx,$$

этот предел называется **несобственным интегралом** от функции  $f(x)$  на луче  $(-\infty; a]$ .

Если этот предел существует и конечен, то соответственно несобственный интеграл - сходящийся. Обозначается:

$$\int_{-\infty}^a f(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{b \rightarrow -\infty} \int_b^a f(x) dx.$$

Аналогично:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{c \rightarrow +\infty, b \rightarrow -\infty} \int_b^c f(x) dx,$$

где  $c \rightarrow +\infty, b \rightarrow -\infty$  - независимые друг от друга ( $\forall b, c \ f(x) \in R[b; c]$ ).

## РИСУНОК

2. Далее, пусть  $f : [a; b) \rightarrow \mathbb{R} : \forall c \in [a; b) f \in R[a; c]$ . Положим:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c \rightarrow b} \int_a^c f(x)dx.$$

Эта величина называется **несобственным интегралом** от функции  $f$  на полуинтервале  $[a; b)$ .

Если предел существует, то несобственный интеграл называется **сходящимся**, иначе **расходящимся**.

Аналогично, пусть  $f : (a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ , причем  $\forall c \in (a; b] \ f \in R[c; b]$ :

$$\int_a^b f(x)dx \stackrel{def}{=} \lim_{c \rightarrow a} \int_c^b f(x)dx -$$

несобственный интеграл от функции  $f(x)$  на полуинтервале  $(a; b]$ .

Аналогично, пусть  $f : (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$ , причем  $\forall c, d \in (a; b) \ f \in R[c, d]$ . Тогда:

$$\int_a^b f(x)dx \stackrel{def}{=} \lim_{c \rightarrow a, d \rightarrow b} \int_c^d f(x)dx,$$

(где  $c \rightarrow a, d \rightarrow b$  - независимые друг от друга) - несобственный интеграл от  $f(x)$  на  $(a; b)$

3. Пусть  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  и  $\exists c \in (a; b) : f$  - неограниченана в точке  $c$ .

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \int_a^{c-\epsilon} f(x)dx + \int_{c+\epsilon}^b f(x)dx = \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_a^{c-\epsilon} f(x)dx + \lim_{\epsilon} \int_{c+\epsilon}^b f(x)dx. \end{aligned}$$

Если  $\lim$  существует, то интеграл является сходящимся.

В дальнейшем будем рассматривать:

$$\int_a^\omega f(x)dx,$$

где  $\omega = +\infty, -\infty, b$ .

**Теорема 4.0.1.** Пусть  $\forall b \in [a; \omega) \ f \in R[a; b]$ .

1. Тогда  $\int_a^\omega f(x)dx$  сходится  $\iff \forall b \in [a; \omega) \ \int_b^\omega f(x)dx$  сходится и

$$\int_a^\omega f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^\omega f(x)dx$$

## РИСУНОК



2.

$$\lim_{b \rightarrow \omega} \int_b^\omega f(x) dx = 0$$

3.  $\forall c \in \mathbb{R}$

$$\int_a^\omega c f(x) dx = c \int_a^\omega f(x) dx$$

(то есть если  $c \int_a^\omega f(x) dx$  сходится, то сходится  $\int_a^\omega c(x) dx$  и наоборот, и они равны)

4. Если  $\int_a^\omega f(x) dx$  и  $\int_a^\omega g(x) dx$  сходятся, то сходится и

$$\int_a^\omega (f(x) + g(x)) dx = \int_a^\omega f(x) dx + \int_a^\omega g(x) dx$$

*Доказательство.* (теоремы)

1. Пусть  $b \in [a; \omega)$ . Выберем точку  $c : b < c < \omega$ . Тогда

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx \quad (*).$$

Если  $\int_a^\omega f(x) dx$  сходится  $\implies \exists \lim_{d \rightarrow \omega} \int_a^d f(x) dx$ ,  $d \in (a; \omega)$  (общее определение) в равенстве (\*) перейдем к пределу при  $c \rightarrow \omega$ , получим

$$\lim_{c \rightarrow \omega} \int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \lim_{c \rightarrow \omega} \int_b^c f(x) dx,$$

где если  $\exists \lim_{c \rightarrow \omega} \int_a^c f(x) dx$ , то  $\exists \lim_{c \rightarrow \omega} \int_b^c f(x) dx$ .

Таким образом:

$$\int_a^\omega f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^\omega f(x) dx.$$

В обратную сторону аналогично.

2. Докажем из 1. Имеем:

$$\begin{aligned} \int_a^\omega f(x) dx &= \int_a^b f(x) dx + \int_b^\omega f(x) dx; \\ \int_b^\omega f(x) dx &= \int_a^\omega f(x) dx - \int_a^b f(x) dx \quad (**) \end{aligned}$$

При  $b \rightarrow \omega$  в равенстве (\*\*) в правой части получаем:

$$\int_a^\omega f(x) dx - \int_a^\omega f(x) dx = 0.$$

$$\lim_{b \rightarrow \omega} \int_b^\omega f(x) dx = \int_a^\omega f(x) dx - \lim_{b \rightarrow \omega} \int_a^b f(x) dx = \int_a^\omega f(x) dx = 0$$

3. Следует из свойств предела.

4. Следует из свойств предела.

□

**Теорема 4.0.2** (Критерий Коши). Пусть  $\forall b \in [a; \omega)$   $f \in R[a; b]$ .

$\int_a^\omega f(x)dx$  сходится  $\iff \forall \epsilon > 0 \exists B \in [a; \omega) : \forall b_1, b_2 \in (a; \omega)$  и  $b_1, b_2 > B$  верно неравенство:

$$|\int_{b_1}^{b_2} f(x)dx| < \epsilon$$

## РИСУНОК

*Доказательство.* Рассмотрим функцию  $F(b) = \int_a^b f(x)dx$ .

Имеем, что  $\int_a^\omega f(x)dx$  сходится  $\iff \exists \lim_{b \rightarrow \omega} \int_a^b f(x)dx \iff \forall \epsilon > 0 \exists B \in (a; \omega) : \forall b_1, b_2 : B < b_1, b_2 < \omega$   $|F(b_1) - F(b_2)| < \epsilon$  (критерий Коши существования предела  $F(b)$ ).

$$\begin{aligned} |F(b_1) - F(b_2)| &= |\int_a^{b_1} f(x)dx - \int_a^{b_2} f(x)dx| = \\ &= |-(\int_{b_1}^a f(x)dx + \int_a^{b_2} f(x)dx)| = |\int_{b_1}^{b_2} f(x)dx| < \epsilon. \end{aligned}$$

□

**Теорема 4.0.3** (несобственная сходимость интеграла от неотрицательной функции). Пусть  $f \in R[a; b]$  для  $\forall b \in (a; \omega)$  и  $f(x) \geq 0 \forall x \in [a; \omega)$ .

$\int_a^\omega f(x)dx$  сходится  $\iff \exists M > 0 : \forall b \in (a; \omega)$

$$\int_a^b f(x)dx < M.$$

## РИСУНОК

*Доказательство.* Рассмотрим  $F(b) = \int_a^b f(x)dx$ . Так как  $f(x) \geq 0 \forall x \in [a; \omega) \implies F(b) \geq 0$  на  $[a; \omega) \implies$  по теореме о пределе монотонной функции:

$$\exists \lim_{b \rightarrow \omega} F(b) \iff \exists M > 0 : \forall b \in [a; \omega) F(b) < M,$$

или

$$\int_a^b f(x)dx < M.$$

□

**Теорема 4.0.4** (первый признак сравнения). Если  $\forall x \in [a; \omega)$   $f(x) \leq g(x)$  и  $\forall b \in [a; \omega)$   $f, g \in R[a; b]$ ,  $f(x) \geq 0$ ,  $g(x) \geq 0$ , тогда:

1. Если  $\int_a^\omega g(x)dx$  - сходится  $\implies \int_a^\omega f(x)dx$  - сходится.
2. Если  $\int_a^\omega f(x)dx$  - расходится  $\implies \int_a^\omega g(x)dx$  - расходится.

*Доказательство.* (теоремы)

Если  $f(x) \leq g(x) \forall x \in [a; \omega)$   $\implies$

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx,$$

$$\lim_{b \rightarrow \omega} \int_a^b f(x)dx \leq \lim_{b \rightarrow \omega} \int_a^b g(x)dx.$$

Далее, доказательство следует из теоремы о сходимости несобственного интеграла от неотрицательной функции.  $\square$

**Теорема 4.0.5** (второй признак сравнения). Если  $\forall x \in [a; \omega) f(x) > 0, g(x) > 0$  и  $\exists \lim_{x \rightarrow \omega} \frac{f(x)}{g(x)} = A$  (либо 0, либо  $+\infty$ , либо  $const \neq 0$ ), тогда:

1. Если  $A = +\infty$ , то из расходимости  $\int_a^\omega g(x)dx$  следует расходимость  $\int_a^\omega f(x)dx$ , а из сходимости  $\int_a^\omega f(x)dx$  следует сходимость  $\int_a^\omega g(x)dx$ .
2. Если  $A = 0$ , то из расходимости  $\int_a^\omega f(x)dx$  следует расходимость  $\int_a^\omega g(x)dx$ , а из сходимости  $\int_a^\omega g(x)dx$  следует сходимость  $\int_a^\omega f(x)dx$ .
3. Если  $A = const \neq 0$ , то интегралы  $\int_a^\omega f(x)dx$  и  $\int_a^\omega g(x)dx$  ведут себя одинаково.

*Доказательство.* Начнем с пункта номер 3.:

3. Пусть  $0 < A < +\infty$ . Тогда  $\exists B \in (a; \omega) : \forall x \in (B; \omega), \forall \epsilon > 0$

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - A \right| < \epsilon \implies A - \epsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < A + \epsilon (*).$$

Более того, можно считать, что  $A - \epsilon > 0$ . В (\*) домножим обе части неравенства на  $g(x) > 0$ :

$$g(x)(A - \epsilon) < f(x) < g(x)(A + \epsilon).$$

Если  $\int_a^\omega g(x)dx \implies \int_a^\omega g(x)(A + \epsilon)dx$  сходится  $\implies$  по первому признаку сравнения, сходится  $\int_a^\omega f(x)dx$ .

Если  $\int_a^\omega f(x)dx$  сходится  $\implies$  по первому признаку сравнения сходится  $\int_a^\omega g(x)(A - \epsilon)dx \implies \int_a^\omega g(x)dx$ .

Аналогично, если  $\int_a^\omega g(x)dx$  расходится, то  $\int_a^\omega g(x)(A - \epsilon)dx$  - расходится  $\implies$  по первому признаку сравнения расходится  $\int_a^\omega f(x)dx$ .

Если  $\int_a^\omega f(x)dx$  расходится, то по первому признаку сравнения  $\int_a^\omega g(x)(A + \epsilon)dx$  расходится  $\implies \int_a^\omega g(x)dx$  расходится.

2. Если  $A = 0$ , то есть  $\lim_{x \rightarrow \omega} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ , то при

$f(x) = \alpha(x)g(x)$ , где  $\alpha(x) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow \omega$ ,

$f(x) = o_{x \rightarrow \omega}(g(x)) \implies \exists B \in [a; \omega)$  такая, что  $\forall x \in (B; \omega) f(x) < \frac{1}{2}g(x) \implies$   
по первому признаку сравнения, если  $\int_a^\omega g(x)dx$  сходится  $\implies \int_a^\omega f(x)dx$   
сходится, если  $\int_a^\omega f(x)dx$  расходится  $\implies \int_a^\omega g(x)dx$  - расходится.

1. Если  $A = +\infty$ , то есть  $\lim_{x \rightarrow \omega} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty \implies \exists B \in [a; \omega)$  такая, что  
 $\forall x \in (B; \omega) f(x) > g(x) \implies$  по первому признаку сравнения, из сходимости  
 $\int_a^\omega f(x)dx \implies$  сходимость  $\int_a^\omega g(x)dx$  и из расходимости  $\int_a^\omega g(x)dx \implies$   
расходимость  $\int_a^\omega f(x)dx$ .  $\square$

### Пример 10. Задача

1. Исследуем на сходимость  $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^4}$ , где  $a > 0$ :

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b \frac{dx}{x^4} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left\{ \begin{array}{ll} \ln x, & p = 1 \\ \frac{x^{1-p}}{1-p}, & p \neq 1 \end{array} \right\} \Big|_a^b =$$

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \left\{ \begin{array}{ll} \ln b - \ln a, & p = 1 \\ \frac{b^{1-p}}{1-p} - \frac{a^{1-p}}{1-p}, & p \neq 1 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ll} +\infty, & p = 1 \\ +\infty, & 1-p > 0 \\ -\frac{a^{1-p}}{1-p}, & p > 1 \end{array} \right\} \implies$$

$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$  сходится при  $p > 1$  и расходится при  $p \leq 1$ .

2. Исследуем на сходимость при  $a > 0$ :

$$\int_0^a \frac{dx}{(a-x)^p} = \lim_{b \rightarrow a} \int_0^b \frac{dx}{(a-x)^p} = \lim_{b \rightarrow a} - \int_0^b \frac{d(a-x)}{(a-x)^p} =$$

$$\lim_{b \rightarrow a} \left\{ \begin{array}{ll} -\ln|a-x|, & p = 1 \\ \frac{1}{p-1}(a-x)^{1-p}, & p \neq 1 \end{array} \right\} \Big|_0^b =$$

$$\lim_{b \rightarrow a} \left\{ \begin{array}{ll} -\ln|a-b| + \ln|a|, & p = 1 \\ \frac{1}{p-1}(a-b)^{1-p} - \frac{1}{p-1}a^{1-p}, & p \neq 1 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ll} +\infty, & p = 1 \\ \frac{a^{1-p}}{p-1}, & 1-p > 0 \\ +\infty, & 1-p < 0 \end{array} \right\} \implies$$

$$\int_0^a \frac{dx}{(a-x)^p}, (a > 0) \text{ сходится при } p < 1, \text{ расходится при } p \geq 1.$$

3. Теперь:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \int_0^1 \frac{dx}{x^p} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} - \text{расходящаяся для } \forall p.$$

4. Теперь:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\ln x} = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\ln x} + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\ln x}.$$

Рассмотрим  $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x}}$  - сходится.

Рассмотрим  $-\int_0^{\frac{1}{2}} -\frac{dx}{\ln x} : f(x) = -\frac{1}{\ln x}, g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}},$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{\ln x}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( -\frac{\sqrt{x}}{\ln x} \right) = 0 -$$

по второму признаку сравнения,  $-\int_0^{\frac{1}{2}} -\frac{dx}{\ln x}$  - сходится.

Рассмотрим  $-\int_{\frac{1}{2}}^1 -\frac{dx}{\ln x}.$

Рассмотрим  $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{1-x}$  - расходится.

$$f(x) = -\frac{1}{\ln x}, g(x) = \frac{1}{1-x},$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\frac{1}{\ln x}}{\frac{1}{1-x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\frac{1}{x}} = 1 \implies$$

по второму признаку сравнения  $\implies -\int_{\frac{1}{2}}^1 -\frac{dx}{\ln x}$  - расходится  $\implies \int_0^1 \frac{dx}{\ln x}$  - расходится.

**Определение 4.0.3.** Пусть  $\forall b \in [a; \omega) f \in R[a; b]$ .

$\int_a^\omega f(x)dx$  называется **абсолютно сходящимся**, если сходится  $\int_a^\omega |f(x)|dx$ .

**Теорема 4.0.6.** Если  $\int_a^\omega |f(x)|dx$  сходится, то  $\int_a^\omega f(x)dx$  тоже сходится (или если интеграл абсолютно сходящийся, то он сходящийся).

При этом:

$$|\int_a^\omega f(x)dx| \leq \int_a^\omega |f(x)|dx$$

*Доказательство.* Пусть  $\int_a^\omega |f(x)|dx$  - сходится. Пусть  $\epsilon > 0$  задано.

Выберем  $B \in [a; \omega) : \forall b_1, b_2 \in (B, \omega) :$

$$|\int_{b_1}^{b_2} |f(x)|dx| < \epsilon,$$

но

$$|\int_{b_1}^{b_2} f(x)dx| \leq \int_{b_1}^{b_2} |f(x)|dx = |\int_{b_1}^{b_2} |f(x)|dx| < \epsilon \implies$$

по критерию Коши,  $\int_a^\omega f(x)dx$  - сходится.

Теперь  $\forall b \in [a; \omega) |\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx$ .

Переходя к пределу при  $b \rightarrow \omega$ , получаем:

$$|\int_a^\omega f(x)dx| \leq \int_a^\omega |f(x)|dx.$$

□

**Следствие** (признак Вейерштрасса). Если  $\forall x \in [a; \omega) \quad |f(x)| \leq g(x)$  и  $\int_a^\omega g(x)dx$  сходится, то  $\int_a^\omega f(x)dx$  сходится.

*Доказательство.* Самостоятельно.

□