# 1 Первообразная и неопределенный интеграл

**Определение 1.1** (Первообразная функция)**.** Пусть $X$ - промежуток, $f : X \to \mathbb{R}$. Функция $F(x)$ называется **первообразной** $f(x)$, если производная $F'(x) = f(x)$, при этом $F(x)$ дифференцируема и непрерывна.

**Пример 1.** $f(x) = 2x \implies F(x) = x^2$. В самом деле, $F'(x) = f(x)$.

**Утверждение 1.1.** (О первообразной)

1. Если $F(x)$ - первообразная функции $f(x)$ на промежутке $X$, и $\mathit{\Phi}(x) = F(x) + C,\ c \in \mathbb{R}$, то $\mathit{\Phi}(x)$ - тоже первообразная.

2. Если $F(x)$ и $\mathit{\Phi}(x)$ - две первообразные для $f(x)$ на промежутке $X$, то $\exists C = const,\ c \in \mathbb{R}$ такая, что $\mathit{\Phi}(x) = F(x) + C$.

*Доказательство.* (Утверждения о первообразной)

1. $\Phi'(x) = (F(x) + C)' = F'(x) = f(x) \implies \Phi(x)$ - первообразная для $f(x)$.

2. Так как $F(x)$ и $\Phi(x)$ - первообразные для $f(x)$, то $F'(x) = f(x), \Phi'(x) = f(x)$. Рассмотрим функцию $\phi = \Phi(x) - F(x),\ \forall x \in X$: $\phi'(x) = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$. Рассмотрим $\forall x_1, x_2 \in X$, по теореме Лагранжа, $\exists \xi \in (x_1, x_2) :\ \phi(x_1) - \phi(x_2) = \phi'(\xi)(x_1 - x_2) = 0 \implies \phi(x_1) = \phi(x_2) \implies \phi(x) = const$ для $\forall x \in X$.

□

**Определение 1.2** (Неопределенный интеграл)**.** Совокупность всех первообразных для функции $f(x)$ на промежутке $X$ называется **неопределенным интегралом** и обозначается:

$$\int f(x)dx$$

Таким образом, $\int f(x)dx = \{F(x) + C$, где $F'(x) = f(x),\ C \in \mathbb{R}\}$, или:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

**Замечание.** (Для неопределенного интеграла)

- $(\int f(x)dx)'_x = (F(x) + C)'_x = F'(x) = f(x)$;
- $d(\int f(x)dx) = d(F(x) + C) = (F(x) + C)'dx = F'(x)dx = f(x)dx$;
- $\int d(F(x)) = \int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x) + C,\ C \in \mathbb{R}$.

**Определение 1.3** (Интегрирование)**.** Операция нахождения первообразной функции $f(x)$ называетсвя ее **интегрированием**.

**Утверждение 1.2.** (Основные методы интегрирования)
Пусть $f : X \to \mathbb{R},\ g : X \to \mathbb{R},\ X$ - промежуток:

1. Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{R} = const$, тогда:
   $\int (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx$.

2. Формула интегрирования по частям:
   $udv = uv - \int udv,\ u = u(x), v = v(x)$.

3. Интегрирование подстановкой:
   Пусть $T$ - промежуток, $X = X(t)$ - дифференцируема на $T$.
   Тогда $\int f(X(t)) * X'(t)dt = F(X(t)) + C = \int f(x)dx + C$.

*Доказательство.* (Утверждения об основных методах интегрирования)

1. Возьмем производную по $x$ от обеих частей равенства: $\int (\alpha f(x) + \beta g(x))'_x = \alpha f(x) + \beta g(x) = \alpha F'(x) + \beta G'(x) = \alpha(\int f(x)dx)'_x + \beta(\int g(x)dx)'_x$ - является производной для $\alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx$.

2. Рассмотрим $d(uv) = vdu + udv :\ \int d(uv) = \int vdu + \int udv$. Так как $d(uv) = uv$, то из того, что $\int d(uv) = \int vdu + \int udv \implies \int udv = uv - \int vdu$.

3. $f(X(t)) * X'(t)dt = \int f(X(t))dx(t) = \int f(x)dx = F(x) + C = F(X(t)) + C;\ (F(X(t)) + C)'_t = F'_t * X'_t = f(x) * X'(t) = (\int f(X(t)) * X'(t)dt)'_t$.

$\square$

**Пример 2.** (Интегрирование функций)

1. $\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C$

2. $\int \ln x dx = \left| \begin{matrix} u = \ln x,\ dv = dx,\ du = d(\ln x) = \frac{dx}{x} \implies \\ \implies \int dv = \int dx \implies v = x \end{matrix} \right| = x \ln x - \int x \frac{dx}{x} = x \ln x - x + C$

3. $\int \sqrt{1 - x^2} dx = \left| \begin{matrix} x = \sin t,\ dx = \\ = d(\sin t) = \cos t dt \end{matrix} \right| = \int \cos^2 t dt = \int \frac{1}{2}(1 + \cos 2t)dt = \frac{1}{2} \int dt + \frac{1}{2} \int \cos 2t dt = \frac{t}{2} + \frac{1}{4} \int \cos 2t d(2t) = \frac{t}{2} + \frac{1}{4} \sin 2t + C = \frac{\arcsin x}{2} + \frac{1}{2} x \sqrt{1 - x^2} + C$

**Пример 3.** (Неинтегрируемые функции)

$$\int \frac{x}{\ln x} dx; \quad \int \frac{e^x}{x} dt; \quad \int e^{x^2} dx$$

## 1.1 Интегрирование рациональных дробей

**Определение 1.4** (Рациональная дробь)**.** Функция вида $\frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x),\ Q(x)$ - многочлены, называется **рациональной дробью**, или рациональной функцией.
Если $\deg P(x) < \deg Q(x)$, то дробь называется **правильной**, иначе - **неправильной**.
Если дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ - неправильная, то ее можно представить в виде $\frac{P(x)}{Q(x)} = M(x) + \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$, где $\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$ - правильная дробь. Поэтому достаточно уметь интегрировать правильную дробь.

**Определение 1.5** (Простые дроби)**. Простыми дробями** будем называть дроби следующих четырех видов:

1. $\frac{A}{x-a}, \quad A, a \in \mathbb{R}$
2. $\frac{A}{(x-a)^k}, \quad A, a \in \mathbb{R},\ k > 1$
3. $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}, \quad A, B, p, q \in \mathbb{R},\ p^2 - 4q < 0$
4. $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}, \quad A, B, p, q \in \mathbb{R},\ k > 1,\ p^2 - 4q < 0$

## 1.2 Интегрирование рациональных дробей

1. $\int \frac{A}{x-a}dx = A\int \frac{d(x-a)}{x-a} = \left| \begin{array}{c} \int \frac{dt}{t} \\ d(x-a) = dx \end{array} \right| = A\ln|x-a| + C$
2. $\int \frac{A}{(x-a)^k}dx = A\int (x-a)^{-k}dx = A\int (x-a)^{-k}d(x-a) = \left| \begin{array}{c} \int t^n dt = \\ = \frac{t^{n+1}}{n+1} \end{array} \right| = A\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C = \frac{A}{(x-a)^{k-1}(1-k)} + C$

3. $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \left| \begin{array}{c} x^2+px+q = (x^2+2\frac{p}{2}x+\frac{p^2}{4}) - \frac{p^2}{4}+q = \\ = (x+\frac{p}{2})^2 - \frac{p^2-4q}{4},\ (-\frac{p^2-4q}{4} = C>0) \end{array}\right| = \int \frac{Ax+B}{(x+\frac{p}{2})^2+C}dx =$
$A\int \frac{xdx}{(x+\frac{p}{2})^2+C} + B\int \frac{dx}{(x+\frac{p}{2})^2+C} = \left|\begin{array}{c} d((x+\frac{p}{2})^2+C) = \\ = 2(x+\frac{p}{2}dx)\end{array}\right| = \dots$

$A\int \frac{xdx}{(x+\frac{p}{2})^2+C} = \frac{A}{2} \int \frac{(2(x+\frac{p}{2})-p)dx}{(x+\frac{p}{2})^2+C} = \frac{A}{2} \int \frac{2(x+\frac{p}{2})dx}{(x+\frac{p}{2})^2+C} - \frac{Ap}{2}\int\frac{dx}{(x+\frac{p}{2})^2+C} = \left|\int \frac{dx}{(x+\frac{p}{2})^2+C} = I\right| = \frac{A}{2}\int \frac{d((x+\frac{p}{2})^2+C)}{(x+\frac{p}{2})^2+C} - \frac{Ap}{2}I = \frac{A}{2} \ln|(x+\frac{p}{2})^2+C| - \frac{Ap}{2}I;$

$I = \frac{dx}{(x+\frac{p}{2})^2+C} = \frac{1}{C}\int \frac{\sqrt{C} d(\frac{x}{\sqrt{C}}+\frac{p}{2\sqrt{C}})}{(\frac{x}{\sqrt{C}}+\frac{p}{2\sqrt{C}})^2+1} = \left|\int\frac{dt}{t^2+1} = \arctan t + C\right| = \frac{1}{\sqrt{C}}\arctan(\frac{x+2p}{2\sqrt{C}}) + C_1;$

$\frac{1}{C}(x+\frac{p}{2})^2 = (\frac{1}{\sqrt{C}})^2(x+\frac{p}{2})^2 = (\frac{1}{\sqrt{C}}(x+\frac{p}{2}))^2 = (\frac{x}{\sqrt{C} + \frac{p}{2\sqrt{C}}})^2;$

$\dots = \frac{A}{2}\ln|(x+\frac{p}{2})^2 - \frac{p^2-4q}{4}| + (B-\frac{Ap}{2})\frac{1}{\sqrt{C}}\arctan(\frac{x+2p}{2\sqrt{C}}) + C_1$

4. $\int\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}dx = \left|\begin{array}{c} d(x^2+px+q) = \\ = 2x+p\end{array}\right| = \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p)+B-\frac{Ap}{2}}{(x^2+px+q)^k}dx = \frac{A}{2}\int\frac{d(x^2+px+q)}{(x^2+px+q)^k} +$
$(B-\frac{Ap}{2})\int\frac{dx}{((x+\frac{p}{2})^2+(\frac{-p^2+4a}{4}))^k} = \frac{A}{2(1-k)}\frac{1}{(x^2+px+q)^{k-1}} + \frac{(B-\frac{Ap}{2})}{(-\frac{p^2+4q}{a})^k}\int \frac{dx}{((\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{\frac{-p^2+4q}{4}}})^2+1)^k} =$
$\frac{A}{2(1-k)}\frac{1}{(x^2+px+q)^{k-1}} + \frac{(B-\frac{Ap}{2})\frac{\sqrt{-p^2+4q}}{2}}{(\frac{-p^2+4q}{4})^k}\int \frac{d\left(\frac{x+\frac{p}{2}}{\frac{\sqrt{-p^2+4q}}{2}}\right)}{\left(\left(\frac{x+\frac{p}{2}}{\frac{\sqrt{-p^2+4q}}{2}}\right)^2+1\right)^k}$

Таким образом, чтобы вычислить интеграл 4., нужно вычислить интеграл $\int \frac{dt}{(t^2+1)^k} = \left|\begin{array}{c} u = \frac{1}{(t^2+1)^k};\ du = d((t^2+1)^k) = -k(t^2+1)^{-k-1}2tdt \\ dv = dt \implies v = t\end{array}\right| =$
$\frac{t}{(t^2+1)^k} - \int\frac{-2kt^2}{(t^2+1)^{k+1}}dt = \frac{t}{(t^2+1)^k} + 2k(\int\frac{t^2+1}{(t^2+1)^{k+1}}dt - \int\frac{dt}{(t^2+1)^{k+1}});$
$\int\frac{dt}{(t^2+1)^k} = \frac{t}{(t^2+1)^k} + 2k\int\frac{dt}{(t^2+1)^k} - 2k\int\frac{dt}{(t^2+1)^{k+1}} \left|\begin{array}{c} \frac{dt}{(t^2+1)^k} = I_k \\ \frac{dt}{(t^2+1)^{k+1}} = I_{k+1}\end{array}\right|;$
$2kI_{k+1} = \frac{t}{(t^2+1)^k} + (2k-1)I_k;\quad I_{k+1} = \frac{t}{2k(t^2+1)^k} + \frac{2k-1}{2k}I_k,\ k = 1,\dots$

## 1.3 Разложение рациональной дроби на простые

**Лемма 1.1.** Пусть $\frac{P(x)}{Q(x)}$ - правильная рациональная дробь (несократимая). Причем $Q(x) = (x-a)^k Q_1(x)$, где $Q_1(x)$ не делится на $(x-a)$. Тогда $\exists$ многочлен $P_1(x)$ из $\exists A \in \mathbb{R}: \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{P_1(x)}{(x-a)^{k-1}Q_1(x)}$. При этом дробь (рациональная) $\frac{P_1(x)}{(x-a)^{k-1}Q_1(x)}$ - правильная.

*Доказательство.* Рассмотрим $\frac{A}{(x-a)^k} + \frac{P_1(x)}{(x-a)^{k-1}Q_1(x)} = \frac{Q_1(x)A+(x-a)P_1(x)}{Q(x)}$. Нужно доказать, что $\frac{Q_1(x)A+(x-a)P_1(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{Q(x)}$.

Отсюда следует, что для выполнения леммы, многочлен $P(x)$ должен расскладываться: $P(x) = Q_1(x) + (x-a)P_1(x) \implies P_1(x) = \frac{P(x)-AQ_1(x)}{x-a}$. Чтобы существовал многочлен $P_1(x)$, нужно, чтобы $P(x) - AQ_1(x)$ делилась на $x - a$. Для этого точка $a$ должна быть корнем $P(x) - AQ_1(x)$, то есть чтобы $P(a) - AQ_1(a) = 0 \implies A = \frac{P(a)}{Q(a)}$; $Q_1(a) \neq 0$ по условию. Таким образом, при $A = \frac{P(a)}{Q_1(a)}$, функция $P_1(x)$ будет являться многочленом $P_1(x) = \frac{P(x)-\frac{P(a)}{Q_1(a)}Q_1(x)}{x-a}$.

Покажем, что дробь $\frac{P_1(x)}{(x-a)^{k-1}Q_1(x)}$ - правильная, то есть $\deg P_1(x) < \deg[(x-a)^{k-1}Q_1(x)]$. Имеем, $P_1(x) = \frac{P(x)-AQ_1(x)}{x-a}$; $\deg P_1(x) \leqslant \max(\deg P(x), \deg Q_1(x)) - 1$. Тогда $\deg P_1(x) \leqslant \deg P(x) - 1 < \deg Q(x) - 1 = \deg[(x-a)^{k-1}Q_1(x)]$.

Если $\deg Q_1(x) \geqslant \deg P(x) \implies \deg P_1(x) \leqslant \deg Q_1(x) - 1 < \deg Q(x) - 1 = \deg[(x-a)^{k-1}Q_1(x)]$. Дробь $\frac{P_1(x)}{(x-a)^{k-1}Q_1(x)}$ - правильная. □

**Лемма 1.2.** Пусть $\frac{P(x)}{Q(x)}$ - правильная дробь. При этом $Q(x) = (x^2+px+q)^k Q_1(x)$, здесь $p^2 - 4q < 0$. Тогда $\exists M, N \in \mathbb{R}$ и $\exists$ многочлен $P_1(x)$ : $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k} + \frac{P_1(x)}{(x^2+px+q)^{k-1}Q_1(x)}$. При этом $Q_1(x)$ не делится на $x^2 + px + q$. Дробь $\frac{P_1(x)}{(x^2+px+q)^{k-1}Q_1(x)}$ - правильная.

*Доказательство.* Если разложение $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k} + \frac{P_1(x)}{(x^2+px+q)^{k-1}Q_1(x)}$ верно, то: $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{(Mx+N)Q_1(x)+P_1(x)(x^2+px+q)}{Q(x)}$, следовательно $P(x)$ должен выражаться как: $P(x) = (Mx+N)Q_1(x) + P_1(x)(x^2+px+q) \implies P_1(x) = \frac{P(x)-(Mx+N)Q_1(x)}{x^2+px+q}$.

Так как нужно, чтобы $P_1(x)$ был многочленом, то $P(x)-(Mx+N)Q_1(x)$ должно делиться на $x^2 + px + q$.

Рассмотрим остаток от деления $P(x)$ на $x^2 + px + q$ в форме $\alpha x + \beta$ и остаток от деления $Q_1(x)$ на $x^2 + px + q$ в форме $\gamma x + \delta$.

Таким образом, $P(x) = (x^2 + px + q)P_2(x) + (\alpha x + \beta); \quad Q_1(x) = (x^2 + px + q)Q_2(x) + (\gamma x + \delta)$.

Отсюда достаточно показать, что на $x^2 + px + q$ делится многочлен $\alpha x + \beta - (Mx + N)(\gamma x + \delta) = -M\gamma x^2 + x(-N\gamma - M\delta + \alpha) + (\beta - N\delta)$.

Поделим полученный выше многочлен на $x^2 + px + q$ :
$\frac{-M\gamma x^2 + x(-N\gamma - M\delta + \alpha) + (\beta - N\delta)}{x^2+px+q} = -M\gamma + (\alpha - N\gamma - M\delta + M\gamma p)x + (\beta - N\delta + M\gamma q)$.

Для целого деления необходимо, чтобы:

$$\begin{cases} \alpha - N\gamma - M\delta + M\gamma p = 0 \\ \beta - N\delta + M\gamma q = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} -(\delta - \gamma p)M - \gamma N = -\alpha \\ \gamma q M - \delta N = -\beta \end{cases}$$

где $M, N$ - неизвестные;

$$\begin{cases} \alpha - N\gamma - M\delta + M\gamma p = 0 \\ \beta - N\delta + M\gamma q = 0 \end{cases} ; \quad \begin{vmatrix} \delta - \gamma p & \gamma \\ \gamma q & -\delta \end{vmatrix} = -\delta^2 + \gamma p\delta - \gamma^2 q.$$

Заметим, что $\alpha$ и $\beta$, а так же $\gamma$ и $\delta$ одновременно в 0 не обращаются.
$p^2 - 4q < 0 \implies q \neq 0, \quad -(\delta^2 + \gamma^2 q) + \gamma p\delta$:

1. $\gamma = 0,\ \delta = 0$ – невозможно;
2. $\gamma = 0,\ \delta \neq 0 \implies -\delta^2 \neq 0$;
3. $\gamma \neq 0,\ \delta = 0 \implies -\gamma^2 q \neq 0$;
4. $\gamma \neq 0,\ \delta \neq 0$.

Тогда, если $-(\delta^2 + \gamma^2 q) + \gamma p\delta = 0 \implies \gamma p\delta = \delta^2 + \gamma^2 q$;
$p^2 - 4q < 0,\ p^2 < 4q \implies 0 \leqslant \frac{p^2}{4} < q$

$\gamma \neq 0$: если $(\frac{\delta}{\gamma})^2 + (-\frac{\delta}{\gamma})p + q = 0$, то $x = \frac{\delta}{\gamma}$ - корень многочлена $x^2 + px + q \implies$ противоречие с тем, что $x^2 + px + q$ не имеет вещественных корней $\implies \Delta \neq 0 \implies \exists M, N$ и $\exists$ многочлен $P_1(x)$. $\square$

### 1.4 Метод неопределенных коэф-ов (следствия лемм)

Если $\frac{P(x)}{Q(x)}$ - правильная дробь и $Q(x) = (x - a_1)^{k_1} * \ldots * (x - a_s)^{k_s} * (x^2 + p_1 x + q_1)^{m_1} * \ldots * (x^2 + p_r x + q_r)^{m_r}$, то верно следующее разложение:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=0}^{k_1 - 1} \frac{A_i}{(x-a_i)^{k_1 - i}} + \ldots + \sum_{i=0}^{k_s - 1} \frac{A_i^s}{(x-a_s)^{k_s - i}} + \sum_{i=0}^{m_1 - 1} \frac{M_i x + N_i}{(x^2+p_1x+q_1)^{m_1 - i}} + \ldots + \sum_{i=0}^{m_r - 1} \frac{M_i^r x + N_i^r}{(x^2+p_rx+q_r)^{m_r - i}},$$

где $A_i, \ldots, A_i^s, \quad M_i, N_i, \ldots, M_i^r, N_i^r \in \mathbb{R}$.

**Пример 4.** $Q(x) = (x-1)^3(x+2)^2(x^2+x+1)^3$

$$\frac{x^5-x^3+1}{Q(x)} = \frac{A_0^1}{(x-3)^3} + \frac{A_1^1}{(x-3)^2} + \frac{A_2^1}{(x-3)} + \frac{A_0^2}{(x+2)^2} + \frac{A_1^2}{(x+2)} + \frac{M_0x+N_0}{(x^2+x+1)^3} + \frac{M_1x+N_1}{(x^2+x+1)^2} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+x+1)}$$

Приведем в $\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=0}^{k_1-1} \frac{A_i}{(x-a_i)^{k_1-i}} + \ldots$ правую часть к общему знаменателю и получим: $\frac{P(x)}{Q(x)} \equiv \frac{R(x)}{Q(x)}$; $\quad \deg Q(x) = k_1 + \ldots + k_s + 2m_1 + \ldots + 2m_r = n$;

$l = \deg R(x) = \deg P(x) \leqslant \deg Q(x) - 1$.

Количество неизвестных коэф. у множества $R(x)$ равно $n$ штук, приравнивая коэф. при соответствующих степенях $x$ (в том числе при $x^0$) получим $n$ уравнений с $n$ неизвестными (старшая степень $x$ множества $R(x)$ равна $n-1$).

## 1.5 Метод Остроградского

**Теорема 1.1.** Пусть $\frac{P(x)}{Q(x)}$ - правильная несократимая дробь.
Тогда $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}dx$. Дроби $\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$ и $\frac{P_2(x)}{Q_2(x)}$ - правильные. $Q(x) = Q_1(x)Q_2(x)$ и многочлен $Q_2(x)$ представляет собой произведение всех линейных и квадратичных множителей многочлена $Q(x)$, взятых в первой степени.

**Пример 5.** $\int \frac{x^2+2x+5}{(x-2)(x^2+1)^2}dx = \frac{P_1(x)}{x^2+1} + \int \frac{P_2(x)}{(x-2)(x^2+1)}dx = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \int \frac{Cx^2+Dx+E}{(x-2)(x^2+1)}dx$