Математический Анализ
2 семестр

Данил Заблоцкий

20 мая 2023 г.

Оглавление

1 Дифференциальное исчисление 3

1.1 Формула Тейлора . . . 3

1.1.1 Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано 3

1.1.2 Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа и в форме Коши . . . 6

1.2 Приложения дифференциального исчисления . . . 6

1.2.1 Монотонность функции . . . 6

1.2.2 Экстремумы . . . 6

1.2.3 Выпуклость функции . . . 6

1.3 Первообразная и неопределенный интеграл . . . 6

1.3.1 Интегрирование рациональных дробей . . . 8

1.3.2 Интегрирование рациональных дробей . . . 8

1.3.3 Разложение рациональной дроби на простые . . . 10

1.3.4 Метод неопределенных коэф-ов (следствия лемм) . . . 11

1.3.5 Метод Остроградского . . . 12

2 Интегральное исчисление 14

2.1 Базы. Предел функции по базе . . . 15

2.2 Разбиение. Интеграл Римана (v.2) . . . 17

2.3 Критерий интегрируемости . . . 19

2.3.1 Суммы Дарбу . . . 19

2.3.2 Классы интегрируемых функций . . . 22

2.3.3 Свойства интегрируемых функций . . . 23

2.3.4 Аддитивность интеграла Римана . . . 24

2.3.5 Монотонность интеграла Римана . . . 25

2.4 Интеграл Римана как функция верхнего предела интегрирования . . . 27

2.5 Формула Ньютона-Лейбница . . . 30

2.6 Интегрирование по частям в определенном интеграле и формула Тейлора . . . 31

2.7 Замена переменной в определенном интеграле . . . 32

3 Геометрические приложения интеграла Римана **34**
3.1 Длина кривой 34
3.2 Длина кривой как предел 38
3.3 Площадь плоской фигуры 42
3.4 Классы квадрируемых областей 44

4 Несобственные интегралы **46**

5 Дифференциальное исчисление функций многих переменных **55**
5.1 Линейные нормированные пространства 55

Глава 1

Дифференциальное исчисление

1.1 Формула Тейлора

1.1.1 Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано

Пусть $f : (a; b) \to \mathbb{R},\ x_0 \in (a; b)$. Нужно построить многочлен $P(x; x_0)$ вида:

$$P(x; x_0) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n$$

$f(x) - P(x; x_0) = r_n(x; x_0)$ - n-ый остаточный член в формуле Тейлора.

Определение 1.1.1. Остаточные члены в форме Пеано имеют вид:

$$r_n(x; x_0) = \underset{x \to x_0}{o}((x - x_0)^n)$$

Определение 1.1.2. Пусть $f : (a; b) \to \mathbb{R},\ x_0 \in (a; b),\ f(x)$ имеет в точке x_0 проиводные до n-ого порядка включительно.

Многочленом Тейлора (полиномом Тейлора) функции $f(x)$ в точке x называется многочлен:

$$P(x; x_0) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Утверждение 1.1.1. Если $f : (a; b) \to \mathbb{R}$ имеет в точке $x_0 \in (a; b)$ производные до n-го порядка включительно и $P(x; x_0)$ - ее многочлен Тейлора, то:

$$f(x_0) = P(x_0; x_0),\ f'(x_0) = P'(x_0; x_0),\ \ldots,\ f^{(n)}(x_0) = P^{(n)}(x_0; x_0)$$

Доказательство. $P(x; x_0) = f(x) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$, при $x = x_0$: $P(x_0; x_0) = f(x_0)$

$P'(x;x_0) = +\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}2(x-x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}n(x-x_0)^{n-1}$, при $x = x_0$: $P'(x_0;x_0) = \frac{f'(x_0)}{1!}$; $P''(x;x_0) = f''(x_0) + \frac{f'''(x_0)}{3!}6(x-x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}n(n-1)(x-x_0)^{n-2}$; $P^{(n)}(x_0;x_0) = f^{(n)}(x_0)$. □

Теорема 1.1.1. Пусть $f : (a;b) \to \mathbb{R},\ x_0 \in (a;b),\ f$ имеет в точке x_0 производные до n-ого порядка включительно, тогда существует единственный многочлен вида:

$$p(x;x_0) = a_0 + a_1(x-x_0) + \ldots + a_n(x-x_0)^n$$

такой, что:

$$f(x) - P(x;x_0) = \underset{x\to x_0}{o}((x-x_0)^n)$$

Доказательство. (теоремы)

1. Докажем единственность.

   Пусть $Q(x;x_0) = b_0 + b_1(x-x_0) + \ldots + b_n(x-x_0)^n :\ f(x) - Q(x;x_0) = \underset{x\to x_0}{o}((x-x_0)^n),\ f(x) = P(x;x_0) + \underset{x\to x_0}{o}((x-x_0)^n)$.

   Рассмотрим разность этих выражений: $f(x) - f(x) = P(x;x_0) - Q(x;x_0) + \underset{x\to x_0}{o}((x-x_0)^n) = (a_0-b_0) + (a_1-b_1)(x-x_0) + (a_2-b_2)(x-x_0)^2 + \ldots + (a_n-b_n)(x-x_0)^n + \underset{x\to x_0}{o}((x-x_0)^n)$ (*).

   Переходя к пределу при $x \to x_0$, получим, что $0 = a_0 - b_0 \implies a_0 = b_0$. Разделим (*) на $x - x_0 :\ 0 = (a_1-b_1) + (a_2-b_2)(x-x_0) + \ldots + (a_n - b_n)(x-x_0)^{n-1} + \underset{x\to x_0}{o}((x-x_0)^{n-1})$ (**);

   $$\underset{x\to x_0}{o}((x-x_0)^n) = \alpha(x)(x-x_0)^n,\ \alpha(x) \to 0\ (x \to x_0)$$

   Переходя к пределу при $x \to x_0$ в (**) получаем, что $a_1 - b_1 = 0 \implies a_1 = b_1$. Используя ММИ можно показать, что $a_i = b_i,\ i = 2, \ldots, n \implies Q(x;x_0) = P(x;x_0)$.

2. Докажем существование.

   Лемма 1.1.1. Если фукнция $\phi : (a;b) \to \mathbb{R},\ x_0 \in (a;b)$, такая, что $\phi(x_0) = \phi'(x_0) = \ldots = \phi^{(n)}(x_0) = 0$ ($\phi(x)$ имеет производную до n-ого порядка включительно), причем все производные непрерывны в некоторой окрестности точки x_0. Тогда:

   $$\phi(x) = \underset{x\to x_0}{o}((x-x_0)^n),\ (x \to x_0)$$

   Допустим, что лемма доказана. Тогда положим $\phi(x) = f(x) - P(x;x_0)$, тогда будет выполнено условие леммы (+ смотри утверждение в начале параграфа) $\implies f(x) - P(x;x_0) = \underset{x\to x_0}{o}((x-x_0)^n)$ при $x \to x_0$, где $P(x;x_0)$ - многочлен Тейлора функциии f в точке x_0.

□

Доказательство. (леммы)

По индукции.

Пусть $n = 1$, то есть ϕ - дифференцируема в окрестности точки x_0 и $\phi(x_0) = \phi'(x_0) = 0$. Тогда $\phi(x) = \phi(x) - \phi(x_0) = \phi'(\xi)(x - x_0)$, где $\xi \in (a; b)$ (по теореме Лагранжа).

Далее, $\phi'(\xi) \to \phi'(x_0)$ при $\xi \to x_0$ (используя непрерывность функции) $\implies \phi'(\xi)$ - бесконечно малая, поскольку $\phi'(x_0) = 0$.

То есть $\phi'(\xi) \to 0$ при $\xi \to x_0 \implies \phi(x) = \phi'(\xi)(x - x_0) = \underset{\xi \to x_0}{o}(x - x_0)$.

Допустим, лемма верна для $k = n - 1$. Положим $g(x) = \phi'(x)$. Тогда $g(x)$ имеет непрерывные производные до $(n-1)$-ого порядка включительно, при этом $g(x_0) = g'(x_0) = \ldots = g^{(n)}(x_0) = 0 \implies$ по утверждению леммы:

$$g(x) = \underset{x \to x_0}{o}((x - x_0)^{n-1})$$

Далее, $\phi(x) - \phi(x_0) = \phi(x) = \phi'(\xi)(x - x_0) = g(\xi)(x - x_0) = \underset{\xi \to x_0}{o}((\xi - x_0)^{n-1})(x - x_0) = \alpha(\xi)(\xi - x_0)^{n-1}(x - x_0),\ \alpha(\xi) \to 0$ при $\xi \to x_0$.

Отсюда $|\phi(x)| = |\alpha(\xi)||\xi - x_0|^{n-1}|x - x_0| \leqslant |\alpha(\xi)||x - x_0|^n$ $(\alpha(\xi) \to 0$ при $\xi \to x_0) \implies \phi(x) = \underset{x \to x_0}{o}((x - x_0)^n)$. $\square$

Примеры представления некоторых функций через многочлен Тейлора ($x_0 = 0$)

1. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \underset{x \to 0}{o}(x^n)$
2. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \underset{x \to 0}{o}(x^{2n-1})$
3. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \underset{x \to 0}{o}(x^{2n})$
4. $\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n!} + \underset{x \to 0}{o}(x^n)$
5. $(1 + x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{\alpha!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-(n-1))}{n!}x^n + \underset{x \to 0}{o}(x^n)$

1.1.2 Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа и в форме Коши

1.2 Приложения дифференциального исчисления

1.2.1 Монотонность функции

1.2.2 Экстремумы

1.2.3 Выпуклость функции

Геометрический смысл выпуклой функции

1.3 Первообразная и неопределенный интеграл

Определение 1.3.1 (Первообразная функция)**.** Пусть X - промежуток, $f : X \to \mathbb{R}$. Функция $F(x)$ называется **первообразной** $f(x)$, если производная $F'(x) = f(x)$, при этом $F(x)$ дифференцируема и непрерывна.

Пример 1. $f(x) = 2x \implies F(x) = x^2$. В самом деле, $F'(x) = f(x)$.

Утверждение 1.3.1. (О первообразной)

1. Если $F(x)$ - первообразная функции $f(x)$ на промежутке X, и $\varPhi(x) = F(x) + C,\ c \in \mathbb{R}$, то $\varPhi(x)$ - тоже первообразная.

2. Если $F(x)$ и $\varPhi(x)$ - две первообразные для $f(x)$ на промежутке X, то $\exists C = const,\ c \in \mathbb{R}$ такая, что $\varPhi(x) = F(x) + C$.

Доказательство. (Утверждения о первообразной)

1. $\Phi'(x) = (F(x) + C)' = F'(x) = f(x) \implies \Phi(x)$ - первообразная для $f(x)$.

2. Так как $F(x)$ и $\Phi(x)$ - первообразные для $f(x)$, то $F'(x) = f(x), \Phi'(x) = f(x)$. Рассмотрим функцию $\phi = \Phi(x) - F(x),\ \forall x \in X$: $\phi'(x) = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$. Рассмотрим $\forall x_1, x_2 \in X$, по теореме Лагранжа, $\exists \xi \in (x_1, x_2) :\ \phi(x_1) - \phi(x_2) = \phi'(\xi)(x_1 - x_2) = 0 \implies \phi(x_1) = \phi(x_2) \implies \phi(x) = const$ для $\forall x \in X$.

□

Определение 1.3.2 (Неопределенный интеграл)**.** Совокупность всех первообразных для функции $f(x)$ на промежутке X называется **неопределенным интегралом** и обозначается:

$$\int f(x)dx$$

Таким образом, $\int f(x)dx = \{F(x)+C,$ где $F'(x) = f(x),\ C \in \mathbb{R}\}$, или:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Замечание. (Для неопределенного интеграла)

- $(\int f(x)dx)'_x = (F(x)+C)'_x = F'(x) = f(x);$
- $d(\int f(x)dx) = d(F(x)+C) = (F(x)+C)'dx = F'(x)dx = f(x)dx;$
- $\int d(F(x)) = \int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x)+C,\ C \in \mathbb{R}.$

Определение 1.3.3 (интегрирование)**.** Операция нахождения первообразной функции $f(x)$ называется ее **интегрированием**.

Утверждение 1.3.2. (Основные методы интегрирования)
Пусть $f : X \to \mathbb{R},\ g : X \to \mathbb{R},\ X$ - промежуток:

1. Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{R} = const$, тогда:
$\int(\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx.$
2. Формула интегрирования по частям:
$udv = uv - \int udv,\ u = u(x), v = v(x).$
3. Интегрирование подстановкой:
Пусть T - промежуток, $X = X(t)$ - дифференцируема на T.
Тогда $\int f(X(t)) * X'(t)dt = F(X(t)) + C = \int f(x)dx + C.$

Доказательство. (Утверждения об основных методах интегрирования)

1. Возьмем производную по x от обеих частей равенства: $\int(\alpha f(x)+\beta g(x))'_x = \alpha f(x)+\beta g(x) = \alpha F'(x)+\beta G'(x) = \alpha(\int f(x)dx)'_x + \beta(\int g(x)dx)'_x$ - является производной для $\alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx$.
2. Рассмотрим $d(uv) = vdu + udv\ :\ \int d(uv) = \int vdu + \int udv$. Так как $d(uv) = uv$, то из того, что $\int d(uv) = \int vdu + \int udv \implies \int udv = uv - \int vdu$.
3. $f(X(t)) * X'(t)dt = \int f(X(t))dx(t) = \int f(x)dx = F(x) + C = F(X(t)) + C;\ (F(X(t)) + C)'_t = F'_t * X'_t = f(x) * X'(t) = (\int f(X(t)) * X'(t)dt)'_t.$

□

Пример 2. (Интегрирование функций)

1. $\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C$
2. $\int \ln x dx = \left| \begin{array}{c} u = \ln x,\ dv = dx,\ du = d(\ln x) = \frac{dx}{x} \implies \\ \implies \int dv = \int dx \implies v = x \end{array} \right| = x\ln x - \int x\frac{dx}{x} = x\ln x - x + C$

3. $\int \sqrt{1-x^2}dx = \left| \begin{array}{c} x=\sin t,\ dx = \\ = d(\sin t) = \cos t dt \end{array} \right| = \int \cos^2 t dt = \int \frac{1}{2}(1+\cos 2t)dt = \frac{1}{2}\int dt + \frac{1}{2}\int \cos 2t dt = \frac{t}{2} + \frac{1}{4}\int \cos 2t d(2t) = \frac{t}{2} + \frac{1}{4}\sin 2t + C = \frac{\arcsin x}{2} + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C$

Пример 3. (Неинтегрируемые функции)

$$\int \frac{x}{\ln x}dx; \quad \int \frac{e^x}{x}dt; \quad \int e^{x^2}dx$$

1.3.1 Интегрирование рациональных дробей

Определение 1.3.4 (Рациональная дробь)**.** Функция вида $\frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x),\ Q(x)$ - многочлены, называется **рациональной дробью**, или рациональной функцией.
Если $\deg P(x) < \deg Q(x)$, то дробь называется **правильной**, иначе - **неправильной**.
Если дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ - неправильная, то ее можно представить в виде $\frac{P(x)}{Q(x)} = M(x) + \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$, где $\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$ - правильная дробь. Поэтому достаточно уметь интегрировать правильную дробь.

Определение 1.3.5 (Простые дроби)**. Простыми дробями** будем называть дроби следующих четырех видов:

1. $\frac{A}{x-a}, \quad A, a \in \mathbb{R}$
2. $\frac{A}{(x-a)^k}, \quad A, a \in \mathbb{R},\ k > 1$
3. $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}, \quad A, B, p, q \in \mathbb{R},\ p^2 - 4q < 0$
4. $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}, \quad A, B, p, q \in \mathbb{R},\ k > 1,\ p^2 - 4q < 0$

1.3.2 Интегрирование рациональных дробей

1. $\int \frac{A}{x-a}dx = A\int \frac{d(x-a)}{x-a} = \left| \begin{array}{c} \int \frac{dt}{t} \\ d(x-a) = dx \end{array} \right| = A\ln|x-a| + C$

2. $\int \frac{A}{(x-a)^k}dx = A\int (x-a)^{-k}dx = A\int (x-a)^{-k}d(x-a) = \left| \begin{array}{c} \int t^n dt = \\ = \frac{t^{n+1}}{n+1} \end{array} \right| = A\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C = \frac{A}{(x-a)^{k-1}(1-k)} + C$

3. $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \left| \begin{array}{c} x^2+px+q = (x^2+2\frac{p}{2}x+\frac{p^2}{4}) - \frac{p^2}{4}+q = \\ = (x+\frac{p}{2})^2 - \frac{p^2-4q}{4},\ (-\frac{p^2-4q}{4} = C > 0) \end{array} \right| = \int \frac{Ax+B}{(x+\frac{p}{2})^2+C}dx =$
$A\int \frac{xdx}{(x+\frac{p}{2})^2+C} + B\int \frac{dx}{(x+\frac{p}{2})^2+C} = \left| \begin{array}{c} d((x+\frac{p}{2})^2+C) = \\ = 2(x+\frac{p}{2}dx) \end{array} \right| = \dots$

$A\int \frac{xdx}{(x+\frac{p}{2})^2+C} = \frac{A}{2}\int \frac{(2(x+\frac{p}{2})-p)dx}{(x+\frac{p}{2})^2+C} = \frac{A}{2}\int \frac{2(x+\frac{p}{2})dx}{(x+\frac{p}{2})^2+C} - \frac{Ap}{2}\int \frac{dx}{(x+\frac{p}{2})^2+C} = \left| \int \frac{dx}{(x+\frac{p}{2})^2+C} = I \right| = \frac{A}{2}\int \frac{d((x+\frac{p}{2})^2+C)}{(x+\frac{p}{2})^2+C} - \frac{Ap}{2}I = \frac{A}{2}\ln|(x+\frac{p}{2})^2+C| - \frac{Ap}{2}I;$

$I = \frac{dx}{(x+\frac{p}{2})^2+C} = \frac{1}{C}\int \frac{\sqrt{C}d(\frac{x}{\sqrt{C}}+\frac{p}{2\sqrt{C}})}{(\frac{x}{\sqrt{C}}+\frac{p}{2\sqrt{C}})^2+1} = \left| \int \frac{dt}{t^2+1} = \arctan t + C \right| = \frac{1}{\sqrt{C}}\arctan(\frac{x+2p}{2\sqrt{C}}) + C_1;$

$\frac{1}{C}(x+\frac{p}{2})^2 = (\frac{1}{\sqrt{C}})^2(x+\frac{p}{2})^2 = (\frac{1}{\sqrt{C}}(x+\frac{p}{2}))^2 = (\frac{x}{\sqrt{C}+\frac{p}{2\sqrt{C}}})^2;$

$\dots = \frac{A}{2}\ln|(x+\frac{p}{2})^2 - \frac{p^2-4q}{4}| + (B-\frac{Ap}{2})\frac{1}{\sqrt{C}}\arctan(\frac{x+2p}{2\sqrt{C}}) + C_1$

4. $\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}dx = \left| \begin{array}{c} d(x^2+px+q) = \\ = 2x+p \end{array} \right| = \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p)+B-\frac{Ap}{2}}{(x^2+px+q)^k}dx = \frac{A}{2}\int \frac{d(x^2+px+q)}{(x^2+px+q)^k} +$
$(B-\frac{Ap}{2})\int \frac{dx}{((x+\frac{p}{2})^2+(\frac{-p^2+4a}{4}))^k} = \frac{A}{2(1-k)}\frac{1}{(x^2+px+q)^{k-1}} + \frac{(B-\frac{Ap}{2})}{(-\frac{p^2+4q}{a})^k}\int \frac{dx}{((\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{\frac{-p^2+4q}{4}}})^2+1)^k} =$
$\frac{A}{2(1-k)}\frac{1}{(x^2+px+q)^{k-1}} + \frac{(B-\frac{Ap}{2})\frac{\sqrt{-p^2+4q}}{2}}{(\frac{-p^2+4q}{4})^k}\int \frac{d\left(\frac{x+\frac{p}{2}}{\frac{\sqrt{-p^2+4q}}{2}}\right)}{\left(\left(\frac{x+\frac{p}{2}}{\frac{\sqrt{-p^2+4q}}{2}}\right)^2+1\right)^k}$

Таким образом, чтобы вычислить интеграл 4., нужно вычислить интеграл $\int \frac{dt}{(t^2+1)^k} = \left| \begin{array}{c} u = \frac{1}{(t^2+1)^k};\ du = d((t^2+1)^k) = -k(t^2+1)^{-k-1}2tdt \\ dv = dt \implies v = t \end{array} \right| =$
$\frac{t}{(t^2+1)^k} - \int \frac{-2kt^2}{(t^2+1)^{k+1}}dt = \frac{t}{(t^2+1)^k} + 2k(\int \frac{t^2+1}{(t^2+1)^{k+1}}dt - \int \frac{dt}{(t^2+1)^{k+1}});$
$\int \frac{dt}{(t^2+1)^k} = \frac{t}{(t^2+1)^k} + 2k\int \frac{dt}{(t^2+1)^k} - 2k\int \frac{dt}{(t^2+1)^{k+1}} \left| \begin{array}{c} \frac{dt}{(t^2+1)^k} = I_k \\ \frac{dt}{(t^2+1)^{k+1}} = I_{k+1} \end{array} \right|;$
$2kI_{k+1} = \frac{t}{(t^2+1)^k} + (2k-1)I_k;\quad I_{k+1} = \frac{t}{2k(t^2+1)^k} + \frac{2k-1}{2k}I_k,\ k = 1, \dots$

1.3.3 Разложение рациональной дроби на простые

Лемма 1.3.1. Пусть $\frac{P(x)}{Q(x)}$ - правильная рациональная дробь (несократимая). Причем $Q(x) = (x-a)^k Q_1(x)$, где $Q_1(x)$ не делится на $(x-a)$. Тогда $\exists$ многочлен $P_1(x)$ из $\exists A \in \mathbb{R}$: $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{P_1(x)}{(x-a)^{k-1}Q_1(x)}$. При этом дробь (рациональная) $\frac{P_1(x)}{(x-a)^{k-1}Q_1(x)}$ - правильная.

Доказательство. Рассмотрим $\frac{A}{(x-a)^k} + \frac{P_1(x)}{(x-a)^{k-1}Q_1(x)} = \frac{Q_1(x)A+(x-a)P_1(x)}{Q(x)}$. Нужно доказать, что $\frac{Q_1(x)A+(x-a)P_1(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{Q(x)}$.

Отсюда следует, что для выполнения леммы, многочлен $P(x)$ должен раскладываться: $P(x) = Q_1(x) + (x-a)P_1(x) \implies P_1(x) = \frac{P(x)-AQ_1(x)}{x-a}$. Чтобы существовал многочлен $P_1(x)$, нужно, чтобы $P(x) - AQ_1(x)$ делилась на $x - a$. Для этого точка a должна быть корнем $P(x) - AQ_1(x)$, то есть чтобы $P(a) - AQ_1(a) = 0 \implies A = \frac{P(a)}{Q(a)}$; $Q_1(a) \neq 0$ по условию. Таким образом, при $A = \frac{P(a)}{Q_1(a)}$, функция $P_1(x)$ будет являться многочленом $P_1(x) = \frac{P(x)-\frac{P(a)}{Q_1(a)}Q_1(x)}{x-a}$.

Покажем, что дробь $\frac{P_1(x)}{(x-a)^{k-1}Q_1(x)}$ - правильная, то есть $\deg P_1(x) < \deg[(x-a)^{k-1}Q_1(x)]$. Имеем, $P_1(x) = \frac{P(x)-AQ_1(x)}{x-a}$; $\deg P_1(x) \leqslant \max(\deg P(x), \deg Q_1(x)) - 1$. Тогда $\deg P_1(x) \leqslant \deg P(x) - 1 < \deg Q(x) - 1 = \deg[(x-a)^{k-1}Q_1(x)]$.

Если $\deg Q_1(x) \geqslant \deg P(x) \implies \deg P_1(x) \leqslant \deg Q_1(x) - 1 < \deg Q(x) - 1 = \deg[(x-a)^{k-1}Q_1(x)]$. Дробь $\frac{P_1(x)}{(x-a)^{k-1}Q_1(x)}$ - правильная. □

Лемма 1.3.2. Пусть $\frac{P(x)}{Q(x)}$ - правильная дробь. При этом $Q(x) = (x^2+px+q)^k Q_1(x)$, здесь $p^2 - 4q < 0$. Тогда $\exists M, N \in \mathbb{R}$ и $\exists$ многочлен $P_1(x)$: $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k} + \frac{P_1(x)}{(x^2+px+q)^{k-1}Q_1(x)}$. При этом $Q_1(x)$ не делится на $x^2 + px + q$. Дробь $\frac{P_1(x)}{(x^2+px+q)^{k-1}Q_1(x)}$ - правильная.

Доказательство. Если разложение $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k} + \frac{P_1(x)}{(x^2+px+q)^{k-1}Q_1(x)}$ верно, то: $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{(Mx+N)Q_1(x)+P_1(x)(x^2+px+q)}{Q(x)}$, следовательно $P(x)$ должен выражаться как: $P(x) = (Mx+N)Q_1(x) + P_1(x)(x^2+px+q) \implies P_1(x) = \frac{P(x)-(Mx+N)Q_1(x)}{x^2+px+q}$.

Так как нужно, чтобы $P_1(x)$ был многочленом, то $P(x)-(Mx+N)Q_1(x)$ должно делиться на $x^2 + px + q$.

Рассмотрим остаток от деления $P(x)$ на $x^2 + px + q$ в форме $\alpha x + \beta$ и остаток от деления $Q_1(x)$ на $x^2 + px + q$ в форме $\gamma x + \delta$.

Таким образом, $P(x) = (x^2 + px + q)P_2(x) + (\alpha x + \beta); \quad Q_1(x) = (x^2 + px + q)Q_2(x) + (\gamma x + \delta)$.

Отсюда достаточно показать, что на $x^2 + px + q$ делится многочлен $\alpha x + \beta - (Mx + N)(\gamma x + \delta) = -M\gamma x^2 + x(-N\gamma - M\delta + \alpha) + (\beta - N\delta)$.

Поделим полученный выше многочлен на $x^2 + px + q$:
$\frac{-M\gamma x^2 + x(-N\gamma - M\delta + \alpha) + (\beta - N\delta)}{x^2+px+q} = -M\gamma + (\alpha - N\gamma - M\delta + M\gamma p)x + (\beta - N\delta + M\gamma q)$.

Для целого деления необходимо, чтобы:

$$\begin{cases} \alpha - N\gamma - M\delta + M\gamma p = 0 \\ \beta - N\delta + M\gamma q = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} -(\delta - \gamma p)M - \gamma N = -\alpha \\ \gamma q M - \delta N = -\beta \end{cases}$$

где M, N - неизвестные;

$$\begin{cases} \alpha - N\gamma - M\delta + M\gamma p = 0 \\ \beta - N\delta + M\gamma q = 0 \end{cases} ; \quad \begin{vmatrix} \delta - \gamma p & \gamma \\ \gamma q & -\delta \end{vmatrix} = -\delta^2 + \gamma p\delta - \gamma^2 q.$$

Заметим, что α и β, а так же γ и δ одновременно в 0 не обращаются.
$p^2 - 4q < 0 \implies q \neq 0, \quad -(\delta^2 + \gamma^2 q) + \gamma p\delta$:

1. $\gamma = 0,\ \delta = 0$ – невозможно;
2. $\gamma = 0,\ \delta \neq 0 \implies -\delta^2 \neq 0$;
3. $\gamma \neq 0,\ \delta = 0 \implies -\gamma^2 q \neq 0$;
4. $\gamma \neq 0,\ \delta \neq 0$.

Тогда, если $-(\delta^2 + \gamma^2 q) + \gamma p\delta = 0 \implies \gamma p\delta = \delta^2 + \gamma^2 q$;
$p^2 - 4q < 0,\ p^2 < 4q \implies 0 \leqslant \frac{p^2}{4} < q$

$\gamma \neq 0$: если $(\frac{\delta}{\gamma})^2 + (-\frac{\delta}{\gamma})p + q = 0$, то $x = \frac{\delta}{\gamma}$ - корень многочлена $x^2 + px + q \implies$ противоречие с тем, что $x^2 + px + q$ не имеет вещественных корней $\implies \Delta \neq 0 \implies \exists M, N$ и $\exists$ многочлен $P_1(x)$. $\square$

1.3.4 Метод неопределенных коэф-ов (следствия лемм)

Если $\frac{P(x)}{Q(x)}$ - правильная дробь и $Q(x) = (x - a_1)^{k_1} * \ldots * (x - a_s)^{k_s} * (x^2 + p_1 x + q_1)^{m_1} * \ldots * (x^2 + p_r x + q_r)^{m_r}$, то верно следующее разложение:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=0}^{k_1-1} \frac{A_i}{(x-a_i)^{k_1-i}} + \ldots + \sum_{i=0}^{k_s-1} \frac{A_i^s}{(x-a_s)^{k_s-i}} + \sum_{i=0}^{m_1-1} \frac{M_i x + N_i}{(x^2+p_1x+q_1)^{m_1-i}} + \ldots + \sum_{i=0}^{m_r-1} \frac{M_i^r x + N_i^r}{(x^2+p_rx+q_r)^{m_r-i}},$$

где $A_i, \ldots, A_i^s, \quad M_i, N_i, \ldots, M_i^r, N_i^r \in \mathbb{R}$.

Пример 4. $Q(x) = (x-1)^3(x+2)^2(x^2+x+1)^3$

$$\frac{x^5-x^3+1}{Q(x)} = \frac{A_0^1}{(x-3)^3} + \frac{A_1^1}{(x-3)^2} + \frac{A_2^1}{(x-3)} + \frac{A_0^2}{(x+2)^2} + \frac{A_1^2}{(x+2)} + \frac{M_0x+N_0}{(x^2+x+1)^3} + \frac{M_1x+N_1}{(x^2+x+1)^2} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+x+1)}$$

Приведем в $\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=0}^{k_1-1} \frac{A_i}{(x-a_i)^{k_1-i}} + \ldots$ правую часть к общему знаменателю и получим: $\frac{P(x)}{Q(x)} \equiv \frac{R(x)}{Q(x)}$; $\deg Q(x) = k_1 + \ldots + k_s + 2m_1 + \ldots + 2m_r = n$;

$l = \deg R(x) = \deg P(x) \leqslant \deg Q(x) - 1.$

Количество неизвестных коэф. у множества $R(x)$ равно n штук, приравнивая коэф. при соответствующих степенях x (в том числе при x^0) получим n уравнений с n неизвестными (старшая степень x множества $R(x)$ равна $n-1$).

1.3.5 Метод Остроградского

Теорема 1.3.1. Пусть $\frac{P(x)}{Q(x)}$ - правильная несократимая дробь.
Тогда $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}dx$. Дроби $\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$ и $\frac{P_2(x)}{Q_2(x)}$ - правильные. $Q(x) = Q_1(x)Q_2(x)$ и многочлен $Q_2(x)$ представляет собой произведение всех линейных и квадратичных множителей многочлена $Q(x)$, взятых в первой степени.

Пример 5. $\int \frac{x^2+2x+5}{(x-2)(x^2+1)^2}dx = \frac{P_1(x)}{x^2+1} + \int \frac{P_2(x)}{(x-2)(x^2+1)}dx = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \int \frac{Cx^2+Dx+E}{(x-2)(x^2+1)}dx$

Доказательство. Рассмотрим $\int \frac{A}{(x-a)^k}dx = \frac{A}{1-k}\frac{1}{(x-a)^{k-1}}$;

$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}dx = \frac{A}{(x^2+px+q)^{k-1}} + B\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^k} = \frac{A}{(x^2+px+q)^{k-1}} + \frac{C}{(x^2+px+q)^{k-1}} + D\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^{k-1}} = \frac{A}{(x^2+px+q)^{k-1}} + \ldots + \frac{V}{(x^2+px+q)^2} + W\int \frac{dx}{x^2+px+q}$.

Представим $Q(x)$ в виде $Q(x) = (x-a_1)^{k_1} * \ldots * (x-a_s)^{k_s} * (x^2+p_1x+q_1)^{m_1} * \ldots * (x^2+p_rx+q_r)^{m_r}$, тогда:

$Q_2(x) = (x-a_1) * \ldots * (x-a_s) * (x^2+p_1x+q_1) * \ldots * (x^2+p_rx+q_r)$;

$Q_1(x) = (x-a_1)^{k_1-1} * \ldots * (x-a_s)^{k_s-1} * (x^2+p_1x+q_1)^{m_1-1} * \ldots * (x^2+p_rx+q_r)^{m_r-1}$;

Из метода неопределенных коэффициентов и того, что $\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}dx = \frac{A}{(x^2+px+q)^{k-1}} + \ldots + \frac{V}{(x^2+px+q)^2} + W\int \frac{dx}{x^2+px+q} \implies \int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}dx$.

Как найти $P_1(x)$ и $Q_1(x)$?

Продифференцируем $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}dx$:

$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P_1'(x)Q_1(x) - P_1(x)Q_1'(x)}{Q_1^2} + \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}$. Рассмотрим: $\frac{P_1'(x)Q_1(x) - P_1(x)Q_1'(x)}{Q_1^2} = \frac{P_1'(x) - P_1(x)\frac{Q_1'(x)}{Q_1(x)}}{Q_1(x)} = \frac{P_1'(x)Q(x) - P_1(x)\frac{Q_1'(x)Q_2(x)}{Q_1(x)}}{Q_1(x)Q_2(x)}$.

Пусть $H(x) = \frac{Q_1'(x)Q_2(x)}{Q_1(x)}$ - многочлен (нужно показать).

Пусть $Q_1(x)$ имеет среди своих множителей многочлен вида $(x-a)^n$, тогда $Q_1'(x)$ будет иметь в своем составе $(x-a)^{n-1}$, а $Q_2(x)$ только содержит в себе выражение $(x-a) \implies H(x)$ - многочлен.

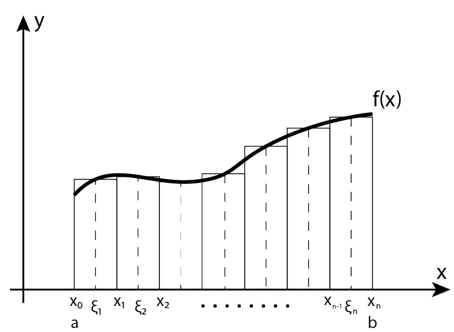
Коэффициенты многочленов $P_1(x)$ и $P_2(x)$ можно найти с помощью метода неопределенных коэффициентов из выражения $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k} + \frac{P_1(x)}{(x^2+px+q)^{k-1}Q_1(x)}$. $\square$

Глава 2

Интегральное исчисление

Интеграл Римана

Определение 2.0.1 (интеграл Римана)**.** Пусть $f : [a;b] \to \mathbb{R}$. Разобьем отрезок $[a;b]$ на n частей точками $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$. В каждом таком кусочке выберем точку $\xi_i \in [x_{i-1}; x_i],\ i = 1, \ldots, n$.



$\Delta i = [x_{i-1}, x_i], \quad \Delta x = x_i - x_{i-1}$ - длина отрезка Δi.

Составим сумму $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$, где $f(\xi_i)$ - высота i-го прямоугольника и Δx_i - ширина i-го прямоугольника.

S_n - площадь ступенчатой фигуры, составленной из прямоугольников под графиком функции $f(x)$.

Говорят, что функция f интегрируема на $[a;b]$, если существует предел интегральных сумм S_n, то есть $\exists \lim\limits_{max \Delta x_i \to 0} S_n$, причем этот предел не зависит ни от способа разбиения отрезка $[a;b]$, ни от способа выбора точек ξ_i.

Этот предел называется **интегралом Римана** функции f на $[a;b]$. Класс интегрируемых функций на отрезке $[a;b]$ будем обозначать $R([a;b])$.

2.1 Базы. Предел функции по базе

Определение 2.1.1 (база множества)**.** Пусть X - произвольное множество.

Система β подмножеств множества X называется **базой** на X, если:

1. $\forall \beta \in \beta \quad \beta \neq \varnothing$
2. $\forall \beta_1, \beta_2 \in \beta \ \exists \beta_3 \in \beta : \quad \beta_3 \subset \beta_1 \cap \beta_2$

Пример 6 (баз множества)**.** 1. $\beta = \{X\}$ - база

2. $X = \mathbb{R}, \quad \beta = \{\beta_n = (-\frac{1}{n}; \frac{1}{n}),\ n \in \mathbb{N}\}$
3. $X = \mathbb{R}, \quad \beta = \{\beta_\epsilon = \{x :\ 0 < |x| < \epsilon\}, \epsilon > 0\}$ (выколотые окрестности нуля)

Определение 2.1.2 (предел по базе)**.** Пусть $f : X \to \mathbb{R},\ \beta$ - база на X

Число $A \in \mathbb{R}$ называется **пределом** функции f **по базе** β, если $\forall \epsilon > 0\ \exists$ элемент базы $\beta \in \beta : \quad |f(x) - A| < \epsilon$.

$$\lim_{\beta} f(x)$$

Определение 2.1.3 (предел по базе (МП))**.** Пусть (Y, d) - МП, $f : X \to Y$, β - база на X.

$y \in Y$ называется **пределом** функции $f(x)$ **по базе** β, если $\forall \epsilon > 0\ \exists \beta \in \beta\ \forall x \in \beta : \quad d(f(x), y) < \epsilon$, или, что то же самое, $\forall V_Y(y)\ \exists \beta \in \beta \quad f(\beta) \subset V_Y(y)$, где V_Y - окрестность метрического пространства Y.

Теорема 2.1.1 (основные свойства предела по базе)**.** Пусть $f : X \to \mathbb{R},\ \beta$ - база на X:

1. Если $\exists \lim\limits_{\beta} f(x)$, то $\exists \beta \in \beta :\ f$ ограничена на β
2. Если $\lim\limits_{\beta} f(x) = A$ и $\lim\limits_{\beta} f(x) = B$, то $A = B$

Теорема 2.1.2 (связь предела по базе с арифметическими операциями)**.** Пусть $f : X \to \mathbb{R},\ g : X \to \mathbb{R},\ \beta$ - база на X, $\quad \lim\limits_{\beta} f(x) = A, \quad \lim\limits_{\beta} g(x) = B$:

1. $\exists \lim\limits_{\beta}(f(x) \pm g(x)) = A \pm B$
2. $\exists \lim\limits_{\beta}(f(x)g(x)) = AB$
3. $\exists \lim\limits_{\beta}(\frac{f(x)}{g(x)}) = \frac{A}{B}$, если $g(x) \neq 0,\ \beta \neq 0$

Теорема 2.1.3 (связь предела функции по базе с неравенствами)**.** Пусть $f : X \to \mathbb{R},\ g : X \to \mathbb{R},\ \beta$ - база на X:

1. Если $\exists \beta \in \beta : \quad \forall x \in \beta\ f(x) \leqslant g(x)$, то $\lim\limits_{\beta} f(x) \leqslant \lim\limits_{\beta} g(x)$
2. Если $\lim\limits_{\beta} f(x) < \lim\limits_{\beta} g(x)$, то $\exists \beta \in \beta\ \forall x \in \beta \quad f(x) < g(x)$

   Если $\lim\limits_{\beta} f(x) \geqslant \lim\limits_{\beta} g(x)$, то $\exists \beta \in \beta\ \forall x \in \beta \quad f(x) \geqslant g(x)$
3. Если $h : X \to \mathbb{R}$ и $\exists \beta \in \beta :\ \forall x \in \beta\ f(x) \leqslant h(x) \leqslant g(x)$ **И** $A = \lim\limits_{\beta} f(x) = \lim\limits_{\beta} g(x)$, то $\lim\limits_{\beta} h(x) = A$

Теорема 2.1.4 (критерий Коши существования предела по базе)**.** Существуют две формулировки:

1. Пусть $f : X \to \mathbb{R},\ \beta$ - база на X.

   Функция $f(x)$ имеет предел по базе $\beta \iff \forall \epsilon > 0\ \exists \beta \in \beta : \quad \forall x_1, x_2 \in \beta\ |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$
2. Пусть (Y, d) - МП (**полное**), $f : X \to Y,\ \beta$ - база на Y.

   Функция $f(x)$ имеет предел по базе $\beta \iff \forall \epsilon > 0 \exists \beta \in \beta : \quad \forall x_1, x_2 \in \beta\ d(f(x_1), f(x_2)) < \epsilon$

Доказательство. (критерия Коши $\exists$ предела по базе)

" $\to$ " Пусть $\exists \lim\limits_{\beta} f(x) = A$. Покажем, что $\forall \epsilon > 0 \exists \beta \in \beta : \quad \forall x_1, x_2 \in \beta\ |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$. Рассмотрим $|f(x_1) - f(x_2)| = |f(x_1 - A) + (A - f(x_2))| \leqslant |f(x_1) - A| + |f(x_2) - A| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$.

" $\leftarrow$ " Пусть $\forall \epsilon > 0\ \exists \beta \in \beta : \quad \forall x_1, x_2 \in \beta\ |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$. Покажем, что $\exists \lim\limits_{\beta} f(x)$. Возьмем $\beta_1 \in \beta : \quad \forall x_1, x_2 \in \beta_1\ |f(x_1) - f(x_2)| < 1$. Возьмем $\beta_1' \in \beta : \quad \forall x_1, x_2 \in \beta_1'\ |f(x_1) - f(x_2)| < \frac{1}{2}$. Пусть $\beta_2 \subset \beta_1 \cap \beta_1'$ и так далее.

Таким образом построим систему вложенных множеств: $\beta_1 \supset \beta_2 \supset \ldots \supset \beta_n \supset \ldots$, при этом $\forall x_1, x_2 \in \beta_n \ |f(x_1) - f(x_2)| < \frac{1}{2^{n-1}}$. Воспользуемся полнотой пространства, то есть в нем $\exists \lim f(x)$, если $f(x)$ - фундаментальная.

$\forall n \in \mathbb{N}$ рассмотрим $x_n \in \beta_n$. Тогда, если $n < m$ $(m \in \mathbb{N})$, то для $x_n \in \beta_n$ и $x_m \in \beta_n$ $|f(x_n) - f(x_m)| < \frac{1}{2^{n-1}}$.

Таким образом последовательность $f(x_n)$ - фундаментальная $\Longrightarrow$ $\exists \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$. Покажем, что $A = \lim\limits_{\beta} f(x)$. Пусть $\epsilon > 0$ задано. Выберем $n \in \mathbb{N}: \quad \frac{1}{2^{n-1}} < \frac{\epsilon}{2}$. Возьмем $m > n: \quad |f(x_m) - A| < \frac{\epsilon}{2}$. Возьмем $\beta = \beta_n$. Тогда $\forall x \in \beta \ |f(x) - A| = |f(x) - f(m) + f(x_m) - A| \leqslant |f(x) - f(x_m)| + |f(x_m) - A| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$.

Следовательно, $\exists \lim\limits_{\beta} f(x) = A$. □

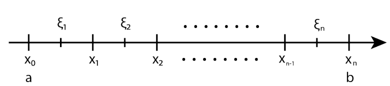
2.2 Разбиение. Интеграл Римана (v.2)

Определение 2.2.1 (разбиение)**.** Пусть дан отрезок $[a;b]$. **Разбиением** P отрезка $[a;b]$ называется набор точек $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$. То есть $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$. Отрезки $[x_{i-1}; x_i] = \Delta_i$. $x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$ - длина i-го отрезка разбиения $\lambda(P) = \max\limits_{i=\overline{0,n}}\{\Delta x_i\}$. Величины $\Delta_i, \Delta x_i, \lambda(P)$ - параметры ограничения.

Определение 2.2.2 (разбиение с отмеченными точками)**. Разбиением с отмеченными точками** называется пара наборов

$$P(\xi) = \{x_0, \ldots, x_n\}, \{\xi_0, \ldots, \xi_n\},$$

$$\text{где } a = x_0 < \ldots < x_n = b, \ \xi_i \in [x_{i-1}; x_i].$$



Пусть $\Re_\xi = \{(P, \xi)\}$ - семейство всевозможных разбиений с отмеченными точками отрезка $[a,b]$.

Рассмотрим $\beta_\delta = \{(P,\xi): \quad \lambda(P) < \delta\}, \ \beta_\delta \subset P_\xi$:

Утверждение 2.2.1. Множество $\beta = \{\beta_\delta: \quad \delta > 0\}$ является базой на $\Re_\xi$.

Доказательство. (утверждения 2.3.1.).

1. $\forall \delta > 0$ β_δ - непусто.

   В самом деле, пусть отрезок $[a;b]$ поделен на n равных частей, причем n выбирается из соображений, чтобы $\Delta x_i = \Delta x \quad \forall i = \overline{1,n}$ $(1, \ldots, n)$, $\Delta x < \delta$.

   Пусть $\xi_i \in [x_{i-1}; x_i]$ - середины отрезков $[x_{i-1}; x_i]$.

2. Покажем, что $\forall \beta_{\delta_1}, \beta_{\delta_2} \in \beta \; \exists \beta_{\delta_3} \subset \beta_{\delta_1} \cap \beta_{\delta_2}$.

   Пусть заданы $\delta_1 > 0, \delta_2 > 0$. Покажем, что $\exists \beta_3 > 0$: $\beta_{\delta_3} \subset \beta_{\delta_1} \cap \beta_{\delta_2}$. Если $\delta_1 < \delta_2$, то $\delta_3 = \delta_1$ или $\delta_3 = \frac{\delta_1}{2}$.

$\square$

Определение 2.2.3 (!)**.** Пусть $f : [a;b] \to \mathbb{R}$, (P, ξ) - разбиение отрезка $[a;b]$ с отмеченными точками. Составим сумму:

$$\sigma(f, (P, \xi)) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \Delta x_k$$

Можно смотреть на σ для фиксированной функции $f(x)$ как на функцию, сопоставляющую разбиение $(P, \xi) \in \Re_\xi$ сумме $\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$, то есть $\sigma_f : \Re_\xi \to \mathbb{R}$ (то есть (P, ξ) - аргумент функции σ).

Говорят, что функция $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ интегрируема по Риману на $[a;b]$, если:

$$\exists \lim_{\lambda(P) \to 0} \sigma_f((P, \xi)) = \lim_{\lambda(P) \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \Delta x_k$$

Или, что то же самое, если $\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0$ и соответствующий элемент $\beta_\delta \in \beta : \quad \forall$ разбиения $(P, \xi) : \; \lambda(P) < \delta$ выполняется неравенство $|\sigma_f((P, \xi)) - I| < 0$:

$$I = \lim_{\lambda(P) \to 0} \sigma_f((P, \xi)) = \int_a^b f(x) dx$$

Обозначим базу β из утверждения 2.3.1. как $\lambda(P) \to 0$.

Теорема 2.2.1 (необходимое условие интегрируемости функции)**.** $*\_*$

Если $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ интегрируема на $[a;b]$ (то есть $f \in \mathbb{R}[a;b]$), то f ограничена на $[a;b]$.

Доказательство. От противного:

Допустим, что f интегрируема на $[a;b]$, но неограничена, то есть: $\forall M > 0 \; \exists x \in [a;b] : \quad |f(x)| > M$. Покажем, что функция $\sigma((P, \xi))$ не имеет предела по базе на $[a;b]$.

То есть $\exists \epsilon > 0 : \; \forall \delta > 0 \; \exists (P', \xi')$ и $(P'', \xi'') : \quad \lambda(P') < \delta, \; \lambda(P'') < \delta \; (\lambda(P'') = \max \Delta x_i)$, но $(\sigma(P'', \xi'') - \sigma(P'', \xi'')) \geqslant \epsilon$.

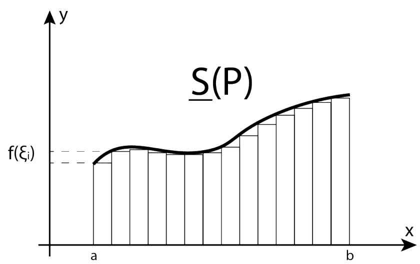
Положим, $\epsilon = 1$. Пусть $\delta > 0$ задана. Выберем разбиение с отмеченными точками (P', ξ') такое, что $\lambda(P') < \delta$, $P' = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b\}$, $\epsilon_i \in [x_1, \ldots, x_n]$. Поскольку функция f неограничена на $[a;b]$, то существует хотя бы один элемент разбиения $[x_{i-1}, x_i] = \Delta i$: функция f неограничена на (? Спасибо Максим). В качестве P^n возьмем P', $\xi'' = \{\xi_1', \xi_2', \ldots, \xi_i'', \ldots, \xi_n'\}$, $\lambda(P'') < \delta$ и $|f(\xi_i'') - f(\xi_i')| > \frac{1}{\Delta x_i}$. Разбиения P' и P'' совпадают, точки разбиения так же совпадают, кроме ξ_i''.

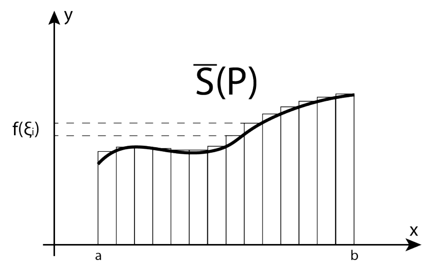
Рассмотрим $|\sigma((P'', \xi'')) - \sigma((P', \xi'))| = |\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k f(\xi_k') - \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k f(\xi_k'')| = |\Delta x_i (f(\xi_i'') - f(\xi_i'))| > \frac{\Delta x_i}{\Delta x_i} = 1 = \epsilon$. $\square$

2.3 Критерий интегрируемости

2.3.1 Суммы Дарбу

Определение 2.3.1 (нижняя/верхняя суммы Дарбу)**.** Пусть $f[a;b] \to \mathbb{R}$, P - произвольное разбиение отрезка $[a;b]$. Числа $\underline{S}(P) = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k$ и $\overline{S}(P) = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k$, где $m_k = \inf\limits_{\xi \in \Delta k} f(\xi)$, $M_k = \sup\limits_{\xi \in \Delta k} f(\xi)$, называются **нижней** и **верхней суммами Дарбу**, отвечающими разбиению P.





Теорема 2.3.1 (свойства сумм Дарбу)**.** Свойства:

1. $\forall (P, \xi)\ \underline{S}(P) \leqslant \sigma_f((P,\xi)) \leqslant \overline{S}(P)$

2. Если разбиение P' получено из разбиения P добавлением новых точек, то $\underline{S}(P') \geqslant \underline{S}(P)$ и $\overline{S}(P') \leqslant \overline{S}(P)$

3. $\forall P_1, P_2 \quad \underline{S}(P_1) \leqslant \overline{S}(P_2)$

Доказательство. (теоремы 2.4.1)

1. $\underline{S}(P) = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \Delta x_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k = \overline{S}(P)$, где $f(\xi_k) = \sigma((P,\xi))$, вроде

2. Пусть P - произвольное разбиение отрезка $[a;b]$. Построим P'. Добавим на элемент разбиения Δi новую точку $x' \in [x_{i-1}; x_i]$.

   Пусть $m_i' = \inf\limits_{\xi \in [x_{i-1}, x_i]} f(\xi)$ и $m_i'' = \inf\limits_{\xi \in [x_i', x_i]} f(\xi)$, $m_i = \inf\limits_{\xi \in [x_{i-1}; x_i]} f(\xi)$, имеем $m_i \leqslant m_i'$, $m_i \leqslant m_i''$.

   Тогда $\underline{S}(P') - \underline{S}(P) = \sum_{k=1}^{i-1} \Delta x_k m_k + m_i' |x' - x_{i-1}| + m_i'' |x_i - x'| + \sum_{k=i+1}^{n} m_k \Delta x_k - \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k m_k = m_i'|x' - x_{i-1}| + m_i''|x_i - x'| - m_i \Delta x_i \geqslant 0 \implies \underline{S}(P') \geqslant S(P)$ (вероятно, куча индексов - неправильные).

   Аналогично доказывается для $\overline{S}(P') \leqslant \overline{S}(P)$.

3. Пусть P_1, P_2 - произвольные разбиения отрезка $[a;b]$.

   Возьмем разбиение $P = P_1 \cap P_2$. Тогда, с одной стороны, P получено из P_1 добавлением точек, а с другой стороны - из P_2 добавлением точек.

   Тогда $\underline{P_i} \leqslant \underline{S}(P)$ и $\overline{S}(P_i) \geqslant S(P)$.

Тогда верно, что $\underline{S}(P_2) \leqslant \underline{S}(P)$ и $\overline{S}(P_2) \geqslant \overline{S}(P) \implies \underline{S}(P_1) \leqslant \underline{S}(P) \leqslant \overline{S}(P) \leqslant \overline{S}(P_2)$.

$\square$

Следствие. Множество нижних сумм Дарбу ограничено сверху. Множество верхних сумм Дарбу ограничено снизу.

Определение 2.3.2 (верхний/нижний интеграл Дарбу)**.** Числа $\underline{\mathfrak{I}} = \sup \underline{S}(P)$ и $\overline{\mathfrak{I}} = \inf \overline{S}(P)$ называются **нижним** и **верхним интегралом Дарбу**.

Рассмотрим множество разбиений с отмеченными точками отрезка $[a;b]$ $\Re = \{(P,\xi)\}$. Построим функцию $\underline{S} : \Re_\xi \to \mathbb{R}$ и $\underline{S}((P,\xi)) = \underline{S}(P)$. Аналогично определим $\overline{S} : \Re_\xi \to \mathbb{R}$ и $\overline{S}((P,\xi)) = \overline{S}(P)$.

Таким образом сумму Дарбу можно представить как функции на множестве разбиений с отмеченными точками отрезка $[a;b]$.

Теорема 2.3.2 (критерий интегрируемости)**.** Функция $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ интегрируема на $[a;b] \iff \lim\limits_{\lambda(P)\to 0} (\overline{S}(P) - \underline{S}(P)) = 0$.

Доказательство. (теоремы 2.4.2)
$" \to "$ Пусть $f \in \mathbb{R}\ ([a;b])$ (то есть интегрируема на $[a;b]$), то есть $\forall \epsilon > 0\ \forall (P,\xi) :\ \lambda(P) < \delta \implies |\sigma_f((P,\xi)) - I| < \epsilon$.

Лемма 2.3.1. $\forall P\ \underline{S}(P) = \inf\limits_{\xi} \sigma_f((P,\xi))$ и $\overline{S}(P) = \sup\limits_{\xi} \sigma_f((P,\xi))$

Доказательство. (леммы 2.4.1)

$\forall P\ \underline{S}(P) \leqslant \sigma_f((P,\xi))$.

Покажем, что $\forall \epsilon > 0\ \exists \xi = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\} :\ \underline{S}(P) + \epsilon > \sigma_f(P,\xi)$.

Выберем $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n :\ f(\xi_i) < m_i + \frac{\epsilon}{b-a}$.

Тогда $\sigma_f(P,\xi) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k < \sum_{k=1}^n (m_k + \frac{\epsilon}{b-a})\Delta x_k = \sum_{k=1}^n m_k \Delta x_k + \frac{\epsilon}{b-a}\sum_{k=1}^n \Delta x_k = \underline{S}(P) + \epsilon \implies \underline{S}(P) = \inf\limits_{\xi} \sigma_f(P,\xi)$.

Аналогично для $\overline{S}(P) = \sup\limits_{\xi} \sigma_f(P,\xi)$. $\square$

$I - \epsilon < \sigma_f(P,\xi) < I + \epsilon$, $I - \frac{\epsilon}{2} < \sigma_f(P,\xi) < I + \frac{\epsilon}{2}$. Из леммы 2.4.1: $\underline{S}(P) + \epsilon > \sigma_f(P,\xi) \implies \underline{S}(P) > \sigma_f(P,\xi) - \epsilon > \sigma_f(P,\xi) - \frac{\epsilon}{2}$ $(I = \lim\limits_{\lambda(P)\to 0} \sigma_f(P,\xi))$

Рассмотрим $I - \frac{2\epsilon}{3} < I - \frac{\epsilon}{2} \leqslant \underline{S}(P) \leqslant \sigma_f(P,\xi) \leqslant \overline{S}(P) < \sigma_f(P,\xi) + \epsilon < I + \frac{\epsilon}{2} + \epsilon = I + \frac{3\epsilon}{2}$ $(\overline{S}(P) - \epsilon < \sigma_f(P,\xi))$

Тогда $I - \frac{3\epsilon}{2} < \underline{S}(P) \leqslant \overline{S}(P) < I + \frac{3\epsilon}{2}$, так как $\underline{S}(P) \leqslant \overline{S}(P) \implies 0 \leqslant \overline{S}(P) - \underline{S}(P)$,

$$\begin{array}{c} \overline{S}(P) < I + \frac{3\epsilon}{2} \\ + \\ -\underline{S}(P) < -I + \frac{3\epsilon}{2} \end{array}$$

$0 \leqslant \overline{S}(P) - \underline{S}(P) < 3\epsilon \implies \lim\limits_{\lambda(P)\to 0}(\overline{S}(P) - \underline{S}(P)) = 0$

" $\leftarrow$ " Пусть $\lim\limits_{\lambda(P)\to 0}(\overline{S}(P) - \underline{S}(P)) = 0$.

Пусть $\epsilon > 0$ задана. Выберем $\delta > 0 : \quad 0 \leqslant \overline{S}(P) - \underline{S}(P) < \epsilon\ \forall (P,\xi) : d(P) < \delta$.

Покажем, что $\exists I = \int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\lambda(P)\to 0}\sigma_f(P,\xi)$. Имеем $\overline{S}(P) - \underline{S}(P) < \epsilon$ и $\underline{S}(P) \leqslant I \leqslant \overline{S}(P)$.

Из неравенств следует, что $\overline{S}(P) < \underline{S}(P) + \epsilon \leqslant I + \epsilon,\ \underline{S}(P) > \overline{S}(P) - \epsilon \geqslant I - \epsilon$.

Пусть (P,ξ) - произвольное разбиение: $\lambda(P) < \delta$. Тогда $I - \epsilon < \underline{S}(P) \leqslant \sigma_f(P,\xi) \leqslant \overline{S}(P) < I + \epsilon \implies I - \epsilon < \sigma_f(P,\xi) < I + \epsilon \implies |\sigma_f(P,\xi) - I| < \epsilon \implies I = \lim\limits_{\lambda(P)\to 0}\sigma_f(P,\xi) \implies f \in \mathbb{R}[a;b]$. □

Определение 2.3.3. Обозначим $M_i - m_i = \sup\limits_{\xi\in\Delta i} f(\xi) - \inf\limits_{\xi\in\Delta i} f(\xi) = \sup\limits_{x_1,x_2\in\Delta i}|f(x_1) - f(x_2)| = \omega_i = \omega_i(f,\Delta i)$.

ω_i называется **колебанием** функции $f(x)$ на отрезке Δi.

$\overline{S}(P) - \underline{S}(P) = \sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i$

Следствие. (из критерия интегрируемости)

$f \in \mathbb{R}[a;b] \iff \lim\limits_{\lambda(P)\to 0}\sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i = 0$

Теорема 2.3.3 (Дарбу)**.** Для любой ограниченной функции $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ выполняются равенства:

$$\underline{\mathfrak{I}} = \lim_{\lambda(P)\to 0}\underline{S}(P);\ \overline{\mathfrak{I}} = \lim_{\lambda(P)\to 0}\overline{S}(P)$$

Лемма 2.3.2. Пусть $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ ограничена на $[a;b]$, то есть $\exists L > 0 : \forall x \in [a;b]\ |f(x)| < L$. Разбиение P' получено из разбиения P добавлением m точек. Тогда $\overline{S}P - \overline{S}(P') \leqslant 2L\lambda(P)m$

Доказательство. (леммы 2.4.2)

Пусть P - производное разбиение, $\lambda(P)$.

Рассмотрим случай, что P' получено добавлением k точек на i-тый отрезок разбиения P. (график, посмотреть у Максима). $\overline{S}(P) - \overline{S}(P') = \sum_{j=1}^n M_j\Delta x_j - (\sum_{j=1}^{i-1} M_j\Delta x_j + \sum_{j=1}^k M'_{ij}\Delta x_{ij} + \sum_{j=i+1}^n M_j\Delta x_j) = M_i\Delta x_i - \sum_{j=1}^k M'_{ij}\Delta x_{ij} = M_i\sum_{j=1}^k \Delta x_{ij} - \sum_{j=1}^k M'_{ij}\Delta x_{ij} = \sum_{j=1}^k M_i\Delta x_{ij} - \sum_{j=1}^k M'_{ij}\Delta x_{ij} = \sum_{j=1}^k (M_i - M'_{ij})\Delta x_{ij} \leqslant \sum_{j=1}^k 2L\Delta x_{ij} =$ (вспомним, что $\lambda(P) = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n\}$) $= 2L\sum_{j=1}^k \Delta x_{ij} = 2L\Delta x_i \leqslant 2L\lambda(P)$

Теперь, если P' получено из P добавлением m точек, то они попадут самое большее на m промежутков. Тогда $\overline{S}(P) - \overline{S}(P') \leqslant 2L\lambda(P)m$ □

Доказательство. (теоремы 2.4.3, Дарбу)

$\underline{\mathfrak{I}} \stackrel{def}{=} \sup\limits_P \underline{S}(P),\ \overline{\mathfrak{I}} \stackrel{def}{=} \inf\limits_p \overline{S}(P)$

Пусть $\epsilon > 0$ задано. Выберем разбиение P' такое, что $\overline{\mathfrak{I}} + \epsilon > \overline{S}(P')$ (**) (определение inf). Положим, что $\delta = \frac{\epsilon}{2Lm}$.

Пусть P - произвольное разбиение: $\lambda(P) < \delta$.

Покажем, что $0 \leqslant \overline{S}(P) - \overline{\mathfrak{I}} < \epsilon$.

Построим разбиение $P'' = P' \cup P$. Тогда P'' получено из P добавлением m точек $\implies \overline{S}(P) - \overline{S}(P'') \leqslant 2L\lambda(P)m$, где $L > 0 : \ \forall x \in [a;b] |f(x)| < L$. Далее, $\overline{S}(P) - \overline{S}(P'') \leqslant 2L\lambda(P)m < 2Lm\delta = \frac{2Lm\epsilon}{2Lm} = \frac{\epsilon}{2}$. Кроме того, P'' получено из P' добавлением некоторого количества точек.

$$\overline{S}(P'') \leqslant \overline{S}(P') \overset{(**)}{<} \overline{\mathfrak{I}} + \tfrac{\epsilon}{2} \implies \overline{S}(P'') - \tfrac{\epsilon}{2} < \overline{\mathfrak{I}}$$

Рассмотрим $0 \leqslant \overline{S}(P) - \overline{\mathfrak{I}} < \overline{S}(P) - \overline{S}(P'') + \frac{\epsilon}{2} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$ □

2.3.2 Классы интегрируемых функций

Теорема 2.3.4 (интегрируемость непрерывных функций)**.** Пусть $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ непрерывна на $[a;b] \implies f$ - интегрируема на $[a;b]$, то есть $f \in \mathbb{R}[a;b]$.

Доказательство. (теоремы 2.4.4)

Так как f - непрерывна на $[a;b] \implies f$ - равномерно непрерывна на $[a;b]$. Это значит, что если $\epsilon > 0$ задано, то $\exists \delta > 0 : \ \forall x_1, x_2 \in [a;b] : \ |x_1 - x_2| < \delta \implies |f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\epsilon}{b-a}$.

По критерию интегрируемости: $f \in \mathbb{R}[a;b] \iff \lim\limits_{\lambda(P)\to 0}(\overline{S}(P) - \underline{S}(P)) = 0 \ \forall (P;\xi)$ - разбиение.

$\overline{S}(P) - \underline{S}(P) = \sum \omega_i \Delta x_i$, где $\omega_i = \sup\limits_{x_1,x_2 \in \Delta i} |f(x_1) - f(x_2)|$.

$\overline{S}(P) = \sum M_i \Delta x_i, \ M_i = \sup\limits_{\xi \in \Delta x_i} f(\xi)$.

$\omega_i = M_i - m_i = \sup\limits_{\xi \in \Delta i} f(\xi) - \inf\limits_{\xi \in \Delta i} f(\xi) = \sup\limits_{x_1,x_2 \in \Delta i} |f(x_1) - f(x_2)|$.

$\overline{S}(P) - \underline{S}(P) = \sum M_i \Delta x_i - \sum m_i \Delta x_i = \sum \omega_i \Delta x_i$.

Таким образом критерий интегрируемости: f - интегрируема на $[a;b] \iff \lim\limits_{\lambda(P)\to 0} \sum \omega_i \Delta x_i = 0$, то есть $\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \ \forall (P;\xi) : \ \lambda(P) < \delta \implies 0 \leqslant \sum \omega_i \Delta x_i < \epsilon$.

Пусть $\epsilon > 0$ задано. Возьмем $(P;\xi)$ - разбиение такое, что $\lambda(P) < \delta$. Тогда $\sum \omega_i \Delta x_i = \sum \sup\limits_{x_1,x_2 \in \Delta i} |f(x_1) - f(x_2)| \Delta x_i \leqslant \sum \frac{\epsilon}{b-a} \Delta x_i = \frac{\epsilon}{b-a} \sum \Delta x_i = \frac{\epsilon}{b-a}(b-a) = \epsilon$ □

Теорема 2.3.5 (интегрируемость функций с конечным числом точек разрыва)**.** Пусть $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ - ограничена и имеет на $[a;b]$ конечное число точек разрыва. Тогда $f \in \mathbb{R}[a;b]$ интегрируема на $[a;b]$.

Доказательство. (теоремы 2.4.5)

Пусть $L > 0 : \ \forall x \in [a;b] \ |f(x)| < L$ (ограничена). Пусть f имеет k точек разрыва на $[a;b]$.

Пусть $\epsilon > 0$ задано. Возьмем $\delta_1 = \frac{\epsilon}{16Lk}$. Для каждой точки разрыва построим δ_1-окрестность.

Пусть U - множество таких окрестностей. U - открытое множество. Рассмотрим $V = [a;b] \setminus U \implies V$ - замкнутое (так как его дополнение открытое). Из того, что V - ограничено и замкнуто $\implies V$ - компактное. Функция f - непрерывна на $V \implies$ из того, что V - компактно и f - непрерывна на $V \implies f$ - равномерно непрерывна на $V \implies \forall \epsilon > 0\ \exists \delta_2 > 0 :\ \forall x_1, x_2 \in V :$ $|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\epsilon}{2(b-a)}$.

Положим, что $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Пусть P - произвольное разбиение отрезка $[a;b] :\ \lambda(P) < \delta$.

Рассмотрим $\sum \omega_i \Delta x_i = \sum' \omega_i \Delta x_i + \sum'' \omega_i \Delta x_i \leqslant |\sum'$ берется по всепм отрезкам разбиения, k-тые пересекаются с U, $\sum''$ - по всем остальным $| \leqslant \sum' \omega_i \Delta x_i + \sum'' \frac{\epsilon}{2(b-a)} \Delta x_i \leqslant 2L2\delta_1 k + \frac{\epsilon}{2(b-a)} \sum'' \Delta x_i < \frac{4Lk\epsilon}{8Lk} + \frac{\epsilon}{2(b-a)}(b-a) = \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$.

Дополнение: $(\overline{S}(P) - \overline{S}(P') \leqslant 2L\lambda(P)m,\ \sum M_i \Delta x_i - \sum M_i' \Delta x_i)$. $\sum' \omega_i \Delta x_i = \sum \sup\limits_{x_1, x_2 \in \Delta i \cap k} |f(x_1) - f(x_2)| \Delta x_i \leqslant 2L2\delta_1 k$

$\square$

ГРАФИКИ НАДО НАРИСОВАТЬ

Теорема 2.3.6 (интегрируемость монотонных функций)**.** Пусть $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ - монотонна на $[a;b] \implies f$ - интегрируема на $[a;b]$.

Доказательство. (теоремы 2.4.6)

Пусть f - не убывает на $[a;b]$. Пусть $\epsilon > 0$ задано. Возьмем $\delta = \frac{\epsilon}{f(b) - f(a)}$. Тогда, если P - произвольное разбиение $[a;b] :\ \lambda(P) < \delta$, то $\sum \omega_i \Delta x_i \overset{monoton.}{=} \sum (f(x_i) - f(x_{i-1})) \Delta x_i < \delta \sum (f(x_i) - f(x_{i-1})) = \delta(f(b) - f(a)) = \epsilon$. $\square$

2.3.3 Свойства интегрируемых функций

Теорема 2.3.7. Пусть $f \in \mathbb{R}[a;b],\ g \in \mathbb{R}[a;b]$. Тогда:

1. $f \pm g \in R[a;b]$.
2. $\alpha f \in R[a;b],\ \alpha \in \mathbb{R}$.
3. $f * g \in R[a;b]$.
4. $|f| \in R[a;b]$, при этом:
   - $\int_a^b (f \pm g) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$
   - $\int_a^b \alpha f(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx$
   - $|\int_a^b f(x) dx| \leqslant \int_a^b |f(x)| dx$

Доказательство. (теоремы 2.4.7)

1. $\int_a^b(f(x)\pm g(x))dx = \lim\limits_{\lambda(P)\to 0}\sum(f(\xi_i)\pm g(\xi_i))\Delta x_i = \lim\limits_{\lambda(P)\to 0}\sum f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$.

2. Аналогично.

3. Покажем, что если $f \in R[a;b]$, то $f^2 \in R[a;b]$. Рассмотрим $|f^2(x_1) - f^2(x_2)| = |(f(x_1)-f(x_2))(f(x_1)-f(x_2))| \leqslant |f(x_1)-f(x_2)|(|f(x_2)| + |f(x_2)|) < 2L|f(x_1)-f(x_2)|$, где $L > 0: \ \forall x \in [a;b] \ |f(x)| < L$ (интегрируема $\implies$ ограничена).

   Пусть P - произвольное разбиение. Пусть $\epsilon > 0$ задано. Возьмем $\delta > 0$ и $P: \ \lambda(P) < \delta \quad \omega_i(f^2, \Delta_i) \leqslant 2L\omega_i(f, \Delta_i)$.

   $\sum\limits_i w_i(f^2, \Delta_i)\Delta x_i \leqslant (\sum\limits_i \omega_i(f, \Delta_i)\Delta_i)2L.$

   Так как $f \in R[a;b]$, то $\sum\limits_i \omega_i(f, \Delta_i)\Delta x_i \to 0 \implies$ по лемме о двух миллиционерах, $\sum\limits_i \omega_i(f^2, \Delta_i)\Delta x_i \to 0 \implies$ (по критерию интегрируемости) $f^2 \in R[a;b]$.

   $fg = \frac{1}{4}((f+g)^2 - (f-g)^2) \implies fg \in R[a;b].$

4. Рассмотрим $||f(x_1)| - |f(x_2)|| \leqslant |f(x_1) - f(x_2)|, \ x_1, x_2 \in \Delta_i \implies \omega_i(|f|, \Delta_i) \leqslant \omega_i(f, \Delta_i)$.

   $0 \leqslant \sum\limits_i \omega_i(|f|, \Delta_i)\Delta x_i \leqslant \sum\limits_i \omega_i(f, \Delta_i)\Delta x_i \implies |f| \in R[a;b].$

   Рассмотрим $|\sum\limits_i f(\xi_i)| \leqslant \sum\limits_i |f(\xi_i)|\Delta x_i \implies \lim\limits_{\lambda(P)\to 0}|\sum\limits_i f(\xi_i)\Delta x_i| \leqslant \lim\limits_{\lambda(P)\to 0}\sum\limits_i |f(\xi_i)|\Delta x_i, \quad |\int_a^b f(x)dx| \leqslant \int_a^b |f(x)|dx$.

$\square$

2.3.4 Аддитивность интеграла Римана

Определение 2.3.4. Пусть $a > b, \ a, b \in \mathbb{R}$, положим $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$. Если $a = b$, то $\int_a^{a=b} f(x)dx = 0$.

Теорема 2.3.8 (Аддитивность интеграла Римана)**.** Пусть даны точки $a, b, c \in \mathbb{R}$. Если f - интегрируема на большем из отрезков $[a;b], \ [a,c], \ [b,c]$, то f - интегрируема и на меньших отрезках. И наоборот, если f интегрирема на двух меньших отрезках, то она интегрируема и на большем отрезке. При этом:

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx + \int_c^a f(x)dx = 0$$

теоремы 2.4.8. Пусть $a < b < c$.

Построим такое разбиение отрезка $[a;c]$ с отмеченными точками, что точка b будет его точкой разбиения $P = x_0, x_1, \ldots, b, \ldots, x_n$.

Тогда $\sum\limits_P f(\xi_i)\Delta x_i < \sum\limits_{P'} f(\xi_i)\Delta x_i + \sum\limits_{P''} f(\xi_i)\Delta x_i$, где P' - разбиение отрезка левеее точки b, P'' - правее точки b.

Покажем, что если $f \in R[a;c]$, то $f \in R[a;b]$. В самом деле, $\sum\limits_{P'}\omega_i\Delta x_i \leqslant \sum\limits_P \omega_i\Delta x_i \to 0 \implies f \in R[a;b]$. Аналогично, можно показать, что $f \in R[b;c]$. Если f - интегрируема на $[a;b]$ и $f \in R[b;c] \implies \sum\limits_{P'}\omega_i\Delta x_i \to 0$, $\sum\limits_{P''}\omega_i\Delta x_i \to 0 \implies$ учитывая то, что $\sum\limits_P f(\xi_i)\Delta x_i < \sum\limits_{P'} f(\xi_i)\Delta x_i + \sum\limits_{P''} f(\xi_i)\Delta x_i$, тогда $\sum\limits_P \omega_i\Delta x_i \to 0 \implies f \in R[a;c]$, а так же то, что $\int_a^c f(x)dx \ \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$. $\square$

2.3.5 Монотонность интеграла Римана

Теорема 2.3.9. Если $a < b$ и $f \in R[a;b]$ и:

1. $\forall x \in [a;b]\ f(x) \geqslant 0$, то $\int_a^b f(x)dx \geqslant 0$
2. $\forall x \in [a;b]\ f(x) > 0$, то $\int_a^b f(x)dx > 0$

Доказательство. (теоремы 2.4.9)

1. Почти очевидно (по определению интеграла Римана и свойствам предела)

2. Пусть $\forall x \in [a;b] f(x) > 0$. Покажем, что $\int_a^b f(x)dx > 0$. Допустим, что $\int_a^b f(x)dx = 0$. Тогда $\lim\limits_{\lambda(P)\to 0} \overline{S}(P) = 0$.

   Тогда можно взять такое разбинеие $P:\ \overline{S}(P) < \frac{b-a}{2}$. Тогда у этого разбиения $P\exists$ отрезок $\Delta_i:\ M_i = \sup\limits_{x\in\Delta_i} f(x) < \frac{1}{2}$. В самом деле, если $M_i \geqslant \frac{1}{2}\ \forall i$, то $\overline{S}(P) = \sum\limits_i M_i\Delta x_i \geqslant \frac{1}{2}\sum\limits_i \Delta x_i = \frac{b-a}{2}$, противоречие с выбраным P.

   Обозначим $\Delta_i = [a_1, b_1]$. Так как $f \in R[a;b] \implies f \in R[a_1, b_1]$. При этом $\int_a^b f(x)dx = 0$. Пусть P_1 - разбиение отрезка $[a_1, b_1]:\ \overline{S}(P_1) < \frac{b_1-a_1}{4} \implies \exists$ отрезок разбиения $[a_2, b_2] \subset [a_1, b_1]:\ \sup\limits_{x\in[a_2,b_2]} f(x) < \frac{1}{4}$ и так далее.

   Таким образом получим систему вложенных отрезков $[a;b] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots$, при этом $\sup\limits_{x\in[a_k,b_k]} f(x) < \frac{1}{2^k}$. Пусть $c \in \bigcap\limits_{k=1}^{\infty}[a_k; b_k]$. Тогда $f(c) > 0$. С другой стороны, $f(c) < \frac{1}{2^k} \implies f(c) = 0$ - противоречие $\implies \int_a^b f(x)dx > 0$.

$\square$

Следствие. (теоремы 2.4.9)

1. Если $a < b,\ f, g \in R[a;b]$ и:

   (a) $\forall x \in [a;b]\ f(x) \leqslant g(x)$, то $\int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b g(x)dx$

   (b) $\forall x \in [a;b]\ f(x) < g(x)$, то $\int_a^b f(x)dx < \int_a^b g(x)dx$

   Доказательство. Очевидно, $g(x) - f(x) \geqslant 0$. $\square$

2. Если $f \in R[a;b],\ a < b,\ M = \sup\limits_{x\in[a;b]} f(x),\ m = \inf\limits_{x\in[a;b]} f(x)$, то $m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant M(b-a)$.

   Доказательство. $\forall$ разбиения P с отмеченными точками верно: $\sum\limits_i m\Delta x_i \leqslant \sum\limits_i f(\xi_i)\Delta x_i \leqslant \sum\limits_i M\Delta x_i$ и $m(b-a) \leqslant \sum\limits_i f(\xi_i)\Delta x_i \leqslant M(b-a)$.

   Переходя к пределу получаем то, что нужно было доказать. $\square$

3. (Теорема о среднем)

   Пусть $f \in R[a;b](a > b, a < b),\ m = \inf\limits_{x\in[a;b]} f(x),\ M = \sup\limits_{x\in[a;b]} f(x)$. Тогда существует $\mu \in [m;M]:\ \int_a^b f(x)dx = \mu(b-a)$.

   Доказательство. Пусть $a < b$. Тогда (из 2-го пункта) $m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant M(b-a),\ (b-a > 0)$.

   $m \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leqslant M$. Пусть $\mu\ \frac{1}{b-a}\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \implies \frac{a}{b}f(x)dx = \mu(b-a)$. Если $a > b$, то $m(a-b) \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant M(a-b)$ (домножим на -1), $m(b-a) \geqslant \int_a^b f(x)dx \geqslant M(b-a) \implies m \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leqslant M$. $\square$

   Следствие. Если, кроме того, $f(x)$ - непрерывна на $[a;b]$, то $\exists c \in [a;b]:\ \int_a^b f(x)dx = f(x)(b-a)$.

   Доказательство. Доказательство следует из теоремы Больцано-Коши о промежуточном значении. $\square$

Теорема 2.3.10 (Первая теорема о среднем)**.** Пусть $f, g \in R[a;b](a > b, a < b),\ m = \inf\limits_{x\in[a;b]} f(x),\ M = \sup\limits_{x\in[a;b]} f(x)$ и g не меняет свой знак на $[a;b]$. Тогда $\exists \mu \in [m;M]:\ \int_a^b f(x)g(x)dx = \mu\int_a^b g(x)dx$.

Доказательство. Пусть $a < b$ и $\forall x \in [a;b]\ g(x) \geqslant 0$. Имеем, что $m \leqslant f(x) \leqslant M,\ (g(x) > 0),\ mg(x) \leqslant f(x)g(x) \leqslant Mg(x) \implies m\int_a^b g(x)dx \leqslant \int_a^b f(x)g(x)dx \leqslant M\int_a^b g(x)dx$. Если $\int_a^b g(x)dx = 0 \implies \int_a^b f(x)g(x)dx = 0 \implies \int_a^b f(x)g(x)dx = \mu\int_a^b g(x)dx$. Если $\int_a^b g(x)dx \neq 0$, то поделим в неравенстве $m\int_a^b g(x)dx \leqslant \int_a^b f(x)g(x)dx \leqslant M\int_a^b g(x)dx$ все на $\int_a^b g(x)dx > 0: \quad m \leqslant \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \leqslant M$, где $\frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} = \mu$.

Аналогично доказываются остальные случаи ($a < b,\ g(x) \leqslant 0;\ a > b,\ g(x) \geqslant 0$). □

2.4 Интеграл Римана как функция верхнего предела интегрирования

Определение 2.4.1. Пусть $f \in R[a;b],\ x \in [a;b]$.

Рассмотрим функцию $F(x) = \int_a^x f(t)dt,\ F(x)$ определена для $\forall x \in [a;b]$.

Теорема 2.4.1 (непрерывность интеграла Римана)**.** Если $f \in R[a;b]$, то $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ - непрерывна на $[a;b]$.

Доказательство. Пусть $h \in \mathbb{R}:\ x+h \in [a;b]$. Тогда $F(x+h) = \int_a^{x+h} f(t)dt$. Пусть $\epsilon > 0$ задано. Покажем, что $\exists\delta > 0:\ \forall h \in \mathbb{R}:\ |h| < \delta\ |F(x+h) - F(x)| < \epsilon$.

Рассмотрим $|F(x+h) - F(x)| = |\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt| = |\int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt| = |\int_x^{x+h} f(t)dt| \leqslant |\int_x^{x+h} |f(t)|dt|$. Так как $f \in R[a;b]$, то f - ограничена на $[a;b]$, то есть $\exists L > 0:\ \forall x \in [a;b]\ |f(x)| \leqslant L$. Тогда $|\int_x^{x+h} |f(t)|dt| \leqslant |L\int_x^{x+h} dt|$, так как

$$\int_x^{x+h} 1dt = \lim_{\lambda(P)\to 0}\sum_{i=1}^n 1\Delta x_i = |h|,$$

тогда $\delta = \frac{\epsilon}{L}$, что и требовалось доказать. □

Теорема 2.4.2 (о дифференцируемости интеграла Римана как функции по верхнему пределу)**.** Пусть $f \in R[a;b],\ x \in [a;b]$ и f непрерывна в точке x, тогда функция $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ дифференцируема в точке x, причем:

$$F'(x) = f(x) \implies (\int_a^x f(t)dt)'_x = f(x)$$

Доказательство. Пусть $h \in \mathbb{R}:\ x+h \in [a;b]$.

Рассмотрим $|\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - f(x)| = |\frac{1}{h}(\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt) - f(x)| = |\frac{1}{h}\int_a^{x+h} f(t)dt - f(x)| = |\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt - \frac{f(x)}{h}\int_x^{x+h} dt| = |\frac{1}{h}(\int_x^{x+h} f(t)dt - \int_x^{x+h} f(x)dt)| = |\frac{1}{h}(\int_x^{x+h}(f(t) - f(x))dt)| = \frac{1}{|h|}|\int_x^{x+h} |f(t) - f(x)|dt|$.

Так как f - непрерывна в точке x, то $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ \ \forall h :\ \ |h| < \delta\ |f(t) - f(x)| < \epsilon$, где $t \in [x; x+h]$.

Тогда $|\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - f(x)| \leqslant \frac{1}{|h|}|\int_x^{x+h} |f(t) - f(x)|dt| < \frac{1}{|h|}\epsilon|\int_x^{x+h} dt| = \frac{1}{|h|}\epsilon|h| = \epsilon$

Таким образом, по определению производной:

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x) = F'(x).$$

$\square$

Следствие. Если f - непрерывна на $[a; b]$, то на $[a; b]$ она имеет первообразную, которая равна:

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt + C$$

Замечание. Рассмотрим следующие классы (множества/пространства) функций:

- $R[a; b]$ - множество интегрируемых на $[a; b]$ функций;
- $C[a; b]$ - множество непрерывных на $[a; b]$ функций;
- $C^o[a; b]$ - множество дифференцируемых на $[a; b]$ функций.

Получаем:

$$C^o[a; b] \subset C[a; b] \subset R[a; b].$$

Теорема 2.4.3 (вторая теорема о среднем)**.** Пусть $f, g \in R[a; b]$, причем f - монотонна на $[a; b]$. Тогда $\exists \xi \in [a; b]$:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a)\int_a^\xi g(x)dx + f(b)\int_\xi^b g(x)dx$$

Лемма 2.4.1. Пусть $f, g \in R[a; b]$, причем f - невозрастающая и неотрицательная.

Тогда $\exists \xi \in [a; b]$:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a)\int_a^\xi g(x)dx.$$

Доказательство. (леммы)

Пусть P - произвольное разбиение отрезка $[a; b]$: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$. Тогда $\int_a^b f(x)g(x)dt = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)g(x)dx$ $+ \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x_{i-1})g(x)dx - \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x_{i-1})g(x)dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} (f(x) - f(x_{i-1}))g(x)dx + \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x_{i-1})g(x)dx =$ (где $\sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} (f(x) - f(x_{i-1}))g(x)dx = \rho$ и $\sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x_{i-1})g(x)dx = \sigma$) $= \rho + \sigma$.

Устремим $\lambda(P) \to 0$:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \lim_{\lambda(P)\to 0} \rho + \lim_{\lambda(P)\to 0} \sigma$$

Покажем, что пределы существуют, более того: $\lim\limits_{\lambda(P)\to 0} \rho = 0$.

Так как $g(x) \in R[a;b] \implies g$ - ограничена на $[a;b]$, то есть $\exists L > 0 : \ \forall x \in [a;b] \ |g(x)| \leqslant L$.

Рассмотрим $\omega_i = \omega_i(f, \Delta_i) = \sup\limits_{\xi_1,\xi_2=\Delta_i} |f(\xi_1) - f(\xi_2)|$. Так как $f \in R[a;b]$, то по критерию интегрируемости: $\sum\limits_i \omega_i \Delta x_i \to 0$.

Тогда $|\rho| = |\sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} (f(x)-f(x_{i-1}))g(x)dx| \leqslant \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(x)-f(x_{i-1})||g(x)|dx \leqslant \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \omega_i L dx = L\sum_{i=1}^n \omega_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} dx = L\sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i$.

Пусть $\epsilon > 0$ задано. Выберем $\delta > 0 : \ \forall P : \ \lambda(P) < \delta$ и $\sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i < \frac{\epsilon}{L}$.

Имеем, что $|\rho| \leqslant L\sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i < L\frac{\epsilon}{L} = \epsilon \implies \lim\limits_{\lambda(P)\to 0} \rho = 0$.

Тогда $\int_a^b f(x)g(x)dx = \lim\limits_{\lambda(P)\to 0} \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x_{i-1})g(x)dx$. $\lim\limits_{\lambda(P)\to 0} \sigma$ существует, так как $\int_a^b f(x)g(x)dx = const$ и $\lim\limits_{\lambda(P)\to 0} \rho = 0$.

Рассмотрим функцию $G(x) = \int_a^x g(x)dx$:

1. $G(x)$ - непрерывна на $[a;b]$ $(x \in [a;b]) \implies G(x)$ принимает на $[a;b]$ *max min* значение (по теореме Вейерштрасса о максимальном значении), $m = \min\limits_{x\in[a;b]} G(x), \ M = \max\limits_{x\in[a;b]} G(x)$.

2. $\int_{x_{i-1}}^{x_i} g(x)dx = \int_a^{x_i} g(x)dx - \int_a^{x_{i-1}} g(x)dx = G(x_i) - G(x_{i-1})$.

   $\sigma = \sum_{i=1}^n f(x_{i-1}) \int_{x_{i-1}}^{x_i} g(x)dx = \sum_{i=1}^n f(x_{i-1})(G(x_i) - G(x_{i-1})) = f(x_0)G(x_1) - f(x_0)G(x_0) + f(x_1)G(x_2) - f(x_1)G(x_1) + \ldots + f(x_{n-2})G(x_{n-1}) - f(x_{n-2})G(x_{n-2}) + f(x_{n-1})G(x_n) - f(x_{n-1})G(x_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n-1} G(x_i)(f(x_{i-1}) - f(x_i)) + f(x_{n-1})G(x_n)$.

   Тогда $\sigma \geqslant m(\sum_{i=1}^{n-1}(f(x_{i-1}) - f(x_2)) + f(x_{n-1})) = m(f(x_0) - f(x_1) + f(x_1) - f(x_2) + f(x_2) - \ldots - f(x_{n-1}) + f(x_{n-1})) = mf(a)$. Аналогично, $\sigma \leqslant Mf(a)$.

   $$mf(a) \leqslant \sigma \leqslant Mf(a)$$

   Пусть $f(a) \neq 0 \implies (f(a) > 0) \ m \leqslant \frac{\sigma}{f(a)} \leqslant M \implies$

   $$m \leqslant \frac{1}{f(a)} \int_a^b f(x)g(x)dx \leqslant M$$

   $\implies \exists \xi \in [a;b] : \ m \leqslant G(\xi) \leqslant M$ и $G(\xi) = \frac{1}{f(a)} \int_a^\xi f(x)g(x)dx$.

   $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a)G(\xi) = f(a)\int_a^\xi g(x)dx$.

$\square$

Доказательство. (теоремы)

Пусть f - неубывающая. Рассмотрим функцию $h(x) = f(b) - f(x)$, $h(x) \geqslant 0\ \forall x \in [a;b]\ \forall x_1, x_2 \in [a;b]:\ x_1 < x_2 \implies h(x_1) - h(x_2) = f(b) - f(x) - f(b) + f(x_2) = f(x_2) - f(x_1) \geqslant 0 \implies h(x_1) \geqslant h(x_2) \implies h(x)$ - невозрастающая.

По лемме, $\int_a^b h(x)g(x)dx = h(a)\int_a^\xi g(x)dx$.

С другой стороны, $\int_a^b h(x)g(x)dx = \int_a^b (f(b) - f(x))g(x)dx = f(b)\int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)g(x)dx$.

Имеем, что $f(b)\int_a^\xi g(x)dx - f(a)\int_a^\xi g(x)dx = f(b)\int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)g(x)dx$.

$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(b)(\int_a^\xi g(x)dx + \int_\xi^b g(x)dx) - f(b)\int_a^\xi g(x)dx + f(a)\int_a^\xi g(x)dx = f(a)\int_a^\xi + f(b)\int_\xi^b g(x)dx$.

Для случая, когда f - невозрастающая, доказываем аналогично. □

2.5 Формула Ньютона-Лейбница

Теорема 2.5.1. Пусть f - непрерывна на $[a;b]$ и $F(x)$ - её первообразная.

Тогда $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)|_a^b$

Доказательство. Пусть $F(x)$ - первообразная функции $f(x)$ на $[a;b]$:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt + C.$$

Отсюда, $F(b) = \int_a^b f(t)dt + C;\ F(a) = \int_a^a f(t)dt;$

$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt + C - C = \int_a^b f(t)dt + C(?)$ □

Теорема 2.5.2. Пусть $F(x)$ - непрерывна на $[a;b]$, дифференцируема на $[a;b]$ за исключением не более чем конечного числа точек. Причем всюду, где она дифференцируема: $F'(x) = f(x)$. И, наконец, $f(x) \in R[a;b]$.

Тогда:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)|_a^b$$

Доказательство. Возьмем произвольное разбиение P отрезка $[a;b]$ так, что оно содержит все точки недиференцируемости функции $F(x):\ a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b, \implies F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^n (F(x_i) - F(x_{i-1}))$.

Пусть $\Delta_i = [x_{i-1}; x_i]$. Фукнция $F(x)$ дифференцируема на $(x_{i-1}; x_i)$, непрерывна на $[x_{i-1}; x_i]\ \forall i = \overline{1,n}$.

По теореме Лагранжа, $\exists \xi_i \in (x_{i-1}; x_i):\ F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = f(\xi_i)\Delta x_i$.

Тогда:

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Устремим $\lambda(P) \to 0$:

$$F(b) - F(a) = \lim_{\lambda(P)\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

так как $\exists \lim,\ f \in R[a;b]$, то $F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$. $\square$

Следствие. Если функция $F(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 2.5.2, то $\forall x \in [a;b]$:

$$F(x) = F(a) + \int_a^x F'(t)dt.$$

2.6 Интегрирование по частям в определенном интеграле и формула Тейлора

Теорема 2.6.1 (формула интегрирования по частям)**.** Если фукнции $u(x)$ и $v(x)$ непрерывно дифференцируемы на отрезке $[a;b]$, то справедливо равенство:

$$\int_a^b udv = uv|_a^b - \int_a^b vdu.$$

Доказательство. Рассмотрим $uv|_a^b = \int_a^b d(uv) = \int_a^b (vdu + udv) = \int_a^b vdu + \int_a^b udv \implies \int_a^b udv = uv|_a^b - \int_a^b vdu.$ $\square$

Теорема 2.6.2 (формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме)**.** Пусть функция $f(t)$ имеет на отрезке $[a;x]$ непрерывные производные до n-го порядка включительно. Тогда справедлива формула Тейлора:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + r_n(a;x),$$

где $r_n(a;x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x f^{(n)}(t)(x-a)^{n-1}dt$.

Доказательство. Пусть $f(t)$ имеет на $[a;x]$ непрерывные производные до n-го порядка включительно. По формуле Ньютона-Лейбница: $f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)dt = \int_a^x f'(t)dt = -\int_a^x f'(t)(x-t)'dt =$

$$= \left| \begin{array}{c} u = f'(t) \implies u' = f'(t) \implies du = f''(t)dt \\ (x-t)'dt = dv \implies d(x-t) = dv \implies v = x-t \end{array} \right| =$$

$= -f'(t)(x-t)|_a^x + \int_a^x f''(t)(x-t)dt = f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}\int_a^x -f''(t)((x-t)^2)'_t dt = f'(a)(x-a) - \frac{1}{2}(f''(t)(x-t)^2|_a^x - \int_a^x f'''(t)(x-t)^2 dt) = f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 - \frac{1}{6}\int_a^x f'''(t)((x-t)^3)'dt = \ldots = f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + \frac{1}{6}f'''(a)(x-a)^3 + \ldots + \frac{1}{6*\ldots*(n-1)}f^{(n-1)}(a)(x-a)^{n-1} + \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1}dt.$ $\square$

2.7 Замена переменной в определенном интеграле

Теорема 2.7.1. Пусть $\phi : [\alpha;\beta] \to [a;b]$ - непрерывно дифференцируемое отображение отрезка $[\alpha;\beta]$ в отрезок $[a;b]$, причем $\phi(\alpha) = a,\ \phi(\beta) = b$. Тогда для любой функции $f(x)$, непрерывной на $[a;b]$, функция $f(\phi(t))\phi'(t)$ - непрерывна на $[\alpha;\beta]$ и справедливо равенство:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)dt.$$

Доказательство. Пусть $F(x)$ - первообразная $f(x)$ на $[a;b]$.

Тогда $F(\phi(t))$ - первообразная для $f(\phi(t)\phi'(t))$ $(F'_t(\phi(t)) = F'_\phi \phi'_t) \implies F(\phi(t))$ - непрерывна на $[\alpha;\beta]$.

По формуле Ньютона-Лейбница, $F(b)-F(a) = \int_a^b f(x)dx$ и $\int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)dt = F(\phi(\beta)) - F(\phi(\alpha))$.

По условию, $\phi(\beta) = b,\ \phi(\alpha) = a \implies \int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)dt.$ □

Теорема 2.7.2 (замена переменной для интегрируемых функций)**.** Пусть $f : [a;b] \to \mathbb{R},\ f \in R[a;b]$, функция $x = \phi(t)$:

1. $\phi : [\alpha;\beta] \to [a;b]$
2. $\phi(\alpha) = a,\ \phi(\beta) = b$
3. $\phi'(t)$ непрерывна на $[\alpha;\beta]$
4. ϕ - строго монотонна

Тогда:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)dt$$

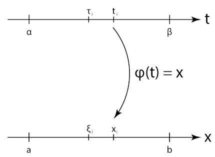
Доказательство. Пусть (P_t, τ) - произвольное разбиение с отмеченными точками отрезка $[\alpha;\beta]$:

$$\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = \beta;$$

$$\tau_i \in [t_{i-1};t_i],\ i = \overline{1,n},$$

Для определенности будем считать, что ϕ - возрастающая, то есть $\alpha < \beta,\ a < b$.

Тогда можно построить разбиение (P_x, ξ) с отмеченными точками отрезка $[a; b]$:



$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b;$
$\xi_i \in [x_{i-1}; x_i],\ i = \overline{1, n},$
Здесь $x_i = \phi(t_i),\ \xi_i = \phi(\tau_i).$

Если $\lambda(P_t) \to 0 \implies \lambda(P_x) \to 0$. Составим интегральные суммы:

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\phi(\tau_i))\phi'(\tau_i)\Delta t_i;$$

$$\overline{\sigma} = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

Если $\lambda(P_t) \to 0 \implies \lambda(P_x) \to 0 \implies \overline{\sigma} \to \int_a^b f(x)dx$ (так как $f \in R[a; b]$).

Покажем, что $\sigma \to \int_a^b f(x)dx$: $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \phi(t_i) - \phi(t_{i-1}) = \phi'(\overline{\tau_i})\Delta t_i,\ \overline{\tau_i} \in [t_{i-1}; t_i]$ (случайная точка из отрезка).

Тогда:

$$\overline{\sigma} = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f(\phi(\tau_i))\phi'(\overline{\tau_i})\Delta t_i;$$

Покажем, что $\lim\limits_{\lambda(P_i)\to 0}(\sigma - \overline{\sigma}) = 0$:

В самом деле, $|\sigma - \overline{\sigma}| = |\sum_{i=1}^{n} f(\phi(\tau_i))\phi'(\tau_i)\Delta t_i - \sum_{i=1}^{n} f(\phi(\tau_i)\phi'(\overline{\tau_i}))\Delta t_i| = |\sum_{i=1}^{n} f(\phi(\tau_i))(\phi'(\tau_i) - \phi'(\overline{\tau_i}))\Delta t_i| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |f(\phi(\tau_i))||\phi'(\tau_i) - \phi'(\overline{\tau_i})|\Delta t_i \leqslant L\sum_{i=1}^{n} |\phi'(\tau_i) - \phi'(\overline{\tau_i})|\Delta t_i$, где $L > 0 :\ \forall x \in [a; b] \quad |f(x)| \leqslant L$ (так как f - интегрируема $\implies$ ограничена).

Так как $\phi'(t)$ непрерывна на $[\alpha; \beta] \implies \forall i = \overline{1, n}\ \phi'(t)$ непрерывна на $[t_{i-1}; t_i] \implies \phi'(t)$ равномерно непрерывна на $[t_{i-1}; t_i]$. Возьмем $\delta > 0$: $\forall t_1, t_2 \in [t_{i-1}; t_i]\ |[t_1 - t_2]| < \delta \implies |\phi'(t_1) - \phi'(t_2)| < \frac{\epsilon}{L(\beta-\alpha)}$ $(\forall \epsilon > 0)$.

Тогда $|\sigma - \overline{\sigma}| \leqslant L\sum_{i=1}^{n} |\phi'(\tau_i) - \phi'(\overline{\tau_i})|\Delta t_i < L\frac{\epsilon}{L(\beta-\alpha)}\sum_{i=1}^{n} \Delta t_i = L\frac{\epsilon}{L(\beta-\alpha)}(\beta - \alpha) = \epsilon \implies \sigma \to \int_a^b f(x)dx$ при $\lambda(P_t) \to 0$.

С другой стороны, по определению определенного интеграла:

$$\lim_{\lambda(P_t)\to 0}\sigma = \int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)dt \implies \int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)dt.$$

$\square$

Глава 3

Геометрические приложения интеграла Римана

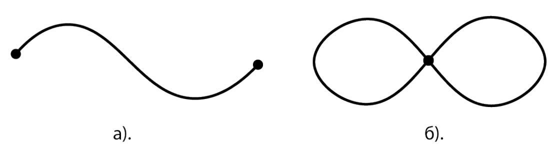
3.1 Длина кривой

Определение 3.1.1. Пусть (X, ρ) - метрическое пространство, $[a; b] \subset \mathbb{R}$. Будем называть **путем** произвольное непрерывное отображение:

$$\gamma : [a; b] \to X$$

Определение 3.1.2. Пусть $\gamma : [a; b] \to X$ называется **простым**, если:

$$\forall t_1, t_2 \in [a; b] : \quad \gamma(t_1) = \gamma(t_2) \implies t_1 = t_2$$



а). простой путь   б). непростой путь

Определение 3.1.3. Пусть $\gamma : [a; b] \to X$ называется **замкнутым**, если:

$$\gamma(a) = \gamma(b),$$

тогда:

- $\gamma(a)$ - начало пути,
- $\gamma(b)$ - конец пути

Определение 3.1.4. Пусть $\gamma : [a; b] \to X$ называется **простым замкнутым**, если:

$$\forall t_1, t_2 \in (a; b) : \ \gamma(t_1) = \gamma(t_2) \implies t_1 = t_2; \ \gamma(a) = \gamma(b)$$

На множестве путей введем отношение.

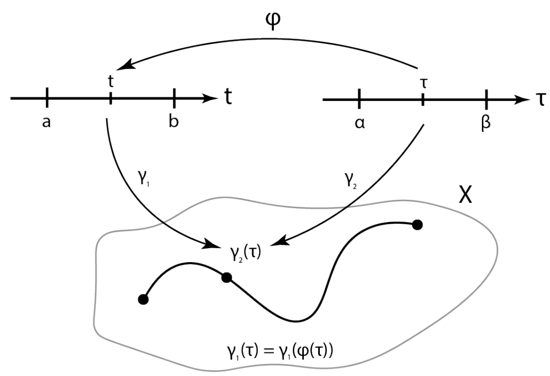
Пусть $\gamma_1 : [a;b] \to X,\ \gamma_2 : [\alpha;\beta] \to X$.

Будем говорить, что γ_1 и γ_2 находятся в отношении " $\sim$ ", то есть $\gamma_1 \sim \gamma_2$, если существует строго возрастающее отображение $\phi : [\alpha;\beta] \to [a;b]$:

$$\phi(\alpha) = a,\ \phi(\beta) = b,$$

а так же:

$$\gamma_2(\tau) = \gamma_1(\phi(\tau))$$



Упражнение 1: Доказать, что введенное отношение есть отношение эквивалентности.

Определение 3.1.5. Отображение ϕ называется **гомеоморфизмом**, если:

$$\phi \text{ и } \phi^{-1} \text{ - непрерывны}$$

Упражнение 2: Доказать, что ϕ в определении отношения между γ_1 и γ_2 есть гомеоморфизм.

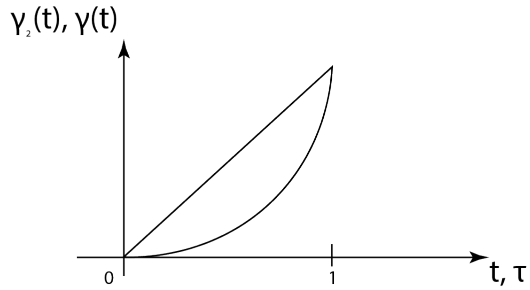
Определение 3.1.6. **Кривой** в X будем называть класс эквивалентных путей.

Определение 3.1.7. Образ пути γ называется **носителем** этого пути.

Пример 7. Рассмотрим:

$\gamma_1 : [0;1] \to \mathbb{R} : \quad \gamma_1(t) = t;$

$\gamma_2 : [0;1] \to \mathbb{R} : \quad \gamma_2(\tau) = \tau^3,$



Что бы доказать, что $\gamma_1 \sim \gamma_2$, нужно найти строго возрастающее отображение $\phi : [0;1] \to [0;1]$:

$t = \phi(\tau) = \tau^3,\ \phi(\tau)$ - строго возрастающее, $\phi(0) = 0,\ \phi(1) = 1$;

$\gamma_2(\tau) = \tau^3 = \phi(\tau) = t = \gamma_1(t) = \gamma_1(\phi(\tau)) \implies \gamma_2(\tau) = \gamma_1(\phi(\tau))$.

Определение 3.1.8. Кривая называется **простой**, если она представляется простым путем (это значит, что в ее классе есть простой путь).

Упражнение 3: Доказать, что если один путь в классе эквивалентности простой, то остальные тоже простые.

Определение 3.1.9. Путь, представляющий данную кривую (из класса эквивалентности путей) l называется **параметризацией** этой кривой.

Вдальнейшем будем рассматривать метрические пространства (X, ρ) как $\mathbb{R}^2,\ \mathbb{R}^3$ с евклидовой метрикой.

Определение 3.1.10. Пусть l - простая кривая в $\mathbb{R}^2,\ \gamma(t) = (x(t); t(t))$ - ее параметризация. Кривая l называется **гладкой**, если $\forall t\ x(t), y(t)$ имеют непрерывные производные на $[\alpha, \beta]$ и $\nexists t_0 \in [\alpha, \beta]$ $(\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2),\ x'(t_0) = 0$ и $y'(t_0) = 0$.

Определение 3.1.11. Пусть $l \subset \mathbb{R}^2$ $(\mathbb{R}^3)$ и $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$ $(\mathbb{R}^3)$ - параметризация кривой l.

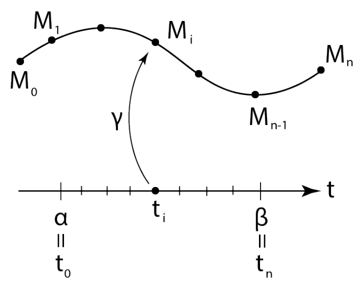
Пусть $\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = \beta$ - разбиение отрезка $[\alpha, \beta]$ и $M_i = \gamma(t_i),\ i = \overline{0, n}$ - точка пути γ (кривая l):

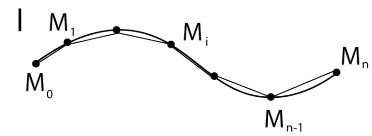
$$M_i = \gamma(t_i) = (x(t_i); y(t_i))$$

Тогда отрезок $M_{i-1}M_i$ $(i = \overline{1, n})$ называется **звеном** кривой l. Объединение $\bigcap\limits_i M_{i-1}M_i$ - ломаная, вписанная в l.

Периметром ломаной называется сумма длин ее звеньев:

$$p(M_0, M_1, \ldots, M_n) = \sum_{i=1}^{n} |M_{i-1}M_i|$$





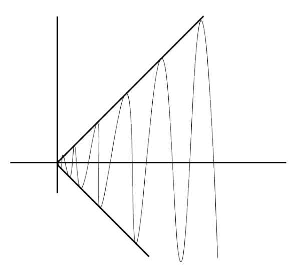
Определение 3.1.12. Если множество периметров ломаных, вписанных в данную кривую l - ограничено, то кривую l будем называть **спрямляемой**.

Определение 3.1.13. Если $p(M_0, M_1, \ldots, M_n)$ - периметр ломаной, вписанной в кривую l, $S(l)$ - длина кривой, то по определению:

$$S(l) = \sup p(M_0, \ldots, M_n),$$

где sup берется по всем ломаным $\underset{i}{\cup} M_{i-1}M_i$, вписанным в l.

Пример 8. (неспрямляемой кривой)



Рассмотрим L - множество всех спрямляемых кривых на плоскости ($\mathbb{R}^2$). Введем $S : L \to \mathbb{R}$, то есть отображение S сопоставляет спрямляемую кривую l ее длину.

$$S(l) \text{ - длина кривой } l$$

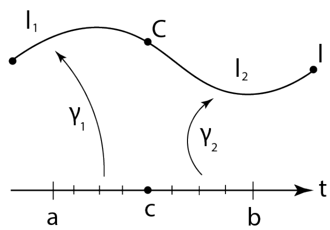
Теорема 3.1.1 (аддитивность длины кривой)**.** Функция $S(l)$ является аддитивной, то есть если $l = l_1 \cup l_2$, то $S(l) = S(l_1) + S(l_2)$.

Более тонко: Пусть $\gamma : [a; b] \to \mathbb{R}^2$ - параметризация спрямляемой кривой l, точка $c \in [a; b]$:

$\gamma_1 : [a; c] \to \mathbb{R}^2$ - параметризация кривой l_1,

$\gamma_2 : [c; b] \to \mathbb{R}^2$ - параметризация кривой l_2,

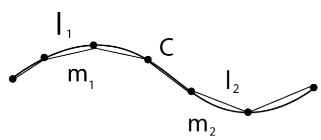
при этом $C = \gamma(c) = \gamma_1(c) = \gamma_2(c)$.



Тогда $S(l) = S(l_1) + S(l_2)$.

Доказательство. Пусть l - спрямляемая кривая. Покажем, что l_1 и l_2 - спрямляемые.

Обозначим за m_1 и m_2 - ломаные, вписанные в l_1 и l_2 соответственно. Тогда можно ввести m как $m = m_1 \cup m_2$ - ломаная, вписанная в l.

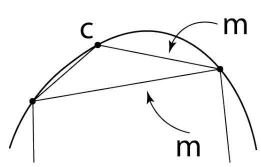


$p(m)$ - периметр ломаной, вписанной в l, $p(m) = p(m_1) + p(m_2) \leqslant S(l) \implies p(m_1) \leqslant S(l)$ и $p(m_2) \leqslant S(l) \implies l_1$ и l_2 - спрямляемые.

Пусть $S(l_1) = \sup\limits_{m_1} p(m_1)$ и $S(l_2) = \sup\limits_{m_2} p(m_2) \implies S(l_1) + S(l_2) \leqslant S(l)$

Обратно, пусть l_2 и l_2 - спрямляемые кривые. Покажем, что l - спрямляемая. Пусть m - некоторая ломаная, вписанная в l.

Возьмем $C \in l$. Пусть m' - ломаная, получаемая из ломаной m добавлением звеньев, проходящих через C.



Пусть m_1 - часть ломаной, вписанной в l_1, m_2' - часть ломаной, вписанной в l_2. Тогда $p(m) \leqslant p(m') = p(m_1') + p(m_2') \leqslant S(l_1) + S(l_2) \implies S(l) = \underset{m}{p(m)} \leqslant S(l_1) + S(l_2)$.

Тогда имеем, что $S(l_1) + S(l_2) \leqslant S(l) \leqslant S(l_1) + S(l_2) \implies S(l) = S(l_1) + S(l_2)$. $\square$

3.2 Длина кривой как предел

Теорема 3.2.1. Пусть l - простая спрямляемая незамкнутая кривая в $\mathbb{R}^2$ и $\gamma : [a; b] \to \mathbb{R}^2$ - ее параметризация. Пусть $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b$ - разбиение отрезка $[a; b]$, этому разбиению соответствуют точки

$M_0, M_1, \ldots, M_n$ - соответсвующая ломаная, вписанная в l ($M_i = \gamma(t_i)$), тогда:

$$S(l) = \lim_{\lambda \to 0} p(m),$$

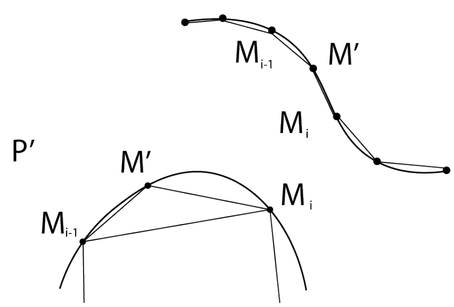
где $\lambda = \max_i \Delta t_i,\ \Delta t_i = t_i - t_{i-1}$.

Доказательство. (теоремы) Пусть l - простая спрямляемая незамкнутая кривая в $\mathbb{R}^2$, $P' = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b\}$ - произвольное разбиение отрезка $[a; b]$.

$m(P')$ - ломаная, вписанная в l, соответствующая разбиениею P. Пусть $\gamma : [a; b] \to \mathbb{R}^2$ - параметризация кривой l, $\gamma(t) = (x(t); y(t)),\ t \in [a; b]$.

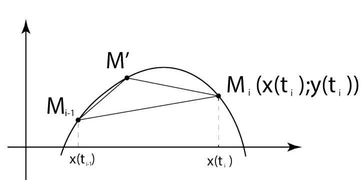
Лемма 3.2.1. Если разбиение P'' получено из разбиения P' добавлением точки на промежуток $(t_{i-1}; t_i)$, то периметр ломаной, соответсвующий разбиению P', не больше периметра ломаной, соответсвующей разбиению P'' и $p(m(P')) \leqslant p(m(P'')) \leqslant p(m(P')) + 2(\omega_i(x(t)) + \omega_i(y(t)))$, где ω_i - колебания функции $x(t),\ y(t)$:

$$\omega_i(x(t)) = \sup_{t', t'' \in [t_{i-1}; t_i]} (x(t') - x(t'')) = \sup_{t \in [t_{i-1}; t_i]} (x(t)) - \inf_{t \in [t_{i-1}; t_i]} (x(t))$$



Доказательство. (леммы) Ломаная $m(P'')$ получена из ломаной $m(P')$ путем замены звена $M_{i-1}M_i$ на два звена: $M_{i-1}M'$ и $M'M_i$.

Очевидно, что $p(m(P')) \leqslant p(m(P''))$.



$M_i = \gamma(t_i) = (x(t_i); y(t_i)),\ M' = (x(t'); y(t')),\ M_{i-1} = (x(t_{i-1}); y(t_{i-1}))$ $|M_{i-1}M'| + |M'M_i| \leqslant |x(t') - x(t_{i-1})| + |y(t') - y(t_{i-1})| + |x(t_i) - x(t')| + |y(t_i) - y(t')| \leqslant 2\omega_i(x(t)) + 2\omega_i(y(t))$, sup берется на отрезке $[t_{i-1}; t_i]$.

В итоге, $p(m(P'')) \leqslant p(m(P')) + 2(\omega_i(x(t)) + \omega_i(y(t)))$.

Если не понятно: $p(m(P'')) = \sum_{k=1}^{n} |M_{k-1}M_k| = \sum_{k=1}^{i-1} |M_{k-1}M_k| + |M_{i-1}M'| + |M'M_i| + \sum_{k=i+1}^{n} |M_{k-1}M_k| \leqslant p(m(P')) + 2(\omega_i(x(t)) + \omega_i(y(t)))$. □

(повтор) Пусть $\epsilon > 0$ задано. Выберем произвольное разбиение P' отрезка $[a;b]:\ p(m(P')) > S(l) - \frac{\epsilon}{2}$ (по определению sup множества).

Пусть это разбиение состоит из n точек. Тогда выберем $\delta > 0:\ \forall t', t'' \in [a;b]:\ |t' - t''| < \delta \implies |x(t') - x(t'')| < \frac{\epsilon}{8n};\ |y(t') - y(t'')| < \frac{\epsilon}{8n}$.

Пусть P'' - произвольное разбиение: $\lambda(P'') < \delta$. Покажем, что $p(m(P'')) \leqslant S(l)$ и $p(m(P'')) > S(l) - \frac{\epsilon}{2}$.

Рассмотрим $P''' = P' \cup P''$. Тогда $p(m(P''')) \geqslant p(m(P''))$. С другой стороны, P''' получена из P'' добавлением не более чем n точек. Тогда $p(m(P''')) \leqslant p(m(P'')) + \sum_{i=1}^{n} 2(\omega_i(x(t)) + \omega_i(y(t))) < S(l) + 4\frac{\epsilon}{8n}n = S(l) + \frac{\epsilon}{2}$. Получим, что:

$$p(m(P''')) < S(l) + \frac{\epsilon}{2}.$$

Так как P''' тоже получено из P' добавлением точек, то:

$$p(m(P''')) \geqslant p(m(P')) > S(l) - \frac{\epsilon}{2}.$$

Так же имеем, что $p(m(P''')) \leqslant p(m(P'')) + \frac{\epsilon}{2} \implies p(m(P'')) \geqslant p(m(P''')) - \frac{\epsilon}{2} \geqslant p(m(P')) - \frac{\epsilon}{2} > S(l) - \frac{\epsilon}{2} - \frac{\epsilon}{2} = S(l) - \epsilon$.

Так как $S(l) = \sup\limits_{m} p(m(P)),\ P$ - разбиение отрезка $[a;b] \implies$

$$p(m(P'')) \leqslant S(l) < S(l) + \epsilon.$$

Таким образом, если $\epsilon > 0$ задано, то возьмем произвольное разбиение $P'':\ \lambda(P'') < \delta \implies S(l) - \epsilon < p(m(P'')) < S(l) + \epsilon \implies |p(m(P'')) - S(l)| < \epsilon \implies$

$$\lim_{\lambda(P) \to 0} p(m(P'')) = S(l).$$

$\square$

Теорема 3.2.2 (формула для вычисления длины кривой)**.** Пусть l - гладкая кривая; $\gamma : [a;b] \to \mathbb{R}^2$ - ее параметризация (гладкая, то есть $\gamma(t) = (x(t); y(t))$, где $x(t)$ и $y(t)$ имеют непрерывные произведения на $[a;b]$). Тогда l - спрямляема и:

$$S(l) = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt$$

Доказательство. (теоремы) Возьмем разбиение:

$$P' = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b\}$$

Тогда:

$$p(m(P')) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x(t_i)) - x(t_{i-1})^2 + (y(t_i) - y(t_{i-1}))^2}$$

$\forall i = \overline{1,n}\ x(t_i) - x(t_{i-1}) = x'(\tau_i)\Delta t_i,\ \tau_i \in [t_{i-1}; t_i],\ y(t_i) - y(t_{i-1}) = y'(\overline{\tau_i})\Delta t_i,\ \overline{\tau_i} \in [t_{i-1}; t_i]$.

Тогда:

$$p(m(P')) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x'(\tau_i)\Delta t_i)^2 + (y'(\overline{\tau_i})\Delta t_i)^2} = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x'(\tau_i))^2 + (y'(\overline{\tau_i}))^2}\Delta t_i.$$

Рассмотрим функцию:

$$\phi(t) = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2},$$

где $\phi(t)$ - непрерывна на $[a;b] \implies \phi(t)$ - интегрируема на $[a;b]$, то есть:

$$\exists \lim_{\lambda(P')\to 0} \sigma = \int_a^b \phi(t)dt,$$

где $\sigma = \sum_{i=1}^n \phi(\tau_i)\Delta t_i = \sum_{i=1}^n \sqrt{(x'(\tau_i))^2 + (y'(\tau_i))^2}\Delta t_i$.

Лемма 3.2.2. $\forall a, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ верно неравенство:

$$\sqrt{a^2 + b_1^2} - \sqrt{a^2 + b_2^2} \leqslant |b_1 - b_2|$$

Доказательство. (леммы)

1. Если $a = 0$ - очевидно;
2. Если $a \neq 0 \implies \frac{(\sqrt{a^2+b_1^2}-\sqrt{a^2+b_2^2})(\sqrt{a^2+b_1^2}-\sqrt{a^2+b_2^2})}{\sqrt{a^2+b_1^2}-\sqrt{a^2+b_2^2}} = \frac{|b_1^2-b_2^2|}{\sqrt{a^2+b_1^2}-\sqrt{a^2+b_2^2}} = \frac{|b_1+b_2||b_1-b_2|}{\sqrt{a^2+b_1^2}-\sqrt{a^2+b_2^2}} < \frac{|b_1+b_2|}{|b_1|+|b_2|}|b_1 - b_2| \leqslant |b_1 - b_2|$, потому что $\frac{|b_1+b_2|}{|b_1|+|b_2|} \leqslant 1$.

□

Покажем, что:

$$\lim_{\lambda(P')\to 0}(p(m(P')) - \sigma) = 0.$$

$|p(m(P'))-\sigma| = |\sum_{i=1}^n \sqrt{(x'(\tau_i))^2 + (y'(\overline{\tau_i}))^2}\Delta t_i - \sum_{i=1}^n \sqrt{(x'(\tau_i))^2 + (y'(\tau_i))^2}\Delta t_i| = |\sum_{i=1}^n(\sqrt{(x'(t_i))^2 + (y'(\overline{\tau_i}))^2} - \sqrt{(x'(\tau_i))^2 + (y'(\tau_i))^2})\Delta t_i| \leqslant \sum_{i=1}^n |\sqrt{(x'(\tau_i))^2 + (y'(\overline{\tau_i}))^2} - \sqrt{(x'(\tau_i))^2 + (y'(\tau_i))^2}|\Delta t_i \overset{lemma}{\leqslant} \sum_{i=1}^n |y'(\overline{\tau_i}) - y'(\tau_i)|\Delta t_i \leqslant \sum_{i=1}^n \omega_i(y'(t))\Delta t_i$

Напоминание:

$$\omega_i(t) = \sup_{t',t''\in[t_{i-1};t_i]} |f(t') - f(t'')|$$

Так как $y'(t)$ - непрерывная функция $\implies$ $y'(t)$ - интегрируема на $[a;b] \implies \sum_{i=1}^n \omega_i(y')\Delta t_i \to 0$ (по критерию интегрируемости) $\implies$

$$\lim_{\lambda(P')\to 0}(p(m(P')) - \sigma) = 0.$$

$\lim\limits_{\lambda(P')\to 0}(p(m(P'))) = \lim\limits_{\lambda(P')\to 0} \sigma = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt.$ □

Следствие. (теоремы)

1. Пусть l - график функции $y = y(x)$.

   Тогда:
   $$\begin{cases} x = x \\ y = y(x) \end{cases} \implies S(l) = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx$$

2. Пусть $r = r(\phi)$ - уравнение кривой в полярной системе координат.

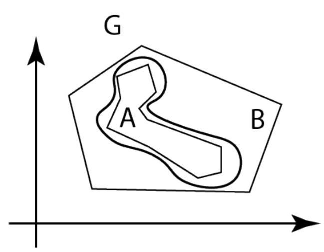
   $x = r\cos\phi, \quad y = r\sin\phi, \quad \phi \in [\alpha, \beta]$. Тогда:
   $$\begin{cases} x(\phi) = r(\phi)\cos\phi \\ y(\phi) = r(\phi)\sin\phi \end{cases} \implies \begin{cases} x'(\phi) = r'(\phi)\cos\phi - r(\phi)\sin\phi \\ y'(\phi) = r'(\phi)\sin\phi + r(\phi)\cos\phi \end{cases}$$

   $(x'(\phi))^2 + (y'(\phi))^2 = (r')^2\cos^2\phi - 2r'r\sin\phi\cos\phi + r^2\sin^2\phi + (r')^2\sin^2\phi + 2r'r\sin\phi\cos\phi + r^2\cos^2\phi = (r')^2 + r^2$.

   Тогда формула для вычисления длины кривой в полярной системе координат:
   $$S(l) = \int_\alpha^\beta \sqrt{(r'(\phi))^2 + (r(\phi))^2} d\phi$$

3.3 Площадь плоской фигуры

Определение 3.3.1. Многоугольник - множество точек плоскости, границей которого является объединение конечного числа непересекающихся простых ломаных, при этом это объединение само является замкнутой ломаной.



Определение 3.3.2. Пусть G - множество на плоскости, $G \subset \mathbb{R}^2$. Будем говорить, что многоугольник A **вписан** в G, если $A \subset G$ и A **описан около** G, если $G \subset A$.

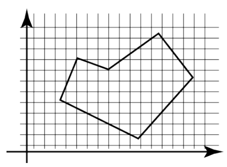
Определение 3.3.3. Множество $G \subset \mathbb{R}^2$ называется **измеримым по Жардану** (или **квадрируемым**), если:
$$S_* = \sup_{A \subset G} S(A) = S^* = \inf_{B \supset G} S(B),$$

где sup берется по всем многоугольникам, вписанным в G, а inf - по всем многоугольникам, описанным около G. При этом их общее значение $S = S_* = S^*$ называется **площадью** G, или **мерой Жардана**.

S_* - **внутренняя** мера, S^* - **внешняя** мера.

Другими словами, множество $G \subset \mathbb{R}^2$ квадрируемо, если внутреняя и внешняя меры совпадают.

Здесь $S(A)$, $S(B)$ - площади многоугольников A и B. Многоугольник A можно разбить на конечное число прямоугольников и прямоугольных треугольников:



$S_\square = ab; \quad S_\triangle = \frac{1}{2}ab$

Пример 9. (из определения)

1. Квадрируемые множетсва на плоскости.

   Круг с границей:
   $$x^2 + y^2 = 1$$
   Упражнение: доказать, что круг - квадрируемое множество.

2. Неквадрируемые множества на плоскости.

   Множество точек одинарного квадрата с рациональными координатами:
   $$G = (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) \cap ([0;1] \times [0;1])$$
   Вписанный многоугольник $A = \emptyset$, $S(A) = 0$. Многоугольник $B = [0;1] \times [0;1]$ имеет площадь равную 1 ($S(B) = 1$).
   $$S_* = 0, \quad S^* = \inf_{B' \supset G} S(B') = S(B) = 1 \ (S_* \neq S^*)$$

Теорема 3.3.1 (критерий квадрируемости)**.** Множество $G \subset \mathbb{R}^2$ квадрируемо $\iff \forall \epsilon > 0 \ \exists$ многоугольники A и B:

1. $A \subset G, \ B \supset G$,

2. $S(B) - S(A) < \epsilon$.

Доказательство. (теоремы)
"$\rightarrow$" Пусть $G \subset \mathbb{R}^2$ квадрируемо $\implies S_* = S^* = S'$.
Выберем $A \subset G: \ S(A) > S - \frac{\epsilon}{2}$ ($\epsilon > 0$ - задано) - по определению sup.
Выберем $B \supset G: \ S(B) < S + \frac{\epsilon}{2}$.

$$S(B) - S(A) < (S + \frac{\epsilon}{2}) - (S - \frac{\epsilon}{2}) = \epsilon$$

" $\leftarrow$ " Пусть $\forall \epsilon > 0$ $\exists$ многоугольники A и B, $A \subset G$, $B \supset G$ и $S(B) - S(A) < \epsilon$. Докажем, что G - квадрируемо.

$$S(B) - S(A) < \epsilon \implies S(B) - \epsilon < S(A) \leqslant S_* \leqslant S^* \leqslant S(B)$$

Так как $S(B) - S(A) < \epsilon \implies S^* - S_* < \epsilon$. Так как $\epsilon > 0$ - произвольное число $\implies S^* = S_*$, то есть G - квадрируемо. $\square$

3.4 Классы квадрируемых областей

Определение 3.4.1. Криволинейная трапеция - часть плоскости, ограниченная прямыми $x = a,\ x = b$, графиком функции $y = f(x)$ и осью Ox. РИСУНОК

Теорема 3.4.1. Криволинейная трапеция квадрируема и ее площадь равна:

$$S = \int_a^b f(x)dx,$$

где $f(x)$ - непрерывна на $[a;b],\ f(x) \geqslant 0$.

Доказательство. $ABCD$ - криволинейная трапеция, ограничена $x = a,\ x = b,\ y = 0$, а так же графиком функции $y = f(x)$. Пусть $\epsilon > 0$ задано. Выберем $\delta > 0 :\ \forall x', x'' :\ |x' - x''| < \delta \implies |f(x') - f(x'')| < \frac{\epsilon}{b-a}$ (так как $f(x)$ - непрерывна на $[a;b] \implies f(x)$ равномерно непрерывна на $[a;b]$). РИСУНОК

Разобьем отрезок $[a;b]$ точками $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$, таким образом, что бы $\max\limits_i |x_i - x_{i-1}| < \delta$. Пусть:

$$m_i = \min_{x \in [x_{i-1};x_i]} f(x),\ M_i = \max_{x \in [x_{i-1};x_i]} f(x).$$

Построим многоугольник A, вписанный в $ABCD$ и многоугольник B, описанный около $ABCD$. Многоугольник A состоит из прямоугольников со сторонами Δx_i и m_i, многоугольник B состоит из прямоугольников со сторонами Δx_i и M_i.

$$S(A) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i, \quad S(B) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i,$$

$$S(B) - S(A) = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i)\Delta x_i < \sum_{i=1}^n \frac{\epsilon}{b-a} \Delta x_i =$$

$$= \frac{\epsilon}{b-a} \sum_{i=1}^n \Delta x_i = \frac{\epsilon}{b-a}(b-a) = \epsilon \implies$$

по критерию квадрируемости, криволинейная трапеция $ABCD$ - квадрируема $\implies S_* = S^* = S_{ABCD}$. С другой стороны, $S(B) - S(A) = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i)\Delta x_i \leqslant \sum_{i=1}^n \omega_i(f(x))\Delta x_i$.

Так как f - непрерывна на $[a;b] \implies f \in R[a;b] \implies \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i \to 0 \implies S_{ABCD} = \int_a^b = \int_a^b f(x)dx = S^* = S_*$. $\square$

Определение 3.4.2. Фигура на плоскости, ограниченная лучами $\phi = \alpha$ и $\phi = \beta$ и кривой $\rho = \rho(\phi)$ называется **криволинейным сектором**.

Теорема 3.4.2. Пусть криволинейный сектор Ω ограничен лучами $\phi = \alpha$, $\phi = \beta$ и кривой $\rho = \rho(\phi)$. Тогда:

$$S(\Omega) = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta \rho^2(\phi) d\phi,$$

где $\rho(\phi)$ - непрерывна на $[\alpha;\beta]$. РИСУНОК

Доказательство. Разобьем сектор Ω лучами $\alpha = \phi_0 < \phi_1 < \ldots < \phi_{n-1} < \phi_n = b$. Пусть:

$$m_i = \min_{\phi \in [\phi_{i-1};\phi_i]} \rho(\phi), \quad M_i = \max_{\phi \in [\phi_{i-1};\phi_i]} \rho(\phi).$$

Построим криволинейные сектора с радиусами m_i и M_i. Пусть $\underline{\Omega}$ - объединение секторов в радиусом m_i, а $\overline{\Omega}$ - объединение секторов с радиусом M_i.

$$S(\underline{\Omega}) = \sum_{i=1}^{n} \pi m_i^2 \frac{\Delta\phi_i}{2\pi} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i^2 \Delta\phi_i,$$

$$S(\overline{\Omega}) = \sum_{i=1}^{n} \pi M_i^2 \frac{\Delta\phi_i}{2\pi} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} M_i^2 \Delta\phi_i.$$

Заметим, что $S(\underline{\Omega}) \leqslant S_{kriv.sector} \leqslant S(\overline{\Omega})$ $(*)$.

Заметим, что $S(\underline{\Omega})$ - нижняя интегральная сумма функции $\frac{\rho^2(\phi)}{2}$, а $S(\overline{\Omega})$ - верхняя интегральная сумма этой же функции. Функция $\frac{\rho^2(\phi)}{2}$ - непрерывна (так как $\rho(\phi)$ - непрерывна) $\implies$ интегрируема на $[\alpha;\beta] \implies \exists \lim\limits_{\max \Delta\phi_i \to 0} S(\underline{\Omega}) = \lim\limits_{\max \Delta\phi_i \to 0} S(\overline{\Omega}) = \int_\alpha^\beta \frac{\rho^2(\phi)}{2} d\phi \implies$ учитывая неравенство (*) и лемму о двух миллиционерах:

$$S_{kriv.sector} = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta \rho^2(\phi) d\phi$$

и криволинейный сектор - квадрируемый. $\square$

Глава 4

Несобственные интегралы

Определение 4.0.1. Пусть $f : [a;+\infty) \to \mathbb{R}$ (задана на луче) и $\forall b \in [a;+\infty)$ $f \in R[a;b]$. Рассмотрим:

$$\lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx,$$

этот предел называется **несобственным интегралом** от функции $f(x)$ на луче $[a;+\infty)$.

Если этот предел существует и конечен, то несобственный интеграл называется **сходящимся**, иначе **расходящимся**. Обозначение:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \overset{def}{=} \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx$$

Определение 4.0.2. (продолжение определения)

1. $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim\limits_{b\to\infty} \int_2^b \frac{dx}{x^2} = \lim\limits_{b\to+\infty} (F(b) - F(2)) = \lim\limits_{b\to+\infty} (-\frac{1}{b} + \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$.

   Аналогично, пусть функция $f : (-\infty;a] \to \mathbb{R},\ f \in R[a;b],\ \forall b \in (-\infty;a]$.

   $$\lim_{b\to-\infty} \int_a^b f(x)dx,$$

   этот предел называется **несобственным интегралом** от функции $f(x)$ на луче $(\infty;a]$.

   Если этот предел существует и конечен, то соответственно несобственный интеграл - сходящийся. Обозначается:

   $$\int_{-\infty}^a f(x)dx \overset{def}{=} \lim_{b\to-\infty} \int_b^a f(x)dx.$$

   Аналогично:

   $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^a f(x)dx + \int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{c\to+\infty, b\to-\infty} \int_b^c f(x)dx,$$

где $c \to +\infty, b \to -\infty$ - независимые друг от друга ($\forall b, c\ f(x) \in R[b; c]$).
РИСУНОК

2. Далее, пусть $f : [a; b) \to \mathbb{R} :\ \forall c \in [a; b) f \in R[a; c]$. Положим:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c \to b} \int_a^c f(x)dx.$$

Эта величина называется **несобственным интегралом** от функции f на полуинтервале $[a; b)$.

Если предел существует, то несобственный интеграл называется **сходящимся**, иначе **расходящимся**.

Аналогично, пусть $f : (a; b] \to \mathbb{R}$, причем $\forall c \in (a; b]\ f \in R[c; b]$:

$$\int_a^b f(x)dx \overset{def}{=} \lim_{c \to a} \int_c^b f(x)dx \ -$$

несобственный интеграл от функции $f(x)$ на полуинтервале $(a; b]$.

Аналогично, пусть $f : (a; b) \to \mathbb{R}$, причем $\forall c, d \in (a; b)\ f \in R[c, d]$. Тогда:

$$\int_a^b f(x)dx \overset{def}{=} \lim_{c \to a, d \to b} \int_c^d f(x)dx,$$

(где $c \to a, d \to b$ - независимые друг от друга) - несобственный интеграл от $f(x)$ на $(a; b)$

3. Пусть $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ и $\exists c \in (a; b) :\ f$ - неограниченана в точке c.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{c-\epsilon} f(x)dx + \int_{c+\epsilon}^b f(x)dx =$$

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_a^{c-\epsilon} f(x)dx + \lim_{\epsilon} \int_{c+\epsilon}^b f(x)dx.$$

Если lim существует, то интеграл ялвяется сходящимся.

В дальнейшем будем рассматривать:

$$\int_a^\omega f(x)dx,$$

где $\omega = +\infty,\ -\infty,\ b$.

Теорема 4.0.1. Пусть $\forall b \in [a; \omega)\ f \in R[a; b]$.

1. Тогда $\int_a^\omega f(x)dx$ сходится $\iff$ $\forall b \in [a; \omega)\ \int_b^\omega f(x)dx$ сходится и

$$\int_a^\omega f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^\omega f(x)dx$$

РИСУНОК

2.
$$\lim_{b\to\omega}\int_b^\omega f(x)dx = 0$$

3. $\forall c \in \mathbb{R}$
$$\int_a^\omega cf(x)dx = c\int_a^\omega f(x)dx$$
(то есть если $c\int_a^\omega f(x)dx$ сходится, то сходится $\int_a^\omega c(x)dx$ и наоборот, и они равны)

4. Если $\int_a^\omega f(x)dx$ и $\int_a^\omega g(x)dx$ сходятся, то сходится и
$$\int_a^\omega (f(x)+g(x))dx = \int_a^\omega f(x)dx + \int_a^\omega g(x)dx$$

Доказательство. (теоремы)

1. Пусть $b \in [a;\omega)$. Выберем точку $c:\ b < c < \omega$. Тогда
$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx\ (*).$$
Если $\int_a^\omega f(x)dx$ сходится $\implies \exists \lim\limits_{d\to\omega}\int_a^d f(x)dx,\ d \in (a;\omega)$ (общее определение) в равенстве $(*)$ перейдем к пределу при $c \to \omega$, получим
$$\lim_{c\to\omega}\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \lim_{c\to\omega}\int_b^c f(x)dx,$$
где если $\exists \lim\limits_{c\to\omega}\int_a^c f(x)dx$, то $\exists \lim\limits_{c\to\omega}\int_b^c f(x)dx$.
Таким образом:
$$\int_a^\omega f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^\omega f(x)dx.$$
В обратную сторону аналогично.

2. Докажем из 1. Имеем:
$$\int_a^\omega f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^\omega f(x)dx;$$
$$\int_b^\omega f(x)dx = \int_a^\omega f(x)dx - \int_a^b f(x)dx\ (**)$$
При $b \to \omega$ в равенстве $(**)$ в правой части получаем:
$$\int_a^\omega f(x)dx - \int_a^\omega f(x)dx = 0.$$
$$\lim_{b\to\omega}\int_b^\omega f(x)dx = \int_a^\omega f(x)dx - \lim_{b\to\omega}\int_a^b f(x)dx = \int_a^\omega f(x)dx = 0$$

3. Следует из свойств предела.

4. Следует из свойств предела.

□

Теорема 4.0.2 (Критерий Коши)**.** Пусть $\forall b \in [a;\omega)$ $f \in R[a;b]$.

$\int_a^\omega f(x)dx$ сходится $\iff$ $\forall \epsilon > 0\ \exists B \in [a;\omega) :\ \forall b_1, b_2 \in (a;\omega)$ и $b_1, b_2 > B$ верно неравенство:

$$|\int_{b_1}^{b_2} f(x)dx| < \epsilon$$

РИСУНОК

Доказательство. Рассмотрим функцию $F(b) = \int_a^b f(x)dx$.

Имеем, что $\int_a^\omega f(x)dx$ сходится $\iff$ $\exists \lim\limits_{b\to\omega} \int_a^b f(x)dx$ $\iff$ $\forall \epsilon > 0 \exists B \in (a;\omega) :\ \forall b_1, b_2 :\ B < b_1, b_2 < \omega\ |F(b_1) - F(b_2)| < \epsilon$ (критерий Коши существования предела $F(b)$).

$$|F(b_1) - F(b_2)| = |\int_a^{b_1} f(x)dx - \int_a^{b_2} f(x)dx| =$$

$$| - (\int_{b_1}^{a} f(x)dx + \int_a^{b_2} f(x)dx)| = |\int_{b_1}^{b_2} f(x)dx| < \epsilon.$$

□

Теорема 4.0.3 (несобственная сходимость интеграла от неотрицательной функции)**.** Пусть $f \in R[a;b]$ для $\forall b \in (a;\omega)$ и $f(x) \leqslant 0\ \forall x \in [a;\omega)$.

$\int_a^\omega f(x)dx$ сходится $\iff \exists M > 0 :\ \forall b \in (a;\omega)$

$$\int_a^b f(x)dx < M.$$

РИСУНОК

Доказательство. Рассмотрим $F(b) = \int_a^b f(x)dx$. Так как $f(x) \leqslant 0\ \forall x \in [a;\omega) \implies F(b) \geqslant 0$ на $[a;\omega) \implies$ по теореме о пределе монотонной функции:

$$\exists \lim_{b\to\omega} F(b) \iff \exists M > 0 :\ \forall b \in [a;\omega)\ F(b) < M,$$

или

$$\int_a^b f(x)dx < M.$$

□

Теорема 4.0.4 (первый признак сравнения)**.** Если $\forall x \in [a;\omega)$ $f(x) \leqslant g(x)$ и $\forall b \in [a;\omega)$ $f, g \in R[a;b]$, $f(x) \geqslant 0$, $g(x) \geqslant 0$, тогда:

1. Если $\int_a^\omega g(x)dx$ - сходится $\implies \int_a^\omega f(x)dx$ - сходится.

2. Если $\int_a^\omega f(x)dx$ - расходится $\implies \int_a^\omega g(x)dx$ - расходится.

Доказательство. (теоремы)
Если $f(x) \leqslant g(x)\ \forall x \in [a;\omega) \implies$

$$\int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b g(x)dx,$$

$$\lim_{b\to\omega}\int_a^b f(x)dx \leqslant \lim_{b\to\omega}\int_a^b g(x)dx.$$

Далее, доказательство следует из теоремы о сходимости несобственного интеграла от неотрицательной функции. □

Теорема 4.0.5 (второй признак сравнения)**.** Если $\forall x \in [a;\omega)\ f(x) > 0,\ g(x) > 0$ и $\exists \lim\limits_{x\to\omega}\frac{f(x)}{g(x)} = A$ (либо 0, либо $+\infty$, либо $const \neq 0$), тогда:

1. Если $A = +\infty$, то из расходимости $\int_a^\omega g(x)dx$ следует расходимость $\int_a^\omega f(x)dx$, а из сходимости $\int_a^\omega f(x)dx$ следует сходимость $\int_a^\omega g(x)dx$.

2. Если $A = 0$, то из расходимости $\int_a^\omega f(x)dx$ следует расходимость $\int_a^\omega g(x)dx$, а из сходимости $\int_a^\omega g(x)dx$ следует сходимость $\int_a^\omega f(x)dx$.

3. Если $A = const \neq 0$, то интегралы $\int_a^\omega f(x)dx$ и $\int_a^\omega g(x)dx$ ведут себя одинаково.

Доказательство. Начнем с пункта номер 3.:
3. Пусть $0 < A < +\infty$. Тогда $\exists B \in (a;\omega):\ \forall x \in (B;\omega),\ \forall \epsilon > 0$

$$|\frac{f(x)}{g(x)} - A| < \epsilon \implies A - \epsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < A + \epsilon(*).$$

Более того, можно считать, что $A - \epsilon > 0$. В $(*)$ домножим обе части неравенства на $g(x) > 0$:

$$g(x)(A-\epsilon) < f(x) < g(x)(A+\epsilon).$$

Если $\int_a^\omega g(x)dx \implies \int_a^\omega g(x)(A+\epsilon)dx$ сходится $\implies$ по первому признаку сравнения, сходится $\int_a^\omega f(x)dx$.

Если $\int_a^\omega f(x)dx$ сходится $\implies$ по первому признаку сравнения сходится $\int_a^\omega g(x)(A-\epsilon)dx \implies \int_a^\omega g(x)dx$.

Аналогично, если $\int_a^\omega g(x)dx$ расходится, то $\int_a^\omega g(x)(A-\epsilon)dx$ - расходится $\implies$ по первому признаку сравнения расходится $\int_a^\omega f(x)dx$.

Если $\int_a^\omega f(x)dx$ расходится, то по первому признаку сравнения $\int_a^\omega g(x)(A+\epsilon)dx$ расходится $\implies \int_a^\omega g(x)dx$ расходится.

2. Если $A = 0$, то есть $\lim\limits_{x\to\omega}\frac{f(x)}{g(x)} = 0$, то при

$$f(x) = \alpha(x)g(x), \text{ где } \alpha(x) \to 0 \text{ при } x \to \omega,$$

$f(x) = \underset{x\to\omega}{o}(g(x)) \implies \exists B \in [a;\omega)$ такая, что $\forall x \in (B;\omega)$ $f(x) < \frac{1}{2}g(x) \implies$ по первому признаку сравнения, если $\int_a^\omega g(x)dx$ сходится $\implies$ $\int_a^\omega f(x)dx$ сходится, если $\int_a^\omega f(x)dx$ расходится $\implies$ $\int_a^\omega g(x)dx$ - расходится.

1. Если $A = +\infty$, то есть $\lim\limits_{x\to\omega}\frac{f(x)}{g(x)} = +\infty \implies \exists B \in [a;\omega)$ такая, что $\forall x \in (B;\omega)$ $f(x) > g(x) \implies$ по первому признаку сравнения, из сходимости $\int_a^\omega f(x)dx \implies$ сходимость $\int_a^\omega g(x)dx$ и из расходимости $\int_a^\omega g(x)dx \implies$ расходимость $\int_a^\omega f(x)dx$. □

Пример 10. Задача

1. Исследуем на сходимость $\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^4}$, где $a > 0$:

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b \frac{dx}{x^4} = \lim_{b\to+\infty}\left\{\begin{array}{ll} \ln x, & p=1 \\ \frac{x^{1-p}}{1-p}, & p\neq 1\end{array}\right|_a^b =$$

$$\lim_{b\to+\infty}\left\{\begin{array}{ll} \ln b - \ln a, & p=1 \\ \frac{b^{1-p}}{1-p} - \frac{a^{1-p}}{1-p}, & p\neq 1\end{array}\right. = \left\{\begin{array}{ll} +\infty, & p=1 \\ +\infty, & 1-p>0 \\ -\frac{a^{1-p}}{1-p}, & p>1\end{array}\right. \implies$$

$\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$ сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leqslant 1$.

2. Исследуем на сходимость при $a > 0$:

$$\int_0^a \frac{dx}{(a-x)^p} = \lim_{b\to a}\int_0^b \frac{dx}{(a-x)^p} = \lim_{b\to a} -\int_0^b \frac{d(a-x)}{(a-x)^p} =$$

$$\lim_{b\to a}\left\{\begin{array}{ll} -\ln|a-x|, & p=1 \\ \frac{1}{p-1}(a-x)^{1-p}, & p\neq 1\end{array}\right|_0^b =$$

$$\lim_{b\to a}\left\{\begin{array}{ll} -\ln|a-b| + \ln|a|, & p=1 \\ \frac{1}{p-1}(a-b)^{1-p} - \frac{1}{p-1}a^{1-p}, & p\neq 1\end{array}\right. = \left\{\begin{array}{ll} +\infty, & p=1 \\ \frac{a^{1-p}}{p-1}, & 1-p>0 \\ +\infty, & 1-p<0\end{array}\right. \implies$$

$\int_0^a \frac{dx}{(a-x)^p}$, ($a > 0$ сходится при $p < 1$, расходится при $p \geqslant 1$).

3. Теперь:

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^p} = \int_0^1 \frac{dx}{x^p} + \int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p} \text{ - расходящаяся для } \forall p.$$

4. Теперь:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\ln x} = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\ln x} + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\ln x}.$$

Рассмотрим $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ - сходится.

Рассмотрим $-\int_0^{\frac{1}{2}} -\frac{dx}{\ln x}:\ f(x) = -\frac{1}{\ln x},\ g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$,

$$\lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{\ln x}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to 0}(-\frac{\sqrt{x}}{\ln x}) = 0 -$$

по второму признаку сравнения, $-\int_0^{\frac{1}{2}} -\frac{dx}{\ln x}$ - сходится.

Рассмотрим $-\int_{\frac{1}{2}}^1 -\frac{dx}{\ln x}$.

Рассмотрим $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{1-x}$ - расходится.

$$f(x) = -\frac{1}{\ln x},\ g(x) = \frac{1}{1-x},$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{-\frac{1}{\ln x}}{\frac{1}{1-x}} = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\ln x} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{\frac{1}{x}} = 1 \implies$$

по второму признаку сравнения $\implies$ $-\int_{\frac{1}{2}}^1 -\frac{dx}{\ln x}$ - расходится $\implies$ $\int_0^1 \frac{dx}{\ln x}$ - расходится.

Определение 4.0.3. Пусть $\forall b \in [a;\omega)\ f \in R[a;b]$.
$\int_a^\omega f(x)dx$ называется **абсолютно сходящимся**, если сходится $\int_a^\omega |f(x)|dx$.

Теорема 4.0.6. Если $\int_a^\omega |f(x)|dx$ сходится, то $\int_a^\omega f(x)dx$ тоже сходится (или если интеграл абсолютно сходящийся, то он сходящийся).

При этом:

$$|\int_a^\omega f(x)dx| \leqslant \int_a^\omega |f(x)|dx$$

Доказательство. Пусть $\int_a^\omega |f(x)|dx$ - сходится. Пусть $\epsilon > 0$ задано.

Выберем $B \in [a;\omega):\ \forall b_1, b_2 \in (B,\omega):$

$$|\int_{b_1}^{b_2} |f(x)|dx| < \epsilon,$$

но

$$|\int_{b_1}^{b_2} f(x)dx| \leqslant \int_{b_1}^{b_2} |f(x)|dx = |\int_{b_1}^{b_2} |f(x)|dx| < \epsilon \implies$$

по критерию Коши, $\int_a^\omega f(x)dx$ - сходится.

Теперь $\forall b \in [a;\omega)\ |\int_a^b f(x)dx| \leqslant \int_a^b |f(x)|dx$.

Переходя к пределу при $b \to \omega$, получаем:

$$|\int_a^\omega f(x)dx| \leqslant \int_a^\omega |f(x)|dx.$$

□

Следствие (признак Вейерштрасса)**.** Если $\forall x \in [a;\omega)$ $|f(x)| \leqslant g(x)$ и $\int_a^\omega g(x)dx$ сходится, то $\int_a^\omega f(x)dx$ сходится.

Доказательство. Самостоятельно. □

Определение 4.0.4. Если $\int_a^\omega |f(x)|dx$ расходится, а $\int_a^\omega f(x)dx$ сходится, то $\int_a^\omega$ называется **условно сходящимся**.

Теорема 4.0.7 (признак Абеля)**.** Если:

1. $\int_a^\omega$ сходится,
2. $g(x)$ монотонна и ограничена на $[a;\omega)$,

то $\int_a^\omega f(x)g(x)dx$ - сходится.

Теорема 4.0.8 (признак Дирихле)**.** Если:

1. Функция $F(b) = \int_a^b f(x)dx$ ограничена на $[a;\omega)$, то есть $\exists M > 0 :\ \forall b \in [a;\omega)$
$$|\int_a^b f(x)dx| \leqslant M,$$
2. $g(x)$ - монотонна на $[a;\omega)$ и $g(x) \to 0$ при $x \to \omega$. Тогда $\int_a^\omega f(x)g(x)dx$ - сходится.

Доказательство. (будем использовать критерий Коши)

Пусть $\epsilon > 0$ задано. Рассмотрим
$$|\int_{b_1}^{b_2} f(x)g(x)dx|$$
$\overset{2nd\ th.\ about\ mid}{=}$ $|g(b_1)\int_{b_1}^{\xi} f(x)dx + g(b_2)\int_{\xi}^{b_2} f(x)dx| = |b_1 \leqslant \xi \leqslant b_2| \leqslant |g(b_1)| * |\int_{b_1}^{\xi} f(x)dx| + |g(b_2)| * |\int_{\xi}^{b_2} f(x)dx|$ $(*)$

1. Пусть выполнены условия признака Абеля. Пусть $L > 0 :\ \ \forall x \in [a;\omega)$ $|g(x)| \leqslant L$.

   Возьмем $B \in [a;\omega)\ :\ \ \forall b_1, b_2 \in (B;\omega)$ $|\int_{b_1}^{b_2} f(x)dx| \leqslant \frac{\epsilon}{2L}$ (так как $\int_a^\omega f(x)dx$ - сходится). Тогда $(*) < L\frac{\epsilon}{2L} + L\frac{\epsilon}{2L} = \epsilon \implies$ по критерию Коши: $\int_a^\omega f(x)g(x)dx$ - сходится.

2. Пусть выполнены условия признака Дирихле: $\exists M > 0 :\ \forall b \in [a;\omega)$ $|\int_a^{b_1} f(x)dx| \leqslant M$. Возьмем $B :\ \forall x \in [B;\omega)$ $|g(x)| < \frac{\epsilon}{2M}$ (в силу условия 2.). Тогда $(*) < M\frac{\epsilon}{2M} + \frac{\epsilon}{2M} = \epsilon \implies \int_a^\omega f(x)g(x)dx$ - сходится.

□

Теорема 4.0.9 (о замене переменной в несобственном интеграле)**.** Пусть $\forall b \in [a;\omega),\ f \in \mathbb{C}[a;b]$ (множество непрерывных функций), функция $x = \phi(t)$:

1. $\phi: [\alpha;\omega_1) \to [a;\omega)$,
2. $\phi(\alpha) = a$, при $t \to \omega_1$, $\phi(t) \to \omega$,
3. $\phi(t)$ монотонно возрастает на $[\alpha;\omega_1)$,
4. $\phi'(t)$ непрерывна на $[\alpha;\omega_1)$,

Тогда интегралы $\int_a^\omega f(x)dx$ и $\int_\alpha^{\omega_1} f(\phi(t))\phi'(t)dt$ ведут себя одинаково и равны между собой.

Доказательство. Самостоятельно. $\square$

Глава 5

Дифференциальное исчисление функций многих переменных

5.1 Линейные нормированные пространства

Определение 5.1.1. **Линейным пространством** называется четверка $(X, K, +, *)$, где X - множество, K - поле, $" + "$ - операция сложения на X $(" + " : \ X \times X \to X)$, $" * "$ - операция умножения элемента поля K на элемент множества X $(" * " : \ K \times X \to X)$.

При этом выполняются следующие аксиомы:

1. $< X, + >$ - абелева группа;
2. (a) $\forall \alpha, \beta \in K$ и $\forall x \in X \quad (\alpha\beta)x = \alpha(\beta X)$,
   (b) $\forall x, y \in X, \ \forall \alpha \in K \quad \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$,
   (c) $\forall \alpha, \beta \in K, \forall x \in X \quad (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$,
   (d) $\forall x \in X, \ 1 \in K \quad 1x = x$.

Определение 5.1.2. **Линейным нормированным пространством** называется пара $(X, ||*||)$, где X - линейное пространство над полем $\mathbb{R}$, а $||*||$ - функция из X в $\mathbb{R}$.

$|| * || : \ X \to \mathbb{R}$, причем выполнены следующие аксиомы для нее:

1. $||x|| = 0 \iff x = \overline{0}$ (читается "норма от x"),
2. $\forall \lambda \in \mathbb{R} \ ||\lambda x|| |\lambda| * ||x||$,
3. $\forall x, y \in X \ ||x + y|| \leqslant ||x|| + ||y||$ (неравенство треугольника).

Функция $|| * ||$ называется **нормой**.

Пример 11. ЛНП:

1. $X = \mathbb{R},\ \forall x \in X \quad ||x|| = |x|$ (норма = модулю по свойствам нормы),

2. $X = \mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}$ (n раз), $\forall x \in X\ ||x|| = (\sum_{k=1}^n a_k^2)^{\frac{1}{2}},\ x = (a_1, \ldots, a_n) \in X$. Покажем, что это норма:

   1., 2. - очевидно. Докажем, что $\forall x, y \in X\ ||x+y|| \leqslant ||x||x+||y||$, то есть докажем, что $(\sum_{k=1}^n (x_k + y_k)^2)^{\frac{1}{2}} \leqslant (\sum_{k=1}^n x_k^2)^{\frac{1}{2}} + (\sum_{k=1}^n y_k^2)^{\frac{1}{2}}$ ($\triangle$).
   Рассмотрим $\sum_{k=1}^n (x_k + y_k)^2 = \sum_{k=1}^n x_k^2 + 2\sum_{k=1}^n x_k y_k + \sum_{k=1}^n y_k^2 \leqslant |$ используем неравенство Назарова-Заблоцкого (Коши-Буньковского) $\sum_{k=1}^n x_k y_k \leqslant (\sum_{k=1}^n x_K^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_{k=1}^n y_k^2)^{\frac{1}{2}} | \leqslant \sum_{k=1}^n x_k^2 + 2(\sum_{k=1}^n x_k^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_{k=1}^n y_k^2)^{\frac{1}{2}} + \sum_{k=1}^n y_k^2 = [(\sum_{k=1}^n x_k^2)^{\frac{1}{2}} + (\sum_{k=1}^n y_k^2)^{\frac{1}{2}}]^2$.
   Имеем:
   $$\sum_{k=1}^n (x_k + y_k)^2 \leqslant [(\sum_{k=1}^n x_k^2)^{\frac{1}{2}} + (\sum_{k=1}^n y_k^2)^{\frac{1}{2}}]^2 \implies$$
   приходим к ($\triangle$) операцией взятия корня от обеих частей неравенства
   $$\implies (\sum_{k=1}^n (x_k + y_k)^2)^{\frac{1}{2}} \leqslant (\sum_{k=1}^n x_k^2)^{\frac{1}{2}} + (\sum_{k=1}^n y_k^2)^{\frac{1}{2}}.$$

3. $X = \mathbb{R}^n,\ \forall x = (x_1, \ldots, x_n) \in X \quad ||x|| = \max\limits_{k=\overline{1,n}} |x_k|$.

   Такое ЛНП обозначается $\mathbb{R}_\infty^\ltimes$.

4. $X = \mathbb{R}^n,\ \forall x = (x_1, \ldots, x_n) \in X \quad ||x|| = (\sum_{k=1}^n x_k^p)^{\frac{1}{p}},\ p > 1$.
   Упражнение: доказать, что введенная функция есть норма, используя неравенство Левановича (Гельдера):
   $$\sum_{k=1}^n x_k y_k \leqslant (\sum_{k=1}^n x_k^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{k=1}^n y_k^p)^{\frac{1}{p}}.$$

5. X - пространство непрерывных на $[a;b]$ функций, то есть $X = \mathbb{C}[a;b],\ \forall x \in X \quad ||x|| = \max\limits_{t \in [a;b]} |x(t)|$; 1,2,3 - почти очевидно.

6. $X = \mathbb{C}[a;b],\ \forall x \in X \quad ||x|| = \int_a^b |x(t)| dt$.
   Покажем, что введенная функция есть норма:
   (a) $||x|| = 0 \iff x = 0$;
   Пусть $\int_a^b |x(t)| dt = 0$. От противного. Допустим, что $\exists t_0 \in [a;b] : x(t_0) \neq 0$. Тогда $\exists t_0 \in [\alpha; \beta],\ [\alpha;\beta] \subset [a;b]$ и $\forall t \in [\alpha;\beta] \quad |x(t)| > 0$,
   $$\int_a^b x(t)| dt \geqslant \int_\alpha^\beta |x(t)| dt$$
   Противоречие $\implies \forall t \in [a;b]\ |x(t)| = 0$.