Математический Анализ
2 семестр

Данил Заблоцкий

28 марта 2023 г.

Оглавление

Глава 1

Дифференциальное исчисление

1.1 Первообразная и неопределенный интеграл

Определение 1.1.1 (Первообразная функция)**.** Пусть X - промежуток, $f : X \to \mathbb{R}$. Функция $F(x)$ называется **первообразной** $f(x)$, если производная $F'(x) = f(x)$, при этом $F(x)$ дифференцируема и непрерывна.

Пример 1. $f(x) = 2x \implies F(x) = x^2$. В самом деле, $F'(x) = f(x)$.

Утверждение 1.1.1. (О первообразной)

1. Если $F(x)$ - первообразная функции $f(x)$ на промежутке X, и $\mathit{\Phi}(x) = F(x) + C,\ c \in \mathbb{R}$, то $\mathit{\Phi}(x)$ - тоже первообразная.

2. Если $F(x)$ и $\mathit{\Phi}(x)$ - две первообразные для $f(x)$ на промежутке X, то $\exists C = const,\ c \in \mathbb{R}$ такая, что $\mathit{\Phi}(x) = F(x) + C$.

Доказательство. (Утверждения о первообразной)

1. $\Phi'(x) = (F(x) + C)' = F'(x) = f(x) \implies \Phi(x)$ - первообразная для $f(x)$.

2. Так как $F(x)$ и $\Phi(x)$ - первообразные для $f(x)$, то $F'(x) = f(x), \Phi'(x) = f(x)$. Рассмотрим функцию $\phi = \Phi(x) - F(x),\ \forall x \in X$: $\phi'(x) = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$. Рассмотрим $\forall x_1, x_2 \in X$, по теореме Лагранжа, $\exists \xi \in (x_1, x_2) :\ \phi(x_1) - \phi(x_2) = \phi'(\xi)(x_1 - x_2) = 0 \implies \phi(x_1) = \phi(x_2) \implies \phi(x) = const$ для $\forall x \in X$.

$\square$

Определение 1.1.2 (Неопределенный интеграл)**.** Совокупность всех первообразных для функции $f(x)$ на промежутке X называется **неопределенным интегралом** и обозначается:

$$\int f(x)dx$$

Таким образом, $\int f(x)dx = \{F(x) + C, \text{ где } F'(x) = f(x),\ C \in \mathbb{R}\}$, или:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Замечание. (Для неопределенного интеграла)

- $(\int f(x)dx)'_x = (F(x) + C)'_x = F'(x) = f(x)$;
- $d(\int f(x)dx) = d(F(x) + C) = (F(x) + C)'dx = F'(x)dx = f(x)dx$;
- $\int d(F(x)) = \int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x) + C,\ C \in \mathbb{R}$.

Определение 1.1.3 (интегрирование)**.** Операция нахождения первообразной функции $f(x)$ называется ее **интегрированием**.

Утверждение 1.1.2. (Основные методы интегрирования)
Пусть $f : X \to \mathbb{R},\ g : X \to \mathbb{R},\ X$ - промежуток:

1. Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{R} = const$, тогда:
   $\int(\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx$.

2. Формула интегрирования по частям:
   $udv = uv - \int udv,\ u = u(x), v = v(x)$.

3. Интегрирование подстановкой:
   Пусть T - промежуток, $X = X(t)$ - дифференцируема на T.
   Тогда $\int f(X(t)) * X'(t)dt = F(X(t)) + C = \int f(x)dx + C$.

Доказательство. (Утверждения об основных методах интегрирования)

1. Возьмем производную по x от обеих частей равенства: $\int(\alpha f(x)+\beta g(x))'_x = \alpha f(x) + \beta g(x) = \alpha F'(x) + \beta G'(x) = \alpha(\int f(x)dx)'_x + \beta(\int g(x)dx)'_x$ - является производной для $\alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx$.

2. Рассмотрим $d(uv) = vdu + udv :\ \int d(uv) = \int vdu + \int udv$. Так как $d(uv) = uv$, то из того, что $\int d(uv) = \int vdu + \int udv \implies \int udv = uv - \int vdu$.

3. $f(X(t)) * X'(t)dt = \int f(X(t))dx(t) = \int f(x)dx = F(x) + C = F(X(t)) + C$; $(F(X(t)) + C)'_t = F'_t * X'_t = f(x) * X'(t) = (\int f(X(t)) * X'(t)dt)'_t$.

□

Пример 2. (Интегрирование функций)

1. $\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C$

2. $\int \ln x dx = \left| \begin{array}{c} u = \ln x,\ dv = dx,\ du = d(\ln x) = \frac{dx}{x} \implies \\ \implies \int dv = \int dx \implies v = x \end{array} \right| = x \ln x - \int x \frac{dx}{x} = x \ln x - x + C$

3. $\int \sqrt{1-x^2} dx = \left| \begin{array}{c} x = \sin t,\ dx = \\ = d(\sin t) = \cos t dt \end{array} \right| = \int \cos^2 t dt = \int \frac{1}{2}(1+\cos 2t) dt = \frac{1}{2}\int dt + \frac{1}{2}\int \cos 2t dt = \frac{t}{2} + \frac{1}{4}\int \cos 2t d(2t) = \frac{t}{2} + \frac{1}{4}\sin 2t + C = \frac{\arcsin x}{2} + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C$

Пример 3. (Неинтегрируемые функции)

$$\int \frac{x}{\ln x} dx; \quad \int \frac{e^x}{x} dt; \quad \int e^{x^2} dx$$

1.1.1 Интегрирование рациональных дробей

Определение 1.1.4 (Рациональная дробь)**.** Функция вида $\frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x),\ Q(x)$ - многочлены, называется **рациональной дробью**, или рациональной функцией.
Если $\deg P(x) < \deg Q(x)$, то дробь называется **правильной**, иначе - **неправильной**.
Если дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ - неправильная, то ее можно представить в виде $\frac{P(x)}{Q(x)} = M(x) + \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$, где $\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$ - правильная дробь. Поэтому достаточно уметь интегрировать правильную дробь.

Определение 1.1.5 (Простые дроби)**. Простыми дробями** будем называть дроби следующих четырех видов:

1. $\frac{A}{x-a}, \quad A, a \in \mathbb{R}$

2. $\frac{A}{(x-a)^k}, \quad A, a \in \mathbb{R},\ k > 1$

3. $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}, \quad A, B, p, q \in \mathbb{R},\ p^2 - 4q < 0$

4. $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}, \quad A, B, p, q \in \mathbb{R},\ k > 1,\ p^2 - 4q < 0$

1.1.2 Интегрирование рациональных дробей

1. $\int \frac{A}{x-a} dx = A \int \frac{d(x-a)}{x-a} = \left| \begin{array}{c} \int \frac{dt}{t} \\ d(x-a) = dx \end{array} \right| = A \ln|x-a| + C$

2. $\int \frac{A}{(x-a)^k} dx = A \int (x-a)^{-k} dx = A \int (x-a)^{-k} d(x-a) = \left| \begin{array}{c} \int t^n dt = \\ = \frac{t^{n+1}}{n+1} \end{array} \right| = A\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C = \frac{A}{(x-a)^{k-1}(1-k)} + C$

3. $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \left| \begin{array}{c} x^2+px+q = (x^2+2\frac{p}{2}x+\frac{p^2}{4}) - \frac{p^2}{4}+q = \\ = (x+\frac{p}{2})^2 - \frac{p^2-4q}{4},\ (-\frac{p^2-4q}{4} = C > 0) \end{array} \right| = \int \frac{Ax+B}{(x+\frac{p}{2})^2+C}dx =$
$A\int \frac{xdx}{(x+\frac{p}{2})^2+C} + B\int \frac{dx}{(x+\frac{p}{2})^2+C} = \left| \begin{array}{c} d((x+\frac{p}{2})^2+C) = \\ = 2(x+\frac{p}{2}dx) \end{array} \right| = \ldots$

$A\int \frac{xdx}{(x+\frac{p}{2})^2+C} = \frac{A}{2}\int \frac{(2(x+\frac{p}{2})-p)dx}{(x+\frac{p}{2})^2+C} = \frac{A}{2}\int \frac{2(x+\frac{p}{2})dx}{(x+\frac{p}{2})^2+C} - \frac{Ap}{2}\int \frac{dx}{(x+\frac{p}{2})^2+C} = \left| \int \frac{dx}{(x+\frac{p}{2})^2+C} = I \right| = \frac{A}{2}\int \frac{d((x+\frac{p}{2})^2+C)}{(x+\frac{p}{2})^2+C} - \frac{Ap}{2}I = \frac{A}{2}\ln|(x+\frac{p}{2})^2+C| - \frac{Ap}{2}I;$

$I = \frac{dx}{(x+\frac{p}{2})^2+C} = \frac{1}{C}\int \frac{\sqrt{C}d(\frac{x}{\sqrt{C}}+\frac{p}{2\sqrt{C}})}{(\frac{x}{\sqrt{C}}+\frac{p}{2\sqrt{C}})^2+1} = \left| \int \frac{dt}{t^2+1} = \arctan t + C \right| = \frac{1}{\sqrt{C}}\arctan(\frac{x+2p}{2\sqrt{C}}) + C_1;$

$\frac{1}{C}(x+\frac{p}{2})^2 = (\frac{1}{\sqrt{C}})^2(x+\frac{p}{2})^2 = (\frac{1}{\sqrt{C}}(x+\frac{p}{2}))^2 = (\frac{x}{\sqrt{C}+\frac{p}{2\sqrt{C}}})^2;$

$\ldots = \frac{A}{2}\ln|(x+\frac{p}{2})^2 - \frac{p^2-4q}{4}| + (B-\frac{Ap}{2})\frac{1}{\sqrt{C}}\arctan(\frac{x+2p}{2\sqrt{C}}) + C_1$

4. $\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}dx = \left| \begin{array}{c} d(x^2+px+q) = \\ = 2x+p \end{array} \right| = \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p)+B-\frac{Ap}{2}}{(x^2+px+q)^k}dx = \frac{A}{2}\int \frac{d(x^2+px+q)}{(x^2+px+q)^k} +$
$(B-\frac{Ap}{2})\int \frac{dx}{((x+\frac{p}{2})^2+(\frac{-p^2+4a}{4}))^k} = \frac{A}{2(1-k)}\frac{1}{(x^2+px+q)^{k-1}} + \frac{(B-\frac{Ap}{2})}{(-\frac{p^2+4q}{a})^k}\int \frac{dx}{((\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{\frac{-p^2+4q}{4}}})^2+1)^k} =$
$\frac{A}{2(1-k)}\frac{1}{(x^2+px+q)^{k-1}} + \frac{(B-\frac{Ap}{2})\frac{\sqrt{-p^2+4q}}{2}}{(\frac{-p^2+4q}{4})^k}\int \frac{d\left(\frac{x+\frac{p}{2}}{\frac{\sqrt{-p^2+4q}}{2}}\right)}{\left(\left(\frac{x+\frac{p}{2}}{\frac{\sqrt{-p^2+4q}}{2}}\right)^2+1\right)^k}$

Таким образом, чтобы вычислить интеграл 4., нужно вычислить интеграл $\int \frac{dt}{(t^2+1)^k} = \left| \begin{array}{c} u = \frac{1}{(t^2+1)^k};\ du = d((t^2+1)^k) = -k(t^2+1)^{-k-1}2tdt \\ dv = dt \implies v = t \end{array} \right| =$
$\frac{t}{(t^2+1)^k} - \int \frac{-2kt^2}{(t^2+1)^{k+1}}dt = \frac{t}{(t^2+1)^k} + 2k(\int \frac{t^2+1}{(t^2+1)^{k+1}}dt - \int \frac{dt}{(t^2+1)^{k+1}});$
$\int \frac{dt}{(t^2+1)^k} = \frac{t}{(t^2+1)^k} + 2k\int \frac{dt}{(t^2+1)^k} - 2k\int \frac{dt}{(t^2+1)^{k+1}} \left| \begin{array}{c} \frac{dt}{(t^2+1)^k} = I_k \\ \frac{dt}{(t^2+1)^{k+1}} = I_{k+1} \end{array} \right|;$
$2kI_{k+1} = \frac{t}{(t^2+1)^k} + (2k-1)I_k; \quad I_{k+1} = \frac{t}{2k(t^2+1)^k} + \frac{2k-1}{2k}I_k,\ k = 1, \ldots$

1.1.3 Разложение рациональной дроби на простые

Лемма 1.1.1. Пусть $\frac{P(x)}{Q(x)}$ - правильная рациональная дробь (несократимая). Причем $Q(x) = (x-a)^k Q_1(x)$, где $Q_1(x)$ не делится на $(x-a)$. Тогда $\exists$ многочлен $P_1(x)$ из $\exists A \in \mathbb{R}$: $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{P_1(x)}{(x-a)^{k-1}Q_1(x)}$. При этом дробь (рациональная) $\frac{P_1(x)}{(x-a)^{k-1}Q_1(x)}$ - правильная.

Доказательство. Рассмотрим $\frac{A}{(x-a)^k} + \frac{P_1(x)}{(x-a)^{k-1}Q_1(x)} = \frac{Q_1(x)A+(x-a)P_1(x)}{Q(x)}$. Нужно доказать, что $\frac{Q_1(x)A+(x-a)P_1(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{Q(x)}$.

Отсюда следует, что для выполнения леммы, многочлен $P(x)$ должен расскладываться: $P(x) = Q_1(x) + (x-a)P_1(x) \implies P_1(x) = \frac{P(x)-AQ_1(x)}{x-a}$. Чтобы существовал многочлен $P_1(x)$, нужно, чтобы $P(x) - AQ_1(x)$ делилась на $x - a$. Для этого точка a должна быть корнем $P(x) - AQ_1(x)$, то есть чтобы $P(a) - AQ_1(a) = 0 \implies A = \frac{P(a)}{Q(a)}$; $Q_1(a) \neq 0$ по условию. Таким образом, при $A = \frac{P(a)}{Q_1(a)}$, функция $P_1(x)$ будет являться многочленом $P_1(x) = \frac{P(x)-\frac{P(a)}{Q_1(a)}Q_1(x)}{x-a}$.

Покажем, что дробь $\frac{P_1(x)}{(x-a)^{k-1}Q_1(x)}$ - правильная, то есть $\deg P_1(x) < \deg[(x-a)^{k-1}Q_1(x)]$. Имеем, $P_1(x) = \frac{P(x)-AQ_1(x)}{x-a}$; $\deg P_1(x) \leqslant \max(\deg P(x), \deg Q_1(x)) - 1$. Тогда $\deg P_1(x) \leqslant \deg P(x) - 1 < \deg Q(x) - 1 = \deg[(x-a)^{k-1}Q_1(x)]$.

Если $\deg Q_1(x) \geqslant \deg P(x) \implies \deg P_1(x) \leqslant \deg Q_1(x) - 1 < \deg Q(x) - 1 = \deg[(x-a)^{k-1}Q_1(x)]$. Дробь $\frac{P_1(x)}{(x-a)^{k-1}Q_1(x)}$ - правильная. □

Лемма 1.1.2. Пусть $\frac{P(x)}{Q(x)}$ - правильная дробь. При этом $Q(x) = (x^2+px+q)^k Q_1(x)$, здесь $p^2 - 4q < 0$. Тогда $\exists M, N \in \mathbb{R}$ и $\exists$ многочлен $P_1(x)$: $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k} + \frac{P_1(x)}{(x^2+px+q)^{k-1}Q_1(x)}$. При этом $Q_1(x)$ не делится на $x^2 + px + q$. Дробь $\frac{P_1(x)}{(x^2+px+q)^{k-1}Q_1(x)}$ - правильная.

Доказательство. Если разложение $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k} + \frac{P_1(x)}{(x^2+px+q)^{k-1}Q_1(x)}$ верно, то: $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{(Mx+N)Q_1(x)+P_1(x)(x^2+px+q)}{Q(x)}$, следовательно $P(x)$ должен выражаться как: $P(x) = (Mx+N)Q_1(x) + P_1(x)(x^2+px+q) \implies P_1(x) = \frac{P(x)-(Mx+N)Q_1(x)}{x^2+px+q}$.

Так как нужно, чтобы $P_1(x)$ был многочленом, то $P(x) - (Mx+N)Q_1(x)$ должно делиться на $x^2 + px + q$.

Рассмотрим остаток от деления $P(x)$ на $x^2 + px + q$ в форме $\alpha x + \beta$ и остаток от деления $Q_1(x)$ на $x^2 + px + q$ в форме $\gamma x + \delta$.

Таким образом, $P(x) = (x^2 + px + q)P_2(x) + (\alpha x + \beta); \quad Q_1(x) = (x^2 + px + q)Q_2(x) + (\gamma x + \delta)$.

Отсюда достаточно показать, что на $x^2 + px + q$ делится многочлен $\alpha x + \beta - (Mx + N)(\gamma x + \delta) = -M\gamma x^2 + x(-N\gamma - M\delta + \alpha) + (\beta - N\delta)$.

Поделим полученный выше многочлен на $x^2 + px + q$:
$\frac{-M\gamma x^2 + x(-N\gamma - M\delta + \alpha) + (\beta - N\delta)}{x^2+px+q} = -M\gamma + (\alpha - N\gamma - M\delta + M\gamma p)x + (\beta - N\delta + M\gamma q)$.

Для целого деления необходимо, чтобы:

$$\begin{cases} \alpha - N\gamma - M\delta + M\gamma p = 0 \\ \beta - N\delta + M\gamma q = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} -(\delta - \gamma p)M - \gamma N = -\alpha \\ \gamma q M - \delta N = -\beta \end{cases}$$

где M, N - неизвестные;

$$\begin{cases} \alpha - N\gamma - M\delta + M\gamma p = 0 \\ \beta - N\delta + M\gamma q = 0 \end{cases} ; \quad \begin{vmatrix} \delta - \gamma p & \gamma \\ \gamma q & -\delta \end{vmatrix} = -\delta^2 + \gamma p\delta - \gamma^2 q.$$

Заметим, что α и β, а так же γ и δ одновременно в 0 не обращаются.
$p^2 - 4q < 0 \implies q \neq 0, \quad -(\delta^2 + \gamma^2 q) + \gamma p\delta$:

1. $\gamma = 0,\ \delta = 0$ – невозможно;
2. $\gamma = 0,\ \delta \neq 0 \implies -\delta^2 \neq 0$;
3. $\gamma \neq 0,\ \delta = 0 \implies -\gamma^2 q \neq 0$;
4. $\gamma \neq 0,\ \delta \neq 0$.

Тогда, если $-(\delta^2 + \gamma^2 q) + \gamma p\delta = 0 \implies \gamma p\delta = \delta^2 + \gamma^2 q$;
$p^2 - 4q < 0,\ p^2 < 4q \implies 0 \leqslant \frac{p^2}{4} < q$

$\gamma \neq 0$: если $(\frac{\delta}{\gamma})^2 + (-\frac{\delta}{\gamma})p + q = 0$, то $x = \frac{\delta}{\gamma}$ - корень многочлена $x^2 + px + q \implies$ противоречие с тем, что $x^2 + px + q$ не имеет вещественных корней $\implies \Delta \neq 0 \implies \exists M, N$ и $\exists$ многочлен $P_1(x)$. $\square$

1.1.4 Метод неопределенных коэф-ов (следствия лемм)

Если $\frac{P(x)}{Q(x)}$ - правильная дробь и $Q(x) = (x - a_1)^{k_1} * \ldots * (x - a_s)^{k_s} * (x^2 + p_1 x + q_1)^{m_1} * \ldots * (x^2 + p_r x + q_r)^{m_r}$, то верно следующее разложение:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=0}^{k_1 - 1} \frac{A_i}{(x - a_i)^{k_1 - i}} + \ldots + \sum_{i=0}^{k_s - 1} \frac{A_i^s}{(x - a_s)^{k_s - i}} + \sum_{i=0}^{m_1 - 1} \frac{M_i x + N_i}{(x^2 + p_1 x + q_1)^{m_1 - i}} + \ldots + \sum_{i=0}^{m_r - 1} \frac{M_i^r x + N_i^r}{(x^2 + p_r x + q_r)^{m_r - i}},$$

где $A_i, \ldots, A_i^s, \quad M_i, N_i, \ldots, M_i^r, N_i^r \in \mathbb{R}$.

Пример 4. $Q(x) = (x-1)^3(x+2)^2(x^2+x+1)^3$

$$\frac{x^5-x^3+1}{Q(x)} = \frac{A_0^1}{(x-3)^3} + \frac{A_1^1}{(x-3)^2} + \frac{A_2^1}{(x-3)} + \frac{A_0^2}{(x+2)^2} + \frac{A_1^2}{(x+2)} + \frac{M_0x+N_0}{(x^2+x+1)^3} + \frac{M_1x+N_1}{(x^2+x+1)^2} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+x+1)}$$

Приведем в $\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=0}^{k_1-1} \frac{A_i}{(x-a_i)^{k_1-i}} + \ldots$ правую часть к общему знаменателю и получим: $\frac{P(x)}{Q(x)} \equiv \frac{R(x)}{Q(x)}$; $\deg Q(x) = k_1 + \ldots + k_s + 2m_1 + \ldots + 2m_r = n$;

$l = \deg R(x) = \deg P(x) \leqslant \deg Q(x) - 1.$

Количество неизвестных коэф. у множества $R(x)$ равно n штук, приравнивая коэф. при соответствующих степенях x (в том числе при x^0) получим n уравнений с n неизвестными (старшая степень x множества $R(x)$ равна $n-1$).

1.1.5 Метод Остроградского

Теорема 1.1.1. Пусть $\frac{P(x)}{Q(x)}$ - правильная несократимая дробь.
Тогда $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}dx$. Дроби $\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$ и $\frac{P_2(x)}{Q_2(x)}$ - правильные. $Q(x) = Q_1(x)Q_2(x)$ и многочлен $Q_2(x)$ представляет собой произведение всех линейных и квадратичных множителей многочлена $Q(x)$, взятых в первой степени.

Пример 5. $\int \frac{x^2+2x+5}{(x-2)(x^2+1)^2}dx = \frac{P_1(x)}{x^2+1} + \int \frac{P_2(x)}{(x-2)(x^2+1)}dx = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \int \frac{Cx^2+Dx+E}{(x-2)(x^2+1)}dx$

Доказательство. Рассмотрим $\int \frac{A}{(x-a)^k}dx = \frac{A}{1-k}\frac{1}{(x-a)^{k-1}}$;

$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}dx = \frac{A}{(x^2+px+q)^{k-1}} + B\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^k} = \frac{A}{(x^2+px+q)^{k-1}} + \frac{C}{(x^2+px+q)^{k-1}} + D\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^{k-1}} = \frac{A}{(x^2+px+q)^{k-1}} + \ldots + \frac{V}{(x^2+px+q)^2} + W\int \frac{dx}{x^2+px+q}$.

Представим $Q(x)$ в виде $Q(x) = (x-a_1)^{k_1} * \ldots * (x-a_s)^{k_s} * (x^2+p_1x+q_1)^{m_1} * \ldots * (x^2+p_rx+q_r)^{m_r}$, тогда:

$Q_2(x) = (x-a_1) * \ldots * (x-a_s) * (x^2+p_1x+q_1) * \ldots * (x^2+p_rx+q_r)$;

$Q_1(x) = (x-a_1)^{k_1-1} * \ldots * (x-a_s)^{k_s-1} * (x^2+p_1x+q_1)^{m_1-1} * \ldots * (x^2+p_rx+q_r)^{m_r-1}$;

Из метода неопределенных коэффициентов и того, что $\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}dx = \frac{A}{(x^2+px+q)^{k-1}} + \ldots + \frac{V}{(x^2+px+q)^2} + W\int \frac{dx}{x^2+px+q} \implies \int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}dx$.

Как найти $P_1(x)$ и $Q_1(x)$?

Продифференцируем $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}dx$:

$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P_1'(x)Q_1(x) - P_1(x)Q_1'(x)}{Q_1^2} + \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}$. Рассмотрим: $\frac{P_1'(x)Q_1(x) - P_1(x)Q_1'(x)}{Q_1^2} = \frac{P_1'(x) - P_1(x)\frac{Q_1'(x)}{Q_1(x)}}{Q_1(x)} = \frac{P_1'(x)Q(x) - P_1(x)\frac{Q_1'(x)Q_2(x)}{Q_1(x)}}{Q_1(x)Q_2(x)}$.

Пусть $H(x) = \frac{Q_1'(x)Q_2(x)}{Q_1(x)}$ - многочлен (нужно показать).

Пусть $Q_1(x)$ имеет среди своих множителей многочлен вида $(x-a)^n$, тогда $Q_1'(x)$ будет иметь в своем составе $(x-a)^{n-1}$, а $Q_2(x)$ только содержит в себе выражение $(x-a) \implies H(x)$ - многочлен.

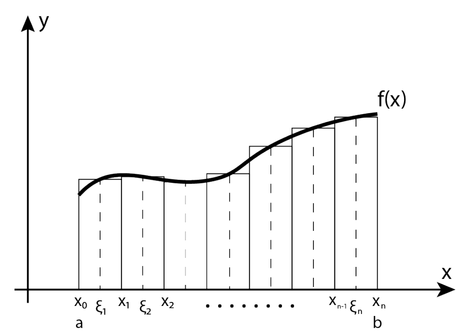
Коэффициенты многочленов $P_1(x)$ и $P_2(x)$ можно найти с помощью метода неопределенных коэффициентов из выражения $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k} + \frac{P_1(x)}{(x^2+px+q)^{k-1}Q_1(x)}$. $\square$

Глава 2

Интегральное исчисление

2.1 Интеграл Римана

Определение 2.1.1 (интеграл Римана)**.** Пусть $f : [a;b] \to \mathbb{R}$. Разобьем отрезок $[a;b]$ на n частей точками $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$. В каждом таком кусочке выберем точку $\xi_i \in [x_{i-1}; x_i],\ i = 1, \ldots, n$.



$\Delta i = [x_{i-1}, x_i], \quad \Delta x = x_i - x_{i-1}$ - длина отрезка Δi.

Составим сумму $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$, где $f(\xi_i)$ - высота i-го прямоугольника и Δx_i - ширина i-го прямоугольника.

S_n - площадь ступенчатой фигуры, составленной из прямоугольников под графиком функции $f(x)$.

Говорят, что функция f интегрируема на $[a;b]$, если существует предел интегральных сумм S_n, то есть $\exists \lim\limits_{max\Delta x_i \to 0} S_n$, причем этот предел не зависит ни от способа разбиения отрезка $[a;b]$, ни от способа выбора точек ξ_i.

Этот предел называется **интегралом Римана** функции f на $[a;b]$. Класс интегрируемых функций на отрезке $[a;b]$ будем обозначать $R([a;b])$.

2.2 Базы. Предел функции по базе

Определение 2.2.1 (база множества)**.** Пусть X - произвольное множество.

Система β подмножеств множества X называется **базой** на X, если:

1. $\forall \beta \in \beta \quad \beta \neq \varnothing$
2. $\forall \beta_1, \beta_2 \in \beta \; \exists \beta_3 \in \beta : \quad \beta_3 \subset \beta_1 \cap \beta_2$

Пример 6 (баз множества)**.** 1. $\beta = \{X\}$ - база

2. $X = \mathbb{R}, \quad \beta = \{\beta_n = (-\frac{1}{n}; \frac{1}{n}),\; n \in \mathbb{N}\}$
3. $X = \mathbb{R}, \quad \beta = \{\beta_\epsilon = \{x : \; 0 < |x| < \epsilon\}, \epsilon > 0\}$ (выколотые окрестности нуля)

Определение 2.2.2 (предел по базе)**.** Пусть $f : X \to \mathbb{R}, \; \beta$ - база на X

Число $A \in \mathbb{R}$ называется **пределом** функции f **по базе** β, если $\forall \epsilon > 0 \; \exists$ элемент базы $\beta \in \beta : \quad |f(x) - A| < \epsilon$.

$$\lim_{\beta} f(x)$$

Определение 2.2.3 (предел по базе (МП))**.** Пусть (Y, d) - МП, $f : X \to Y$, β - база на X.

$y \in Y$ называется **пределом** функции $f(x)$ **по базе** β, если $\forall \epsilon > 0 \; \exists \beta \in \beta \; \forall x \in \beta : \quad d(f(x), y) < \epsilon$, или, что то же самое, $\forall V_Y(y) \; \exists \beta \in \beta \quad f(\beta) \subset V_Y(y)$, где V_Y - окрестность метрического пространства Y.

Теорема 2.2.1 (основные свойства предела по базе)**.** Пусть $f : X \to \mathbb{R}, \; \beta$ - база на X:

1. Если $\exists \lim_{\beta} f(x)$, то $\exists \beta \in \beta : \; f$ ограничена на β
2. Если $\lim_{\beta} f(x) = A$ и $\lim_{\beta} f(x) = B$, то $A = B$

Теорема 2.2.2 (связь предела по базе с арифметическими операциями). Пусть $f : X \to \mathbb{R},\ g : X \to \mathbb{R},\ \beta$ - база на X, $\quad \lim\limits_{\beta} f(x) = A, \quad \lim\limits_{\beta} g(x) = B$:

1. $\exists \lim\limits_{\beta}(f(x) \pm g(x)) = A \pm B$
2. $\exists \lim\limits_{\beta}(f(x)g(x)) = AB$
3. $\exists \lim\limits_{\beta}(\frac{f(x)}{g(x)}) = \frac{A}{B}$, если $g(x) \neq 0,\ \beta \neq 0$

Теорема 2.2.3 (связь предела функции по базе с неравенствами). Пусть $f : X \to \mathbb{R},\ g : X \to \mathbb{R},\ \beta$ - база на X:

1. Если $\exists \beta \in \beta : \quad \forall x \in \beta\ f(x) \leqslant g(x)$, то $\lim\limits_{\beta} f(x) \leqslant \lim\limits_{\beta} g(x)$
2. Если $\lim\limits_{\beta} f(x) < \lim\limits_{\beta} g(x)$, то $\exists \beta \in \beta\ \forall x \in \beta \quad f(x) < g(x)$

   Если $\lim\limits_{\beta} f(x) \geqslant \lim\limits_{\beta} g(x)$, то $\exists \beta \in \beta\ \forall x \in \beta \quad f(x) \geqslant g(x)$
3. Если $h : X \to \mathbb{R}$ и $\exists \beta \in \beta :\ \forall x \in \beta\ f(x) \leqslant h(x) \leqslant g(x)$ **И** $A = \lim\limits_{\beta} f(x) = \lim\limits_{\beta} g(x)$, то $\lim\limits_{\beta} h(x) = A$

Теорема 2.2.4 (критерий Коши существования предела по базе). Существуют две формулировки:

1. Пусть $f : X \to \mathbb{R},\ \beta$ - база на X.

   Функция $f(x)$ имеет предел по базе $\beta \iff \forall \epsilon > 0\ \exists \beta \in \beta : \quad \forall x_1, x_2 \in \beta\ |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$
2. Пусть (Y, d) - МП (**полное**), $f : X \to Y,\ \beta$ - база на Y.

   Функция $f(x)$ имеет предел по базе $\beta \iff \forall \epsilon > 0 \exists \beta \in \beta : \quad \forall x_1, x_2 \in \beta\ d(f(x_1), f(x_2)) < \epsilon$

Доказательство. (критерия Коши $\exists$ предела по базе)

" $\to$ " Пусть $\exists \lim\limits_{\beta} f(x) = A$. Покажем, что $\forall \epsilon > 0 \exists \beta \in \beta : \quad \forall x_1, x_2 \in \beta\ |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$. Рассмотрим $|f(x_1) - f(x_2)| = |f(x_1 - A) + (A - f(x_2))| \leqslant |f(x_1) - A| + |f(x_2) - A| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$.

" $\leftarrow$ " Пусть $\forall \epsilon > 0\ \exists \beta \in \beta : \quad \forall x_1, x_2 \in \beta\ |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$. Покажем, что $\exists \lim\limits_{\beta} f(x)$. Возьмем $\beta_1 \in \beta : \quad \forall x_1, x_2 \in \beta_1\ |f(x_1) - f(x_2)| < 1$. Возьмем $\beta_1' \in \beta : \quad \forall x_1, x_2 \in \beta_1'\ |f(x_1) - f(x_2)| < \frac{1}{2}$. Пусть $\beta_2 \subset \beta_1 \cap \beta_1'$ и так далее.

Таким образом построим систему вложенных множеств: $\beta_1 \supset \beta_2 \supset \ldots \supset \beta_n \supset \ldots$, при этом $\forall x_1, x_2 \in \beta_n$ $|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{1}{2^{n-1}}$. Воспользуемся полнотой пространства, то есть в нем $\exists \lim f(x)$, если $f(x)$ - фундаментальная.

$\forall n \in \mathbb{N}$ рассмотрим $x_n \in \beta_n$. Тогда, если $n < m$ $(m \in \mathbb{N})$, то для $x_n \in \beta_n$ и $x_m \in \beta_n$ $|f(x_n) - f(x_m)| < \frac{1}{2^{n-1}}$.

Таким образом последовательность $f(x_n)$ - фундаментальная $\implies$ $\exists \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$. Покажем, что $A = \lim\limits_{\beta} f(x)$. Пусть $\epsilon > 0$ задано. Выберем $n \in \mathbb{N}: \quad \frac{1}{2^{n-1}} < \frac{\epsilon}{2}$. Возьмем $m > n: \quad |f(x_m) - A| < \frac{\epsilon}{2}$. Возьмем $\beta = \beta_n$. Тогда $\forall x \in \beta$ $|f(x) - A| = |f(x) - f(m) + f(x_m) - A| \leqslant |f(x) - f(x_m)| + |f(x_m) - A| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$.

Следовательно, $\exists \lim\limits_{\beta} f(x) = A$. □

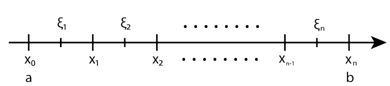
2.3 Разбиение. Интеграл Римана (v.2)

Определение 2.3.1 (разбиение)**.** Пусть дан отрезок $[a;b]$. **Разбиением** P отрезка $[a;b]$ называется набор точек $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$. То есть $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$. Отрезки $[x_{i-1}; x_i] = \Delta_i$. $x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$ - длина i-го отрезка разбиения $\lambda(P) = \max\limits_{i=\overline{0,n}}\{\Delta x_i\}$. Величины $\Delta_i, \Delta x_i, \lambda(P)$ - параметры ограничения.

Определение 2.3.2 (разбиение с отмеченными точками)**. Разбиением с отмеченными точками** называется пара наборов

$$P(\xi) = \{x_0, \ldots, x_n\}, \{\xi_0, \ldots, \xi_n\},$$

$$\text{где } a = x_0 < \ldots < x_n = b,\ \xi_i \in [x_{i-1}; x_i].$$



Пусть $\Re_\xi = \{(P, \xi)\}$ - семейство всевозможных разбиений с отмеченными точками отрезка $[a, b]$.

Рассмотрим $\beta_\delta = \{(P, \xi): \quad \lambda(P) < \delta\},\ \beta_\delta \subset P_\xi$:

Утверждение 2.3.1. Множество $\beta = \{\beta_\delta: \quad \delta > 0\}$ является базой на $\Re_\xi$.

Доказательство. (утверждения 2.3.1.).

1. $\forall \delta > 0$ β_δ - непусто.

   В самом деле, пусть отрезок $[a;b]$ поделен на n равных частей, причем n выбирается из соображений, чтобы $\Delta x_i = \Delta x \quad \forall i = \overline{1,n}$ $(1, \ldots, n)$, $\Delta x < \delta$.

   Пусть $\xi_i \in [x_{i-1}; x_i]$ - середины отрезков $[x_{i-1}; x_i]$.

2. Покажем, что $\forall \beta_{\delta_1}, \beta_{\delta_2} \in \beta \ \exists \beta_{\delta_3} \subset \beta_{\delta_1} \cap \beta_{\delta_2}$.

   Пусть заданы $\delta_1 > 0, \delta_2 > 0$. Покажем, что $\exists \beta_3 > 0$: $\beta_{\delta_3} \subset \beta_{\delta_1} \cap \beta_{\delta_2}$. Если $\delta_1 < \delta_2$, то $\delta_3 = \delta_1$ или $\delta_3 = \frac{\delta_1}{2}$.

□

Определение 2.3.3 (!)**.** Пусть $f : [a;b] \to \mathbb{R}$, (P, ξ) - разбиение отрезка $[a;b]$ с отмеченными точками. Составим сумму:

$$\sigma(f, (P, \xi)) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \Delta x_k$$

Можно смотреть на σ для фиксированной функции $f(x)$ как на функцию, сопоставляющую разбиение $(P, \xi) \in \Re_\xi$ сумме $\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$, то есть $\sigma_f : \Re_\xi \to \mathbb{R}$ (то есть (P, ξ) - аргумент функции σ).

Говорят, что функция $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ интегрируема по Риману на $[a;b]$, если:

$$\exists \lim_{\lambda(P) \to 0} \sigma_f((P, \xi)) = \lim_{\lambda(P) \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \Delta x_k$$

Или, что то же самое, если $\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ и соответствующий элемент $\beta_\delta \in \beta : \quad \forall$ разбиения $(P, \xi) : \ \lambda(P) < \delta$ выполняется неравенство $|\sigma_f((P, \xi)) - I| < 0$:

$$I = \lim_{\lambda(P) \to 0} \sigma_f((P, \xi)) = \int_a^b f(x) dx$$

Обозначим базу β из утверждения 2.3.1. как $\lambda(P) \to 0$.

Теорема 2.3.1 (необходимое условие интегрируемости функции)**.** *_*
Если $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ интегрируема на $[a;b]$ (то есть $f \in \mathbb{R}[a;b]$), то f ограничена на $[a;b]$.

Доказательство. От противного:

Допустим, что f интегрируема на $[a;b]$, но неограничена, то есть: $\forall M > 0 \ \exists x \in [a;b] : \quad |f(x)| > M$. Покажем, что функция $\sigma((P, \xi))$ не имеет предела по базе на $[a;b]$.

То есть $\exists \epsilon > 0 : \ \forall \delta > 0 \ \exists (P', \xi')$ и $(P'', \xi'') : \quad \lambda(P') < \delta, \ \lambda(P'') < \delta$ ($\lambda(P'') = \max \Delta x_i$), но $(\sigma(P'', \xi'') - \sigma(P'', \xi'')) \geqslant \epsilon$.

Положим, $\epsilon = 1$. Пусть $\delta > 0$ задана. Выберем разбиение с отмеченными точками (P', ξ') такое, что $\lambda(P') < \delta$, $P' = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b\}$, $\epsilon_i \in [x_1, \ldots, x_n]$. Поскольку функция f неограничена на $[a;b]$, то существует хотя бы один элемент разбиения $[x_{i-1}, x_i] = \Delta i$: функция f неограничена на (? Спасибо Максим). В качестве P^n возьмем P', $\xi'' = \{\xi'_1, \xi'_2, \ldots, \xi''_i, \ldots, \xi'_n\}$, $\lambda(P'') < \delta$ и $|f(\xi''_i) - f(\xi'_i)| > \frac{1}{\Delta x_i}$. Разбиения P' и P'' совпадают, точки разбиения так же совпадают, кроме ξ''_i.

Рассмотрим $|\sigma((P'', \xi'')) - \sigma((P', \xi'))| = |\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k f(\xi'_k) - \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k f(\xi''_k)| = |\Delta x_i (f(\xi''_i) - f(\xi'_i))| > \frac{\Delta x_i}{\Delta x_i} = 1 = \epsilon$. □

2.4 Критерий интегрируемости

2.4.1 Суммы Дарбу

Определение 2.4.1 (нижняя/верхняя суммы Дарбу)**.** Пусть $f[a;b] \to \mathbb{R}$, P - произвольное разбиение отрезка $[a;b]$. Числа $\underline{S}(P) = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k$ и $\overline{S}(P) = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k$, где $m_k = \inf\limits_{\xi \in \Delta k} f(\xi)$, $M_k = \sup\limits_{\xi \in \Delta k} f(\xi)$, называются **нижней** и **верхней суммами Дарбу**, отвечающими разбиению P.

ДВА ГРАФИКА

Теорема 2.4.1 (свойства сумм Дарбу)**.** Свойства:

1. $\forall (P, \xi)$ $\underline{S}(P) \leqslant \sigma_f((P, \xi)) \leqslant \overline{S}(P)$
2. Если разбиение P' получено из разбиения P добавлением новых точек, то $\underline{S}(P') \geqslant \underline{S}(P)$ и $\overline{S}(P') \leqslant \overline{S}(P)$
3. $\forall P_1, P_2 \quad \underline{S}(P_1) \leqslant \overline{S}(P_2)$

Доказательство. (теоремы 2.4.1)

1. $\underline{S}(P) = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \Delta x_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k = \overline{S}(P)$, где $f(\xi_k) = \sigma((P, \xi))$, вроде
2. Пусть P - произвольное разбиение отрезка $[a;b]$. Построим P'. Добавим на элемент разбиения Δi новую точку $x' \in [x_{i-1}; x_i]$.

   Пусть $m_i' = \inf\limits_{\xi \in [x_{i-1}, x_i]} f(\xi)$ и $m_i'' = \inf\limits_{\xi \in [x_i', x_i]} f(\xi)$, $m_i = \inf\limits_{\xi \in [x_{i-1}; x_i]} f(\xi)$, имеем $m_i \leqslant m_i'$, $m_i \leqslant m_i''$.

   Тогда $\underline{S}(P') - \underline{S}(P) = \sum_{k=1}^{i-1} \Delta x_k m_k + m_i'|x' - x_{i-1}| + m_i''|x_i - x'| + \sum_{k=i+1}^{n} m_k \Delta x_k - \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k m_k = m_i'|x' - x_{i-1}| + m_i''|x_i - x'| - m_i \Delta x_i \geqslant 0 \implies \underline{S}(P') \geqslant S(P)$ (вероятно, куча индексов - неправильные).

   Аналогично доказывается для $\overline{S}(P') \leqslant \overline{S}(P)$.
3. Пусть P_1, P_2 - произвольные разбиения отрезка $[a;b]$.

   Возьмем разбиение $P = P_1 \cap P_2$. Тогда, с одной стороны, P получено из P_1 добавлением точек, а с другой стороны - из P_2 добавлением точек.

   Тогда $\underline{P_i} \leqslant \underline{S}(P)$ и $\overline{S}(P_i) \geqslant S(P)$.

   Тогда верно, что $\underline{S}(P_2) \leqslant \underline{S}(P)$ и $\overline{S}(P_2) \geqslant \overline{S}(P) \implies \underline{S}(P_1) \leqslant \underline{S}(P) \leqslant \overline{S}(P) \leqslant \overline{S}(P_2)$.

□

Следствие. Множество нижних сумм Дарбу ограничено сверху. Множество верхних сумм Дарбу ограничено снизу.

Определение 2.4.2 (верхний/нижний интеграл Дарбу)**.** Числа $\underline{\Im} = \sup \underline{S}(P)$ и $\overline{\Im} = \inf \overline{S}(P)$ называются **нижним** и **верхним интегралом Дарбу**.

Рассмотрим множество разбиений с отмеченными точками отрезка $[a;b]$ $\Re = \{(P,\xi)\}$. Построим функцию $\underline{S} : \Re_\xi \to \mathbb{R}$ и $\underline{S}((P,\xi)) = \underline{S}(P)$. Аналогично определим $\overline{S} : \Re_\xi \to \mathbb{R}$ и $\overline{S}((P,\xi)) = \overline{S}(P)$.

Таким образом сумму Дарбу можно представить как функции на множестве разбиений с отмеченными точками отрезка $[a;b]$.

Теорема 2.4.2 (критерий интегрируемости)**.** Функция $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ интегрируема на $[a;b] \iff \lim\limits_{\lambda(P)\to 0}(\overline{S}(P) - \underline{S}(P)) = 0$.

Доказательство. (теоремы 2.4.2)

" $\rightarrow$ " Пусть $f \in \mathbb{R}$ $([a;b])$ (то есть интегрируема на $[a;b]$), то есть $\forall \epsilon > 0$ $\forall (P,\xi) :$ $\lambda(P) < \delta \implies |\sigma_f((P,\xi)) - I| < \epsilon$.

Лемма 2.4.1. $\forall P$ $\underline{S}(P) = \inf\limits_{\xi} \sigma_f((P,\xi))$ и $\overline{S}(P) = \sup\limits_{\xi} \sigma_f((P,\xi))$

Доказательство. (леммы 2.4.1)

$\forall P$ $\underline{S}(P) \leqslant \sigma_f((P,\xi))$.

Покажем, что $\forall \epsilon > 0$ $\exists \xi = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\} :$ $\underline{S}(P) + \epsilon > \sigma_f(P,\xi)$.

Выберем $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n :$ $f(\xi_i) < m_i + \frac{\epsilon}{b-a}$.

Тогда $\sigma_f(P,\xi) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k < \sum_{k=1}^n (m_k + \frac{\epsilon}{b-a})\Delta x_k = \sum_{k=1}^n m_k \Delta x_k + \frac{\epsilon}{b-a}\sum_{k=1}^n \Delta x_k = \underline{S}(P) + \epsilon \implies \underline{S}(P) = \inf\limits_{\xi} \sigma_f(P,\xi)$.

Аналогично для $\overline{S}(P) = \sup\limits_{\xi} \sigma_f(P,\xi)$. □

$I - \epsilon < \sigma_f(P,\xi) < I + \epsilon$, $I - \frac{\epsilon}{2} < \sigma_f(P,\xi) < I + \frac{\epsilon}{2}$. Из леммы 2.4.1: $\underline{S}(P) + \epsilon > \sigma_f(P,\xi) \implies \underline{S}(P) > \sigma_f(P,\xi) - \epsilon > \sigma_f(P,\xi) - \frac{\epsilon}{2}$ $(I = \lim\limits_{\lambda(P)\to 0} \sigma_f(P,\xi))$

Рассмотрим $I - \frac{2\epsilon}{3} < I - \frac{\epsilon}{2} \leqslant \underline{S}(P) \leqslant \sigma_f(P,\xi) \leqslant \overline{S}(P) < \sigma_f(P,\xi) + \epsilon < I + \frac{\epsilon}{2} + \epsilon = I + \frac{3\epsilon}{2}$ $(\overline{S}(P) - \epsilon < \sigma_f(P,\xi))$

Тогда $I - \frac{3\epsilon}{2} < \underline{S}(P) \leqslant \overline{S}(P) < I + \frac{3\epsilon}{2}$, так как $\underline{S}(P) \leqslant \overline{S}(P) \implies 0 \leqslant \overline{S}(P) - \underline{S}(P)$,

$$\overline{S}(P) < I + \tfrac{3\epsilon}{2}$$

$$(+)$$

-$\underline{\text{S}}$(P) < -I + $3\epsilon_{\overline{2}}$

$0 \leqslant \overline{S}(P) - \underline{S}(P) < 3\epsilon \implies \lim\limits_{\lambda(P)\to 0}(\overline{S}(P) - \underline{S}(P)) = 0$

" $\leftarrow$ " Пусть $\lim\limits_{\lambda(P)\to 0}(\overline{S}(P) - \underline{S}(P)) = 0$.

Пусть $\epsilon > 0$ задана. Выберем $\delta > 0 :$ $0 \leqslant \overline{S}(P) - \underline{S}(P) < \epsilon$ $\forall (P,\xi) :$ $d(P) < \delta$.

Покажем, что $\exists I = \int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\lambda(P)\to 0} \sigma_f(P,\xi)$. Имеем $\overline{S}(P) - \underline{S}(P) < \epsilon$ и $\underline{S}(P) \leqslant I \leqslant \overline{S}(P)$.

Из неравенств следует, что $\overline{S}(P) < \underline{S}(P) + \epsilon \leqslant I + \epsilon$, $\underline{S}(P) > \overline{S}(P) - \epsilon \geqslant I - \epsilon$.

Пусть (P, ξ) - произвольное разбиение: $\lambda(P) < \delta$. Тогда $I - \epsilon < \underline{S}(P) \leqslant \sigma_f(P, \xi) \leqslant \overline{S}(P) < I + \epsilon \implies I - \epsilon < \sigma_f(P, \xi) < I + \epsilon \implies |\sigma_f(P, \xi) - I| < \epsilon \implies I = \lim\limits_{\lambda(P) \to 0} \sigma_f(P, \xi) \implies f \in \mathbb{R}[a; b]$. □

Определение 2.4.3. Обозначим $M_i - m_i = \sup\limits_{\xi \in \Delta i} f(\xi) - \inf\limits_{\xi \in \Delta i} f(\xi) = \sup\limits_{x_1, x_2 \in \Delta i} |f(x_1) - f(x_2)| = \omega_i = \omega_i(f, \Delta i)$.

ω_i называется **колебанием** функции $f(x)$ на отрезке Δi.

$\overline{S}(P) - \underline{S}(P) = \sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i$

Следствие. (из критерия интегрируемости)

$f \in \mathbb{R}[a; b] \iff \lim\limits_{\lambda(P) \to 0} \sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i = 0$

Теорема 2.4.3 (Дарбу)**.** Для любой ограниченной функции $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ выполняются равенства:

$$\underline{\mathfrak{I}} = \lim_{\lambda(P) \to 0} \underline{S}(P); \ \overline{\mathfrak{I}} = \lim_{\lambda(P) \to 0} \overline{S}(P)$$

Лемма 2.4.2. Пусть $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ ограничена на $[a; b]$, то есть $\exists L > 0 : \forall x \in [a; b] \ |f(x)| < L$. Разбиение P' получено из разбиения P добавлением m точек. Тогда $\overline{S}P - \overline{S}(P') \leqslant 2L\lambda(P)m$

Доказательство. (леммы 2.4.2)

Пусть P - производное разбиение, $\lambda(P)$.

Рассмотрим случай, что P' получено добавлением k точек на i-тый отрезок разбиения P. (график, посмотреть у Максима). $\overline{S}(P) - \overline{S}(P') = \sum_{j=1}^n M_j \Delta x_j - (\sum_{j=1}^{i-1} M_j \Delta x_j + \sum_{j=1}^k M'_{ij} \Delta x_{ij} + \sum_{j=i+1}^n M_j \Delta x_j) = M_i \Delta x_i - \sum_{j=1}^k M'_{ij} \Delta x_{ij} = M_i \sum_{j=1}^k \Delta x_{ij} - \sum_{j=1}^k M'_{ij} \Delta x_{ij} = \sum_{j=1}^k M_i \Delta x_{ij} - \sum_{j=1}^k M'_{ij} \Delta x_{ij} = \sum_{j=1}^k (M_i - M'_{ij}) \Delta x_{ij} \leqslant \sum_{j=1}^k 2L \Delta x_{ij} =$ (вспомним, что $\lambda(P) = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n\}$) $= 2L \sum_{j=1}^k \Delta x_{ij} = 2L \Delta x_i \leqslant 2L\lambda(P)$

Теперь, если P' получено из P добавлением m точек, то они попадут самое большее на m промежутков. Тогда $\overline{S}(P) - \overline{S}(P') \leqslant 2L\lambda(P)m$ □

Доказательство. (теоремы 2.4.3, Дарбу)

$\underline{\mathfrak{I}} \overset{def}{=} \sup\limits_P \underline{S}(P)$, $\overline{\mathfrak{I}} \overset{def}{=} \inf\limits_p \overline{S}(P)$

Пусть $\epsilon > 0$ задано. Выберем разбиение P' такое, что $\overline{\mathfrak{I}} + \epsilon > \overline{S}(P')$ (**) (определение inf). Положим, что $\delta = \frac{\epsilon}{2Lm}$.

Пусть P - произвольное разбиение: $\lambda(P) < \delta$.

Покажем, что $0 \leqslant \overline{S}(P) - \overline{\mathfrak{I}} < \epsilon$.

Построим разбиение $P'' = P' \cup P$. Тогда P'' получено из P добавлением m точек $\implies \overline{S}(P) - \overline{S}(P'') \leqslant 2L\lambda(P)m$, где $L > 0 : \ \forall x \in [a; b] |f(x)| < L$. Далее, $\overline{S}(P) - \overline{S}(P'') \leqslant 2L\lambda(P)m < 2Lm\delta = \frac{2Lm\epsilon}{2Lm} = \frac{\epsilon}{2}$. Кроме того, P'' получено из P' добавлением некоторого количества точек.

$$\overline{S}(P'') \leqslant \overline{S}(P') \overset{(**)}{<} \overline{\mathfrak{I}} + \tfrac{\epsilon}{2} \implies \overline{S}(P'') - \tfrac{\epsilon}{2} < \overline{\mathfrak{I}}$$

Рассмотрим $0 \leqslant \overline{S}(P) - \overline{\mathfrak{I}} < \overline{S}(P) - \overline{S}(P'') + \frac{\epsilon}{2} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$ $\square$