

Математический Анализ
2 семестр

Данил Заблоцкий

7 июня 2023 г.

Оглавление

1	Дифференциальное исчисление	3
1.1	Формула Тейлора	3
1.1.1	Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано	3
1.1.2	Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа и в форме Коши	6
1.2	Приложения дифференциального исчисления	6
1.2.1	Монотонность функции	6
1.2.2	Экстремумы	6
1.2.3	Выпуклость функции	6
1.3	Первообразная и неопределенный интеграл	6
1.3.1	Интегрирование рациональных дробей	8
1.3.2	Интегрирование рациональных дробей	8
1.3.3	Разложение рациональной дроби на простые	10
1.3.4	Метод неопределенных коэф-ов (следствия лемм)	11
1.3.5	Метод Остроградского	12
2	Интегральное исчисление	14
2.1	Базы. Предел функции по базе	15
2.2	Разбиение. Интеграл Римана (v.2)	17
2.3	Критерий интегрируемости	19
2.3.1	Суммы Дарбу	19
2.3.2	Классы интегрируемых функций	22
2.3.3	Свойства интегрируемых функций	23
2.3.4	Аддитивность интеграла Римана	24
2.3.5	Монотонность интеграла Римана	25
2.4	Интеграл Римана как функция верхнего предела интегрирования	27
2.5	Формула Ньютона-Лейбница	30
2.6	Интегрирование по частям в определенном интеграле и формула Тейлора	31
2.7	Замена переменной в определенном интеграле	32

3	Геометрические приложения интеграла Римана	34
3.1	Длина кривой	34
3.2	Длина кривой как предел	38
3.3	Площадь плоской фигуры	42
3.4	Классы квадрируемых областей	44
4	Несобственные интегралы	46
5	Дифференциальное исчисление функций многих переменных	55
5.1	Линейные нормированные пространства	55
5.1.1	Принцип сжимающих отображений	61
5.1.2	Эквивалентность норм в \mathbb{R}^n	64
5.2	Линейные отображения в конечномерном пространстве и их непрерывность	65
5.3	Частные производные	67
5.4	Дифференцируемость и арифметические операции	69

Глава 1

Дифференциальное исчисление

1.1 Формула Тейлора

1.1.1 Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано

Пусть $f : (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in (a; b)$. Нужно построить многочлен $P(x; x_0)$ вида:

$$P(x; x_0) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n$$

$f(x) - P(x; x_0) = r_n(x; x_0)$ - n -ый остаточный член в формуле Тейлора.

Определение 1.1.1. Остаточные члены в форме Пеано имеют вид:

$$r_n(x; x_0) = o_{x \rightarrow x_0}((x - x_0)^n)$$

Определение 1.1.2. Пусть $f : (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in (a; b)$, $f(x)$ имеет в точке x_0 производные до n -ого порядка включительно.

Многочленом Тейлора (полиномом Тейлора) функции $f(x)$ в точке x называется многочлен:

$$P(x; x_0) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Утверждение 1.1.1. Если $f : (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$ имеет в точке $x_0 \in (a; b)$ производные до n -го порядка включительно и $P(x; x_0)$ - ее многочлен Тейлора, то:

$$f(x_0) = P(x_0; x_0), \quad f'(x_0) = P'(x_0; x_0), \quad \dots, \quad f^{(n)}(x_0) = P^{(n)}(x_0; x_0)$$

Доказательство. $P(x; x_0) = f(x) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$, при $x = x_0$:
 $P(x_0; x_0) = f(x_0)$

$$P'(x; x_0) = +\frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}2(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}n(x - x_0)^{n-1},$$

при $x = x_0$: $P'(x_0; x_0) = \frac{f'(x_0)}{1!}$; $P''(x; x_0) = f''(x_0) + \frac{f'''(x_0)}{3!}6(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}n(n-1)(x - x_0)^{n-2}$; $P^{(n)}(x_0; x_0) = f^{(n)}(x_0)$. \square

Теорема 1.1.1. Пусть $f : (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in (a; b)$, f имеет в точке x_0 производные до n -ого порядка включительно, тогда существует единственный многочлен вида:

$$p(x; x_0) = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^n$$

такой, что:

$$f(x) - P(x; x_0) = o_{x \rightarrow x_0}((x - x_0)^n)$$

Доказательство. (теоремы)

1. Докажем единственность.

$$\text{Пусть } Q(x; x_0) = b_0 + b_1(x - x_0) + \dots + b_n(x - x_0)^n : f(x) - Q(x; x_0) = o_{x \rightarrow x_0}((x - x_0)^n), f(x) = P(x; x_0) + o_{x \rightarrow x_0}((x - x_0)^n).$$

$$\text{Рассмотрим разность этих выражений: } f(x) - f(x) = P(x; x_0) - Q(x; x_0) + o_{x \rightarrow x_0}((x - x_0)^n) = (a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)(x - x_0) + (a_2 - b_2)(x - x_0)^2 + \dots + (a_n - b_n)(x - x_0)^n + o_{x \rightarrow x_0}((x - x_0)^n) (*).$$

Переходя к пределу при $x \rightarrow x_0$, получим, что $0 = a_0 - b_0 \implies a_0 = b_0$. Разделим (*) на $x - x_0$: $0 = (a_1 - b_1) + (a_2 - b_2)(x - x_0) + \dots + (a_n - b_n)(x - x_0)^{n-1} + o_{x \rightarrow x_0}((x - x_0)^{n-1}) (**)$;

$$o_{x \rightarrow x_0}((x - x_0)^n) = \alpha(x)(x - x_0)^n, \alpha(x) \rightarrow 0 (x \rightarrow x_0)$$

Переходя к пределу при $x \rightarrow x_0$ в (**) получаем, что $a_1 - b_1 = 0 \implies a_1 = b_1$. Используя ММИ можно показать, что $a_i = b_i$, $i = 2, \dots, n \implies Q(x; x_0) = P(x; x_0)$.

2. Докажем существование.

Лемма 1.1.1. Если функция $\phi : (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in (a; b)$, такая, что $\phi(x_0) = \phi'(x_0) = \dots = \phi^{(n)}(x_0) = 0$ ($\phi(x)$ имеет производную до n -ого порядка включительно), причем все производные непрерывны в некоторой окрестности точки x_0 . Тогда:

$$\phi(x) = o_{x \rightarrow x_0}((x - x_0)^n), (x \rightarrow x_0)$$

Допустим, что лемма доказана. Тогда положим $\phi(x) = f(x) - P(x; x_0)$, тогда будет выполнено условие леммы (+ смотри утверждение в начале параграфа) $\implies f(x) - P(x; x_0) = o_{x \rightarrow x_0}((x - x_0)^n)$ при $x \rightarrow x_0$, где $P(x; x_0)$ - многочлен Тейлора функции f в точке x_0 . \square

Доказательство. (леммы)

По индукции.

Пусть $n = 1$, то есть ϕ - дифференцируема в окрестности точки x_0 и $\phi(x_0) = \phi'(x_0) = 0$. Тогда $\phi(x) = \phi(x) - \phi(x_0) = \phi'(\xi)(x - x_0)$, где $\xi \in (a; b)$ (по теореме Лагранжа).

Далее, $\phi'(\xi) \rightarrow \phi'(x_0)$ при $\xi \rightarrow x_0$ (используя непрерывность функции) $\Rightarrow \phi'(\xi)$ - бесконечно малая, поскольку $\phi'(x_0) = 0$.

То есть $\phi'(\xi) \rightarrow 0$ при $\xi \rightarrow x_0 \Rightarrow \phi(x) = \phi'(\xi)(x - x_0) = o_{\xi \rightarrow x_0}(x - x_0)$.

Допустим, лемма верна для $k = n - 1$. Положим $g(x) = \phi'(x)$. Тогда $g(x)$ имеет непрерывные производные до $(n - 1)$ -ого порядка включительно, при этом $g(x_0) = g'(x_0) = \dots = g^{(n)}(x_0) = 0 \Rightarrow$ по утверждению леммы:

$$g(x) = o_{x \rightarrow x_0}((x - x_0)^{n-1})$$

Далее, $\phi(x) - \phi(x_0) = \phi(x) = \phi'(\xi)(x - x_0) = g(\xi)(x - x_0) = o_{\xi \rightarrow x_0}((\xi - x_0)^{n-1})(x - x_0) = \alpha(\xi)(\xi - x_0)^{n-1}(x - x_0)$, $\alpha(\xi) \rightarrow 0$ при $\xi \rightarrow x_0$.

Отсюда $|\phi(x)| = |\alpha(\xi)| |\xi - x_0|^{n-1} |x - x_0| \leq |\alpha(\xi)| |x - x_0|^n$ ($\alpha(\xi) \rightarrow 0$ при $\xi \rightarrow x_0$) $\Rightarrow \phi(x) = o_{x \rightarrow x_0}((x - x_0)^n)$. \square

Примеры представления некоторых функций через многочлен Тейлора ($x_0 = 0$)

$$1. e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$$

$$2. \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o_{x \rightarrow 0}(x^{2n+1})$$

$$3. \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o_{x \rightarrow 0}(x^{2n})$$

$$4. \ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n!} + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$$

$$5. (1 + x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-(n-1))}{n!} x^n + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$$

1.1.2 Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа и в форме Коши

1.2 Приложения дифференциального исчисления

1.2.1 Монотонность функции

1.2.2 Экстремумы

1.2.3 Выпуклость функции

Геометрический смысл выпуклой функции

1.3 Первообразная и неопределенный интеграл

Определение 1.3.1 (Первообразная функция). Пусть X - промежуток, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Функция $F(x)$ называется **первообразной** $f(x)$, если производная $F'(x) = f(x)$, при этом $F(x)$ дифференцируема и непрерывна.

Пример 1. $f(x) = 2x \implies F(x) = x^2$. В самом деле, $F'(x) = f(x)$.

Утверждение 1.3.1. (О первообразной)

1. Если $F(x)$ - первообразная функции $f(x)$ на промежутке X , и $\Phi(x) = F(x) + C$, $c \in \mathbb{R}$, то $\Phi(x)$ - тоже первообразная.
2. Если $F(x)$ и $\Phi(x)$ - две первообразные для $f(x)$ на промежутке X , то $\exists C = const$, $c \in \mathbb{R}$ такая, что $\Phi(x) = F(x) + C$.

Доказательство. (Утверждения о первообразной)

1. $\Phi'(x) = (F(x) + C)' = F'(x) = f(x) \implies \Phi(x)$ - первообразная для $f(x)$.
2. Так как $F(x)$ и $\Phi(x)$ - первообразные для $f(x)$, то $F'(x) = f(x)$, $\Phi'(x) = f(x)$. Рассмотрим функцию $\phi = \Phi(x) - F(x)$, $\forall x \in X$: $\phi'(x) = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$. Рассмотрим $\forall x_1, x_2 \in X$, по теореме Лагранжа, $\exists \xi \in (x_1, x_2) : \phi(x_1) - \phi(x_2) = \phi'(\xi)(x_1 - x_2) = 0 \implies \phi(x_1) = \phi(x_2) \implies \phi(x) = const$ для $\forall x \in X$.

□

Определение 1.3.2 (Неопределенный интеграл). Совокупность всех первообразных для функции $f(x)$ на промежутке X называется **неопределенным интегралом** и обозначается:

$$\int f(x)dx$$

Таким образом, $\int f(x)dx = \{F(x) + C, \text{ где } F'(x) = f(x), C \in \mathbb{R}\}$, или:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Замечание. (Для неопределенного интеграла)

- $(\int f(x)dx)'_x = (F(x) + C)'_x = F'(x) = f(x)$;
- $d(\int f(x)dx) = d(F(x) + C) = (F(x) + C)'dx = F'(x)dx = f(x)dx$;
- $\int d(F(x)) = \int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x) + C, C \in \mathbb{R}$.

Определение 1.3.3 (интегрирование). Операция нахождения первообразной функции $f(x)$ называется ее **интегрированием**.

Утверждение 1.3.2. (Основные методы интегрирования)

Пусть $f : X \rightarrow \mathbb{R}, g : X \rightarrow \mathbb{R}, X$ - промежуток:

1. Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{R} = const$, тогда:

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx.$$
2. Формула интегрирования по частям:

$$udv = uv - \int u dv, u = u(x), v = v(x).$$
3. Интегрирование подстановкой:
 Пусть T - промежуток, $X = X(t)$ - дифференцируема на T .
 Тогда $\int f(X(t)) * X'(t)dt = F(X(t)) + C = \int f(x)dx + C$.

Доказательство. (Утверждения об основных методах интегрирования)

1. Возьмем производную по x от обеих частей равенства: $(\alpha f(x) + \beta g(x))'_x = \alpha f'(x) + \beta g'(x) = \alpha F'(x) + \beta G'(x) = \alpha (\int f(x)dx)'_x + \beta (\int g(x)dx)'_x$ - является производной для $\alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx$.
2. Рассмотрим $d(uv) = vdu + u dv$: $\int d(uv) = \int vdu + \int u dv$. Так как $d(uv) = uv$, то из того, что $\int d(uv) = \int vdu + \int u dv \implies \int u dv = uv - \int vdu$.
3. $f(X(t)) * X'(t)dt = \int f(X(t))dx(t) = \int f(x)dx = F(x) + C = F(X(t)) + C$; $(F(X(t)) + C)'_t = F'_t * X'_t = f(x) * X'(t) = (\int f(X(t)) * X'(t)dt)'_t$.

□

Пример 2. (Интегрирование функций)

1. $\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C$
2. $\int \ln x dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x, dv = dx, du = d(\ln x) = \frac{dx}{x} \implies \\ \implies \int dv = \int dx \implies v = x \end{array} \right| = x \ln x - \int x \frac{dx}{x} = x \ln x - x + C$

$$3. \int \sqrt{1-x^2} dx = \left| \begin{array}{l} x = \sin t, \quad dx = \\ = d(\sin t) = \cos t dt \end{array} \right| = \int \cos^2 t dt = \int \frac{1}{2}(1 + \cos 2t) dt = \\ \frac{1}{2} \int dt + \frac{1}{2} \int \cos 2t dt = \frac{t}{2} + \frac{1}{4} \int \cos 2t d(2t) = \frac{t}{2} + \frac{1}{4} \sin 2t + C = \frac{\arcsin x}{2} + \\ \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} + C$$

Пример 3. (Неинтегрируемые функции)

$$\int \frac{x}{\ln x} dx; \quad \int \frac{e^x}{x} dx; \quad \int e^{x^2} dx$$

1.3.1 Интегрирование рациональных дробей

Определение 1.3.4 (Рациональная дробь). Функция вида $\frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$, $Q(x)$ - многочлены, называется **рациональной дробью**, или рациональной функцией.

Если $\deg P(x) < \deg Q(x)$, то дробь называется **правильной**, иначе - **неправильной**.

Если дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ - неправильная, то ее можно представить в виде $\frac{P(x)}{Q(x)} = M(x) + \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$, где $\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$ - правильная дробь. Поэтому достаточно уметь интегрировать правильную дробь.

Определение 1.3.5 (Простые дроби). **Простыми дробями** будем называть дроби следующих четырех видов:

1. $\frac{A}{x-a}, \quad A, a \in \mathbb{R}$
2. $\frac{A}{(x-a)^k}, \quad A, a \in \mathbb{R}, \quad k > 1$
3. $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}, \quad A, B, p, q \in \mathbb{R}, \quad p^2 - 4q < 0$
4. $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}, \quad A, B, p, q \in \mathbb{R}, \quad k > 1, \quad p^2 - 4q < 0$

1.3.2 Интегрирование рациональных дробей

1. $\int \frac{A}{x-a} dx = A \int \frac{d(x-a)}{x-a} = \left| \begin{array}{l} \int \frac{dt}{t} \\ d(x-a) = dx \end{array} \right| = A \ln |x-a| + C$
2. $\int \frac{A}{(x-a)^k} dx = A \int (x-a)^{-k} dx = A \int (x-a)^{-k} d(x-a) = \left| \begin{array}{l} \int t^n dt = \\ = \frac{t^{n+1}}{n+1} \end{array} \right| = \\ A \frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C = \frac{A}{(x-a)^{k-1}(1-k)} + C$

$$3. \int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx = \left| \begin{array}{l} x^2+px+q = (x^2+2\frac{p}{2}x+\frac{p^2}{4}) - \frac{p^2}{4} + q = \\ = (x+\frac{p}{2})^2 - \frac{p^2-4q}{4}, \quad (-\frac{p^2-4q}{4} = C > 0) \end{array} \right| = \int \frac{Ax+B}{(x+\frac{p}{2})^2+C} dx =$$

$$A \int \frac{x dx}{(x+\frac{p}{2})^2+C} + B \int \frac{dx}{(x+\frac{p}{2})^2+C} = \left| \begin{array}{l} d((x+\frac{p}{2})^2+C) = \\ = 2(x+\frac{p}{2}) dx \end{array} \right| = \dots$$

$$A \int \frac{x dx}{(x+\frac{p}{2})^2+C} = \frac{A}{2} \int \frac{(2(x+\frac{p}{2})-p) dx}{(x+\frac{p}{2})^2+C} = \frac{A}{2} \int \frac{2(x+\frac{p}{2}) dx}{(x+\frac{p}{2})^2+C} -$$

$$\frac{Ap}{2} \int \frac{dx}{(x+\frac{p}{2})^2+C} = \left| \int \frac{dx}{(x+\frac{p}{2})^2+C} = I \right| =$$

$$\frac{A}{2} \int \frac{d((x+\frac{p}{2})^2+C)}{(x+\frac{p}{2})^2+C} - \frac{Ap}{2} I = \frac{A}{2} \ln |(x+\frac{p}{2})^2+C| - \frac{Ap}{2} I;$$

$$I = \frac{dx}{(x+\frac{p}{2})^2+C} = \frac{1}{C} \int \frac{\sqrt{C} d(\frac{x}{\sqrt{C}} + \frac{p}{2\sqrt{C}})}{(\frac{x}{\sqrt{C}} + \frac{p}{2\sqrt{C}})^2+1} =$$

$$\left| \int \frac{dt}{t^2+1} = \arctan t + C \right| = \frac{1}{\sqrt{C}} \arctan(\frac{x+2p}{2\sqrt{C}}) + C_1;$$

$$\frac{1}{C}(x+\frac{p}{2})^2 = (\frac{1}{\sqrt{C}})^2(x+\frac{p}{2})^2 = (\frac{1}{\sqrt{C}}(x+\frac{p}{2}))^2 =$$

$$(\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{C}+\frac{p}{2\sqrt{C}}})^2;$$

$$\dots = \frac{A}{2} \ln |(x+\frac{p}{2})^2 - \frac{p^2-4q}{4}| + (B - \frac{Ap}{2}) \frac{1}{\sqrt{C}} \arctan(\frac{x+2p}{2\sqrt{C}}) + C_1$$

$$4. \int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k} dx = \left| \begin{array}{l} d(x^2+px+q) = \\ = 2x+p \end{array} \right| = \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p)+B-\frac{Ap}{2}}{(x^2+px+q)^k} dx = \frac{A}{2} \int \frac{d(x^2+px+q)}{(x^2+px+q)^k} +$$

$$(B-\frac{Ap}{2}) \int \frac{dx}{((x+\frac{p}{2})^2+(\frac{-p^2+4q}{4}))^k} = \frac{A}{2(1-k)} \frac{1}{(x^2+px+q)^{k-1}} + \frac{(B-\frac{Ap}{2})}{(-\frac{p^2+4q}{4})^k} \int \frac{dx}{((\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{-\frac{p^2+4q}{4}}})^2+1)^k} =$$

$$\frac{A}{2(1-k)} \frac{1}{(x^2+px+q)^{k-1}} + \frac{(B-\frac{Ap}{2}) \sqrt{-\frac{p^2+4q}{4}}}{(-\frac{p^2+4q}{4})^k} \int \frac{d(\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{-\frac{p^2+4q}{4}}})}{\left(\left(\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{-\frac{p^2+4q}{4}}}\right)^2+1\right)^k}$$

Таким образом, чтобы вычислить интеграл 4., нужно вычислить инте-

$$\text{грал } \int \frac{dt}{(t^2+1)^k} = \left| \begin{array}{l} u = \frac{1}{(t^2+1)^k}; \quad du = d((t^2+1)^k) = -k(t^2+1)^{-k-1} 2t dt \\ dv = dt \implies v = t \end{array} \right| =$$

$$\frac{t}{(t^2+1)^k} - \int \frac{-2kt^2}{(t^2+1)^{k+1}} dt = \frac{t}{(t^2+1)^k} + 2k \left(\int \frac{t^2+1}{(t^2+1)^{k+1}} dt - \int \frac{dt}{(t^2+1)^{k+1}} \right);$$

$$\int \frac{dt}{(t^2+1)^k} = \frac{t}{(t^2+1)^k} + 2k \int \frac{dt}{(t^2+1)^k} - 2k \int \frac{dt}{(t^2+1)^{k+1}} \left| \begin{array}{l} \frac{dt}{(t^2+1)^k} = I_k \\ \frac{dt}{(t^2+1)^{k+1}} = I_{k+1} \end{array} \right|;$$

$$2kI_{k+1} = \frac{t}{(t^2+1)^k} + (2k-1)I_k; \quad I_{k+1} = \frac{t}{2k(t^2+1)^k} + \frac{2k-1}{2k} I_k, \quad k = 1, \dots$$

1.3.3 Разложение рациональной дроби на простые

Лемма 1.3.1. Пусть $\frac{P(x)}{Q(x)}$ - правильная рациональная дробь (несократимая). Причем $Q(x) = (x-a)^k Q_1(x)$, где $Q_1(x)$ не делится на $(x-a)$. Тогда \exists многочлен $P_1(x)$ из $\exists A \in \mathbb{R} : \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{P_1(x)}{(x-a)^{k-1} Q_1(x)}$. При этом дробь (рациональная) $\frac{P_1(x)}{(x-a)^{k-1} Q_1(x)}$ - правильная.

Доказательство. Рассмотрим $\frac{A}{(x-a)^k} + \frac{P_1(x)}{(x-a)^{k-1} Q_1(x)} = \frac{Q_1(x)A + (x-a)P_1(x)}{Q(x)}$. Нужно доказать, что $\frac{Q_1(x)A + (x-a)P_1(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{Q(x)}$.

Отсюда следует, что для выполнения леммы, многочлен $P(x)$ должен раскладываться: $P(x) = Q_1(x) + (x-a)P_1(x) \implies P_1(x) = \frac{P(x) - AQ_1(x)}{x-a}$. Чтобы существовал многочлен $P_1(x)$, нужно, чтобы $P(x) - AQ_1(x)$ делилась на $x-a$. Для этого точка a должна быть корнем $P(x) - AQ_1(x)$, то есть чтобы $P(a) - AQ_1(a) = 0 \implies A = \frac{P(a)}{Q_1(a)}$; $Q_1(a) \neq 0$ по условию. Таким образом, при $A = \frac{P(a)}{Q_1(a)}$, функция $P_1(x)$ будет являться многочленом $P_1(x) = \frac{P(x) - \frac{P(a)}{Q_1(a)} Q_1(x)}{x-a}$.

Покажем, что дробь $\frac{P_1(x)}{(x-a)^{k-1} Q_1(x)}$ - правильная, то есть $\deg P_1(x) < \deg[(x-a)^{k-1} Q_1(x)]$. Имеем, $P_1(x) = \frac{P(x) - AQ_1(x)}{x-a}$; $\deg P_1(x) \leq \max(\deg P(x), \deg Q_1(x)) - 1$. Тогда $\deg P_1(x) \leq \deg P(x) - 1 < \deg Q(x) - 1 = \deg[(x-a)^{k-1} Q_1(x)]$.

Если $\deg Q_1(x) \geq \deg P(x) \implies \deg P_1(x) \leq \deg Q_1(x) - 1 < \deg Q(x) - 1 = \deg[(x-a)^{k-1} Q_1(x)]$. Дробь $\frac{P_1(x)}{(x-a)^{k-1} Q_1(x)}$ - правильная. \square

Лемма 1.3.2. Пусть $\frac{P(x)}{Q(x)}$ - правильная дробь. При этом $Q(x) = (x^2 + px + q)^k Q_1(x)$, здесь $p^2 - 4q < 0$. Тогда $\exists M, N \in \mathbb{R}$ и \exists многочлен $P_1(x)$: $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k} + \frac{P_1(x)}{(x^2+px+q)^{k-1} Q_1(x)}$. При этом $Q_1(x)$ не делится на $x^2 + px + q$. Дробь $\frac{P_1(x)}{(x^2+px+q)^{k-1} Q_1(x)}$ - правильная.

Доказательство. Если разложение $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k} + \frac{P_1(x)}{(x^2+px+q)^{k-1} Q_1(x)}$ верно, то: $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{(Mx+N)Q_1(x) + P_1(x)(x^2+px+q)}{Q(x)}$, следовательно $P(x)$ должен выражаться как: $P(x) = (Mx+N)Q_1(x) + P_1(x)(x^2+px+q) \implies P_1(x) = \frac{P(x) - (Mx+N)Q_1(x)}{x^2+px+q}$.

Так как нужно, чтобы $P_1(x)$ был многочленом, то $P(x) - (Mx+N)Q_1(x)$ должно делиться на $x^2 + px + q$.

Рассмотрим остаток от деления $P(x)$ на $x^2 + px + q$ в форме $\alpha x + \beta$ и остаток от деления $Q_1(x)$ на $x^2 + px + q$ в форме $\gamma x + \delta$.

Таким образом, $P(x) = (x^2 + px + q)P_2(x) + (\alpha x + \beta)$; $Q_1(x) = (x^2 + px + q)Q_2(x) + (\gamma x + \delta)$.

Отсюда достаточно показать, что на $x^2 + px + q$ делится многочлен $\alpha x + \beta - (Mx + N)(\gamma x + \delta) = -M\gamma x^2 + x(-N\gamma - M\delta + \alpha) + (\beta - N\delta)$.

Поделим полученный выше многочлен на $x^2 + px + q$:

$$\frac{-M\gamma x^2 + x(-N\gamma - M\delta + \alpha) + (\beta - N\delta)}{x^2 + px + q} = -M\gamma + (\alpha - N\gamma - M\delta + M\gamma p)x + (\beta - N\delta + M\gamma q).$$

Для целого деления необходимо, чтобы:

$$\begin{cases} \alpha - N\gamma - M\delta + M\gamma p = 0 \\ \beta - N\delta + M\gamma q = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} -(\delta - \gamma p)M - \gamma N = -\alpha \\ \gamma q M - \delta N = -\beta \end{cases}$$

где M, N - неизвестные;

$$\begin{cases} \alpha - N\gamma - M\delta + M\gamma p = 0 \\ \beta - N\delta + M\gamma q = 0 \end{cases} ; \quad \begin{vmatrix} \delta - \gamma p & \gamma \\ \gamma q & -\delta \end{vmatrix} = -\delta^2 + \gamma p \delta - \gamma^2 q.$$

Заметим, что α и β , а так же γ и δ одновременно в 0 не обращаются.
 $p^2 - 4q < 0 \implies q \neq 0, \quad -(\delta^2 + \gamma^2 q) + \gamma p \delta:$

1. $\gamma = 0, \delta = 0$ - невозможно;
2. $\gamma = 0, \delta \neq 0 \implies -\delta^2 \neq 0$;
3. $\gamma \neq 0, \delta = 0 \implies -\gamma^2 q \neq 0$;
4. $\gamma \neq 0, \delta \neq 0$.

Тогда, если $-(\delta^2 + \gamma^2 q) + \gamma p \delta = 0 \implies \gamma p \delta = \delta^2 + \gamma^2 q$;
 $p^2 - 4q < 0, p^2 < 4q \implies 0 \leq \frac{p^2}{4} < q$

$\gamma \neq 0$: если $(\frac{\delta}{\gamma})^2 + (-\frac{\delta}{\gamma})p + q = 0$, то $x = \frac{\delta}{\gamma}$ - корень многочлена $x^2 + px + q \implies$ противоречие с тем, что $x^2 + px + q$ не имеет вещественных корней
 $\implies \Delta \neq 0 \implies \exists M, N$ и \exists многочлен $P_1(x)$. \square

1.3.4 Метод неопределенных коэф-ов (следствия лемм)

Если $\frac{P(x)}{Q(x)}$ - правильная дробь и $Q(x) = (x - a_1)^{k_1} * \dots * (x - a_s)^{k_s} * (x^2 + p_1x + q_1)^{m_1} * \dots * (x^2 + p_rx + q_r)^{m_r}$, то верно следующее разложение:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=0}^{k_1-1} \frac{A_i}{(x-a_1)^{k_1-i}} + \dots + \sum_{i=0}^{k_s-1} \frac{A_i^s}{(x-a_s)^{k_s-i}} + \sum_{i=0}^{m_1-1} \frac{M_i x + N_i}{(x^2 + p_1x + q_1)^{m_1-i}} + \dots + \sum_{i=0}^{m_r-1} \frac{M_i^r x + N_i^r}{(x^2 + p_rx + q_r)^{m_r-i}},$$

где $A_i, \dots, A_i^s, M_i, N_i, \dots, M_i^r, N_i^r \in \mathbb{R}$.

Пример 4. $Q(x) = (x-1)^3(x+2)^2(x^2+x+1)^3$

$$\frac{x^5-x^3+1}{Q(x)} = \frac{A_0^1}{(x-3)^3} + \frac{A_1^1}{(x-3)^2} + \frac{A_2^1}{(x-3)} + \frac{A_0^2}{(x+2)^2} + \frac{A_1^2}{(x+2)} + \frac{M_0x+N_0}{(x^2+x+1)^3} + \frac{M_1x+N_1}{(x^2+x+1)^2} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+x+1)}$$

Приведем в $\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=0}^{k_1-1} \frac{A_i}{(x-a_i)^{k_1-i}} + \dots$ правую часть к общему знаменателю и получим: $\frac{P(x)}{Q(x)} \equiv \frac{R(x)}{Q(x)}$; $\deg Q(x) = k_1 + \dots + k_s + 2m_1 + \dots + 2m_r = n$;

$$l = \deg R(x) = \deg P(x) \leq \deg Q(x) - 1.$$

Количество неизвестных коэф. у множества $R(x)$ равно n штук, приравняв коэф. при соответствующих степенях x (в том числе при x^0) получим n уравнений с n неизвестными (старшая степень x множества $R(x)$ равна $n-1$).

1.3.5 Метод Остроградского

Теорема 1.3.1. Пусть $\frac{P(x)}{Q(x)}$ - правильная несократимая дробь.

Тогда $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} dx + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} dx$. Дробь $\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$ и $\frac{P_2(x)}{Q_2(x)}$ - правильные. $Q(x) = Q_1(x)Q_2(x)$ и многочлен $Q_2(x)$ представляет собой произведение всех линейных и квадратичных множителей многочлена $Q(x)$, взятых в первой степени.

Пример 5. $\int \frac{x^2+2x+5}{(x-2)(x^2+1)^2} dx = \frac{P_1(x)}{x^2+1} + \int \frac{P_2(x)}{(x-2)(x^2+1)} dx = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \int \frac{Cx^2+Dx+E}{(x-2)(x^2+1)} dx$

Доказательство. Рассмотрим $\int \frac{A}{(x-a)^k} dx = \frac{A}{1-k} \frac{1}{(x-a)^{k-1}}$;

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k} dx = \frac{A}{(x^2+px+q)^{k-1}} + B \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^k} = \frac{A}{(x^2+px+q)^{k-1}} + \frac{C}{(x^2+px+q)^{k-1}} + D \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^{k-1}} = \frac{A}{(x^2+px+q)^{k-1}} + \dots + \frac{V}{(x^2+px+q)^2} + W \int \frac{dx}{x^2+px+q}.$$

Представим $Q(x)$ в виде $Q(x) = (x-a_1)^{k_1} * \dots * (x-a_s)^{k_s} * (x^2+p_1x+q_1)^{m_1} * \dots * (x^2+p_rx+q_r)^{m_r}$, тогда:

$$Q_2(x) = (x-a_1) * \dots * (x-a_s) * (x^2+p_1x+q_1) * \dots * (x^2+p_rx+q_r);$$

$$Q_1(x) = (x-a_1)^{k_1-1} * \dots * (x-a_s)^{k_s-1} * (x^2+p_1x+q_1)^{m_1-1} * \dots * (x^2+p_rx+q_r)^{m_r-1};$$

Из метода неопределенных коэффициентов и того, что $\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k} dx = \frac{A}{(x^2+px+q)^{k-1}} + \dots + \frac{V}{(x^2+px+q)^2} + W \int \frac{dx}{x^2+px+q} \implies \int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} dx$.

Как найти $P_1(x)$ и $Q_1(x)$?

Продифференцируем $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} dx$:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P_1'(x)Q_1(x) - P_1(x)Q_1'(x)}{Q_1^2} + \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}. \text{ Рассмотрим: } \frac{P_1'(x)Q_1(x) - P_1(x)Q_1'(x)}{Q_1^2} =$$

$$\frac{P_1'(x) - P_1(x)\frac{Q_1'(x)}{Q_1(x)}}{Q_1(x)} = \frac{P_1'(x)Q_1(x) - P_1(x)Q_1'(x)}{Q_1(x)Q_2(x)}.$$

Пусть $H(x) = \frac{Q_1'(x)Q_2(x)}{Q_1(x)}$ - многочлен (нужно показать).

Пусть $Q_1(x)$ имеет среди своих множителей многочлен вида $(x-a)^n$, тогда $Q_1'(x)$ будет иметь в своем составе $(x-a)^{n-1}$, а $Q_2(x)$ только содержит в себе выражение $(x-a) \implies H(x)$ - многочлен.

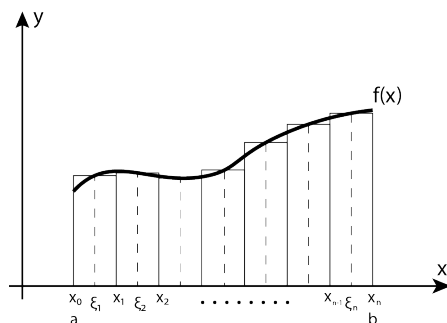
Коэффициенты многочленов $P_1(x)$ и $P_2(x)$ можно найти с помощью метода неопределенных коэффициентов из выражения $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k} + \frac{P_1(x)}{(x^2+px+q)^{k-1}Q_1(x)}$. \square

Глава 2

Интегральное исчисление

Интеграл Римана

Определение 2.0.1 (интеграл Римана). Пусть $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$. Разобьем отрезок $[a; b]$ на n частей точками $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$. В каждом таком кусочке выберем точку $\xi_i \in [x_{i-1}; x_i]$, $i = 1, \dots, n$.



$\Delta i = [x_{i-1}, x_i]$, $\Delta x = x_i - x_{i-1}$ - длина отрезка Δi .

Составим сумму $S_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$, где $f(\xi_i)$ - высота i -го прямоугольника и Δx_i - ширина i -го прямоугольника.

S_n - площадь ступенчатой фигуры, составленной из прямоугольников под графиком функции $f(x)$.

Говорят, что функция f интегрируема на $[a; b]$, если существует предел интегральных сумм S_n , то есть $\exists \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} S_n$, причем этот предел не зависит ни от способа разбиения отрезка $[a; b]$, ни от способа выбора точек ξ_i .

Этот предел называется **интегралом Римана** функции f на $[a; b]$. Класс интегрируемых функций на отрезке $[a; b]$ будем обозначать $R([a; b])$.

2.1 Базы. Предел функции по базе

Определение 2.1.1 (база множества). Пусть X - произвольное множество.

Система β подмножеств множества X называется **базой** на X , если:

1. $\forall \beta \in \beta \quad \beta \neq \emptyset$
2. $\forall \beta_1, \beta_2 \in \beta \quad \exists \beta_3 \in \beta : \quad \beta_3 \subset \beta_1 \cap \beta_2$

Пример 6 (баз множества). 1. $\beta = \{X\}$ - база

2. $X = \mathbb{R}, \quad \beta = \{\beta_n = (-\frac{1}{n}; \frac{1}{n}), \quad n \in \mathbb{N}\}$
3. $X = \mathbb{R}, \quad \beta = \{\beta_\epsilon = \{x : 0 < |x| < \epsilon\}, \epsilon > 0\}$ (выколотые окрестности нуля)

Определение 2.1.2 (предел по базе). Пусть $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, β - база на X

Число $A \in \mathbb{R}$ называется **пределом** функции f **по базе** β , если $\forall \epsilon > 0 \exists$ элемент базы $\beta \in \beta : \quad |f(x) - A| < \epsilon$.

$$\lim_{\beta} f(x)$$

Определение 2.1.3 (предел по базе (МП)). Пусть (Y, d) - МП, $f : X \rightarrow Y$, β - база на X .

$y \in Y$ называется **пределом** функции $f(x)$ **по базе** β , если $\forall \epsilon > 0 \exists \beta \in \beta \quad \forall x \in \beta : \quad d(f(x), y) < \epsilon$, или, что то же самое, $\forall V_Y(y) \exists \beta \in \beta \quad f(\beta) \subset V_Y(y)$, где V_Y - окрестность метрического пространства Y .

Теорема 2.1.1 (основные свойства предела по базе). Пусть $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, β - база на X :

1. Если $\exists \lim_{\beta} f(x)$, то $\exists \beta \in \beta : f$ ограничена на β
2. Если $\lim_{\beta} f(x) = A$ и $\lim_{\beta} f(x) = B$, то $A = B$

Теорема 2.1.2 (связь предела по базе с арифметическими операциями). Пусть $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, $g : X \rightarrow \mathbb{R}$, β - база на X , $\lim_{\beta} f(x) = A$, $\lim_{\beta} g(x) = B$:

1. $\exists \lim_{\beta} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B$
2. $\exists \lim_{\beta} (f(x)g(x)) = AB$
3. $\exists \lim_{\beta} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{A}{B}$, если $g(x) \neq 0$, $\beta \neq 0$

Теорема 2.1.3 (связь предела функции по базе с неравенствами). Пусть $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, $g : X \rightarrow \mathbb{R}$, β - база на X :

1. Если $\exists \beta \in \beta : \forall x \in \beta f(x) \leq g(x)$, то $\lim_{\beta} f(x) \leq \lim_{\beta} g(x)$
2. Если $\lim_{\beta} f(x) < \lim_{\beta} g(x)$, то $\exists \beta \in \beta \forall x \in \beta f(x) < g(x)$

Если $\lim_{\beta} f(x) \geq \lim_{\beta} g(x)$, то $\exists \beta \in \beta \forall x \in \beta f(x) \geq g(x)$

3. Если $h : X \rightarrow \mathbb{R}$ и $\exists \beta \in \beta : \forall x \in \beta f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ **И** $A = \lim_{\beta} f(x) = \lim_{\beta} g(x)$, то $\lim_{\beta} h(x) = A$

Теорема 2.1.4 (критерий Коши существования предела по базе). Существуют две формулировки:

1. Пусть $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, β - база на X .
Функция $f(x)$ имеет предел по базе $\beta \iff \forall \epsilon > 0 \exists \beta \in \beta : \forall x_1, x_2 \in \beta |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$
2. Пусть (Y, d) - МП (полное), $f : X \rightarrow Y$, β - база на X .
Функция $f(x)$ имеет предел по базе $\beta \iff \forall \epsilon > 0 \exists \beta \in \beta : \forall x_1, x_2 \in \beta d(f(x_1), f(x_2)) < \epsilon$

Доказательство. (критерия Коши \exists предела по базе)

" \rightarrow " Пусть $\exists \lim_{\beta} f(x) = A$. Покажем, что $\forall \epsilon > 0 \exists \beta \in \beta : \forall x_1, x_2 \in \beta |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$. Рассмотрим $|f(x_1) - f(x_2)| = |f(x_1 - A) + (A - f(x_2))| \leq |f(x_1) - A| + |f(x_2) - A| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$.

" \leftarrow " Пусть $\forall \epsilon > 0 \exists \beta \in \beta : \forall x_1, x_2 \in \beta |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$. Покажем, что $\exists \lim_{\beta} f(x)$. Возьмем $\beta_1 \in \beta : \forall x_1, x_2 \in \beta_1 |f(x_1) - f(x_2)| < 1$. Возьмем $\beta'_1 \in \beta : \forall x_1, x_2 \in \beta'_1 |f(x_1) - f(x_2)| < \frac{1}{2}$. Пусть $\beta_2 \subset \beta_1 \cap \beta'_1$ и так далее.

Таким образом построим систему вложенных множеств: $\beta_1 \supset \beta_2 \supset \dots \supset \beta_n \supset \dots$, при этом $\forall x_1, x_2 \in \beta_n \quad |f(x_1) - f(x_2)| < \frac{1}{2^{n-1}}$. Воспользуемся полнотой пространства, то есть в нем $\exists \lim f(x)$, если $f(x)$ - фундаментальная.

$\forall n \in \mathbb{N}$ рассмотрим $x_n \in \beta_n$. Тогда, если $n < m$ ($m \in \mathbb{N}$), то для $x_n \in \beta_n$ и $x_m \in \beta_n \quad |f(x_n) - f(x_m)| < \frac{1}{2^{n-1}}$.

Таким образом последовательность $f(x_n)$ - фундаментальная $\implies \exists \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$. Покажем, что $A = \lim_{\beta} f(x)$. Пусть $\epsilon > 0$ задано. Выберем $n \in \mathbb{N} : \frac{1}{2^{n-1}} < \frac{\epsilon}{2}$. Возьмем $m > n : |f(x_m) - A| < \frac{\epsilon}{2}$. Возьмем $\beta = \beta_n$. Тогда $\forall x \in \beta \quad |f(x) - A| = |f(x) - f(m) + f(x_m) - A| \leq |f(x) - f(x_m)| + |f(x_m) - A| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$.

Следовательно, $\lim_{\beta} f(x) = A$. □

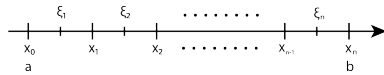
2.2 Разбиение. Интеграл Римана (v.2)

Определение 2.2.1 (разбиение). Пусть дан отрезок $[a; b]$. **Разбиением** P отрезка $[a; b]$ называется набор точек $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$. То есть $P = \{x_0, \dots, x_n\}$. Отрезки $[x_{i-1}; x_i] = \Delta_i$. $x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$ - длина i -го отрезка разбиения $\lambda(P) = \max_{i=0, n} \{\Delta x_i\}$. Величины $\Delta_i, \Delta x_i, \lambda(P)$ - параметры ограничения.

Определение 2.2.2 (разбиение с отмеченными точками). **Разбиением с отмеченными точками** называется пара наборов

$$P(\xi) = \{x_0, \dots, x_n\}, \{\xi_0, \dots, \xi_n\},$$

где $a = x_0 < \dots < x_n = b$, $\xi_i \in [x_{i-1}; x_i]$.



Пусть $\mathfrak{R}_{\xi} = \{(P, \xi)\}$ - семейство всевозможных разбиений с отмеченными точками отрезка $[a, b]$.

Рассмотрим $\beta_{\delta} = \{(P, \xi) : \lambda(P) < \delta\}$, $\beta_{\delta} \subset P_{\xi}$:

Утверждение 2.2.1. Множество $\beta = \{\beta_{\delta} : \delta > 0\}$ является базой на \mathfrak{R}_{ξ} .

Доказательство. (утверждения 2.3.1.).

1. $\forall \delta > 0 \quad \beta_{\delta}$ - непусто.

В самом деле, пусть отрезок $[a; b]$ поделен на n равных частей, причем n выбирается из соображений, чтобы $\Delta x_i = \Delta x \quad \forall i = \overline{1, n} \quad (1, \dots, n)$, $\Delta x < \delta$.

Пусть $\xi_i \in [x_{i-1}; x_i]$ - середины отрезков $[x_{i-1}; x_i]$.

2. Покажем, что $\forall \beta_{\delta_1}, \beta_{\delta_2} \in \beta \exists \beta_{\delta_3} \subset \beta_{\delta_1} \cap \beta_{\delta_2}$.

Пусть заданы $\delta_1 > 0, \delta_2 > 0$. Покажем, что $\exists \beta_3 > 0$:
 $\beta_{\delta_3} \subset \beta_{\delta_1} \cap \beta_{\delta_2}$. Если $\delta_1 < \delta_2$, то $\delta_3 = \delta_1$ или $\delta_3 = \frac{\delta_1}{2}$.

□

Определение 2.2.3 (!). Пусть $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$, (P, ξ) - разбиение отрезка $[a; b]$ с отмеченными точками. Составим сумму:

$$\sigma(f, (P, \xi)) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k$$

Можно смотреть на σ для фиксированной функции $f(x)$ как на функцию, сопоставляющую разбиению $(P, \xi) \in \mathfrak{R}_\xi$ сумме $\sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k$, то есть $\sigma_f : \mathfrak{R}_\xi \rightarrow \mathbb{R}$ (то есть (P, ξ) - аргумент функции σ).

Говорят, что функция $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ интегрируема по Риману на $[a; b]$, если:

$$\exists \lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} \sigma_f((P, \xi)) = \lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k$$

Или, что то же самое, если $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$ и соответствующий элемент $\beta_\delta \in \beta$: \forall разбиения $(P, \xi) : \lambda(P) < \delta$ выполняется неравенство $|\sigma_f((P, \xi)) - I| < 0$:

$$I = \lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} \sigma_f((P, \xi)) = \int_a^b f(x) dx$$

Обозначим базу β из утверждения 2.3.1. как $\lambda(P) \rightarrow 0$.

Теорема 2.2.1 (необходимое условие интегрируемости функции). $*_*$

Если $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ интегрируема на $[a; b]$ (то есть $f \in \mathbb{R}[a; b]$), то f ограничена на $[a; b]$.

Доказательство. От противного:

Допустим, что f интегрируема на $[a; b]$, но неограничена, то есть: $\forall M > 0 \exists x \in [a; b] : |f(x)| > M$. Покажем, что функция $\sigma((P, \xi))$ не имеет предела по базе на $[a; b]$.

То есть $\exists \epsilon > 0 : \forall \delta > 0 \exists (P', \xi') \text{ и } (P'', \xi'') : \lambda(P') < \delta, \lambda(P'') < \delta (\lambda(P'') = \max \Delta x_i)$, но $(\sigma(P'', \xi'') - \sigma(P', \xi')) \geq \epsilon$.

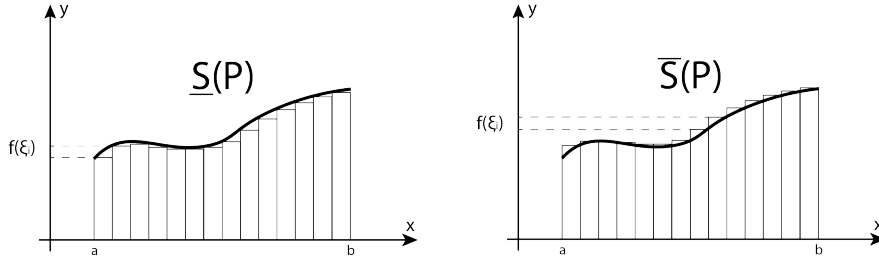
Положим, $\epsilon = 1$. Пусть $\delta > 0$ задана. Выберем разбиение с отмеченными точками (P', ξ') такое, что $\lambda(P') < \delta$, $P' = \{a = x_0, x_1, \dots, x_n = b\}$, $\epsilon_i \in [x_1, \dots, x_n]$. Поскольку функция f неограничена на $[a; b]$, то существует хотя бы один элемент разбиения $[x_{i-1}, x_i] = \Delta i$: функция f неограничена на (? Спасибо Максим). В качестве P'' возьмем P' , $\xi'' = \{\xi'_1, \xi'_2, \dots, \xi'_i, \dots, \xi'_n\}$, $\lambda(P'') < \delta$ и $|f(\xi''_i) - f(\xi'_i)| > \frac{1}{\Delta x_i}$. Разбиения P' и P'' совпадают, точки разбиения так же совпадают, кроме ξ''_i .

Рассмотрим $|\sigma((P'', \xi'')) - \sigma((P', \xi'))| = |\sum_{k=1}^n \Delta x_k f(\xi''_k) - \sum_{k=1}^n \Delta x_k f(\xi'_k)| = |\Delta x_i (f(\xi''_i) - f(\xi'_i))| > \frac{\Delta x_i}{\Delta x_i} = 1 = \epsilon$. □

2.3 Критерий интегрируемости

2.3.1 Суммы Дарбу

Определение 2.3.1 (нижняя/верхняя суммы Дарбу). Пусть $f[a; b] \rightarrow \mathbb{R}$, P - произвольное разбиение отрезка $[a; b]$. Числа $\underline{S}(P) = \sum_{k=1}^n m_k \Delta x_k$ и $\bar{S}(P) = \sum_{k=1}^n M_k \Delta x_k$, где $m_k = \inf_{\xi \in \Delta_k} f(\xi)$, $M_k = \sup_{\xi \in \Delta_k} f(\xi)$, называются **нижней** и **верхней суммами Дарбу**, отвечающими разбиению P .



Теорема 2.3.1 (свойства сумм Дарбу). Свойства:

1. $\forall (P, \xi) \quad \underline{S}(P) \leq \sigma_f((P, \xi)) \leq \bar{S}(P)$
2. Если разбиение P' получено из разбиения P добавлением новых точек, то $\underline{S}(P') \geq \underline{S}(P)$ и $\bar{S}(P') \leq \bar{S}(P)$
3. $\forall P_1, P_2 \quad \underline{S}(P_1) \leq \bar{S}(P_2)$

Доказательство. (теоремы 2.4.1)

1. $\underline{S}(P) = \sum_{k=1}^n m_k \Delta x_k \leq \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k \leq \sum_{k=1}^n M_k \Delta x_k = \bar{S}(P)$, где $f(\xi_k) = \sigma((P, \xi))$, вроде

2. Пусть P - произвольное разбиение отрезка $[a; b]$. Построим P' . Добавим на элемент разбиения Δi новую точку $x' \in [x_{i-1}; x_i]$.

Пусть $m'_i = \inf_{\xi \in [x_{i-1}, x_i]} f(\xi)$ и $m''_i = \inf_{\xi \in [x'_i, x_i]} f(\xi)$, $m_i = \inf_{\xi \in [x_{i-1}, x_i]} f(\xi)$, имеем $m_i \leq m'_i$, $m_i \leq m''_i$.

Тогда $\underline{S}(P') - \underline{S}(P) = \sum_{k=1}^{i-1} \Delta x_k m_k + m'_i |x' - x_{i-1}| + m''_i |x_i - x'| + \sum_{k=i+1}^n m_k \Delta x_k - \sum_{k=1}^n \Delta x_k m_k = m'_i |x' - x_{i-1}| + m''_i |x_i - x'| - m_i \Delta x_i \geq 0 \implies \underline{S}(P') \geq \underline{S}(P)$ (вероятно, куча индексов - неправильные).

Аналогично доказывается для $\bar{S}(P') \leq \bar{S}(P)$.

3. Пусть P_1, P_2 - произвольные разбиения отрезка $[a; b]$.

Возьмем разбиение $P = P_1 \cap P_2$. Тогда, с одной стороны, P получено из P_1 добавлением точек, а с другой стороны - из P_2 добавлением точек.

Тогда $\underline{P}_i \leq \underline{S}(P)$ и $\bar{S}(P_i) \geq \bar{S}(P)$.

Тогда верно, что $\underline{S}(P_2) \leq \underline{S}(P)$ и $\overline{S}(P_2) \geq \overline{S}(P) \implies \underline{S}(P_1) \leq \underline{S}(P) \leq \overline{S}(P) \leq \overline{S}(P_2)$.

□

Следствие. Множество нижних сумм Дарбу ограничено сверху. Множество верхних сумм Дарбу ограничено снизу.

Определение 2.3.2 (верхний/нижний интеграл Дарбу). Числа $\underline{J} = \sup \underline{S}(P)$ и $\overline{J} = \inf \overline{S}(P)$ называются **нижним** и **верхним интегралом Дарбу**.

Рассмотрим множество разбиений с отмеченными точками отрезка $[a; b]$ $\mathfrak{R} = \{(P, \xi)\}$. Построим функцию $\underline{S} : \mathfrak{R}_\xi \rightarrow \mathbb{R}$ и $\underline{S}((P, \xi)) = \underline{S}(P)$. Аналогично определим $\overline{S} : \mathfrak{R}_\xi \rightarrow \mathbb{R}$ и $\overline{S}((P, \xi)) = \overline{S}(P)$.

Таким образом сумму Дарбу можно представить как функции на множестве разбиений с отмеченными точками отрезка $[a; b]$.

Теорема 2.3.2 (критерий интегрируемости). Функция $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ интегрируема на $[a; b] \iff \lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} (\overline{S}(P) - \underline{S}(P)) = 0$.

Доказательство. (теоремы 2.4.2)

” \rightarrow ” Пусть $f \in \mathbb{R}([a; b])$ (то есть интегрируема на $[a; b]$), то есть $\forall \epsilon > 0 \forall (P, \xi) : \lambda(P) < \delta \implies |\sigma_f((P, \xi)) - I| < \epsilon$.

Лемма 2.3.1. $\forall P \underline{S}(P) = \inf_{\xi} \sigma_f((P, \xi))$ и $\overline{S}(P) = \sup_{\xi} \sigma_f((P, \xi))$

Доказательство. (леммы 2.4.1)

$\forall P \underline{S}(P) \leq \sigma_f((P, \xi))$.

Покажем, что $\forall \epsilon > 0 \exists \xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\} : \underline{S}(P) + \epsilon > \sigma_f(P, \xi)$.

Выберем $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n : f(\xi_i) < m_i + \frac{\epsilon}{b-a}$.

Тогда $\sigma_f(P, \xi) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k < \sum_{k=1}^n (m_k + \frac{\epsilon}{b-a}) \Delta x_k = \sum_{k=1}^n m_k \Delta x_k + \frac{\epsilon}{b-a} \sum_{k=1}^n \Delta x_k = \underline{S}(P) + \epsilon \implies \underline{S}(P) = \inf_{\xi} \sigma_f(P, \xi)$.

Аналогично для $\overline{S}(P) = \sup_{\xi} \sigma_f(P, \xi)$.

□

$I - \epsilon < \sigma_f(P, \xi) < I + \epsilon$, $I - \frac{\epsilon}{2} < \sigma_f(P, \xi) < I + \frac{\epsilon}{2}$. Из леммы 2.4.1: $\underline{S}(P) + \epsilon > \sigma_f(P, \xi) \implies \underline{S}(P) > \sigma_f(P, \xi) - \epsilon > \sigma_f(P, \xi) - \frac{\epsilon}{2}$ ($I = \lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} \sigma_f(P, \xi)$)

Рассмотрим $I - \frac{2\epsilon}{3} < I - \frac{\epsilon}{2} \leq \underline{S}(P) \leq \sigma_f(P, \xi) \leq \overline{S}(P) < \sigma_f(P, \xi) + \epsilon < I + \frac{\epsilon}{2} + \epsilon = I + \frac{3\epsilon}{2}$ ($\overline{S}(P) - \epsilon < \sigma_f(P, \xi)$)

Тогда $I - \frac{3\epsilon}{2} < \underline{S}(P) \leq \overline{S}(P) < I + \frac{3\epsilon}{2}$, так как $\underline{S}(P) \leq \overline{S}(P) \implies 0 \leq \overline{S}(P) - \underline{S}(P)$,

$$\begin{aligned} \overline{S}(P) &< I + \frac{3\epsilon}{2} \\ &+ \\ -\underline{S}(P) &< -I + \frac{3\epsilon}{2} \end{aligned}$$

$$0 \leq \overline{S}(P) - \underline{S}(P) < 3\epsilon \implies \lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} (\overline{S}(P) - \underline{S}(P)) = 0$$

$$” \leftarrow ” \text{ Пусть } \lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} (\overline{S}(P) - \underline{S}(P)) = 0.$$

Пусть $\epsilon > 0$ задана. Выберем $\delta > 0$: $0 \leq \overline{S}(P) - \underline{S}(P) < \epsilon \forall (P, \xi) : d(P) < \delta$.

Покажем, что $\exists I = \int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} \sigma_f(P, \xi)$. Имеем $\overline{S}(P) - \underline{S}(P) < \epsilon$

и $\underline{S}(P) \leq I \leq \overline{S}(P)$.

Из неравенств следует, что $\overline{S}(P) < \underline{S}(P) + \epsilon \leq I + \epsilon$, $\underline{S}(P) > \overline{S}(P) - \epsilon \geq I - \epsilon$.

Пусть (P, ξ) - произвольное разбиение: $\lambda(P) < \delta$. Тогда $I - \epsilon < \underline{S}(P) \leq \sigma_f(P, \xi) \leq \overline{S}(P) < I + \epsilon \implies I - \epsilon < \sigma_f(P, \xi) < I + \epsilon \implies |\sigma_f(P, \xi) - I| < \epsilon \implies I = \lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} \sigma_f(P, \xi) \implies f \in \mathbb{R}[a; b]$. \square

Определение 2.3.3. Обозначим $M_i - m_i = \sup_{\xi \in \Delta_i} f(\xi) - \inf_{\xi \in \Delta_i} f(\xi) = \sup_{x_1, x_2 \in \Delta_i} |f(x_1) - f(x_2)| = \omega_i = \omega_i(f, \Delta_i)$.

ω_i называется **колебанием** функции $f(x)$ на отрезке Δ_i .

$$\overline{S}(P) - \underline{S}(P) = \sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i$$

Следствие. (из критерия интегрируемости)

$$f \in \mathbb{R}[a; b] \iff \lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i = 0$$

Теорема 2.3.3 (Дарбу). Для любой ограниченной функции $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ выполняются равенства:

$$\underline{\mathfrak{J}} = \lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} \underline{S}(P); \quad \overline{\mathfrak{J}} = \lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} \overline{S}(P)$$

Лемма 2.3.2. Пусть $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ ограничена на $[a; b]$, то есть $\exists L > 0 : \forall x \in [a; b] |f(x)| < L$. Разбиение P' получено из разбиения P добавлением m точек. Тогда $\overline{S}P - \overline{S}(P') \leq 2L\lambda(P)m$

Доказательство. (леммы 2.4.2)

Пусть P - производное разбиение, $\lambda(P)$.

Рассмотрим случай, что P' получено добавлением k точек на i -тый отрезок разбиения P . (график, посмотреть у Максима). $\overline{S}(P) - \overline{S}(P') = \sum_{j=1}^n M_j \Delta x_j - (\sum_{j=1}^{i-1} M_j \Delta x_j + \sum_{j=1}^k M'_{ij} \Delta x_{ij} + \sum_{j=i+1}^n M_j \Delta x_j) = M_i \Delta x_i - \sum_{j=1}^k M'_{ij} \Delta x_{ij} = M_i \sum_{j=1}^k \Delta x_{ij} - \sum_{j=1}^k M'_{ij} \Delta x_{ij} = \sum_{j=1}^k M_i \Delta x_{ij} - \sum_{j=1}^k M'_{ij} \Delta x_{ij} = \sum_{j=1}^k (M_i - M'_{ij}) \Delta x_{ij} \leq \sum_{j=1}^k 2L \Delta x_{ij} = (вспомним, что $\lambda(P) = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n\}$) $= 2L \sum_{j=1}^k \Delta x_{ij} = 2L \Delta x_i \leq 2L\lambda(P)$$

Теперь, если P' получено из P добавлением m точек, то они попадут самое большее на m промежутков. Тогда $\overline{S}(P) - \overline{S}(P') \leq 2L\lambda(P)m$ \square

Доказательство. (теоремы 2.4.3, Дарбу)

$$\underline{\mathfrak{J}} \stackrel{def}{=} \sup_P \underline{S}(P), \quad \overline{\mathfrak{J}} \stackrel{def}{=} \inf_P \overline{S}(P)$$

Пусть $\epsilon > 0$ задано. Выберем разбиение P' такое, что $\bar{J} + \epsilon > \bar{S}(P')$ (**)
(определение inf). Положим, что $\delta = \frac{\epsilon}{2Lm}$.

Пусть P - произвольное разбиение: $\lambda(P) < \delta$.

Покажем, что $0 \leq \bar{S}(P) - \bar{J} < \epsilon$.

Построим разбиение $P'' = P' \cup P$. Тогда P'' получено из P добавлением m точек $\implies \bar{S}(P) - \bar{S}(P'') \leq 2L\lambda(P)m$, где $L > 0 : \forall x \in [a; b] |f(x)| < L$.
Далее, $\bar{S}(P) - \bar{S}(P'') \leq 2L\lambda(P)m < 2Lm\delta = \frac{2Lm\epsilon}{2Lm} = \frac{\epsilon}{2}$. Кроме того, P'' получено из P' добавлением некоторого количества точек.

$$\bar{S}(P'') \leq \bar{S}(P') \stackrel{(**)}{<} \bar{J} + \frac{\epsilon}{2} \implies \bar{S}(P'') - \frac{\epsilon}{2} < \bar{J}$$

Рассмотрим $0 \leq \bar{S}(P) - \bar{J} < \bar{S}(P) - \bar{S}(P'') + \frac{\epsilon}{2} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$ □

2.3.2 Классы интегрируемых функций

Теорема 2.3.4 (интегрируемость непрерывных функций). Пусть $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна на $[a; b] \implies f$ - интегрируема на $[a; b]$, то есть $f \in \mathbb{R}[a; b]$.

Доказательство. (теоремы 2.4.4)

Так как f - непрерывна на $[a; b] \implies f$ - равномерно непрерывна на $[a; b]$.
Это значит, что если $\epsilon > 0$ задано, то $\exists \delta > 0 : \forall x_1, x_2 \in [a; b] : |x_1 - x_2| < \delta \implies |f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\epsilon}{b-a}$.

По критерию интегрируемости: $f \in \mathbb{R}[a; b] \iff \lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} (\bar{S}(P) - \underline{S}(P)) = 0 \forall (P; \xi)$ - разбиение.

$$\bar{S}(P) - \underline{S}(P) = \sum \omega_i \Delta x_i, \text{ где } \omega_i = \sup_{x_1, x_2 \in \Delta_i} |f(x_1) - f(x_2)|.$$

$$\bar{S}(P) = \sum M_i \Delta x_i, \quad M_i = \sup_{\xi \in \Delta_i} f(\xi).$$

$$\omega_i = M_i - m_i = \sup_{\xi \in \Delta_i} f(\xi) - \inf_{\xi \in \Delta_i} f(\xi) = \sup_{x_1, x_2 \in \Delta_i} |f(x_1) - f(x_2)|.$$

$$\bar{S}(P) - \underline{S}(P) = \sum M_i \Delta x_i - \sum m_i \Delta x_i = \sum \omega_i \Delta x_i.$$

Таким образом критерий интегрируемости: f - интегрируема на $[a; b] \iff \lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} \sum \omega_i \Delta x_i = 0$, то есть $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall (P; \xi) : \lambda(P) < \delta \implies 0 \leq \sum \omega_i \Delta x_i < \epsilon$.

Пусть $\epsilon > 0$ задано. Возьмем $(P; \xi)$ - разбиение такое, что $\lambda(P) < \delta$.
Тогда $\sum \omega_i \Delta x_i = \sum \sup_{x_1, x_2 \in \Delta_i} |f(x_1) - f(x_2)| \Delta x_i \leq \sum \frac{\epsilon}{b-a} \Delta x_i = \frac{\epsilon}{b-a} \sum \Delta x_i = \frac{\epsilon}{b-a} (b - a) = \epsilon$ □

Теорема 2.3.5 (интегрируемость функций с конечным числом точек разрыва). Пусть $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ - ограничена и имеет на $[a; b]$ конечное число точек разрыва. Тогда $f \in \mathbb{R}[a; b]$ интегрируема на $[a; b]$.

Доказательство. (теоремы 2.4.5)

Пусть $L > 0 : \forall x \in [a; b] |f(x)| < L$ (ограничена). Пусть f имеет k точек разрыва на $[a; b]$.

Пусть $\epsilon > 0$ задано. Возьмем $\delta_1 = \frac{\epsilon}{16Lk}$. Для каждой точки разрыва построим δ_1 -окрестность.

Пусть U - множество таких окрестностей. U - открытое множество. Рассмотрим $V = [a; b] \setminus U \implies V$ - замкнутое (так как его дополнение открытое). Из того, что V - ограничено и замкнуто $\implies V$ - компактное. Функция f - непрерывна на $V \implies$ из того, что V - компактно и f - непрерывна на $V \implies f$ - равномерно непрерывна на $V \implies \forall \epsilon > 0 \exists \delta_2 > 0 : \forall x_1, x_2 \in V : |f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\epsilon}{2(b-a)}$.

Положим, что $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Пусть P - произвольное разбиение отрезка $[a; b] : \lambda(P) < \delta$.

Рассмотрим $\sum \omega_i \Delta x_i = \sum' \omega_i \Delta x_i + \sum'' \omega_i \Delta x_i \leq |\sum'|$ берется по всем отрезкам разбиения, k -тые пересекаются с U , \sum'' - по всем остальным $|\leq \sum' \omega_i \Delta x_i + \sum'' \frac{\epsilon}{2(b-a)} \Delta x_i \leq 2L2\delta_1 k + \frac{\epsilon}{2(b-a)} \sum'' \Delta x_i < \frac{4Lk\epsilon}{8Lk} + \frac{\epsilon}{2(b-a)}(b-a) = \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$.

Дополнение: $(\bar{S}(P) - \bar{S}(P')) \leq 2L\lambda(P)m$, $\sum M_i \Delta x_i - \sum M'_i \Delta x_i$. $\sum' \omega_i \Delta x_i = \sum \sup_{x_1, x_2 \in \Delta_i \cap k} |f(x_1) - f(x_2)| \Delta x_i \leq 2L2\delta_1 k$

□

ГРАФИКИ НАДО НАРИСОВАТЬ

Теорема 2.3.6 (интегрируемость монотонных функций). Пусть $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ - монотонна на $[a; b] \implies f$ - интегрируема на $[a; b]$.

Доказательство. (теоремы 2.4.6)

Пусть f - не убывает на $[a; b]$. Пусть $\epsilon > 0$ задано. Возьмем $\delta = \frac{\epsilon}{f(b) - f(a)}$. Тогда, если P - произвольное разбиение $[a; b] : \lambda(P) < \delta$, то $\sum \omega_i \Delta x_i \stackrel{\text{monoton.}}{=} \sum (f(x_i) - f(x_{i-1})) \Delta x_i < \delta \sum (f(x_i) - f(x_{i-1})) = \delta(f(b) - f(a)) = \epsilon$. □

2.3.3 Свойства интегрируемых функций

Теорема 2.3.7. Пусть $f \in \mathbb{R}[a; b]$, $g \in \mathbb{R}[a; b]$. Тогда:

1. $f \pm g \in \mathbb{R}[a; b]$.
2. $\alpha f \in \mathbb{R}[a; b]$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
3. $f * g \in \mathbb{R}[a; b]$.
4. $|f| \in \mathbb{R}[a; b]$, при этом:

- $\int_a^b (f \pm g) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$
- $\int_a^b \alpha f(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx$
- $|\int_a^b f(x) dx| \leq \int_a^b |f(x)| dx$

Доказательство. (теоремы 2.4.7)

$$1. \int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} \sum (f(\xi_i) \pm g(\xi_i))\Delta x_i = \lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} \sum f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

2. Аналогично.

3. Покажем, что если $f \in R[a; b]$, то $f^2 \in R[a; b]$. Рассмотрим $|f^2(x_1) - f^2(x_2)| = |(f(x_1) - f(x_2))(f(x_1) + f(x_2))| \leq |f(x_1) - f(x_2)|(|f(x_1)| + |f(x_2)|) < 2L|f(x_1) - f(x_2)|$, где $L > 0 : \forall x \in [a; b] |f(x)| < L$ (интегрируема \implies ограничена).

Пусть P - произвольное разбиение. Пусть $\epsilon > 0$ задано. Возьмем $\delta > 0$ и $P : \lambda(P) < \delta \implies \omega_i(f^2, \Delta_i) \leq 2L\omega_i(f, \Delta_i)$.

$$\sum_i \omega_i(f^2, \Delta_i)\Delta x_i \leq (\sum_i \omega_i(f, \Delta_i)\Delta x_i)2L.$$

Так как $f \in R[a; b]$, то $\sum_i \omega_i(f, \Delta_i)\Delta x_i \rightarrow 0 \implies$ по лемме о двух милиционерах, $\sum_i \omega_i(f^2, \Delta_i)\Delta x_i \rightarrow 0 \implies$ (по критерию интегрируемости) $f^2 \in R[a; b]$.

$$fg = \frac{1}{4}((f+g)^2 - (f-g)^2) \implies fg \in R[a; b].$$

4. Рассмотрим $||f(x_1)| - |f(x_2)|| \leq |f(x_1) - f(x_2)|$, $x_1, x_2 \in \Delta_i \implies \omega_i(|f|, \Delta_i) \leq \omega_i(f, \Delta_i)$.

$$0 \leq \sum_i \omega_i(|f|, \Delta_i)\Delta x_i \leq \sum_i \omega_i(f, \Delta_i)\Delta x_i \implies |f| \in R[a; b].$$

$$\text{Рассмотрим } |\sum_i f(\xi_i)| \leq \sum_i |f(\xi_i)|\Delta x_i \implies \lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} |\sum_i f(\xi_i)\Delta x_i| \leq \lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} \sum_i |f(\xi_i)|\Delta x_i, \quad |\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

□

2.3.4 Аддитивность интеграла Римана

Определение 2.3.4. Пусть $a > b$, $a, b \in \mathbb{R}$, положим $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$. Если $a = b$, то $\int_a^{a=b} f(x)dx = 0$.

Теорема 2.3.8 (Аддитивность интеграла Римана). Пусть даны точки $a, b, c \in \mathbb{R}$. Если f - интегрируема на большем из отрезков $[a; b]$, $[a, c]$, $[b, c]$, то f - интегрируема и на меньших отрезках. И наоборот, если f интегрируема на двух меньших отрезках, то она интегрируема и на большем отрезке. При этом:

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx + \int_c^a f(x)dx = 0$$

теоремы 2.4.8. Пусть $a < b < c$.

Построим такое разбиение отрезка $[a; c]$ с отмеченными точками, что точка b будет его точкой разбиения $P = x_0, x_1, \dots, b, \dots, x_n$.

Тогда $\sum_P f(\xi_i) \Delta x_i < \sum_{P'} f(\xi_i) \Delta x_i + \sum_{P''} f(\xi_i) \Delta x_i$, где P' - разбиение отрезка левее точки b , P'' - правее точки b .

Покажем, что если $f \in R[a; c]$, то $f \in R[a; b]$. В самом деле, $\sum_{P'} \omega_i \Delta x_i \leq \sum_P \omega_i \Delta x_i \rightarrow 0 \implies f \in R[a; b]$. Аналогично, можно показать, что $f \in R[b; c]$. Если f - интегрируема на $[a; b]$ и $f \in R[b; c] \implies \sum_{P'} \omega_i \Delta x_i \rightarrow 0$, $\sum_{P''} \omega_i \Delta x_i \rightarrow 0 \implies$ учитывая то, что $\sum_P f(\xi_i) \Delta x_i < \sum_{P'} f(\xi_i) \Delta x_i + \sum_{P''} f(\xi_i) \Delta x_i$, тогда $\sum_P \omega_i \Delta x_i \rightarrow 0 \implies f \in R[a; c]$, а так же то, что $\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$. \square

2.3.5 Монотонность интеграла Римана

Теорема 2.3.9. Если $a < b$ и $f \in R[a; b]$ и:

1. $\forall x \in [a; b] f(x) \geq 0$, то $\int_a^b f(x) dx \geq 0$
2. $\forall x \in [a; b] f(x) > 0$, то $\int_a^b f(x) dx > 0$

Доказательство. (теоремы 2.4.9)

1. Почти очевидно (по определению интеграла Римана и свойствам предела)
2. Пусть $\forall x \in [a; b] f(x) > 0$. Покажем, что $\int_a^b f(x) dx > 0$. Допустим, что $\int_a^b f(x) dx = 0$. Тогда $\lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} \bar{S}(P) = 0$.

Тогда можно взять такое разбиение $P : \bar{S}(P) < \frac{b-a}{2}$. Тогда у этого разбиения $P \exists$ отрезок $\Delta_i : M_i = \sup_{x \in \Delta_i} f(x) < \frac{1}{2}$. В самом деле, если $M_i \geq \frac{1}{2} \forall i$, то $\bar{S}(P) = \sum_i M_i \Delta x_i \geq \frac{1}{2} \sum_i \Delta x_i = \frac{b-a}{2}$, противоречие с выбранным P .

Обозначим $\Delta_i = [a_1, b_1]$. Так как $f \in R[a; b] \implies f \in R[a_1, b_1]$. При этом $\int_{a_1}^{b_1} f(x) dx = 0$. Пусть P_1 - разбиение отрезка $[a_1, b_1] : \bar{S}(P_1) < \frac{b_1 - a_1}{4} \implies \exists$ отрезок разбиения $[a_2, b_2] \subset [a_1, b_1] : \sup_{x \in [a_2, b_2]} f(x) < \frac{1}{4}$ и так далее.

Таким образом получим систему вложенных отрезков $[a; b] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots$, при этом $\sup_{x \in [a_k, b_k]} f(x) < \frac{1}{2^k}$. Пусть $c \in \bigcap_{k=1}^{\infty} [a_k, b_k]$. Тогда $f(c) > 0$. С другой стороны, $f(c) < \frac{1}{2^k} \implies f(c) = 0$ - противоречие $\implies \int_a^b f(x) dx > 0$.

□

Следствие. (теоремы 2.4.9)

1. Если $a < b$, $f, g \in R[a; b]$ и:

$$(a) \quad \forall x \in [a; b] \quad f(x) \leq g(x), \text{ то } \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

$$(b) \quad \forall x \in [a; b] \quad f(x) < g(x), \text{ то } \int_a^b f(x)dx < \int_a^b g(x)dx$$

Доказательство. Очевидно, $g(x) - f(x) \geq 0$. □

2. Если $f \in R[a; b]$, $a < b$, $M = \sup_{x \in [a; b]} f(x)$, $m = \inf_{x \in [a; b]} f(x)$, то $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$.

Доказательство. \forall разбиения P с отмеченными точками верно: $\sum_i m \Delta x_i \leq \sum_i f(\xi_i) \Delta x_i \leq \sum_i M \Delta x_i$ и $m(b-a) \leq \sum_i f(\xi_i) \Delta x_i \leq M(b-a)$.

Переходя к пределу получаем то, что нужно было доказать. □

3. (Теорема о среднем)

Пусть $f \in R[a; b]$ ($a > b, a < b$), $m = \inf_{x \in [a; b]} f(x)$, $M = \sup_{x \in [a; b]} f(x)$. Тогда существует $\mu \in [m; M]$: $\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a)$.

Доказательство. Пусть $a < b$. Тогда (из 2-го пункта) $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$, ($b-a > 0$).

$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq M$. Пусть $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \implies \int_a^b f(x)dx = \mu(b-a)$. Если $a > b$, то $m(a-b) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(a-b)$ (умножим на -1), $m(b-a) \geq \int_a^b f(x)dx \geq M(b-a) \implies m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq M$. □

Следствие. Если, кроме того, $f(x)$ - непрерывна на $[a; b]$, то $\exists c \in [a; b]$: $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$.

Доказательство. Доказательство следует из теоремы Больцано-Коши о промежуточном значении. □

Теорема 2.3.10 (Первая теорема о среднем). Пусть $f, g \in R[a; b]$ ($a > b, a < b$), $m = \inf_{x \in [a; b]} f(x)$, $M = \sup_{x \in [a; b]} f(x)$ и g не меняет свой знак на $[a; b]$. Тогда

$$\exists \mu \in [m; M] : \int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx.$$

Доказательство. Пусть $a < b$ и $\forall x \in [a; b] \ g(x) \geq 0$. Имеем, что $m \leq f(x) \leq M$, $(g(x) > 0)$, $mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x) \implies m \int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M \int_a^b g(x)dx$. Если $\int_a^b g(x)dx = 0 \implies \int_a^b f(x)g(x)dx = 0 \implies \int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx$. Если $\int_a^b g(x)dx \neq 0$, то поделим в неравенстве $m \int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M \int_a^b g(x)dx$ все на $\int_a^b g(x)dx > 0$: $m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \leq M$, где $\frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} = \mu$.

Аналогично доказываются остальные случаи ($a < b$, $g(x) \leq 0$; $a > b$, $g(x) \geq 0$). \square

2.4 Интеграл Римана как функция верхнего предела интегрирования

Определение 2.4.1. Пусть $f \in R[a; b]$, $x \in [a; b]$.

Рассмотрим функцию $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, $F(x)$ определена для $\forall x \in [a; b]$.

Теорема 2.4.1 (непрерывность интеграла Римана). Если $f \in R[a; b]$, то $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ - непрерывна на $[a; b]$.

Доказательство. Пусть $h \in \mathbb{R} : x+h \in [a; b]$. Тогда $F(x+h) = \int_a^{x+h} f(t)dt$. Пусть $\epsilon > 0$ задано. Покажем, что $\exists \delta > 0 : \forall h \in \mathbb{R} : |h| < \delta \implies |F(x+h) - F(x)| < \epsilon$.

Рассмотрим $|F(x+h) - F(x)| = |\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt| = |\int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt| = |\int_x^{x+h} f(t)dt| \leq |\int_x^{x+h} |f(t)|dt|$. Так как $f \in R[a; b]$, то f - ограничена на $[a; b]$, то есть $\exists L > 0 : \forall x \in [a; b] \ |f(x)| \leq L$. Тогда $|\int_x^{x+h} |f(t)|dt| \leq L \int_x^{x+h} dt$, так как

$$\int_x^{x+h} 1dt = \lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n 1\Delta x_i = |h|,$$

тогда $\delta = \frac{\epsilon}{L}$, что и требовалось доказать. \square

Теорема 2.4.2 (о дифференцируемости интеграла Римана как функции по верхнему пределу). Пусть $f \in R[a; b]$, $x \in [a; b]$ и f непрерывна в точке x , тогда функция $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ дифференцируема в точке x , причем:

$$F'(x) = f(x) \implies \left(\int_a^x f(t)dt \right)'_x = f(x)$$

Доказательство. Пусть $h \in \mathbb{R} : x+h \in [a; b]$.

Рассмотрим $\left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) \right| = \left| \frac{1}{h} (\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt) - f(x) \right| = \left| \frac{1}{h} \int_a^{x+h} f(t)dt - f(x) \right| = \left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)dt - \frac{f(x)}{h} \int_x^{x+h} dt \right| = \left| \frac{1}{h} (\int_x^{x+h} f(t)dt - \int_x^{x+h} f(x)dt) \right| = \left| \frac{1}{h} (\int_x^{x+h} (f(t) - f(x))dt) \right| = \frac{1}{|h|} \left| \int_x^{x+h} |f(t) - f(x)|dt \right|.$

Так как f - непрерывна в точке x , то $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall h : |h| < \delta |f(t) - f(x)| < \epsilon$, где $t \in [x; x+h]$.

Тогда $|\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - f(x)| \leq \frac{1}{|h|} |\int_x^{x+h} |f(t) - f(x)| dt| < \frac{1}{|h|} \epsilon |\int_x^{x+h} dt| = \frac{1}{|h|} \epsilon |h| = \epsilon$

Таким образом, по определению производной:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x) = F'(x).$$

□

Следствие. Если f - непрерывна на $[a; b]$, то на $[a; b]$ она имеет первообразную, которая равна:

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt + C$$

Замечание. Рассмотрим следующие классы (множества/пространства) функций:

- $R[a; b]$ - множество интегрируемых на $[a; b]$ функций;
- $C[a; b]$ - множество непрерывных на $[a; b]$ функций;
- $C^o[a; b]$ - множество дифференцируемых на $[a; b]$ функций.

Получаем:

$$C^o[a; b] \subset C[a; b] \subset R[a; b].$$

Теорема 2.4.3 (вторая теорема о среднем). Пусть $f, g \in R[a; b]$, причем f - монотонна на $[a; b]$. Тогда $\exists \xi \in [a; b]$:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a) \int_a^\xi g(x)dx + f(b) \int_\xi^b g(x)dx$$

Лемма 2.4.1. Пусть $f, g \in R[a; b]$, причем f - невозрастающая и неотрицательная.

Тогда $\exists \xi \in [a; b]$:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a) \int_a^\xi g(x)dx.$$

Доказательство. (леммы)

Пусть P - произвольное разбиение отрезка $[a; b]$: $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$. Тогда $\int_a^b f(x)g(x)dt = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)g(x)dx + \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x_{i-1})g(x)dx - \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x_{i-1})g(x)dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} (f(x) - f(x_{i-1}))g(x)dx + \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x_{i-1})g(x)dx =$ (где $\sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} (f(x) - f(x_{i-1}))g(x)dx = \rho$ и $\sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x_{i-1})g(x)dx = \sigma$) $= \rho + \sigma$.

Устремим $\lambda(P) \rightarrow 0$:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} \rho + \lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} \sigma$$

Покажем, что пределы существуют, более того: $\lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} \rho = 0$.

Так как $g(x) \in R[a; b] \implies g$ - ограничена на $[a; b]$, то есть $\exists L > 0 : \forall x \in [a; b] |g(x)| \leq L$.

Рассмотрим $\omega_i = \omega_i(f, \Delta_i) = \sup_{\xi_1, \xi_2 \in \Delta_i} |f(\xi_1) - f(\xi_2)|$. Так как $f \in R[a; b]$,

то по критерию интегрируемости: $\sum_i \omega_i \Delta x_i \rightarrow 0$.

Тогда $|\rho| = |\sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} (f(x) - f(x_{i-1}))g(x)dx| \leq \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(x) - f(x_{i-1})||g(x)|dx \leq \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \omega_i L dx = L \sum_{i=1}^n \omega_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} dx = L \sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i$.

Пусть $\epsilon > 0$ задано. Выберем $\delta > 0 : \forall P : \lambda(P) < \delta$ и $\sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i < \frac{\epsilon}{L}$.

Имеем, что $|\rho| \leq L \sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i < L \frac{\epsilon}{L} = \epsilon \implies \lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} \rho = 0$.

Тогда $\int_a^b f(x)g(x)dx = \lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x_{i-1})g(x)dx$. $\lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} \sigma$ существует, так как $\int_a^b f(x)g(x)dx = \text{const}$ и $\lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} \rho = 0$.

Рассмотрим функцию $G(x) = \int_a^x g(x)dx$:

1. $G(x)$ - непрерывна на $[a; b]$ ($x \in [a; b]$) $\implies G(x)$ принимает на $[a; b]$ *max min* значение (по теореме Вейерштрасса о максимальном значении), $m = \min_{x \in [a; b]} G(x)$, $M = \max_{x \in [a; b]} G(x)$.

2. $\int_{x_{i-1}}^{x_i} g(x)dx = \int_a^{x_i} g(x)dx - \int_a^{x_{i-1}} g(x)dx = G(x_i) - G(x_{i-1})$.

$$\sigma = \sum_{i=1}^n f(x_{i-1}) \int_{x_{i-1}}^{x_i} g(x)dx = \sum_{i=1}^n f(x_{i-1})(G(x_i) - G(x_{i-1})) = f(x_0)G(x_1) - f(x_0)G(x_0) + f(x_1)G(x_2) - f(x_1)G(x_1) + \dots + f(x_{n-2})G(x_{n-1}) - f(x_{n-2})G(x_{n-2}) + f(x_{n-1})G(x_n) - f(x_{n-1})G(x_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n-1} G(x_i)(f(x_{i-1}) - f(x_i)) + f(x_{n-1})G(x_n).$$

Тогда $\sigma \geq m(\sum_{i=1}^{n-1} (f(x_{i-1}) - f(x_i)) + f(x_{n-1})) = m(f(x_0) - f(x_1) + f(x_1) - f(x_2) + \dots - f(x_{n-1}) + f(x_{n-1})) = mf(a)$. Аналогично, $\sigma \leq Mf(a)$.

$$mf(a) \leq \sigma \leq Mf(a)$$

Пусть $f(a) \neq 0 \implies (f(a) > 0) m \leq \frac{\sigma}{f(a)} \leq M \implies$

$$m \leq \frac{1}{f(a)} \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M$$

$$\implies \exists \xi \in [a; b] : m \leq G(\xi) \leq M \text{ и } G(\xi) = \frac{1}{f(a)} \int_a^\xi f(x)g(x)dx.$$

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a)G(\xi) = f(a) \int_a^\xi g(x)dx.$$

□

Доказательство. (теоремы)

Пусть f - неубывающая. Рассмотрим функцию $h(x) = f(b) - f(x)$, $h(x) \geq 0 \forall x \in [a; b] \forall x_1, x_2 \in [a; b] : x_1 < x_2 \implies h(x_1) - h(x_2) = f(b) - f(x_1) - f(b) + f(x_2) = f(x_2) - f(x_1) \geq 0 \implies h(x_1) \geq h(x_2) \implies h(x)$ - невозрастающая.

По лемме, $\int_a^b h(x)g(x)dx = h(a) \int_a^\xi g(x)dx$.

С другой стороны, $\int_a^b h(x)g(x)dx = \int_a^b (f(b) - f(x))g(x)dx = f(b) \int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)g(x)dx$.

Имеем, что $f(b) \int_a^\xi g(x)dx - f(a) \int_a^\xi g(x)dx = f(b) \int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)g(x)dx$.

$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(b) \left(\int_a^\xi g(x)dx + \int_\xi^b g(x)dx \right) - f(b) \int_a^\xi g(x)dx + f(a) \int_a^\xi g(x)dx = f(a) \int_a^\xi g(x)dx + f(b) \int_\xi^b g(x)dx$.

Для случая, когда f - невозрастающая, доказываем аналогично. \square

2.5 Формула Ньютона-Лейбница

Теорема 2.5.1. Пусть f - непрерывна на $[a; b]$ и $F(x)$ - её первообразная.

Тогда $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)|_a^b$

Доказательство. Пусть $F(x)$ - первообразная функции $f(x)$ на $[a; b]$:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt + C.$$

Отсюда, $F(b) = \int_a^b f(t)dt + C$; $F(a) = \int_a^a f(t)dt$;

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt + C - C = \int_a^b f(t)dt + C(?) \quad \square$$

Теорема 2.5.2. Пусть $F(x)$ - непрерывна на $[a; b]$, дифференцируема на $[a; b]$ за исключением не более чем конечного числа точек. Причем всюду, где она дифференцируема: $F'(x) = f(x)$. И, наконец, $f(x) \in R[a; b]$.

Тогда:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)|_a^b$$

Доказательство. Возьмем произвольное разбиение P отрезка $[a; b]$ так, что оно содержит все точки недифференцируемости функции $F(x)$: $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b, \implies F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^n (F(x_i) - F(x_{i-1}))$.

Пусть $\Delta_i = [x_{i-1}; x_i]$. Функция $F(x)$ дифференцируема на $(x_{i-1}; x_i)$, непрерывна на $[x_{i-1}; x_i] \forall i = \overline{1, n}$.

По теореме Лагранжа, $\exists \xi_i \in (x_{i-1}; x_i) : F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = f(\xi_i)\Delta x_i$.

Тогда:

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Устремим $\lambda(P) \rightarrow 0$:

$$F(b) - F(a) = \lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i,$$

так как $\exists \lim, f \in R[a; b]$, то $F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx$. \square

Следствие. Если функция $F(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 2.5.2, то $\forall x \in [a; b]$:

$$F(x) = F(a) + \int_a^x F'(t) dt.$$

2.6 Интегрирование по частям в определенном интеграле и формула Тейлора

Теорема 2.6.1 (формула интегрирования по частям). Если функции $u(x)$ и $v(x)$ непрерывно дифференцируемы на отрезке $[a; b]$, то справедливо равенство:

$$\int_a^b u dv = uv|_a^b - \int_a^b v du.$$

Доказательство. Рассмотрим $uv|_a^b = \int_a^b d(uv) = \int_a^b (v du + u dv) = \int_a^b v du + \int_a^b u dv \implies \int_a^b u dv = uv|_a^b - \int_a^b v du$. \square

Теорема 2.6.2 (формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме). Пусть функция $f(t)$ имеет на отрезке $[a; x]$ непрерывные производные до n -го порядка включительно. Тогда справедлива формула Тейлора:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + r_n(a; x),$$

где $r_n(a; x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x f^{(n)}(t)(x-a)^{n-1} dt$.

Доказательство. Пусть $f(t)$ имеет на $[a; x]$ непрерывные производные до n -го порядка включительно. По формуле Ньютона-Лейбница: $f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t) dt = \int_a^x f'(t) dt = - \int_a^x f'(t)(x-t)' dt =$

$$= \left| \begin{array}{l} u = f'(t) \implies u' = f''(t) \implies du = f''(t) dt \\ (x-t)' dt = dv \implies d(x-t) = dv \implies v = x-t \end{array} \right| =$$

$$\begin{aligned} &= -f'(t)(x-t)|_a^x + \int_a^x f''(t)(x-t) dt = f'(a)(x-a) + \frac{1}{2} \int_a^x -f''(t)((x-t)^2)' dt = \\ &= f'(a)(x-a) - \frac{1}{2} (f''(t)(x-t)^2)|_a^x - \int_a^x f'''(t)(x-t)^2 dt = f'(a)(x-a) + \frac{1}{2} f''(a)(x-a)^2 - \\ &- \frac{1}{6} \int_a^x f'''(t)((x-t)^3)' dt = \dots = f'(a)(x-a) + \frac{1}{2} f''(a)(x-a)^2 + \frac{1}{6} f'''(a)(x-a)^3 + \dots + \\ &+ \frac{1}{6 \cdot \dots \cdot (n-1)} f^{(n-1)}(a)(x-a)^{n-1} + \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1} dt. \quad \square \end{aligned}$$

2.7 Замена переменной в определенном интеграле

Теорема 2.7.1. Пусть $\phi : [\alpha; \beta] \rightarrow [a; b]$ - непрерывно дифференцируемое отображение отрезка $[\alpha; \beta]$ в отрезок $[a; b]$, причем $\phi(\alpha) = a$, $\phi(\beta) = b$. Тогда для любой функции $f(x)$, непрерывной на $[a; b]$, функция $f(\phi(t))\phi'(t)$ - непрерывна на $[\alpha; \beta]$ и справедливо равенство:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)dt.$$

Доказательство. Пусть $F(x)$ - первообразная $f(x)$ на $[a; b]$.

Тогда $F(\phi(t))$ - первообразная для $f(\phi(t))\phi'(t)$ ($F'_t(\phi(t)) = F'_\phi\phi'_t$) $\implies F(\phi(t))$ - непрерывна на $[\alpha; \beta]$.

По формуле Ньютона-Лейбница, $F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$ и $\int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)dt = F(\phi(\beta)) - F(\phi(\alpha))$.

По условию, $\phi(\beta) = b$, $\phi(\alpha) = a \implies \int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)dt$. \square

Теорема 2.7.2 (замена переменной для интегрируемых функций). Пусть $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in R[a; b]$, функция $x = \phi(t)$:

1. $\phi : [\alpha; \beta] \rightarrow [a; b]$
2. $\phi(\alpha) = a$, $\phi(\beta) = b$
3. $\phi'(t)$ непрерывна на $[\alpha; \beta]$
4. ϕ - строго монотонна

Тогда:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)dt$$

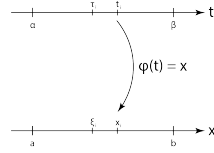
Доказательство. Пусть (P_t, τ) - произвольное разбиение с отмеченными точками отрезка $[\alpha; \beta]$:

$$\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = \beta;$$

$$\tau_i \in [t_{i-1}; t_i], \quad i = \overline{1, n},$$

Для определенности будем считать, что ϕ - возрастающая, то есть $\alpha < \beta$, $a < b$.

Тогда можно построить разбиение (P_x, ξ) с отмеченными точками отрезка $[a; b]$:



$$\begin{aligned} a &= x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b; \\ \xi_i &\in [x_{i-1}; x_i], \quad i = \overline{1, n}, \\ \text{Здесь } x_i &= \phi(t_i), \quad \xi_i = \phi(\tau_i). \end{aligned}$$

Если $\lambda(P_t) \rightarrow 0 \implies \lambda(P_x) \rightarrow 0$. Составим интегральные суммы:

$$\sigma = \sum_{i=1}^n f(\phi(\tau_i)) \phi'(\tau_i) \Delta t_i;$$

$$\bar{\sigma} = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i,$$

Если $\lambda(P_t) \rightarrow 0 \implies \lambda(P_x) \rightarrow 0 \implies \bar{\sigma} \rightarrow \int_a^b f(x) dx$ (так как $f \in R[a; b]$).

Покажем, что $\sigma \rightarrow \int_a^b f(x) dx$: $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \phi(t_i) - \phi(t_{i-1}) = \phi'(\bar{\tau}_i) \Delta t_i$, $\bar{\tau}_i \in [t_{i-1}; t_i]$ (случайная точка из отрезка).

Тогда:

$$\bar{\sigma} = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n f(\phi(\tau_i)) \phi'(\bar{\tau}_i) \Delta t_i;$$

Покажем, что $\lim_{\lambda(P_t) \rightarrow 0} (\sigma - \bar{\sigma}) = 0$:

В самом деле, $|\sigma - \bar{\sigma}| = |\sum_{i=1}^n f(\phi(\tau_i)) \phi'(\tau_i) \Delta t_i - \sum_{i=1}^n f(\phi(\tau_i)) \phi'(\bar{\tau}_i) \Delta t_i| = |\sum_{i=1}^n f(\phi(\tau_i)) (\phi'(\tau_i) - \phi'(\bar{\tau}_i)) \Delta t_i| \leq \sum_{i=1}^n |f(\phi(\tau_i))| |\phi'(\tau_i) - \phi'(\bar{\tau}_i)| \Delta t_i \leq L \sum_{i=1}^n |\phi'(\tau_i) - \phi'(\bar{\tau}_i)| \Delta t_i$, где $L > 0$: $\forall x \in [a; b] \quad |f(x)| \leq L$ (так как f - интегрируема \implies ограничена).

Так как $\phi'(t)$ непрерывна на $[\alpha; \beta] \implies \forall i = \overline{1, n} \quad \phi'(t)$ непрерывна на $[t_{i-1}; t_i] \implies \phi'(t)$ равномерно непрерывна на $[t_{i-1}; t_i]$. Возьмем $\delta > 0$: $\forall t_1, t_2 \in [t_{i-1}; t_i] \quad |t_1 - t_2| < \delta \implies |\phi'(t_1) - \phi'(t_2)| < \frac{\epsilon}{L(\beta - \alpha)}$ ($\forall \epsilon > 0$).

Тогда $|\sigma - \bar{\sigma}| \leq L \sum_{i=1}^n |\phi'(\tau_i) - \phi'(\bar{\tau}_i)| \Delta t_i < L \frac{\epsilon}{L(\beta - \alpha)} \sum_{i=1}^n \Delta t_i = L \frac{\epsilon}{L(\beta - \alpha)} (\beta - \alpha) = \epsilon \implies \sigma \rightarrow \int_a^b f(x) dx$ при $\lambda(P_t) \rightarrow 0$.

С другой стороны, по определению определенного интеграла:

$$\lim_{\lambda(P_t) \rightarrow 0} \sigma = \int_{\alpha}^{\beta} f(\phi(t)) \phi'(t) dt \implies \int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\phi(t)) \phi'(t) dt.$$

□

Глава 3

Геометрические приложения интеграла Римана

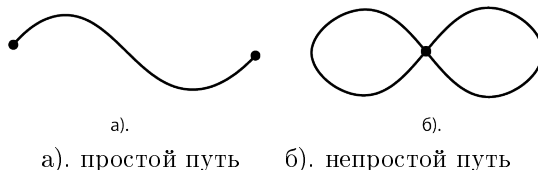
3.1 Длина кривой

Определение 3.1.1. Пусть (X, ρ) - метрическое пространство, $[a; b] \subset \mathbb{R}$. Будем называть **путем** произвольное непрерывное отображение:

$$\gamma : [a; b] \rightarrow X$$

Определение 3.1.2. Пусть $\gamma : [a; b] \rightarrow X$ называется **простым**, если:

$$\forall t_1, t_2 \in [a; b] : \quad \gamma(t_1) = \gamma(t_2) \implies t_1 = t_2$$



Определение 3.1.3. Пусть $\gamma : [a; b] \rightarrow X$ называется **замкнутым**, если:

$$\gamma(a) = \gamma(b),$$

тогда:

- $\gamma(a)$ - начало пути,
- $\gamma(b)$ - конец пути

Определение 3.1.4. Пусть $\gamma : [a; b] \rightarrow X$ называется **простым замкнутым**, если:

$$\forall t_1, t_2 \in (a; b) : \quad \gamma(t_1) = \gamma(t_2) \implies t_1 = t_2; \quad \gamma(a) = \gamma(b)$$

На множестве путей введем отношение.

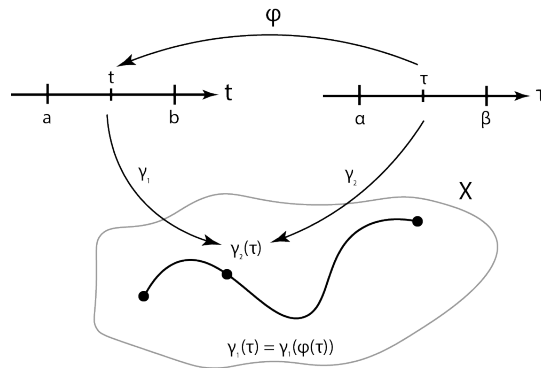
Пусть $\gamma_1 : [a; b] \rightarrow X$, $\gamma_2 : [\alpha; \beta] \rightarrow X$.

Будем говорить, что γ_1 и γ_2 находятся в отношении " \sim ", то есть $\gamma_1 \sim \gamma_2$, если существует строго возрастающее отображение $\phi : [\alpha; \beta] \rightarrow [a; b]$:

$$\phi(\alpha) = a, \quad \phi(\beta) = b,$$

а так же:

$$\gamma_2(\tau) = \gamma_1(\phi(\tau))$$



Упражнение 1: Доказать, что введенное отношение есть отношение эквивалентности.

Определение 3.1.5. Отображение ϕ называется **гомеоморфизмом**, если:

ϕ и ϕ^{-1} - непрерывны

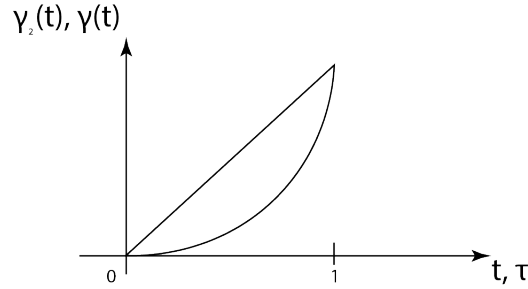
Упражнение 2: Доказать, что ϕ в определении отношения между γ_1 и γ_2 есть гомеоморфизм.

Определение 3.1.6. **Кривой** в X будем называть класс эквивалентных путей.

Определение 3.1.7. Образ пути γ называется **носителем** этого пути.

Пример 7. Рассмотрим:

$$\begin{aligned} \gamma_1 : [0; 1] &\rightarrow \mathbb{R} : \quad \gamma_1(t) = t; \\ \gamma_2 : [0; 1] &\rightarrow \mathbb{R} : \quad \gamma_2(\tau) = \tau^3, \end{aligned}$$



Что бы доказать, что $\gamma_1 \sim \gamma_2$, нужно найти строго возрастающее отображение $\phi : [0; 1] \rightarrow [0; 1]$:

$$t = \phi(\tau) = \tau^3, \quad \phi(\tau) - \text{строго возрастающее, } \phi(0) = 0, \quad \phi(1) = 1;$$

$$\gamma_2(\tau) = \tau^3 = \phi(\tau) = t = \gamma_1(t) = \gamma_1(\phi(\tau)) \implies \gamma_2(\tau) = \gamma_1(\phi(\tau)).$$

Определение 3.1.8. Кривая называется **простой**, если она представляется простым путем (это значит, что в ее классе есть простой путь).

Упражнение 3: Доказать, что если один путь в классе эквивалентности простой, то остальные тоже простые.

Определение 3.1.9. Путь, представляющий данную кривую (из класса эквивалентности путей) l называется **параметризацией** этой кривой.

В дальнейшем будем рассматривать метрические пространства (X, ρ) как $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ с евклидовой метрикой.

Определение 3.1.10. Пусть l - простая кривая в \mathbb{R}^2 , $\gamma(t) = (x(t); y(t))$ - ее параметризация. Кривая l называется **гладкой**, если $\forall t$ $x(t), y(t)$ имеют непрерывные производные на $[\alpha, \beta]$ и $\nexists t_0 \in [\alpha, \beta]$ ($\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^2$), $x'(t_0) = 0$ и $y'(t_0) = 0$.

Определение 3.1.11. Пусть $l \subset \mathbb{R}^2$ (\mathbb{R}^3) и $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^2$ (\mathbb{R}^3) - параметризация кривой l .

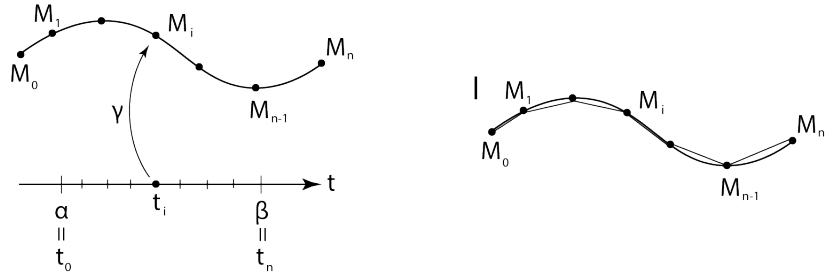
Пусть $\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = \beta$ - разбиение отрезка $[\alpha, \beta]$ и $M_i = \gamma(t_i)$, $i = \overline{0, n}$ - точка пути γ (кривая l):

$$M_i = \gamma(t_i) = (x(t_i); y(t_i))$$

Тогда отрезок $M_{i-1}M_i$ ($i = \overline{1, n}$) называется **звеном** кривой l . Объединение $\bigcup_i M_{i-1}M_i$ - ломаная, вписанная в l .

Периметром ломаной называется сумма длин ее звеньев:

$$p(M_0, M_1, \dots, M_n) = \sum_{i=1}^n |M_{i-1}M_i|$$



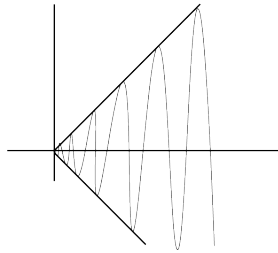
Определение 3.1.12. Если множество периметров ломаных, вписанных в данную кривую l - ограничено, то кривую l будем называть **спрямляемой**.

Определение 3.1.13. Если $p(M_0, M_1, \dots, M_n)$ - периметр ломаной, вписанной в кривую l , $S(l)$ - длина кривой, то по определению:

$$S(l) = \sup p(M_0, \dots, M_n),$$

где \sup берется по всем ломаным $\bigcup_i M_{i-1}M_i$, вписанным в l .

Пример 8. (неспрямляемой кривой)



Рассмотрим L - множество всех спрямляемых кривых на плоскости (\mathbb{R}^2). Введем $S : L \rightarrow \mathbb{R}$, то есть отображение S сопоставляет спрямляемую кривую l ее длину.

$S(l)$ - длина кривой l

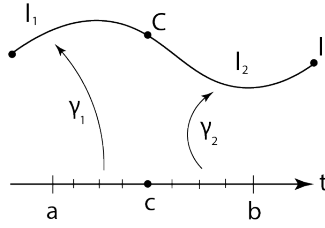
Теорема 3.1.1 (аддитивность длины кривой). Функция $S(l)$ является аддитивной, то есть если $l = l_1 \cup l_2$, то $S(l) = S(l_1) + S(l_2)$.

Более тонко: Пусть $\gamma : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ - параметризация спрямляемой кривой l , точка $c \in [a; b]$:

$\gamma_1 : [a; c] \rightarrow \mathbb{R}^2$ - параметризация кривой l_1 ,

$\gamma_2 : [c; b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ - параметризация кривой l_2 ,

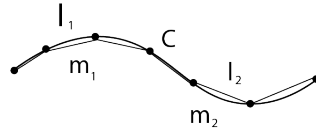
при этом $C = \gamma(c) = \gamma_1(c) = \gamma_2(c)$.



Тогда $S(l) = S(l_1) + S(l_2)$.

Доказательство. Пусть l - спрямляемая кривая. Покажем, что l_1 и l_2 - спрямляемые.

Обозначим за m_1 и m_2 - ломаные, вписанные в l_1 и l_2 соответственно. Тогда можно ввести m как $m = m_1 \cup m_2$ - ломаная, вписанная в l .

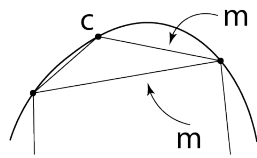


$p(m)$ - периметр ломаной, вписанной в l , $p(m) = p(m_1) + p(m_2) \leq S(l) \implies p(m_1) \leq S(l)$ и $p(m_2) \leq S(l) \implies l_1$ и l_2 - спрямляемые.

Пусть $S(l_1) = \sup_{m_1} p(m_1)$ и $S(l_2) = \sup_{m_2} p(m_2) \implies S(l_1) + S(l_2) \leq S(l)$

Обратно, пусть l_1 и l_2 - спрямляемые кривые. Покажем, что l - спрямляемая. Пусть m - некоторая ломаная, вписанная в l .

Возьмем $C \in l$. Пусть m' - ломаная, получаемая из ломаной m добавлением звеньев, проходящих через C .



Пусть m_1 - часть ломаной, вписанной в l_1 , m'_2 - часть ломаной, вписанной в l_2 . Тогда $p(m) \leq p(m') = p(m'_1) + p(m'_2) \leq S(l_1) + S(l_2) \implies S(l) = p(m) \leq S(l_1) + S(l_2)$.

Тогда имеем, что $S(l_1) + S(l_2) \leq S(l) \leq S(l_1) + S(l_2) \implies S(l) = S(l_1) + S(l_2)$. \square

3.2 Длина кривой как предел

Теорема 3.2.1. Пусть l - простая спрямляемая незамкнутая кривая в \mathbb{R}^2 и $\gamma : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ - ее параметризация. Пусть $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$ - разбиение отрезка $[a; b]$, этому разбиению соответствуют точки

M_0, M_1, \dots, M_n - соответствующая ломаная, вписанная в l ($M_i = \gamma(t_i)$), тогда:

$$S(l) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} p(m),$$

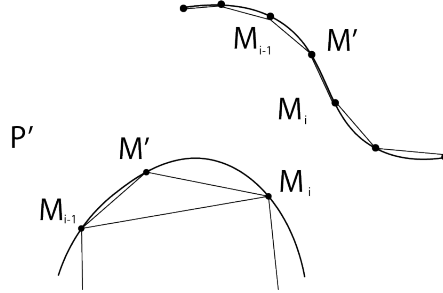
где $\lambda = \max_i \Delta t_i$, $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$.

Доказательство. (теоремы) Пусть l - простая спрямляемая незамкнутая кривая в \mathbb{R}^2 , $P' = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b\}$ - произвольное разбиение отрезка $[a; b]$.

$m(P')$ - ломаная, вписанная в l , соответствующая разбиению P . Пусть $\gamma : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ - параметризация кривой l , $\gamma(t) = (x(t); y(t))$, $t \in [a; b]$.

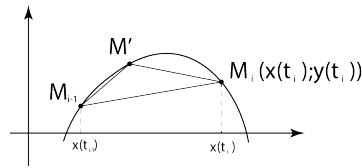
Лемма 3.2.1. Если разбиение P'' получено из разбиения P' добавлением точки на промежуток $(t_{i-1}; t_i)$, то периметр ломаной, соответствующий разбиению P' , не больше периметра ломаной, соответствующей разбиению P'' и $p(m(P')) \leq p(m(P'')) \leq p(m(P')) + 2(\omega_i(x(t)) + \omega_i(y(t)))$, где ω_i - колебания функции $x(t)$, $y(t)$:

$$\omega_i(x(t)) = \sup_{t', t'' \in [t_{i-1}; t_i]} (x(t') - x(t'')) = \sup_{t \in [t_{i-1}; t_i]} (x(t)) - \inf_{t \in [t_{i-1}; t_i]} (x(t))$$



Доказательство. (леммы) Ломаная $m(P'')$ получена из ломаной $m(P')$ путем замены звена $M_{i-1}M_i$ на два звена: $M_{i-1}M'$ и $M'M_i$.

Очевидно, что $p(m(P')) \leq p(m(P''))$.



$M_i = \gamma(t_i) = (x(t_i); y(t_i))$, $M' = (x(t'); y(t'))$, $M_{i-1} = (x(t_{i-1}); y(t_{i-1}))$
 $|M_{i-1}M'| + |M'M_i| \leq |x(t') - x(t_{i-1})| + |y(t') - y(t_{i-1})| + |x(t_i) - x(t')| + |y(t_i) - y(t')| \leq 2\omega_i(x(t)) + 2\omega_i(y(t))$, \sup берется на отрезке $[t_{i-1}; t_i]$.

В итоге, $p(m(P'')) \leq p(m(P')) + 2(\omega_i(x(t)) + \omega_i(y(t)))$.

Если не понятно: $p(m(P'')) = \sum_{k=1}^n |M_{k-1}M_k| = \sum_{k=1}^{i-1} |M_{k-1}M_k| + |M_{i-1}M'| + |M'M_i| + \sum_{k=i+1}^n |M_{k-1}M_k| \leq p(m(P')) + 2(\omega_i(x(t)) + \omega_i(y(t)))$. \square

(повтор) Пусть $\epsilon > 0$ задано. Выберем произвольное разбиение P' отрезка $[a; b]$: $p(m(P')) > S(l) - \frac{\epsilon}{2}$ (по определению \sup множества).

Пусть это разбиение состоит из n точек. Тогда выберем $\delta > 0$: $\forall t', t'' \in [a; b]: |t' - t''| < \delta \implies |x(t') - x(t'')| < \frac{\epsilon}{8n}; |y(t') - y(t'')| < \frac{\epsilon}{8n}$.

Пусть P'' - произвольное разбиение: $\lambda(P'') < \delta$. Покажем, что $p(m(P'')) \leq S(l)$ и $p(m(P'')) > S(l) - \frac{\epsilon}{2}$.

Рассмотрим $P''' = P' \cup P''$. Тогда $p(m(P''')) \geq p(m(P''))$. С другой стороны, P''' получена из P'' добавлением не более чем n точек. Тогда $p(m(P''')) \leq p(m(P'')) + \sum_{i=1}^n 2(\omega_i(x(t)) + \omega_i(y(t))) < S(l) + 4\frac{\epsilon}{8n}n = S(l) + \frac{\epsilon}{2}$. Получим, что:

$$p(m(P''')) < S(l) + \frac{\epsilon}{2}.$$

Так как P''' тоже получено из P' добавлением точек, то:

$$p(m(P''')) \geq p(m(P')) > S(l) - \frac{\epsilon}{2}.$$

Так же имеем, что $p(m(P''')) \leq p(m(P'')) + \frac{\epsilon}{2} \implies p(m(P'')) \geq p(m(P''')) - \frac{\epsilon}{2} \geq p(m(P')) - \frac{\epsilon}{2} > S(l) - \frac{\epsilon}{2} - \frac{\epsilon}{2} = S(l) - \epsilon$.

Так как $S(l) = \sup_m p(m(P))$, P - разбиение отрезка $[a; b] \implies$

$$p(m(P'')) \leq S(l) < S(l) + \epsilon.$$

Таким образом, если $\epsilon > 0$ задано, то возьмем произвольное разбиение P'' : $\lambda(P'') < \delta \implies S(l) - \epsilon < p(m(P'')) < S(l) + \epsilon \implies |p(m(P'')) - S(l)| < \epsilon \implies$

$$\lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} p(m(P)) = S(l).$$

□

Теорема 3.2.2 (формула для вычисления длины кривой). Пусть l - гладкая кривая; $\gamma : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ - ее параметризация (гладкая, то есть $\gamma(t) = (x(t); y(t))$, где $x(t)$ и $y(t)$ имеют непрерывные производные на $[a; b]$). Тогда l - спрямляема и:

$$S(l) = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

Доказательство. (теоремы) Возьмем разбиение:

$$P' = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b\}$$

Тогда:

$$p(m(P')) = \sum_{i=1}^n \sqrt{(x(t_i) - x(t_{i-1}))^2 + (y(t_i) - y(t_{i-1}))^2}$$

$$\forall i = \overline{1, n} \quad x(t_i) - x(t_{i-1}) = x'(\tau_i) \Delta t_i, \quad \tau_i \in [t_{i-1}; t_i], \quad y(t_i) - y(t_{i-1}) = y'(\bar{\tau}_i) \Delta t_i, \quad \bar{\tau}_i \in [t_{i-1}; t_i].$$

Тогда:

$$p(m(P')) = \sum_{i=1}^n \sqrt{(x'(\tau_i)\Delta t_i)^2 + (y'(\bar{\tau}_i)\Delta t_i)^2} = \sum_{i=1}^n \sqrt{(x'(\tau_i))^2 + (y'(\bar{\tau}_i))^2} \Delta t_i.$$

Рассмотрим функцию:

$$\phi(t) = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2},$$

где $\phi(t)$ - непрерывна на $[a; b] \implies \phi(t)$ - интегрируема на $[a; b]$, то есть:

$$\exists \lim_{\lambda(P') \rightarrow 0} \sigma = \int_a^b \phi(t) dt,$$

где $\sigma = \sum_{i=1}^n \phi(\tau_i) \Delta t_i = \sum_{i=1}^n \sqrt{(x'(\tau_i))^2 + (y'(\tau_i))^2} \Delta t_i$.

Лемма 3.2.2. $\forall a, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ верно неравенство:

$$\sqrt{a^2 + b_1^2} - \sqrt{a^2 + b_2^2} \leq |b_1 - b_2|$$

Доказательство. (леммы)

1. Если $a = 0$ - очевидно;

2. Если $a \neq 0 \implies \frac{(\sqrt{a^2+b_1^2}-\sqrt{a^2+b_2^2})(\sqrt{a^2+b_1^2}+\sqrt{a^2+b_2^2})}{\sqrt{a^2+b_1^2}-\sqrt{a^2+b_2^2}} = \frac{|b_1^2-b_2^2|}{\sqrt{a^2+b_1^2}-\sqrt{a^2+b_2^2}} =$
 $\frac{|b_1+b_2||b_1-b_2|}{\sqrt{a^2+b_1^2}-\sqrt{a^2+b_2^2}} < \frac{|b_1+b_2|}{|b_1|+|b_2|} |b_1-b_2| \leq |b_1-b_2|$, потому что $\frac{|b_1+b_2|}{|b_1|+|b_2|} \leq 1$.

□

Покажем, что:

$$\lim_{\lambda(P') \rightarrow 0} (p(m(P')) - \sigma) = 0.$$

$$|p(m(P')) - \sigma| = \left| \sum_{i=1}^n \sqrt{(x'(\tau_i))^2 + (y'(\bar{\tau}_i))^2} \Delta t_i - \sum_{i=1}^n \sqrt{(x'(\tau_i))^2 + (y'(\tau_i))^2} \Delta t_i \right| =$$

$$= \left| \sum_{i=1}^n (\sqrt{(x'(\tau_i))^2 + (y'(\bar{\tau}_i))^2} - \sqrt{(x'(\tau_i))^2 + (y'(\tau_i))^2}) \Delta t_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |\sqrt{(x'(\tau_i))^2 + (y'(\bar{\tau}_i))^2} - \sqrt{(x'(\tau_i))^2 + (y'(\tau_i))^2}| \Delta t_i$$

$$\stackrel{lemma}{\leq} \sum_{i=1}^n |y'(\bar{\tau}_i) - y'(\tau_i)| \Delta t_i \leq \sum_{i=1}^n \omega_i(y(t)) \Delta t_i$$

Напоминание:

$$\omega_i(t) = \sup_{t', t'' \in [t_{i-1}; t_i]} |f(t') - f(t'')|$$

Так как $y'(t)$ - непрерывная функция $\implies y'(t)$ - интегрируема на $[a; b] \implies \sum_{i=1}^n \omega_i(y') \Delta t_i \rightarrow 0$ (по критерию интегрируемости) \implies

$$\lim_{\lambda(P') \rightarrow 0} (p(m(P')) - \sigma) = 0.$$

$$\lim_{\lambda(P') \rightarrow 0} (p(m(P'))) = \lim_{\lambda(P') \rightarrow 0} \sigma = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt.$$

□

Следствие. (теоремы)

1. Пусть l - график функции $y = y(x)$.

Тогда:

$$\begin{cases} x = x \\ y = y(x) \end{cases} \implies S(l) = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx$$

2. Пусть $r = r(\phi)$ - уравнение кривой в полярной системе координат.

$x = r \cos \phi$, $y = r \sin \phi$, $\phi \in [\alpha, \beta]$. Тогда:

$$\begin{cases} x(\phi) = r(\phi) \cos \phi \\ y(\phi) = r(\phi) \sin \phi \end{cases} \implies \begin{cases} x'(\phi) = r'(\phi) \cos \phi - r(\phi) \sin \phi \\ y'(\phi) = r'(\phi) \sin \phi + r(\phi) \cos \phi \end{cases}$$

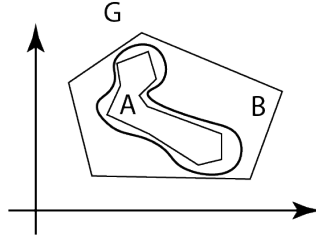
$$(x'(\phi))^2 + (y'(\phi))^2 = (r')^2 \cos^2 \phi - 2r'r \sin \phi \cos \phi + r^2 \sin^2 \phi + (r')^2 \sin^2 \phi + 2r'r \sin \phi \cos \phi + r^2 \cos^2 \phi = (r')^2 + r^2.$$

Тогда формула для вычисления длины кривой в полярной системе координат:

$$S(l) = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(r'(\phi))^2 + (r(\phi))^2} d\phi$$

3.3 Площадь плоской фигуры

Определение 3.3.1. Многоугольник - множество точек плоскости, границей которого является объединение конечного числа непересекающихся простых ломаных, при этом это объединение само является замкнутой ломаной.



Определение 3.3.2. Пусть G - множество на плоскости, $G \subset \mathbb{R}^2$. Будем говорить, что многоугольник A **вписан** в G , если $A \subset G$ и A **описан около** G , если $G \subset A$.

Определение 3.3.3. Множество $G \subset \mathbb{R}^2$ называется **измеримым по Жордану** (или **квадрируемым**), если:

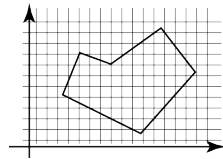
$$S_* = \sup_{A \subset G} S(A) = S^* = \inf_{B \supset G} S(B),$$

где \sup берется по всем многоугольникам, вписанным в G , а \inf - по всем многоугольникам, описанным около G . При этом их общее значение $S = S_* = S^*$ называется **площадью G** , или **мерой Жардана**.

S_* - **внутренняя** мера, S^* - **внешняя** мера.

Другими словами, множество $G \subset \mathbb{R}^2$ квадратуемо, если внутренняя и внешняя меры совпадают.

Здесь $S(A)$, $S(B)$ - площади многоугольников A и B . Многоугольник A можно разбить на конечное число прямоугольников и прямоугольных треугольников:



$$S_{\square} = ab; \quad S_{\triangle} = \frac{1}{2}ab$$

Пример 9. (из определения)

1. Квадрируемые множества на плоскости.

Круг с границей:

$$x^2 + y^2 = 1$$

Упражнение: доказать, что круг - квадратуемое множество.

2. Неквадрируемые множества на плоскости.

Множество точек единичного квадрата с рациональными координатами:

$$G = (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) \cap ([0; 1] \times [0; 1])$$

Вписанный многоугольник $A = \emptyset$, $S(A) = 0$. Многоугольник $B = [0; 1] \times [0; 1]$ имеет площадь равную 1 ($S(B) = 1$).

$$S_* = 0, \quad S^* = \inf_{B' \supset G} S(B') = S(B) = 1 \quad (S_* \neq S^*)$$

Теорема 3.3.1 (критерий квадратуемости). Множество $G \subset \mathbb{R}^2$ квадратуемо $\iff \forall \epsilon > 0 \exists$ многоугольники A и B :

1. $A \subset G$, $B \supset G$,
2. $S(B) - S(A) < \epsilon$.

Доказательство. (теоремы)

" \rightarrow " Пусть $G \subset \mathbb{R}^2$ квадратуемо $\implies S_* = S^* = S'$.

Выберем $A \subset G$: $S(A) > S - \frac{\epsilon}{2}$ ($\epsilon > 0$ - задано) - по определению \sup .

Выберем $B \supset G$: $S(B) < S + \frac{\epsilon}{2}$.

$$S(B) - S(A) < (S + \frac{\epsilon}{2}) - (S - \frac{\epsilon}{2}) = \epsilon$$

” \leftarrow ” Пусть $\forall \epsilon > 0 \exists$ многоугольники A и B , $A \subset G$, $B \supset G$ и $S(B) - S(A) < \epsilon$. Докажем, что G - квадратуемо.

$$S(B) - S(A) < \epsilon \implies S(B) - \epsilon < S(A) \leq S_* \leq S^* \leq S(B)$$

Так как $S(B) - S(A) < \epsilon \implies S^* - S_* < \epsilon$. Так как $\epsilon > 0$ - произвольное число $\implies S^* = S_*$, то есть G - квадратуемо. \square

3.4 Классы квадратуемых областей

Определение 3.4.1. Криволинейная трапеция - часть плоскости, ограниченная прямыми $x = a$, $x = b$, графиком функции $y = f(x)$ и осью Ox .
РИСУНОК

Теорема 3.4.1. Криволинейная трапеция квадратуема и ее площадь равна:

$$S = \int_a^b f(x) dx,$$

где $f(x)$ - непрерывна на $[a; b]$, $f(x) \geq 0$.

Доказательство. $ABCD$ - криволинейная трапеция, ограничена $x = a$, $x = b$, $y = 0$, а так же графиком функции $y = f(x)$. Пусть $\epsilon > 0$ задано. Выберем $\delta > 0 : \forall x', x'' : |x' - x''| < \delta \implies |f(x') - f(x'')| < \frac{\epsilon}{b-a}$ (так как $f(x)$ - непрерывна на $[a; b] \implies f(x)$ равномерно непрерывна на $[a; b]$).
РИСУНОК

Разобьем отрезок $[a; b]$ точками $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$, таким образом, что бы $\max_i |x_i - x_{i-1}| < \delta$. Пусть:

$$m_i = \min_{x \in [x_{i-1}; x_i]} f(x), \quad M_i = \max_{x \in [x_{i-1}; x_i]} f(x).$$

Построим многоугольник A , вписанный в $ABCD$ и многоугольник B , описанный около $ABCD$. Многоугольник A состоит из прямоугольников со сторонами Δx_i и m_i , многоугольник B состоит из прямоугольников со сторонами Δx_i и M_i .

$$\begin{aligned} S(A) &= \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i, \quad S(B) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i, \\ S(B) - S(A) &= \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \Delta x_i < \sum_{i=1}^n \frac{\epsilon}{b-a} \Delta x_i = \\ &= \frac{\epsilon}{b-a} \sum_{i=1}^n \Delta x_i = \frac{\epsilon}{b-a} (b-a) = \epsilon \implies \end{aligned}$$

по критерию квадратуемости, криволинейная трапеция $ABCD$ - квадратуема $\implies S_* = S^* = S_{ABCD}$. С другой стороны, $S(B) - S(A) = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n \omega_i(f(x)) \Delta x_i$.

Так как f - непрерывна на $[a; b] \implies f \in R[a; b] \implies \sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i \rightarrow 0 \implies S_{ABCD} = \int_a^b = \int_a^b f(x) dx = S^* = S_*$. \square

Определение 3.4.2. Фигура на плоскости, ограниченная лучами $\phi = \alpha$ и $\phi = \beta$ и кривой $\rho = \rho(\phi)$ называется **криволинейным сектором**.

Теорема 3.4.2. Пусть криволинейный сектор Ω ограничен лучами $\phi = \alpha$, $\phi = \beta$ и кривой $\rho = \rho(\phi)$. Тогда:

$$S(\Omega) = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\phi) d\phi,$$

где $\rho(\phi)$ - непрерывна на $[\alpha; \beta]$. РИСУНОК

Доказательство. Разобьем сектор Ω лучами $\alpha = \phi_0 < \phi_1 < \dots < \phi_{n-1} < \phi_n = b$. Пусть:

$$m_i = \min_{\phi \in [\phi_{i-1}; \phi_i]} \rho(\phi), \quad M_i = \max_{\phi \in [\phi_{i-1}; \phi_i]} \rho(\phi).$$

Построим криволинейные сектора с радиусами m_i и M_i . Пусть $\underline{\Omega}$ - объединение секторов в радиусом m_i , а $\overline{\Omega}$ - объединение секторов с радиусом M_i .

$$S(\underline{\Omega}) = \sum_{i=1}^n \pi m_i^2 \frac{\Delta \phi_i}{2\pi} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i^2 \Delta \phi_i,$$

$$S(\overline{\Omega}) = \sum_{i=1}^n \pi M_i^2 \frac{\Delta \phi_i}{2\pi} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n M_i^2 \Delta \phi_i.$$

Заметим, что $S(\underline{\Omega}) \leq S_{kriv.sector} \leq S(\overline{\Omega})$ (*).

Заметим, что $S(\underline{\Omega})$ - нижняя интегральная сумма функции $\frac{\rho^2(\phi)}{2}$, а $S(\overline{\Omega})$ - верхняя интегральная сумма этой же функции. Функция $\frac{\rho^2(\phi)}{2}$ - непрерывна (так как $\rho(\phi)$ - непрерывна) \implies интегрируема на $[\alpha; \beta] \implies \exists \lim_{\max \Delta \phi_i \rightarrow 0} S(\underline{\Omega}) = \lim_{\max \Delta \phi_i \rightarrow 0} S(\overline{\Omega}) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\rho^2(\phi)}{2} d\phi \implies$ учитывая неравенство (*) и лемму о двух милиционерах:

$$S_{kriv.sector} = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\phi) d\phi$$

и криволинейный сектор - квадрируемый. \square

Глава 4

Несобственные интегралы

Определение 4.0.1. Пусть $f : [a; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ (задана на луче) и $\forall b \in [a; +\infty)$ $f \in R[a; b]$. Рассмотрим:

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx,$$

этот предел называется **несобственным интегралом** от функции $f(x)$ на луче $[a; +\infty)$.

Если этот предел существует и конечен, то несобственный интеграл называется **сходящимся**, иначе **расходящимся**. Обозначение:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$$

Определение 4.0.2. (продолжение определения)

$$1. \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_2^b \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \rightarrow +\infty} (F(b) - F(2)) = \lim_{b \rightarrow +\infty} (-\frac{1}{b} + \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}.$$

Аналогично, пусть функция $f : (-\infty; a] \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in R[a; b]$, $\forall b \in (-\infty; a]$.

$$\lim_{b \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx,$$

этот предел называется **несобственным интегралом** от функции $f(x)$ на луче $(-\infty; a]$.

Если этот предел существует и конечен, то соответственно несобственный интеграл - сходящийся. Обозначается:

$$\int_{-\infty}^a f(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{b \rightarrow -\infty} \int_b^a f(x) dx.$$

Аналогично:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{c \rightarrow +\infty, b \rightarrow -\infty} \int_b^c f(x) dx,$$

где $c \rightarrow +\infty, b \rightarrow -\infty$ - независимые друг от друга ($\forall b, c \ f(x) \in R[b; c]$).

РИСУНОК

2. Далее, пусть $f : [a; b) \rightarrow \mathbb{R} : \forall c \in [a; b) f \in R[a; c]$. Положим:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c \rightarrow b} \int_a^c f(x)dx.$$

Эта величина называется **несобственным интегралом** от функции f на полуинтервале $[a; b)$.

Если предел существует, то несобственный интеграл называется **сходящимся**, иначе **расходящимся**.

Аналогично, пусть $f : (a; b] \rightarrow \mathbb{R}$, причем $\forall c \in (a; b] \ f \in R[c; b]$:

$$\int_a^b f(x)dx \stackrel{def}{=} \lim_{c \rightarrow a} \int_c^b f(x)dx -$$

несобственный интеграл от функции $f(x)$ на полуинтервале $(a; b]$.

Аналогично, пусть $f : (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$, причем $\forall c, d \in (a; b) \ f \in R[c, d]$. Тогда:

$$\int_a^b f(x)dx \stackrel{def}{=} \lim_{c \rightarrow a, d \rightarrow b} \int_c^d f(x)dx,$$

(где $c \rightarrow a, d \rightarrow b$ - независимые друг от друга) - несобственный интеграл от $f(x)$ на $(a; b)$

3. Пусть $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ и $\exists c \in (a; b) : f$ - неограниченана в точке c .

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \int_a^{c-\epsilon} f(x)dx + \int_{c+\epsilon}^b f(x)dx = \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_a^{c-\epsilon} f(x)dx + \lim_{\epsilon} \int_{c+\epsilon}^b f(x)dx. \end{aligned}$$

Если \lim существует, то интеграл является сходящимся.

В дальнейшем будем рассматривать:

$$\int_a^\omega f(x)dx,$$

где $\omega = +\infty, -\infty, b$.

Теорема 4.0.1. Пусть $\forall b \in [a; \omega) \ f \in R[a; b]$.

1. Тогда $\int_a^\omega f(x)dx$ сходится $\iff \forall b \in [a; \omega) \ \int_b^\omega f(x)dx$ сходится и

$$\int_a^\omega f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^\omega f(x)dx$$

РИСУНОК

2.

$$\lim_{b \rightarrow \omega} \int_b^\omega f(x) dx = 0$$

3. $\forall c \in \mathbb{R}$

$$\int_a^\omega c f(x) dx = c \int_a^\omega f(x) dx$$

(то есть если $c \int_a^\omega f(x) dx$ сходится, то сходится $\int_a^\omega c(x) dx$ и наоборот, и они равны)

4. Если $\int_a^\omega f(x) dx$ и $\int_a^\omega g(x) dx$ сходятся, то сходится и

$$\int_a^\omega (f(x) + g(x)) dx = \int_a^\omega f(x) dx + \int_a^\omega g(x) dx$$

Доказательство. (теоремы)

1. Пусть $b \in [a; \omega)$. Выберем точку $c : b < c < \omega$. Тогда

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx \quad (*).$$

Если $\int_a^\omega f(x) dx$ сходится $\implies \exists \lim_{d \rightarrow \omega} \int_a^d f(x) dx$, $d \in (a; \omega)$ (общее определение) в равенстве (*) перейдем к пределу при $c \rightarrow \omega$, получим

$$\lim_{c \rightarrow \omega} \int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \lim_{c \rightarrow \omega} \int_b^c f(x) dx,$$

где если $\exists \lim_{c \rightarrow \omega} \int_a^c f(x) dx$, то $\exists \lim_{c \rightarrow \omega} \int_b^c f(x) dx$.

Таким образом:

$$\int_a^\omega f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^\omega f(x) dx.$$

В обратную сторону аналогично.

2. Докажем из 1. Имеем:

$$\begin{aligned} \int_a^\omega f(x) dx &= \int_a^b f(x) dx + \int_b^\omega f(x) dx; \\ \int_b^\omega f(x) dx &= \int_a^\omega f(x) dx - \int_a^b f(x) dx \quad (**) \end{aligned}$$

При $b \rightarrow \omega$ в равенстве (**) в правой части получаем:

$$\int_a^\omega f(x) dx - \int_a^\omega f(x) dx = 0.$$

$$\lim_{b \rightarrow \omega} \int_b^\omega f(x) dx = \int_a^\omega f(x) dx - \lim_{b \rightarrow \omega} \int_a^b f(x) dx = \int_a^\omega f(x) dx = 0$$

3. Следует из свойств предела.

4. Следует из свойств предела.

□

Теорема 4.0.2 (Критерий Коши). Пусть $\forall b \in [a; \omega)$ $f \in R[a; b]$.

$\int_a^\omega f(x)dx$ сходится $\iff \forall \epsilon > 0 \exists B \in [a; \omega) : \forall b_1, b_2 \in (a; \omega)$ и $b_1, b_2 > B$ верно неравенство:

$$|\int_{b_1}^{b_2} f(x)dx| < \epsilon$$

РИСУНОК

Доказательство. Рассмотрим функцию $F(b) = \int_a^b f(x)dx$.

Имеем, что $\int_a^\omega f(x)dx$ сходится $\iff \exists \lim_{b \rightarrow \omega} \int_a^b f(x)dx \iff \forall \epsilon > 0 \exists B \in (a; \omega) : \forall b_1, b_2 : B < b_1, b_2 < \omega$ $|F(b_1) - F(b_2)| < \epsilon$ (критерий Коши существования предела $F(b)$).

$$\begin{aligned} |F(b_1) - F(b_2)| &= |\int_a^{b_1} f(x)dx - \int_a^{b_2} f(x)dx| = \\ &= |-(\int_{b_1}^a f(x)dx + \int_a^{b_2} f(x)dx)| = |\int_{b_1}^{b_2} f(x)dx| < \epsilon. \end{aligned}$$

□

Теорема 4.0.3 (несобственная сходимость интеграла от неотрицательной функции). Пусть $f \in R[a; b]$ для $\forall b \in (a; \omega)$ и $f(x) \geq 0 \forall x \in [a; \omega)$.

$\int_a^\omega f(x)dx$ сходится $\iff \exists M > 0 : \forall b \in (a; \omega)$

$$\int_a^b f(x)dx < M.$$

РИСУНОК

Доказательство. Рассмотрим $F(b) = \int_a^b f(x)dx$. Так как $f(x) \geq 0 \forall x \in [a; \omega) \implies F(b) \geq 0$ на $[a; \omega) \implies$ по теореме о пределе монотонной функции:

$$\exists \lim_{b \rightarrow \omega} F(b) \iff \exists M > 0 : \forall b \in [a; \omega) F(b) < M,$$

или

$$\int_a^b f(x)dx < M.$$

□

Теорема 4.0.4 (первый признак сравнения). Если $\forall x \in [a; \omega)$ $f(x) \leq g(x)$ и $\forall b \in [a; \omega)$ $f, g \in R[a; b]$, $f(x) \geq 0$, $g(x) \geq 0$, тогда:

1. Если $\int_a^\omega g(x)dx$ - сходится $\implies \int_a^\omega f(x)dx$ - сходится.
2. Если $\int_a^\omega f(x)dx$ - расходится $\implies \int_a^\omega g(x)dx$ - расходится.

Доказательство. (теоремы)

Если $f(x) \leq g(x) \forall x \in [a; \omega)$ \implies

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx,$$

$$\lim_{b \rightarrow \omega} \int_a^b f(x)dx \leq \lim_{b \rightarrow \omega} \int_a^b g(x)dx.$$

Далее, доказательство следует из теоремы о сходимости несобственного интеграла от неотрицательной функции. \square

Теорема 4.0.5 (второй признак сравнения). Если $\forall x \in [a; \omega) f(x) > 0, g(x) > 0$ и $\exists \lim_{x \rightarrow \omega} \frac{f(x)}{g(x)} = A$ (либо 0, либо $+\infty$, либо $const \neq 0$), тогда:

1. Если $A = +\infty$, то из расходимости $\int_a^\omega g(x)dx$ следует расходимость $\int_a^\omega f(x)dx$, а из сходимости $\int_a^\omega f(x)dx$ следует сходимость $\int_a^\omega g(x)dx$.
2. Если $A = 0$, то из расходимости $\int_a^\omega f(x)dx$ следует расходимость $\int_a^\omega g(x)dx$, а из сходимости $\int_a^\omega g(x)dx$ следует сходимость $\int_a^\omega f(x)dx$.
3. Если $A = const \neq 0$, то интегралы $\int_a^\omega f(x)dx$ и $\int_a^\omega g(x)dx$ ведут себя одинаково.

Доказательство. Начнем с пункта номер 3.:

3. Пусть $0 < A < +\infty$. Тогда $\exists B \in (a; \omega) : \forall x \in (B; \omega), \forall \epsilon > 0$

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - A \right| < \epsilon \implies A - \epsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < A + \epsilon (*).$$

Более того, можно считать, что $A - \epsilon > 0$. В (*) домножим обе части неравенства на $g(x) > 0$:

$$g(x)(A - \epsilon) < f(x) < g(x)(A + \epsilon).$$

Если $\int_a^\omega g(x)dx \implies \int_a^\omega g(x)(A + \epsilon)dx$ сходится \implies по первому признаку сравнения, сходится $\int_a^\omega f(x)dx$.

Если $\int_a^\omega f(x)dx$ сходится \implies по первому признаку сравнения сходится $\int_a^\omega g(x)(A - \epsilon)dx \implies \int_a^\omega g(x)dx$.

Аналогично, если $\int_a^\omega g(x)dx$ расходится, то $\int_a^\omega g(x)(A - \epsilon)dx$ - расходится \implies по первому признаку сравнения расходится $\int_a^\omega f(x)dx$.

Если $\int_a^\omega f(x)dx$ расходится, то по первому признаку сравнения $\int_a^\omega g(x)(A + \epsilon)dx$ расходится $\implies \int_a^\omega g(x)dx$ расходится.

2. Если $A = 0$, то есть $\lim_{x \rightarrow \omega} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, то при

$f(x) = \alpha(x)g(x)$, где $\alpha(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \omega$,

$f(x) = o_{x \rightarrow \omega}(g(x)) \implies \exists B \in [a; \omega)$ такая, что $\forall x \in (B; \omega) f(x) < \frac{1}{2}g(x) \implies$
по первому признаку сравнения, если $\int_a^\omega g(x)dx$ сходится $\implies \int_a^\omega f(x)dx$
сходится, если $\int_a^\omega f(x)dx$ расходится $\implies \int_a^\omega g(x)dx$ - расходится.

1. Если $A = +\infty$, то есть $\lim_{x \rightarrow \omega} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty \implies \exists B \in [a; \omega)$ такая, что
 $\forall x \in (B; \omega) f(x) > g(x) \implies$ по первому признаку сравнения, из сходимости
 $\int_a^\omega f(x)dx \implies$ сходимость $\int_a^\omega g(x)dx$ и из расходимости $\int_a^\omega g(x)dx \implies$
расходимость $\int_a^\omega f(x)dx$. \square

Пример 10. Задача

1. Исследуем на сходимость $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^4}$, где $a > 0$:

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b \frac{dx}{x^4} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left\{ \begin{array}{ll} \ln x, & p = 1 \\ \frac{x^{1-p}}{1-p}, & p \neq 1 \end{array} \right\} \Big|_a^b =$$

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \left\{ \begin{array}{ll} \ln b - \ln a, & p = 1 \\ \frac{b^{1-p}}{1-p} - \frac{a^{1-p}}{1-p}, & p \neq 1 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ll} +\infty, & p = 1 \\ +\infty, & 1-p > 0 \\ -\frac{a^{1-p}}{1-p}, & p > 1 \end{array} \right\} \implies$$

$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leq 1$.

2. Исследуем на сходимость при $a > 0$:

$$\int_0^a \frac{dx}{(a-x)^p} = \lim_{b \rightarrow a} \int_0^b \frac{dx}{(a-x)^p} = \lim_{b \rightarrow a} - \int_0^b \frac{d(a-x)}{(a-x)^p} =$$

$$\lim_{b \rightarrow a} \left\{ \begin{array}{ll} -\ln|a-x|, & p = 1 \\ \frac{1}{p-1}(a-x)^{1-p}, & p \neq 1 \end{array} \right\} \Big|_0^b =$$

$$\lim_{b \rightarrow a} \left\{ \begin{array}{ll} -\ln|a-b| + \ln|a|, & p = 1 \\ \frac{1}{p-1}(a-b)^{1-p} - \frac{1}{p-1}a^{1-p}, & p \neq 1 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ll} +\infty, & p = 1 \\ \frac{a^{1-p}}{p-1}, & 1-p > 0 \\ +\infty, & 1-p < 0 \end{array} \right\} \implies$$

$$\int_0^a \frac{dx}{(a-x)^p}, (a > 0) \text{ сходится при } p < 1, \text{ расходится при } p \geq 1.$$

3. Теперь:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \int_0^1 \frac{dx}{x^p} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} - \text{расходящаяся для } \forall p.$$

4. Теперь:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\ln x} = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\ln x} + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\ln x}.$$

Рассмотрим $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ - сходится.

Рассмотрим $-\int_0^{\frac{1}{2}} -\frac{dx}{\ln x} : f(x) = -\frac{1}{\ln x}, g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}},$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{\ln x}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{\sqrt{x}}{\ln x} \right) = 0 -$$

по второму признаку сравнения, $-\int_0^{\frac{1}{2}} -\frac{dx}{\ln x}$ - сходится.

Рассмотрим $-\int_{\frac{1}{2}}^1 -\frac{dx}{\ln x}.$

Рассмотрим $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{1-x}$ - расходится.

$$f(x) = -\frac{1}{\ln x}, g(x) = \frac{1}{1-x},$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\frac{1}{\ln x}}{\frac{1}{1-x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\frac{1}{x}} = 1 \implies$$

по второму признаку сравнения $\implies -\int_{\frac{1}{2}}^1 -\frac{dx}{\ln x}$ - расходится $\implies \int_0^1 \frac{dx}{\ln x}$ - расходится.

Определение 4.0.3. Пусть $\forall b \in [a; \omega) f \in R[a; b]$.

$\int_a^\omega f(x)dx$ называется **абсолютно сходящимся**, если сходится $\int_a^\omega |f(x)|dx$.

Теорема 4.0.6. Если $\int_a^\omega |f(x)|dx$ сходится, то $\int_a^\omega f(x)dx$ тоже сходится (или если интеграл абсолютно сходящийся, то он сходящийся).

При этом:

$$\left| \int_a^\omega f(x)dx \right| \leq \int_a^\omega |f(x)|dx$$

Доказательство. Пусть $\int_a^\omega |f(x)|dx$ - сходится. Пусть $\epsilon > 0$ задано.

Выберем $B \in [a; \omega) : \forall b_1, b_2 \in (B, \omega) :$

$$\left| \int_{b_1}^{b_2} |f(x)|dx \right| < \epsilon,$$

но

$$\left| \int_{b_1}^{b_2} f(x)dx \right| \leq \int_{b_1}^{b_2} |f(x)|dx = \left| \int_{b_1}^{b_2} |f(x)|dx \right| < \epsilon \implies$$

по критерию Коши, $\int_a^\omega f(x)dx$ - сходится.

Теперь $\forall b \in [a; \omega) \left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$.

Переходя к пределу при $b \rightarrow \omega$, получаем:

$$\left| \int_a^\omega f(x)dx \right| \leq \int_a^\omega |f(x)|dx.$$

□

Следствие (признак Вейерштрасса). Если $\forall x \in [a; \omega) |f(x)| \leq g(x)$ и $\int_a^\omega g(x)dx$ сходится, то $\int_a^\omega f(x)dx$ сходится.

Доказательство. Самостоятельно. \square

Определение 4.0.4. Если $\int_a^\omega |f(x)|dx$ расходится, а $\int_a^\omega f(x)dx$ сходится, то \int_a^ω называется **условно сходящимся**.

Теорема 4.0.7 (признак Абеля). Если:

1. \int_a^ω сходится,
2. $g(x)$ монотонна и ограничена на $[a; \omega)$,

то $\int_a^\omega f(x)g(x)dx$ - сходится.

Теорема 4.0.8 (признак Дирихле). Если:

1. Функция $F(b) = \int_a^b f(x)dx$ ограничена на $[a; \omega)$, то есть $\exists M > 0 : \forall b \in [a; \omega)$

$$|\int_a^b f(x)dx| \leq M,$$

2. $g(x)$ - монотонна на $[a; \omega)$ и $g(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \omega$. Тогда $\int_a^\omega f(x)g(x)dx$ - сходится.

Доказательство. (будем использовать критерий Коши)

Пусть $\epsilon > 0$ задано. Рассмотрим

$$|\int_{b_1}^{b_2} f(x)g(x)dx|$$

$$\begin{aligned} 2nd\ th. \overset{about\ mid}{=} & |g(b_1) \int_{b_1}^\xi f(x)dx + g(b_2) \int_\xi^{b_2} f(x)dx| = |b_1 \leq \xi \leq b_2| \leq |g(b_1)| * \\ & |\int_{b_1}^\xi f(x)dx| + |g(b_2)| * |\int_\xi^{b_2} f(x)dx| (*) \end{aligned}$$

1. Пусть выполнены условия признака Абеля. Пусть $L > 0 : \forall x \in [a; \omega) |g(x)| \leq L$.

Возьмем $B \in [a; \omega) : \forall b_1, b_2 \in (B; \omega) |\int_{b_1}^{b_2} f(x)dx| \leq \frac{\epsilon}{2L}$ (так как $\int_a^\omega f(x)dx$ - сходится). Тогда $(*) < L \frac{\epsilon}{2L} + L \frac{\epsilon}{2L} = \epsilon \implies$ по критерию Коши: $\int_a^\omega f(x)g(x)dx$ - сходится.

2. Пусть выполнены условия признака Дирихле: $\exists M > 0 : \forall b \in [a; \omega) |\int_a^b f(x)dx| \leq M$. Возьмем $B : \forall x \in [B; \omega) |g(x)| < \frac{\epsilon}{2M}$ (в силу условия 2.). Тогда $(*) < M \frac{\epsilon}{2M} + \frac{\epsilon}{2M} = \epsilon \implies \int_a^\omega f(x)g(x)dx$ - сходится.

\square

Теорема 4.0.9 (о замене переменной в несобственном интеграле). Пусть $\forall b \in [a; \omega), f \in C[a; b]$ (множество непрерывных функций), функция $x = \phi(t) :$

1. $\phi : [\alpha; \omega_1) \rightarrow [a; \omega)$,
2. $\phi(\alpha) = a$, при $t \rightarrow \omega_1$, $\phi(t) \rightarrow \omega$,
3. $\phi(t)$ монотонно возрастает на $[\alpha; \omega_1)$,
4. $\phi'(t)$ непрерывна на $[\alpha; \omega_1)$,

Тогда интегралы $\int_a^\omega f(x)dx$ и $\int_\alpha^{\omega_1} f(\phi(t))\phi'(t)dt$ ведут себя одинаково и равны между собой.

Доказательство. Самостоятельно.

□

Глава 5

Дифференциальное исчисление функций многих переменных

5.1 Линейные нормированные пространства

Определение 5.1.1. **Линейным пространством** называется четверка $(X, K, +, *)$, где X - множество, K - поле, $+$ - операция сложения на X ($+$: $X \times X \rightarrow X$), $*$ - операция умножения элемента поля K на элемент множества X ($*$: $K \times X \rightarrow X$).

При этом выполняются следующие аксиомы:

1. $\langle X, + \rangle$ - абелева группа;
2. (a) $\forall \alpha, \beta \in K$ и $\forall x \in X$ $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$,
(b) $\forall x, y \in X, \forall \alpha \in K$ $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$,
(c) $\forall \alpha, \beta \in K, \forall x \in X$ $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$,
(d) $\forall x \in X, 1 \in K$ $1x = x$.

Определение 5.1.2. **Линейным нормированным пространством** называется пара $(X, \|\cdot\|)$, где X - линейное пространство над полем \mathbb{R} , а $\|\cdot\|$ - функция из X в \mathbb{R} .

$\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$, причем выполнены следующие аксиомы для нее:

1. $\|x\| = 0 \iff x = \bar{0}$ (читается "норма от x "),
2. $\forall \lambda \in \mathbb{R} \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$,
3. $\forall x, y \in X \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (неравенство треугольника).

Функция $\|\cdot\|$ называется **нормой**.

Пример 11. ЛНП:

1. $X = \mathbb{R}, \forall x \in X \quad ||x|| = |x|$ (норма = модулю по свойствам нормы),
2. $X = \mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$ (n раз), $\forall x \in X \quad ||x|| = (\sum_{k=1}^n a_k^2)^{\frac{1}{2}}, x = (a_1, \dots, a_n) \in X$. Покажем, что это норма:
 1., 2. - очевидно. Докажем, что $\forall x, y \in X \quad ||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$, то есть докажем, что $(\sum_{k=1}^n (x_k + y_k)^2)^{\frac{1}{2}} \leq (\sum_{k=1}^n x_k^2)^{\frac{1}{2}} + (\sum_{k=1}^n y_k^2)^{\frac{1}{2}} (\Delta)$.
 Рассмотрим $\sum_{k=1}^n (x_k + y_k)^2 = \sum_{k=1}^n x_k^2 + 2 \sum_{k=1}^n x_k y_k + \sum_{k=1}^n y_k^2 \leq |$
 используем неравенство Назарова-Заблоцкого (Коши-Бунковского)
 $\sum_{k=1}^n x_k y_k \leq (\sum_{k=1}^n x_k^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_{k=1}^n y_k^2)^{\frac{1}{2}} \leq \sum_{k=1}^n x_k^2 + 2(\sum_{k=1}^n x_k^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_{k=1}^n y_k^2)^{\frac{1}{2}} + \sum_{k=1}^n y_k^2 = [(\sum_{k=1}^n x_k^2)^{\frac{1}{2}} + (\sum_{k=1}^n y_k^2)^{\frac{1}{2}}]^2$.

Имеем:

$$\sum_{k=1}^n (x_k + y_k)^2 \leq [(\sum_{k=1}^n x_k^2)^{\frac{1}{2}} + (\sum_{k=1}^n y_k^2)^{\frac{1}{2}}]^2 \implies$$

приходим к (Δ) операцией взятия корня от обеих частей неравенства

$$\implies (\sum_{k=1}^n (x_k + y_k)^2)^{\frac{1}{2}} \leq (\sum_{k=1}^n x_k^2)^{\frac{1}{2}} + (\sum_{k=1}^n y_k^2)^{\frac{1}{2}}.$$

3. $X = \mathbb{R}^n, \forall x = (x_1, \dots, x_n) \in X \quad ||x|| = \max_{k=1, n} |x_k|$.

Такое ЛНП обозначается \mathbb{R}_{∞}^n .

4. $X = \mathbb{R}^n, \forall x = (x_1, \dots, x_n) \in X \quad ||x|| = (\sum_{k=1}^n x_k^p)^{\frac{1}{p}}, p > 1$.

Упражнение: доказать, что введенная функция есть норма, используя неравенство Левановича (Гельдера):

$$\sum_{k=1}^n x_k y_k \leq (\sum_{k=1}^n x_k^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{k=1}^n y_k^p)^{\frac{1}{p}}.$$

5. X - пространство непрерывных на $[a; b]$ функций, то есть $X = C[a; b], \forall x \in X \quad ||x|| = \max_{t \in [a; b]} |x(t)|$; 1, 2, 3 - почти очевидно.

6. $X = C[a; b], \forall x \in X \quad ||x|| = \int_a^b |x(t)| dt$.

Покажем, что введенная функция есть норма:

- (а) $||x(t)|| = 0 \iff x(t) = 0$;

Пусть $\int_a^b |x(t)| dt = 0$. От противного. Допустим, что $\exists t_0 \in [a; b] : x(t_0) \neq 0$. Тогда $\exists t_0 \in [\alpha; \beta], [\alpha; \beta] \subset [a; b]$ и $\forall t \in [\alpha; \beta] \quad |x(t)| > 0$,

$$\int_a^b |x(t)| dt \geq \int_{\alpha}^{\beta} |x(t)| dt$$

Противоречие $\implies \forall t \in [a; b] \quad |x(t)| = 0$.

- (b) $\|\lambda x\| = |\lambda| * \|x\|$ (из свойств определенного интеграла);
 (c) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (из свойств определенного интеграла);

7. $X = C[a; b]$.

$$(*) \quad \|x(t)\| = \left(\int_a^b |x(x)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}, \quad p > 1.$$

Упражнение: доказать, что заданная функция $\|x\|$ является нормой.
 ЛНП $(C[a; b], \|x\|(*))$ обозначается $C^p[a; b]$.

Утверждение 5.1.1. Пусть $(X, \|\cdot\|)$ - ЛНП. Тогда функция $\rho: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, определенная $\rho(x, y) = \|x - y\|$, является метрикой ЛНП.

Доказательство. Проверим аксиомы метрики:

1. $\rho(x, y) = 0 \iff x = y \quad \forall x, y \in X$:
 $\rho(x, y) = \|x - y\| \iff x - y = \bar{0} \iff x = y$;
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x), \quad \forall x, y \in X$:
 $\rho(x, y) = \|x - y\| = \|-(y - x)\| = |-1| * \|y - x\| = \|y - x\| = \rho(y, x)$;
3. $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z) \quad \forall x, y, z \in X$:
 $\rho(x, z) = \|x - z\| = \|(x - y) + (y - z)\| \leq \|x - y\| + \|y - z\| = \rho(x, y) + \rho(y, z)$.

□

Определение 5.1.3. Если линейное нормированное пространство является полным относительно введенной метрики, то оно называется **банахово**.
 (X - полное, если \forall фундаментальная последовательность сходится).

Пример 12. (банаховых пространств)

1. $X = \mathbb{R}$ - банахово;
2. $X = C[a; b], \quad \|x\| = \max_{t \in [a; b]} |x(t)|$;

Доказательство. Докажем, что данное линейное нормированное пространство (ЛНП) - полное относительно метрики.

Введем метрику (по утверждению):

$$\rho(x, y) = \|x - y\| = \max_{t \in [a; b]} |x(t) - y(t)|.$$

Пусть $\{x_n(t)\}$ - фундаментальная последовательность непрерывно фундаментальная на $[a; b]$, то есть $\forall \epsilon > 0 \exists N : \forall n, m > N$

$$\rho(x_n, x_m) < \epsilon \implies \max_{t \in [a; b]} |x_n(t) - x_m(t)| < \epsilon \quad (\forall t \in [a; b]).$$

Докажем, что $\{x_n(t)\}$ сходится в $C[a; b]$, то есть докажем, что $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t) = x(t) \in C[a; b] \implies$ это значит, что $\forall \epsilon > 0 \exists N : \forall n > N$

$$\rho(x_n(t), x(t)) < \epsilon,$$

или, по-другому, надо доказать, что

$$\max_{t \in [a; b]} |x_n(t) - x(t)| \rightarrow 0.$$

Зафиксируем $t_0 \in [a; b] \implies$ получим числовую последовательность $\{x_n(t_0)\}$ - фундаментальная \implies сходится (по критерию Коши для $X = \mathbb{R}$) $\implies \exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t_0)$.

Определим функцию $X(t) : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$, положив, что $x(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t)$ (в силу единственности предела последовательности, $x(t)$ - введена корректно).

Покажем, что $x(t) \in C[a; b]$ и $x_n(t) \rightarrow x(t)$. Пусть $\epsilon > 0$ задано, тогда $\exists N : \forall n, m > N$ и $\forall t \in [a; b]$

$$|x_n(t) - x_m(t)| < \epsilon.$$

Перейдем к пределу при $m \rightarrow \infty \implies \forall t \in [a; b]$

$$|x_n(t) - x_m(t)| < \epsilon (*).$$

Покажем, что $x(t)$ - непрерывно на $[a; b]$, то есть непрерывно при $\forall t \in [a; b]$.

Пусть $t_0 \in [a; b]$ - произвольная точка, тогда: $|x(t) - x(t_0)| = |x(t) - x_n(t) + x_n(t) + x_n(t_0) - x_n(t_0) - x(t_0)| = |(x(t) - x_n(t)) + (x_n(t) - x_n(t_0)) + (x_n(t_0) - x(t_0))| \leq |x_n(t) - x(t)| + |x_n(t) - x_n(t_0)| + |x_n(t_0) - x(t_0)|$.

Пусть $\epsilon > 0$ задано, тогда $\exists N : \forall n > N$ и $\forall t \in [a; b]$

$$|x_n(t) - x(t)| < \frac{\epsilon}{3} \text{ and } |x_n(t_0) - x(t_0)| < \frac{\epsilon}{3}$$

в силу определения функции $x(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t) \forall t \in [a; b]$.

Выберем $\delta > 0 : \forall t \in [a; b] : |t - t_0| < \delta \implies |x_n(t) - x_n(t_0)| < \frac{\epsilon}{3}$ (в силу непрерывности функции $x_n(t)$).

Тогда $|x(t) - x(t_0)| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$.

Таким образом функция $x(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t) \forall t \in [a; b]$ - непрерывна.

Так как неравенство (*) верно $\forall t \in [a; b]$, то верно и для $\max_{t \in [a; b]} |x_n(t) - x(t)| < \epsilon \implies \rho(x_n(t), x) < \epsilon$.

То есть $\{x_n(t)\}$ фундаментальная сходящаяся \implies рассматриваемое ЛНП - полное для заданной метрики \implies оно банахово. \square

3. $C_p[a; b]$ - ЛНП, $X = C[a; b]$,

$$\|x\| = \left(\int_a^b |x(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Доказательство. Покажем, что для $p = 1$ $C_1[a; b]$ - не полное.

Возьмем $C_1[-1; 1]$. Положим, что $x_1 = t$,

$$x_2 = \begin{cases} -1, & -1 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 2t, & -\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 1, & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}, \dots, x_n = \begin{cases} -1, & -1 \leq t \leq \frac{1}{n} \\ nt, & -\frac{1}{n} \leq t \leq \frac{1}{n} \\ 1, & \frac{1}{n} \leq t \leq 1 \end{cases}, \dots$$

Определим последовательность непрерывных функций $\{x_n(t)\}$.

Докажем, что введенная последовательность $\{x_n(t)\}$ фундаментальная.

$$\|x\| = \int_{-1}^1 |x(t)| dt,$$

$$\rho(x, y) \|x - y\| = \int_{-1}^1 |x(t) - y(t)| dt.$$

То есть, покажем, что $\forall \epsilon > 0 \exists N : \forall n, m > N$ (пусть $n > m$)

$$\rho(x_n, x_m) < \epsilon,$$

$$\rho(x_n, x_m) = \int_{-1}^1 |x_n(t) - x_m(t)| dt = \left| \text{до } -\frac{1}{m} \text{ и после } \frac{1}{m} \text{ интеграл анну-} \right. \\ \left. \text{лируется} \right| = \int_{-\frac{1}{m}}^{\frac{1}{m}} |x_n(t) - x_m(t)| dt \leq \int_{-\frac{1}{m}}^{\frac{1}{m}} |x_n(t)| dt + \int_{\frac{1}{m}}^{\frac{1}{m}} |x_m(t)| dt \quad (\triangle).$$

Пусть $\epsilon > 0$ задано. Выберем $N : \frac{1}{N} < \frac{\epsilon}{3}$.

$$(\triangle) = 2 \int_0^{\frac{1}{m}} |x_n(t)| dt + 2 \int_{\frac{1}{m}}^{\frac{1}{m}} m t dt = 2 \int_0^{\frac{1}{m}} |x_n(t)| dt + 2 \frac{m t^2}{2} \Big|_0^{\frac{1}{m}} = \frac{n}{m^2} + \frac{1}{m} + \\ \frac{1}{n} + 2 \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right) = \frac{3}{m} - \frac{1}{n} < \frac{3}{m} < \frac{3}{N} < \frac{3}{\epsilon}.$$

$\{x_n(t)\}$ - фундаментальная, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t) = 1$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t) = -1 \implies$
 $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t)$ - фундаментальная последовательность не сходится \implies
 $C_1[a; b]$ - не полное. \square

Определение 5.1.4. Множество E в ЛНП называется **ограниченным**, если $\exists M > 0 : \forall x \in E \quad \|x\| < M$.

Упражнение: доказать, что ограниченность в ЛНП совпадает с ограниченностью в МП.

Теорема 5.1.1 (о вложенных шарах). Метрическое пространство (МП) является полным $\iff \forall$ последовательность вложенных замкнутых шаров, радиусы которых стремятся к нулю, имеют в нем непустое пересечение.

Доказательство. Теоремы.

" \rightarrow " Пусть (X, ρ) - полное МП и имеется $B_1 \supset B_2 \supset \dots \supset B_n \supset \dots$ - система вложенных замкнутых шаров, радиусы которых стремятся к 0, то есть при $n \rightarrow \infty$ $r_n \rightarrow 0$.

Покажем, что пересечение

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \neq \emptyset.$$

Рассмотрим $B_n(a_n, r_n)$, $r_n \rightarrow 0$. Имеем, что

$$\forall n > m \quad B_n \subset B_m \implies a_n \subset B_m.$$

Рассмотрим последовательность центров $\{a_n\}$, покажем, что она фундаментальная.

Пусть $\epsilon > 0$ задано. Выберем $N > 0$: $r_n < \frac{\epsilon}{2}$:

$$\begin{aligned} \forall n, m > N \quad \rho(a_n, a_m) &\leq \rho(a_n, a_N) + \rho(a_N, a_m) < \\ < r_N + r_n = \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \implies \{a_n\} - \text{фундаментальное} \implies \\ \{a_n\} - \text{сходится, то есть } \exists a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \text{ (так как } (X, \rho) - \text{полное).} \end{aligned}$$

Тогда точка a - является предельной точкой для $\forall B_n \implies a = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$.

" \leftarrow " Пусть \forall системы вложенных замкнутых шаров, радиус которых $\rightarrow 0$ \exists непустое пересечение, то есть $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \neq \emptyset$.

Покажем, что (X, ρ) - полное.

Пусть $\{x_n\}$ - фундаментальная последовательность в (X, ρ) . Выберем

$$n_1 : \forall n > n_1 \quad \rho(x_n, x_{n_1}) < \frac{1}{2}$$

Построим шар $B_1 = B(x_{n_1}, 1)$. Выберем

$$n_2 > n_1 : \forall n > n_2 \quad \rho(x_n, x_{n_2}) < \frac{1}{4}$$

Построим шар $B_2 = B(x_{n_2}, \frac{1}{2})$. Покажем, что $B_2 \subset B_1$. Если $x \in B_2$, то

$$\rho(x, x_{n_1}) \leq \rho(x, x_{n_2}) + \rho(x_{n_2}, x_{n_1}) \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \implies x \in B_1.$$

Выберем

$$n_3 > n_2 : \forall n > n_3 \quad \rho(x_n, x_{n_3}) < \frac{1}{2^3}$$

(в силу фундаментальности $\{x_n\}$). Построим шар $B_3 \subset B(x_{n_3}, \frac{1}{4})$.

При этом $B_3 \subset B_2$ и так далее. Таким образом построим систему вложенных замкнутых шаров $B_1 \supset B_2 \supset \dots \supset B_k \supset \dots$, где $B_k = B(x_{n_k}, \frac{1}{2^{k-1}})$. Причем $r_k = \frac{1}{2^{k-1}} \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$.

Пусть $a \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$. Пусть $\epsilon > 0$ задано. Выберем N : Тогда $\forall n > N \quad \rho(x_n, a) \leq \rho(x_n, x_{n_N}) + \rho(x_{n_N}, a)$ (x_{n_N} - центр B_N) $< \frac{1}{2^N} + \frac{1}{2^{N-1}} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \implies$

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \implies (X, \rho) - \text{полное.}$$

□

5.1.1 Принцип сжимающих отображений

Определение 5.1.5. Пусть (X, ρ_X) , (Y, ρ_Y) - МП. Отображение $f : X \rightarrow Y$ называется **сжимающим**, если $\exists 0 \leq \alpha < 1 : \forall x_1, x_2 \in X$

$$\rho_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq \alpha * \rho_X(x_1, x_2).$$

Теорема 5.1.2 (принцип сжимающих отображений). Сжимающее отображение полного МП в себя имеет единственную неподвижную точку, то есть если (X, ρ) - полное, отображение $f : X \rightarrow X$ - сжимающее, то

$$\exists! a \in X : f(a) = a.$$

Доказательство. Пусть $0 \leq \alpha < 1 : \forall x, y \in X \rho(f(x), f(y)) \leq \alpha * \rho(x, y)$.

Пусть $\alpha = 0 \implies \rho(f(x), f(y)) = 0 \implies f(x) = f(y) \forall x, y \implies f = \text{const} \implies \exists a \in X : \forall x f(x) = a \implies f(a) = a$.

Пусть $\alpha \neq 0$. Пусть $x \in X$, построим последовательность $\{x_n\} : x_0 = x, x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), x_3 = f(x_2), \dots, x_n = f(x_{n-1}), \dots$

Покажем, что эта последовательность фундаментальная. Рассмотрим

$$\rho(x_2, x_1) = \rho(f(x_1), f(x_0)) \leq \alpha * \rho(x_1, x_0),$$

$$\rho(x_3, x_2) = \rho(f(x_2), f(x_1)) \leq \alpha * \rho(x_2, x_1) \leq \alpha^2 * \rho(x_1, x_0),$$

...

$$\rho(x_n, x_{n-1}) = \rho(f(x_{n-1}), f(x_{n-2})) \leq \alpha * \rho(x_{n-1}, x_{n-2}) \leq \alpha^{n-1} * \rho(x_1, x_0).$$

Тогда при $n > m$ $\rho(x_n, x_m) \leq \rho(x_m, x_{m+1}) + \rho(x_{m+1}, x_{m+2}) + \dots + \rho(x_{n-1}, x_n) \leq \alpha^m * \rho(x_1, x_0) + \alpha^{m+1} * \rho(x_1, x_0) + \dots + \alpha^{n-1} * \rho(x_1, x_0) = \rho(x_1, x_0) * \alpha^m * (1 + \alpha + \dots + \alpha^{n-1-m}) = \rho(x_1, x_0) * \alpha^m * \frac{(1 - \alpha^{n-1-m})}{1 - \alpha} < \frac{\alpha^m}{1 - \alpha} * \rho(x_1, x_0) < |\text{при } m \rightarrow \infty 0 < \alpha < 1 \alpha^m \rightarrow 0| < \epsilon, \text{ где } \epsilon > 0 \text{ задано} \implies \{x_n\} - \text{фундаментальная в полном МП} \implies \exists a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

$$f(a) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = a$$

$$\implies \exists a : f(a) = a.$$

Докажем единственность a . Пусть $\exists b \in X : f(b) = b$. Тогда

$$\rho(a, b) = \rho(f(a), f(b)) = \alpha * \rho(a, b),$$

$$\rho(a, b)(1 - \alpha) \leq 0 \iff \rho(a, b) = 0 \iff a = b.$$

□

Упражнение: доказать, что сжимающее отображение - непрерывно.

Определение 5.1.6. Если $\forall x_1, x_2 \quad \rho_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq \rho_X(x_1, x_2)$, где $(X, \rho_X), (Y, \rho_Y)$ - МП, $f : X \rightarrow Y$, то такое отображение называется **нерастягивающим**.

Упражнение: доказать, что предыдущая теорема неверна для нерастягивающихся отображений.

Определение 5.1.7. Множество E в метрическом пространстве называется **предкомпактным (относительно компактным)**, если ее замыкание \overline{E} компактно.

Определение 5.1.8. Множество E в МП (X, ρ) называется **вполне ограниченным**, если $\forall \epsilon > 0 \exists$ конечная ϵ -сеть для E .

Напоминание: ϵ -сеть - набор $\{x_1, \dots, x_n \mid x_i \in E\} \forall x \in E \exists$ хотя бы одна точка $x_i : \rho(x, x_i) < \epsilon$.

Теорема 5.1.3 (Хаусдорфа). Множество E в полном МП (X, ρ) является предкомпактным \iff оно вполне ограничено.

Доказательство. " \rightarrow " Пусть (X, ρ) - МП, $E \subset X$. Пусть E - предкомпактно. Пусть $\epsilon > 0$ задано.

Возьмем точку $x_1 \in E$. Если $\forall x \in E \quad \rho(x, x_1) < \epsilon$, то нужная ϵ -сеть построена. Пусть \exists точка $x_2 \in E : \rho(x_2, x_1) \geq \epsilon$, тогда в набор ϵ -сети добавляем точку x_2 . Если $\forall x \in E \quad \rho(x, x_1) < \epsilon$ или $\rho(x, x_2) < \epsilon \implies$ нужная ϵ -сеть построена. Пусть \exists точка $x_3 \in E : \rho(x_3, x_1) \geq \epsilon$ и $\rho(x_3, x_2) \geq \epsilon$, тогда в ϵ -сеть включаем и точку x_3 и так далее.

Либо на некотором шаге процесс остановится и ϵ -сеть будет построена: $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

Либо построена последовательность $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots \in E :$

$$\forall n, m \quad \rho(x_n, x_m) \geq \epsilon$$

\implies у такой последовательности $\{x_n\} \nrightarrow$ сходящейся подпоследовательности в $E \subset X \implies x_n$ не имеет предела, то есть E не имеет предельной точки $\implies \overline{E}$ некомпактно - противоречие \implies второй случай не имеет место быть.

" \leftarrow " Пусть E - вполне ограничено. То есть $\forall \epsilon > 0 \exists$ конечная ϵ -сеть для $E \subset X$. Пусть $F \subset E$ - бесконечное. Покажем, что F имеет предельную точку в \overline{E} (используем критерий компактности).

Пусть $x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1k_1}$ - 1-сеть ($\epsilon = 1$) для E . Пусть $B_{11}, B_{12}, \dots, B_{1k_1}$ - соответствующие шары с центрами в точках $x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1k_1}$ (с радиусом 1).

\exists шар, например, $B_{11} : B_{11} \cap F = F_1$ - бесконечное подмножество в E .

Далее, пусть $x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2k_2}$ - $\frac{1}{2}$ -сеть для E . Пусть $B_{21}, B_{22}, \dots, B_{2k_2}$ - соответствующие шары с центрами в точках $x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2k_2}$ (с радиусом $r_2 = \frac{1}{2}$).

\exists шар $B_{22} : B_{22} \cap F_1 = F_2$ - бесконечное подмножество в E и так далее.

Таким образом построим систему шаров $B_{11}, B_{22}, \dots, B_{nn}, \dots$, $r_n = \frac{1}{2^{n-1}}$, а также систему бесконечных множеств $F \subset F_1 \subset F_2 \subset \dots \subset F_n \subset \dots$, $F_n \in B_{nn}$.

Построим последовательность $\{x_n\}$: $x_n \in F_n$. Последовательность - фундаментальная, так как $\forall \epsilon > 0 \exists N : \forall n, m > N \rho(x_n, x_m) < \epsilon$ (так как $r_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$) $\implies \{x_n\}$ - сходится (так как (X, ρ) - полное) $\implies \exists x \in E : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \implies F$ имеет предельную точку $\implies \overline{E}$ компактно (по критерию компактности). \square

Теорема 5.1.4. Пространство \mathbb{R}^n (n-мерное линейное пространство с евклидовой метрикой),

$$\|x\| = (\sum_{i=1}^n (x^i)^2)^{\frac{1}{2}} - \text{полное}$$

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ - фундаментальная последовательность в \mathbb{R}^n :

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots, x_k \in \mathbb{R}^n \quad x_k = \{x_k^1, x_k^2, \dots, x_k^n\}.$$

Покажем, что $\{x_n\}$ сходится. Пусть $\epsilon > 0$ задано. Выберем $N : \forall k, m > N \rho(x_k, x_m) < \epsilon$,

$$\rho(x_k, x_m) = \|x_k - x_m\| = (\sum_{i=1}^n (x_k^i - x_m^i)^2)^{\frac{1}{2}} < \epsilon$$

$$\implies \forall i = \overline{1, n} \quad |x_k^i - x_m^i| < \epsilon$$

\implies последовательность x_k^i - фундаментальная в $\mathbb{R} \quad \forall i \implies x_k^i$ - сходится в $\mathbb{R} \implies \exists x^i = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k^i \quad \forall i = \overline{1, n}$.

Положим $x = \{x^1, x^2, \dots, x^n\}$, где $x^i = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k^i$. Покажем, что $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x$, где n_k и n - n-мерные вектора.

Пусть $\epsilon > 0$ задано. Выберем $N : \forall m > N$:

$$\max_{i=\overline{1, n}} |x_m^i - x^i| < \frac{\epsilon}{N}.$$

Тогда $\forall m > N$:

$$\rho(x_m) = \|x_m - x\| = (\sum_{i=1}^n (x_m^i - x^i)^2)^{\frac{1}{2}} \leq \sum_{i=1}^n |x_m^i - x^i| < N * \frac{\epsilon}{N} = \epsilon.$$

\square

Теорема 5.1.5 (критерий компактности в \mathbb{R}^n). Множество $E \subset \mathbb{R}^n$ компактно \iff замкнуто и ограничено.

Доказательство. Самостоятельно. \square

5.1.2 Эквивалентность норм в \mathbb{R}^n

Определение 5.1.9. Пусть $(X, \|\cdot\|_1), (X, \|\cdot\|_2)$ - линейное нормированное пространство (конечномерное). Говорят, что $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$ (эквивалентны), если $\exists c_1, c_2 > 0$ ($c_1, c_2 \in \mathbb{R}$):

$$\forall x \in X \quad c_1 \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq c_2 \|x\|_2 \quad (*)$$

Упражнение: доказать, что $(*)$ - отношение эквивалентности.

Теорема 5.1.6 (эквивалентность норм в конечномерном пространстве). Если X - конечномерное пространство МП, и $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ - две нормы на нем, то:

$$\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$$

Доказательство. (теоремы)

Покажем, что \forall норма в конечномерном МП эквивалентна евклидовой. Пусть $\|\cdot\|_1$ - норма в n -мерном МП, $\|\cdot\|$ - евклидова норма там же.

Лемма 5.1.1. Пусть $(X, \|\cdot\|)$ - Л.Н.П. Тогда функция $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ является непрерывной.

Доказательство. (леммы)

Самостоятельно. □

Рассмотрим сферу S с радиусом 1 в евклидовой норме в двумерном пространстве:

$$S = \{x \in X \mid \sum_{i=1}^n (x^i)^2 = 1\}, \quad x = (x^1, x^2, \dots, x^n).$$

Сфера является ограниченной и замкнутой в $\mathbb{R}^n \implies$ она компактна \implies по теореме Вейерштрасса, функция $\|\cdot\|_1$ достигает наименьшего и наибольшего значения.

Пусть:

$$\alpha = \min_{x \in S} \|x\|_1, \quad \beta = \max_{x \in S} \|x\|_1.$$

Имеем:

$$\begin{aligned} \alpha \|x\| &\leq \|x\|_1 = \|(x^1, x^2, \dots, x^n)\|_1 = \\ &= \frac{\|x\|}{\|x\|} * \|(x^1, x^2, \dots, x^n)\|_1 = \|x\| * \left\| \left(\frac{x^1}{\|x\|}, \frac{x^2}{\|x\|}, \dots, \frac{x^n}{\|x\|} \right) \right\|_1 \leq \beta \|x\|. \end{aligned}$$

Получаем, что:

$$\alpha \|x\| \leq \|x\|_1 \leq \beta \|x\|.$$

Заметим, что $\alpha > 0$. Таким образом, $\|x\| \sim \|x\|_1$ в \mathbb{R}^n . □

5.2 Линейные отображения в конечномерном пространстве и их непрерывность

Определение 5.2.1. Пусть X, Y - линейные пространства. Отображение $L : X \rightarrow Y$ называется **линейным**, если $\forall x_1, x_2 \in X$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$L(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha * L(x_1) + \beta L(x_2) = \alpha Lx_1 + \beta Lx_2.$$

Теорема 5.2.1. Всякому линейному отображению $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ можно поставить в соответствие матрицу A размером $k \times n$:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad L(x) = Ax.$$

При этом, если в \mathbb{R}^n и \mathbb{R}^k зафиксированы базисы, то матрица A определяется однозначно.

Доказательство. Пусть e_1, e_2, \dots, e_n - базис в \mathbb{R}^n , e'_1, e'_2, \dots, e'_k - базис в \mathbb{R}^k . Тогда $L(x) = L(x^1 e_1 + x^2 e_2 + \dots + x^n e_n) = x^1 L(e_1) + x^2 L(e_2) + \dots + x^n L(e_n) = |L(e_k) \in \mathbb{R}^k| = x^1(a_1^1 e'_1 + a_1^2 e'_2 + \dots + a_1^k e'_k) + x^2(a_2^1 e'_1 + a_2^2 e'_2 + \dots + a_2^k e'_k) + \dots + x^n(a_n^1 e'_1 + a_n^2 e'_2 + \dots + a_n^k e'_k) = (\sum_{i=1}^n x^i a_i^1) e'_1 + (\sum_{i=1}^n x^i a_i^2) e'_2 + \dots + (\sum_{i=1}^n x^i a_i^k) e'_k.$

Таким образом получили Коэффициенты при базисных векторах в \mathbb{R}^k - координаты вектора $L(x) \in \mathbb{R}^k$.

Заметим, что:

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \dots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & \dots & a_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_k^1 & a_k^2 & \dots & a_k^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n x^i a_i^1 \\ \sum_{i=1}^n x^i a_i^2 \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n x^i a_i^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sim^1 \\ x \\ \sim^2 \\ x \\ \vdots \\ x \\ \sim^k \\ x \end{pmatrix}$$

Следовательно, A - единственная. □

Утверждение 5.2.1. Если $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ - линейно, то оно непрерывно.

Доказательство. Рассмотрим произвольный вектор $h \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} \|L(h)\| &= \|L(h^1 e_1 + h^2 e_2 + \dots + h^n e_n)\| = |e_1, \dots, e_n\text{-базис в } \mathbb{R}^n| = \\ &= \|h^1 L(e_1) + h^2 L(e_2) + \dots + h^n L(e_n)\| \leq |h^1| * \|L(e_1)\| + |h^2| * \|L(e_2)\| + \dots + \\ &+ |h^n| * \|L(e_n)\| \leq \|h\| * \sum_{i=1}^n \|L(e_i)\|. \end{aligned}$$

Пусть $x \in \mathbb{R}^n$, $\epsilon > 0$ задано. Выберем $\delta < \frac{\epsilon}{\sum_{i=1}^n \|L(e_i)\|}$. Тогда, если $\|h\| < \delta$:

$$\begin{aligned} \|L(x+h) - L(x)\| &= \|L(x) + L(h) - L(x)\| = \|L(h)\| \leq \\ &\leq \|h\| * \sum_{i=1}^n \|L(e_i)\| < \delta * \sum_{i=1}^n \|L(e_i)\| = \epsilon. \end{aligned}$$

□

Определение 5.2.2. Пусть X - множество, β - база на X , $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$, $g : X \rightarrow \mathbb{R}^k$.

Будем говорить, что $f(x) = o(g(x))$ по базе β , если:

$$\|f(x)\|_{\mathbb{R}^n} = o(\|g(x)\|_{\mathbb{R}^k})$$

То есть:

$$\|f(x)\|_{\mathbb{R}^n} = \alpha(x) * \|g(x)\|_{\mathbb{R}^k},$$

где $\alpha(x) : X \rightarrow \mathbb{R}$ и $\lim_{\beta} \alpha(x) = 0$.

Определение 5.2.3. Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}^k$, точка $a \in D$ - предельная точка для D .

Отображение f называется **дифференцируемым** в точке a , если $\forall h : a + h \in D \exists$ линейное отображение $L(a) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$:

$$f(a + h) - f(a) = L(a)h + o(h), \quad h \rightarrow \bar{0}.$$

Линейный оператор $L(a)$ называется **дифференциалом** (или **касательным отображением**, или **производным отображением**) функции f и обозначается:

$$Df(x), \quad df(x)$$

Утверждение 5.2.2. Пусть $f : D \rightarrow \mathbb{R}^k$, $D \subset \mathbb{R}^n$, $a \in D$

$$\text{и } f(x) = \begin{pmatrix} f^1(x) \\ f^2(x) \\ \vdots \\ f^k(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f^1(x^1, x^2, \dots, x^n) \\ f^2(x^1, x^2, \dots, x^n) \\ \vdots \\ f^k(x^1, x^2, \dots, x^n) \end{pmatrix}$$

Отображение f дифференцируемо в точке $a \iff$ отображение $f^i : D \rightarrow \mathbb{R}$ дифференцируемо в точке a .

Доказательство. " \rightarrow " Пусть f дифференцируемо в точке a и \exists линейное

$$\text{отображение } L(a) = \begin{pmatrix} L^1(a) \\ L^2(a) \\ \vdots \\ L^k(a) \end{pmatrix}$$

$$f(a + h) - f(a) = L(a) * h + o(h), \quad h \rightarrow 0$$

$$\begin{pmatrix} f^1(a + h) - f^1(a) \\ f^2(a + h) - f^2(a) \\ \vdots \\ f^k(a + h) - f^k(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L^1(a)h \\ L^2(a)h \\ \vdots \\ L^k(a)h \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha^1(h) \\ \alpha^2(h) \\ \vdots \\ \alpha^k(h) \end{pmatrix}, \quad \alpha^i(h) = o(h)$$

$$f(x) = o(g(x)) = \alpha(x) * g(x), \quad \alpha(x) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow x_0$$

$$\text{Отсюда } f^i(a + h) - f^i(a) = L^i(a)h + \alpha^i(h) \quad \alpha^i(h) = o(h) \implies$$

Замечание. Заметим, что если имеется вектор $h = (h^1, \dots, h^n)$, то:

$$\forall i = \overline{1, n} \quad |h^i| \leq \|h\| = \left(\sum_{i=1}^n (h^i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \sum_{i=1}^n |h^i| \implies$$

$$\implies f(x) = \begin{pmatrix} f^1(x) \\ \vdots \\ f^k(x) \end{pmatrix} = o(g(x)) \iff f^i(x) = o(g(x)).$$

Конец замечания.

$\implies f^i$ дифференцируемо в точке a .

" \leftarrow " Если $\forall i = \overline{1, n}$ f дифференцируемо в точке $a \implies \alpha^i(h) = o(h)$.

Сделав обратные рассуждения, получим: f дифференцируемо в точке a . \square

Таким образом изучение дифференцируемых отображений из \mathbb{R}^n в \mathbb{R}^k сводится к изучению дифференцируемых отображений из \mathbb{R}^n в \mathbb{R} .

5.3 Частные производные

Определение 5.3.1. Множество $D \subset \mathbb{R}^n$ называется **областью**, если оно открыто и линейно связно.

Определение 5.3.2. Пусть D - область в \mathbb{R}^n , $f : D \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = f(x^1, x^2, \dots, x^n), \quad x \in D.$$

Частной производной отображения f точки $x \in D$ по переменной x^i называется

$$\lim_{h^i \rightarrow 0} \frac{f(x^1, x^2, \dots, x^i + h^i, \dots, x^n) - (f(x^1, x^2, \dots, x^n))}{h^i},$$

если этот предел существует.

Обозначение:

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} \quad \text{or} \quad f'_{x^i}$$

Пример 1:

$$f = f(x, y) = yx^2 + y^2x \quad f'_x = 2xy + y^2 \quad f'_y = x^2 + 2yx$$

Теорема 5.3.1 (о связи дифференциала и частных производных). Если $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ (D - область в \mathbb{R}^n) дифференцируема в точке $x \in D$, то она имеет в точке x все частные производные, при этом:

$$df(x)h = \frac{\partial f}{\partial x^1} h^1 + \frac{\partial f}{\partial x^2} h^2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x^n} h^n =$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x^1} \quad \frac{\partial f}{\partial x^2} \quad \dots \quad \frac{\partial f}{\partial x^n} \right) * \begin{pmatrix} h^1 \\ h^2 \\ \vdots \\ h^n \end{pmatrix}$$

(здесь везде $1, 2, \dots, n$ - индексы, а не степени или производные).

Доказательство. Пусть $L(x) = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ - дифференциал функции в точке x . Положим: $h = (0, \dots, 0, h^i, 0, \dots, 0)$. Тогда:

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= L(x)h + o(h) \implies \\ \implies f(x^1, x^2, \dots, x^i + h^i, \dots, x^n) - f(x^1, x^2, \dots, x^n) &= \\ &= (a_1, \dots, a_i, \dots, a_n) * \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ h^i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + o(h) = a_i h^i + o(h). \end{aligned}$$

Поделим уравнение на h^i :

$$a_i + \frac{o(h)}{h^i} = \frac{f(x^1, \dots, x^i + h^i, \dots, x^n) - f(x^1, x^2, \dots, x^n)}{h^i}.$$

Тогда $\frac{\partial f}{\partial x^i} = \lim_{h^i \rightarrow 0} \frac{f(x^1, \dots, x^i + h^i, \dots, x^n) - f(x^1, \dots, x^n)}{h^i} = \lim_{h^i \rightarrow 0} (a_i + \frac{o(h)}{h^i}) = a_i$.

Так как $i = \overline{1, n}$, то:

$$L(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x^n} \right).$$

□

Пример 2:

Из примера 1 \implies

$$df(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy,$$

$$h = (dx, dy),$$

$$df(x, y) = (2xy + y^2)dx + (x^2 + 2yx)dy$$

Матрица Якоби

Пусть $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$.

Матрицей Якоби отображения f в точке $x \in \mathbb{R}^n$ называется:

$$\mathfrak{J}(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial x^n} \\ \frac{\partial f^2}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f^2}{\partial x^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f^k}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f^k}{\partial x^n} \end{pmatrix}$$

$$\text{Здесь } f(x) = \begin{pmatrix} f^1(x) \\ \vdots \\ f^k(x) \end{pmatrix}$$

$$\text{Т. обр. } df(x)h = \mathfrak{J}(x)h = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial x^n} \\ \frac{\partial f^2}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f^2}{\partial x^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f^k}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f^k}{\partial x^n} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} h^1 \\ \vdots \\ h^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} df^1(x)h \\ df^2(x)h \\ \vdots \\ df^k(x)h \end{pmatrix}$$

Часто матрицу Якоби отображения f будем обозначать f' .

5.4 Дифференцируемость и арифметические операции

Теорема 5.4.1. Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ - область, $f : D \rightarrow \mathbb{R}^k$, $g : D \rightarrow \mathbb{R}^k$, если f и g дифференцируемы в точке $x \in D$, то $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ функция $\lambda_1 f + \lambda_2 g$ дифференцируема в точке x , при этом:

$$(\lambda_1 f + \lambda_2 g)' = \lambda_1 f' + \lambda_2 g',$$

где $(\lambda_1 f + \lambda_2 g)'$, f' , g' - матрицы Якоби.

Доказательство. $(\lambda_1 f + \lambda_2 g)(x+h) - (\lambda_1 f + \lambda_2 g)(x) = \lambda_1 f(x+h) + \lambda_2 g(x+h) - \lambda_1 f(x) - \lambda_2 g(x) = \lambda_1 (f(x+h) - f(x)) + \lambda_2 (g(x+h) - g(x)) = \lambda_1 (f'(x)h + o(h)) + \lambda_2 (g'(x)h + o(h)) = (\lambda_1 f'(x) + \lambda_2 g'(x))h + o(h)$. \square

Теорема 5.4.2. Пусть D - область в \mathbb{R}^n , $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Если f, g - дифференцируемы в точке $x \in D$, то $f * g$ дифференцируемо в точке x и если $g(x) \neq 0$, то $\frac{f}{g}$ - дифференцируемо в точке x , при этом:

$$(f * g)'(x) = f'(x) * g(x) + f(x) * g'(x);$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}.$$

Доказательство. Самостоятельно. \smile

\square