Математический анализ

Данил Заблоцкий

31 декабря 2023 г.

Оглавление

Глава 5

Дифференциальное исчисление функций многих переменных

Лекция 1: Функции многих переменных

от 01 сен 10:28

5.1 Производная по вектору

Пусть $x = (x_1, x_2, x_3) = x(t)$, $f\big(x(t)\big) = f(x_1, x_2, x_3)$, тогда:

$$\frac{df\big(x(t)\big)}{dt} = \frac{\delta f}{\delta x_1} \cdot \frac{dx_1}{dt} + \frac{\delta f}{\delta x_2} \cdot \frac{dx_2}{dt} + \frac{\delta f}{\delta x_3} \cdot \frac{dx_3}{dt} = \\ = \frac{\delta f}{\delta x_1} \cdot v_1 + \frac{\delta f}{\delta x_2} \cdot v_2 + \frac{\delta f}{\delta x_3} \cdot v_3,$$

где $\vec{v} = \{v_1, v_2, v_3\}$ – скорость частицы, перемещающейся по γ-ну $x(t)$.

Определение 1 (Производная функции по вектору). Пусть D в $\mathbb{R}^n$ – область, $f : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$, вектор $v \in T\mathbb{R}^n_{x_0}$ – касательное пространство к R^n в точке x_0 (совокупность всех векторов, исходящих из точки x_0).

Производной функции f по вектору v называется величина

$$\frac{\delta f}{\delta \vec{v}} = D\vec{v}f(x_0) := \lim_{t\to 0}\frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t}, \text{ если } \lim \exists.$$

Утверждение. Пусть $f : D \to \mathbb{R}$ – дифференцируемо в точке $x_0 \in D$. Тогда $\forall \vec{v} \in T\mathbb{R}^n_{x_0} \exists \frac{\delta f}{\delta \vec{v}}(x_0)$:

$$\frac{\delta f}{\delta \vec{v}}(x_0) = \frac{\delta f}{\delta x_1}(x_0) \cdot v_1 + \frac{\delta f}{\delta x_2}(x_0) \cdot v_2 + \ldots + \frac{\delta f}{\delta x_n}(x_0) \cdot v_n = df(x_0) \cdot \vec{v},$$

где $df(x_0) \cdot \vec{v}$ – скалярное произведение,

$$df(x_0) = \left\{ \frac{\delta f}{\delta x_1}(x_0), \frac{\delta f}{\delta x_2}(x_0), \ldots, \frac{\delta f}{\delta x_n}(x_0) \right\},$$
$$\vec{v} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$$

Доказательство. Рассмотрим отображение $\gamma : [0;1] \to \mathbb{R}^n$:

$$\vec{\gamma}(t) = \vec{x_0} + \vec{v} \cdot t \Leftrightarrow \vec{\gamma}(t) = \left\{ \begin{array}{l} x_1 = x_0^{(1)} + v_1 \cdot t \\ x_2 = x_0^{(2)} + v_2 \cdot t \\ \vdots \\ x_n = x_0^{(n)} + v_n \cdot t \end{array} \right\}, \quad t \in [0;1]$$

Заметим, что $\gamma(t)$ дифференцируемо в точке $t = 0 \Rightarrow$ отображение $f \circ \gamma : [0;1] \to \mathbb{R}$ – дифференцируемо в точке $t = 0$.

$$f \circ \gamma = f\big(\gamma(t)\big) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{df\big(\gamma(t)\big)}{dt}\bigg|_{t=0} = \left(\frac{\delta f}{\delta x_1} \cdot \frac{dx_1}{dt} + \frac{\delta f}{\delta x_2} \cdot \frac{dx_2}{dt} + \ldots + \frac{\delta f}{\delta x_n} \cdot \frac{dx_n}{dt} \right)\bigg|_{t=0} =$$
$$= \left(\frac{\delta f}{\delta x_1} \cdot v_1 + \frac{\delta f}{\delta x_2} \cdot v_2 + \ldots + \frac{\delta f}{\delta x_n} \cdot v_n \right)\bigg|_{t=0} = df\big(\gamma(0)\big) \cdot \vec{v}$$

Если f дифференцируемо в точке $x_0 \Rightarrow \forall \vec{\gamma}(t) = \vec{x_0} + \vec{v} \cdot t$:

$$\frac{df\big(\gamma(t)\big)}{dt} := \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + v \cdot t) - f(x_0)}{t} = \frac{\delta f}{\delta \vec{v}}(x_0)$$

□

Утверждение (Известно из алгебры)**.** Если $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – линейное, то $\exists! \vec{a} \in \mathbb{R}^n : \forall x \in \mathbb{R}^n$

$$L(x) = \vec{a} \cdot \vec{x},$$

$$\big(L(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 L(x_1) + \lambda_2 L(x_2)\big)$$

где $\vec{a} \cdot \vec{x}$ – скалярное произведение.

Определение 2 (Градиент функции в точке)**.** Пусть $f : D \to \mathbb{R}$, D – область в $\mathbb{R}^n$, f – дифференцируема в точке $x \in D$. Вектор $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$:

$$df(x) \cdot h = \vec{a} \cdot h, \quad h \in \mathbb{R}$$

называется *градиентом функции* f *в точке* $x \in \mathbb{R}^n$ и обозначается

$$gradf(x)$$

Если в $\mathbb{R}^n$ зафиксировать ортонормированный базис, то

$$grad f(x) = \left\{ \frac{\delta f}{\delta x_1}(x), \frac{\delta f}{\delta x_2}(x), \dots, \frac{\delta f}{\delta x_n}(x) \right\}$$

Определение 3 (Производная по направлению вектора)**.** Если $\vec{v} \in T\mathbb{R}^n_{x_0}$, $|\vec{v}| = 1$, то $\frac{\delta f}{\delta \vec{v}}(x)$ называется *производной по направлению вектора* $\vec{v}$.

Пример.

$$\begin{cases} \cos\alpha = \cos\langle\vec{v}, 0x\rangle \\ \cos\beta = \cos\langle\vec{v}, 0y\rangle \end{cases} \quad \text{– направляющие косинусы}$$

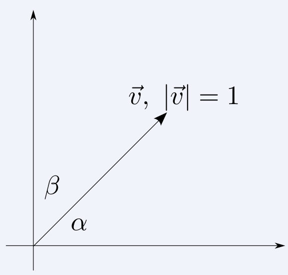

Рис. 5.1: $\vec{v} = \{\cos\alpha, \cos\beta\}$

Так как при данных условиях $\vec{v} = \{\cos\alpha_1, \cos\alpha_2, \dots, \cos\alpha_n\}$:

$$\frac{\delta f}{\delta \vec{v}}(x) = \frac{\delta f}{\delta x_1} \cdot \cos\alpha_1 + \dots + \frac{\delta f}{\delta x_n} \cdot \cos\alpha_n.$$

Смысл градиента: градиент показывает направление самого быстрого возрастания функции.

5.2 Основные теоремы дифференциального исчисления функций многих переменных

Теорема 1 (О среднем)**.** Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$, $x \in D$, $x + h \in D$, $[x, x+h] \subset D$, $f : D \to \mathbb{R}$ – дифференцируемо на $(x, x+h)$ и непрерывно на $[x, x+h]$. Тогда $\exists \xi \in (x, x+h)$:

$$f(x+h) - f(x) = f'(\xi) \cdot h = \frac{\delta f}{\delta x_1}(\xi) \cdot h^1 + \frac{\delta f}{\delta x_2}(\xi) \cdot h^2 + \dots + \frac{\delta f}{\delta x_n}(\xi) \cdot h^n,$$

где $\{1, 2, \dots, n\}$ над h – индексы.

Доказательство. Рассмотрим отображение $\gamma : [0;1] \to D$, определенное:

$$\gamma(t) = x + t \cdot h, \quad \gamma(t) = \begin{cases} x_1(t) = x_1 + t \cdot h^1 \\ x_2(t) = x_2 + t \cdot h^2 \\ \vdots \\ x_n(t) = x_n + t \cdot h^n \end{cases},$$

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad h = \{h^1, h^2, \ldots, h^n\},\ t \in [0;1],$$

$$\begin{matrix} \gamma(0) = x, \\ \gamma(1) = x + h \end{matrix}, \quad [0;1] \xrightarrow{\gamma} [x; x+h].$$

Заметим, что $gamma(t)$ дифференцируемо на $(0;1)$, непрерывно на $[0;1]$, причем $\big(x_i(t)\big)' = h^i$.

Рассмотрим функцию $F(t) = f\big(\gamma(t)\big),\ F : [0;1] \to \mathbb{R}$. Имеем:

1. F – дифференцируема на $(0;1)$ (как композиция двух дифференцируемых).
2. F – непрерывна на $[0;1]$ (как композиция двух непрерывных).

Следовательно, по теореме Лагранжа:

$$\begin{matrix} F(1) & - & F(0) & = F'(\tau) \cdot (1-0),\ \tau \in (0;1) \\ \| & & \| & \\ f(x+h) & - & f(x) & = \Big(f\big(\gamma(\tau)\big)\Big)' \cdot 1 \end{matrix},$$

$$\Big(f\big(\gamma(\tau)\big)\Big)' \cdot 1 = f'\big(\gamma(\tau)\big) \cdot \gamma'(\tau) = \frac{\delta f}{\delta x_1} \cdot \underset{x_1'(t)}{\underset{\|}{h'}} + \frac{\delta f}{\delta x_2} \cdot h_2 + \ldots + \frac{\delta f}{\delta x_n} \cdot h^n.$$

Пусть $\gamma(\tau) = \xi \in D$, тогда:

$$f(x+h) - f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\delta f}{\delta x_1}(\xi) & \frac{\delta f}{\delta x_2}(\xi) & \cdots & \frac{\delta f}{\delta x_n}(\xi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h^1 \\ h^2 \\ \vdots \\ h^n \end{pmatrix} = f'(\xi) \cdot h.$$

□

Следствие. Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}$ – дифференцируема на D и $\forall x \in D\ d(fx) = 0$ (то есть $\forall i\ \frac{\delta f}{\delta x_i} = 0$). Тогда $f(x) = const$.

Доказательство. Пусть $x_0 \in D$ и $B(x_0, \rho) \subset D$ – шар $\exists$, так как D – область. Тогда $\forall x \in B(x_0, \rho) \quad [x_0; x] \subset B(x_0, \rho) \subset D$. Следовательно:

$$f(x) - f(x_0) = \underset{\left\{\frac{\delta f}{\delta x_1}(\xi), \ldots, \frac{\delta f}{\delta x_n}(\xi)\right\}}{\underset{\|}{f'(\xi)}} \cdot (x - x_0) = 0.$$

Таким образом, $\forall x \in B(x_0, \rho)\ f(x) = f(x_0)$.

Построим путь из точки x_0 к некоторой точке $x \in D$:

$$\gamma : [0;1] \to D, \qquad \begin{matrix} \gamma(0) = x_0 \\ \gamma(1) = x \end{matrix}\ .$$

По определению пути, γ – непрерывно. Тогда $\exists \delta :\ \forall 0 \leqslant t \leqslant \delta$

$$\gamma(t) \in B(x_0, \rho) \Rightarrow f\big(\gamma(t)\big) = f(x_0),\ t \in [0;\delta],$$

где t – точка из $B(x_0, \rho)$.

Пусть $\Delta = \sup \delta \Rightarrow f\big(\gamma(\Delta)\big) = f(x_0)$. Покажем, что $\Delta = 1$.

Пусть $\Delta < 1$ ($\Delta \neq 1$). Построим шар $B\big(\gamma(\Delta), \rho_\Delta\big)$. Тогда $\exists \varepsilon > 0 :$ $\Delta - \varepsilon < t < \Delta + \varepsilon$.

Но тогда $f\big(\gamma(\Delta+\varepsilon)\big) = f(x_0)$ (так как точка $\gamma(\Delta+\varepsilon) \in B\big(\gamma(\Delta), \rho_\Delta\big)$) – противоречие с тем, что $\Delta = \sup \delta \Rightarrow \Delta = 1$.

$\gamma(1) = x$ и $f(x) = f(x_0) \Rightarrow$ так как $x \in D$ – произведение точек, то имеем, что $\forall x \in D\ f(x) = f(x_0) \Rightarrow f(x)$ – $const$. □

Теорема 2 (Достаточное условие дифференцируемости функции)**.** Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}$, f имеет непрерывные частные производные в каждой окрестности точки $x \in D$. Тогда f – дифференцируема в точке x.

Доказательство. Без ограничения общности, будем считать, что окрестность точки $x_0 \in D$ является шаром $B(x_0, \rho) \subset D$.

Пусть $h : x_0 + h \in B(x_0, \rho)$. Здесь

$$\begin{matrix} x_0 = (x^1, x^2, \ldots, x^n) \\ x_0 + h = (x^1 + h^1, x^2 + h^2, \ldots, x^n + h^n) \end{matrix}\ .$$

Заметим, что точки

$$\left.\begin{matrix} x_1 = (x^1, x^2 + h^2, \ldots, x^n + h^n) \\ x_2 = (x^1, x^2, x^3 + h^3, \ldots, x^n + h^n) \\ \vdots \\ x_{n-1} = (x^1, x^2, x^3, \ldots, x^{n-1}, x^n + h^n) \end{matrix}\right. \in B(x_0, \rho).$$

$$
\begin{aligned}
&f(x_0+h)-f(x_0)=\\
&\quad= f(x_0+h)-f(x_1)+f(x_1)-f(x_2)+f(x_2)-\ldots\\
&\quad\ldots-f(x_{n-1})+f(x_{n-1})-f(x_0)=\\
&\quad= f(x^1+h^1,\ldots,x^n+h^n)-f(x^1,x^2+h^2,\ldots,x^n+h^n)+\\
&\quad+f(x^1,x^2+h^2,\ldots,x^n+h^n)-f(x^1,x^2,\ldots,x^n+h^n)+\\
&\quad+f(x^1,x^2,\ldots,x^n+h^n)-\ldots-f(x^1,x^2,\ldots,x^{n-1},x^n)+\\
&\quad+f(x^1,x^2,\ldots,x^{n-1},x^n+h^n)-f(x^1,x^2,\ldots,x^n)=\\
&\quad=\left|\begin{array}{c}\text{Теорема Лагранжа для}\\ \text{функции одной переменной}\end{array}\right|=\\
&\quad=\frac{\delta f}{\delta x_1}(x^1+\theta^1h^1,x^2+h^2,\ldots,x^n+h^n)\cdot h^1+\\
&\quad+\frac{\delta f}{\delta x^2}(x^1,x^2+\theta^2h^2,\ldots,x^n+h^n)\cdot h^2+\ldots\\
&\quad\ldots+\frac{\delta f}{\delta x^n}(x^1,x^2,\ldots,x^n+\theta^nh^n)\cdot h^n.
\end{aligned}
$$

Используя непрерывность частных производных, запишем:

$$
\begin{aligned}
&f(x_0+h)-f(x_0)=\\
&\quad=\frac{\delta f}{\delta x^1}(x^1,x^2,\ldots,x^n)\cdot h^1+\alpha^1(h^1)+\ldots\\
&\quad\ldots+\frac{\delta f}{\delta x^n}(x^1,x^2,\ldots,x^n)\cdot h^n+\alpha^n(h^n),
\end{aligned}
$$

где $\alpha^1,\alpha^2,\ldots,\alpha^n$ стремятся к нулю при $\vec{h}\to 0$.

Это означает, что:

$$
\begin{gathered}
f(x_0+h)-f(x_0)=L(x_0)\cdot h+\underset{h\to 0}{o}(h)\\
\left(\text{где } L(x_0)=\tfrac{\delta f}{\delta x^1}(x_0)\cdot h^1+\ldots+\tfrac{\delta f}{\delta x^n}(x_0)\cdot h^n=df(x_0)\right)
\end{gathered}\quad\Rightarrow
$$

$\Rightarrow$ по определению $f(x)$ дифференцируема в точке x_0. □

Лекция 2: Производные высших порядков

от 06 сен 08:47

5.3 Производные высших порядков

Определение 4 (Вторая производная функции по переменным). Пусть $f: D\to\mathbb{R}$, D – область в $\mathbb{R}^n$. Производная по переменной x^j от производной по переменной x^i называется *второй производной функции f по переменным x^i, x^j* и обозначается

$$\frac{\delta^2 f}{\delta x^i\delta x^j}(x)\ \text{или}\ f''_{x^i,x^j}(x).$$

Теорема 3 (О смешанных производных)**.** Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}$, $x \in D$, f имеет в D непрерывные смешанные производные (второго порядка). Тогда эти производные не зависят от порядка дифференцирования.

Доказательство. Пусть $\frac{\delta^2 f}{\delta x^i \delta x^j}$ и $\frac{\delta^2 f}{\delta x^j \delta x^i}$ – непрерывны в точке $x \in D$.

Так как остальные переменные фиксированы, то можно считать, что f зависит только от двух переменных.

Тогда $D \subset \mathbb{R}^2$, $f : D \to \mathbb{R}$ и $\frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y}$ и $\frac{\delta^2 f}{\delta y \delta x}$ – непрерывны в точке $x_0 = (x, y) \in D$.

Покажем, что $\frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y} = \frac{\delta^2 f}{\delta y \delta x}$.

Рассмотрим функции:

$$\begin{matrix} \phi(t) = f(x + t \cdot \Delta x, y + \Delta y) - f(x + t \cdot \Delta x, y) \\ \psi(t) = f(x + \Delta x, y + t \cdot \Delta y) - f(x, y + t \cdot \Delta y) \end{matrix}, \quad t \in [0; 1].$$

Имеем:

$$\begin{aligned} &\phi(1) - \phi(0) = \\ &\qquad = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y) - f(x, y + \Delta y) + f(x, y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\psi(1) - \psi(0) = \\ &\qquad = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y) + f(x, y) \end{aligned}$$

Тогда:

$$\phi(1) - \phi(0) = \psi(1) - \psi(0) \tag{5.1}$$

$$\begin{aligned} &\phi(1) - \phi(0) = \phi'(\xi) \cdot (1 - 0) = \\ &\quad = \frac{\delta f}{\delta x}(x + \xi \cdot \Delta x, y + \Delta y) \cdot \Delta x + \frac{\delta f}{\delta y}(x + \xi \cdot \Delta x, y + \Delta y) - \\ &\quad - \frac{\delta f}{\delta x}(x + \xi \cdot \Delta x, y) \cdot \Delta x - \frac{\delta f}{\delta y}(x + \xi \cdot \Delta x, y) \cdot 0 = \\ &\quad = \left(\frac{\delta f}{\delta x}(x + \xi \cdot \Delta x, y + \Delta y) - \frac{\delta f}{\delta x}(x + \xi \cdot \Delta x, y)\right) = \\ &\quad = \left| \begin{matrix} \text{по теореме Лагранжа для} \\ \text{функции 1-ой переменной} \end{matrix} \right| = \\ &\quad = \frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y}(x + \xi \cdot \Delta x, y + \eta \cdot \Delta y)\Delta x \Delta y. \end{aligned}$$

Положим $(x + \xi \Delta x, y + \eta \cdot \Delta y) = P \in \Pi$.

Аналогично:

$$\psi(1)-\psi(0)=\psi'(\xi)\cdot(1-0)=$$
$$=\frac{\delta f}{\delta x}(x+\Delta x,y+\xi\cdot\Delta y)\cdot 0+\frac{\delta f}{\delta y}(x+\Delta x,y+\xi\cdot\Delta y)\cdot\Delta y-$$
$$-\frac{\delta f}{\delta x}(x,y+\xi\cdot\Delta y)\cdot 0-\frac{\delta f}{\delta y}(x,y+\xi\cdot\Delta y)\cdot\Delta y=$$
$$=\left(\frac{\delta f}{\delta y}(x+\Delta x,y+\xi\cdot\Delta y)-\frac{\delta f}{\delta y}(x,y+\xi\cdot\Delta y)\right)\Delta y=$$
$$=\left|\begin{array}{c}\text{по теореме Лагранжа для}\\ \text{функции 1-ой переменной}\end{array}\right|=$$
$$=\frac{\delta^2 f}{\delta y\delta x}(x+\tau\cdot\Delta x,y+\xi\cdot\Delta y)\Delta y\Delta x$$

Положим, что $(x+\tau\cdot\Delta x,y+\xi\cdot\Delta y)=Q$.
Тогда из 5.1 следует, что:

$$\begin{array}{ccc}\frac{\delta^2 f}{\delta x\delta y}(P)\Delta x\Delta y & = & \frac{\delta^2 f}{\delta y\delta x}(Q)\Delta x\Delta y\\ \parallel & & \parallel\\ \frac{\delta^2 f}{\delta x\delta y}(x+\xi\cdot\Delta x,y+\eta\cdot\Delta y) & = & \frac{\delta^2 f}{\delta y\delta x}(x+\tau\cdot\Delta x,y+\xi\cdot\Delta y)\end{array}.$$

Используя непрерывность частных производных при $\Delta x\to 0$ и $\Delta y\to 0\Rightarrow$

$$x+\xi\cdot\Delta x\to x,\quad y+\eta\cdot\Delta y\to y.$$

Таким образом,

$$\frac{\delta^2 f}{\delta x\delta y}=\frac{\delta^2 f}{\delta y\delta x}.$$

□

5.4 Формула Тейлора

Определение 5 (Гладкая функция класса $C^{(k)}$). Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$, $f:D\to\mathbb{R}$. Будем говорить, что f является *гладкой функцией класса* $C^{(k)}$ (k-го порядка), то есть $f\in C^{(k)}(D,\mathbb{R})$, если f имеет непрерывные частные производные до k-го порядка включительно.

Теорема 4 (Формула Тейлора). Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$, $f:D\to\mathbb{R}$, $f\in C^{(k)}(D,\mathbb{R})$, $x\in D$, $x+h\in D$, $[x;x+h]\subset D$. Тогда:

$$f(x+h)=f(x)+\sum_{i=1}^{k-1}\frac{1}{i!}\left(\frac{\delta}{\delta x^1}\cdot h^1+\ldots+\frac{\delta}{\delta x^n}\cdot h^n\right)^i\cdot f(x)+R^k,$$

где R^k – остаточный член,

$$R^k = \frac{1}{k!}\left(\frac{\delta}{\delta x^1}\cdot h^1 + \ldots + \frac{\delta}{\delta x^n}\cdot h^n\right)^k \cdot f(x+\xi\cdot h),$$

$$x = (x^1,\ldots,x^n), \quad h = (h^1,\ldots,h^n).$$

Доказательство. Рассмотрим функцию:

$$\phi(t) = f(x+t\cdot h),\ t\in[0;1]$$

Применим формулу Тейлора к $\phi(t)$:

$$\phi(1) = \phi(0) + \frac{1}{1!}\cdot\phi'(0)\cdot(1-0) + \frac{1}{2!}\cdot\phi''(0)\cdot(1-0)^2 + \\ + \frac{1}{3!}\cdot\phi'''(0)\cdot(1-0)^3 + \ldots + \frac{1}{k!}\cdot\phi^{(k)}\cdot(1-0)^k. \quad (5.2)$$

$$\phi(1) = f(x+h), \quad \phi(0) = f(x).$$

$$\phi'(0) = f'(x+th)\cdot(x+t\cdot h)'_k\Big|_{t=0} =$$

$$= \begin{pmatrix}\frac{\delta f(x+t\cdot h)}{\delta x^1} & \frac{\delta f(x+t\cdot h)}{\delta x^2} & \cdots & \frac{\delta f(x+t\cdot h)}{\delta x^n}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}h^1\\ h^2\\ \vdots\\ h^n\end{pmatrix}\Bigg|_{t=0} =$$

$$= \left(\frac{\delta f(x+t\cdot h)}{\delta x^1}\cdot h^1 + \frac{\delta f(x+t\cdot h)}{\delta x^2}\cdot h^2 + \ldots + \frac{\delta f(x+t\cdot h)}{\delta x^n}\cdot h^n\right)\Bigg|_{t=0} =$$

$$= \frac{\delta f}{\delta x^1}(x)\cdot h^1 + \frac{\delta f}{\delta x^2}(x)\cdot h^2 + \ldots + \frac{\delta f}{\delta x^n}(x)\cdot h^n =$$

$$= \left(\frac{\delta}{\delta x^1}\cdot h^1 + \ldots + \frac{\delta}{\delta x^n}\cdot h^n\right)\cdot f(x)$$

$$\phi''(0) = \left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\delta f(x+t\cdot h)}{\delta x^i}\cdot h^i\right)'_t\Bigg|_{t=0} =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\delta^2 f(x+t\cdot h)}{\delta x^i\delta x^j}\cdot h^i h^j\right)\Bigg|_{t=0} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\delta^2 f(x)}{\delta x^i\delta x^j}\cdot h^i h^j =$$

$$= \left(\frac{\delta}{\delta x^1}\cdot h^1 + \ldots + \frac{\delta}{\delta x^n}\cdot h^n\right)^2\cdot f(x)$$

И так далее. Подставим получившиеся выражения в 5.2 и получим искомое. □

Пример. Запишем формулу Тейлора для функции $f(x,y)$:

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{1}{1!}\left(\frac{\delta f}{\delta x}(x_0,y_0)\Delta x + \frac{\delta f}{\delta y}(x_0,y_0)\Delta y\right) + \\ + \frac{1}{2!}\left(\frac{\delta^2 f}{\delta x^2}(x_0,y_0)\cdot(\Delta x)^2 + \right. \\ \left. + 2\cdot\frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y}(x_0,y_0)\Delta x\Delta y + \frac{\delta^2 f}{\delta y^2}(x_0,y_0)\cdot(\Delta y)^2\right) + \\ + \frac{1}{3!}\cdot\left(\frac{\delta^3 f}{\delta x^3}(x_0,y_0)\cdot(\Delta x)^3 + 3\cdot\frac{\delta^3 f}{\delta x^2\delta y}(x_0,y_0)\cdot(\Delta x)^2\Delta y + \right. \\ \left. + 3\cdot\frac{\delta^3 f}{\delta x\delta y^2}(x_0,y_0)\cdot\Delta x(\Delta y)^2 + \frac{\delta^3 f}{\delta y^3}(x_0,y_0)\cdot(\Delta y)^3\right) + \ldots \\ \ldots + \frac{1}{k!}\cdot\left(\frac{\delta}{\delta x}\Delta x + \frac{\delta}{\delta y}\Delta y\right)^k\cdot f(x_0 + \xi\cdot\Delta x, y_0 + \eta\cdot\Delta y),$$

$$\Delta x = x - x_0, \quad \Delta y = y - y_0.$$

5.5 Экстремумы функций многих переменных

Определение 6 (Точка локального максимума (минимума)). Пусть X – метрическое пространство (МП), $f : X \to \mathbb{R}$. Точка x_0 называется *точкой локального максимума (минимума)*, если $\exists U(x_0) \subset X : \ \forall x \in U(x_0)$

$$f(x) \leqslant f(x_0) \quad \big(f(x) \geqslant f(x_0)\big)$$

Теорема 5 (Необходимое условие локального экстремума). Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$ – точка локального экстремума, тогда в точке x_0 $\forall i = \overline{1,n}$

$$\frac{\delta(x_0)}{\delta x^i} = 0.$$

Доказательство. Фиксируем все переменные за исключением x^i, тогда можно рассматривать функцию $f(x^1,\ldots,x^i,\ldots,x^n)$ как функцию одной переменной, для которой x_0 – точка локального экстремума, следовательно $\frac{\delta f}{\delta x^i}(x_0) = 0$,

$$i \text{ – произвольная } \Rightarrow \forall i \text{ выполняется.}$$

□

Определение 7 (Критическая точка функции). Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}^k$ – дифференцируемо в точке $x_0 \in D$. Точка x_0 называется *критической точкой функции* $f(x)$, если:

$$rank\mathfrak{I}f(x_0) < \min(n,k),$$

где $\mathfrak{I}f(x_0)$ – матрица Якоби функции $f(x_0)$.

Пример. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x \cdot y \\ y - z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

$$\mathfrak{I}f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\delta u}{\delta x} & \frac{\delta u}{\delta y} & \frac{\delta u}{\delta z} \\ \frac{\delta v}{\delta x} & \frac{\delta v}{\delta y} & \frac{\delta v}{\delta z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & x & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x_0) = \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases} \text{ – критическая точка.}$$

$$n = 3, \quad k = 2$$

Множество точек прямой, получаемой пересечением плоскостей $x = 0$ и $y = 0$ – множество критических точек функции $f(x,y,z)$.

Определение 8 (Квадратичная форма на касательном пространстве). Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}$, f имеет производную в точке $x_0 \in D$. На касательном пространстве $T\mathbb{R}^n_{(x_0)}$ определим квадратичную форму

$$Q(h) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\delta^2 f}{\delta x^i \delta x^j}(x_0) \cdot h^i h^j, \quad Q : T\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}.$$

Теорема 6 (Достаточное условие локального экстремума). Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке $x \in D$, x – критическая точка для f, $f \in C^n(D,\mathbb{R})$, $n = 2$. Тогда, если:

1. $Q(h)$ – знакоположительна, то в точке x – локальный минимум.
2. $Q(h)$ – знакоотрицательна, то в точке x – локальный максимум.
3. $Q(h)$ может принимать различные значения $(> 0, < 0)$, тогда в точке x нет экстремума.

Доказательство. По формуле Тейлора:

$$f(x+h)-f(x)=\frac{1}{2}\cdot\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\delta^2 f(x)}{\delta x^i\delta x^j}\cdot h^ih^j+o(\|h\|^2)=$$

$$=\frac{\|h\|^2}{2}\cdot\left(\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\delta^2 f(x)}{\delta x^i\delta x^j}\cdot\frac{h^i}{\|h\|}\frac{h^j}{\|h\|}+\alpha(h)\right)=\left|\begin{array}{c}\text{где } \alpha(h)\to 0 \text{ при}\\ h\to 0\end{array}\right|=$$

$$=\frac{\|h\|^2}{2}\cdot\left(Q\left(\frac{h}{\|h\|}\right)+\alpha(h)\right).$$

Вектор $\frac{h}{\|h\|} < S^{(n-1)}$ – единичная $(n-1)$-мерная сфера. Сфера $S^{(n-1)}$ – компактное множество $\Rightarrow$ по теореме Больцано - Вейерштраса, $\exists e_1, e_2 \in S^{(n-1)}$:

$$Q_1(e_1)=\max Q(h)=M,\quad Q_2(e_2)=\min Q(h)=m$$

1. Если $Q(h)$ – знакоположительна $\Rightarrow m>0$. Следовательно, $\exists\delta>0:\forall h\ \|h\|<\delta,\ |\alpha(h)|<m$

   $$Q\left(\frac{h}{\|h\|}\right)+\alpha(h)>0,$$

   следовательно, $\forall h:\ \|h\|<\delta$

   $$f(x+h)-f(x)>0,$$

   по определению, x – точка локального минимума (здесь $\|h\|<\delta$ – аналог понятия окрестности точки x).

2. Если $Q(h)$ – знакоотрицательна, то $M<0$. Тогда $\exists\delta>0:\forall h\ \|h\|<\delta\ |\alpha(h)|<-M$

   $$Q\left(\frac{h}{\|h\|}\right)+\alpha(h)<0,$$

   следовательно, $\forall h:\ \|h\|<\delta$

   $$f(x+h)-f(x)<0,$$

   тогда x – точка локального максимума.

3. Если $Q(h)$ – знакопеременна, то $m<0<M,\ \forall t>0$

   $$Q(t\cdot e_2)<0,\quad Q(t\cdot e_1)>0,$$

   тогда в точке x нет экстремума.

□

Замечание. На практике для определения max и min можно пользоваться критерием Сильвестра из алгебры.

Определение 9 (Наеявно заданная уравнением функция)**.** Пусть D – область в $\mathbb{R}^k$, Ω – область в $\mathbb{R}^k$, $F : D \times \Omega \to \mathbb{R}^k$.

Пусть функция $f : D \to \Omega$:

$$y = f(x) \Leftrightarrow F(x, y) = 0.$$

Говорят, что уравнение $F(x, y) = 0$ *неявно задает* функцию $y = f(x)$.

Пример. $x^2 + y^2 = 1$

$$y = \pm\sqrt{1 - x^2}, \quad y = \begin{cases} \sqrt{1 - x^2}, & x \in Q \\ -\sqrt{1 - x^2}, & x \notin Q \end{cases}$$