Математический анализ

Данил Заблоцкий

4 января 2024 г.

Оглавление

Глава 5

Дифференциальное исчисление функций многих переменных

Лекция 1: Функции многих переменных

от 01 сен 10:28

5.1 Производная по вектору

Примечание. Пусть $x = (x_1, x_2, x_3) = x(t)$, $f\big(x(t)\big) = f(x_1, x_2, x_3)$, тогда:

$$\frac{df\big(x(t)\big)}{dt} = \frac{\delta f}{\delta x_1} \cdot \frac{dx_1}{dt} + \frac{\delta f}{\delta x_2} \cdot \frac{dx_2}{dt} + \frac{\delta f}{\delta x_3} \cdot \frac{dx_3}{dt} = \\ = \frac{\delta f}{\delta x_1} \cdot v_1 + \frac{\delta f}{\delta x_2} \cdot v_2 + \frac{\delta f}{\delta x_3} \cdot v_3,$$

где $\vec{v} = \{v_1, v_2, v_3\}$ – скорость частицы, перемещающейся по γ-ну $x(t)$.

Определение 1 (Производная функции по вектору)**.** Пусть D в $\mathbb{R}^n$ – область, $f : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$, вектор $v \in T\mathbb{R}^n_{x_0}$ – касательное пространство к R^n в точке x_0 (совокупность всех векторов, исходящих из точки x_0).

Производной функции f по вектору v называется величина

$$\frac{\delta f}{\delta \vec{v}} = D\vec{v}f(x_0) \coloneqq \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t}, \text{ если } \lim \exists.$$

Утверждение. Пусть $f : D \to \mathbb{R}$ – дифференцируемо в точке $x_0 \in D$. Тогда $\forall \vec{v} \in T\mathbb{R}^n_{x_0} \, \exists \frac{\delta f}{\delta \vec{v}}(x_0)$:

$$\frac{\delta f}{\delta \vec{v}}(x_0) = \frac{\delta f}{\delta x_1}(x_0) \cdot v_1 + \frac{\delta f}{\delta x_2}(x_0) \cdot v_2 + \ldots + \frac{\delta f}{\delta x_n}(x_0) \cdot v_n = df(x_0) \cdot \vec{v},$$

где $df(x_0) \cdot \vec{v}$ – скалярное произведение,

$$df(x_0) = \left\{ \frac{\delta f}{\delta x_1}(x_0), \frac{\delta f}{\delta x_2}(x_0), \ldots, \frac{\delta f}{\delta x_n}(x_0) \right\},$$
$$\vec{v} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$$

Доказательство. Рассмотрим отображение $\gamma : [0;1] \to \mathbb{R}^n$:

$$\vec{\gamma}(t) = \vec{x_0} + \vec{v} \cdot t \Leftrightarrow \vec{\gamma}(t) = \left\{ \begin{array}{l} x_1 = x_0^{(1)} + v_1 \cdot t \\ x_2 = x_0^{(2)} + v_2 \cdot t \\ \vdots \\ x_n = x_0^{(n)} + v_n \cdot t \end{array} \right\}, \quad t \in [0;1]$$

Заметим, что $\gamma(t)$ дифференцируемо в точке $t = 0 \Rightarrow$ отображение $f \circ \gamma : [0;1] \to \mathbb{R}$ – дифференцируемо в точке $t = 0$.

$$f \circ \gamma = f\big(\gamma(t)\big) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{df\big(\gamma(t)\big)}{dt}\bigg|_{t=0} = \left(\frac{\delta f}{\delta x_1} \cdot \frac{dx_1}{dt} + \frac{\delta f}{\delta x_2} \cdot \frac{dx_2}{dt} + \ldots + \frac{\delta f}{\delta x_n} \cdot \frac{dx_n}{dt} \right)\bigg|_{t=0} =$$
$$= \left(\frac{\delta f}{\delta x_1} \cdot v_1 + \frac{\delta f}{\delta x_2} \cdot v_2 + \ldots + \frac{\delta f}{\delta x_n} \cdot v_n \right)\bigg|_{t=0} = df\big(\gamma(0)\big) \cdot \vec{v}$$

Если f дифференцируемо в точке $x_0 \Rightarrow \forall \vec{\gamma}(t) = \vec{x_0} + \vec{v} \cdot t$:

$$\frac{df\big(\gamma(t)\big)}{dt} := \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + v \cdot t) - f(x_0)}{t} = \frac{\delta f}{\delta \vec{v}}(x_0)$$

$\square$

Утверждение (Известно из алгебры). Если $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – линейное, то $\exists! \vec{a} \in \mathbb{R}^n : \forall x \in \mathbb{R}^n$

$$L(x) = \vec{a} \cdot \vec{x},$$

$$\big(L(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 L(x_1) + \lambda_2 L(x_2)\big)$$

где $\vec{a} \cdot \vec{x}$ – скалярное произведение.

Определение 2 (Градиент функции в точке)**.** Пусть $f : D \to \mathbb{R}$, D – область в $\mathbb{R}^n$, f – дифференцируема в точке $x \in D$. Вектор $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$:

$$df(x) \cdot h = \vec{a} \cdot h, \quad h \in \mathbb{R}$$

называется *градиентом функции f в точке $x \in \mathbb{R}^n$* и обозначается

$$gradf(x)$$

Если в $\mathbb{R}^n$ зафиксировать ортонормированный базис, то

$$gradf(x) = \left\{ \frac{\delta f}{\delta x_1}(x), \frac{\delta f}{\delta x_2}(x), \ldots, \frac{\delta f}{\delta x_n}(x) \right\}$$

Определение 3 (Производная по направлению вектора)**.** Если $\vec{v} \in T\mathbb{R}^n_{x_0}$, $|\vec{v}| = 1$, то $\frac{\delta f}{\delta \vec{v}}(x)$ называется *производной по направлению вектора $\vec{v}$*.

Пример.

$$\begin{cases} \cos\alpha = \cos\langle \vec{v}, 0x \rangle \\ \cos\beta = \cos\langle \vec{v}, 0y \rangle \end{cases} \quad \text{– направляющие косинусы}$$

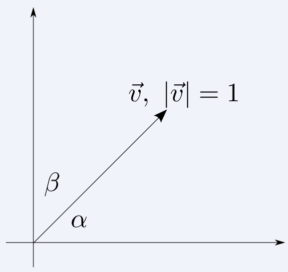

Рис. 5.1: $\vec{v} = \{\cos\alpha, \cos\beta\}$

Так как при данных условиях $\vec{v} = \{\cos\alpha_1, \cos\alpha_2, \ldots, \cos\alpha_n\}$:

$$\frac{\delta f}{\delta \vec{v}}(x) = \frac{\delta f}{\delta x_1} \cdot \cos\alpha_1 + \ldots + \frac{\delta f}{\delta x_n} \cdot \cos\alpha_n.$$

Примечание (Смысл градиента)**.** Градиент показывает направление самого быстрого возрастания функции.

5.2 Основные теоремы дифференциального исчисления функций многих переменных

Теорема 1 (О среднем)**.** Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$, $x \in D$, $x+h \in D$, $[x, x+h] \subset D$, $f : D \to \mathbb{R}$ – дифференцируемо на $(x, x+h)$ и непрерывно на $[x, x+h]$. Тогда $\exists \xi \in (x, x+h)$:

$$f(x+h) - f(x) = f'(\xi) \cdot h = \frac{\delta f}{\delta x_1}(\xi) \cdot h^1 + \frac{\delta f}{\delta x_2}(\xi) \cdot h^2 + \ldots + \frac{\delta f}{\delta x_n}(\xi) \cdot h^n,$$

где $\{1, 2, \ldots, n\}$ над h – индексы.

Доказательство. Рассмотрим отображение $\gamma : [0;1] \to D$, определенное:

$$\gamma(t) = x + t \cdot h, \quad \gamma(t) = \begin{cases} x_1(t) = x_1 + t \cdot h^1 \\ x_2(t) = x_2 + t \cdot h^2 \\ \vdots \\ x_n(t) = x_n + t \cdot h^n \end{cases},$$

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad h = \{h^1, h^2, \ldots, h^n\}, \; t \in [0;1],$$

$$\begin{matrix} \gamma(0) = x, \\ \gamma(1) = x + h \end{matrix}, \quad [0;1] \xrightarrow{\gamma} [x; x+h].$$

Заметим, что $gamma(t)$ дифференцируемо на $(0;1)$, непрерывно на $[0;1]$, причем $\big(x_i(t)\big)' = h^i$.

Рассмотрим функцию $F(t) = f\big(\gamma(t)\big)$, $F : [0;1] \to \mathbb{R}$. Имеем:

1. F – дифференцируема на $(0;1)$ (как композиция двух дифференцируемых).
2. F – непрерывна на $[0;1]$ (как композиция двух непрерывных).

Следовательно, по теореме Лагранжа:

$$\begin{matrix} F(1) & - & F(0) & = F'(\tau) \cdot (1-0), \; \tau \in (0;1) \\ \| & & \| & \\ f(x+h) & - & f(x) & = \Big(f\big(\gamma(\tau)\big)\Big)' \cdot 1 \end{matrix},$$

$$\Big(f\big(\gamma(\tau)\big)\Big)' \cdot 1 = f'\big(\gamma(\tau)\big) \cdot \gamma'(\tau) = \underset{\substack{\| \\ x_1'(t)}}{\frac{\delta f}{\delta x_1}} \cdot h' + \frac{\delta f}{\delta x_2} \cdot h_2 + \ldots + \frac{\delta f}{\delta x_n} \cdot h^n.$$

Пусть $\gamma(\tau) = \xi \in D$, тогда:

$$f(x+h) - f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\delta f}{\delta x_1}(\xi) & \cdots & \frac{\delta f}{\delta x_n}(\xi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h^1 \\ \vdots \\ h^n \end{pmatrix} = f'(\xi) \cdot h.$$

□

Следствие. Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}$ – дифференцируема на D и $\forall x \in D$ $d(fx) = 0$ (то есть $\forall i$ $\frac{\delta f}{\delta x_i} = 0$). Тогда $f(x) = const$.

Доказательство. Пусть $x_0 \in D$ и $B(x_0, \rho) \subset D$ – шар $\exists$, так как D – область. Тогда $\forall x \in B(x_0, \rho)$ $\quad [x_0; x] \subset B(x_0, \rho) \subset D$. Следовательно:

$$f(x) - f(x_0) = \underset{\left\{\frac{\delta f}{\delta x_1}(\xi), \dots, \frac{\delta f}{\delta x_n}(\xi)\right\}}{\underset{\parallel}{f'(\xi)}} \cdot (x - x_0) = 0.$$

Таким образом, $\forall x \in B(x_0, \rho)$ $f(x) = f(x_0)$.

Построим путь из точки x_0 к некоторой точке $x \in D$:

$$\gamma : [0; 1] \to D, \quad \begin{matrix} \gamma(0) = x_0 \\ \gamma(1) = x \end{matrix}.$$

По определению пути, γ – непрерывно. Тогда $\exists \delta :$ $\forall 0 \leqslant t \leqslant \delta$

$$\gamma(t) \in B(x_0, \rho) \Rightarrow f\big(\gamma(t)\big) = f(x_0), \ t \in [0; \delta],$$

где t – точка из $B(x_0, \rho)$.

Пусть $\Delta = \sup \delta \Rightarrow f\big(\gamma(\Delta)\big) = f(x_0)$. Покажем, что $\Delta = 1$.

Пусть $\Delta < 1$ $(\Delta \neq 1)$. Построим шар $B\big(\gamma(\Delta), \rho_\Delta\big)$. Тогда $\exists \varepsilon > 0 :$ $\Delta - \varepsilon < t < \Delta + \varepsilon$.

Но тогда $f\big(\gamma(\Delta+\varepsilon)\big) = f(x_0)$ (так как точка $\gamma(\Delta+\varepsilon) \in B\big(\gamma(\Delta), \rho_\Delta\big)$) – противоречие с тем, что $\Delta = \sup \delta \Rightarrow \Delta = 1$.

$\gamma(1) = x$ и $f(x) = f(x_0) \Rightarrow$ так как $x \in D$ – произведение точек, то имеем, что $\forall x \in D$ $f(x) = f(x_0) \Rightarrow f(x)$ – $const$. $\square$

Теорема 2 (Достаточное условие дифференцируемости функции)**.** Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}$, f имеет непрерывные частные производные в каждой окрестности точки $x \in D$. Тогда f – дифференцируема в точке x.

Доказательство. Без ограничения общности, будем считать, что окрестность точки $x_0 \in D$ является шаром $B(x_0, \rho) \subset D$.

Пусть $h : x_0 + h \in B(x_0, \rho)$. Здесь

$$\begin{matrix} x_0 = (x^1, x^2, \dots, x^n) \\ x_0 + h = (x^1 + h^1, x^2 + h^2, \dots, x^n + h^n) \end{matrix}.$$

Заметим, что точки

$$\left.\begin{matrix} x_1 = (x^1, x^2 + h^2, \dots, x^n + h^n) \\ x_2 = (x^1, x^2, x^3 + h^3, \dots, x^n + h^n) \\ \vdots \\ x_{n-1} = (x^1, x^2, x^3, \dots, x^{n-1}, x^n + h^n) \end{matrix}\right. \quad \in B(x_0, \rho).$$

$$\begin{aligned}
f(x_0+h)-f(x_0) &= \\
&= f(x_0+h)-f(x_1)+f(x_1)-f(x_2)+f(x_2)-\ldots \\
&\ldots - f(x_{n-1})+f(x_{n-1})-f(x_0) = \\
&= f(x^1+h^1,\ldots,x^n+h^n)-f(x^1,x^2+h^2,\ldots,x^n+h^n)+ \\
&+ f(x^1,x^2+h^2,\ldots,x^n+h^n)-f(x^1,x^2,\ldots,x^n+h^n)+ \\
&+ f(x^1,x^2,\ldots,x^n+h^n)-\ldots-f(x^1,x^2,\ldots,x^{n-1},x^n)+ \\
&+ f(x^1,x^2,\ldots,x^{n-1},x^n+h^n)-f(x^1,x^2,\ldots,x^n) = \\
&= \left|\begin{array}{c}\text{Теорема Лагранжа для}\\ \text{функции одной переменной}\end{array}\right| = \\
&= \frac{\delta f}{\delta x_1}(x^1+\theta^1h^1,x^2+h^2,\ldots,x^n+h^n)\cdot h^1+ \\
&+ \frac{\delta f}{\delta x^2}(x^1,x^2+\theta^2h^2,\ldots,x^n+h^n)\cdot h^2+\ldots \\
&\ldots+\frac{\delta f}{\delta x^n}(x^1,x^2,\ldots,x^n+\theta^nh^n)\cdot h^n.
\end{aligned}$$

Используя непрерывность частных производных, запишем:

$$\begin{aligned}
f(x_0+h)-f(x_0) &= \\
&= \frac{\delta f}{\delta x^1}(x^1,x^2,\ldots,x^n)\cdot h^1+\alpha^1(h^1)+\ldots \\
&\ldots+\frac{\delta f}{\delta x^n}(x^1,x^2,\ldots,x^n)\cdot h^n+\alpha^n(h^n),
\end{aligned}$$

где $\alpha^1,\alpha^2,\ldots,\alpha^n$ стремятся к нулю при $\vec{h}\to 0$.

Это означает, что:

$$f(x_0+h)-f(x_0)=L(x_0)\cdot h+\underset{h\to 0}{o}(h)$$
$$\left(\text{где } L(x_0)=\tfrac{\delta f}{\delta x^1}(x_0)\cdot h^1+\ldots+\tfrac{\delta f}{\delta x^n}(x_0)\cdot h^n=df(x_0)\right) \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ по определению $f(x)$ дифференцируема в точке x_0. □

Лекция 2: Производные высших порядков

от 06 сен 08:47

5.3 Производные высших порядков

Определение 4 (Вторая производная функции по переменным). Пусть $f: D\to\mathbb{R}$, D – область в $\mathbb{R}^n$. Производная по переменной x^j от производной по переменной x^i называется *второй производной функции f по переменным x^i, x^j* и обозначается

$$\frac{\delta^2 f}{\delta x^i\delta x^j}(x) \text{ или } f''_{x^i,x^j}(x).$$

Теорема 3 (О смешанных производных)**.** Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}$, $x \in D$, f имеет в D непрерывные смешанные производные (второго порядка). Тогда эти производные не зависят от порядка дифференцирования.

Доказательство. Пусть $\frac{\delta^2 f}{\delta x^i \delta x^j}$ и $\frac{\delta^2 f}{\delta x^j \delta x^i}$ – непрерывны в точке $x \in D$.

Так как остальные переменные фиксированы, то можно считать, что f зависит только от двух переменных.

Тогда $D \subset \mathbb{R}^2$, $f : D \to \mathbb{R}$ и $\frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y}$ и $\frac{\delta^2 f}{\delta y \delta x}$ – непрерывны в точке $x_0 = (x, y) \in D$.

Покажем, что $\frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y} = \frac{\delta^2 f}{\delta y \delta x}$.

Рассмотрим функции:

$$\begin{matrix} \phi(t) = f(x + t \cdot \Delta x, y + \Delta y) - f(x + t \cdot \Delta x, y) \\ \psi(t) = f(x + \Delta x, y + t \cdot \Delta y) - f(x, y + t \cdot \Delta y) \end{matrix}, \quad t \in [0; 1].$$

Имеем:

$$\begin{aligned} &\phi(1) - \phi(0) = \\ &\qquad = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y) - f(x, y + \Delta y) + f(x, y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\psi(1) - \psi(0) = \\ &\qquad = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y) + f(x, y) \end{aligned}$$

Тогда:

$$\phi(1) - \phi(0) = \psi(1) - \psi(0) \tag{5.1}$$

$$\begin{aligned} &\phi(1) - \phi(0) = \phi'(\xi) \cdot (1 - 0) = \\ &\quad = \frac{\delta f}{\delta x}(x + \xi \cdot \Delta x, y + \Delta y) \cdot \Delta x + \frac{\delta f}{\delta y}(x + \xi \cdot \Delta x, y + \Delta y) - \\ &\quad - \frac{\delta f}{\delta x}(x + \xi \cdot \Delta x, y) \cdot \Delta x - \frac{\delta f}{\delta y}(x + \xi \cdot \Delta x, y) \cdot 0 = \\ &\quad = \left(\frac{\delta f}{\delta x}(x + \xi \cdot \Delta x, y + \Delta y) - \frac{\delta f}{\delta x}(x + \xi \cdot \Delta x, y) \right) = \\ &\quad = \left| \begin{matrix} \text{по теореме Лагранжа для} \\ \text{функции 1-ой переменной} \end{matrix} \right| = \\ &\quad = \frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y}(x + \xi \cdot \Delta x, y + \eta \cdot \Delta y) \Delta x \Delta y. \end{aligned}$$

Положим $(x + \xi \Delta x, y + \eta \cdot \Delta y) = P \in \Pi$.

Аналогично:

$$\psi(1)-\psi(0)=\psi'(\xi)\cdot(1-0)=$$
$$=\frac{\delta f}{\delta x}(x+\Delta x,y+\xi\cdot\Delta y)\cdot 0+\frac{\delta f}{\delta y}(x+\Delta x,y+\xi\cdot\Delta y)\cdot\Delta y-$$
$$-\frac{\delta f}{\delta x}(x,y+\xi\cdot\Delta y)\cdot 0-\frac{\delta f}{\delta y}(x,y+\xi\cdot\Delta y)\cdot\Delta y=$$
$$=\left(\frac{\delta f}{\delta y}(x+\Delta x,y+\xi\cdot\Delta y)-\frac{\delta f}{\delta y}(x,y+\xi\cdot\Delta y)\right)\Delta y=$$
$$=\left|\begin{array}{c}\text{по теореме Лагранжа для}\\ \text{функции 1-ой переменной}\end{array}\right|=$$
$$=\frac{\delta^2 f}{\delta y\delta x}(x+\tau\cdot\Delta x,y+\xi\cdot\Delta y)\Delta y\Delta x$$

Положим, что $(x+\tau\cdot\Delta x,y+\xi\cdot\Delta y)=Q$.
Тогда из 5.1 следует, что:

$$\begin{array}{ccc}\frac{\delta^2 f}{\delta x\delta y}(P)\Delta x\Delta y & = & \frac{\delta^2 f}{\delta y\delta x}(Q)\Delta x\Delta y\\ \| & & \|\\ \frac{\delta^2 f}{\delta x\delta y}(x+\xi\cdot\Delta x,y+\eta\cdot\Delta y) & = & \frac{\delta^2 f}{\delta y\delta x}(x+\tau\cdot\Delta x,y+\xi\cdot\Delta y)\end{array}.$$

Используя непрерывность частных производных при $\Delta x\to 0$ и $\Delta y\to 0\Rightarrow$

$$x+\xi\cdot\Delta x\to x,\quad y+\eta\cdot\Delta y\to y.$$

Таким образом,

$$\frac{\delta^2 f}{\delta x\delta y}=\frac{\delta^2 f}{\delta y\delta x}.$$

□

5.4 Формула Тейлора

Определение 5 (Гладкая функция класса $C^{(k)}$)**.** Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$, $f:D\to\mathbb{R}$. Будем говорить, что f является *гладкой функцией класса* $C^{(k)}$ (k-го порядка), то есть $f\in C^{(k)}(D,\mathbb{R})$, если f имеет непрерывные частные производные до k-го порядка включительно.

Теорема 4 (Формула Тейлора)**.** Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$, $f:D\to\mathbb{R}$, $f\in C^{(k)}(D,\mathbb{R})$, $x\in D$, $x+h\in D$, $[x;x+h]\subset D$. Тогда:

$$f(x+h)=f(x)+\sum_{i=1}^{k-1}\frac{1}{i!}\left(\frac{\delta}{\delta x^1}\cdot h^1+\ldots+\frac{\delta}{\delta x^n}\cdot h^n\right)^i\cdot f(x)+R^k,$$

где R^k – остаточный член,

$$R^k = \frac{1}{k!}\left(\frac{\delta}{\delta x^1}\cdot h^1 + \ldots + \frac{\delta}{\delta x^n}\cdot h^n\right)^k \cdot f(x+\xi\cdot h),$$

$$x = (x^1, \ldots, x^n), \quad h = (h^1, \ldots, h^n).$$

Доказательство. Рассмотрим функцию:

$$\phi(t) = f(x + t\cdot h),\ t \in [0;1]$$

Применим формулу Тейлора к $\phi(t)$:

$$\phi(1) = \phi(0) + \frac{1}{1!}\cdot\phi'(0)\cdot(1-0) + \frac{1}{2!}\cdot\phi''(0)\cdot(1-0)^2 + \\ + \frac{1}{3!}\cdot\phi'''(0)\cdot(1-0)^3 + \ldots + \frac{1}{k!}\cdot\phi^{(k)}\cdot(1-0)^k. \quad (5.2)$$

$$\phi(1) = f(x+h), \quad \phi(0) = f(x).$$

$$\phi'(0) = f'(x+th)\cdot(x+t\cdot h)'_k\Big|_{t=0} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\delta f(x+t\cdot h)}{\delta x^1} & \frac{\delta f(x+t\cdot h)}{\delta x^2} & \cdots & \frac{\delta f(x+t\cdot h)}{\delta x^n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h^1 \\ h^2 \\ \vdots \\ h^n \end{pmatrix}\Bigg|_{t=0} =$$

$$= \left(\frac{\delta f(x+t\cdot h)}{\delta x^1}\cdot h^1 + \frac{\delta f(x+t\cdot h)}{\delta x^2}\cdot h^2 + \ldots + \frac{\delta f(x+t\cdot h)}{\delta x^n}\cdot h^n\right)\Bigg|_{t=0} =$$

$$= \frac{\delta f}{\delta x^1}(x)\cdot h^1 + \frac{\delta f}{\delta x^2}(x)\cdot h^2 + \ldots + \frac{\delta f}{\delta x^n}(x)\cdot h^n =$$

$$= \left(\frac{\delta}{\delta x^1}\cdot h^1 + \ldots + \frac{\delta}{\delta x^n}\cdot h^n\right)\cdot f(x)$$

$$\phi''(0) = \left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\delta f(x+t\cdot h)}{\delta x^i}\cdot h^i\right)'_t\Bigg|_{t=0} =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\delta^2 f(x+t\cdot h)}{\delta x^i \delta x^j}\cdot h^i h^j\right)\Bigg|_{t=0} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\delta^2 f(x)}{\delta x^i\delta x^j}\cdot h^i h^j =$$

$$= \left(\frac{\delta}{\delta x^1}\cdot h^1 + \ldots + \frac{\delta}{\delta x^n}\cdot h^n\right)^2\cdot f(x)$$

И так далее. Подставим получившиеся выражения в 5.2 и получим искомое. $\square$

Пример. Запишем формулу Тейлора для функции $f(x,y)$:

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{1}{1!}\left(\frac{\delta f}{\delta x}(x_0,y_0)\Delta x + \frac{\delta f}{\delta y}(x_0,y_0)\Delta y\right) +$$
$$+ \frac{1}{2!}\left(\frac{\delta^2 f}{\delta x^2}(x_0,y_0)\cdot(\Delta x)^2 +\right.$$
$$\left.+ 2\cdot\frac{\delta^2 f}{\delta x\delta y}(x_0,y_0)\Delta x\Delta y + \frac{\delta^2 f}{\delta y^2}(x_0,y_0)\cdot(\Delta y)^2\right) +$$
$$+ \frac{1}{3!}\cdot\left(\frac{\delta^3 f}{\delta x^3}(x_0,y_0)\cdot(\Delta x)^3 + 3\cdot\frac{\delta^3 f}{\delta x^2\delta y}(x_0,y_0)\cdot(\Delta x)^2\Delta y +\right.$$
$$\left.+ 3\cdot\frac{\delta^3 f}{\delta x\delta y^2}(x_0,y_0)\cdot\Delta x(\Delta y)^2 + \frac{\delta^3 f}{\delta y^3}(x_0,y_0)\cdot(\Delta y)^3\right) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{k!}\cdot\left(\frac{\delta}{\delta x}\Delta x + \frac{\delta}{\delta y}\Delta y\right)^k\cdot f(x_0+\xi\cdot\Delta x, y_0+\eta\cdot\Delta y),$$

$$\Delta x = x - x_0, \quad \Delta y = y - y_0.$$

5.5 Экстремумы функций многих переменных

Определение 6 (Точка локального максимума (минимума)). Пусть X – метрическое пространство (МП), $f : X \to \mathbb{R}$. Точка x_0 называется *точкой локального максимума (минимума)*, если $\exists U(x_0) \subset X : \ \forall x \in U(x_0)$

$$f(x) \leqslant f(x_0) \quad \big(f(x) \geqslant f(x_0)\big)$$

Теорема 5 (Необходимое условие локального экстремума). Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$ – точка локального экстремума, тогда в точке x_0 $\forall i = \overline{1,n}$

$$\frac{\delta(x_0)}{\delta x^i} = 0.$$

Доказательство. Фиксируем все переменные за исключением x^i, тогда можно рассматривать функцию $f(x^1,\ldots,x^i,\ldots,x^n)$ как функцию одной переменной, для которой x_0 – точка локального экстремума, следовательно $\frac{\delta f}{\delta x^i}(x_0) = 0$,

$$i \text{ – произвольная } \Rightarrow \forall i \text{ выполняется.}$$

□

Определение 7 (Критическая точка функции). Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}^k$ – дифференцируемо в точке $x_0 \in D$. Точка x_0 называется *критической точкой функции* $f(x)$, если:

$$rank \Im f(x_0) < \min(n, k),$$

где $\Im f(x_0)$ – матрица Якоби функции $f(x_0)$.

Пример. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x \cdot y \\ y - z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$
$$\Im f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\delta u}{\delta x} & \frac{\delta u}{\delta y} & \frac{\delta u}{\delta z} \\ \frac{\delta v}{\delta x} & \frac{\delta v}{\delta y} & \frac{\delta v}{\delta z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & x & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x_0) = \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases} \text{– критическая точка.}$$

$$n = 3, \quad k = 2$$

Примечание. Множество точек прямой, получаемой пересечением плоскостей $x = 0$ и $y = 0$ – множество критических точек функции $f(x, y, z)$.

Определение 8 (Квадратичная форма на касательном пространстве)**.** Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}$, f имеет производную в точке $x_0 \in D$. На касательном пространстве $T\mathbb{R}^n_{(x_0)}$ определим квадратичную форму

$$Q(h) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\delta^2 f}{\delta x^i \delta x^j}(x_0) \cdot h^i h^j, \quad Q : T\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}.$$

Теорема 6 (Достаточное условие локального экстремума)**.** Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке $x \in D$, x – критическая точка для f, $f \in C^n(D, \mathbb{R})$, $n = 2$. Тогда, если:

1. $Q(h)$ – знакоположительна, то в точке x – локальный минимум.
2. $Q(h)$ – знакоотрицательна, то в точке x – локальный максимум.
3. $Q(h)$ может принимать различные значения $(> 0, < 0)$, тогда в точке x нет экстремума.

Доказательство. По формуле Тейлора:

$$f(x+h)-f(x)=\frac{1}{2}\cdot\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\delta^2 f(x)}{\delta x^i \delta x^j}\cdot h^i h^j+o\big(\|h\|^2\big)=$$

$$=\frac{\|h\|^2}{2}\cdot\left(\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\delta^2 f(x)}{\delta x^i \delta x^j}\cdot\frac{h^i}{\|h\|}\frac{h^j}{\|h\|}+\alpha(h)\right)=\left|\begin{array}{c}\text{где } \alpha(h)\to 0 \text{ при}\\ h\to 0\end{array}\right|=$$

$$=\frac{\|h\|^2}{2}\cdot\left(Q\left(\frac{h}{\|h\|}\right)+\alpha(h)\right).$$

Вектор $\frac{h}{\|h\|} < S^{(n-1)}$ – единичная $(n-1)$-мерная сфера. Сфера $S^{(n-1)}$ – компактное множество $\Rightarrow$ по теореме Больцано - Вейерштраса, $\exists e_1, e_2 \in S^{(n-1)}$:

$$Q_1(e_1)=\max Q(h)=M, \quad Q_2(e_2)=\min Q(h)=m$$

1. Если $Q(h)$ – знакоположительна $\Rightarrow m>0$. Следовательно, $\exists\delta > 0 : \forall h\ \|h\|<\delta,\ |\alpha(h)|<m$

   $$Q\left(\frac{h}{\|h\|}\right)+\alpha(h)>0,$$

   следовательно, $\forall h:\ \|h\|<\delta$

   $$f(x+h)-f(x)>0,$$

   по определению, x – точка локального минимума (здесь $\|h\|<\delta$ – аналог понятия окрестности точки x).

2. Если $Q(h)$ – знакоотрицательна, то $M<0$. Тогда $\exists\delta>0:\forall h\ \|h\|<\delta\ |\alpha(h)|<-M$

   $$Q\left(\frac{h}{\|h\|}\right)+\alpha(h)<0,$$

   следовательно, $\forall h:\ \|h\|<\delta$

   $$f(x+h)-f(x)<0,$$

   тогда x – точка локального максимума.

3. Если $Q(h)$ – знакопеременна, то $m<0<M,\ \forall t>0$

   $$Q(t\cdot e_2)<0, \quad Q(t\cdot e_1)>0,$$

   тогда в точке x нет экстремума.

□

Замечание. На практике для определения max и min можно пользоваться критерием Сильвестра из алгебры.

Определение 9 (Наеявно заданная уравнением функция). Пусть D – область в $\mathbb{R}^k$, Ω – область в $\mathbb{R}^k$, $F : D \times \Omega \to \mathbb{R}^k$.

Пусть функция $f : D \to \Omega$:

$$y = f(x) \Leftrightarrow F(x, y) = 0.$$

Говорят, что уравнение $F(x, y) = 0$ *неявно задает* функцию $y = f(x)$.

Пример. $x^2 + y^2 = 1$

$$y = \pm\sqrt{1 - x^2}, \quad y = \begin{cases} \sqrt{1-x^2}, & x \in Q \\ -\sqrt{1-x^2}, & x \notin Q \end{cases}$$

Лекция 3: Теорема о неявной функции

от 12 сен 10:30

5.6 Теорема о неявной функции

Теорема 7 (О неявной функции). Пусть $F(x, y)$ отображает окрестность $U(x_0; y_0) \subset \mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}$, $F : U(x_0, y_0) \to \mathbb{R}$.

Пусть F имеет следующие свойства:

1. $F(x_0, y_0) = 0$.
2. $F(x, y) \in C^P(U, \mathbb{R})$, $p \geqslant 1$.
3. $\frac{\delta F}{\delta y}(x_0, y_0) \neq 0$.

Тогда $\exists$ открезки I_x, I_y : $f : I_x \to I_y$:

1. $I_x \times I_y \subset U(x_0, y_0)$.
2. $\forall x \in I_x$ $y = f(x) \Leftrightarrow F(x, y) = 0$.
3. $f \in C^P(I_x, I_y)$.
4. $\forall x \in I_x$ $f'(x) = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}$.

Доказательство. Будем считать, что окрестность $U(x_0, y_0)$ – круг с центром в точке (x_0, y_0). Для определенности будем считать, что $F'_y(x_0, y_0) > 0$.

В силу непрерывности F'_y $\exists$ окрестность $V(x_0, y_0) \subset U(x_0, y_0)$: $\forall (x, y) \in V$ $F'_y(x, y) > 0$. Если посмотрим на функцию $F(x, y)$ при фиксированной x как на функцию по переменной y, то $F(\overline{x}, y)$ будет монотонной (в силу того, что $F'_y(\overline{x}, y) > 0$). Тогда для $\beta = \frac{1}{2}\tau$, где τ – радиус круга $U(x_0, y_0)$.

$$F(x_0, y_0 - \beta) < F(x_0, y_0) < F(x_0, y_0 + \beta).$$

Так как $F(x,y)$ непрерывна, то $\exists \delta > 0: \ \forall x \in [x_0-\delta, x_0+\delta]$

$$F(x, y_0-\beta) < 0, \quad F(x, y_0+\beta) > 0.$$

При фиусированном x функция $f(\overline{x}, y)$ непрерывно монотонна, на концах отрезка $[y_0-\beta; y_0+\beta]$ имеет разные знаки, тогда $\exists! y_x \in [y_0-\beta; y_0+\beta]: \ F(\overline{x}, y_x) = 0$. В силу непрерывности $F(x,y)$ по x, $\exists \delta > 0:$ $\forall x \in [x_0-\delta; x_0+\delta]$ $F(x, y_x = 0)$.

Определим функцию $f: [x_0-\delta; x_0+\delta] \to [y_0-\beta; y_0+\beta]$ положив, что $y = f(x) \Leftrightarrow F(x,y) = 0$, то есть $y_x = f(x)$.

Положим $f \in C^{(P)}(I_x, I_y)$.

1. Покажем, что f – непрерывна.

   Для начала покажем, что f непрерывна в точке x_0.

   Пусть $\varepsilon > 0$ задано. Покажем, что $\exists \delta > 0: \ \forall x \in (x_0-\delta; x_0+\delta) \Rightarrow f(x) \in (y_0-\varepsilon; y_0+\varepsilon)$.

   Будем считать, что $\varepsilon < \beta \Rightarrow [y_0-\varepsilon; y_0+\varepsilon] \subset [y_0-\beta; y_0+\beta] \Rightarrow$ найдется отрезок $[x_0-\delta; x_0+\delta]$ и функция

$$\hat{f}(x): [x_0-\delta; x_0+\delta] \to [y_0-\varepsilon; y_0+\varepsilon],$$

$$\hat{f}(x) = y \Leftrightarrow F(x,y) = 0.$$

   Но на $[x_0-\delta; x_0+\delta]$ $\hat{f}(x) \equiv f(x) \Rightarrow f\big([x_0-\delta; x_0+\delta]\big) \subset [y_0-\varepsilon; y_0+\varepsilon] \Rightarrow f(x)$ непрерывна в точке x_0.

   Теперь, пусть $x \in I_x = [x_0-\delta; x_0+\delta]$.

   Для точки (x, y_x) выполнены все условия теоремы $\Rightarrow \exists$ отрезок $[x-\alpha; x+\alpha] = \widehat{I}_x$ и $[y_x-\gamma; y_x+\gamma] = \widehat{I}_y$ и функция $g: \widehat{I}_x \to \widehat{I}_y:$ $g(\overline{x}) = y \Leftrightarrow F(\overline{x}, y) = 0 \ \forall \overline{x} \in \widehat{I}_x$.

   Но на отрезке $[x-\alpha; x+\alpha]$ функция $g(x) \equiv f(x)$.

   По построению $g(x)$ непрерывна в точке x, следовательно и $f(x)$ непрерывна в точке x.

2. Покажем, что $f(x)$ дифференцируема на I_x.

   Пусть $x \in I_x, \ x+\Delta x \in I_x, \ y = f(x), \ y+\Delta y = f(x+\Delta x)$. Тогда

$$0 = \underset{\underset{0}{\parallel}}{F(x+\Delta x, y+\Delta y)} - \underset{\underset{0}{\parallel}}{F(x,y)} =$$

$$= \left| \begin{matrix} \text{Теорема} \\ \text{о среднем} \end{matrix} \right| = F'_x(x+\theta\cdot\Delta x, y+\theta\cdot\Delta y)\Delta x +$$
$$+ F'_y(x+\theta\cdot\Delta x, y+\theta\cdot\Delta y)\Delta y, \ 0 < \theta < 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-F'_x(x+\theta\cdot\Delta x, y+\theta\cdot\Delta y)}{F'_y(x+\theta\cdot\Delta x, y+\theta\cdot\Delta y)}$$

Поскольку f – непрерывная функция, то при $\Delta x \to 0: \ \Delta y \to 0$ $\big(f(x+\Delta x) - f(x) = \Delta y \to 0\big)$. Тогда:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)} \tag{5.3}$$

Из теоремы о непрерывности композиции непрерывной функции $\Rightarrow f'(x)$ – непрерывна в точке $x \Rightarrow f \in C^{(1)}(I_x, I_y)$.

Если $F \in C^{(p)}(U, \mathbb{R}),\ p > 1$, то:

$$f''(x) = \left(-\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}\right)' = \frac{(-F'_x)' \cdot F'_y + F'_x \cdot (F'_y)'}{(F'_y)^2} =$$

$$= \frac{-\big(F''_{xx} + F''_{xy} \cdot \underset{\substack{\| \\ y'(x)}}{f'(x)}\big) \cdot F'_y + F'_x \cdot \big(F''_{yx} + F''_{yy} \cdot f'(x)\big)}{(F'_y)^2}, \tag{5.4}$$

где $F''_{xx}, F''_{xy}, F''_{yy}$ вычисляются в точке $\big(x, f(x)\big) \Rightarrow f(x) \in C^{(2)}(I_x, I_y)$, если $F(x,y) \in C^{(2)}(U, \mathbb{R})$.

Заметим, что в левой части выражения 5.4 производная функции f имеет порядок на 1 больше, чем производная функции f в правой части. Тогда по индукции можно показать, что $f \in C^{(p)}(I_x, I_y)$, если $F(x,y) \in C^{(p)}(U, \mathbb{R})$.

□

Теорема 8 (О неявной функции вида $F(x^1, \dots, x^m, y) = 0$)**.** Если $F : U \to \mathbb{R}$, где $U \subset \mathbb{R}^{m+1}$ – окрестность точки $(x_0, y_0) = (x_0^1, \dots, x_0^m, y_0) \in \mathbb{R}^{m+1}$:

1. $F(x_0, y_0) = F(x_0^1, \dots, x_0^m, y_0) = 0$.
2. $F \in C^{(p)}(U, \mathbb{R})$.
3. $F'_y(x_0, y_0) = F'_y(x_0^1, \dots, x_0^m, y_0) \neq 0$, тогда $\exists (m+1)$-мерный промежуток $I = I_x^m \times I_y^1$, где:

$$I_x^m = \big\{x = (x^1, \dots, x^m) \in \mathbb{R}^m \ \big|\ |x^i - x_0^i| < \alpha^i,\ i = \overline{1,m}\big\},$$
$$I_y^1 = \big\{y \in \mathbb{R} \ \big|\ |y - y_0| < \beta\big\},$$

   $I \subset U$ и $\exists$ функция $f : I_x^m \to I_y^1$:

   (a) $f \in C^{(p)}(I_x^m, I_y^1)$.
   (b) $\forall (x,y) \in I = I_x^m \times I_y^1 \quad y = f(x^1, \dots, x^m) \Leftrightarrow F(x^1, \dots, x^m, y) = 0$.
   (c) $f'(x) = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}$, то есть $\frac{\delta f}{\delta x^i} = -\frac{F'_{x^i}(x,y)}{F'_y(x,y)}$.

Доказательство. Повторить доказательство теоремы 7, понимая под x набор $(x^1, \dots, x^m)$, под δ – набор $(\alpha^1, \dots, \alpha^m)$.

Если в функциях $f(x^1, \dots, x^m)$ и $F(x^1, \dots, x^m, y)$ фиксировать все переменные, кроме x^i и y, то мы окажемся в условиях теоремы 7, при этом роль x играет переменная $x^i \Rightarrow$ верен пункт 3.

И рассуждая аналогично доказательству теоремы 7, получаем, что

$$f \in C^{(p)}(I_x^m, I_y^1), \text{ если } F \in C^{(p)}(U, \mathbb{R}).$$

$\square$

Примечание (Общий случай)**.** Рассмотрим систему уравнений:

$$\begin{cases} F^1(x^1, \dots, x^m, y^1, \dots, y^n) = 0 \\ F^2(x^1, \dots, x^m, y^1, \dots, y^n) = 0 \\ \vdots \\ F^n(x^1, \dots, x^m, y^1, \dots, y^n) = 0 \end{cases}, \tag{5.5}$$

которую будем решать относительно $y^1, \dots, y^n$, то есть искать *локально* эквивалентную систему функциональных связей,

$$\begin{cases} y^1 = f^1(x^1, \dots, x^m) \\ y^2 = f^1(x^1, \dots, x^m) \\ \vdots \\ y^n = f^1(x^1, \dots, x^m) \end{cases}. \tag{5.6}$$

Для кратности и удобства будем считать, что $x = (x^1, \dots, x^m)$, $y = (y^1, \dots, y^n)$, тогда систему 5.5 будем записывать как $F(x, y) = 0$, а систему 5.6 – как $y = f(x)$. Если

$$\begin{array}{ll} x_0 = (x_0^1, \dots, x_0^m), & y_0 = (y_0^1, \dots, y_0^n), \\ \alpha = (\alpha^1, \dots, \alpha^m), & \beta = (\beta^1, \dots, \beta^n), \end{array}$$

то запись $|x - x_0| < \alpha$ или $|y - y_0| < \beta$ будет означать, что

$$\begin{array}{l} |x^i - x_0^i| < \alpha^i, \ i = \overline{1, m} \\ |y^i - y_0^i| < \beta^i, \ i = \overline{1, n} \end{array}.$$

Далее положим, что

$$f'(x) = \begin{pmatrix} \frac{\delta f^1}{\delta x^1} & \dots & \frac{\delta f^1}{\delta x^m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\delta f^n}{\delta x^1} & \dots & \frac{\delta f^n}{\delta x^m} \end{pmatrix}(x)$$

$$F'_x(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\delta F^1}{\delta x^1} & \dots & \frac{\delta F^1}{\delta x^m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\delta F^n}{\delta x^1} & \dots & \frac{\delta F^n}{\delta x^m} \end{pmatrix}(x,y)$$

$$F'_y(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\delta F^1}{\delta y^1} & \dots & \frac{\delta F^1}{\delta y^m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\delta F^n}{\delta y^1} & \dots & \frac{\delta F^n}{\delta y^m} \end{pmatrix}(x,y)$$

Заметим, что матрица $F'_y(x,y)$ – квадратная, следовательно она обратима тогда и только тогда, когда $\left|F'_y(x,y)\right| \neq 0$ (определитель $\neq 0$).

Обозначим матрицу, обратную к $F'_y(x,y)$ как $\left[F'_y(x,y)\right]^{-1}$.

Теорема 9 (О неявной функции, общий случай)**.** Пусть $F : U(x_0, y_0) \to \mathbb{R}^n$, где $U(x_0, y_0) \subset \mathbb{R}^{m+n}$ – окрестность точки (x_0, y_0) такая, что

1. $F \in C^{(p)}(U, \mathbb{R}^n),\ p \geqslant 1$.
2. $F(x_0, y_0) = 0$.
3. $F'_y(x_0, y_0)$ – обратная матрица.

Тогда $\exists (n+m)$-мерный промежуток $I = I_x^m \times I_y^n \subset U(x_0; y_0)$, где

$$I_x^m = \left\{x \in \mathbb{R}^m \;\middle|\; |x - x_0| < \alpha\right\},$$
$$I_x^n = \left\{y \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; |y - y_0| < \beta\right\},$$

то есть $f : I_x^m \to I_y^n$:

- $\forall (x,y) \in I_x^m \times I_y^n\ F(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x)$.
- $f'(x) = -\left[F'_y(x,y)\right]^{-1} \cdot F'_x(x,y)$.

Доказательство. Например, можно посмотреть в Зориче. □

5.7 Приложение теоремы о неявной функции

Определение 10 (Диффиоморвизм класса $C^{(p)}$, гомеоморфизм)**.** Пусть D, G – области в $\mathbb{R}^n$. Отображение $f : D \to G$ называется *диффиоморфизмом класса* $C^{(p)}$, $p \geqslant 0$, если:

1. f – обратимое.

2. $f \in C^{(p)}(D, G)$.

3. $f^{-1} \in C^{(p)}(D, G)$.

При $p = 0$ f называется *гомеоморфизмом*, то есть f – гомеоморфизм, если f – взаимно однозначное отображение и f, f^{-1} – непрерывны.

Пример. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = e^x$ – нет.
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+,\ f(x) = e^x$ – да, диффиоморфизм класса C^∞.

Пример. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$ – нет.
$f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ – да, диффиоморфизм класса C^∞.

Пример. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3$ – гомеоморфизм класса C^0, но не диффиоморфизм, так как $f^{-1} = \sqrt[3]{y}$ теряет непрерывность.

Теорема 10 (Об обратной функции)**.** Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}^n$, $x_0 \in D$. Кроме того,

- $f \in C^{(p)}(D, \mathbb{R}^n),\ p \geqslant 1$.
- $f(x_0) = y_0$.
- $\underset{\text{(матрица Якоби в } x_0)}{f'(x_0)}$ – обратимая.

Тогда $\exists$ окрестности U, V точек x_0 и y_0 соответственно:

- $f : U \to V$ – диффиоморфизм U на V класса $C^{(p)}(U, V)$.
- $\forall y \in V\ [f^{-1}]'(y) = [f'(x)]^{-1},\ y = f(x)$.

Доказательство. Рассмотрим $F(x, y) = y - f(x)$.

1. $F(x, y) \in C^{(p)}(D \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.

2. $F'_x(x_0, y_0) = -f'(x)$ – обратима.

3. $F(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x)$.

Следовательно, по теореме 7 $\exists n$-мерные промежутки I_x^n и I_y^n и $\exists$ отображение $g(y)$:

1. $g : I_y^n \to I_x^n$.

2. $g(y) = x \Leftrightarrow F(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x)$.

3. $g(y) \in C^{(p)}(I_y^n, I_x^n)$.

4. $\forall y \in I_y^n$ $g'(y) = -\Big[F_x'\big(g(y), y\big)\Big] \cdot F_y'\big(g(y), y\big)$, где $g'(y)$, $\Big[F_x'\big(g(y), y\big)\Big]$, $F_y'\big(g(y), y\big)$ – матрицы.

$$f(x) = \begin{pmatrix} f^1(x^1, \dots, x^n) \\ f^2(x^1, \dots, x^n) \\ \vdots \\ f^n(x^1, \dots, x^n) \end{pmatrix}$$

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} y^1 - f^1(x^1, \dots, x^n) \\ y^2 - f^2(x^1, \dots, x^n) \\ \vdots \\ y^n - f^n(x^1, \dots, x^n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F^1(x, y) \\ F^2(x, y) \\ \vdots \\ F^n(x, y) \end{pmatrix}$$

$$F_x'(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\delta F^1}{\delta x^1} & \dots & \frac{\delta F^1}{\delta x^n} \\ \frac{\delta F^2}{\delta x^1} & \dots & \frac{\delta F^2}{\delta x^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\delta F^n}{\delta x^1} & \dots & \frac{\delta F^n}{\delta x^n} \end{pmatrix}(x, y) = \begin{pmatrix} -\frac{\delta f^1}{\delta x^1} & \dots & -\frac{\delta f^1}{\delta x^n} \\ -\frac{\delta f^2}{\delta x^1} & \dots & -\frac{\delta f^2}{\delta x^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{\delta f^n}{\delta x^1} & \dots & -\frac{\delta f^n}{\delta x^n} \end{pmatrix}(x)$$

$$F_y'(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\delta F^1}{\delta y^1} & \dots & \frac{\delta F^1}{\delta y^n} \\ \frac{\delta F^2}{\delta y^1} & \dots & \frac{\delta F^2}{\delta y^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\delta F^n}{\delta y^1} & \dots & \frac{\delta F^n}{\delta y^n} \end{pmatrix}(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Положим $V = I_y^n$, $U = g(V)$.
Тогда из 1. и 2. $\Rightarrow f\big|_U$ и $g\big|_V$ – взаимно обратны.
Из 4. $\Rightarrow \forall y \in V$

$$g'(y) = -\Big[F_x'\big(g(y), y\big)\Big]^{-1} = \big[f'(x)\big]^{-1},$$
$$g'(y) = \big[f^{-1}(y)\big]^{-1} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \big[f'(x)\big]^{-1} = \big[f^{-1}(x)\big]'.$$

Исходя из свойств отображения f и приведенных выше построений, f – диффиоморфизм. □

Лекция 4: Продолжение

от 17 сен 8:44

Определение 11 (k-мерная поверхность)**.** Множество $S \subset \mathbb{R}^n$ называется *k-мерной поверхностью*, если $\forall x \in S$ $\exists U(x) \subset \mathbb{R}^n$ и $\exists$ диффиоморфизм $\phi : U(x) \to I^n$:

$$\phi\big(U(x) \cap S\big) = I^k,$$

где $I^n = \big\{x \in \mathbb{R}^n \bigm| |x^i| < 1\big\}$,

$$I^k = \big\{x \in \mathbb{R}^n \bigm| x^{k+1} = x^{k+2} = \ldots = x^n = 0\big\}.$$

Пример. $S = \mathbb{R}^n$ – поверхность в $\mathbb{R}^n$,

$$t^i(x^i) = \frac{2}{\pi} \cdot \arctan x^i,$$

$$\mathfrak{J} = \begin{pmatrix} \frac{\delta t^1}{\delta x^1} & \frac{\delta t^1}{\delta x^2} & \cdots & \frac{\delta t^1}{\delta x^n} \\ \frac{\delta t^2}{\delta x^1} & \frac{\delta t^2}{\delta x^2} & \cdots & \frac{\delta t^2}{\delta x^n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\delta t^n}{\delta x^1} & \frac{\delta t^n}{\delta x^2} & \cdots & \frac{\delta t^n}{\delta x^n} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{1+(x^1)^2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{1+(x^2)^2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{1+(x^n)^2} \end{pmatrix}$$

Утверждение. Пусть задана система уравнений:

$$\begin{cases} F^1(x^1, \ldots, x^n) = 0 \\ \vdots \\ F^{n-k}(x^1, \ldots, x^n) = 0 \end{cases}, \quad F^i(x) \in C^{(1)} \tag{5.7}$$

Кроме того,

$$\begin{vmatrix} \frac{\delta F^1}{\delta x^1} & \cdots & \frac{\delta F^1}{\delta x^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\delta F^{n-k}}{\delta x^1} & \cdots & \frac{\delta F^{n-k}}{\delta x^n} \end{vmatrix}(x) \neq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Тогда решение этой системы является k-мерной поверхностью в $\mathbb{R}^n$.

Доказательство. По теореме о неявной функции, система 5.7 эквивалентна системе

$$\begin{cases} x^{k+1} = f^1(x^1, \ldots, x^k) \\ x^{k+2} = f^2(x^1, \ldots, x^k) \\ \vdots \\ x^n = f^{n-k}(x^1, \ldots, x^k) \end{cases}$$

Положим:

$$\begin{aligned} t^1 &= x^1 \\ t^2 &= x^2 \\ &\vdots \\ t^k &= x^k \\ t^{k+1} &= x^{k+1} - f^1(x^1, \dots, x^k) = 0 \\ t^{k+2} &= x^{k+2} - f^2(x^1, \dots, x^k) = 0 \\ &\vdots \\ t^n &= x^n - f^{n-k}(x^1, \dots, x^k) = 0 \end{aligned}$$

Таким образом построенное отображение является диффиоморфизмом $\Rightarrow$ решение системы 5.7 – k-мерная поверхность в $\mathbb{R}^n$. $\square$

Определение 12 (Локальная карта или параметризация поверхности)**.** Пусть S – k-мерная поверхность в $\mathbb{R}^n$, $x_0 \in S$ и $\phi : U(x_0) \to I^n$ – диффиоморфизм:

$$\phi\big(U(x_0) \cap S\big) = I^k.$$

Ограничение ϕ^{-1} на I^k будем называть *локальной картой* или *параметризацией поверхности* S в окрестности точки x_0.

Определение 13 (Касательное пространство)**.** Пусть S – k-мерная поверхность в $\mathbb{R}^n$, $x_0 \in S$, $x = x(t) : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ – параметризация S в окрестности точки x_0, при этом $x_0 = x(0)$.

Касательным пространством (или плоскостью) к S в точке x_0 называется k-мерная плоскость, заданная уравнением:

$$x = x_0 + x'(0) \cdot t, \tag{5.8}$$

$$x_0 = (x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^n)$$

$$x(t) = \begin{cases} x^1(t^1, \dots, t^k) \\ x^2(t^1, \dots, t^k) \\ \vdots \\ x^n(t^1, \dots, t^k) \end{cases}$$

$$x'(t) = \begin{pmatrix} \frac{\delta x^1}{\delta t^1} & \cdots & \frac{\delta x^1}{\delta t^k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\delta x^n}{\delta t^1} & \cdots & \frac{\delta x^n}{\delta t^k} \end{pmatrix}(t), \quad t = \begin{pmatrix} t^1 \\ t^2 \\ \vdots \\ t^k \end{pmatrix}$$

Таким образом касательное пространство задается системой из 5.8:

$$\begin{cases} x^1 = x^1_0 + \frac{\delta x^1}{\delta t^1}(0) \cdot t^1 + \ldots + \frac{\delta x^1}{\delta t^k}(0) \cdot t^k \\ x^2 = x^2_0 + \frac{\delta x^2}{\delta t^1}(0) \cdot t^1 + \ldots + \frac{\delta x^2}{\delta t^k}(0) \cdot t^k \\ \vdots \\ x^n = x^n_0 + \frac{\delta x^n}{\delta t^1}(0) \cdot t^1 + \ldots + \frac{\delta x^n}{\delta t^k}(0) \cdot t^k \end{cases}.$$

Пример. Пусть $\gamma = \gamma(t)$ – гладкая кривая в $\mathbb{R}^3$, $\gamma : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$.

Обозначим $x_0 = x(0),\ y_0 = y(0),\ z_0 = z(0)$.
5.8 – касательное пространство к кривой γ в точке x_0.

$$\begin{cases} x = x_0 + x'(0) \cdot t \\ y = y_0 + y'(0) \cdot t \\ z = z_0 + z'(0) \cdot t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - x_0 = x'(0) \cdot t \\ y - y_0 = y'(0) \cdot t \\ z - z_0 = z'(0) \cdot t \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x - x_0}{x'(0)} = \frac{y - y_0}{y'(0)} = \frac{z - z_0}{z'(0)} = t.$$

Пример. $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

Пусть $z_0 > 0$, тогда в окрестности точки (x_0, y_0, z_0) сферу можно параметризировать следующими уравнениями:

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = \sqrt{1 - u^2 - v^2} \end{cases}.$$

Касательное пространство к сфере в точке (x_0, y_0, z_0):

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\delta x}{\delta u} & \frac{\delta x}{\delta v} \\ \frac{\delta y}{\delta u} & \frac{\delta y}{\delta v} \\ \frac{\delta z}{\delta u} & \frac{\delta z}{\delta v} \end{pmatrix} (u_0, v_0) \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + \frac{\delta x}{\delta u}(u_0, v_0) \cdot u + \frac{\delta x}{\delta v}(u_0, v_0) \cdot v \\ y = y_0 + \frac{\delta y}{\delta u}(u_0, v_0) \cdot u + \frac{\delta y}{\delta v}(u_0, v_0) \cdot v \\ z = z_0 + \frac{\delta z}{\delta u}(u_0, v_0) \cdot u + \frac{\delta z}{\delta v}(u_0, v_0) \cdot v \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + u \\ y = y_0 + v \\ z = z_0 - \frac{u_0}{\sqrt{1 - u_0^2 - v_0^2}} \cdot u - \frac{v_0}{\sqrt{1 - u_0^2 - v_0^2}} \cdot v \end{cases}.$$

Утверждение. Пусть S – k-мерная поверхность в $\mathbb{R}^n$ задается системой уравнений:

$$\begin{cases} F^1(x^1,\ldots,x^n)=0 \\ \vdots \\ F^{n-k}(x^1,\ldots,x^n)=0, \end{cases} \text{, причем } \begin{vmatrix} \frac{\delta F^1}{\delta x^{k+1}} & \ldots & \frac{\delta F^1}{\delta x^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\delta F^{n-1}}{\delta x^{k+1}} & \ldots & \frac{\delta F^{n-1}}{\delta x^n} \end{vmatrix}(x_0)\neq 0 \tag{5.9}$$

Тогда касательная плоскость к S в точке x_0 задается системой уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\delta F^1}{\delta x^1}(x_0)\cdot(x^1-x_0^1)+\ldots+\frac{\delta F^1}{\delta x^n}(x_0)(x^n-x_0^n)=0 \\ \vdots \\ \frac{\delta F^{n-k}}{\delta x^1}(x_0)\cdot(x^1-x_0^1)+\ldots+\frac{\delta F^{n-k}}{\delta x^n}(x_0)(x^n-x_0^n)=0 \end{cases},$$

или кратко:

$$F'(x_0)\cdot(x-x_0)=0.$$

Доказательство. Обозначим $(x^1,\ldots,x^k)=u,\ (x^{k+1},\ldots,x^n)=v,$

$$F=\begin{pmatrix} F^1 \\ \vdots \\ F^{n-k}\end{pmatrix}.$$

Тогда условия утверждения запишем в виде:

$$F(u,v)=0,\quad \left|F'_v(u_0,v_0)\right|\neq 0.$$

Тогда по теореме о неявной функции система 5.9 эквивалентна системе

$$\begin{cases} u=u \\ v=f(u)\end{cases}.$$

Тогда касательная плоскость задается:

$$\text{роль } t=\begin{pmatrix} t^1 \\ \vdots \\ t^k\end{pmatrix} \text{ играет } u=\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^k\end{pmatrix}.$$

Тогда систему можно записать в виде:

$$\begin{cases} x^1=t^1 \\ \vdots \\ x^k=t^k \\ x^{k+1}=f^1(t^1,\ldots,t^k) \\ \vdots \\ x^n=f^{n-k}(t^1,\ldots,t^k)\end{cases},$$

$$t_0 = (t_0^k, \ldots, t_0^k) = (x_0^1, \ldots, x_0^k).$$

$$x'(t_0) = \begin{pmatrix} \frac{\delta x^1}{\delta t^1} & \cdots & \frac{\delta x^1}{\delta t^k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\delta x^k}{\delta t^1} & \cdots & \frac{\delta x^k}{\delta t^k} \\ \frac{\delta f^1}{\delta t^1} & \cdots & \frac{\delta f^1}{\delta t^k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\delta f^{n-k}}{\delta t^1} & \cdots & \frac{\delta f^{n-k}}{\delta t^k} \end{pmatrix} (t_0),$$

$$x = x_0 + x'(t_0) \cdot t.$$

$$\begin{cases} x^1 = x_0^1 + 1 \cdot t^1 \\ \vdots \\ x^k = x_0^k + 1 \cdot t^k \\ x^{k+1} = x_0^{k+1} + \frac{\delta f^1}{\delta t^1}(t_0) \cdot t^1 + \ldots + \frac{\delta f^1}{\delta t^k}(x_0) \cdot t^k \\ \vdots \\ x^n = x_0^n + \frac{\delta f^{n-k}}{\delta t^1}(t_0) \cdot t^1 + \ldots + \frac{\delta f^{n-k}}{\delta t^k}(t_0) \cdot t^k \end{cases} \tag{5.10}$$

Из 5.10 следует, что:

$$\begin{aligned} t^1 &= x^1 - x_0^1, \\ t^2 &= x^2 - x_0^2, \\ &\vdots \\ t^k &= x^k - x_0^k. \end{aligned}$$

Из теоремы 7:

$$f'(u_0) = -\left[F_v'(u_0, v_0)\right]^{-1} \cdot F_u'(u_0, v_0).$$

Преобразуем 5.10:

$$\begin{cases} \left.\begin{matrix} x^1 - x_0^1 = t^1 \\ \vdots \\ x^k - x_0^k = t^k \end{matrix}\right\} u - u_0 = u - u_0 \\ x^{k+1} - x_0^{k+1} = \frac{\delta f^1}{\delta t^1}(t_0) \cdot (x^1 - x_0^1) + \ldots + \frac{\delta f^1}{\delta t^k}(t_0) \cdot (x^k - x_0^k) \\ \vdots \\ x^n - x_0^n = \frac{\delta f^{n-k}}{\delta t^1}(t_0) \cdot (x^1 - x_0^1) + \ldots + \frac{\delta f^{n-k}}{\delta t^k}(t_0) \cdot (x^k - x_0^k) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u - u_0 = u - u_0 \\ v - v_0 = f'(u_0) \cdot (u - u_0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u - u_0 = u - u_0 \\ v - v_0 = \underbrace{-\left[F'_v(u_0, v_0)\right]^{-1} \cdot F'_u(u_0, v_0) \cdot (u - u_0)}_{f'(u_0)} \end{cases} \Bigg| \cdot F'_v(u_0, v_0)$$

$\Rightarrow \left[F'_v(u_0, v_0)\right](v - v_0) + F'_u(u_0, v_0) \cdot (u - u_0) = 0.$ □

Примечание. Итак, мы вывели, что если поверхность задана системой уравнений

$$\begin{cases} F^1(x^1, \ldots, x^n) = 0 \\ \vdots \\ F^{n-k}(x^1, \ldots, x^n) = 0 \end{cases} \quad \text{или } F(x) = 0,$$

$$F = \begin{pmatrix} F^1(x) \\ \vdots \\ F^{n-k}(x) \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} x = (x^1, \ldots, x^n) \\ x_0 = (x_0^1, \ldots, x_0^n) \end{matrix} .$$

Тогда уравнение касательной плоскости кратко записывается:

$$F'_x(x_0) \cdot (x - x_0) = 0.$$

Обозначим $x - x_0 = \xi$, то есть:

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \vdots \\ \xi^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' - x'_0 \\ \vdots \\ x^n - x_0^n \end{pmatrix}.$$

Таким образом получаем, что уравнение касательного пространства (плоскости) имеет вид:

$$F'_x(x_0) \cdot \xi = 0.$$

Таким образом касательнаое пространство (плоскость) к поверхности, заданной уравнением $F(x) = 0$, в точке x_0 состоит из векторов ξ, удовлетворяющих уравнению:

$$F'_x(x_0) \cdot \xi = 0 \tag{5.11}$$

Лекция 5: Продолжение

от 22 сен 10:29

Теорема 11 (О структуре касательного пространства)**.** Пусть S – k-мерная поверхность в $\mathbb{R}^n$, $x_0 \in S$. Тогда касательное пространство TS_{x_0} в точке x_0 состоит из направляющих векторов касательных к гладким кривым на поверхности S, проходящих через точку x_0.

Доказательство. Пусть $x = x(t)$ – гладкая кривая в $\mathbb{R}^n$, то есть

$$\begin{cases} x^1 = x^1(t) \\ \vdots \\ x^n = x^n(t) \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$$

$x_0 = x(t_0)$. Касательный вектор в точке x_0 к кривой имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \frac{dx^1}{dt}(t_0) \\ \vdots \\ \frac{dx^n}{dt}(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^{1'}(t_0) \\ \vdots \\ x^{n'}(t_0) \end{pmatrix}.$$

1. Пусть S – k-мерная поверхность, задана системой уравнений $F(x) = 0$ и пусть $x = x(t)$ – гладкая кривая на S. Покажем, что вектор $x'(t_0) = \begin{pmatrix} \frac{dx^1}{dt}(t_0) \\ \vdots \\ \frac{dx^n}{dt}(t_0) \end{pmatrix}$: $x'(t_0) \in TS_{x_0}$, $x_0 = x(t_0)$, то есть покажем, что $x'(t_0)$ удовлетворяет уравнению $F'_x(t_0) \cdot \xi = 0$.

   Так как кривая $x = x(t)$ лежит на S, то $F\big(x(t)\big) = 0$ – верно. Продифференцируем $F\big(x(t)\big) = 0$ по t в точке x_0:

   $$F'_x(x_0) \cdot x'(t_0) = 0,$$

   это и есть уравнение касательного пространства, то есть $x'(t_0)$ удовлетворяет уравнению касательного пространства $F'_x(x_0) \cdot \xi = 0$.

2. Пусть $\xi = (\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^n) \in TS_{x_0}$, то есть ξ удовлетворяет уравнению $F'_x(x_0) \cdot \xi = 0$

   Покажем, что $\exists$ гладкая кривая l на поверхности S:

   - $x_0 \in l$
   - ξ является направляющим вектором касательной к l в точке x_0

   Поверхность S задана системой уравнений:

   $$\begin{cases} F^1(x) = 0 \\ \vdots \\ F^{n-k}(x) = 0 \end{cases} \tag{5.12}$$

   Пусть

   $$\begin{vmatrix} \frac{\delta F^1}{\delta x^{k+1}} & \cdots & \frac{\delta F^1}{\delta x^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\delta F^{n-k}}{\delta x^{k+1}} & \cdots & \frac{\delta F^{n-k}}{\delta x^n} \end{vmatrix} (x_0) \neq 0.$$

По теореме о неявной функции, система 5.12 эквивалентна системе:

$$\begin{cases} x^{k+1} = f^1(x^1, \dots, x^k) \\ \vdots \\ x^n = f^{n-k}(x^1, \dots, x^k) \end{cases} \tag{5.13}$$

Обозначим $u = (x^1, \dots, x^k),\ v = (x^{k+1}, \dots, x^n)$, тогда 5.13 имеет вид:

$$v = f(u).$$

Тогда по утверждению касательное пространство задается уравнениями:

$$\begin{cases} x^{k+1} = x_0^{k+1} + \frac{\delta f^1}{\delta x^1}(x_0) \cdot (x^1 - x_0^1) + \ldots + \frac{\delta f^1}{\delta x^k}(x_0) \cdot (x^k - x_0^k) \\ \vdots \\ x^n = x_0^n + \frac{\delta f^{n-k}}{\delta x^1}(x_0) \cdot (x^1 - x_0^1) + \ldots + \frac{\delta f^{n-k}}{\delta x^k}(x_0) \cdot (x^k - x_0^k) \end{cases} \tag{5.14}$$

Пусть

$$\eta = \begin{pmatrix} \eta' \\ \vdots \\ \eta^k \\ \eta^{k+1} \\ \vdots \\ \eta^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 - x_0^1 \\ \vdots \\ x^k - x_0^k \\ x^{k+1} - x_0^{k+1} \\ \vdots \\ x^n - x_0^n \end{pmatrix}.$$

Тогда система 5.14 примет вид:

$$\begin{cases} \eta^{k+1} = \frac{\delta f^1}{\delta x^1}(x_0) \cdot \eta^1 + \ldots + \frac{\delta f^1}{\delta x^k}(x_0) \cdot \eta^k \\ \vdots \\ \eta^n = \frac{\delta f^{n-k}}{\delta x^1}(x_0) \cdot \eta^1 + \ldots + \frac{\delta f^{n-k}}{\delta x^k}(x_0) \cdot \eta^k \end{cases} \tag{5.15}$$

Таким образом, если вектор $\xi \in TS_{x_0}$, то он полностью определяется своими первыми k координатами, а остальные можно волучить с помощью системы 5.15.

Построим кривую в $\mathbb{R}^n$, то есть зададим ее уравнением $x = x(t)$:

$$l : \begin{cases} x^1 = x_0^1 + \xi^1 t \\ \vdots \\ x^k = x_0^k + \xi^k t \\ \left.\begin{array}{l} x^{k+1} = f^1(x_0^1 + \xi^1 t, \dots, x_0^k + \xi^k t) \\ \vdots \\ x^n = f^{n-k}(x_0^1 + \xi^1 t, \dots, x_0^k + \xi^k t) \end{array}\right\} v = f(u) \end{cases} \tag{5.16}$$

Пусть точка x_0 соответствует параметру $t = 0$:

$$x(0) = \begin{cases} x^1 = x_0^1 \\ \vdots \\ x^k = x_0^k \\ x^{k+1} = f^1(x_0^1, \dots, x_0^k) \\ \vdots \\ x^n = f^{n-k}(x_0^1, \dots, x_0^k) \end{cases},$$

то есть кривая проходит через точку x_0.

Далее, функция f удовлетворяет условию $v = f(u) \Leftrightarrow F(u, v) = 0$. Тогда $F(u, f(u)) = 0 \Rightarrow l$, заданная системой 5.16, $l \subset S$.

$$(5.16)'_t : \; x'_t(0) = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \vdots \\ \xi^k \\ \frac{\delta f^1}{\delta x^1}(x_0) \cdot \xi^1 + \ldots + \frac{\delta f^1}{\delta x^k}(x_0) \cdot \xi^k \\ \vdots \\ \frac{\delta f^{n-k}}{\delta x^1}(x_0) \cdot \xi^1 + \ldots + \frac{\delta f^{n-k}}{\delta x^k}(x_0) \cdot \xi^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \vdots \\ \xi^k \\ \xi^{k+1} \\ \vdots \\ \xi^n \end{pmatrix}.$$

Таким образом построили гладкий путь, лежащий на поверхности S, проходящий через точку $x_0 \in S$, вектор $x'(t_0)$ – его касательный вектор $\in TS_{x_0}$.

□

5.8 Условный экстремум функции многих переменных

Задача. Дана функция $u = f(x^1, \dots, x^n)$ и дана поверхность, заданная уравнениями:

$$\begin{cases} F^1(x^1, \dots, x^n) = 0 \\ \vdots \\ F^m(x^1, \dots, x^n) = 0 \end{cases} \tag{5.17}$$

Нужно найти точку $x_0 = (x_0^1, \dots, x_0^n)$, в которой:

$$f(x_0^1, \dots, x_0^n) = \max_{(\min)} f(x^1, \dots, x^n),$$

где max (min) берется по всем точкам $(x_0^1, \dots, x_0^n)$, удовлетворяющих уравнениям 5.17.

Задача (Геометрическая формулировка). Пусть система 5.17 задает в пространстве $\mathbb{R}^n$ m-мерную поверхность S. Найти точку $x_0 \in S$:

$\exists U_x(x_0) = U(x_0) \cap S: \ \forall x \in U_s(x_0)$:

$$\underset{x_0-\max}{f(x) \leqslant f(x_0)} \text{ (или } \underset{x_0-\min}{f(x) \geqslant f(x_0)})$$

Определение 14 (Линия уровня (c-уровень)). Пусть $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ – область. *Линией уровня (c-уровнем)* функции f называется множество

$$N_c = \{x \in D \mid f(x) = c\}.$$

Лемма 1. Если x_0 – точка условного локального экстремума для функции f и x_0 не является критической для функции f (то есть $df(x_0) \neq 0$), то касательное пространство $TS_{x_0} \subset TN_{x_0}$, где

$$N_{x_0} = \{x \in D \mid f(x) = f(x_0)\},$$

– поверхность уровня, проходящая через x_0.

Доказательство. Пусть $\xi \in TS_{x_0}$. Пусть $x = x(t)$ – гладкая кривая на $S: \ x(0) = x_0, \ x'(0) = \xi$ (по теореме 11).

Так как точка x_0 – условный экстремум для функции f, то точка $t = 0$ есть локальный экстремум для функции $f\big(x(t)\big)$ (по теореме Ферма, потом нужно добавить ссылку),

$$\Big[f\big(x(t)\big)\Big]'_t(0) = 0 \Leftrightarrow f'_x(x_0) \cdot x'_t(0) = 0 \tag{5.18}$$

Касательное пространство к N_{x_0} в точке x_0 имеет уравнение:

$$f'_x(x_0) \cdot \xi = 0 \tag{5.19}$$

Заметим, что 5.18 и 5.19 – одно и то же уравнение, то есть

$$x'_t(0) = \xi \Rightarrow x'_t(0) \in TN_{x_0}.$$

□

Теорема 12 (Необходимое условие условного локального экстремума). Пусть система уровнений

$$\begin{cases} F^1(x^1, \ldots, x^n) = 0 \\ \vdots \\ F^{n-k}(x^1, \ldots, x^n) = 0 \end{cases} \tag{5.20}$$

задает $(n-k)$-мерную гладкую поверхность S в $D \subset \mathbb{R}^n$, D – область. Функция $f: D \to \mathbb{R}$ – гладкая. Если $x_0 \in S$ является точкой условного локального экстремума для функции f, то существует такой набор чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-k} \in \mathbb{R}:$

$$grad f(x_0) = \sum_{i=1}^{n-k} \lambda_i \cdot grad F^i(x_0).$$

Доказательство. Касательное пространство TS_{x_0} задается системой уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\delta F^1}{\delta x^1}(x_0) \cdot \xi^1 + \ldots + \frac{\delta F^1}{\delta x^n}(x_0) \cdot \xi^n = 0 \\ \vdots \\ \frac{\delta F^{n-k}}{\delta x^1}(x_0) \cdot \xi^1 + \ldots + \frac{\delta F^{n-k}}{\delta x^n}(x_0) \cdot \xi^n = 0 \end{cases}, \tag{5.21}$$

но $\forall i = \overline{1, n-k}:$

$$\left\{ \frac{\delta F^i}{\delta x^1} \cdot (x_0), \ldots, \frac{\delta F^i}{\delta x^n} \cdot (x_0) \right\} = grad F^i(x_0).$$

Перепишем 5.21 в виде:

$$\begin{cases} \big(grad F^1(x_0), \xi\big) = 0 \\ \vdots \\ \big(grad F^{n-k}(x_0,), \xi\big) = 0 \end{cases} \tag{5.22}$$

Касательное пространство TN_{x_0} к $N_{x_0} = \{x \in D \mid f(x) = f(x_0)\}$ задается уравнением: $f'(x_0) \cdot \xi = 0$. Заметим, что:

$$f'(x_0) = grad f(x_0) = \left\{ \frac{\delta f(x_0)}{\delta x^1}, \ldots, \frac{\delta f(x_0)}{\delta x^n} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x_0) \cdot \xi = 0 \Leftrightarrow \big(grad f(x_0), \xi\big) = 0 \tag{5.23}$$

Таким образом из леммы 1 следует, что $\forall \xi$, удовлетворяющего системе уравнений 5.22, так же удовлетворяет уравнению 5.23, то есть из того, что $\forall i \in \overline{1, n-k}$

$$\xi \perp grad F^i(x_0) \Rightarrow \xi \perp grad f(x_0) \Rightarrow$$

$\Rightarrow \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-k} \in \mathbb{R}$:

$$grad f(x_0) = \sum_{i=1}^{n-k} \lambda_i \cdot grad F^i(x_0).$$

□

Метод Лагранжа

Задача. Пусть требуется найти условный экстремум функции $f : D \to \mathbb{R},\ D$ – область в $\mathbb{R}^n$, на поверхности S, заданной системой уравнений:

$$\begin{cases} F^1(x^1, \dots, x^n) = 0 \\ \vdots \\ F^k(x^1, \dots, x^n) = 0 \end{cases}.$$

Составим функцию Лагранжа:

$$L(x, \lambda) = L(x^1, \dots, x^n, \lambda^1, \dots, \lambda^k) = \\ = f(x^1, \dots, x^n) + \sum_{i=1}^{k} \lambda^i \cdot F^i(x^1, \dots, x^n),$$

$\lambda = (\lambda^1, \dots, \lambda^k),\ \lambda^i \in \mathbb{R}$ – коэффициент, в общем случае пока неизвестен.

Необходимое условие локального экстремума для функции L :

$$\begin{cases} \left.\begin{aligned} &\frac{\delta L}{\delta x^1} = \frac{\delta f}{\delta x^1} + \sum_{i=1}^k \lambda^i \cdot \frac{\delta F^i}{\delta x^1} = 0 \\ &\vdots \\ &\frac{\delta L}{\delta x^n} = \frac{\delta f}{\delta x^n} + \sum_{i=1}^k \lambda^i \cdot \frac{\delta F^i}{\delta x^n} = 0 \end{aligned}\right\} \text{необходимое условие условного экстремума функции } f \\ \left.\begin{aligned} &\frac{\delta L}{\delta \lambda^1} = F^1(x^1, \dots, x^n) = 0 \\ &\vdots \\ &\frac{\delta L}{\delta \lambda^k} = F^k(x^1, \dots, x^n) = 0 \end{aligned}\right\} \text{поверхность } S \end{cases} \tag{5.24}$$

Определение 15 (Условный экстремум)**.** Пусть $f : D \to \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}^n$ – область, S – поверхность в D, *условным экстремумом* функции f называется экстремум функции $f\big|_S$.

Лекция 6: Продолжение

от 28 сен 8:48

Достаточное условие условного локального экстремума

Примечание. Пусть $f : D \to \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}^n$ – область, $f \in C^{(2)}(D, \mathbb{R}),\ S$ – $(n-k)$-мерная поверхность в D, заданная системой уравнений:

$$\begin{cases} F^1(x^1, \dots, x^n) = 0 \\ \vdots \\ F^k(x^1, \dots, x^n) = 0 \end{cases}.$$

Функция Лагранжа:

$$L(x,\lambda) = f(x^1,\dots,x^n) + \sum_{i=0}^{k} \lambda_i \cdot F^i(x^1,\dots,x^n).$$

Здесь $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ выбираются таким образом, чтобы было выполнено необходимое условие условного экстремума в точке x_0 (5.24).

$$\begin{cases} \frac{\delta L}{\delta x^i} = 0 \\ \vdots \\ \frac{\delta L}{\delta \lambda_j} = 0 \end{cases} \Rightarrow x_0, \quad \lambda_1,\dots,\lambda_k.$$

Теорема 13 (Достаточное условие условного экстремума)**.** Если при введенных выше условиях квадратичная форма

$$Q(\xi) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\delta^2 L}{\delta x^i \delta x^j}(x_0) \cdot \xi^i \xi^j, \ \big(\xi = (\xi^1,\dots,\xi^n)\big)$$

1. Знакоопределена на TS_{x_0}:
   - если Q знакоположительна, то точка x_0 – точка условного локального min
   - если Q знакоотрицательна, то точка x_0 – точка условного локального max
2. Если Q может принимать значения разных знаков, то в точке x_0 условного экстремума не наблюдается.

Доказательство. Заметим, что $f\big|_S$ и $L\big|_S$ совпадают. В самом деле, если $x \in S$, то:

$$L(x,\lambda) = f(\underset{(x^1,\dots,x^n)}{\underset{\parallel}{x}}) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \cdot \underset{0}{\underset{\parallel}{F^i(x)}} = f(x).$$

Поэтому покажем, что условие знакопостоянства Q является достаточным для экстремума функции $L\big|_s$.

Имеем, что

$$\begin{cases} \frac{\delta L}{\delta x^1}(x_0) = 0 \\ \vdots \\ \frac{\delta L}{\delta x^n}(x_0) = 0 \end{cases}.$$

По формуле Тейлора:

$$L\big|_S(x) - L(x_0) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\delta^2 L(x_0)}{\delta x^i \delta x^j} \cdot (x^i - x_0^i)(x^j - x_0^j) + o\big(\|x - x_0\|^2\big) \quad (5.25)$$

Так как $S - m = (n-k)$-мерная поверхность, то существует гладкое отображение $x(t) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n : \; x = x(t) \subset S \; \forall t \in \mathbb{R}^m, \; x(0) = x_0$. Отображение $x(t)$ биективно отображает $\mathbb{R}^m$ на $U_S(x_0) = U(x_0) \cap S$.

Если $x \in S$, то условие дифференцируемости $x(t)$:

$$x - x_0 = x(\underset{\in \mathbb{R}^m}{t}) - x(0) = x'(0) \cdot t + o\big(\|t\|\big)$$

или

$$\begin{cases} x^1 - x_0^1 = \frac{\delta x^1}{\delta t^1}(0) \cdot t^1 + \ldots + \frac{\delta x^1}{\delta t^m}(0) \cdot t^m + o\big(\|t\|\big) \\ \vdots \\ x^n - x_0^n = \frac{\delta x^n}{\delta t^1}(0) \cdot t^1 + \ldots + \frac{\delta x^n}{\delta t^m}(0) \cdot t^m + o\big(\|t\|\big) \end{cases}$$

или кратко

$$\begin{cases} x^1 - x_0^1 = \sum_{i=1}^m \frac{\delta x^1}{\delta t^i}(0) \cdot t^i + o\big(\|t\|\big) \\ \vdots \\ x^n - x_0^n = \sum_{i=1}^m \frac{\delta x^n}{\delta t^i}(0) \cdot t^i + o\big(\|t\|\big) \end{cases} \tag{5.26}$$

Подставим 5.26 в 5.25:

$$L\big|_S(x) - L(x_0) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i,j=1}^n \frac{\delta^2 L(x_0)}{\delta x^i \delta x^j} \cdot \underbrace{\left(\sum_{\alpha=1}^m \frac{\delta x^i}{\delta t^\alpha}(0) \cdot t^\alpha + o\big(\|t\|\big)\right)}_{x^i - x_0^i} \cdot$$

$$\cdot \underbrace{\left(\sum_{\beta=1}^m \frac{\delta x^j}{\delta t^\beta}(0) \cdot t^\beta + o\big(\|t\|\big)\right)}_{x^j - x_0^j} + o\big(\|x - x_0\|^2\big) =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\delta^2 L(x_0)}{\delta x^i \delta x^j} \cdot \Bigg[\left(\sum_{\alpha=1}^m \frac{\delta x^i}{\delta t^\alpha}(0) \cdot t^\alpha\right) \cdot \left(\sum_{\beta=1}^m \frac{\delta x^i}{\delta t^\beta}(0) \cdot t^\beta\right) +$$

$$+ \left(\sum_{\alpha=1}^m \frac{\delta x^i}{\delta t^\alpha}(0) \cdot t^\alpha\right) \cdot o\big(\|t\|\big) + \left(\sum_{\beta=1}^m \frac{\delta x^i}{\delta t^\beta}(0) \cdot t^\beta\right) \cdot$$

$$\cdot o\big(\|t\|\big) + o\big(\|t\|\big)\Bigg] + o\big(\|x - x_0\|^2\big) \overset{(\heartsuit)}{=} \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\delta^2 L(x_0)}{\delta x^i \delta x^j} \cdot$$

$$\cdot \sum_{\alpha,\beta=1}^m \frac{\delta x^i}{\delta t^\alpha} \cdot \frac{x^i}{\delta t^\beta} \cdot t^\alpha \cdot t^\beta + o\big(\|t\|^2\big) = \frac{\|t\|^2}{2} \cdot \sum_{i,j=1}^n \frac{\delta^2 L(x_0)}{\delta x^i \delta x^j} \cdot$$

$$\cdot \underbrace{\sum_{\alpha,\beta=1}^m \frac{\delta x^i}{\delta t^\alpha} \cdot \frac{\delta x^j}{\delta t^\beta} \cdot \frac{t^\alpha}{\|t\|} \cdot \frac{t^\beta}{\|t\|}}_{\xi^i, \xi^j \text{ – координаты вектора } \xi \in TS_{x_0}} + o\big(\|t\|^2\big) = \frac{\|t\|^2}{2} Q(\xi) + o\big(\|t\|^2\big).$$

Таким образом получаем, что

$$L\big|_S(x) - L(x_0) = \frac{\|t\|^2}{2} \cdot Q(\xi) + o\big(\|t\|^2\big),\ \xi \in TS_{x_0}.$$

Тогда, если $Q > 0$, то

$$L\big|_S(x) - L(x_0) > 0 \Rightarrow x_0 - \text{ min для } L\big|_S(x) \Rightarrow x_0 - \text{ min для } f\big|_S.$$

Если $Q < 0$, то

$$L\big|_S(x) - L(x_0) < 0 \Rightarrow x_0 - \text{локальный max для } L\big|_S(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_0 - \text{локальный max для } f\big|_S \ (\forall x \in U_S(x_0))$$

Если Q – знакопеременна, то не для всех $x \in U_S(x_0)$ разность $L\big|_S(x) - L(x_0)$ имеет постоянный знак $\Rightarrow$ в этом случае в точке x_0 нет экстремума.

Докажем ($\heartsuit$), то есть покажем, что

$$o\big(\|t\|\big) \cdot \sum_{\alpha=1}^{m} \frac{\delta x^i}{\delta t^\alpha} \cdot t^\alpha = o\big(\|t\|^2\big)$$

и

$$o\big(\|x - x_0\|^2\big) = o\big(\|t\|^2\big),\ x \in S.$$

В самом деле,

$$\left|\sum_{\alpha=1}^{m} \frac{\delta x^i}{\delta t^\alpha}(0) \cdot t^\alpha\right| \leqslant \sum_{\alpha=1}^{m} \left|\frac{\delta x^i}{\delta t^\alpha}(0)\right| \cdot \left|t^\alpha\right| \leqslant \|t\| \cdot \underbrace{\sum_{\alpha=1}^{m} \left|\frac{\delta x^i}{\delta t^\alpha}(0)\right|}_{\substack{\| \\ const>0}} = \underbrace{\overset{>0}{A} \cdot \|t\|}_{\substack{\| \\ O(\|t\|)}}.$$

Таким образом,

$$o\big(\|t\|\big) \cdot \left|\sum_{\alpha=1}^{m} \frac{\delta x^i(0)}{\delta t^\alpha} \cdot t^\alpha\right| \leqslant o\big(\|t\|\big) \cdot O\big(\|t\|\big) =$$

$$= \omega(t) \cdot \|t\| \cdot \gamma(t) \cdot \|t\| = \left| \begin{array}{c} \text{где } \omega(t) \to 0 \text{ при } t \to 0, \\ \gamma(t) - \text{ограниченная функция} \end{array} \right| =$$

$$= \underset{\substack{\| \\ \omega(t)\gamma(t)}}{\alpha(t)} \cdot \|t\|^2 = o\big(\|t\|^2\big),\ \begin{array}{l} \alpha(t) \to 0, \\ t \to 0 \end{array}.$$

Далее, если $x \in S$, то

$$\|x - x_0\|^2 = \left\| \begin{pmatrix} x^1 - x_0^1 \\ \vdots \\ x^n - x_0^n \end{pmatrix} \right\|^2 \overset{5.26}{=} \left\| \begin{pmatrix} \sum_{\alpha=1}^m \frac{\delta x^1}{\delta t^\alpha} \cdot t^\alpha + o\big(\|t\|\big) \\ \vdots \\ \sum_{\alpha=1}^m \frac{\delta x^n}{\delta t^\alpha} \cdot t^\alpha + o\big(\|t\|\big) \end{pmatrix} \right\|^2 =$$

$$= \left(\sum_{\alpha=1}^m \frac{\delta x^1}{\delta t^\alpha} \cdot t^\alpha + o\big(\|t\|\big) \right)^2 + \ldots + \left(\sum_{\alpha=1}^m \frac{\delta x^n}{\delta t^\alpha} + o\big(\|t\|\big) \right)^2 =$$

$$= \left(\sum_{\alpha=1}^m \frac{\delta x^1}{\delta t^\alpha} \cdot t^\alpha \right)^2 + \ldots + \left(\sum_{\alpha=1}^m \frac{\delta x^n}{\delta t^\alpha} \right)^2 + o\big(\|t\|^2\big) \leqslant$$

$$\leqslant \left(\max_\alpha \frac{\delta x^1}{\delta t^\alpha} \right)^2 \cdot \left(\sum_{\alpha=1}^m t^\alpha \right)^2 + \ldots + \left(\max_\alpha \frac{\delta x^n}{\delta t^\alpha} \right)^2 \cdot \left(\sum_{\alpha=1}^m t^\alpha \right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant \|t\|^2 \cdot \left(\left(\max_\alpha \frac{\delta x^1}{\delta t^\alpha} \right)^2 + \left(\max \frac{\delta x^n}{\delta t^\alpha} \right)^2 \right) \leqslant$$

$$\leqslant \|t\|^2 \cdot \underbrace{\left(\max_i \left(\max_\alpha \frac{\delta x^i}{\delta t^\alpha}(0) \right) \right)^2 \cdot n}_{\substack{\| \\ const>0}} = B\|t\|^2 = o\big(\|t\|^2\big).$$

Поэтому

$$o\big(\|x - x_0\|^2\big) =$$
$$= \beta(x - x_0) \cdot \|x - x_0\|^2 = \beta(t) \cdot \|x - x_0\|^2 \leqslant \beta(t) \cdot B \cdot \|t\|^2 =$$
$$= o\big(\|t\|^2\big)$$

$$\big(\beta(x - x_0) \to 0 \text{ при } x \to x_0 \Leftrightarrow t \to 0\big)$$

$\square$

Глава 6

Теория рядов

6.1 Введение

Определение 16 (Ряд). *Рядом* называется выражение:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots, \quad a_i \in \mathbb{R}.$$

Числа a_i называются *членами ряда*, a_n – *n-ым членом ряда*.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{6.1}$$

Рассмотрим числа:

$$\begin{aligned}
&A_1 = a_1, \\
&A_2 = a_1 + a_2, \\
&\vdots \\
&A_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n.
\end{aligned}$$

Числа $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называются *частичными суммами ряда* 6.1.

Определение 17 (Сходящийся ряд). Говорят, что ряд 6.1 *сходится*, если существует конечный предел частичных сумм, то есть

$$\exists \lim_{n \to \infty} A_n = A.$$

Тогда сумма бесконечного ряда 6.1 полагается равной

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Пример.

$$10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \ldots + \frac{1}{10^n} + \ldots = 10 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{10^k}$$

$$A_n = \frac{1}{10^0} + \frac{1}{10^1} + \ldots + \frac{1}{10^n} = \frac{1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1} = \\ = \frac{\frac{1}{10^n} - 1}{\frac{1}{10} - 1} = \frac{1 - \frac{1}{10^n}}{\frac{9}{10}} = \frac{10}{9} \cdot \left(1 - \frac{1}{10^n}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} \frac{10}{9}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right) = \frac{10}{9}$$

6.1.1 Гармонический ряд

Определение 18 (Среднее гармоническое)**.** Число c называется *средним гармоническим* чисел a и b $(a, b \neq 0)$, если

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right).$$

Определение 19 (Гармонический ряд)**.** Ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \tag{6.2}$$

называется *гармоническим.*

Примечание. Докажем, что ряд 6.2 расходится.

Если $\exists \varepsilon > 0\ \forall N\ \exists n > N\ \exists p > 0$

$$|a_{n+1} + \ldots + a_{n+p}| \geqslant \varepsilon$$

$$\left|\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+p}\right| \geqslant \left|\frac{1}{n+p} + \frac{1}{n+p} + \ldots + \frac{1}{n+p}\right| = \\ = \frac{p}{n+p} \underset{n=p}{=} \frac{1}{2},$$

то есть для $\forall N$: $\varepsilon = \frac{1}{2}$, $p = n$, $n = N + 1 \Rightarrow$ по критерию Коши, гармонический ряд 6.2 расходится.

6.1.2 Основные свойства сходящихся рядов

Теорема 14 (Критерий Коши)**.** Ряд 6.1 сходится тогда и только тогда, когда $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}:\ \forall n > N,\ \forall p > 0$

$$|a_{n+1} + \ldots + a_{n+p}| < \varepsilon.$$

Доказательство. Ряд 6.1 сходится $\underset{\text{по определению}}{\Leftrightarrow} \exists \lim\limits_{n\to\infty} A_n \Leftrightarrow A_n$ – фундаментальная последовательность: $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}:\ \forall n > N$ и $\forall p > 0$

$$|A_n - A_{n+p}| < \varepsilon, \quad \left(\begin{array}{c}\text{критерий Коши сходимости}\\ \text{последовательности}\end{array}\right).$$

Имеем

$$\begin{aligned}&|A_n - A_{n+p}| = \\ &\quad = \big|a_1 + a_2 + \ldots + a_n - (a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots + a_{n+p})\big| = \\ &\qquad\qquad = |a_{n+1} + \ldots + a_{n+p}| < \varepsilon.\end{aligned}$$

□

Замечание. Со всякой последовательностью x_n можно связать ряд, частичными суммами которого являются члены этой последовательности. Пусть:

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots.$$

Тогда ряд

$$\underbrace{x_1}_{a_1} + \underbrace{(x_2 - x_1)}_{a_2} + \underbrace{(x_3 - x_2)}_{a_3} + \ldots + \underbrace{(x_n - x_{n-1})}_{a_n} + \ldots,$$

$$A_n = a_1 + \ldots + a_n = x_1 + (x_2 - x_1) + \ldots + (x_n - x_{n-1}) = x_n.$$

Теорема 15 (Необходимое условие сходимости ряда)**.** Если ряд 6.1 сходится, тогда:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Доказательство. Пусть ряд 6.1 сходится, тогда $\exists \lim\limits_{n\to\infty} A_n$:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} (A_n - A_{n-1}) = \\ = \lim_{n\to\infty} A_n - \lim_{n\to\infty} A_{n-1} &= 0\end{aligned}$$

□

Лекция 7: Продолжение

от 2 окт 10:32

Определение 20 (m-ый остатный ряд)**.** Пусть дан ряд 6.1. Ряд вида

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} a_n \tag{6.3}$$

называется *m-ым остатным ряда* 6.1.

Теорема 16 (Об остатке ряда)**.** Следующие условия эквивалентны:

1. Ряд 6.1 сходится.
2. Любой его остаток сходится.
3. Некоторый его остаток 6.3 сходится.

Доказательство.

- Докажем, что из 1. $\Rightarrow$ 2.

  Пусть ряд 6.1 сходится и его сумма равна A.

  Пусть $A_k^* = \sum_{n=m+1}^{m+k} a_n$ – k-тая частичная сумма ряда 6.3.

  Ряд 6.3 сходится, если $\exists \lim\limits_{k\to\infty} A_k^*$.

$$A_k^* = \underbrace{A_{m+k}}_{\substack{\text{частичная сумма}\\ \text{ряда } 6.1}} - A_m.$$

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} A_k^* &= \lim_{k\to\infty} (A_{m+k} - A_m) = \\ = \lim_{k\to\infty} A_{m+k} - \underset{\substack{\| \\ const=A_m}}{\lim_{k\to\infty} A_m} &= A - A_m. \end{aligned}$$

- Доказательство того, что из 2. $\Rightarrow$ 3. – очевидно.
- Докажем, что из 3. $\Rightarrow$ 1.

  Пусть ряд 6.3 – сходится.

  Тогда при $n > m$:

$$A_n = A_m + \overbrace{\underset{\substack{\| \\ \sum_{k=m+1}^{m+(n-m)} a_k}}{A_{n-m}^*}}^{\substack{m\text{-тая частичная}\\ \text{сумма ряда } 6.3}}$$

$$A_n = \underbrace{a_1 + a_2 + \ldots + a_m}_{A_m} + \overbrace{\underbrace{a_{m+1} + \ldots + a_n}_{A^*_{n-m}}}^{k \text{ штук, } k=n-m}.$$

Ряд 6.1 сходится $\underset{\text{по опр.}}{\Leftrightarrow} \exists \lim\limits_{n\to\infty} A_n$.

Рассмотрим:

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} (\underset{\substack{\parallel \\ const}}{A_m} + A^*_{n-m}) = \underset{\substack{\parallel \\ A_m = const}}{\lim_{n\to\infty} A_m} + \underbrace{\lim_{n\to\infty} A^*_{n-m}}_{\substack{\exists, \text{ так как ряд} \\ 6.3 \text{ сходится}}} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} A_n \Rightarrow$ 6.1 сходится.

□

Примечание. Обозначим α_m – сумма m-того остатка ряда = сумме ряда 6.3:

$$\alpha_m = \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n$$

(6.3 сходится в этом случае)

Следствие. Ряд 6.1 сходится $\Leftrightarrow \lim\limits_{m\to\infty} \alpha_m = 0$.

Доказательство. Самостоятельно. □

Определение 21 (Сумма рядов)**.** Пусть даны ряды

$$A \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad B \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Суммой рядов A, B называется ряд:

$$A + B \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n).$$

Теорема 17. Если ряды A, B сходятся, то:

1. $\forall a \in \mathbb{R}$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n$ – сходится и его сумма равна $\alpha \cdot A$, где $A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
2. Ряд $A + B$ сходится и его сумма равна $A^* + B^*$, где $A* = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $B* = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Доказательство. 1. Пусть ряд A сходится.

Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha \cdot a_n$:

$$A'_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha \cdot a_k,$$

$$\lim_{n\to\infty} A'_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \alpha \cdot a_k = \alpha \cdot \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \alpha \cdot A$$

2. Самостоятельно.

□

6.2 Сходимость положительных рядов

Определение 22 (Положительный ряд)**.** Ряд A называется *положительным*, если $\forall n \ a_n > 0$.

Теорема 18. Положительный ряд A сходится $\Leftrightarrow$ его частичные суммы ограничены, то есть $\exists M > 0 : \ \forall n \ A_n < M$.

Доказательство. Заметим, что последовательность частичных сумм A_n возрастает, то есть $\forall n \ A_{n+1} > A_n$.

По теореме Вейерштрасса, возрастающая последовательность A_n имеет предел $\Leftrightarrow$ она ограничена, то есть $\exists M > 0 : \ \forall n \ A_n < M$. □

Теорема 19 (1-ый признак сравнения)**.** Пусть даны ряды A, B, причем $a_n > 0, \ b_n > 0 \ \forall n$.

Если $\exists N \in \mathbb{N} : \ \forall n > N \ a_n \leqslant b_n$, то:

1. Из сходимости ряда $B \Rightarrow$ сходимость ряда A.
2. Из расходимости ряда $A \Rightarrow$ расходимость ряда B.

Доказательство.

1. Пусть ряд B – сходится $\Rightarrow$ по теореме 18 его частичные суммы ограничены $\Rightarrow$ по неравенству $a_n \leqslant b_n$ частичные суммы ряда A также ограничены $\Rightarrow$ по 18 ряд A сходится.
2. Аналогично.

□

Теорема 20 (2-ой признак сравнения)**.** Пусть даны ряды A, B, причем $a_n > 0, \ b_n > 0 \ \forall n$.

Если $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k, \ k \in [0; \infty]$, то:

1. При $k = \infty$ из сходимости $A \Rightarrow$ сходимость ряда B.

2. При $k = 0$ из сходимости ряда $B \Rightarrow$ сходимость ряда A.

3. При $0 < \underset{const \neq 0}{\underset{\parallel}{k}} < \infty$ ряды A и B ведут себя одинаково.

Доказательство. Переписать доказательство для несобственных интегралов, заменив слово "интеграл"на слово "ряд". $\square$

Теорема 21 (3-й признак сравнения)**.** Пусть даны ряды A, B, причем $a_n > 0,\ b_n > 0\ \forall n$.

Если $\exists N \in \mathbb{N} \cup \{0\}:\ \forall n > N\ \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n}$, то:

1. Из сходимости ряда $B \Rightarrow$ сходимость ряда A.

2. Из расходимости ряда $A \Rightarrow$ расходимость ряда B.

Доказательство. Можно считать, что $N = 0$. Тогда $\forall n > N$ имеем:

$$\frac{a_2}{a_1} \leqslant \frac{b_2}{b_1};\quad \frac{a_3}{a_2} \leqslant \frac{b_3}{b_2};\quad \frac{a_4}{a_3} \leqslant \frac{b_4}{b_3};\quad \ldots;\quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n}.$$

Перемножим левые и правые части:

$$\frac{a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot \ldots \cdot a_{n+1}}{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n} \leqslant \frac{b_2 \cdot b_3 \cdot b_4 \cdot \ldots \cdot b_{n+1}}{b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot \ldots \cdot b_n},$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_1} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n} \Rightarrow a_{n+1} \leqslant \frac{a_1}{b_1} \cdot b_{n+1} \text{ (по теореме 19).}$$

1. Если ряд B сходится $\Rightarrow$ сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_1}{b_1} \cdot b_{n+1} \Rightarrow$ сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1} \Rightarrow$ сходится A.

2. Аналогично.

$\square$

Теорема 22 (Интегральный признак Коши-Маклорена)**.** Пусть дан положительный ряд A.

Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет следующим условиям:

1. $f(x):\ [1; +\infty) \to \mathbb{R}$.

2. $f(x)$ – непрерывна.

3. $f(x)$ – монотонна.

4. $f(x) = a_n,\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Тогда ряд A и интеграл $\int_1^{\infty} f(x)dx$ ведут себя одинаково.

Доказательство. Ограничимся случаем, когда $f(x)$ монотонно убывает.

Рассмотрим функцию $\phi(x) = a_n$ при $n \leqslant x < n+1$ и $\psi(x) = a_{n+1}$ при $n \leqslant x < n+1$. Тогда $\forall x \in [1; +\infty)$:

$$\psi(x) \leqslant f(x) \leqslant \phi(x).$$

Отсюда

$$\int_1^N \psi(x)dx \leqslant \int_1^N f(x)dx \leqslant \int_1^N \phi(x)dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{\sum_{n=1}^N a_{n+1}}_{\substack{\text{частичная сумма} \\ \text{ряда } A}} \leqslant \int_1^N f(x)dx \leqslant \underbrace{\sum_{n=1}^N a_n}_{\substack{\text{частичная сумма} \\ \text{ряда } A}}$$

- Если интеграл сходится, то частичная сумма $\sum_{n=1}^N a_{n+1}$ ограничена $\Rightarrow$ ряд A сходится.
- Если интеграл расходится, то частичная сумма $\sum_{n=1}^N a_n$ непрерывна $\Rightarrow$ ряд A – расходится.
- Если ряд A сходится, то $\sum_{n=1}^N a_n$ – ограничена $\Rightarrow \int_1^N f(x)dx$ – ограничен $\Rightarrow \int_1^\infty f(x)dx$ – сходится.
- Если ряд A расходится $\Rightarrow$ частичная сумма $\sum_{n=1}^N a_{n+1}$ неограничена $\Rightarrow$ интеграл расходится.

$\square$

Пример. $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p}$.
Рассмотрим $f(x) = \frac{1}{x^p}$ на $[1; +\infty)$ – неограниченно монотонно $\searrow$,

$$f(n) = \frac{1}{n^p}.$$

$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p}$ ведет себя одинаково с интегралом $\int_1^\infty \frac{dx}{x^p}$ – сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leqslant 1 \Rightarrow$ ряд $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p}$ сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leqslant 1$.

Пример. $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n \cdot \ln n}$.
$f(x) = \frac{1}{x \ln x}$, $x \in [e; +\infty)$, $\nearrow$, непрерывна.

$$\int_e^\infty \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{b\to\infty} \int_e^b \frac{d(\ln x)}{\ln x} =$$

$$= \lim_{b\to\infty} \big(\ln(\ln x)\big)\Big|_e^b = \lim_{b\to\infty} \ln(\ln b) = \infty \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ ряд $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n \ln n}$ расходится (по интегралу Коши-Маклорена).

Теорема 23 (Радикальный признак Коши)**.** Пусть ряд A положительный и $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} = q$. Тогда:

1. При $q < 1$ ряд A сходится.
2. При $q > 1$ ряд A расходится.
3. При $q = 1$ может как сходиться, так и расходиться.

Доказательство.

1. Пусть $q < 1$. Возьмем число $r: \ q < r < 1$. Тогда $\exists N: \ \forall n > N$
$$\sqrt[n]{a_n} < r \Rightarrow a_n < r^n.$$
$0 < r < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} r^n$ – сходится $\Rightarrow$ по 1-му признаку сравнения сходится ряд A.

2. Пусть $q > 1$, тогда существует подпоследовательность $\sqrt[n_i]{a_{n_i}} \to q$ при $i \to \infty \Rightarrow a_{n_i} \to q^{n_i} > 1 \Rightarrow a_n \nrightarrow 0 \Rightarrow$ необходимое условие сходимости не выполняется $\Rightarrow$ ряд A расходится.

3. Рассмотрим ряды $\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}}_{\text{расходится}}$ и $\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}}_{\text{сходится}}$:
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = 1.$$

□

Теорема 24 (Признак Даламбера)**.** Пусть ряд A положительный и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = d$. Тогда:

1. При $d < 1$ ряд A сходится.
2. При $d > 1$ ряд A расходится.
3. При $d = 1$ может как сходиться, так и расходиться.

Доказательство.

1. Пусть $d < 1$. Возьмем $d < r < 1 \Rightarrow \exists N: \ \forall n > N \ \frac{a_{n+1}}{a_n} < r$,
$$b_1 = \frac{a_2}{a_1}; \quad b_2 = \frac{a_3}{a_2}; \quad b_3 = \frac{a_4}{a_3}; \quad \ldots; \quad b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}; \quad \ldots.$$

Можно считать, что $N = 0$, тогда $\forall n > N$:

$$\begin{array}{l} a_2 < r \cdot a_1 \\ a_3 < r \cdot a_2 < r^2 \cdot a_1 \\ a_4 < r \cdot a_3 < r^3 \cdot a_1 \\ \vdots \\ a_{n+1} < r^n \cdot a_1 \end{array}.$$

Так как $0 < r < 1$, то $\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cdot a_1$ сходится $\Rightarrow$ сходится ряд A по 1 признаку сравнения.

2. Самостоятельно.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, $\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1.$$

□

Лекция 8: Продолжение

от 5 окт 8:50

Теорема 25 (Признак Раббе)**.** Пусть ряд A – положительный. Если $\lim\limits_{n\to\infty} n \cdot \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = r$, то:

1. При $r > 1$ ряд A сходится.
2. При $r < 1$ ряд A расходится.
3. При $r = 1$ ряд A может как сходиться, так и расходиться.

Доказательство.

1. Пусть $r > 1$. Возьмем p и q: $1 < p < q < r$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} n \cdot \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = r$, то $\exists N_1 :\ \forall n > N_1\ n \cdot \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) > q$, то есть:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} > 1 + \frac{q}{n}. \tag{6.4}$$

Далее, рассмотрим:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(1+\frac{1}{n})^p - 1}{\frac{1}{n}} \overset{\substack{\text{формула} \\ \text{Тейлора}}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{p}{n} + o(\frac{1}{n}) - 1}{\frac{1}{n}} = p < q \Rightarrow$$

$\Rightarrow \exists N_2 : \ \forall n > N_2$:

$$\frac{(1+\frac{1}{n})^p - 1}{\frac{1}{n}} < q \Rightarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^p < 1 + \frac{q}{n}. \tag{6.5}$$

Сравниваем неравенства 6.4 и 6.5, получим, что при $n > \max(N_1, N_2)$:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^p < 1 + \frac{q}{n} < \frac{a_n}{a_{n+1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a_n}{a_{n+1}} > \left(1+\frac{1}{n}^p\right) = \frac{(n+1)^p}{n^p} = \frac{\frac{1}{n^p}}{\frac{1}{(n+1)^p}}.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ сходится при $p > 1$:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} > \frac{\frac{1}{n^p}}{\frac{1}{(n+1)^p}} \Rightarrow a_n \cdot \frac{1}{(n+1)^p} > \frac{1}{n^p} \cdot a_{n+1} \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{\frac{1}{(n+1)^p}}{\frac{1}{n^p}}.$$

По 3-му признаку сравнения, ряд A сходится при $p > 1 \Rightarrow$ при $r > 1$.

2. Пусть $r < 1$. Тогда $\exists N : \ \forall n > N$:

$$n \cdot \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) < 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a_n}{a_{n+1}} < 1 + \frac{1}{n} = \frac{n+1}{n} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} > \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ – гармонический, расходящийся $\Rightarrow$ по 3-му признаку сравнения ряд A расходится.

3. Упражнение: привести 2 примера рядов (сходящийся, расходящийся), но $r = 1$ в обоих случаях.

$\square$

Теорема 26 (Признак Кумера)**.** Пусть дан ряд A – положительный. Пусть числа $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots : \ \forall n > N \ c_n > 0$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ – расходится. Если

$$\lim_{n\to\infty} \left(c_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1}\right) = k,$$

то

1. При $k > 0$ ряд A сходится.

2. При $k < 0$ ряд A расходится.

3. При $k = 0$ может как сходиться, так и расходиться.

Доказательство.

1. Пусть $k > 0$. Возьмем $0 < p < k$. Тогда $\exists N : \ \forall n > N$:

$$c_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1} > p \Rightarrow$$
$$\Rightarrow c_n \cdot a_n - c_{n+1} \cdot a_{n+1} > p \cdot a_{n+1} > 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow c_n \cdot a_n > c_{n+1} \cdot a_{n+1}, \quad \forall n > N$$

Тогда последовательность $\{c_n \cdot a_n\}$ убывает и ограничена снизу $\Rightarrow$ последовательность сходится.

Пусть $c = \lim\limits_{n\to\infty} c_n \cdot a_n$. Рассмотрим ряд:

$$\sum_{m=1}^{n} (c_m \cdot a_m - c_{m+1} \cdot a_{m+1}) =$$
$$= (c_1 \cdot a_1 - c_2 \cdot a_2) + (c_2 \cdot a_2 - c_3 \cdot a_3) + \ldots + (c_n \cdot a_n - c_{n+1} \cdot a_{n+1}) =$$
$$= c_1 \cdot a_1 - c_{n+1} \cdot a_{n+1},$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{n} (c_m \cdot a_m - c_{m+1} \cdot a_{n+1}) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} (c_1 \cdot a_1 - c_{n+1} \cdot a_{n+1}) = c_1 \cdot a_1 - c \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (c_n \cdot a_n - c_{n+1} \cdot a_{n+1})$ $\Rightarrow$ из того, что $c_n \cdot a_n - c_{n+1} \cdot a_{n+1} > p \cdot a_{n+1} > 0$ и 1-го признака сравнения $\Rightarrow$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} p \cdot a_{n+1}$ сходится $\Rightarrow$ ряд A сходится.

2. Пусть $k < 0 \Rightarrow \exists N : \ \forall n > N$

$$c_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1} < 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{a_n}{a_{n+1}} < \frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{\frac{1}{c_n}}{\frac{1}{c+n+1}} \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} > \frac{\frac{1}{c_{n+1}}}{\frac{1}{c_n}}.$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c_n}$ расходится $\Rightarrow$ по 3-му признаку сравнения ряд A расходится.

3. Придумать 2 примера когда $k = 0$ и ряды сходятся/расходятся.

$\square$

Теорема 27 (Признак Бертрана)**.** Пусть ряд A – положительный. Если

$$\lim_{n\to\infty} \ln n \cdot \left[n \cdot (\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1)\right] = B,$$

то

1. При $B > 1$ ряд A сходится.
2. При $B < 1$ ряд A расходится.
3. При $B = 1$ ряд A может как сходиться, так и расходиться.

Доказательство. Рассмотрим ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\cdot\ln n}$ – расходится. Составим последовательность Кумера:

$$\begin{aligned}
k_n = \underbrace{n \cdot \ln n}_{c_n} \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - \underbrace{(n+1)\cdot\ln(n+1)}_{c_{n+1}} = \\
= \left|\ln(n+1) = \ln\left(n \cdot \frac{n+1}{n}\right) = \ln n + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right| = \\
= n \cdot \ln n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - (n+1)\cdot\left(\ln n + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) = \\
= n \cdot \ln n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - n \cdot \ln n - \ln n - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \\
= \ln n\left(n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - n - 1\right) - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \\
= \ln n \cdot \left(n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) - 1\right) - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1};
\end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty} k_n =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\underbrace{\ln n \cdot \left(n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) - 1\right)}_{B} - \ln\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}^{n}\right)}_{e} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right] =$$

$$= B - 1,$$

по признаку Кумера, при $B - 1 > 0$ ряд A сходится, при $B - 1 < 0$ ряд A расходится, при $B = 1$ ряд A может как сходиться, так и расходиться. □

Теорема 28 (Признак Гаусса)**.** Ряд A, $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Если

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \left(\lambda + \frac{\mu}{n}\right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

то

1. При $\lambda > 1$, ряд A сходится.
2. При $\lambda < 1$, ряд A расходится.
3. При $\lambda = 1$ и
   (a) $\mu > 1 \Rightarrow$ ряд A сходится.
   (b) $\mu \leqslant 1 \Rightarrow$ ряд A расходится.

Доказательство.

1. Если $\lambda < 1$, то

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \left[\lim_{n\to\infty} \left(\lambda + \frac{\mu}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right]^{-1} =$$

$$= \left[\lim_{n\to\infty} \left(\lambda + \underbrace{\frac{\mu}{n}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{1}{n^2}}_{\to 0} \cdot \Omega\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right]^{-1} = \frac{1}{\lambda},$$

по признаку Даламбера, если $\frac{1}{\lambda} < 1$, то есть $\lambda > 1$, ряд A сходится.

2. $\Rightarrow$ из 1.

3. Если $\lambda = 1$, то

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{\mu}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \mu + n \cdot O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\mu + \underbrace{n \cdot \frac{1}{n^2} \cdot \Omega(\frac{1}{n^2})}_{\to 0}\right) = \mu \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ по признаку Раббе $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \mu > 1 \Rightarrow A \text{ сходится.} \\ \mu < 1 \Rightarrow A \text{ расходится.} \end{array} \right.$

Пусть $\mu = 1$, тогда

$$\lim_{n\to\infty} \ln n \cdot \left(n \cdot \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \ln n \cdot \left(n \cdot \left(1 + \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) - 1 \right) - 1 \right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \ln n \cdot \left(1 + n \cdot O\left(\frac{1}{n^2}\right) - 1 \right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \ln n \cdot n \cdot O\left(\frac{1}{n^2}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\ln n \cdot n \cdot \frac{1}{n^2} \cdot \Omega\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} \cdot \Omega\left(\frac{1}{n^2}\right) = 0.$$

В самом деле,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \ln n = \lim_{n\to\infty} \ln n^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \ln \sqrt[n]{n} = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ по прихнаку Бертрана ряд A расходится.

$\square$

6.3 Сходимость знакопеременных рядов

Примечание. Пусть дан ряд A. Если $\exists N : \quad \forall n > N \ a_n$ не меняет знак, то исследование сходимости такого ряда сводится к исследованию сходимости положительных рядов. Будем считать, что "+"и "−"бесконечно много. Такие ряды будем называть *знакопеременными*.

Определение 23 (Абсолютно сходящийся ряд)**.** Ряд A называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд

$$A^* \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

Утверждение. Если ряд A абсолютно сходящийся, то он сходящийся.

Доказательство. Пусть ряд A абсолютно сходящийся, то есть сходится ряд $A^* \ \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \Rightarrow$ по критерию Коши $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N : \ \forall n > N \ \forall p > 0$

$$|a_{n+1}| + |a_{n+1}| + \ldots + |a_{n+1}| < \varepsilon.$$

Пусть $\varepsilon > 0$ задано. Рассмотрим:

$$|A_{n+p} - A_n| = |a_{n+1} + \ldots + a_{n+p}| \leqslant |a_{n+1}| + \ldots + |a_{n+p}| < \varepsilon \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ ряд A сходится. $\square$

Определение 24 (Условно сходящийся ряд). Если ряд A сходится, а ряд A^* расходится, то ряд A называется *условно сходящимся.*

Определение 25 (Знакочередующийся ряд). Ряд A называется *знакочередующимся*, если $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \cdot a_{n+1} < 0$. Обозначим знакочередующийся ряд:

$$\overline{A}\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \cdot a_n, \quad a_n > 0\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Теорема 29 (признак Лейбница). Пусть ряд $\overline{A}$, $a_n > 0\ \forall n$ удовлетворяет условиям:

1. $a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant \ldots \geqslant a_n \geqslant \ldots$.
2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Тогда ряд $\overline{A}$ сходится и его сумма $S: \ 0 < S \leqslant a_1$.

Доказательство. Рассмотрим:

$$S_{2n} = a_1 - a_2 + a_3 - \ldots + a_{2n-1} - a_{2n} = \\ = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots + (a_{2n-1} - a_{2n}),$$

тогда $\forall i: \ a_i - a_{i+1} \geqslant 0 \Rightarrow S_{2n} \geqslant 0\ \forall n \Rightarrow$ последовательность $S_{2n} \nearrow$.

С другой стороны,

$$S_{2n} = a_1 - \underbrace{(a_2 - a_3)}_{\geqslant 0} - \underbrace{(a_4 - a_5)}_{\geqslant 0} - \ldots - \underbrace{(a_{2n-2} - a_{2n-1})}_{\geqslant 0} - a_{2n} \Rightarrow$$

$\Rightarrow S_{2n} \leqslant a_1\ \forall n.$

Таким образом, S_{2n} не убывает и ограничена сверху $\Rightarrow$ по теореме Вейерштрасса $\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = S$.

Далее,

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty}(S_{2n} + a_{2n+1}) = \lim_{n\to\infty} S_{2n} + \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = S + 0 = S.$$

Таким образом, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$.

Так как $0 < S_n \leqslant a_1$ (если $S_n = 0$, то a_1 может быть $= 0$, что невозможно, так как $a_n > 0$) $\Rightarrow$ (берем пределы от неравенства) $0 < S \leqslant a_1$. $\square$

Следствие. Если знакочередующийся ряд $\overline{A}$ сходящийся, то сумма его n-го остатка имеет знак $(n+1)$-го члена ряда и не больше его по модулю.

Пример. Рассмотрим ряд

$$\overline{H}\quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \ldots,$$

по признаку Лейбница:

1. $1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \ldots > \frac{1}{n}$;
2. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$

$\Rightarrow \overline{H}$ сходится, $0 < S \leqslant 1$;

Пример. Рассмотрим

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} \text{ – расходящийся} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ ряд $\overline{H}$ – условно сходящийся.

Лемма 2. Если

1. Числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ либо не возрастают, либо не убывают.
2. Суммы $B_1 = b_1,\ B_2 = b_1 + b_2,\ \ldots,\ B_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n :\ \forall k = 1, \ldots, n \quad |B_k| \leqslant L$.

Тогда

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k \cdot b_k\right| \leqslant L \cdot (|a_1| + |a_n|) \tag{6.6}$$

Доказательство. Рассмотрим

$$\begin{aligned}
&a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \ldots + a_n \cdot b_n = \\
&= a_1 \cdot B_1 + a_2 \cdot (B_2 - B_1) + a_3 \cdot (B_3 - B_2) + \ldots + a_n \cdot (B_n - B_{n-1}) = \\
&= a_1 \cdot B_1 + a_2 \cdot B_2 - a_2 \cdot B_1 + a_3 \cdot B_3 - a_3 \cdot B_2 + \ldots + a_n \cdot B_n - a_n \cdot B_{n-1} = \\
&= B_1 \cdot (a_1 - a_2) + B_2 \cdot (a_2 - a_3) + B_3 \cdot (a_3 - a_4) + \ldots + B_{n-1} \cdot (a_{n-1} - a_n) + a_n \cdot B_n = \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} B_k \cdot (a_k - a_{k-1}) + a_n \cdot B_n.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k \cdot b_k\right| = \left|\sum_{k=1}^{n-1} B_k \cdot (a_k - a_{k+1}) + a_n \cdot B_n\right| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=1}^{n-1} |B_k| \cdot |a_k - a_{k+1} + |a_n| \cdot |B_n| \leqslant L \cdot \left(\sum_{k=1}^{n-1} |a_k - a_{k+1}| + |a_n|\right) =$$
$$= L \cdot (|a_1| + |a_n| + |a_n|) = L \cdot (|a_1| + 2 \cdot |a_n|).$$

□

Теорема 30 (Признак Абеля и Дирихле).

1. **Абеля.** Если
   - последовательность $\{a_n\}$ монотонна и ограничена,
   - ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится,

   то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$ сходится.
2. **Дирихле.** Если
   - последовательность $\{a_n\}$ монотонна и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$,
   - частичные суммы ряд B ограничены, то есть $\exists k > 0 :$ $\forall n \ \left|\sum_{m=1}^{n} b_m\right| < k$,

   то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$ сходится.

Доказательство.

1. Пусть выполнены условия признака Абеля. Тогда $\exists M > 0 :\ |a_n| \leqslant M$. Пусть $\varepsilon > 0$ задано. Возьмем номер $N :\ \forall n > N,\ \forall p > 0$
   $$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} b_k\right| < \varepsilon^* = \frac{\varepsilon}{3 \cdot M}.$$
   Частичные суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$ имеют вид $S_n = a_1 \cdot b_1 + \ldots + a_n \cdot b_n$. По критерию Коши найдем $N_1 :\ \forall n > N_1, \forall p > 0$
   $$|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon,$$
   $$|a_{n+1} \cdot b_{n+1} + a_{n+2} \cdot b_{n+2} + \ldots + a_{n+p} \cdot b_{n+p}| \leqslant$$
   $$\leqslant \varepsilon^* \cdot (|a_{n+1}| + 2 \cdot |a_{n+p}|) \leqslant \varepsilon^* \cdot 3 \cdot M = \frac{\varepsilon}{3 \cdot M} = \varepsilon \Rightarrow$$
   $\Rightarrow$ по критерию Коши ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$ сходится.
2. Пусть выполнены условия признака Дирихле. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} a_n =$

0, то $\exists N: \ \forall n > N \quad (\varepsilon > 0$ задано):

$$|a_n| < \frac{\varepsilon}{3 \cdot k}, \qquad \left| \sum_{k=1}^{n} b_k \right| \leqslant k.$$

По критерию Коши:

$$|S_{n+p} - S_n| = |a_{n+1} \cdot b_{n+1} + \ldots + a_{n+p} \cdot b_{n+p}| \overset{\text{по лемме}}{\leqslant}$$
$$\leqslant k \cdot (|a_{n+1}| + 2 \cdot |a_{n+p}|) < k \cdot \frac{3 \cdot \varepsilon}{3 \cdot k} = \varepsilon.$$

□

Пример. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n \cdot x)}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \sin(n \cdot x)$

$a_n = \frac{1}{n} \to 0$ при $n \to \infty$. Оценим частичную сумму $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(n \cdot x)$:

$$\sin x + \sin(2 \cdot x) + \sin(3 \cdot x) + \ldots + \sin(n \cdot x) =$$
$$= \frac{1}{\sin \frac{x}{2}} \cdot \left(\sin x \cdot \sin \frac{x}{2} + \sin(2 \cdot x) \cdot \sin \frac{x}{2} \right) =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sin \frac{x}{2}} \cdot \left(\cos \frac{x}{2} - \cos \frac{3 \cdot x}{2} + \cdot \frac{3 \cdot x}{2} - \cos \frac{5 \cdot x}{2} + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + \cos \frac{(2 \cdot n - 1) \cdot x}{2} - \cos \frac{(2 \cdot n + 1) \cdot x}{2} \right) =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sin \frac{x}{2}} \cdot \left(\cos \frac{x}{2} - \cos \frac{(2 \cdot n + 1) \cdot x}{2} \right) =$$
$$= \frac{2 \cdot \sin \frac{(n+1) \cdot x}{2} \cdot \sin \frac{n \cdot x}{2}}{2 \cdot \sin \frac{x}{2}}.$$

Тогда

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \sin(k \cdot x) \right| = \left| \frac{\sin \frac{(n+1) \cdot x}{2} \cdot \sin \frac{n \cdot x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \right| \leqslant \frac{1}{\sin \frac{x}{2}},$$

$\frac{x}{2} \neq \pi \cdot k, \ k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \neq 2 \cdot \pi \cdot k, \ k \in \mathbb{Z}.$

По признаку Дирихле ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n \cdot x)}{n}$ сходится.