1 Первообразная и неопределенный интеграл

Определение 1.1 (Первообразная функция)**.** Пусть X - промежуток, $f: X \to \mathbb{R}$. Функция $F(x)$ называется **первообразной** $f(x)$, если производная $F'(x) = f(x)$, при этом $F(x)$ дифференцируема и непрерывна.

Пример 1. $f(x) = 2x \implies F(x) = x^2$. В самом деле, $F'(x) = f(x)$.

Утверждение 1.1. (О первообразной)

1. Если $F(x)$ - первообразная функции $f(x)$ на промежутке X, и $\mathit{\Phi}(x) = F(x) + C,\ c \in \mathbb{R}$, то $\mathit{\Phi}(x)$ - тоже первообразная.

2. Если $F(x)$ и $\mathit{\Phi}(x)$ - две первообразные для $f(x)$ на промежутке X, то $\exists C = const,\ c \in \mathbb{R}$ такая, что $\mathit{\Phi}(x) = F(x) + C$.

Доказательство. (Утверждения о первообразной)

1. $\Phi'(x) = (F(x) + C)' = F'(x) = f(x) \implies \Phi(x)$ - первообразная для $f(x)$.

2. Так как $F(x)$ и $\Phi(x)$ - первообразные для $f(x)$, то $F'(x) = f(x), \Phi'(x) = f(x)$. Рассмотрим функцию $\phi = \Phi(x) - F(x),\ \forall x \in X$: $\phi'(x) = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$. Рассмотрим $\forall x_1, x_2 \in X$, по теореме Лагранжа, $\exists \xi \in (x_1, x_2):\ \phi(x_1) - \phi(x_2) = \phi'(\xi)(x_1 - x_2) = 0 \implies \phi(x_1) = \phi(x_2) \implies \phi(x) = const$ для $\forall x \in X$.

□

Определение 1.2 (Неопределенный интеграл)**.** Совокупность всех первообразных для функции $f(x)$ на промежутке X называется **неопределенным интегралом** и обозначается:

$$\int f(x)dx$$

Таким образом, $\int f(x)dx = \{F(x) + C$, где $F'(x) = f(x),\ C \in \mathbb{R}\}$, или:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Замечание. (Для неопределенного интеграла)

- $(\int f(x)dx)'_x = (F(x) + C)'_x = F'(x) = f(x)$;
- $d(\int f(x)dx) = d(F(x) + C) = (F(x) + C)'dx = F'(x)dx = f(x)dx$;
- $\int d(F(x)) = \int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x) + C,\ C \in \mathbb{R}$.

Определение 1.3 (Интегрирование)**.** Операция нахождения первообразной функции $f(x)$ называетсвя ее **интегрированием**.

Утверждение 1.2. (Основные методы интегрирования)
Пусть $f : X \to \mathbb{R},\ g : X \to \mathbb{R},\ X$ - промежуток:

1. Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{R} = const$, тогда:
   $\int(\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx.$

2. Формула интегрирования по частям:
   $udv = uv - \int udv,\ u = u(x), v = v(x).$

3. Интегрирование подстановкой:
   Пусть T - промежуток, $X = X(t)$ - дифференцируема на T.
   Тогда $\int f(X(t)) * X'(t)dt = F(X(t)) + C = \int f(x)dx + C.$

Доказательство. (Утверждения об основных методах интегрирования)

1. Возьмем производную по x от обеих частей равенства: $\int(\alpha f(x) + \beta g(x))'_x = \alpha f(x) + \beta g(x) = \alpha F'(x) + \beta G'(x) = \alpha(\int f(x)dx)'_x + \beta(\int g(x)dx)'_x$ - является производной для $\alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx$.

2. Рассмотрим $d(uv) = vdu + udv\ :\ \int d(uv) = \int vdu + \int udv$. Так как $d(uv) = uv$, то из того, что $\int d(uv) = \int vdu + \int udv \implies \int udv = uv - \int vdu$.

3. $f(X(t)) * X'(t)dt = \int f(X(t))dx(t) = \int f(x)dx = F(x) + C = F(X(t)) + C;\ (F(X(t)) + C)'_t = F'_t * X'_t = f(x) * X'(t) = (\int f(X(t)) * X'(t)dt)'_t.$

$\square$

Пример 2. (Интегрирование функций)

1. $\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C$

2. $\int \ln x dx = \left(\begin{array}{c} u = \ln x,\ dv = dx,\ du = d(\ln x) = \frac{dx}{x} \implies \\ \implies \int dv = \int dx \implies v = x \end{array} \right) = x \ln x - \int x \frac{dx}{x} = x \ln x - x + C$

3. $\int \sqrt{1 - x^2} dx = \left(\begin{array}{c} x = \sin t,\ dx = \\ = d(\sin t) = \cos t dt \end{array} \right) = \int \cos^2 t dt = \int \frac{1}{2}(1 + \cos 2t)dt = \frac{1}{2} \int dt + \frac{1}{2} \int \cos 2t dt = \frac{t}{2} + \frac{1}{4} \int \cos 2t d(2t) = \frac{t}{2} + \frac{1}{4} \sin 2t + C = \frac{\arcsin x}{2} + \frac{1}{2} x \sqrt{1 - x^2} + C$

Пример 3. (Неинтегрируемые функции)

$$\int \frac{x}{\ln x} dx; \quad \int \frac{e^x}{x} dt; \quad \int e^{x^2} dx$$

1.1 Интегрирование рациональных дробей

Определение 1.4 (Рациональная дробь)**.** Функция вида $\frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x),\ Q(x)$ - многочлены, называется **рациональной дробью**, или рациональной функцией.
Если $\deg P(x) < \deg Q(x)$, то дробь называется **правильной**, иначе - **неправильной**.
Если дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ - неправильная, то ее можно представить в виде $\frac{P(x)}{Q(x)} = M(x) + \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$, где $\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$ - правильная дробь. Поэтому достаточно уметь интегрировать правильную дробь.

Определение 1.5 (Простые дроби)**. Простыми дробями** будем называть дроби следующих четырех видов:

1. $\frac{A}{x-a}, \quad A, a \in \mathbb{R}$
2. $\frac{A}{(x-a)^k}, \quad A, a \in \mathbb{R},\ k > 1$
3. $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}, \quad A, B, p, q \in \mathbb{R},\ p^2 - 4q < 0$
4. $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}, \quad A, B, p, q \in \mathbb{R},\ k > 1,\ p^2 - 4q < 0$