Математический анализ

Данил Заблоцкий

6 января 2024 г.

Оглавление

Глава 5

Дифференциальное исчисление функций многих переменных

Лекция 1: Функции многих переменных

от 01 сен 10:28

5.1 Производная по вектору

Примечание. Пусть $x = (x_1, x_2, x_3) = x(t)$, $f\big(x(t)\big) = f(x_1, x_2, x_3)$, тогда:

$$\frac{df\big(x(t)\big)}{dt} = \frac{\delta f}{\delta x_1} \cdot \frac{dx_1}{dt} + \frac{\delta f}{\delta x_2} \cdot \frac{dx_2}{dt} + \frac{\delta f}{\delta x_3} \cdot \frac{dx_3}{dt} = \\ = \frac{\delta f}{\delta x_1} \cdot v_1 + \frac{\delta f}{\delta x_2} \cdot v_2 + \frac{\delta f}{\delta x_3} \cdot v_3,$$

где $\vec{v} = \{v_1, v_2, v_3\}$ – скорость частицы, перемещающейся по γ-ну $x(t)$.

Определение 1 (Производная функции по вектору)**.** Пусть D в $\mathbb{R}^n$ – область, $f : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$, вектор $v \in T\mathbb{R}^n_{x_0}$ – касательное пространство к R^n в точке x_0 (совокупность всех векторов, исходящих из точки x_0).

Производной функции f по вектору v называется величина

$$\frac{\delta f}{\delta \vec{v}} = D\vec{v}f(x_0) \coloneqq \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t}, \text{ если } \lim \exists.$$

Утверждение. Пусть $f : D \to \mathbb{R}$ – дифференцируемо в точке $x_0 \in D$. Тогда $\forall \vec{v} \in T\mathbb{R}^n_{x_0} \exists \frac{\delta f}{\delta \vec{v}}(x_0)$:

$$\frac{\delta f}{\delta \vec{v}}(x_0) = \frac{\delta f}{\delta x_1}(x_0) \cdot v_1 + \frac{\delta f}{\delta x_2}(x_0) \cdot v_2 + \ldots + \frac{\delta f}{\delta x_n}(x_0) \cdot v_n = df(x_0) \cdot \vec{v},$$

где $df(x_0) \cdot \vec{v}$ – скалярное произведение,

$$df(x_0) = \left\{ \frac{\delta f}{\delta x_1}(x_0), \frac{\delta f}{\delta x_2}(x_0), \ldots, \frac{\delta f}{\delta x_n}(x_0) \right\},$$
$$\vec{v} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$$

Доказательство. Рассмотрим отображение $\gamma : [0; 1] \to \mathbb{R}^n$:

$$\vec{\gamma}(t) = \vec{x_0} + \vec{v} \cdot t \Leftrightarrow \vec{\gamma}(t) = \left\{ \begin{array}{l} x_1 = x_0^{(1)} + v_1 \cdot t \\ x_2 = x_0^{(2)} + v_2 \cdot t \\ \vdots \\ x_n = x_0^{(n)} + v_n \cdot t \end{array} \right\}, \quad t \in [0; 1]$$

Заметим, что $\gamma(t)$ дифференцируемо в точке $t = 0 \Rightarrow$ отображение $f \circ \gamma : [0; 1] \to \mathbb{R}$ – дифференцируемо в точке $t = 0$.

$$f \circ \gamma = f\big(\gamma(t)\big) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{df\big(\gamma(t)\big)}{dt}\bigg|_{t=0} = \left(\frac{\delta f}{\delta x_1} \cdot \frac{dx_1}{dt} + \frac{\delta f}{\delta x_2} \cdot \frac{dx_2}{dt} + \ldots + \frac{\delta f}{\delta x_n} \cdot \frac{dx_n}{dt} \right)\bigg|_{t=0} =$$
$$= \left(\frac{\delta f}{\delta x_1} \cdot v_1 + \frac{\delta f}{\delta x_2} \cdot v_2 + \ldots + \frac{\delta f}{\delta x_n} \cdot v_n \right)\bigg|_{t=0} = df\big(\gamma(0)\big) \cdot \vec{v}$$

Если f дифференцируемо в точке $x_0 \Rightarrow \forall \vec{\gamma}(t) = \vec{x_0} + \vec{v} \cdot t$:

$$\frac{df\big(\gamma(t)\big)}{dt} := \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + v \cdot t) - f(x_0)}{t} = \frac{\delta f}{\delta \vec{v}}(x_0)$$

$\square$

Утверждение (Известно из алгебры). Если $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – линейное, то $\exists! \vec{a} \in \mathbb{R}^n : \forall x \in \mathbb{R}^n$

$$L(x) = \vec{a} \cdot \vec{x},$$

$$\big(L(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 L(x_1) + \lambda_2 L(x_2) \big)$$

где $\vec{a} \cdot \vec{x}$ – скалярное произведение.

Определение 2 (Градиент функции в точке). Пусть $f : D \to \mathbb{R}$, D – область в $\mathbb{R}^n$, f – дифференцируема в точке $x \in D$. Вектор $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$:

$$df(x) \cdot h = \vec{a} \cdot h, \quad h \in \mathbb{R}$$

называется *градиентом функции f в точке $x \in \mathbb{R}^n$* и обозначается

$$gradf(x)$$

Если в $\mathbb{R}^n$ зафиксировать ортонормированный базис, то

$$gradf(x) = \left\{\frac{\delta f}{\delta x_1}(x), \frac{\delta f}{\delta x_2}(x), \dots, \frac{\delta f}{\delta x_n}(x)\right\}$$

Определение 3 (Производная по направлению вектора). Если $\vec{v} \in T\mathbb{R}^n_{x_0}$, $|\vec{v}| = 1$, то $\frac{\delta f}{\delta \vec{v}}(x)$ называется *производной по направлению вектора $\vec{v}$*.

Пример.

$$\begin{cases} \cos\alpha = \cos\langle \vec{v}, 0x\rangle \\ \cos\beta = \cos\langle \vec{v}, 0y\rangle \end{cases} \text{ – направляющие косинусы}$$

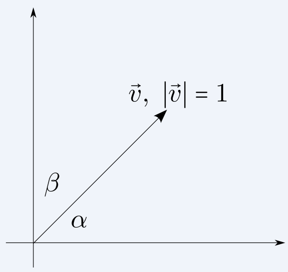

Рис. 5.1: $\vec{v} = \{\cos\alpha, \cos\beta\}$

Так как при данных условиях $\vec{v} = \{\cos\alpha_1, \cos\alpha_2, \dots, \cos\alpha_n\}$:

$$\frac{\delta f}{\delta \vec{v}}(x) = \frac{\delta f}{\delta x_1} \cdot \cos\alpha_1 + \dots + \frac{\delta f}{\delta x_n} \cdot \cos\alpha_n.$$

Примечание (Смысл градиента). Градиент показывает направление самого быстрого возрастания функции.

5.2 Основные теоремы дифференциального исчисления функций многих переменных

Теорема 1 (О среднем). Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$, $x \in D$, $x+h \in D$, $[x, x+h] \subset D$, $f : D \to \mathbb{R}$ – дифференцируемо на $(x, x+h)$ и непрерывно на $[x, x+h]$. Тогда $\exists \xi \in (x, x+h)$:

$$f(x+h) - f(x) = f'(\xi) \cdot h = \frac{\delta f}{\delta x_1}(\xi) \cdot h^1 + \frac{\delta f}{\delta x_2}(\xi) \cdot h^2 + \ldots + \frac{\delta f}{\delta x_n}(\xi) \cdot h^n,$$

где $\{1, 2, \ldots, n\}$ над h – индексы.

Доказательство. Рассмотрим отображение $\gamma : [0; 1] \to D$, определенное:

$$\gamma(t) = x + t \cdot h, \quad \gamma(t) = \begin{cases} x_1(t) = x_1 + t \cdot h^1 \\ x_2(t) = x_2 + t \cdot h^2 \\ \vdots \\ x_n(t) = x_n + t \cdot h^n \end{cases},$$

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad h = \{h^1, h^2, \ldots, h^n\}, \ t \in [0; 1],$$

$$\begin{matrix} \gamma(0) = x, \\ \gamma(1) = x + h \end{matrix}, \quad [0; 1] \xrightarrow{\gamma} [x; x+h].$$

Заметим, что $gamma(t)$ дифференцируемо на $(0; 1)$, непрерывно на $[0; 1]$, причем $\big(x_i(t)\big)' = h^i$.

Рассмотрим функцию $F(t) = f\big(\gamma(t)\big)$, $F : [0; 1] \to \mathbb{R}$. Имеем:

1. F – дифференцируема на $(0; 1)$ (как композиция двух дифференцируемых).
2. F – непрерывна на $[0; 1]$ (как композиция двух непрерывных).

Следовательно, по теореме Лагранжа:

$$\begin{matrix} F(1) & - & F(0) & = F'(\tau) \cdot (1-0), \ \tau \in (0; 1) \\ \shortparallel & & \shortparallel & \\ f(x+h) & - & f(x) & = \Big(f\big(\gamma(\tau)\big)\Big)' \cdot 1 \end{matrix},$$

$$\Big(f\big(\gamma(\tau)\big)\Big)' \cdot 1 = f'\big(\gamma(\tau)\big) \cdot \gamma'(\tau) = \underset{\substack{\shortparallel \\ x_1'(t)}}{\frac{\delta f}{\delta x_1}} \cdot h' + \frac{\delta f}{\delta x_2} \cdot h_2 + \ldots + \frac{\delta f}{\delta x_n} \cdot h^n.$$

Пусть $\gamma(\tau) = \xi \in D$, тогда:

$$f(x+h) - f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\delta f}{\delta x_1}(\xi) & \cdots & \frac{\delta f}{\delta x_n}(\xi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h^1 \\ \vdots \\ h^n \end{pmatrix} = f'(\xi) \cdot h.$$

□

Следствие. Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}$ – дифференцируема на D и $\forall x \in D$ $d(fx) = 0$ (то есть $\forall i$ $\frac{\delta f}{\delta x_i} = 0$). Тогда $f(x) = const$.

Доказательство. Пусть $x_0 \in D$ и $B(x_0, \rho) \subset D$ – шар $\exists$, так как D – область. Тогда $\forall x \in B(x_0, \rho)$ $[x_0; x] \subset B(x_0, \rho) \subset D$. Следовательно:

$$f(x) - f(x_0) = \underset{\left\{\frac{\delta f}{\delta x_1}(\xi), \dots, \frac{\delta f}{\delta x_n}(\xi)\right\}}{\underset{\parallel}{f'(\xi)}} \cdot (x - x_0) = 0.$$

Таким образом, $\forall x \in B(x_0, \rho)$ $f(x) = f(x_0)$.

Построим путь из точки x_0 к некоторой точке $x \in D$:

$$\gamma : [0; 1] \to D, \quad \begin{matrix} \gamma(0) = x_0 \\ \gamma(1) = x \end{matrix}.$$

По определению пути, γ – непрерывно. Тогда $\exists \delta :$ $\forall 0 \leqslant t \leqslant \delta$

$$\gamma(t) \in B(x_0, \rho) \Rightarrow f\big(\gamma(t)\big) = f(x_0), \; t \in [0; \delta],$$

где t – точка из $B(x_0, \rho)$.

Пусть $\Delta = \sup \delta \Rightarrow f\big(\gamma(\Delta)\big) = f(x_0)$. Покажем, что $\Delta = 1$.

Пусть $\Delta < 1$ $(\Delta \neq 1)$. Построим шар $B\big(\gamma(\Delta), \rho_\Delta\big)$. Тогда $\exists \varepsilon > 0 :$ $\Delta - \varepsilon < t < \Delta + \varepsilon$.

Но тогда $f\big(\gamma(\Delta+\varepsilon)\big) = f(x_0)$ (так как точка $\gamma(\Delta+\varepsilon) \in B\big(\gamma(\Delta), \rho_\Delta\big)$) – противоречие с тем, что $\Delta = \sup \delta \Rightarrow \Delta = 1$.

$\gamma(1) = x$ и $f(x) = f(x_0) \Rightarrow$ так как $x \in D$ – произведение точек, то имеем, что $\forall x \in D$ $f(x) = f(x_0) \Rightarrow f(x)$ – $const$. □

Теорема 2 (Достаточное условие дифференцируемости функции)**.** Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}$, f имеет непрерывные частные производные в каждой окрестности точки $x \in D$. Тогда f – дифференцируема в точке x.

Доказательство. Без ограничения общности, будем считать, что окрестность точки $x_0 \in D$ является шаром $B(x_0, \rho) \subset D$.

Пусть $h : x_0 + h \in B(x_0, \rho)$. Здесь

$$\begin{matrix} x_0 = (x^1, x^2, \dots, x^n) \\ x_0 + h = (x^1 + h^1, x^2 + h^2, \dots, x^n + h^n) \end{matrix}.$$

Заметим, что точки

$$\begin{matrix} x_1 = (x^1, x^2 + h^2, \dots, x^n + h^n) \\ x_2 = (x^1, x^2, x^3 + h^3, \dots, x^n + h^n) \\ \vdots \\ x_{n-1} = (x^1, x^2, x^3, \dots, x^{n-1}, x^n + h^n) \end{matrix} \in B(x_0, \rho).$$

$$
\begin{aligned}
&f(x_0+h)-f(x_0)=\\
&\qquad= f(x_0+h)-f(x_1)+f(x_1)-f(x_2)+f(x_2)-\ldots\\
&\qquad\ldots-f(x_{n-1})+f(x_{n-1})-f(x_0)=\\
&= f(x^1+h^1,\ldots,x^n+h^n)-f(x^1,x^2+h^2,\ldots,x^n+h^n)+\\
&+ f(x^1,x^2+h^2,\ldots,x^n+h^n)-f(x^1,x^2,\ldots,x^n+h^n)+\\
&+ f(x^1,x^2,\ldots,x^n+h^n)-\ldots-f(x^1,x^2,\ldots,x^{n-1},x^n)+\\
&+ f(x^1,x^2,\ldots,x^{n-1},x^n+h^n)-f(x^1,x^2,\ldots,x^n)=\\
&= \left|\begin{array}{c}\text{Теорема Лагранжа для}\\ \text{функции одной переменной}\end{array}\right| =\\
&= \frac{\delta f}{\delta x_1}(x^1+\theta^1h^1,x^2+h^2,\ldots,x^n+h^n)\cdot h^1+\\
&+ \frac{\delta f}{\delta x^2}(x^1,x^2+\theta^2h^2,\ldots,x^n+h^n)\cdot h^2+\ldots\\
&\qquad\ldots+\frac{\delta f}{\delta x^n}(x^1,x^2,\ldots,x^n+\theta^nh^n)\cdot h^n.
\end{aligned}
$$

Используя непрерывность частных производных, запишем:

$$
\begin{aligned}
&f(x_0+h)-f(x_0)=\\
&\qquad=\frac{\delta f}{\delta x^1}(x^1,x^2,\ldots,x^n)\cdot h^1+\alpha^1(h^1)+\ldots\\
&\qquad\ldots+\frac{\delta f}{\delta x^n}(x^1,x^2,\ldots,x^n)\cdot h^n+\alpha^n(h^n),
\end{aligned}
$$

где $\alpha^1,\alpha^2,\ldots,\alpha^n$ стремятся к нулю при $\vec{h}\to 0$.

Это означает, что:

$$
\begin{array}{c}
f(x_0+h)-f(x_0)=L(x_0)\cdot h+\underset{h\to 0}{o}(h)\\
\left(\text{где } L(x_0)=\frac{\delta f}{\delta x^1}(x_0)\cdot h^1+\ldots+\frac{\delta f}{\delta x^n}(x_0)\cdot h^n=df(x_0)\right)
\end{array}\Rightarrow
$$

$\Rightarrow$ по определению $f(x)$ дифференцируема в точке x_0. □

Лекция 2: Производные высших порядков

от 06 сен 08:47

5.3 Производные высших порядков

Определение 4 (Вторая производная функции по переменным)**.** Пусть $f:D\to\mathbb{R}$, D – область в $\mathbb{R}^n$. Производная по переменной x^j от производной по переменной x^i называется *второй производной функции f по переменным x^i,x^j* и обозначается

$$\frac{\delta^2 f}{\delta x^i\delta x^j}(x)\text{ или } f''_{x^i,x^j}(x).$$

Теорема 3 (О смешанных производных)**.** Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}$, $x \in D$, f имеет в D непрерывные смешанные производные (второго порядка). Тогда эти производные не зависят от порядка дифференцирования.

Доказательство. Пусть $\frac{\delta^2 f}{\delta x^i \delta x^j}$ и $\frac{\delta^2 f}{\delta x^j \delta x^i}$ – непрерывны в точке $x \in D$.

Так как остальные переменные фиксированы, то можно считать, что f зависит только от двух переменных.

Тогда $D \subset \mathbb{R}^2$, $f : D \to \mathbb{R}$ и $\frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y}$ и $\frac{\delta^2 f}{\delta y \delta x}$ – непрерывны в точке $x_0 = (x, y) \in D$.

Покажем, что $\frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y} = \frac{\delta^2 f}{\delta y \delta x}$.

Рассмотрим функции:

$$\begin{matrix} \phi(t) = f(x + t \cdot \Delta x, y + \Delta y) - f(x + t \cdot \Delta x, y) \\ \psi(t) = f(x + \Delta x, y + t \cdot \Delta y) - f(x, y + t \cdot \Delta y) \end{matrix}, \quad t \in [0; 1].$$

Имеем:

$$\phi(1) - \phi(0) = \\ = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y) - f(x, y + \Delta y) + f(x, y)$$

$$\psi(1) - \psi(0) = \\ = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y) + f(x, y)$$

Тогда:

$$\phi(1) - \phi(0) = \psi(1) - \psi(0) \tag{5.1}$$

$$\begin{aligned} \phi(1) - \phi(0) &= \phi'(\xi) \cdot (1 - 0) = \\ &= \frac{\delta f}{\delta x}(x + \xi \cdot \Delta x, y + \Delta y) \cdot \Delta x + \frac{\delta f}{\delta y}(x + \xi \cdot \Delta x, y + \Delta y) - \\ &- \frac{\delta f}{\delta x}(x + \xi \cdot \Delta x, y) \cdot \Delta x - \frac{\delta f}{\delta y}(x + \xi \cdot \Delta x, y) \cdot 0 = \\ &= \left(\frac{\delta f}{\delta x}(x + \xi \cdot \Delta x, y + \Delta y) - \frac{\delta f}{\delta x}(x + \xi \cdot \Delta x, y) \right) = \\ &= \left| \begin{matrix} \text{по теореме Лагранжа для} \\ \text{функции 1-ой переменной} \end{matrix} \right| = \\ &= \frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y}(x + \xi \cdot \Delta x, y + \eta \cdot \Delta y) \Delta x \Delta y. \end{aligned}$$

Положим $(x + \xi \Delta x, y + \eta \cdot \Delta y) = P \in \Pi$.

Аналогично:

$$\begin{aligned}
\psi(1) - \psi(0) = \psi'(\xi)\cdot(1-0) = \\
&= \frac{\delta f}{\delta x}(x+\Delta x, y+\xi\cdot\Delta y)\cdot 0 + \frac{\delta f}{\delta y}(x+\Delta x, y+\xi\cdot\Delta y)\cdot\Delta y - \\
&- \frac{\delta f}{\delta x}(x, y+\xi\cdot\Delta y)\cdot 0 - \frac{\delta f}{\delta y}(x, y+\xi\cdot\Delta y)\cdot\Delta y = \\
&= \left(\frac{\delta f}{\delta y}(x+\Delta x, y+\xi\cdot\Delta y) - \frac{\delta f}{\delta y}(x, y+\xi\cdot\Delta y)\right)\Delta y = \\
&= \left|\begin{array}{l}\text{по теореме Лагранжа для}\\ \text{функции 1-ой переменной}\end{array}\right| = \\
&= \frac{\delta^2 f}{\delta y\delta x}(x+\tau\cdot\Delta x, y+\xi\cdot\Delta y)\Delta y\Delta x
\end{aligned}$$

Положим, что $(x+\tau\cdot\Delta x, y+\xi\cdot\Delta y) = Q$.
Тогда из 5.1 следует, что:

$$\begin{array}{ccc}
\frac{\delta^2 f}{\delta x\delta y}(P)\Delta x\Delta y & = & \frac{\delta^2 f}{\delta y\delta x}(Q)\Delta x\Delta y \\
\shortparallel & & \shortparallel \\
\frac{\delta^2 f}{\delta x\delta y}(x+\xi\cdot\Delta x, y+\eta\cdot\Delta y) & = & \frac{\delta^2 f}{\delta y\delta x}(x+\tau\cdot\Delta x, y+\xi\cdot\Delta y)
\end{array}.$$

Используя непрерывность частных производных при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0 \Rightarrow$

$$x+\xi\cdot\Delta x \to x, \quad y+\eta\cdot\Delta y \to y.$$

Таким образом,

$$\frac{\delta^2 f}{\delta x\delta y} = \frac{\delta^2 f}{\delta y\delta x}.$$

□

5.4 Формула Тейлора

Определение 5 (Гладкая функция класса $C^{(k)}$). Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}$. Будем говорить, что f является *гладкой функцией класса* $C^{(k)}$ (k-го порядка), то есть $f \in C^{(k)}(D, \mathbb{R})$, если f имеет непрерывные частные производные до k-го порядка включительно.

Теорема 4 (Формула Тейлора). Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}$, $f \in C^{(k)}(D, \mathbb{R})$, $x \in D$, $x+h \in D$, $[x; x+h] \subset D$. Тогда:

$$f(x+h) = f(x) + \sum_{i=1}^{k-1}\frac{1}{i!}\left(\frac{\delta}{\delta x^1}\cdot h^1 + \ldots + \frac{\delta}{\delta x^n}\cdot h^n\right)^i\cdot f(x) + R^k,$$

где R^k – остаточный член,

$$R^k = \frac{1}{k!}\left(\frac{\delta}{\delta x^1}\cdot h^1 + \ldots + \frac{\delta}{\delta x^n}\cdot h^n\right)^k \cdot f(x+\xi\cdot h),$$

$$x = (x^1, \ldots, x^n), \quad h = (h^1, \ldots, h^n).$$

Доказательство. Рассмотрим функцию:

$$\phi(t) = f(x + t\cdot h),\ t \in [0;1]$$

Применим формулу Тейлора к $\phi(t)$:

$$\phi(1) = \phi(0) + \frac{1}{1!}\cdot\phi'(0)\cdot(1-0) + \frac{1}{2!}\cdot\phi''(0)\cdot(1-0)^2 + \\ + \frac{1}{3!}\cdot\phi'''(0)\cdot(1-0)^3 + \ldots + \frac{1}{k!}\cdot\phi^{(k)}\cdot(1-0)^k. \quad (5.2)$$

$$\phi(1) = f(x+h), \quad \phi(0) = f(x).$$

$$\phi'(0) = f'(x+th)\cdot(x+t\cdot h)'_k\Big|_{t=0} =$$

$$= \begin{pmatrix}\frac{\delta f(x+t\cdot h)}{\delta x^1} & \frac{\delta f(x+t\cdot h)}{\delta x^2} & \cdots & \frac{\delta f(x+t\cdot h)}{\delta x^n}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}h^1\\h^2\\\vdots\\h^n\end{pmatrix}\Bigg|_{t=0} =$$

$$= \left(\frac{\delta f(x+t\cdot h)}{\delta x^1}\cdot h^1 + \frac{\delta f(x+t\cdot h)}{\delta x^2}\cdot h^2 + \ldots + \frac{\delta f(x+t\cdot h)}{\delta x^n}\cdot h^n\right)\Bigg|_{t=0} =$$

$$= \frac{\delta f}{\delta x^1}(x)\cdot h^1 + \frac{\delta f}{\delta x^2}(x)\cdot h^2 + \ldots + \frac{\delta f}{\delta x^n}(x)\cdot h^n =$$

$$= \left(\frac{\delta}{\delta x^1}\cdot h^1 + \ldots + \frac{\delta}{\delta x^n}\cdot h^n\right)\cdot f(x)$$

$$\phi''(0) = \left(\sum_{i=1}^n \frac{\delta f(x+t\cdot h)}{\delta x^i}\cdot h^i\right)'_t\Bigg|_{t=0} =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \frac{\delta^2 f(x+t\cdot h)}{\delta x^i \delta x^j}\cdot h^i h^j\right)\Bigg|_{t=0} = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \frac{\delta^2 f(x)}{\delta x^i\delta x^j}\cdot h^i h^j =$$

$$= \left(\frac{\delta}{\delta x^1}\cdot h^1 + \ldots + \frac{\delta}{\delta x^n}\cdot h^n\right)^2\cdot f(x)$$

И так далее. Подставим получившиеся выражения в 5.2 и получим искомое. □

Пример. Запишем формулу Тейлора для функции $f(x,y)$:

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{1}{1!}\left(\frac{\delta f}{\delta x}(x_0,y_0)\Delta x + \frac{\delta f}{\delta y}(x_0,y_0)\Delta y\right) +$$
$$+\frac{1}{2!}\Bigg(\frac{\delta^2 f}{\delta x^2}(x_0,y_0)\cdot(\Delta x)^2 +$$
$$+2\cdot\frac{\delta^2 f}{\delta x\delta y}(x_0,y_0)\Delta x\Delta y + \frac{\delta^2 f}{\delta y^2}(x_0,y_0)\cdot(\Delta y)^2\Bigg) +$$
$$+\frac{1}{3!}\cdot\Bigg(\frac{\delta^3 f}{\delta x^3}(x_0,y_0)\cdot(\Delta x)^3 + 3\cdot\frac{\delta^3 f}{\delta x^2\delta y}(x_0,y_0)\cdot(\Delta x)^2\Delta y +$$
$$+3\cdot\frac{\delta^3 f}{\delta x\delta y^2}(x_0,y_0)\cdot\Delta x(\Delta y)^2 + \frac{\delta^3 f}{\delta y^3}(x_0,y_0)\cdot(\Delta y)^3\Bigg) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{k!}\cdot\left(\frac{\delta}{\delta x}\Delta x + \frac{\delta}{\delta y}\Delta y\right)^k\cdot f(x_0 + \xi\cdot\Delta x, y_0 + \eta\cdot\Delta y),$$
$$\Delta x = x - x_0, \quad \Delta y = y - y_0.$$

5.5 Экстремумы функций многих переменных

Определение 6 (Точка локального максимума (минимума)). Пусть X – метрическое пространство (МП), $f : X \to \mathbb{R}$. Точка x_0 называется *точкой локального максимума (минимума)*, если $\exists U(x_0) \subset X : \ \forall x \in U(x_0)$

$$f(x) \leqslant f(x_0) \quad \big(f(x) \geqslant f(x_0)\big)$$

Теорема 5 (Необходимое условие локального экстремума). Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$ – точка локального экстремума, тогда в точке x_0 $\forall i = \overline{1,n}$

$$\frac{\delta(x_0)}{\delta x^i} = 0.$$

Доказательство. Фиксируем все переменные за исключением x^i, тогда можно рассматривать функцию $f(x^1,\ldots,x^i,\ldots,x^n)$ как функцию одной переменной, для которой x_0 – точка локального экстремума, следовательно $\frac{\delta f}{\delta x^i}(x_0) = 0$,

$$i - \text{произвольная} \ \Rightarrow \forall i \text{ выполняется.}$$

□

Определение 7 (Критическая точка функции). Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}^k$ – дифференцируемо в точке $x_0 \in D$. Точка x_0 называется *критической точкой функции* $f(x)$, если:

$$rank\Im f(x_0) < \min(n, k),$$

где $\Im f(x_0)$ – матрица Якоби функции $f(x_0)$.

Пример. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} x \cdot y \\ y - z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Im f(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{\delta u}{\delta x} & \frac{\delta u}{\delta y} & \frac{\delta u}{\delta z} \\ \frac{\delta v}{\delta x} & \frac{\delta v}{\delta y} & \frac{\delta v}{\delta z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & x & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (x_0) = \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases} \text{– критическая точка.}$$

$$n = 3, \quad k = 2$$

Примечание. Множество точек прямой, получаемой пересечением плоскостей $x = 0$ и $y = 0$ – множество критических точек функции $f(x, y, z)$.

Определение 8 (Квадратичная форма на касательном пространстве). Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}$, f имеет производную в точке $x_0 \in D$. На касательном пространстве $T\mathbb{R}^n_{(x_0)}$ определим квадратичную форму

$$Q(h) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\delta^2 f}{\delta x^i \delta x^j}(x_0) \cdot h^i h^j, \quad Q : T\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}.$$

Теорема 6 (Достаточное условие локального экстремума). Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке $x \in D$, x – критическая точка для f, $f \in C^n(D, \mathbb{R})$, $n = 2$. Тогда, если:

1. $Q(h)$ – знакоположительна, то в точке x – локальный минимум.
2. $Q(h)$ – знакоотрицательна, то в точке x – локальный максимум.
3. $Q(h)$ может принимать различные значения $(> 0, < 0)$, тогда в точке x нет экстремума.

Доказательство. По формуле Тейлора:

$$f(x+h)-f(x)=\frac{1}{2}\cdot\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\delta^2 f(x)}{\delta x^i\delta x^j}\cdot h^ih^j+o\big(\|h\|^2\big)=$$
$$=\frac{\|h\|^2}{2}\cdot\left(\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\delta^2 f(x)}{\delta x^i\delta x^j}\cdot\frac{h^i}{\|h\|}\frac{h^j}{\|h\|}+\alpha(h)\right)=\left|\begin{array}{c}\text{где } \alpha(h)\to 0 \text{ при}\\ h\to 0\end{array}\right|=$$
$$=\frac{\|h\|^2}{2}\cdot\left(Q\left(\frac{h}{\|h\|}\right)+\alpha(h)\right).$$

Вектор $\frac{h}{\|h\|} \in S^{(n-1)}$ – единичная $(n-1)$-мерная сфера. Сфера $S^{(n-1)}$ – компактное множество $\Rightarrow$ по теореме Больцано - Вейерштраса, $\exists e_1, e_2 \in S^{(n-1)}$:

$$Q_1(e_1)=\max Q(h)=M,\quad Q_2(e_2)=\min Q(h)=m$$

1. Если $Q(h)$ – знакоположительна $\Rightarrow m>0$. Следовательно, $\exists\delta>0:$ $\forall h\ \|h\|<\delta,\ |\alpha(h)|<m$

$$Q\left(\frac{h}{\|h\|}\right)+\alpha(h)>0,$$

следовательно, $\forall h:\ \|h\|<\delta$

$$f(x+h)-f(x)>0,$$

по определению, x – точка локального минимума (здесь $\|h\|<\delta$ – аналог понятия окрестности точки x).

2. Если $Q(h)$ – знакоотрицательна, то $M<0$. Тогда $\exists\delta>0:\forall h\ \|h\|<\delta\ |\alpha(h)|<-M$

$$Q\left(\frac{h}{\|h\|}\right)+\alpha(h)<0,$$

следовательно, $\forall h:\ \|h\|<\delta$

$$f(x+h)-f(x)<0,$$

тогда x – точка локального максимума.

3. Если $Q(h)$ – знакопеременна, то $m<0<M,\ \forall t>0$

$$Q(t\cdot e_2)<0,\quad Q(t\cdot e_1)>0,$$

тогда в точке x нет экстремума.

□

Замечание. На практике для определения max и min можно пользоваться критерием Сильвестра из алгебры.

Определение 9 (Наеявно заданная уравнением функция). Пусть D – область в $\mathbb{R}^k$, Ω – область в $\mathbb{R}^k$, $F : D \times \Omega \to \mathbb{R}^k$.

Пусть функция $f : D \to \Omega :$

$$y = f(x) \Leftrightarrow F(x, y) = 0.$$

Говорят, что уравнение $F(x, y) = 0$ *неявно задает* функцию $y = f(x)$.

Пример. $x^2 + y^2 = 1$

$$y = \pm\sqrt{1 - x^2}, \quad y = \begin{cases} \sqrt{1 - x^2}, & x \in Q \\ -\sqrt{1 - x^2}, & x \notin Q \end{cases}$$

Лекция 3: Теорема о неявной функции

от 12 сен 10:30

5.6 Теорема о неявной функции

Теорема 7 (О неявной функции). Пусть $F(x, y)$ отображает окрестность $U(x_0; y_0) \subset \mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}$, $F : U(x_0, y_0) \to \mathbb{R}$.

Пусть F имеет следующие свойства:

1. $F(x_0, y_0) = 0$.
2. $F(x, y) \in C^P(U, \mathbb{R})$, $p \geqslant 1$.
3. $\frac{\delta F}{\delta y}(x_0, y_0) \neq 0$.

Тогда $\exists$ открезки $I_x, I_y :\ f : I_x \to I_y$:

1. $I_x \times I_y \subset U(x_0, y_0)$.
2. $\forall x \in I_x\ y = f(x) \Leftrightarrow F(x, y) = 0$.
3. $f \in C^P(I_x, I_y)$.
4. $\forall x \in I_x\ f'(x) = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}$.

Доказательство. Будем считать, что окрестность $U(x_0, y_0)$ – круг с центром в точке (x_0, y_0). Для определенности будем считать, что $F'_y(x_0, y_0) > 0$.

В силу непрерывности F'_y $\exists$ окрестность $V(x_0, y_0) \subset U(x_0, y_0) :\ \forall (x, y) \in V\ F'_y(x, y) > 0$. Если посмотрим на функцию $F(x, y)$ при фиксированной x как на функцию по переменной y, то $F(\overline{x}, y)$ будет монотонной (в силу того, что $F'_y(\overline{x}, y) > 0$). Тогда для $\beta = \frac{1}{2}\tau$, где τ – радиус круга $U(x_0, y_0)$.

$$F(x_0, y_0 - \beta) < F(x_0, y_0) < F(x_0, y_0 + \beta).$$

Так как $F(x, y)$ непрерывна, то $\exists\delta > 0: \ \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$

$$F(x, y_0 - \beta) < 0, \quad F(x, y_0 + \beta) > 0.$$

При фиусированном x функция $f(\overline{x}, y)$ непрерывно монотонна, на концах отрезка $[y_0 - \beta; y_0 + \beta]$ имеет разные знаки, тогда $\exists! y_x \in [y_0 - \beta; y_0 + \beta]: \ F(\overline{x}, y_x) = 0$. В силу непрерывности $F(x, y)$ по x, $\exists\delta > 0: \forall x \in [x_0 - \delta; x_0 + \delta] \ F(x, y_x = 0)$.

Определим функцию $f : [x_0 - \delta; x_0 + \delta] \to [y_0 - \beta; y_0 + \beta]$ положив, что $y = f(x) \Leftrightarrow F(x, y) = 0$, то есть $y_x = f(x)$.

Положим $f \in C^{(P)}(I_x, I_y)$.

1. Покажем, что f – непрерывна.

   Для начала покажем, что f непрерывна в точке x_0.

   Пусть $\varepsilon > 0$ задано. Покажем, что $\exists\delta > 0: \ \forall x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta) \Rightarrow f(x) \in (y_0 - \varepsilon; y_0 + \varepsilon)$.

   Будем считать, что $\varepsilon < \beta \Rightarrow [y_0 - \varepsilon; y_0 + \varepsilon] \subset [y_0 - \beta; y_0 + \beta] \Rightarrow$ найдется отрезок $[x_0 - \delta; x_0 + \delta]$ и функция

   $$\hat{f}(x) : [x_0 - \delta; x_0 + \delta] \to [y_0 - \varepsilon; y_0 + \varepsilon],$$

   $$\hat{f}(x) = y \Leftrightarrow F(x, y) = 0.$$

   Но на $[x_0 - \delta; x_0 + \delta]$ $\hat{f}(x) \equiv f(x) \Rightarrow f\big([x_0 - \delta; x_0 + \delta]\big) \subset [y_0 - \varepsilon; y_0 + \varepsilon] \Rightarrow f(x)$ непрерывна в точке x_0.

   Теперь, пусть $x \in I_x = [x_0 - \delta; x_0 + \delta]$.

   Для точки (x, y_x) выполнены все условия теоремы $\Rightarrow \exists$ отрезок $[x - \alpha; x + \alpha] = \widehat{I_x}$ и $[y_x - \gamma; y_x + \gamma] = \widehat{I_y}$ и функция $g : \widehat{I_x} \to \widehat{I_y}: \ g(\overline{x}) = y \Leftrightarrow F(\overline{x}, y) = 0 \ \forall \overline{x} \in \widehat{I_x}$.

   Но на отрезке $[x - \alpha; x + \alpha]$ функция $g(x) \equiv f(x)$.

   По построению $g(x)$ непрерывна в точке x, следовательно и $f(x)$ непрерывна в точке x.

2. Покажем, что $f(x)$ дифференцируема на I_x.

   Пусть $x \in I_x, \ x + \Delta x \in I_x, \ y = f(x), \ y + \Delta y = f(x + \Delta x)$. Тогда

   $$\begin{aligned} 0 &= \underset{\substack{\parallel \\ 0}}{F(x + \Delta x, y + \Delta y)} - \underset{\substack{\parallel \\ 0}}{F(x, y)} = \\ &= \left| \begin{array}{c} \text{Теорема} \\ \text{о среднем} \end{array} \right| = F'_x(x + \theta \cdot \Delta x, y + \theta \cdot \Delta y)\Delta x + \\ &\qquad + F'_y(x + \theta \cdot \Delta x, y + \theta \cdot \Delta y)\Delta y, \ 0 < \theta < 1 \Rightarrow \end{aligned}$$

   $$\Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-F'_x(x + \theta \cdot \Delta x, y + \theta \cdot \Delta y)}{F'_y(x + \theta \cdot \Delta x, y + \theta \cdot \Delta y)}$$

Поскольку f – непрерывная функция, то при $\Delta x \to 0: \quad \Delta y \to 0$ $\big(f(x+\Delta x) - f(x) = \Delta y \to 0\big)$. Тогда:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)} \tag{5.3}$$

Из теоремы о непрерывности композиции непрерывной функции $\Rightarrow f'(x)$ – непрерывна в точке $x \Rightarrow f \in C^{(1)}(I_x, I_y)$.

Если $F \in C^{(p)}(U, \mathbb{R}),\ p > 1$, то:

$$f''(x) = \left(-\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}\right)' = \frac{(-F'_x)' \cdot F'_y + F'_x \cdot (F'_y)'}{(F'_y)^2} = \\ = \frac{-\big(F''_{xx} + F''_{xy} \cdot \underset{y'(x)}{\underset{\parallel}{f'(x)}}\big) \cdot F'_y + F'_x \cdot \big(F''_{yx} + F''_{yy} \cdot f'(x)\big)}{(F'_y)^2}, \tag{5.4}$$

где $F''_{xx}, F''_{xy}, F''_{yy}$ вычисляются в точке $\big(x, f(x)\big) \Rightarrow f(x) \in C^{(2)}(I_x, I_y)$, если $F(x,y) \in C^{(2)}(U, \mathbb{R})$.

Заметим, что в левой части выражения 5.4 производная функции f имеет порядок на 1 больше, чем производная функции f в правой части. Тогда по индукции можно показать, что $f \in C^{(p)}(I_x, I_y)$, если $F(x,y) \in C^{(p)}(U, \mathbb{R})$.

$\square$

Теорема 8 (О неявной функции вида $F(x^1, \dots, x^m, y) = 0$)**.** Если $F: U \to \mathbb{R}$, где $U \subset \mathbb{R}^{m+1}$ – окрестность точки $(x_0, y_0) = (x_0^1, \dots, x_0^m, y_0) \in \mathbb{R}^{m+1}$:

1. $F(x_0, y_0) = F(x_0^1, \dots, x_0^m, y_0) = 0$.
2. $F \in C^{(p)}(U, \mathbb{R})$.
3. $F'_y(x_0, y_0) = F'_y(x_0^1, \dots, x_0^m, y_0) \neq 0$, тогда $\exists (m+1)$-мерный промежуток $I = I_x^m \times I_y^1$, где:

$$I_x^m = \left\{x = (x^1, \dots, x^m) \in \mathbb{R}^m \;\middle|\; |x^i - x_0^i| < \alpha^i,\ i = \overline{1,m}\right\},$$
$$I_y^1 = \left\{y \in \mathbb{R} \;\middle|\; |y - y_0| < \beta\right\},$$

$I \subset U$ и $\exists$ функция $f: I_x^m \to I_y^1$:

(a) $f \in C^{(p)}(I_x^m, I_y^1)$.

(b) $\forall (x,y) \in I = I_x^m \times I_y^1 \quad y = f(x^1, \dots, x^m) \Leftrightarrow F(x^1, \dots, x^m, y) = 0$.

(c) $f'(x) = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}$, то есть $\frac{\delta f}{\delta x^i} = -\frac{F'_{x^i}(x,y)}{F'_y(x,y)}$.

Доказательство. Повторить доказательство теоремы 7, понимая под

x набор $(x^1, \dots, x^m)$, под δ – набор $(\alpha^1, \dots, \alpha^m)$.

Если в функциях $f(x^1, \dots, x^m)$ и $F(x^1, \dots, x^m, y)$ фиксировать все переменные, кроме x^i и y, то мы окажемся в условиях теоремы 7, при этом роль x играет переменная $x^i \Rightarrow$ верен пункт 3.

И рассуждая аналогично доказательству теоремы 7, получаем, что

$$f \in C^{(p)}(I_x^m, I_y^1), \text{ если } F \in C^{(p)}(U, \mathbb{R}).$$

□

Примечание (Общий случай). Рассмотрим систему уравнений:

$$\begin{cases} F^1(x^1, \dots, x^m, y^1, \dots, y^n) = 0 \\ F^2(x^1, \dots, x^m, y^1, \dots, y^n) = 0 \\ \vdots \\ F^n(x^1, \dots, x^m, y^1, \dots, y^n) = 0 \end{cases}, \tag{5.5}$$

которую будем решать относительно $y^1, \dots, y^n$, то есть искать *локально* эквивалентную систему функциональных связей,

$$\begin{cases} y^1 = f^1(x^1, \dots, x^m) \\ y^2 = f^1(x^1, \dots, x^m) \\ \vdots \\ y^n = f^1(x^1, \dots, x^m) \end{cases}. \tag{5.6}$$

Для кратности и удобства будем считать, что $x = (x^1, \dots, x^m)$, $y = (y^1, \dots, y^n)$, тогда систему 5.5 будем записывать как $F(x, y) = 0$, а систему 5.6 – как $y = f(x)$. Если

$$\begin{array}{ll} x_0 = (x_0^1, \dots, x_0^m), & y_0 = (y_0^1, \dots, y_0^n), \\ \alpha = (\alpha^1, \dots, \alpha^m), & \beta = (\beta^1, \dots, \beta^n), \end{array}$$

то запись $|x - x_0| < \alpha$ или $|y - y_0| < \beta$ будет означать, что

$$\begin{array}{l} |x^i - x_0^i| < \alpha^i, \ i = \overline{1, m} \\ |y^i - y_0^i| < \beta^i, \ i = \overline{1, n} \end{array}.$$

Далее положим, что

$$f'(x) = \begin{pmatrix} \frac{\delta f^1}{\delta x^1} & \cdots & \frac{\delta f^1}{\delta x^m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\delta f^n}{\delta x^1} & \cdots & \frac{\delta f^n}{\delta x^m} \end{pmatrix}(x)$$

$$F'_x(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\delta F^1}{\delta x^1} & \cdots & \frac{\delta F^1}{\delta x^m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\delta F^n}{\delta x^1} & \cdots & \frac{\delta F^n}{\delta x^m} \end{pmatrix}(x, y)$$

$$F'_y(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\delta F^1}{\delta y^1} & \cdots & \frac{\delta F^1}{\delta y^m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\delta F^n}{\delta y^1} & \cdots & \frac{\delta F^n}{\delta y^m} \end{pmatrix}(x, y)$$

Заметим, что матрица $F'_y(x,y)$ – квадратная, следовательно она обратима тогда и только тогда, когда $\left|F'_y(x,y)\right| \neq 0$ (определитель $\neq 0$).

Обозначим матрицу, обратную к $F'_y(x,y)$ как $\left[F'_y(x,y)\right]^{-1}$.

Теорема 9 (О неявной функции, общий случай)**.** Пусть $F : U(x_0, y_0) \to \mathbb{R}^n$, где $U(x_0, y_0) \subset \mathbb{R}^{m+n}$ – окрестность точки (x_0, y_0) такая, что

1. $F \in C^{(p)}(U, \mathbb{R}^n)$, $p \geqslant 1$.
2. $F(x_0, y_0) = 0$.
3. $F'_y(x_0, y_0)$ – обратная матрица.

Тогда $\exists (n+m)$-мерный промежуток $I = I_x^m \times I_y^n \subset U(x_0; y_0)$, где

$$I_x^m = \left\{x \in \mathbb{R}^m \;\middle|\; |x - x_0| < \alpha\right\},$$
$$I_x^n = \left\{y \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; |y - y_0| < \beta\right\},$$

то есть $f : I_x^m \to I_y^n$:

- $\forall (x,y) \in I_x^m \times I_y^n \;\; F(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x)$.
- $f'(x) = -\left[F'_y(x,y)\right]^{-1} \cdot F'_x(x,y)$.

Доказательство. Например, можно посмотреть в Зориче. □

5.7 Приложение теоремы о неявной функции

Определение 10 (Диффиоморвизм класса $C^{(p)}$, гомеоморфизм)**.** Пусть D, G – области в $\mathbb{R}^n$. Отображение $f : D \to G$ називатеся *диффиоморфизмом класса* $C^{(p)}$, $p \geqslant 0$, если:

1. f – обратимое.
2. $f \in C^{(p)}(D, G)$.
3. $f^{-1} \in C^{(p)}(D, G)$.

При $p = 0$ f называется *гомеоморфизмом*, то есть f – гомеоморфизм, если f – взаимно однозначное отображение и f, f^{-1} – непрерывны.

Пример. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$ – нет.
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $f(x) = e^x$ – да, диффиоморфизм класса C^∞.

Пример. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ – нет.
$f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ – да, диффиоморфизм класса C^∞.

Пример. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3$ – гомеоморфизм класса C^0, но не диффиоморфизм, так как $f^{-1} = \sqrt[3]{y}$ теряет непрерывность.

Теорема 10 (Об обратной функции). Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}^n$, $x_0 \in D$. Кроме того,

- $f \in C^{(p)}(D, \mathbb{R}^n),\ p \geqslant 1$.
- $f(x_0) = y_0$.
- $\underset{\text{(матрица Якоби в } x_0)}{f'(x_0)}$ – обратимая.

Тогда $\exists$ окрестности U, V точек x_0 и y_0 соответственно:

- $f : U \to V$ – диффиоморфизм U на V класса $C^{(p)}(U, V)$.
- $\forall y \in V\ [f^{-1}]'(y) = [f'(x)]^{-1},\ y = f(x)$.

Доказательство. Рассмотрим $F(x, y) = y - f(x)$.

1. $F(x, y) \in C^{(p)}(D \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.
2. $F'_x(x_0, y_0) = -f'(x)$ – обратима.
3. $F(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x)$.

Следовательно, по теореме 7 $\exists n$-мерные промежутки I^n_x и I^n_y и $\exists$ отображение $g(y)$:

1. $g : I^n_y \to I^n_x$.
2. $g(y) = x \Leftrightarrow F(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x)$.
3. $g(y) \in C^{(p)}(I^n_y, I^n_x)$.
4. $\forall y \in I^n_y\ g'(y) = -\Big[F'_x\big(g(y), y\big)\Big] \cdot F'_y\big(g(y), y\big)$, где $g'(y)$, $\Big[F'_x\big(g(y), y\big)\Big]$, $F'_y\big(g(y), y\big)$ – матрицы.

$$f(x) = \begin{pmatrix} f^1(x^1, \dots, x^n) \\ f^2(x^1, \dots, x^n) \\ \vdots \\ f^n(x^1, \dots, x^n) \end{pmatrix}$$

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} y^1 - f^1(x^1, \dots, x^n) \\ y^2 - f^2(x^1, \dots, x^n) \\ \vdots \\ y^n - f^n(x^1, \dots, x^n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F^1(x,y) \\ F^2(x,y) \\ \vdots \\ F^n(x,y) \end{pmatrix}$$

$$F'_x(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\delta F^1}{\delta x^1} & \cdots & \frac{\delta F^1}{\delta x^n} \\ \frac{\delta F^2}{\delta x^1} & \cdots & \frac{\delta F^2}{\delta x^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\delta F^n}{\delta x^1} & \cdots & \frac{\delta F^n}{\delta x^n} \end{pmatrix}(x,y) = \begin{pmatrix} -\frac{\delta f^1}{\delta x^1} & \cdots & -\frac{\delta f^1}{\delta x^n} \\ -\frac{\delta f^2}{\delta x^1} & \cdots & -\frac{\delta f^2}{\delta x^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{\delta f^n}{\delta x^1} & \cdots & -\frac{\delta f^n}{\delta x^n} \end{pmatrix}(x)$$

$$F'_y(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\delta F^1}{\delta y^1} & \cdots & \frac{\delta F^1}{\delta y^n} \\ \frac{\delta F^2}{\delta y^1} & \cdots & \frac{\delta F^2}{\delta y^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\delta F^n}{\delta y^1} & \cdots & \frac{\delta F^n}{\delta y^n} \end{pmatrix}(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Положим $V = I^n_y$, $U = g(V)$.
Тогда из 1. и 2. $\Rightarrow f\big|_U$ и $g\big|_V$ – взаимно обратны.
Из 4. $\Rightarrow \forall y \in V$

$$g'(y) = -\Big[F'_x\big(g(y), y\big)\Big]^{-1} = \big[f'(x)\big]^{-1},$$
$$g'(y) = \big[f^{-1}(y)\big]^{-1} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \big[f'(x)\big]^{-1} = \big[f^{-1}(x)\big]'.$$

Исходя из свойств отображения f и приведенных выше построений, f – диффиоморфизм. □

Лекция 4: Продолжение

от 17 сен 8:44

Определение 11 (k-мерная поверхность)**.** Множество $S \subset \mathbb{R}^n$ называется *k-мерной поверхностью*, если $\forall x \in S\ \exists U(x) \subset \mathbb{R}^n$ и $\exists$ диффиоморфизм $\phi : U(x) \to I^n$:

$$\phi\big(U(x) \cap S\big) = I^k,$$

где $I^n = \Big\{x \in \mathbb{R}^n \;\Big|\; |x^i| < 1\Big\}$,

$$I^k = \Big\{x \in \mathbb{R}^n \;\Big|\; x^{k+1} = x^{k+2} = \ldots = x^n = 0\Big\}.$$

Пример. $S = \mathbb{R}^n$ – поверхность в $\mathbb{R}^n$,

$$t^i(x^i) = \frac{2}{\pi} \cdot \arctan x^i,$$

$$\mathfrak{J} = \begin{pmatrix} \frac{\delta t^1}{\delta x^1} & \frac{\delta t^1}{\delta x^2} & \dots & \frac{\delta t^1}{\delta x^n} \\ \frac{\delta t^2}{\delta x^1} & \frac{\delta t^2}{\delta x^2} & \dots & \frac{\delta t^2}{\delta x^n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\delta t^n}{\delta x^1} & \frac{\delta t^n}{\delta x^2} & \dots & \frac{\delta t^n}{\delta x^n} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{1+(x^1)^2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{1+(x^2)^2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{1+(x^n)^2} \end{pmatrix}$$

Утверждение. Пусть задана система уравнений:

$$\begin{cases} F^1(x^1, \dots, x^n) = 0 \\ \vdots \\ F^{n-k}(x^1, \dots, x^n) = 0 \end{cases}, \quad F^i(x) \in C^{(1)} \tag{5.7}$$

Кроме того,

$$\begin{vmatrix} \frac{\delta F^1}{\delta x^1} & \dots & \frac{\delta F^1}{\delta x^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\delta F^{n-k}}{\delta x^1} & \dots & \frac{\delta F^{n-k}}{\delta x^n} \end{vmatrix}(x) \neq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Тогда решение этой системы является k-мерной поверхностью в $\mathbb{R}^n$.

Доказательство. По теореме о неявной функции, система 5.7 эквивалентна системе

$$\begin{cases} x^{k+1} = f^1(x^1, \dots, x^k) \\ x^{k+2} = f^2(x^1, \dots, x^k) \\ \vdots \\ x^n = f^{n-k}(x^1, \dots, x^k) \end{cases}$$

Положим:

$$\begin{aligned} t^1 &= x^1 \\ t^2 &= x^2 \\ &\vdots \\ t^k &= x^k \\ t^{k+1} &= x^{k+1} - f^1(x^1, \dots, x^k) = 0 \\ t^{k+2} &= x^{k+2} - f^2(x^1, \dots, x^k) = 0 \\ &\vdots \\ t^n &= x^n - f^{n-k}(x^1, \dots, x^k) = 0 \end{aligned}$$

Таким образом построенное отображение является диффиоморфизмом $\Rightarrow$ решение системы 5.7 – k-мерная поверхность в $\mathbb{R}^n$. $\square$

Определение 12 (Локальная карта или параметризация поверхности). Пусть S – k-мерная поверхность в $\mathbb{R}^n$, $x_0 \in S$ и $\phi : U(x_0) \to I^n$ – диффиоморфизм:

$$\phi\big(U(x_0) \cap S\big) = I^k.$$

Ограничение ϕ^{-1} на I^k будем называть *локальной картой* или *параметризацией поверхности* S в окрестности точки x_0.

Определение 13 (Касательное пространство). Пусть S – k-мерная поверхность в $\mathbb{R}^n$, $x_0 \in S$, $x = x(t) : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ – параметризация S в окрестности точки x_0, при этом $x_0 = x(0)$.

Касательным пространством (или плоскостью) к S в точке x_0 называется k-мерная плоскость, заданная уравнением:

$$x = x_0 + x'(0) \cdot t, \tag{5.8}$$

$$x_0 = (x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^n)$$

$$x(t) = \begin{cases} x^1(t^1, \dots, t^k) \\ x^2(t^1, \dots, t^k) \\ \vdots \\ x^n(t^1, \dots, t^k) \end{cases}$$

$$x'(t) = \begin{pmatrix} \frac{\delta x^1}{\delta t^1} & \dots & \frac{\delta x^1}{\delta t^k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\delta x^n}{\delta t^1} & \dots & \frac{\delta x^n}{\delta t^k} \end{pmatrix}(t), \quad t = \begin{pmatrix} t^1 \\ t^2 \\ \vdots \\ t^k \end{pmatrix}$$

Таким образом касательное пространство задается системой из 5.8:

$$\begin{cases} x^1 = x_0^1 + \frac{\delta x^1}{\delta t^1}(0) \cdot t^1 + \dots + \frac{\delta x^1}{\delta t^k}(0) \cdot t^k \\ x^2 = x_0^2 + \frac{\delta x^2}{\delta t^1}(0) \cdot t^1 + \dots + \frac{\delta x^2}{\delta t^k}(0) \cdot t^k \\ \vdots \\ x^n = x_0^n + \frac{\delta x^n}{\delta t^1}(0) \cdot t^1 + \dots + \frac{\delta x^n}{\delta t^k}(0) \cdot t^k \end{cases}.$$

Пример. Пусть $\gamma = \gamma(t)$ – гладкая кривая в $\mathbb{R}^3$, $\gamma : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$.

Обозначим $x_0 = x(0)$, $y_0 = y(0)$, $z_0 = z(0)$.

5.8 – касательное пространство к кривой γ в точке x_0.

$$\begin{cases} x = x_0 + x'(0) \cdot t \\ y = y_0 + y'(0) \cdot t \\ z = z_0 + z'(0) \cdot t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - x_0 = x'(0) \cdot t \\ y - y_0 = y'(0) \cdot t \\ z - z_0 = z'(0) \cdot t \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x - x_0}{x'(0)} = \frac{y - y_0}{y'(0)} = \frac{z - z_0}{z'(0)} = t.$$

Пример. $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

Пусть $z_0 > 0$, тогда в окрестности точки (x_0, y_0, z_0) сферу можно параметризировать следующими уравнениями:

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = \sqrt{1 - u^2 - v^2} \end{cases}.$$

Касательное пространство к сфере в точке (x_0, y_0, z_0):

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\delta x}{\delta u} & \frac{\delta x}{\delta v} \\ \frac{\delta y}{\delta u} & \frac{\delta y}{\delta v} \\ \frac{\delta z}{\delta u} & \frac{\delta z}{\delta v} \end{pmatrix} (u_0, v_0) \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + \frac{\delta x}{\delta u}(u_0, v_0) \cdot u + \frac{\delta x}{\delta v}(u_0, v_0) \cdot v \\ y = y_0 + \frac{\delta y}{\delta u}(u_0, v_0) \cdot u + \frac{\delta y}{\delta v}(u_0, v_0) \cdot v \\ z = z_0 + \frac{\delta z}{\delta u}(u_0, v_0) \cdot u + \frac{\delta z}{\delta v}(u_0, v_0) \cdot v \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + u \\ y = y_0 + v \\ z = z_0 - \frac{u_0}{\sqrt{1 - u_0^2 - v_0^2}} \cdot u - \frac{v_0}{\sqrt{1 - u_0^2 - v_0^2}} \cdot v \end{cases}.$$

Утверждение. Пусть S – k-мерная поверхность в $\mathbb{R}^n$ задается системой уравнений:

$$\begin{cases} F^1(x^1,\dots,x^n) = 0 \\ \vdots \\ F^{n-k}(x^1,\dots,x^n) = 0, \end{cases} \text{, причем } \begin{vmatrix} \frac{\delta F^1}{\delta x^{k+1}} & \dots & \frac{\delta F^1}{\delta x^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\delta F^{n-1}}{\delta x^{k+1}} & \dots & \frac{\delta F^{n-1}}{\delta x^n} \end{vmatrix} (x_0) \neq 0 \quad (5.9)$$

Тогда касательная плоскость к S в точке x_0 задается системой уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\delta F^1}{\delta x^1}(x_0)\cdot(x^1 - x_0^1) + \dots + \frac{\delta F^1}{\delta x^n}(x_0)(x^n - x_0^n) = 0 \\ \vdots \\ \frac{\delta F^{n-k}}{\delta x^1}(x_0)\cdot(x^1 - x_0^1) + \dots + \frac{\delta F^{n-k}}{\delta x^n}(x_0)(x^n - x_0^n) = 0 \end{cases},$$

или кратко:

$$F'(x_0)\cdot(x - x_0) = 0.$$

Доказательство. Обозначим $(x^1,\dots,x^k) = u,\ (x^{k+1},\dots,x^n) = v$,

$$F = \begin{pmatrix} F^1 \\ \vdots \\ F^{n-k} \end{pmatrix}.$$

Тогда условия утверждения запишем в виде:

$$F(u,v) = 0, \quad \left|F'_v(u_0,v_0)\right| \neq 0.$$

Тогда по теореме о неявной функции система 5.9 эквивалентна системе

$$\begin{cases} u = u \\ v = f(u) \end{cases}.$$

Тогда касательная плоскость задается:

$$\text{роль } t = \begin{pmatrix} t^1 \\ \vdots \\ t^k \end{pmatrix} \text{ играет } u = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^k \end{pmatrix}.$$

Тогда систему можно записать в виде:

$$\begin{cases} x^1 = t^1 \\ \vdots \\ x^k = t^k \\ x^{k+1} = f^1(t^1,\dots,t^k) \\ \vdots \\ x^n = f^{n-k}(t^1,\dots,t^k) \end{cases},$$

$$t_0 = (t_0^k,\dots,t_0^k) = (x_0^1,\dots,x_0^k).$$

$$x'(t_0) = \begin{pmatrix} \frac{\delta x^1}{\delta t^1} & \dots & \frac{\delta x^1}{\delta t^k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\delta x^k}{\delta t^1} & \dots & \frac{\delta x^k}{\delta t^k} \\ \frac{\delta f^1}{\delta t^1} & \dots & \frac{\delta f^1}{\delta t^k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\delta f^{n-k}}{\delta t^1} & \dots & \frac{\delta f^{n-k}}{\delta t^k} \end{pmatrix}(t_0),$$

$$x = x_0 + x'(t_0) \cdot t.$$

$$\begin{cases} x^1 = x_0^1 + 1 \cdot t^1 \\ \vdots \\ x^k = x_0^k + 1 \cdot t^k \\ x^{k+1} = x_0^{k+1} + \frac{\delta f^1}{\delta t^1}(t_0) \cdot t^1 + \ldots + \frac{\delta f^1}{\delta t^k}(x_0) \cdot t^k \\ \vdots \\ x^n = x_0^n + \frac{\delta f^{n-k}}{\delta t^1}(t_0) \cdot t^1 + \ldots + \frac{\delta f^{n-k}}{\delta t^k}(t_0) \cdot t^k \end{cases} \tag{5.10}$$

Из 5.10 следует, что:

$$\begin{aligned} t^1 &= x^1 - x_0^1, \\ t^2 &= x^2 - x_0^2, \\ &\vdots \\ t^k &= x^k - x_0^k. \end{aligned}$$

Из теоремы 7:

$$f'(u_0) = -\left[F'_v(u_0, v_0)\right]^{-1} \cdot F'_u(u_0, v_0).$$

Преобразуем 5.10:

$$\begin{cases} \left.\begin{matrix} x^1 - x_0^1 = t^1 \\ \vdots \\ x^k - x_0^k = t^k \end{matrix}\right\} u - u_0 = u - u_0 \\ x^{k+1} - x_0^{k+1} = \frac{\delta f^1}{\delta t^1}(t_0) \cdot (x^1 - x_0^1) + \ldots + \frac{\delta f^1}{\delta t^k}(t_0) \cdot (x^k - x_0^k) \\ \vdots \\ x^n - x_0^n = \frac{\delta f^{n-k}}{\delta t^1}(t_0) \cdot (x^1 - x_0^1) + \ldots + \frac{\delta f^{n-k}}{\delta t^k}(t_0) \cdot (x^k - x_0^k) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u - u_0 = u - u_0 \\ v - v_0 = f'(u_0) \cdot (u - u_0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u - u_0 = u - u_0 \\ v - v_0 = \underbrace{-\left[F'_v(u_0, v_0)\right]^{-1} \cdot F'_u(u_0, v_0) \cdot (u - u_0)}_{f'(u_0)} \quad \Big| \cdot F'_v(u_0, v_0) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left[F'_v(u_0, v_0)\right](v - v_0) + F'_u(u_0, v_0) \cdot (u - u_0) = 0. \qquad \square$$

Примечание. Итак, мы вывели, что если поверхность задана системой уравнений

$$\begin{cases} F^1(x^1, \dots, x^n) = 0 \\ \vdots \\ F^{n-k}(x^1, \dots, x^n) = 0 \end{cases} \quad \text{или } F(x) = 0,$$

$$F = \begin{pmatrix} F^1(x) \\ \vdots \\ F^{n-k}(x) \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} x = (x^1, \dots, x^n) \\ x_0 = (x_0^1, \dots, x_0^n) \end{matrix} .$$

Тогда уравнение касательной плоскости кратко записывается:

$$F_x'(x_0) \cdot (x - x_0) = 0.$$

Обозначим $x - x_0 = \xi$, то есть:

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \vdots \\ \xi^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' - x_0' \\ \vdots \\ x^n - x_0^n \end{pmatrix}.$$

Таким образом получаем, что уравнение касательного пространства (плоскости) имеет вид:

$$F_x'(x_0) \cdot \xi = 0.$$

Таким образом касательнаое пространство (плоскость) к поверхности, заданной уравнением $F(x) = 0$, в точке x_0 состоит из векторов ξ, удовлетворяющих уравнению:

$$F_x'(x_0) \cdot \xi = 0 \tag{5.11}$$

Лекция 5: Продолжение

от 22 сен 10:29

Теорема 11 (О структуре касательного пространства)**.** Пусть S – k-мерная поверхность в $\mathbb{R}^n$, $x_0 \in S$. Тогда касательное пространство TS_{x_0} в точке x_0 состоит из направляющих векторов касательных к гладким кривым на поверхности S, проходящих через точку x_0.

Доказательство. Пусть $x = x(t)$ – гладкая кривая в $\mathbb{R}^n$, то есть

$$\begin{cases} x^1 = x^1(t) \\ \vdots \\ x^n = x^n(t) \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

$x_0 = x(t_0)$. Касательный вектор в точке x_0 к кривой имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \frac{dx^1}{dt}(t_0) \\ \vdots \\ \frac{dx^n}{dt}(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^{1'}(t_0) \\ \vdots \\ x^{n'}(t_0) \end{pmatrix}.$$

1. Пусть S – k-мерная поверхность, задана системой уравнений $F(x) = 0$ и пусть $x = x(t)$ – гладкая кривая на S. Покажем, что вектор

$x'(t_0) = \begin{pmatrix} \frac{dx^1}{dt}(t_0) \\ \vdots \\ \frac{dx^n}{dt}(t_0) \end{pmatrix}$: $x'(t_0) \in TS_{x_0}$, $x_0 = x(t_0)$, то есть покажем, что $x'(t_0)$ удовлетворяет уравнению $F'_x(t_0) \cdot \xi = 0$.

Так как кривая $x = x(t)$ лежит на S, то $F\big(x(t)\big) = 0$ – верно. Продифференцируем $F\big(x(t)\big) = 0$ по t в точке x_0:

$$F'_x(x_0) \cdot x'(t_0) = 0,$$

это и есть уравнение касательного пространства, то есть $x'(t_0)$ удовлетворяет уравнению касательного пространства $F'_x(x_0) \cdot \xi = 0$.

2. Пусть $\xi = (\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^n) \in TS_{x_0}$, то есть ξ удовлетворяет уравнению $F'_x(x_0) \cdot \xi = 0$

   Покажем, что $\exists$ гладкая кривая l на поверхности S:

   - $x_0 \in l$
   - ξ является направляющим вектором касательной к l в точке x_0

   Поверхность S задана системой уравнений:

$$\begin{cases} F^1(x) = 0 \\ \vdots \\ F^{n-k}(x) = 0 \end{cases} \tag{5.12}$$

   Пусть

$$\begin{vmatrix} \frac{\delta F^1}{\delta x^{k+1}} & \cdots & \frac{\delta F^1}{\delta x^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\delta F^{n-k}}{\delta x^{k+1}} & \cdots & \frac{\delta F^{n-k}}{\delta x^n} \end{vmatrix} (x_0) \neq 0.$$

   По теореме о неявной функции, система 5.12 эквивалентна системе:

$$\begin{cases} x^{k+1} = f^1(x^1, \ldots, x^k) \\ \vdots \\ x^n = f^{n-k}(x^1, \ldots, x^k) \end{cases} \tag{5.13}$$

   Обозначим $u = (x^1, \ldots, x^k)$, $v = (x^{k+1}, \ldots, x^n)$, тогда 5.13 имеет вид:

$$v = f(u).$$

   Тогда по утверждению касательное пространство задается уравнениями:

$$\begin{cases} x^{k+1} = x_0^{k+1} + \frac{\delta f^1}{\delta x^1}(x_0) \cdot (x^1 - x_0^1) + \ldots + \frac{\delta f^1}{\delta x^k}(x_0) \cdot (x^k - x_0^k) \\ \vdots \\ x^n = x_0^n + \frac{\delta f^{n-k}}{\delta x^1}(x_0) \cdot (x^1 - x_0^1) + \ldots + \frac{\delta f^{n-k}}{\delta x^k}(x_0) \cdot (x^k - x_0^k) \end{cases} \tag{5.14}$$

Пусть

$$\eta = \begin{pmatrix} \eta' \\ \vdots \\ \eta^k \\ \eta^{k+1} \\ \vdots \\ \eta^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 - x_0^1 \\ \vdots \\ x^k - x_0^k \\ x^{k+1} - x_0^{k+1} \\ \vdots \\ x^n - x_0^n \end{pmatrix}.$$

Тогда система 5.14 примет вид:

$$\begin{cases} \eta^{k+1} = \frac{\delta f^1}{\delta x^1}(x_0) \cdot \eta^1 + \ldots + \frac{\delta f^1}{\delta x^k}(x_0) \cdot \eta^k \\ \vdots \\ \eta^n = \frac{\delta f^{n-k}}{\delta x^1}(x_0) \cdot \eta^1 + \ldots + \frac{\delta f^{n-k}}{\delta x^k}(x_0) \cdot \eta^k \end{cases} \tag{5.15}$$

Таким образом, если вектор $\xi \in TS_{x_0}$, то он полностью определяется своими первыми k координатами, а остальные можно волучить с помощью системы 5.15.

Построим кривую в $\mathbb{R}^n$, то есть зададим ее уравнением $x = x(t)$:

$$l: \begin{cases} x^1 = x_0^1 + \xi^1 t \\ \vdots \\ x^k = x_0^k + \xi^k t \\ \left.\begin{array}{l} x^{k+1} = f^1(x_0^1 + \xi^1 t, \ldots, x_0^k + \xi^k t) \\ \vdots \\ x^n = f^{n-k}(x_0^1 + \xi^1 t, \ldots, x_0^k + \xi^k t) \end{array}\right\} v = f(u) \end{cases} \tag{5.16}$$

Пусть точка x_0 соответствует параметру $t = 0$:

$$x(0) = \begin{cases} x^1 = x_0^1 \\ \vdots \\ x^k = x_0^k \\ x^{k+1} = f^1(x_0^1, \ldots, x_0^k) \\ \vdots \\ x^n = f^{n-k}(x_0^1, \ldots, x_0^k) \end{cases},$$

то есть кривая проходит через точку x_0.

Далее, функция f удовлетворяет условию $v = f(u) \Leftrightarrow F(u, v) = 0$. Тогда $F(u, f(u)) = 0 \Rightarrow l$, заданная системой 5.16, $l \subset S$.

$$(5.16)'_t: \ x'_t(0) = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \vdots \\ \xi^k \\ \frac{\delta f^1}{\delta x^1}(x_0) \cdot \xi^1 + \ldots + \frac{\delta f^1}{\delta x^k}(x_0) \cdot \xi^k \\ \vdots \\ \frac{\delta f^{n-k}}{\delta x^1}(x_0) \cdot \xi^1 + \ldots + \frac{\delta f^{n-k}}{\delta x^k}(x_0) \cdot \xi^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \vdots \\ \xi^k \\ \xi^{k+1} \\ \vdots \\ \xi^n \end{pmatrix}.$$

Таким образом построили гладкий путь, лежащий на поверхности S, проходящий через точку $x_0 \in S$, вектор $x'(t_0)$ – его касательный вектор $\in TS_{x_0}$.

$\square$

5.8 Условный экстремум функции многих переменных

Задача. Дана функция $u = f(x^1, \dots, x^n)$ и дана поверхность, заданная уравнениями:

$$\begin{cases} F^1(x^1, \dots, x^n) = 0 \\ \vdots \\ F^m(x^1, \dots, x^n) = 0 \end{cases} \tag{5.17}$$

Нужно найти точку $x_0 = (x_0^1, \dots, x_0^n)$, в которой:

$$f(x_0^1, \dots, x_0^n) = \max_{(\min)} f(x^1, \dots, x^n),$$

где max (min) берется по всем точкам $(x_0^1, \dots, x_0^n)$, удовлетворяющих уравнениям 5.17.

Задача (Геометрическая формулировка)**.** Пусть система 5.17 задает в пространстве $\mathbb{R}^n$ m-мерную поверхность S. Найти точку $x_0 \in S: \ \exists U_x(x_0) = U(x_0) \cap S: \ \forall x \in U_s(x_0)$:

$$\underset{x_0-\max}{f(x) \leqslant f(x_0)} \ (\text{или } \underset{x_0-\min}{f(x) \geqslant f(x_0)})$$

Определение 14 (Линия уровня (c-уровень))**.** Пусть $f: D \to \mathbb{R}, \ D \subset \mathbb{R}^n$ – область. *Линией уровня (c-уровнем)* функции f называется множество

$$N_c = \{x \in D \mid f(x) = c\}.$$

Лемма 1. Если x_0 – точка условного локального экстремума для функции f и x_0 не является критической для функции f (то есть $df(x_0) \neq 0$), то касательное пространство $TS_{x_0} \subset TN_{x_0}$, где

$$N_{x_0} = \{x \in D \mid f(x) = f(x_0)\},$$

– поверхность уровня, проходящая через x_0.

Доказательство. Пусть $\xi \in TS_{x_0}$. Пусть $x = x(t)$ – гладкая кривая на $S: \ x(0) = x_0, \ x'(0) = \xi$ (по теореме 11).

Так как точка x_0 – условный экстремум для функции f, то точка $t = 0$ есть локальный экстремум для функции $f\big(x(t)\big)$ (по теореме Ферма, потом нужно добавить ссылку),

$$\Big[f\big(x(t)\big)\Big]_t'(0) = 0 \Leftrightarrow f_x'(x_0)\cdot x_t'(0) = 0 \tag{5.18}$$

Касательное пространство к N_{x_0} в точке x_0 имеет уравнение:

$$f_x'(x_0)\cdot\xi = 0 \tag{5.19}$$

Заметим, что 5.18 и 5.19 – одно и то же уравнение, то есть

$$x_t'(0) = \xi \Rightarrow x_t'(0) \in TN_{x_0}.$$

□

Теорема 12 (Необходимое условие условного локального экстремума). Пусть система уровнений

$$\begin{cases} F^1(x^1,\dots,x^n) = 0 \\ \vdots \\ F^{n-k}(x^1,\dots,x^n) = 0 \end{cases} \tag{5.20}$$

задает $(n-k)$-мерную гладкую поверхность S в $D \subset \mathbb{R}^n$, D – область. Функция $f : D \to \mathbb{R}$ – гладкая. Если $x_0 \in S$ является точкой условного локального экстремума для функции f, то существует такой набор чисел $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-k} \in \mathbb{R}$:

$$gradf(x_0) = \sum_{i=1}^{n-k}\lambda_i\cdot gradF^i(x_0).$$

Доказательство. Касательное пространство TS_{x_0} задается системой уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\delta F^1}{\delta x^1}(x_0)\cdot\xi^1 + \dots + \frac{\delta F^1}{\delta x^n}(x_0)\cdot\xi^n = 0 \\ \vdots \\ \frac{\delta F^{n-k}}{\delta x^1}(x_0)\cdot\xi^1 + \dots + \frac{\delta F^{n-k}}{\delta x^n}(x_0)\cdot\xi^n = 0 \end{cases}, \tag{5.21}$$

но $\forall i = \overline{1, n-k}$:

$$\left\{\frac{\delta F^i}{\delta x^1}\cdot(x_0),\dots,\frac{\delta F^i}{\delta x^n}\cdot(x_0)\right\} = gradF^i(x_0).$$

Перепишем 5.21 в виде:

$$\begin{cases} \big(gradF^1(x_0),\xi\big) = 0 \\ \vdots \\ \big(gradF^{n-k}(x_0,),\xi\big) = 0 \end{cases} \tag{5.22}$$

Касательное пространство TN_{x_0} к $N_{x_0} = \big\{x \in D \bigm| f(x) = f(x_0)\big\}$

задается уравнением: $f'(x_0) \cdot \xi = 0$. Заметим, что:

$$f'(x_0) = gradf(x_0) = \left\{ \frac{\delta f(x_0)}{\delta x^1}, \ldots, \frac{\delta f(x_0)}{\delta x^n} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x_0) \cdot \xi = 0 \Leftrightarrow \big(gradf(x_0), \xi \big) = 0 \tag{5.23}$$

Таким образом из леммы 1 следует, что $\forall \xi$, удовлетворяющего системе уравнений 5.22, так же удовлетворяет уравнению 5.23, то есть из того, что $\forall i \in \overline{1, n-k}$

$$\xi \perp gradF^i(x_0) \Rightarrow \xi \perp gradf(x_0) \Rightarrow$$

$\Rightarrow \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-k} \in \mathbb{R}$:

$$gradf(x_0) = \sum_{i=1}^{n-k} \lambda_i \cdot gradF^i(x_0).$$

□

Метод Лагранжа

Задача. Пусть требуется найти условный экстремум функции $f : D \to \mathbb{R}$, D – область в $\mathbb{R}^n$, на поверхности S, заданной системой уравнений:

$$\begin{cases} F^1(x^1, \dots, x^n) = 0 \\ \vdots \\ F^k(x^1, \dots, x^n) = 0 \end{cases}.$$

Составим функцию Лагранжа:

$$L(x, \lambda) = L(x^1, \dots, x^n, \lambda^1, \dots, \lambda^k) = \\ = f(x^1, \dots, x^n) + \sum_{i=1}^{k} \lambda^i \cdot F^i(x^1, \dots, x^n),$$

$\lambda = (\lambda^1, \dots, \lambda^k)$, $\lambda^i \in \mathbb{R}$ – коэффициент, в общем случае пока неизвестен.

Необходимое условие локального экстремума для функции L :

$$\begin{cases} \left.\begin{array}{l} \frac{\delta L}{\delta x^1} = \frac{\delta f}{\delta x^1} + \sum_{i=1}^k \lambda^i \cdot \frac{\delta F^i}{\delta x^1} = 0 \\ \vdots \\ \frac{\delta L}{\delta x^n} = \frac{\delta f}{\delta x^n} + \sum_{i=1}^k \lambda^i \cdot \frac{\delta F^i}{\delta x^n} = 0 \end{array}\right\} \text{необходимое условие условного экстремума функции } f \\ \left.\begin{array}{l} \frac{\delta L}{\delta \lambda^1} = F^1(x^1, \dots, x^n) = 0 \\ \vdots \\ \frac{\delta L}{\delta \lambda^k} = F^k(x^1, \dots, x^n) = 0 \end{array}\right\} \text{поверхность } S \end{cases} \tag{5.24}$$

Определение 15 (Условный экстремум)**.** Пусть $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ – область, S – поверхность в D, *условным экстремумом* функции f называется экстремум функции $f\big|_S$.

Лекция 6: Продолжение

от 28 сен 8:48

Достаточное условие условного локального экстремума

Примечание. Пусть $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ – область, $f \in C^{(2)}(D, \mathbb{R})$, S – $(n-k)$-мерная поверхность в D, заданная системой уравнений:

$$\begin{cases} F^1(x^1, \dots, x^n) = 0 \\ \vdots \\ F^k(x^1, \dots, x^n) = 0 \end{cases}.$$

Функция Лагранжа:

$$L(x,\lambda) = f(x^1,\dots,x^n) + \sum_{i=0}^{k} \lambda_i \cdot F^i(x^1,\dots,x^n).$$

Здесь $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ выбираются таким образом, чтобы было выполнено необходимое условие условного экстремума в точке x_0 (5.24).

$$\begin{cases} \frac{\delta L}{\delta x^i} = 0 \\ \vdots \\ \frac{\delta L}{\delta \lambda_j} = 0 \end{cases} \Rightarrow x_0, \quad \lambda_1,\dots,\lambda_k.$$

Теорема 13 (Достаточное условие условного экстремума)**.** Если при введенных выше условиях квадратичная форма

$$Q(\xi) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\delta^2 L}{\delta x^i \delta x^j}(x_0)\cdot \xi^i \xi^j, \ \left(\xi = (\xi^1,\dots,\xi^n)\right)$$

1. Знакоопределена на TS_{x_0}:
   - если Q знакоположительна, то точка x_0 – точка условного локального min
   - если Q знакоотрицательна, то точка x_0 – точка условного локального max
2. Если Q может принимать значения разных знаков, то в точке x_0 условного экстремума не наблюдается.

Доказательство. Заметим, что $f\big|_S$ и $L\big|_S$ совпадают. В самом деле, если $x \in S$, то:

$$L(x,\lambda) = f(\underset{(x^1,\dots,x^n)}{\underset{\shortparallel}{x}}) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \cdot \underset{0}{\underset{\shortparallel}{F^i(x)}} = f(x).$$

Поэтому покажем, что условие знакопостоянства Q является достаточным для экстремума функции $L\big|_s$.

Имеем, что

$$\begin{cases} \frac{\delta L}{\delta x^1}(x_0) = 0 \\ \vdots \\ \frac{\delta L}{\delta x^n}(x_0) = 0 \end{cases}.$$

По формуле Тейлора:

$$L\big|_S(x) - L(x_0) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\delta^2 L(x_0)}{\delta x^i \delta x^j}\cdot (x^i - x_0^i)(x^j - x_0^j) + o\left(\|x - x_0\|^2\right) \quad (5.25)$$

Так как S – $m = (n-k)$-мерная поверхность, то существует гладкое отображение $x(t) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n : \ x = x(t) \subset S \ \forall t \in \mathbb{R}^m, \ x(0) = x_0$. Отображение $x(t)$ биективно отображает $\mathbb{R}^m$ на $U_S(x_0) = U(x_0) \cap S$.

Если $x \in S$, то условие дифференцируемости $x(t)$:

$$x - x_0 = x(\underset{\in \mathbb{R}^m}{t}) - x(0) = x'(0)\cdot t + o\big(\|t\|\big)$$

или

$$\begin{cases} x^1 - x_0^1 = \frac{\delta x^1}{\delta t^1}(0)\cdot t^1 + \ldots + \frac{\delta x^1}{\delta t^m}(0)\cdot t^m + o\big(\|t\|\big) \\ \vdots \\ x^n - x_0^n = \frac{\delta x^n}{\delta t^1}(0)\cdot t^1 + \ldots + \frac{\delta x^n}{\delta t^m}(0)\cdot t^m + o\big(\|t\|\big) \end{cases}$$

или кратко

$$\begin{cases} x^1 - x_0^1 = \sum_{i=1}^m \frac{\delta x^1}{\delta t^i}(0)\cdot t^i + o\big(\|t\|\big) \\ \vdots \\ x^n - x_0^n = \sum_{i=1}^m \frac{\delta x^n}{\delta t^i}(0)\cdot t^i + o\big(\|t\|\big) \end{cases} \tag{5.26}$$

Подставим 5.26 в 5.25:

$$L\big|_S(x) - L(x_0) = \frac{1}{2}\cdot \sum_{i,j=1}^n \frac{\delta^2 L(x_0)}{\delta x^i \delta x^j}\cdot \underbrace{\left(\sum_{\alpha=1}^m \frac{\delta x^i}{\delta t^\alpha}(0)\cdot t^\alpha + o\big(\|t\|\big)\right)}_{x^i - x_0^i}\cdot$$

$$\cdot \underbrace{\left(\sum_{\beta=1}^m \frac{\delta x^j}{\delta t^\beta}(0)\cdot t^\beta + o\big(\|t\|\big)\right)}_{x^j - x_0^j} + o\big(\|x - x_0\|^2\big) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n \frac{\delta^2 L(x_0)}{\delta x^i \delta x^j}\cdot \left[\left(\sum_{\alpha=1}^m \frac{\delta x^i}{\delta t^\alpha}(0)\cdot t^\alpha\right)\cdot\left(\sum_{\beta=1}^m \frac{\delta x^i}{\delta t^\beta}(0)\cdot t^\beta\right) +\right.$$

$$+\left(\sum_{\alpha=1}^m \frac{\delta x^i}{\delta t^\alpha}(0)\cdot t^\alpha\right)\cdot o\big(\|t\|\big) + \left(\sum_{\beta=1}^m \frac{\delta x^i}{\delta t^\beta}(0)\cdot t^\beta\right)\cdot$$

$$\left.\cdot\, o\big(\|t\|\big) + o\big(\|t\|\big)\right] + o\big(\|x - x_0\|^2\big) \overset{(\heartsuit)}{=} \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n \frac{\delta^2 L(x_0)}{\delta x^i \delta x^j}\cdot$$

$$\cdot \sum_{\alpha,\beta=1}^m \frac{\delta x^i}{\delta t^\alpha}\cdot\frac{x^i}{\delta t^\beta}\cdot t^\alpha\cdot t^\beta + o\big(\|t\|^2\big) = \frac{\|t\|^2}{2}\cdot\sum_{i,j=1}^n \frac{\delta^2 L(x_0)}{\delta x^i \delta x^j}\cdot$$

$$\cdot \underbrace{\sum_{\alpha,\beta=1}^m \frac{\delta x^i}{\delta t^\alpha}\cdot\frac{\delta x^j}{\delta t^\beta}\cdot\frac{t^\alpha}{\|t\|}\cdot\frac{t^\beta}{\|t\|}}_{\xi^i,\xi^j \text{ -- координаты вектора } \xi \in TS_{x_0}} + o\big(\|t\|^2\big) = \frac{\|t\|^2}{2}Q(\xi) + o\big(\|t\|^2\big).$$

Таким образом получаем, что

$$L\big|_S(x) - L(x_0) = \frac{\|t\|^2}{2}\cdot Q(\xi) + o\big(\|t\|^2\big),\ \xi \in TS_{x_0}.$$

Тогда, если $Q > 0$, то

$$L\big|_S(x) - L(x_0) > 0 \Rightarrow x_0 \text{ -- min для } L\big|_S(x) \Rightarrow x_0 \text{ -- min для } f\big|_S.$$

Если $Q < 0$, то

$$L\Big|_S(x) - L(x_0) < 0 \Rightarrow x_0 - \text{локальный } \max \text{ для } L\Big|_S(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_0 - \text{локальный } \max \text{ для } f\Big|_S \ (\forall x \in U_S(x_0))$$

Если Q – знакопеременна, то не для всех $x \in U_S(x_0)$ разность $L\Big|_S(x) - L(x_0)$ имеет постоянный знак $\Rightarrow$ в этом случае в точке x_0 нет экстремума.

Докажем ($\heartsuit$), то есть покажем, что

$$o\Big(\|t\|\Big) \cdot \sum_{\alpha=1}^{m} \frac{\delta x^i}{\delta t^\alpha} \cdot t^\alpha = o\Big(\|t\|^2\Big)$$

и

$$o\Big(\|x - x_0\|^2\Big) = o\Big(\|t\|^2\Big), \ x \in S.$$

В самом деле,

$$\left|\sum_{\alpha=1}^{m} \frac{\delta x^i}{\delta t^\alpha}(0) \cdot t^\alpha\right| \leqslant \sum_{\alpha=1}^{m} \left|\frac{\delta x^i}{\delta t^\alpha}(0)\right| \cdot \left|t^\alpha\right| \leqslant \|t\| \cdot \underbrace{\sum_{\alpha=1}^{m} \left|\frac{\delta x^i}{\delta t^\alpha}(0)\right|}_{\substack{\shortparallel \\ const>0}} = \underbrace{\overset{>0}{A} \cdot \|t\|}_{\substack{\shortparallel \\ O(\|t\|)}}.$$

Таким образом,

$$o\Big(\|t\|\Big) \cdot \left|\sum_{\alpha=1}^{m} \frac{\delta x^i(0)}{\delta t^\alpha} \cdot t^\alpha\right| \leqslant o\Big(\|t\|\Big) \cdot O\Big(\|t\|\Big) =$$

$$= \omega(t) \cdot \|t\| \cdot \gamma(t) \cdot \|t\| = \left| \begin{array}{c} \text{где } \omega(t) \to 0 \text{ при } t \to 0, \\ \gamma(t) - \text{ограниченная функция} \end{array} \right| =$$

$$= \underset{\substack{\shortparallel \\ \omega(t)\gamma(t)}}{\alpha(t)} \cdot \|t\|^2 = o\Big(\|t\|^2\Big), \ \begin{array}{l} \alpha(t) \to 0, \\ t \to 0 \end{array}.$$

Далее, если $x \in S$, то

$$\|x - x_0\|^2 = \left\| \begin{pmatrix} x^1 - x_0^1 \\ \vdots \\ x^n - x_0^n \end{pmatrix} \right\|^2 \overset{5.26}{=} \left\| \begin{pmatrix} \sum_{\alpha=1}^m \frac{\delta x^1}{\delta t^\alpha} \cdot t^\alpha + o\big(\|t\|\big) \\ \vdots \\ \sum_{\alpha=1}^m \frac{\delta x^n}{\delta t^\alpha} \cdot t^\alpha + o\big(\|t\|\big) \end{pmatrix} \right\|^2 =$$

$$= \left(\sum_{\alpha=1}^m \frac{\delta x^1}{\delta t^\alpha} \cdot t^\alpha + o\big(\|t\|\big) \right)^2 + \ldots + \left(\sum_{\alpha=1}^m \frac{\delta x^n}{\delta t^\alpha} + o\big(\|t\|\big) \right)^2 =$$

$$= \left(\sum_{\alpha=1}^m \frac{\delta x^1}{\delta t^\alpha} \cdot t^\alpha \right)^2 + \ldots + \left(\sum_{\alpha=1}^m \frac{\delta x^n}{\delta t^\alpha} \right)^2 + o\big(\|t\|^2\big) \leqslant$$

$$\leqslant \left(\max_\alpha \frac{\delta x^1}{\delta t^\alpha} \right)^2 \cdot \left(\sum_{\alpha=1}^m t^\alpha \right)^2 + \ldots + \left(\max_\alpha \frac{\delta x^n}{\delta t^\alpha} \right)^2 \cdot \left(\sum_{\alpha=1}^m t^\alpha \right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant \|t\|^2 \cdot \left(\left(\max_\alpha \frac{\delta x^1}{\delta t^\alpha} \right)^2 + \left(\max \frac{\delta x^n}{\delta t^\alpha} \right)^2 \right) \leqslant$$

$$\leqslant \|t\|^2 \cdot \underbrace{\left(\max_i \left(\max_\alpha \frac{\delta x^i}{\delta t^\alpha}(0) \right) \right)^2 \cdot n}_{\substack{\shortparallel \\ const>0}} = B\|t\|^2 = o\big(\|t\|^2\big).$$

Поэтому

$$o\big(\|x - x_0\|^2\big) =$$

$$= \beta(x - x_0) \cdot \|x - x_0\|^2 = \beta(t) \cdot \|x - x_0\|^2 \leqslant \beta(t) \cdot B \cdot \|t\|^2 =$$

$$= o\big(\|t\|^2\big)$$

$$\big(\beta(x - x_0) \to 0 \text{ при } x \to x_0 \Leftrightarrow t \to 0\big)$$

□

Глава 6

Теория рядов

6.1 Введение

Определение 16 (Ряд). *Рядом* называется выражение:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots, \quad a_i \in \mathbb{R}.$$

Числа a_i называются *членами ряда*, a_n – *n-ым членом ряда.*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{6.1}$$

Рассмотрим числа:

$$\begin{aligned} &A_1 = a_1, \\ &A_2 = a_1 + a_2, \\ &\vdots \\ &A_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n. \end{aligned}$$

Числа $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называются *частичными суммами ряда* 6.1.

Определение 17 (Сходящийся ряд). Говорят, что ряд 6.1 *сходится*, если существует конечный предел частичных сумм, то есть

$$\exists \lim_{n\to\infty} A_n = A.$$

Тогда сумма бесконечного ряда 6.1 полагается равной

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Пример.

$$10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \ldots + \frac{1}{10^n} + \ldots = 10 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{10^k}$$

$$A_n = \frac{1}{10^0} + \frac{1}{10^1} + \ldots + \frac{1}{10^n} = \frac{1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1} =$$
$$= \frac{\frac{1}{10^n} - 1}{\frac{1}{10} - 1} = \frac{1 - \frac{1}{10^n}}{\frac{9}{10}} = \frac{10}{9} \cdot \left(1 - \frac{1}{10^n}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} \frac{10}{9}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right) = \frac{10}{9}$$

6.1.1 Гармонический ряд

Определение 18 (Среднее гармоническое)**.** Число c называется *средним гармоническим* чисел a и b $(a, b \neq 0)$, если

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right).$$

Определение 19 (Гармонический ряд)**.** Ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \tag{6.2}$$

называется *гармоническим*.

Примечание. Докажем, что ряд 6.2 расходится.

Если $\exists \varepsilon > 0 \ \forall N \ \exists n > N \ \exists p > 0$

$$|a_{n+1} + \ldots + a_{n+p}| \geqslant \varepsilon$$

$$\left|\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+p}\right| \geqslant \left|\frac{1}{n+p} + \frac{1}{n+p} + \ldots + \frac{1}{n+p}\right| =$$
$$= \frac{p}{n+p} \underset{n=p}{=} \frac{1}{2},$$

то есть для $\forall N: \ \varepsilon = \frac{1}{2}, \ p = n, \ n = N + 1 \Rightarrow$ по критерию Коши, гармонический ряд 6.2 расходится.

6.1.2 Основные свойства сходящихся рядов

Теорема 14 (Критерий Коши)**.** Ряд 6.1 сходится тогда и только тогда, когда $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}:\ \forall n > N,\ \forall p > 0$

$$|a_{n+1} + \ldots + a_{n+p}| < \varepsilon.$$

Доказательство. Ряд 6.1 сходится $\underset{\text{по определению}}{\Leftrightarrow} \exists \lim\limits_{n\to\infty} A_n \Leftrightarrow A_n$ – фундаментальная последовательность: $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}:\ \forall n > N$ и $\forall p > 0$

$$|A_n - A_{n+p}| < \varepsilon, \quad \left(\begin{array}{c}\text{критерий Коши сходимости}\\ \text{последовательности}\end{array}\right).$$

Имеем

$$\begin{aligned}&|A_n - A_{n+p}| =\\ &\qquad = \big|a_1 + a_2 + \ldots + a_n - (a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots + a_{n+p})\big| =\\ &\qquad\qquad = |a_{n+1} + \ldots + a_{n+p}| < \varepsilon.\end{aligned}$$

□

Замечание. Со всякой последовательностью x_n можно связать ряд, частичными суммами которого являются члены этой последовательности. Пусть:

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots.$$

Тогда ряд

$$\underbrace{x_1}_{a_1} + \underbrace{(x_2 - x_1)}_{a_2} + \underbrace{(x_3 - x_2)}_{a_3} + \ldots + \underbrace{(x_n - x_{n-1})}_{a_n} + \ldots,$$

$$A_n = a_1 + \ldots + a_n = x_1 + (x_2 - x_1) + \ldots + (x_n - x_{n-1}) = x_n.$$

Теорема 15 (Необходимое условие сходимости ряда)**.** Если ряд 6.1 сходится, тогда:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Доказательство. Пусть ряд 6.1 сходится, тогда $\exists \lim\limits_{n\to\infty} A_n$:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} (A_n - A_{n-1}) =\\ = \lim_{n\to\infty} A_n - \lim_{n\to\infty} A_{n-1} &= 0\end{aligned}$$

□

Лекция 7: Продолжение

от 2 окт 10:32

Определение 20 (m-ый остатный ряд)**.** Пусть дан ряд 6.1. Ряд вида

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} a_n \tag{6.3}$$

называется *m-ым остатным ряда* 6.1.

Теорема 16 (Об остатке ряда)**.** Следующие условия эквивалентны:

1. Ряд 6.1 сходится.
2. Любой его остаток сходится.
3. Некоторый его остаток 6.3 сходится.

Доказательство.

- Докажем, что из 1. $\Rightarrow$ 2.

  Пусть ряд 6.1 сходится и его сумма равна A.

  Пусть $A_k^* = \sum_{n=m+1}^{m+k} a_n$ – k-тая частичная сумма ряда 6.3.

  Ряд 6.3 сходится, если $\exists \lim\limits_{k\to\infty} A_k^*$.

$$A_k^* = \underbrace{A_{m+k}}_{\substack{\text{частичная сумма}\\ \text{ряда 6.1}}} - A_m.$$

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} A_k^* &= \lim_{k\to\infty} (A_{m+k} - A_m) = \\ = \lim_{k\to\infty} A_{m+k} - \underset{\substack{\| \\ const = A_m}}{\lim_{k\to\infty} A_m} &= A - A_m. \end{aligned}$$

- Доказательство того, что из 2. $\Rightarrow$ 3. – очевидно.

- Докажем, что из 3. $\Rightarrow$ 1.

  Пусть ряд 6.3 – сходится.

  Тогда при $n > m$:

$$A_n = A_m + \overbrace{\underset{\substack{\| \\ \sum_{k=m+1}^{m+(n-m)} a_k}}{A_{n-m}^*}}^{\substack{m\text{-тая частичная}\\ \text{сумма ряда 6.3}}}$$

$$A_n = \underbrace{a_1 + a_2 + \ldots + a_m}_{A_m} + \underbrace{\overbrace{a_{m+1} + \ldots + a_n}^{k \text{ штук}, \ k=n-m}}_{A^*_{n-m}}.$$

Ряд 6.1 сходится $\underset{\text{по опр.}}{\Leftrightarrow} \exists \lim\limits_{n\to\infty} A_n$.

Рассмотрим:

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} (\underset{\substack{\parallel \\ const}}{A_m} + A^*_{n-m}) = \underset{\substack{\parallel \\ A_m = const}}{\lim_{n\to\infty} A_m} + \underbrace{\lim_{n\to\infty} A^*_{n-m}}_{\substack{\exists, \text{ так как ряд} \\ 6.3 \text{ сходится}}} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} A_n \Rightarrow$ 6.1 сходится.

□

Примечание. Обозначим α_m – сумма m-того остатка ряда = сумме ряда 6.3:

$$\alpha_m = \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n$$

(6.3 сходится в этом случае)

Следствие. Ряд 6.1 сходится $\Leftrightarrow \lim\limits_{m\to\infty} \alpha_m = 0$.

Доказательство. Самостоятельно. □

Определение 21 (Сумма рядов)**.** Пусть даны ряды

$$(A) \ \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad (B) \ \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Суммой рядов A, B называется ряд:

$$(A + B) \ \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n).$$

Теорема 17. Если ряды $(A), (B)$ сходятся, то:

1. $\forall a \in \mathbb{R}$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n$ – сходится и его сумма равна $\alpha \cdot A$, где $A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
2. Ряд $(A+B)$ сходится и его сумма равна $A^* + B^*$, где $A^* = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $B^* = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Доказательство. 1. Пусть ряд (A) сходится.

Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha \cdot a_n$:

$$A'_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha \cdot a_k,$$

$$\lim_{n\to\infty} A'_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \alpha \cdot a_k = \alpha \cdot \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \alpha \cdot A$$

2. Самостоятельно.

□

6.2 Сходимость положительных рядов

Определение 22 (Положительный ряд)**.** Ряд (A) называется *положительным*, если $\forall n\ a_n > 0$.

Теорема 18. Положительный ряд (A) сходится $\Leftrightarrow$ его частичные суммы ограничены, то есть $\exists M > 0 : \ \forall n\ A_n < M$.

Доказательство. Заметим, что последовательность частичных сумм A_n возрастает, то есть $\forall n\ A_{n+1} > A_n$.

По теореме Вейерштрасса, возрастающая последовательность A_n имеет предел $\Leftrightarrow$ она ограничена, то есть $\exists M > 0 : \ \forall n\ A_n < M$. □

Теорема 19 (1-ый признак сравнения)**.** Пусть даны ряды $(A), (B)$, причем $a_n > 0,\ b_n > 0\ \forall n$.

Если $\exists N \in \mathbb{N} : \ \forall n > N\ a_n \leqslant b_n$, то:

1. Из сходимости ряда $(B) \Rightarrow$ сходимость ряда (A).
2. Из расходимости ряда $(A) \Rightarrow$ расходимость ряда (B).

Доказательство.

1. Пусть ряд (B) – сходится $\Rightarrow$ по теореме 18 его частичные суммы ограничены $\Rightarrow$ по неравенству $a_n \leqslant b_n$ частичные суммы ряда (A) также ограничены $\Rightarrow$ по 18 ряд (A) сходится.
2. Аналогично.

□

Теорема 20 (2-ой признак сравнения)**.** Пусть даны ряды $(A), (B)$, причем $a_n > 0,\ b_n > 0\ \forall n$.

Если $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k,\ \ k \in [0; \infty]$, то:

1. При $k = \infty$ из сходимости $(A) \Rightarrow$ сходимость ряда (B).
2. При $k = 0$ из сходимости ряда $(B) \Rightarrow$ сходимость ряда (A).

3. При $0 < \underset{const \neq 0}{\underset{\shortparallel}{k}} < \infty$ ряды (A) и (B) ведут себя одинаково.

Доказательство. Переписать доказательство для несобственных интегралов, заменив слово "интеграл"на слово "ряд". □

Теорема 21 (3-й признак сравнения)**.** Пусть даны ряды $(A), (B)$, причем $a_n > 0,\ b_n > 0\ \forall n$.

Если $\exists N \in \mathbb{N} \cup \{0\} :\ \forall n > N\ \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n}$, то:

1. Из сходимости ряда $(B) \Rightarrow$ сходимость ряда (A).
2. Из расходимости ряда $(A) \Rightarrow$ расходимость ряда (B).

Доказательство. Можно считать, что $N = 0$. Тогда $\forall n > N$ имеем:

$$\frac{a_2}{a_1} \leqslant \frac{b_2}{b_1}; \quad \frac{a_3}{a_2} \leqslant \frac{b_3}{b_2}; \quad \frac{a_4}{a_3} \leqslant \frac{b_4}{b_3}; \quad \ldots; \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n}.$$

Перемножим левые и правые части:

$$\frac{a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot \ldots \cdot a_{n+1}}{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n} \leqslant \frac{b_2 \cdot b_3 \cdot b_4 \cdot \ldots \cdot b_{n+1}}{b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot \ldots \cdot b_n},$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_1} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n} \Rightarrow a_{n+1} \leqslant \frac{a_1}{b_1} \cdot b_{n+1} \text{ (по теореме 19).}$$

1. Если ряд (B) сходится $\Rightarrow$ сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_1}{b_1} \cdot b_{n+1} \Rightarrow$ сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1} \Rightarrow$ сходится (A).
2. Аналогично.

□

Теорема 22 (Интегральный признак Коши-Маклорена)**.** Пусть дан положительный ряд (A).

Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет следующим условиям:

1. $f(x) :\ [1; +\infty) \to \mathbb{R}$.
2. $f(x)$ – непрерывна.
3. $f(x)$ – монотонна.
4. $f(x) = a_n,\ \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Тогда ряд (A) и интеграл $\int_1^{\infty} f(x)dx$ ведут себя одинаково.

Доказательство. Ограничимся случаем, когда $f(x)$ монотонно убывает.

Рассмотрим функцию $\phi(x) = a_n$ при $n \leqslant x < n + 1$ и $\psi(x) = a_{n+1}$ при

$n \leqslant x < n+1$. Тогда $\forall x \in [1;+\infty)$:

$$\psi(x) \leqslant f(x) \leqslant \phi(x).$$

Отсюда

$$\int_1^N \psi(x)dx \leqslant \int_1^N f(x)dx \leqslant \int_1^N \phi(x)dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{\sum_{n=1}^N a_{n+1}}_{\text{частичная сумма ряда } (A)} \leqslant \int_1^N f(x)dx \leqslant \underbrace{\sum_{n=1}^N a_n}_{\text{частичная сумма ряда } (A)}$$

- Если интеграл сходится, то частичная сумма $\sum_{n=1}^N a_{n+1}$ ограничена $\Rightarrow$ ряд (A) сходится.
- Если интеграл расходится, то частичная сумма $\sum_{n=1}^N a_n$ непрерывна $\Rightarrow$ ряд (A) – расходится.
- Если ряд (A) сходится, то $\sum_{n=1}^N a_n$ – ограничена $\Rightarrow \int_1^N f(x)dx$ – ограничен $\Rightarrow \int_1^\infty f(x)dx$ – сходится.
- Если ряд (A) расходится $\Rightarrow$ частичная сумма $\sum_{n=1}^N a_{n+1}$ неограничена $\Rightarrow$ интеграл расходится.

$\square$

Пример. $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p}$.

Рассмотрим $f(x) = \frac{1}{x^p}$ на $[1;+\infty)$ – неограниченно монотонно $\searrow$,

$$f(n) = \frac{1}{n^p}.$$

$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p}$ ведет себя одинаково с интегралом $\int_1^\infty \frac{dx}{x^p}$ – сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leqslant 1 \Rightarrow$ ряд $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p}$ сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leqslant 1$.

Пример. $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n \cdot \ln n}$.

$f(x) = \frac{1}{x \ln x}$, $x \in [e;+\infty)$, $\nearrow$, непрерывна.

$$\int_e^\infty \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{b\to\infty} \int_e^b \frac{d(\ln x)}{\ln x} =$$

$$= \lim_{b\to\infty} \Big(\ln(\ln x)\Big)\Big|_e^b = \lim_{b\to\infty} \ln(\ln b) = \infty \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ ряд $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n \ln n}$ расходится (по интегралу Коши-Маклорена).

Теорема 23 (Радикальный признак Коши)**.** Пусть ряд (A) положительный и $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$. Тогда:

1. При $q < 1$ ряд (A) сходится.
2. При $q > 1$ ряд (A) расходится.
3. При $q = 1$ может как сходиться, так и расходиться.

Доказательство.

1. Пусть $q < 1$. Возьмем число $r: \ q < r < 1$. Тогда $\exists N: \ \forall n > N$
$$\sqrt[n]{a_n} < r \Rightarrow a_n < r^n.$$
$0 < r < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} r^n$ – сходится $\Rightarrow$ по 1-му признаку сравнения сходится ряд (A).
2. Пусть $q > 1$, тогда существует подпоследовательность $\sqrt[n_i]{a_{n_i}} \to q$ при $i \to \infty \Rightarrow a_{n_i} \to q^{n_i} > 1 \Rightarrow a_n \nrightarrow 0 \Rightarrow$ необходимое условие сходимости не выполняется $\Rightarrow$ ряд (A) расходится.
3. Рассмотрим ряды $\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}}_{\text{расходится}}$ и $\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}}_{\text{сходится}}$:
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = 1.$$

□

Теорема 24 (Признак Даламбера)**.** Пусть ряд (A) положительный и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = d$. Тогда:

1. При $d < 1$ ряд (A) сходится.
2. При $d > 1$ ряд (A) расходится.
3. При $d = 1$ может как сходиться, так и расходиться.

Доказательство.

1. Пусть $d < 1$. Возьмем $d < r < 1 \Rightarrow \exists N: \ \forall n > N \ \frac{a_{n+1}}{a_n} < r$,
$$b_1 = \frac{a_2}{a_1}; \quad b_2 = \frac{a_3}{a_2}; \quad b_3 = \frac{a_4}{a_3}; \quad \ldots; \quad b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}; \quad \ldots.$$

Можно считать, что $N = 0$, тогда $\forall n > N$:

$$\begin{aligned} &a_2 < r \cdot a_1 \\ &a_3 < r \cdot a_2 < r^2 \cdot a_1 \\ &a_4 < r \cdot a_3 < r^3 \cdot a_1 \\ &\vdots \\ &a_{n+1} < r^n \cdot a_1 \end{aligned} .$$

Так как $0 < r < 1$, то $\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cdot a_1$ сходится $\Rightarrow$ сходится ряд (A) по 1 признаку сравнения.

2. Самостоятельно.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, $\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1.$$

□

Лекция 8: Продолжение

от 5 окт 8:50

Теорема 25 (Признак Раббе). Пусть ряд (A) – положительный. Если $\lim\limits_{n\to\infty} n \cdot \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = r$, то:

1. При $r > 1$ ряд (A) сходится.
2. При $r < 1$ ряд (A) расходится.
3. При $r = 1$ ряд (A) может как сходиться, так и расходиться.

Доказательство.

1. Пусть $r > 1$. Возьмем p и q: $1 < p < q < r$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} n \cdot \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = r$, то $\exists N_1 :\ \forall n > N_1\ n \cdot \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) > q$, то есть:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} > 1 + \frac{q}{n}. \tag{6.4}$$

Далее, рассмотрим:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(1+\frac{1}{n})^p - 1}{\frac{1}{n}} \overset{\substack{\text{формула} \\ \text{Тейлора}}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{p}{n} + o(\frac{1}{n}) - 1}{\frac{1}{n}} = p < q \Rightarrow$$

$\Rightarrow \exists N_2: \ \forall n > N_2$:

$$\frac{(1+\frac{1}{n})^p - 1}{\frac{1}{n}} < q \Rightarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^p < 1 + \frac{q}{n}. \tag{6.5}$$

Сравниваем неравенства 6.4 и 6.5, получим, что при $n > \max(N_1, N_2)$:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^p < 1 + \frac{q}{n} < \frac{a_n}{a_{n+1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a_n}{a_{n+1}} > \left(1+\frac{1}{n}^p\right) = \frac{(n+1)^p}{n^p} = \frac{\frac{1}{n^p}}{\frac{1}{(n+1)^p}}.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ сходится при $p > 1$:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} > \frac{\frac{1}{n^p}}{\frac{1}{(n+1)^p}} \Rightarrow a_n \cdot \frac{1}{(n+1)^p} > \frac{1}{n^p} \cdot a_{n+1} \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{\frac{1}{(n+1)^p}}{\frac{1}{n^p}}.$$

По 3-му признаку сравнения, ряд (A) сходится при $p > 1 \Rightarrow$ при $r > 1$.

2. Пусть $r < 1$. Тогда $\exists N: \ \forall n > N$:

$$n \cdot \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) < 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a_n}{a_{n+1}} < 1 + \frac{1}{n} = \frac{n+1}{n} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} > \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ – гармонический, расходящийся $\Rightarrow$ по 3-му признаку сравнения ряд (A) расходится.

3. Упражнение: привести 2 примера рядов (сходящийся, расходящийся), но $r = 1$ в обоих случаях.

□

Теорема 26 (Признак Кумера)**.** Пусть дан ряд (A) – положительный. Пусть числа $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots: \ \forall n > N \ c_n > 0$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ – расходится. Если

$$\lim_{n\to\infty} \left(c_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1}\right) = k,$$

то

1. При $k > 0$ ряд (A) сходится.

2. При $k < 0$ ряд (A) расходится.

3. При $k = 0$ может как сходиться, так и расходиться.

Доказательство.

1. Пусть $k > 0$. Возьмем $0 < p < k$. Тогда $\exists N: \ \forall n > N$:

$$c_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1} > p \Rightarrow$$
$$\Rightarrow c_n \cdot a_n - c_{n+1} \cdot a_{n+1} > p \cdot a_{n+1} > 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow c_n \cdot a_n > c_{n+1} \cdot a_{n+1}, \quad \forall n > N$$

Тогда последовательность $\{c_n \cdot a_n\}$ убывает и ограничена снизу $\Rightarrow$ последовательность сходится.

Пусть $c = \lim\limits_{n\to\infty} c_n \cdot a_n$. Рассмотрим ряд:

$$\sum_{m=1}^{n} \left(c_m \cdot a_m - c_{m+1} \cdot a_{m+1}\right) =$$
$$= \left(c_1 \cdot a_1 - c_2 \cdot a_2\right) + \left(c_2 \cdot a_2 - c_3 \cdot a_3\right) + \ldots + \left(c_n \cdot a_n - c_{n+1} \cdot a_{n+1}\right) =$$
$$= c_1 \cdot a_1 - c_{n+1} \cdot a_{n+1},$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{n} \left(c_m \cdot a_m - c_{m+1} \cdot a_{n+1}\right) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left(c_1 \cdot a_1 - c_{n+1} \cdot a_{n+1}\right) = c_1 \cdot a_1 - c \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(c_n \cdot a_n - c_{n+1} \cdot a_{n+1}\right) \Rightarrow$ из того, что $c_n \cdot a_n - c_{n+1} \cdot a_{n+1} > p \cdot a_{n+1} > 0$ и 1-го признака сравнения $\Rightarrow$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} p \cdot a_{n+1}$ сходится $\Rightarrow$ ряд (A) сходится.

2. Пусть $k < 0 \Rightarrow \exists N: \ \forall n > N$

$$c_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1} < 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{a_n}{a_{n+1}} < \frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{\frac{1}{c_n}}{\frac{1}{c+n+1}} \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} > \frac{\frac{1}{c_{n+1}}}{\frac{1}{c_n}}.$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c_n}$ расходится $\Rightarrow$ по 3-му признаку сравнения ряд (A) расходится.

3. Придумать 2 примера когда $k = 0$ и ряды сходятся/расходятся.

$\square$

Теорема 27 (Признак Бертрана)**.** Пусть ряд (A) – положительный. Если

$$\lim_{n\to\infty} \ln n \cdot \left[n \cdot \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) \right] = B,$$

то

1. При $B > 1$ ряд (A) сходится.
2. При $B < 1$ ряд (A) расходится.
3. При $B = 1$ ряд (A) может как сходиться, так и расходиться.

Доказательство. Рассмотрим ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n}$ – расходится. Составим последовательность Кумера:

$$k_n = \underbrace{n \cdot \ln n}_{c_n} \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - \underbrace{(n+1) \cdot \ln(n+1)}_{c_{n+1}} =$$

$$= \left| \ln(n+1) = \ln\left(n \cdot \frac{n+1}{n}\right) = \ln n + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \right| =$$

$$= n \cdot \ln n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - (n+1) \cdot \left(\ln n + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) =$$

$$= n \cdot \ln n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - n \cdot \ln n - \ln n - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} =$$

$$= \ln n \left(n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - n - 1 \right) - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} =$$

$$= \ln n \cdot \left(n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) - 1\right) - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1};$$

$$\lim_{n\to\infty} k_n =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\underbrace{\ln n \cdot \left(n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) - 1\right)}_{B} - \ln \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n}}_{e} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \right] =$$

$$= B - 1,$$

по признаку Кумера, при $B - 1 > 0$ ряд (A) сходится, при $B - 1 < 0$ ряд (A) расходится, при $B = 1$ ряд (A) может как сходиться, так и расходиться. □

Теорема 28 (Признак Гаусса)**.** Ряд (A), $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Если

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \left(\lambda + \frac{\mu}{n}\right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

то

1. При $\lambda > 1$, ряд (A) сходится.
2. При $\lambda < 1$, ряд (A) расходится.
3. При $\lambda = 1$ и
   (a) $\mu > 1 \Rightarrow$ ряд (A) сходится.
   (b) $\mu \leqslant 1 \Rightarrow$ ряд (A) расходится.

Доказательство.

1. Если $\lambda < 1$, то

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \left[\lim_{n\to\infty}\left(\lambda + \frac{\mu}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right]^{-1} =$$

$$= \left[\lim_{n\to\infty}\left(\lambda + \underbrace{\frac{\mu}{n}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{1}{n^2}}_{\to 0}\cdot\Omega\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right]^{-1} = \frac{1}{\lambda},$$

по признаку Даламбера, если $\frac{1}{\lambda} < 1$, то есть $\lambda > 1$, ряд (A) сходится.

2. $\Rightarrow$ из 1.
3. Если $\lambda = 1$, то

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{\mu}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \mu + n\cdot O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(n\cdot\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\mu + \underbrace{n\cdot\frac{1}{n^2}\cdot\Omega(\frac{1}{n^2})}_{\to 0}\right) = \mu \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ по признаку Раббе $\Rightarrow \left[\begin{array}{l}\mu > 1 \Rightarrow (A) \text{ сходится.}\\ \mu < 1 \Rightarrow (A) \text{ расходится.}\end{array}\right.$

Пусть $\mu = 1$, тогда

$$\lim_{n\to\infty} \ln n \cdot \left(n \cdot \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) - 1\right) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \ln n \cdot \left(n \cdot \left(1 + \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) - 1\right) - 1\right) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \ln n \cdot \left(1 + n \cdot O\left(\frac{1}{n^2}\right) - 1\right) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \ln n \cdot n \cdot O\left(\frac{1}{n^2}\right) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left(\ln n \cdot n \cdot \frac{1}{n^2} \cdot \Omega\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} \cdot \Omega\left(\frac{1}{n^2}\right) = 0.$$

В самом деле,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \ln n = \lim_{n\to\infty} \ln n^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \ln \sqrt[n]{n} = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ по прихнаку Бертрана ряд (A) расходится.

□

6.3 Сходимость знакопеременных рядов

Примечание. Пусть дан ряд (A). Если $\exists N : \ \forall n > N \ a_n$ не меняет знак, то исследование сходимости такого ряда сводится к исследованию сходимости положительных рядов. Будем считать, что "+"и "−"бесконечно много. Такие ряды будем называть *знакопеременными*.

Определение 23 (Абсолютно сходящийся ряд). Ряд (A) называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд

$$(A^*) \ \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

Утверждение. Если ряд (A) абсолютно сходящийся, то он сходящийся.

Доказательство. Пусть ряд (A) абсолютно сходящийся, то есть сходится ряд $(A^*) \Rightarrow$ по критерию Коши $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N : \ \forall n > N \ \forall p > 0$

$$|a_{n+1}| + |a_{n+1}| + \ldots + |a_{n+1}| < \varepsilon.$$

Пусть $\varepsilon > 0$ задано. Рассмотрим:

$$|A_{n+p} - A_n| = |a_{n+1} + \ldots + a_{n+p}| \leqslant |a_{n+1}| + \ldots + |a_{n+p}| < \varepsilon \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ ряд (A) сходится. $\square$

Определение 24 (Условно сходящийся ряд). Если ряд (A) сходится, а ряд (A^*) расходится, то ряд (A) называется *условно сходящимся*.

Определение 25 (Знакочередующийся ряд). Ряд (A) называется *знакочередующимся*, если $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \cdot a_{n+1} < 0$. Обозначим знакочередующийся ряд:

$$(\overline{A}) \ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot a_n, \quad a_n > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Теорема 29 (признак Лейбница). Пусть ряд $(\overline{A})$, $a_n > 0 \ \forall n$ удовлетворяет условиям:

1. $a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant \ldots \geqslant a_n \geqslant \ldots$.
2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Тогда ряд $(\overline{A})$ сходится и его сумма $S: \ 0 < S \leqslant a_1$.

Доказательство. Рассмотрим:

$$S_{2n} = a_1 - a_2 + a_3 - \ldots + a_{2n-1} - a_{2n} = \\ = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots + (a_{2n-1} - a_{2n}),$$

тогда $\forall i: \ a_i - a_{i+1} \geqslant 0 \Rightarrow S_{2n} \geqslant 0 \ \forall n \Rightarrow$ последовательность $S_{2n} \nearrow$.

С другой стороны,

$$S_{2n} = a_1 - \underbrace{(a_2 - a_3)}_{\geqslant 0} - \underbrace{(a_4 - a_5)}_{\geqslant 0} - \ldots - \underbrace{(a_{2n-2} - a_{2n-1})}_{\geqslant 0} - a_{2n} \Rightarrow$$

$\Rightarrow S_{2n} \leqslant a_1 \ \forall n$.

Таким образом, S_{2n} не убывает и ограничена сверху $\Rightarrow$ по теореме Вейерштрасса $\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = S$.

Далее,

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} (S_{2n} + a_{2n+1}) = \lim_{n\to\infty} S_{2n} + \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = S + 0 = S.$$

Таким образом, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$.

Так как $0 < S_n \leqslant a_1$ (если $S_n = 0$, то a_1 может быть $= 0$, что невозможно, так как $a_n > 0$) $\Rightarrow$ (берем пределы от неравенства) $0 < S \leqslant a_1$. $\square$

Следствие. Если знакочередующийся ряд $(\overline{A})$ сходящийся, то сумма его n-го остатка имеет знак $(n+1)$-го члена ряда и не больше его по модулю.

Пример. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \ldots, \tag{6.6}$$

по признаку Лейбница:

1. $1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \ldots > \frac{1}{n}$;
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

$\Rightarrow$ 6.6 сходится, $0 < S \leqslant 1$;

Пример. Рассмотрим

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} \text{ – расходящийся} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ ряд 6.6 – условно сходящийся.

Лемма 2. Если

1. Числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ либо не возрастают, либо не убывают.
2. Суммы $B_1 = b_1,\ B_2 = b_1 + b_2,\ \ldots,\ B_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n :\ \forall k = 1, \ldots, n \quad |B_k| \leqslant L$.

Тогда

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k \cdot b_k\right| \leqslant L \cdot (|a_1| + |a_n|) \tag{6.7}$$

Доказательство. Рассмотрим

$$\begin{aligned}
&a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \ldots + a_n \cdot b_n = \\
&= a_1 \cdot B_1 + a_2 \cdot (B_2 - B_1) + a_3 \cdot (B_3 - B_2) + \ldots + a_n \cdot (B_n - B_{n-1}) = \\
&= a_1 \cdot B_1 + a_2 \cdot B_2 - a_2 \cdot B_1 + a_3 \cdot B_3 - a_3 \cdot B_2 + \ldots + a_n \cdot B_n - a_n \cdot B_{n-1} = \\
&= B_1 \cdot (a_1 - a_2) + B_2 \cdot (a_2 - a_3) + B_3 \cdot (a_3 - a_4) + \ldots + B_{n-1} \cdot (a_{n-1} - a_n) + a_n \cdot B_n = \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} B_k \cdot (a_k - a_{k-1}) + a_n \cdot B_n.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{k=1}^{n} a_k \cdot b_k\right| = \left|\sum_{k=1}^{n-1} B_k \cdot (a_k - a_{k+1}) + a_n \cdot B_n\right| \leqslant \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{n-1} |B_k| \cdot |a_k - a_{k+1} + |a_n| \cdot |B_n| \leqslant L \cdot \left(\sum_{k=1}^{n-1} |a_k - a_{k+1}| + |a_n|\right) = \\
&= L \cdot (|a_1| + |a_n| + |a_n|) = L \cdot (|a_1| + 2 \cdot |a_n|).
\end{aligned}$$

$\square$

Теорема 30 (Признак Абеля и Дирихле).

1. **Абеля.** Если

   - последовательность $\{a_n\}$ монотонна и ограничена,
   - ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится,

   то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$ сходится.

2. **Дирихле.** Если

   - последовательность $\{a_n\}$ монотонна и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$,
   - частичные суммы ряда (B) ограничены, то есть $\exists k > 0:$ $\forall n\ \left|\sum_{m=1}^{n} b_m\right| < k$,

   то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$ сходится.

Доказательство.

1. Пусть выполнены условия признака Абеля. Тогда $\exists M > 0: \ |a_n| \leqslant M$. Пусть $\varepsilon > 0$ задано. Возьмем номер $N: \ \forall n > N, \ \forall p > 0$

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} b_k\right| < \varepsilon^* = \frac{\varepsilon}{3 \cdot M}.$$

Частичные суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$ имеют вид $S_n = a_1 \cdot b_1 + \ldots + a_n \cdot b_n$. По критерию Коши найдем $N_1: \ \forall n > N_1, \forall p > 0$

$$|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon,$$

$$|a_{n+1} \cdot b_{n+1} + a_{n+2} \cdot b_{n+2} + \ldots + a_{n+p} \cdot b_{n+p}| \leqslant \\ \leqslant \varepsilon^* \cdot (|a_{n+1}| + 2 \cdot |a_{n+p}|) \leqslant \varepsilon^* \cdot 3 \cdot M = \frac{\varepsilon}{3 \cdot M} = \varepsilon \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ по критерию Коши ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$ сходится.

2. Пусть выполнены условия признака Дирихле. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то $\exists N: \ \forall n > N \quad (\varepsilon > 0$ задано):

$$|a_n| < \frac{\varepsilon}{3 \cdot k}, \qquad \left|\sum_{k=1}^{n} b_k\right| \leqslant k.$$

По критерию Коши:

$$|S_{n+p} - S_n| = |a_{n+1} \cdot b_{n+1} + \ldots + a_{n+p} \cdot b_{n+p}| \overset{\text{по лемме}}{\leqslant} \\ \leqslant k \cdot (|a_{n+1}| + 2 \cdot |a_{n+p}|) < k \cdot \frac{3 \cdot \varepsilon}{3 \cdot k} = \varepsilon.$$

□

Пример. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\cdot x)}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \sin(n \cdot x)$

$a_n = \frac{1}{n} \to 0$ при $n \to \infty$. Оценим частичную сумму $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(n \cdot x)$:

$$\sin x + \sin(2\cdot x) + \sin(3 \cdot x) + \ldots + \sin(n \cdot x) =$$
$$= \frac{1}{\sin \frac{x}{2}} \cdot \left(\sin x \cdot \sin \frac{x}{2} + \sin(2 \cdot x) \cdot \sin \frac{x}{2} \right) =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sin \frac{x}{2}} \cdot \left(\cos \frac{x}{2} - \cos \frac{3 \cdot x}{2} + \cdot \frac{3 \cdot x}{2} - \cos \frac{5 \cdot x}{2} + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + \cos \frac{(2 \cdot n - 1) \cdot x}{2} - \cos \frac{(2 \cdot n + 1) \cdot x}{2} \right) =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sin \frac{x}{2}} \cdot \left(\cos \frac{x}{2} - \cos \frac{(2 \cdot n + 1) \cdot x}{2} \right) =$$
$$= \frac{2 \cdot \sin \frac{(n+1)\cdot x}{2} \cdot \sin \frac{n \cdot x}{2}}{2 \cdot \sin \frac{x}{2}}.$$

Тогда

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \sin(k \cdot x) \right| = \left| \frac{\sin \frac{(n+1)\cdot x}{2} \cdot \sin \frac{n \cdot x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \right| \leqslant \frac{1}{\sin \frac{x}{2}},$$

$\frac{x}{2} \neq \pi \cdot k,\ \ k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \neq 2 \cdot \pi \cdot k,\ \ k \in \mathbb{Z}.$

По признаку Дирихле ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\cdot x)}{n}$ сходится.

Лекция 9: Продолжение

от 9 окт 10:25

6.4 Свойства сходящихся рядов

Примечание. Рассмотрим ряд:

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots.$$

Если

$$(1-1) + (1-1) + \ldots + (1-1) + \ldots,$$

то

$$1 + (-1+1) + (-1+1) + \ldots.$$

Пусть дан ряд (A). Составим из ряда (A) ряд $(\widetilde{A})$:

$$\underbrace{(a_1 + a_2 + \ldots + a_{n_1})}_{\widetilde{a}_1} + \underbrace{(a_{n_1+1} + a_{n_1+2} + \ldots + a_{n_2})}_{\widetilde{a}_2} + \ldots$$

$$\ldots + \underbrace{(a_{n_k+1} + \ldots + a_{n_k+1})}_{\widetilde{a}_{k+1}} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=n_{k-1}+1}^{n_k} a_l = \widetilde{A}, \quad a_{n_0} = a_1.$$

Теорема 31 (Сочетательное свойство сходящихся рядов)**.**

1. Если ряд (A) сходится, то для любой возрастающей последовательности n_k ряд $(\widetilde{A})$ сходится и их суммы совпадают $(A = \widetilde{A})$.

2. Если ряд $(\widetilde{A})$ сходится и внутри каждой скобки знак не меняется, то ряд (A) сходится и их суммы совпадают, то есть $\widetilde{A} = A$.

Доказательство.

1. Пусть ряд (A) сходится, $\widetilde{A}_k$ – частичные суммы ряда $(\widetilde{A})$:

$$\begin{array}{l} \widetilde{A}_1 = \widetilde{a}_1 = \sum_{k=1}^{n_1} a_k = A_{n_1} \\ \widetilde{A}_2 = \widetilde{a}_1 + \widetilde{a}_2 = \sum_{k=n_1+1}^{n_2} a_k = A_{n_1} \\ \vdots \\ \widetilde{A}_k = A_{n_k} \end{array}.$$

Так как ряд (A) сходится, то $\exists \lim\limits_{k\to\infty} A_{n_k} = A$, следовательно:

$$\begin{array}{rcl} A & = & \lim\limits_{k\to\infty} A_{n_k} = \\ = \lim\limits_{n\to\infty} \widetilde{A}_k & = & \widetilde{A} \end{array}$$

2. Пусть ряд $(\widetilde{A})$ сходится. Имеем:

$$\text{при:} \begin{array}{ll} a_1 > 0: & A_1 < A_2 < \ldots < A_{n_1} \\ a_1 < 0: & A_1 > A_2 > \ldots > A_{n_1} \end{array}.$$

- Далее, если $a_{n_1+1} > 0$, тогда:
  при $a_1 > 0$: $A_{n_1+1} < A_{n_1+2} < \ldots < A_{n_2}$
  $$A_{n_1} = \widetilde{A}_1 < A_{n_2} = \widetilde{A}_2,$$
  при $a_1 < 0$: $A_{n_1} < 0$ и $A_{n_1} < A_{n_2}$
  $$\widetilde{A}_1 < \widetilde{A}_2.$$
- Если же $a_{n_1+1} < 0$, тогда:
  $$\text{при:} \begin{array}{ll} a_1 < 0: & A_{n_1} = \widetilde{A}_1 > A_{n_2} = \widetilde{A}_2 \\ a_1 > 0: & A_{n_1} = \widetilde{A}_1 > \widetilde{A}_2 \end{array}.$$

Аналогично, пока n меняется от n_k до n_{k+1}, то будем иметь либо $A_{n_k} < A_n < A_{n_{k+1}}$, либо $A_{n_k} > A_n > A_{n_{k+1}}$.

Ряд $(\widetilde{A})$ – сходится $\Rightarrow \exists \lim\limits_{k\to\infty} \widetilde{A}_k = \lim\limits_{k\to\infty} \widetilde{A}_{k+1} = \widetilde{A} \Rightarrow$ по теореме о 2-х миллиционерах:
$$\lim_{k\to\infty} A_n = \widetilde{A}.$$

□

Лемма 3. Если ряд (A) абсолютно сходящийся, то ряды (P) и (Q) сходятся и $A = P - Q$.

Доказательство. Пусть (A^*) – сходится $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = A^*$.
A_n^* – частичные суммы ряда (A^*).
Имеем $P_{n_k} = a_{n_1} + a_{n_2} + \ldots + a_{n_k}$, где $n_1 < n_2 < \ldots < n_k \leqslant n$,

Пример.

$$(A)\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6,$$

$$(P)\ \sum_{n=1}^{\infty} p_n = \underbrace{a_1 + a_3 + a_4 + a_6}_{P_3},$$

$$(A^*)\ \underbrace{|a_1| + |a_2| + |a_3| + |a_4| + |a_5|}_{A_5^*} + \ldots.$$

$$\begin{matrix} P_{n_k} \leqslant A_n^* \\ Q_{n_m} \leqslant A_n^* \end{matrix} \quad \overset{\substack{\text{т.к. } (A^*) \\ \text{сходится}}}{\Longrightarrow} \quad \begin{matrix} A_n^* \leqslant A^* \\ P_{n_k} \leqslant A^* \\ Q_{n_m} \leqslant A^* \end{matrix}$$

Далее,

$$A_n = P_{n_k} - Q_{n_m}, \text{ где } \begin{matrix} n_k \leqslant n \\ n_m \leqslant n \end{matrix}$$

$$\left(\text{при } n \to \infty \Rightarrow \begin{matrix} k \to \infty \\ m \to \infty \end{matrix} \right)$$

Далее, так как (A) сходится абсолютно $\Rightarrow$ (A) сходится $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \exists A = \lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{k,m\to\infty} (P_{n_k} - Q_{n_m}) =$$

$$= \lim_{k\to\infty} P_{n_k} - \lim_{m\to\infty} Q_{n_m} = P - Q.$$

□

Теорема 32 (Переместительное свойство сходящихся рядов)**.** Если ряд (A) абсолютно сходится, то его сумма не зависит от перестановки членов ряда.

Доказательство. Пусть ряд (A) сходится абсолютно $\Rightarrow$ ряд (A^*) сходится. Пусть ряд

$$(A') \ \sum_{n=1}^{\infty} a'_n$$

получен из ряда (A) путем перестановки его членов. Покажем, что ряд (A') сходится и $A = A'$ (их суммы совпадают).

1. Пусть (A) – знакоположительный, то есть $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n > 0$. Рассмотрим частичные суммы ряда (A'):

$$A'_k = a'_1 + a'_2 + \ldots + a'_k = a_{n_1} + a_{n_2} + \ldots + a_{n_k}.$$

Пусть $n' = \max\{n_1, n_2, \ldots, n_k\}$. Тогда:

$$A'_k \leqslant a_1 + a_2 + \ldots + a_{n_j} + \ldots + a_{n'} = A_{n'},$$

где $A_{n'}$ – n'-я частичная сумма ряда (A). Так как (A) сходится и знакоположительный $\Rightarrow A_{n'} \leqslant A$.

Таким образом получаем, что $\forall k \ A'_k \leqslant A \Rightarrow$ последовательность $A'_k \nearrow$ и ограничена, тогда:

$$\exists \lim_{k\to\infty} A'_k = A' \leqslant A.$$

С другой стороны, ряд (A') получен перестановкой членов ряда $(A) \Rightarrow A' \geqslant A \Rightarrow A' \leqslant A \leqslant A' \Rightarrow A = A'$.

2. Пусть ряд (A) сходится абсолютно, то есть (A^*) сходится. С рядом (A) свяжем два ряда:

$$(P)\ \sum_{n=1}^{\infty} p_n, \quad (Q)\ \sum_{n=1}^{\infty} q_n,$$

где p_n – положительные члены ряда (A), q_n – отрицательные члены ряда (A), взятые по модулю, причем все члены рядов (P) и (Q) взяты в том же порядке, как они стояли в ряде (A).

Если ряд (A) сходится абсолютно, то сходится ряд (A^*), (A^*) – положительный ряд $\Rightarrow$ $(A^{*'})$ сходится (получен путем перестановки членов ряда (A^*)) $\Rightarrow$ по лемме сходятся ряды (P') и (Q') и $A' = P' - Q'$.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & (P) & & & (A^*) \arrow[r] & \underbrace{(A^{*'})}_{\text{сх.}} \arrow[d] & \\ (A) \arrow[ur] \arrow[dr] & & \Longrightarrow & & & (A') \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ & (Q) & & & (P') & & (Q') \end{tikzcd}$$

- (P') – положительный ряд $\Rightarrow$ по пункту 1, (P) – сходится,
- (Q') – положительный ряд $\Rightarrow$ по пункту 1, (Q) – сходится

и $P' = P,\ Q' = Q \Rightarrow A' = P - Q = A$. $\square$

Лемма 4. Если ряд (A) сходится условно, то ряды (P) и (Q) расходятся.

Доказательство. Рассмотрим

$$A_n = P_k - Q_m,$$

где $k \leqslant n,\ m \leqslant n\ (k + m = n)$.

$$A_n^* = P_k^* + Q_m^*,$$

$$\lim_{n\to\infty} A_n = A; \quad \lim_{n\to\infty} A_n^* = \infty.$$

Допустим, что ряд (P) сходится $\Rightarrow$ (P^*) сходится, а так же $\exists \lim\limits_{k\to\infty} P_k = P \Rightarrow \exists \lim\limits_{m\to\infty} Q_m = A - P \Rightarrow Q^*$ – сходится $\Rightarrow$ (A^*) имеет предел. Противоречие $\Rightarrow$ (P) расходится.

Для (Q) – аналогично. $\square$

Теорема 33 (Римана о перестановке членов условно сходящегося ряда). Если ряд (A) условно сходится, то $\forall B \in \mathbb{R}$ (в том числе $B = \pm\infty$) $\exists$ перестановка ряда (A) такая, что полученный ряд сходится и имеет сумму B. Более того, $\exists$ перестановка ряда (A) такая, что частичные суммы полученного ряда не стремятся ни к конечному, ни к бесконечному пределу.

Доказательство. Пусть $B \in \mathbb{R}$. Возьмем номера:

$$\begin{aligned}
&n_1: \ p_1 + p_2 + \ldots + p_{n_1} \geqslant B,\\
&n_2: \ p_1 + p_2 + \ldots + p_{n_1} - q_1 - q_2 - \ldots - q_{n_2} \leqslant B.
\end{aligned}$$

Более того, элементы p и q будем брать столько, сколько это необходимо для выполнения этого условия.

Возьмем:

$$n_3: \ p_1 + p_2 + \ldots + p_{n_1} - q_1 - q_2 - \ldots - q_{n_2} + p_{n_1+1} + p_{n_1+2} + \ldots + p_{n_3} \geqslant B$$

и так далее.

Таким образом получим ряд

$$(p_1 + \ldots + p_{n_1}) + (-q_1 - \ldots - q_{n_2}) + \\ + (p_{n_1+1} + \ldots + p_{n_3}) + (-q_{n_2+1} - \ldots - q_{n_4}) + \ldots$$

– этот ряд сходится к B.

Действительно, так как ряд (A) сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Так как количество членов p_i и q_i бралось лишь столько, сколько необходимо, то соответствующие частичные суммы отличаются от B разве что на последнее слогаемое в этой частичной сумме, которое стремится к нулю $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} A'_n = B$. $\square$

6.5 Умножение рядов

Примечание. Пусть даны ряды $(A), (B)$. Составим таблицу:

	a_1	a_2	$\cdots$	a_n	$\cdots$
b_1	a_1b_1	a_2b_1	$\cdots$	a_nb_1	$\cdots$
b_2	a_1b_2	a_2b_2	$\cdots$	a_nb_2	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$
b_n	a_1b_n	a_2b_n	$\cdots$	a_nb_n	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$

Определение 26 (Произведение рядов, форма Коши). *Произведением рядов* (A) и (B) назовем ряд, членами которого являются элементы на строке таблицы a_ib_j, взятые в произвольном порядке.

Если числа выбираются по диагоналям, то произведение называется *формой Коши*:

$$a_1b_1 + (a_1b_2 + a_2b_1) + \ldots$$

Теорема 34 (Коши о произведении рядов). Если ряды $(A), (B)$ абсолютно сходятся, A и B – их суммы, то $\forall$ их произведение абсолютно сходится и равно $A \cdot B$.

Доказательство. Рассмотрим r-тую частичную сумму ряда

$$(A \cdot B)^* \quad \sum_{r=1}^{\infty} |a_{n_r} \cdot b_{k_r}|,$$

$$\begin{aligned} S_r = |a_{n_1} \cdot b_{k_1}| + |a_{n_2} \cdot b_{k_2}| + \ldots + |a_{n_r} \cdot b_{k_r}| \leqslant \\ \leqslant (|a_{n_1}| + |a_{n_2}| + \ldots + |a_{n_r}|) \cdot (|b_{k_1}| + |b_{k_2}| + \ldots + |b_{k_r}|) \leqslant \\ \leqslant (|a_1| + |a_2| + \ldots + |a_m|) \cdot (|b_1| + |b_2| + \ldots + |b_m|), \end{aligned}$$

где $m = \max\{n_1, n_2, \ldots, n_r, k_1, k_2, \ldots, k_r\}$.

Так как ряды (A) и (B) сходятся абсолютно, то есть сходятся ряды (A^*) и (B^*), то $S_r \leqslant A^* \cdot B^* \Rightarrow$ последовательность $S_r \nearrow$ и ограничена $\Rightarrow \exists \lim\limits_{r\to\infty} S_r \Rightarrow$ ряд $(A \cdot B)^*$ сходится $\Rightarrow$ ряд $(A \cdot B)$ – сходится, причем его сумма не зависит от порядка суммирования.

Будем суммировать ряд $A \cdot B$ по квадратам:

$$\underbrace{a_1b_1}_{c_1} + \underbrace{(a_1b_2 + a_2b_2 + a_2b_1)}_{c_2} + \underbrace{(a_1b_3 + a_2b_3 + a_3b_3 + a_3b_2 + b_3b_1)}_{c_3} + \ldots$$

$S_1 = a_1b_1 = A_1 \cdot B_1$

$S_2 = c_1 + c_2 = a_1b_1 + (a_1b_2 + a_2b_2 + a_2b_1) = (a_1 + a_2) \cdot (b_1 + b_2) = A_2 \cdot B_2$

$S_3 = c_1 + c_2 + c_3 = (a_1 + a_2 + a_3) \cdot (b_1 + b_2 + b_3) = A_3 \cdot b_3$

$\vdots$

$S_n = A_n \cdot B_n$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} (A_n \cdot B_n) = \lim_{n\to\infty} A_n \cdot \lim_{n\to\infty} B_n = A \cdot B$$

$\square$

Лекция 10: Продолжение

от 13 окт 8:46

6.6 Двойные и повторные ряды

Примечание. Рассмотрим таблицу:

$$(\star)\quad \begin{array}{c|c|c|c|c|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1k} & \cdots \\ \hline a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2k} & \cdots \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \\ \hline a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nk} & \cdots \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \end{array}$$

Определение 27 (Повторный ряд). *Повторным рядом* называются выражения

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}, \tag{6.8}$$

и

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{nk}. \tag{6.9}$$

Говорят, что ряд 6.8 сходится, если сходятся все ряды (A_n) по строкам $(\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k} = A_n)$ и сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$.

Определение 28 (Двойной ряд). *Двойным рядом* называется выражение:

$$\sum_{n,k=1}^{\infty} a_{nk} \tag{6.10}$$

Говорят, что ряд 6.10 сходится, если:

$$\exists A = \lim_{\substack{K\to\infty \\ N\to\infty}} A_{NK} = \lim_{\substack{K\to\infty \\ N\to\infty}} \sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{K} a_{nk}.$$

То есть $\forall \varepsilon > 0\ \exists N_0$ и $K_0:\ \forall N > N_0$ и $\forall k > K_0$

$$\left|\underbrace{\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{K} a_{nk}}_{A_{NK}} - A\right| < \varepsilon.$$

Определение 29 (Простой ряд). Пусть ряд

$$\sum_{r=1}^{\infty} U_r \tag{6.11}$$

построен из элементов таблицы, взятых в произвольном порядке. Такой ряд будем называть *простым*, связанным с данной таблицей.

Теорема 35 (О связи сходимости простого и повторного рядов)**.**

1. Если ряд 6.11 абсолютно сходится, то ряд 6.8 сходится и его сумма равна U.
2. Если после замены элементов таблицы $(\star)$ их модулями ряд 6.8* ходится, то ряд 6.11 сходится абсолютно и суммы рядов 6.8 (без модулей) и 6.11 совпадают.

Доказательство.

1. Пусть 6.8* сходится. Покажем, что все ряды по строкам сходятся:
$$(A_n)\ \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$
и сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$.
Рассмотрим
$$|a_{n1}| + |a_{n2}| + \ldots + |a_{nk}| \leqslant |u_1| + |u_2| + \ldots + |u_r|,$$
где r выбран таким образом, чтобы среди $|u_i|$ были все слагаемые $|a_{n1}, \ldots, a_{nk}|$.
Таким образом,
$$\underbrace{|a_{n1}| + \ldots + |a_{nk}|}_{A^*_{nk}} \leqslant U^* \Rightarrow \exists \lim_{k\to\infty} A^*_{nk} = A^*_n \Rightarrow$$
$\Rightarrow$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ сходится абсолютно $\Rightarrow$ он сходится.
Далее, пусть $\varepsilon > 0$ задано. Выберем номер $r_0 :\ \forall r > r_0$
$$\sum_{i=1}^{\infty} |u_{r+i}| < \frac{\varepsilon}{3}.$$
Тогда
$$\left| \sum_{i=1}^{r} u_i - U \right| = \left| \sum_{i=1}^{\infty} u_{r+i} \right| \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} |u_{r+i}| < \frac{\varepsilon}{3}$$
Так как ряды по строкам сходятся, то $\forall n$ выберем $m(n)$:
$$\left| \sum_{k=1}^{m(n)} a_{n_k} - A_n \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$
Наконец, выберем номер N_0 такой, что все числа $u_1, u_2, \ldots, u_{r_0}$

содержались бы в первых N_0 строках:

$$\left|\sum_{n=1}^{N_0} A_n - U\right| =$$

$$= \left|\sum_{n=1}^{N_0} A_n - \sum_{n=1}^{N_0}\sum_{k=1}^{m(n)} a_{n_k} + \sum_{n=1}^{N_0}\sum_{k=1}^{m(n)} a_{n_k} - \sum_{i=1}^{r_0} u_i + \sum_{i=1}^{r_0} u_i - U\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{N_0}\left|A_n - \sum_{k=1}^{m(n)} a_{n_k}\right| + \left|\sum_{n=1}^{N_0}\sum_{k=1}^{m(n)} a_{n_k} - \sum_{i=1}^{r_0} u_i\right| + \underbrace{\left|\sum_{i=1}^{r_0} u_i - U\right|}_{<\frac{\varepsilon}{3}} <$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \sum_{i=r_0+1}^{\infty}(u_i) + \frac{\varepsilon}{3} < \frac{\varepsilon}{3}\cdot 3 = \varepsilon.$$

2. Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|a_{n_k}| = A^*$ сходится.

   Тогда $\forall r\ \exists N, K$ такие, что числа $u_1, \ldots, u_r$ содержатся в N первых строчках и K первых столбцах таблицы:

$$\sum_{i=1}^{r}|u_i| \leqslant \sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{K}|a_{n_k}| \leqslant A^* \Rightarrow$$

   $\Rightarrow |u_r| \nearrow$ и ограничен $\Rightarrow$ ряд 6.11 сходится абсолютно $\Rightarrow$ по пункту 1. суммы рядов 6.11 и 6.8 равны.

□

Теорема 36 (Свойства двойных рядов).

1. Если ряд 6.10 сходится, то

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ k\to\infty}} a_{nk} = 0.$$

2. (Критерий Коши) Ряд 6.10 сходится $\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists N_0, K_0 :\ \forall n > N_0,\ \forall k > K_0,\ \forall p > 0,\ \forall q > 0$

$$\left|\sum_{n=1}^{p}\sum_{k=1}^{q} a_{(N_0+n)(K_0+k)}\right| < \varepsilon.$$

3. Если ряд 6.10 сходится, то $\forall c \in \mathbb{R}$ ряд

$$\sum_{n,k=1}^{\infty}(c\cdot a_{nk})$$

   сходится, и его сумма равна $c\cdot A$ (где $A = \sum_{n,k=1}^{\infty} a_{nk}$).

4. Если ряд 6.10 сходится и ряд
$$\sum_{n,k=1}^{\infty} b_{nk}$$
сходится, то
$$\sum_{n,k=1}^{\infty} (a_{nk} + b_{nk}) = A + B,$$
а к тому же – сходится.

5. Если $\forall n, \ \forall k \ a_{nk} \geqslant 0$, то ряд 6.10 сходится $\Leftrightarrow$ его частичные суммы ограничены в совокупности.

Доказательство.

1. Пусть ряд 6.10 сходится. Заметим, что
$$A_{nk} = \sum_{i,j=1}^{n,k},$$
$$a_{nk} = A_{nk} - A_{n(k-1)} - A_{(n-k)k} + A_{(n-1)(k-1)}$$
$\Rightarrow a_{nk} \to 0$.

2. (Критерий Коши) На декартовом произведении $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ введем базу:
$$B_{nk} = \big\{(n,k): \ n > N_0, \ k > K_0\big\}.$$
Тогда критерий Коши сходимости ряда – это есть критерий Коши существования предела функции A_{nk} по данной базе.

3. Самостоятельно.

4. Самостоятельно.

5.
   - $|\Rightarrow|$ Очевидно.
   - $|\Leftarrow|$ Пусть множество $\{A_{nk}\}$ – ограничено.
   Пусть $A = \sup\{A_{nk}\}$. Покажем, что A – сумма ряда 6.10.
   Пусть $\varepsilon > 0$ задано. Выберем N_0 и K_0:
   $$A - A_{N_0K_0} < \varepsilon$$
   $$\text{(по опр. sup)}$$
   Тогда $\forall n > N_0$ и $\forall k > K_0 \ A_{nk} \geqslant A_{N_0K_0} \Rightarrow 0 < A - A_{nk} \leqslant A - A_{N_0K_0} < \varepsilon \Rightarrow |A - A_{nk}| < \varepsilon$.

$\Rightarrow$ ряд 6.10 сходится.

□

Теорема 37 (О связи сходимости двойного ряда и повторного). Если

- ряд 6.10 сходится (двойной),
- все ряды по строкам сходятся,

тогда повторный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}$ сходится и

$$A = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} = \sum_{n,k=1}^{\infty} a_{nk}.$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ задано. Выберем $N_0, K_0 :\ \forall n > N_0$ и $k > K_0$

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} a_{ij} - A\right| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{6.12}$$

$$\sum_{i,j=1}^{n,k} a_{ij} = A_{nk} \text{ двойного ряда.}$$

В неравенстве 6.12 переходим к пределу при $k \to \infty$.
Тогда $\forall n > N_0$

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} - A\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} A_n - A\right| < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

$\Rightarrow$ повторный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} = A$. □

Теорема 38 (О связи сходимости двойного и простого рядов)**.** Если ряд 6.10* сходится, то сходится ряд 6.11.
И наоборот, если сходится ряд 6.11*, то сходится ряд 6.10.
И в обоих случаях суммы рядов равны:

$$\sum_{n,k=1}^{\infty} a_{nk} = \sum_{r=1}^{\infty} u_r$$

Доказательство.

- $|\Rightarrow|$ Пусть двойной ряд сходится абсолютно, то есть сходится ряд $\sum_{n,k=1}^{\infty} |a_{nk}|$.

  Тогда для любого номера S $\exists N, K$ такие, что все числа $u_1, \ldots, u_S$ содержатся в первых N строках и первых K столбцах, тогда:

  $$|u_1| + |u_2| + \ldots + |u_S| \leqslant \sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{K} |a_{nk}| \leqslant A^* = \sum_{n,k=1}^{\infty} |a_{nk}| \Rightarrow$$

  $\Rightarrow$ последовательность $U_i^* \nearrow$ и ограничена $\Rightarrow$ ряд $\sum_{r=1}^{\infty} u_r$ сходится абсолютно $\Rightarrow$ сходится.

- $|\Leftarrow|$ Пусть ряд $\sum_{r=1}^{\infty} |u_r|$ сходится $\Rightarrow \forall N, K\ \exists S :$ все числа $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1K}, a_{21}, \ldots, a_{2K}, \ldots, a_{N1}, \ldots$

содержатся среди чисел $u_1, \dots, u_S$. Тогда

$$A^*_{NK} = \sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{K}|a_{nk}| \leqslant \sum_{r=1}^{S}|u_r| \leqslant U^* = \sum_{r=1}^{\infty}|u_r| \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ ряд $\sum_{n,k=1}^{\infty} a_{nk}$ сходится.

Покажем, что $\sum_{n,k=1}^{\infty} a_{nk} = \sum_{r=1}^{\infty} u_r$.

Так как ряд $\sum_{r=1}^{\infty} u_r$ сходится абсолютно, то расположим элементы по квадратам:

$$\begin{aligned}&a_{11} = u_{r_1}\\ &a_{12} + a_{22} + a_{21} = u_{r_2} + u_{r_3} + u_{r_4}\\ &\vdots\\ &A_{nn} = a_{11} + \ldots + a_{nn} = U_n = u_{r_1} + \ldots + u_{r_n}\end{aligned},$$

$$A = \lim_{n\to\infty} A_{nn} = \lim_{n\to\infty} U_n = U.$$

□

Теорема 39 («Главная»). Пусть дана таблица $(\star)(a_{ij})$ и по ней построены ряды 6.8, 6.9, 6.10, 6.11.

Если после замены элементов таблицы их модулями хотя бы один из 4-х рядов становится сходящимся, то сходятся остальные и их суммы равны.

Доказательство. Из четырех предыдущих теорем $\Rightarrow$ «Главная» теорема. □

Лекция 11: Продолжение

от 17 окт 10:28

6.7 Поточечная и равномерная сходимость семейства функций

Определение 30 (Семейство функций, параметры). *Семейство функций* – это произвольное множество функций.

Пусть $f : X \times T \to Y$. Если по каким-либо соображениям элементам множества T уделяется особое внимание, то будем их называть *параметрами*.

То есть $\forall t \in T$ можно рассмотреть функцию

$$f_t(x) = f(x, t).$$

В этом случае будем говорить, что задано семейство функций, зависящих от параметра t.

Пример. $T = \mathbb{N}$, тогда $f_n(x) = x^n$.

Примечание. Пусть задано семейство отображений $f_t : X \to Y_\rho$, Y – метрическое пространство с заданной метрикой ρ, $t \in T$.

Пусть $\mathfrak{B}$ – база на T.

Определение 31 (Сходимость в точке)**.** Будем говорить, что *семейство* $\{f_t\}$ *сходится в точке* $x \in X$, если $f_t(x)$ как функция аргумента t имеет предел по базе $\mathfrak{B}$, то есть $\exists y_x \in Y_\rho : \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists B \in \mathfrak{B} : \ \forall t \in B$

$$\rho\big(f_t(x), y_x\big) < \varepsilon.$$

Определение 32 (Область сходимости, предельная функция)**.** Множество $E = \big\{x \in X : \ \{f_t\} \text{ сходится в точке } x\big\}$ называется *областью сходимости* семейства $\{f_t\}$ по базе $\mathfrak{B}$.

Далее, на E введем функцию, положив

$$f(x) = \lim_{\mathfrak{B}} f_t(x).$$

Функция $f(x)$ называется *предельной.*

Определение 33 (Поточечная сходимость по базе)**.** Пусть дано семейство $f_t : X \to Y_u$ и $f : X \to Y$. Будем говорить, что f_t сходится по базе $\mathfrak{B}$ *поточечно* к f на X, если $\forall x \in X \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists B_x \in \mathfrak{B} : \ \forall t \in B_x$

$$\rho\big(f_t(x), f(x)\big) < \varepsilon.$$

Обозначение:

$$f_t \underset{\mathfrak{B}}{\longrightarrow} f \text{ (на } X)$$

Определение 34 (Равномерная сходимость по базе)**.** Семейство $\{f_t\}$ сходится *равномерно* по базе $\mathfrak{B}$ к f на X, если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists B \in \mathfrak{B} : \ \forall t \in B$ и $\forall x \in X$

$$\rho\big(f_t(x), f(x)\big) < \varepsilon.$$

Обозначение:

$$f_t \underset{\mathfrak{B}}{\rightrightarrows} f \text{ (на } X)$$

Определение 35 (Поточечная сходимость)**.** Пусть $f_n : X \to \mathbb{R}$ – последовательность функций и $f : X \to \mathbb{R}$. Семейство $\{f_n\}$ *сходится поточечно* к f на X, если $\forall x \in X \ \exists f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x), \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists N : \ \forall n > N$

$$\big|f_n(x) - f(x)\big| < \varepsilon.$$

Обозначение:

$$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f \text{ (на } X)$$

Определение 36 (Равномерная сходимость)**.** Последовательность $\{f_n\}$ *равномерно сходится* к f на X при $n \to \infty$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}:\ \forall n > N\ \forall x \in X$

$$\left|f_n(x) - f(x)\right| < \varepsilon.$$

Обозначение:

$$f_n \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f \text{ (на } X)$$

Пример. $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = x^n$

Имеем при фиксирвоанном x:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & -1 < x < 1 \\ 1, & x = 1 \\ +\infty, & x > 1 \\ \nexists, & x \leqslant -1 \end{cases}$$

Таким образом область сходимости этой последовательности $E = (-1;1]$. На множестве E определим предельую функцию

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0, & x \in (-1;1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

Покажем, что f_n сходится к f на E неравномерно, то есть $\exists \varepsilon > 0\ \forall N \in \mathbb{N}:\ \exists n > N\ \exists x \in X:$

$$\left|f_n(x) - f(x)\right| \geqslant \varepsilon.$$

Возьмем $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Пусть N задано произвольно. Возьмем $n = N + 1$ и $x:\ x^n = \frac{3}{4}$, то есть $x = \sqrt[n]{\frac{3}{4}}$. Тогда:

$$\left|f_n(x) - f(x)\right| = \left|\left(\sqrt[n]{\frac{3}{4}}\right)^n - 0\right| = \frac{3}{4} > \frac{1}{2}$$

Пример. $f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}$

$\forall x \in X$:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{1+n^2x^2} = 0.$$

Таким образом, $f(x) = 0\ \forall x \in \mathbb{R}$. Покажем, что $f_n \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f$ на $\mathbb{R}$.

Имеем:

$$\left|f_n(x) - 0\right| = \left|\frac{x}{1+n^2x^2}\right| = \frac{1}{2n} \cdot \left|\frac{2nx}{1+n^2x^2}\right| \leqslant$$
$$\leqslant \left| \begin{matrix} 0 \leqslant (1-nx)^2 = 1 + n^2x^2 - 2nx \Rightarrow \\ \Rightarrow 2nx \leqslant 1 + n^2x^2 \end{matrix} \right| \leqslant \frac{1}{2n} \cdot 1 = \frac{1}{2n}.$$

Пусть $\varepsilon > 0$ задано. Возьмем $N:\ \forall n > N\ \frac{1}{2n} < \varepsilon,\ N = \left[\frac{1}{2\varepsilon}\right]$. Таким образом, $\forall n > N\ \forall x \in \mathbb{R}$

$$\left|f_n(x)\right| \leqslant \frac{1}{2n} < \frac{1}{2N} = \varepsilon \Rightarrow$$

$\Rightarrow f_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f(x)$ на $\mathbb{R}^\infty$

Пример. $f_n(x) = \frac{n\cdot x}{1+n^2x^2}$
$\forall x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n\cdot x}{1+n^2x^2} = 0 \Rightarrow$$

$\forall x \in \mathbb{R}\ f(x) = 0$ (имеется поточечная сходимость).

Покажем, что данное семейство не имеет равномерной сходимости к f. Рассмотрим $f_n(x) - f(x) = f_n(x) = \frac{n\cdot x}{1+n^2x^2}$:

$$f_n'(x) = \frac{n\cdot(1+n^2x^2) - n\cdot x\cdot(2xn^2)}{(1+n^2x^2)^2} = \frac{n-n^3x^2}{(1+n^2x^2)^2} = 0, \quad x = \pm\frac{1}{n}$$

Далее, $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$. Возьмем $\varepsilon = \frac{1}{4}$.
Тогда если N задано, то выберем $n = N+1$ и $x = \frac{1}{n}$.
Тогда

$$\left|f_n(x) - f(x)\right|\Big|_{x=\frac{1}{n}} = \frac{1}{2} > \frac{1}{4} \Rightarrow$$

$\Rightarrow f_n(x) \underset{n\to\infty}{\not\rightrightarrows} f(x)$ (пока что придется обозначать как $\underset{n\to\infty}{\not\rightrightarrows}$, так как нормально я не научился).

Теорема 40 (Критерий Коши сходимости семейства функций)**.** Пусть Y – полное метрическое пространство, $f_t : X \to Y$, $t \in T$ – семейство $\{f_t\}$ равномерно сходится на X по базе $\mathfrak{B} \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists B \in \mathfrak{B}:\ \forall t_1, t_2 \in B$ и $\forall x \in X$

$$\rho\big(f_{t_1}(x); f_{t_2}(x)\big) < \varepsilon.$$

Определение 37 (Равномерная сходимость семейства функций по базе)**.** Будем говорить, что семейство функций $f_t : X \to Y$ *равномерно сходится на X по базе $\mathfrak{B}$*, если:

1. $\exists f : X \to Y$:
$$\lim_{\mathfrak{B}} f_t(x) = f(x), \quad \forall x \in X.$$
2. f_t сходится равномерно к f на X по базе $\mathfrak{B}$.

Теорема 41 (Формулировка критерия Коши для послед. $f_n(x)$)**.** Последовательность $f_n(x)$ равномерно сходится на $X \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}:\ \forall n > N\ \forall p > 0\ \forall x \in X$

$$\left|f_n(x) - f_{n+p}(x)\right| < \varepsilon.$$

Доказательство.

- $\boxed{\Rightarrow}$ Проведем доказательство для $Y = \mathbb{R}$.

  Пусть семейство f_t сходится равномерно на X по базе $\mathfrak{B}$, то есть $\exists f(x) : X \to \mathbb{R}$:
  $$f_t(x) \underset{\mathfrak{B}}{\rightrightarrows} f(x).$$

  Покажем, что выполнено условие Коши.

  Пусть $\varepsilon > 0$ задано. Выберем $B \in \mathfrak{B} : \forall t \in B \ \forall x \in X$
  $$\left|f_t(x) - f(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

  Тогда $\forall t_1, t_2 \in B \ \forall x \in X$
  $$\left|f_{t_1}(x) - f_{t_2}(x)\right| = \left|f_{t_1}(x) - f(x) + f(x) - f_{t_2}(x)\right| \leqslant$$
  $$\leqslant \left|f_{t_1}(x) - f(x)\right| + \left|f_{t_2}(x) - f(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

- $\boxed{\Leftarrow}$ Пусть $\forall \varepsilon > 0 \ \exists B \in \mathfrak{B}$:
  $$\forall t_1, t_2 \in B \text{ и } \forall x \in X \quad \left|f_{t_1}(x) - f_{t_2}(x)\right| < \varepsilon \tag{6.13}$$

  Зафиксируем $x \in X$. Тогда выражение 6.13 есть точная формулировка критерия Коши существования предела функции $f_t(x)$ по базе $\mathfrak{B} \Rightarrow \forall x \in X \ \exists \lim\limits_{\mathfrak{B}} f_t(x) = f(x)$.

  Покажем, что $f_t(x) \underset{\mathfrak{B}}{\rightrightarrows} f(x)$ на X.

  В 6.13 перейдем к пределу по базе $\mathfrak{B}$ по переменной t_1. Получим, что
  $$\left|f(x) - f_{t_2}(x)\right| < \varepsilon.$$

  Таким образом получаем равномерную сходимость семейства $f_{t_2}(x)$ к f на X по базе $\mathfrak{B}$, то есть $\forall \varepsilon > 0 \ \exists B \in \mathfrak{B} \ \forall t_2 \in B$ и $\forall x \in X$
  $$\left|f_{t_2}(x) - f(x)\right| < \varepsilon.$$

$\square$

Следствие. Пусть X, Y – метрические пространства, $E \subset X$, $x_0 \in E$ – предельная точка для E. Семейство $f_t : X \to Y$:

1. f_t сходится на E по базе $\mathfrak{B}$.
2. f_t расходится в точке x_0 по базе $\mathfrak{B}$.
3. $\forall t \ f_t$ непрерывно в точке x_0.

Тогда на E семейство f_t сходится неравномерно.

Доказательство. Применим критерий Коши, покажем, что $\exists \varepsilon > 0 :$ $\forall B \in \mathfrak{B}\ \exists t_1, t_2 \in B$ и $\exists x \in E$:

$$\rho_Y\big(f_{t_1}(x), f_{t_2}(x)\big) \geqslant \varepsilon.$$

Таким образом f_t расходится в точке x_0, тогда $\exists \varepsilon > 0 : \forall B \in \mathfrak{B}\ \exists t_1, t_2 \in B$:

$$\rho_Y\big(f_{t_1}(x_0), f_{t_2}(x_0)\big) \geqslant \varepsilon.$$

Так как f_{t_1} и f_{t_2} непрерывны, тогда $\exists U(x_0) \subset X :\ \forall x \in U(x_0)$

$$\rho_Y\big(f_{t_1}(x), f_{t_2}(x)\big) \geqslant \varepsilon.$$

Возьмем $\forall x \in U(x_0) \cap E \Rightarrow$ тогда в x будет выполняться неравенство

$$\rho_Y\big(f_{t_1}(x), f_{t_2}(x)\big) \geqslant \varepsilon \Rightarrow$$

$\Rightarrow f_t$ на E сходится неравномерно. □

Следствие (Из следствия выше)**.** Если $f_t : (a; b] \to D,\ D$ – область в Y:

1. $\forall t\ f_t$ непрерывно в точке b.
2. f_t сходится на $(a; b)$ по $\mathfrak{B}$.
3. f_t расходится в точке b.

Тогда на $(a; b)$ f_t сходится неравномерно.

6.8 Равномерная сходимость функциональных рядов

Определение 38 (Функциональный ряд)**.** Пусть $f_n : X \to \mathbb{R},\ X$ – произвольное множество.

Функциональным рядом называется выражение вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \tag{6.14}$$

Говорят, что ряд 6.14 сходится на X поточечно, если на X сходится поточечно последовательность его частичных сумм. Ряд 6.14 равномерно сходится на X, если на X равномерно сходится последовательность его частичных сумм.

Теорема 42 (Критерий Коши равномерной сходимости функциональных рядов)**.** Ряд 6.14 равномерно сходится на $X \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N :\ \forall n > N\ \forall p > 0\ \forall x \in X$

$$\big|f_{n+1}(x) + \ldots + f_{n+p}(x)\big| < \varepsilon.$$

Доказательство. Самостоятельно. □

Следствие. Если:

1. Ряд 6.14 сходится на $(a;b)$.
2. Расходится в точке b.
3. $\forall n\ f_n(x)$ непрерывно в точке b.

Тогда ряд 6.14 сходится на $(a;b)$ неравномерно.

Доказательство. Следует из предыдущих следствий. □

Лекция 12: Продолжение

от 20 окт 10:31

Определение 39 (Абсолютная сходимость)**.** Ряд 6.14 сходится абсолютно на X, если на X сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|f_n(x)\right|.$$

Теорема 43. Пусть ряды $(A), (B)$ такие, что:

1. $\forall n$ функции $a_n(x)$ и $b_n(x)$ определены на X.
2. $\exists N:\ \forall n > N$
$$\left|a_n(x)\right| \leqslant b_n(x) \quad \forall x \in X.$$
3. Ряд (B) сходится на X равномерно.

Тогда ряд (A) сходится на X равномерно.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ задано. Выберем $N:\ \forall n > N,\ \forall p > 0\ \forall x \in X$

$$b_{n+1}(x) + \ldots + b_{n+p}(x) < \varepsilon.$$

Тогда $\forall n > N,\ \forall p > 0,\ \forall x \in X$

$$\left|a_{n+1}(x) + \ldots + a_{n+p}(x)\right| \leqslant$$
$$\leqslant \left|a_{n+1}(x)\right| + \ldots + \left|a_{n+p}(x)\right| \leqslant b_{n+1}(x) + \ldots + b_{n+p}(x) < \varepsilon \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ по критерию Коши ряд (A) сходится равномерно на X. □

Следствие (Мажорантный признак Вейерштрасса)**.** Пусть

1. $\forall n\ \exists M_n$:
$$\left|a_n(x)\right| \leqslant M_n \quad \forall x \in X.$$

2. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ сходится.

Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ сходится на X абсолютно и равномерно.

Определение 40 (Неубывающая (невозрастающая) последовательность). Последовательность $f_n : X \to \mathbb{R}$ называется *неубывающей (невозрастающей)* на X, если $\forall x \in X$ последовательность f_n не убывает (не возрастает).

Теорема 44 (Признаки Абеля и Дирихле).

1. **Абеля**

   Пусть функции $a_n(x)$ и $b_n(x)$ удовлетворяют условиям:

   - ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ сходится равномерно на X,
   - последовательность $\{b_n(x)\}$ равномерно ограничена на X и монотонна (то есть $\exists L > 0 : \ \forall n \in \mathbb{N}$ и $\forall x \in X \quad |b_n(x)| \leqslant L$),

   тогда ряд
   $$\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n(x) \cdot b_n(x)\right)$$
   сходится на X равномерно.

2. **Дирихле**

   - частичные суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ равномерно ограничены на X (то есть $\exists M > 0 : \ \forall n$ и $\forall x \in X \quad \left|\sum_{k=1}^{n} a_k(x)\right| \leqslant M$),
   - последовательность $\{b_n(x)\}$ монотонна и равномерно на X стремится к 0,

   тогда ряд
   $$\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n(x) \cdot b_n(x)\right)$$
   сходится на X равномерно.

Доказательство. Рассмотрим

$$\left|a_{n+1}(x)\cdot b_{n+1}(x)+a_{n+2}(x)\cdot b_{n+2}(x)+\ldots+a_{n+p}(x)\cdot b_{n+p}(x)\right| =$$

$$= \Big|(A_{n+1}-A_n)\cdot b_{n+1}(x)+\big((A_{n+2}-A_n)-(A_{n+1}-A_n)\big)\cdot b_{n+2}(x)+\ldots$$

$$\ldots+\big((A_{n+p}-A_n)-(A_{n+p-1}-A_n)\big)\cdot b_{n+p}(x)\Big| =$$

$$= \left|(A_{n+1}-A_n)\cdot b_{n+1}(x)+(A_{n+2}-A_n)\cdot b_{n+2}(x)-(A_{n+1}-A_n)\cdot b_{n+2}(x)+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+(A_{n+p}-A_n)\cdot b_{n+p}(x)-(A_{n+p-1}-A_n)\cdot b_{n+p}(x)\right| =$$

$$= \Big|(A_{n+1}-A_n)\cdot\big(b_{n+1}(x)-b_{n+2}(x)\big)+(A_{n+2}-A_n)\cdot\big(b_{n+2}(x)-b_{n+3}(x)\big)+\ldots$$

$$\ldots+(A_{n+p-1}-A_n)\cdot\big(b_{n+p-1}(x)-b_{n+p}(x)\big)+(A_{n+p}-A_n)\cdot b_{n+p}(x)\Big| =$$

$$= \left|\sum_{k=1}^{p-1}\Big((A_{n+k}-A_n)\cdot\big(b_{n+k}(x)-b_{n+k-1}(x)\big)\Big)+(A_{n+p}-A_n)\cdot b_{n+p}(x)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{p-1}\Big(|A_{n+k}-A_n|\cdot\big|b_{n+k}(x)-b_{n+k+1}(x)\big|\Big)+|A_{n+p}-A_n|\cdot|b_{n+p}(x)|.$$

Если выполнены условия Абеля, то $\forall\varepsilon>0$ выберем $N:\ \forall n>N,\ \forall p>0\ \forall x\in X$

$$\left|a_{n+1}(x)+a_{n+2}(x)+\ldots+a_{n+p}(x)\right|<\frac{\varepsilon}{3\cdot L}.$$

Тогда

$$\sum_{k=1}^{p-1}\Big(|A_{n+k}-A_n|\cdot\big|b_{n+k}(x)-b_{n+k+1}(x)\big|\Big)+|A_{n+p}-A_n|\cdot|b_{n+p}(x)| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{3\cdot L}\left(\sum_{k=1}^{p-1}\big|b_{n+k}(x)-b_{n+k+1}(x)\big|+\big|b_{n+p}(x)\big|\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{3\cdot L}\Big(\big|b_{n+1}(x)\big|+2\big|b_{n+p}(x)\big|\Big)<\frac{\varepsilon}{3\cdot L}\cdot 3\cdot L=\varepsilon \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ по критерию Коши, $\sum_{n=1}^{\infty}\big(a_n(x)\cdot b_n(x)\big)$ сходится равномерно на X.

Пусть выполнены условия Дирихле. Тогда $\forall\varepsilon>0$ выберем $N:\ \forall n>N\ \forall x>X$

$$\big|b_n(x)\big|<\frac{\varepsilon}{3\cdot M}.$$

$$\sum_{k=1}^{p-1}\Big(|A_{n+k}-A_n|\cdot\big|b_{n+k}(x)-b_{n+k+1}(x)\big|\Big)+|A_{n+p}-A_n|\cdot|b_{n+p}(x)| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{p\cdot M}\left(\sum_{k=1}^{p-1}|A_{n+k}-A_n|+|A_{n+p}-A_n|\right) =$$

$$= \frac{\varepsilon}{p\cdot M}\Big(\big|a_{n+1}(x)\big|+\big|a_{n+1}(x)+a_{n+2}(x)\big|+\ldots+\big|a_{n+1}(x)+\ldots+a_{n+p}(x)\big|\Big) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{p\cdot M}\cdot(p\cdot M)=\varepsilon.$$

□

6.9 Свойства предельной функции

Теорема 45 (Условия коммутирования двупредельных переходов)**.** Пусть X, T – множества, $\mathfrak{B}_x$ – база на X, $\mathfrak{B}_T$ – база на T, Y – полное МП, $f_t : X \to Y$, $f : X \to Y$:

- $f_t \underset{\mathfrak{B}_T}{\rightrightarrows} f$ на X,
- $\forall t \in T\ \exists \lim\limits_{\mathfrak{B}_X} = A_t$,

тогда существуют и равны два повторных предела:

$$\lim_{\mathfrak{B}_T}\lim_{\mathfrak{B}_X} f_t(x) = \lim_{\mathfrak{B}_X}\lim_{\mathfrak{B}_T} f_t(x).$$

Запишем условия и утверждение теоремы в форме диаграмы:

$$\begin{tikzcd}
f_t(x) \arrow[r, Rightarrow, "\mathfrak{B}_T"'] \arrow[d, "{\forall t,\ \mathfrak{B}_X}"'] & f(x) \arrow[d, dashed, "\mathfrak{B}_X"] \\
A_t \arrow[r, dashed, "\mathfrak{B}_T"'] & A
\end{tikzcd}$$

$\to$ – дано, $\dashrightarrow$ – утверждение

Доказательство. Докажем наличие нижней стрелки, то есть покажем, что

$$\exists \lim_{\mathfrak{B}_T} = A.$$

Пусть $\varepsilon > 0$ задано. Выберем элемент $B_t \in \mathfrak{B}_T$ $\forall t_1, t_2 \in B_t$ и $\forall x \in X$

$$\rho\big(f_{t_1}(x), f_{t_2}(x)\big) < \frac{\varepsilon}{2},$$

это можно сделать, так как $\exists$ равномерная сходимость f_t к f по $\mathfrak{B}_T$ на X.

Зафиксируем t_1 и t_2 и перейдем к пределу по базе $\mathfrak{B}_X$ в неравенстве

$$\rho(A_{t_1}, A_{t_2}) < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Таким образом для функции $A_t : T \to Y$ выполняются условия критерия Коши $\exists$-ия предела функции по базе $\mathfrak{B}_T \Rightarrow \exists \lim\limits_{\mathfrak{B}_T} A_t = A$.

Покажем, что $\lim\limits_{\mathfrak{B}_X} f(x) = A$. Рассмотрим

$$\rho\big(f(x), A\big) \leqslant \rho\big(f(x), f_t(x)\big) + \rho\big(f_{t_2}(x), A_t\big) + \rho_t(A_t, A).$$

Пусть $\varepsilon > 0$ задано. Выберем $B'_t \in \mathfrak{B}_T :\ \forall t \in B'_t$ и $\forall x \in X$

$$\rho\big(f(x), f_t(x)\big) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Затем выберем $B''_t \in \mathfrak{B}_T:\ \forall t \in B''_t$

$$\rho(A_t, A) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Зафиксируем $t \in B'_t \cap B''_t$.
Выберем $B_x \in \mathfrak{B}_X:\ \forall x \in B_x$

$$\rho\big(f_t(x), A_t\big) < \frac{\varepsilon}{3} \quad (f_t \to A_t).$$

Тогда $\forall x \in B_x$

$$\rho\big(f(x), A\big) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

$\square$

Теорема 46 (Непрерывность предельной функции)**.** Пусть X, Y – метрические пространства, $\mathfrak{B}$ – база на T, $f_t : X \to Y$, $f : X \to Y$:

- $\forall t \in T$ функция f_t непрерывна в точке $x_0 \in X$,
- семейство $f_t \underset{\mathfrak{B}}{\rightrightarrows} f$ на X,

тогда функция f непрерывна в точке x_0.

Доказательство. Имеем

$$\begin{tikzcd}
f_t(x) \arrow[r, phantom, "\underset{\mathfrak{B}}{\rightrightarrows}"] \arrow[d, "\substack{\forall t \text{ при} \\ x \to x_0}"'] & f(x) \arrow[d, dashed] & \\
f_t(x_0) \arrow[r, dashed, "\mathfrak{B}"'] & A & = f(x_0)
\end{tikzcd}$$

$\square$

Следствие. Если $\forall n$ $f_n(x)$ непрерывна в точке x_0 и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ равномерно сходится в точке x_0, тогда сумма функционального ряда непрерывна в точке x_0.

Доказательство. Очевидно. $\square$

Теорема 47 (Интегрируемость предельной функции)**.** Пусть $f_t : [a;b] \to \mathbb{R}$, $f : [a;b] \to \mathbb{R}$:

- $\forall t \in T$ f_t интегрируема по Риману на $[a;b]$,
- $f_t \underset{\mathfrak{B}}{\rightrightarrows} f$ на $[a;b]$ ($\mathfrak{B}$ – база на T),

тогда:

1. f интегрируема по Риману на $[a;b]$.

2.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\mathfrak{B}} \int_a^b f_t(x)dx \Leftrightarrow \lim_{\mathfrak{B}} \int_a^b f_t(x)dx = \int_a^b \lim_{\mathfrak{B}} f_t(x)dx.$$

Доказательство.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda(P)\to 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i =$$

$$= \lim_{\lambda(P)\to 0} \sigma\big(f(P,\xi)\big) = \lim_{\lambda(P)\to 0} \lim_{\mathfrak{B}} \sigma\big(f_t,(P,\xi)\big) = \lim_{\mathfrak{B}} \lim_{\lambda(P)\to 0} \sigma\big(f_t,(P,\xi)\big) =$$

$$= \lim_{\mathfrak{B}} \int_a^b f_t(x)dx.$$

$$\begin{tikzcd} \sigma_t = \sigma\big(f_t,(P,\xi)\big) \arrow[r, dashed, shift left, "\mathfrak{B}"'] \arrow[r, dashed, shift right] \arrow[d, "\forall t"', "\lambda(P)\to 0"'] & \sigma\big(f,(P,\xi)\big) \arrow[d, dashed, "\lambda(P)\to 0"] \\ \int_a^b f_t(x)dx \arrow[r, dashed, "\mathfrak{B}"'] & \int_a^b f(x)dx \end{tikzcd} \qquad (6.15)$$

(я не научился делать утверждение для равномерной сходимости)

Пусть $\mathcal{P}$ – множество разбиений с отмеченными точками отрезка $[a;b]$. Тогда функции $\sigma\big(f_t,(P,\xi)\big)$ и $\sigma\big(f,(P,\xi)\big)$ функции на $\mathcal{P}$.

Покажем, что семейство $\sigma_t = \sigma\big(f_t,(P,\xi)\big)$ сходится равномерно к функции $\sigma\big(f,(P,\xi)\big)$:

$$\Big|\sigma\big(f_t,(P,\xi)\big) - \sigma\big(f,(P,\xi)\big)\Big| =$$

$$= \left|\sum_{i=1}^n f_t(\xi_i)\Delta x_i - \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i\right| \leqslant \sum_{i=1}^n \big|f_t(\xi_i) - f(\xi_i)\big|\Delta x_i.$$

Пусть $\varepsilon > 0$ задано. Выберем элемент $B \in \mathfrak{B}: \ \forall t \in B, \ \forall x \in [a;b]$

$$\big|f_t(x) - f(x)\big| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Тогда

$$\sum_{i=1}^n \big|f_t(\xi_i) - f(\xi_i)\big|\Delta x_i < \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{i=1}^n \Delta x_i = \frac{\varepsilon}{b-a}\cdot(b-a) = \varepsilon.$$

Таким образом $|\sigma_t - \sigma| < \varepsilon \Rightarrow \sigma_t \underset{\mathfrak{B}}{\rightrightarrows} \sigma \Rightarrow$ по теореме 45 все стрелки в диаграмме 6.15 доказаны $\Rightarrow$ все переходы в равенстве законны. □

Теорема 48 (Дини). Пусть X – компактное метрическое пространство. Последовательность $f_n : X \to \mathbb{R}$ монотонна на X и $\forall x$ f_n непрерывна на X.

Если $f : X \to \mathbb{R}$ непрерывна на X, то эта сходимость равномерная.

Доказательство. Для $\forall x \in X$ выберем номер $N_x: \ \forall n > N_x$

$$\left|f_n(x) - f(x)\right| < \varepsilon, \quad \text{где } \varepsilon > 0 \text{ задано.}$$

Так как f_{N_x} и f непрерывны, то $\exists U_x \subset X \ \forall y \in U_x$

$$\left|f_{N_x}(y) - f(y)\right| < \varepsilon, \quad \text{(используя непрерывность).}$$

Таким образом для каждого $x \in X$ построим такую окружность U_x.

Семейство таких окрестностей является открытым покрытием пространства X.

Пусть $\{U_{X_1}, U_{X_2}, \ldots, U_{X_k}\}$ – конечное подпокрытие X.

Положим $N = \max\{N_{X_1}, N_{X_2}, \ldots, N_{X_1=k}\}$. Тогда $\forall n > N, \ \forall x \in X$

$$\left|f_n(x) - f(x)\right| < \varepsilon.$$

Это и есть равномерная сходимость. □

Лекция 13: Продолжение

от 27 окт 10:34

Теорема 49 (Дифференцируемость предельной функции). Пусть $-\infty < a < b < +\infty$ (a, b – конечны), $f_t : (a;b) \to \mathbb{R}, \ f : (a;b) \to \mathbb{R}$:

- $\forall t \in T \ f_t$ дифференцируема на $(a;b)$,
- $\exists \phi : (a;b) \to \mathbb{R}: \ f'_t \underset{\mathfrak{B}}{\rightrightarrows} \phi$ на $(a;b)$,
- $\exists x_0 \in (a;b): \ f_t(x_0) \to f(x_0)$,

тогда:

1. $f_t \underset{\mathfrak{B}}{\rightrightarrows} f$ на $(a;b)$.
2. f дифференцируема на $(a;b)$.
3. $\forall x \in (a;b) \ f'(x) = \phi(x)$.

Доказательство. Докажем, что семейство функций f_t сходится к f равномерно на $(a;b)$:

$$\begin{aligned}
&\left|f_{t_1}(x) - f_{t_2}(x)\right| = \\
&\qquad = \left|f_{t_1}(x) - f_{t_2}(x) + f_{t_1}(x_0) - f_{t_1}(x_0) + f_{t_2}(x_0) - f_{t_2}(x_0)\right| \leqslant \\
&\qquad \leqslant \left|(f_{t_1}(x) - f_{t_1}(x_0)) - (f_{t_2}(x) - f_{t_2}(x_0))\right| + \left|f_{t_1}(x_0) - f_{t_2}(x_0)\right| = \\
&\qquad\qquad = \left|f'_{t_1}(\xi) - f'_{t_2}(\xi)\right| \cdot \left|x - x_0\right| + \left|f_{t_1}(x_0) - f_{t_2}(x_0)\right|.
\end{aligned}$$

Пусть $\varepsilon > 0$ задано. Выберем $B \in \mathfrak{B}$ ($\mathfrak{B}$ – база на T) $\forall t_1, t_2 \in B$

$$\left|f_{t_1}(x_0) - f_{t_2}(x_0)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

и $\forall x \in (a;b)$ и $\forall t_1', t_2' \in B$:

$$\left|f'_{t_2'}(x) - f'_{t_2'}(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

Тогда $\forall t_1, t_2 \in B$ и $\forall x \in (a;b)$

$$\left|f_{t_1}(x) - f_{t_2}(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \cdot (b-a) + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Итак, $f_t \underset{\mathfrak{B}}{\rightrightarrows} f$ на $(a;b)$. Покажем, что предельная функция f дифференцируема на $(a;b)$ и $\forall x \in (a;b)$

$$f'(x) = \phi(x):$$

$$\begin{aligned}
f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \\
= \lim_{h\to 0}\frac{\lim\limits_{\mathfrak{B}} f_t(x+h) - \lim\limits_{\mathfrak{B}} f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0}\lim_{\mathfrak{B}}\frac{f_t(x+h)-f_t(x)}{h} \overset{(\star)}{=} \\
&\overset{(\star)}{=} \lim_{\mathfrak{B}}\lim_{h\to 0}\frac{f_t(x+h)-f_t(x)}{h} = \lim_{\mathfrak{B}} f_t'(x) = \phi(x).
\end{aligned}$$

Покажем законность перехода $(\star)$. Пусть $x \in (a;b)$, $x+h \in (a;b)$. Рассмотрим

$$\begin{tikzcd}
F_t(h) = \frac{f_t(x+h)-f_t(x)}{h} \arrow[r, dashed, "\mathfrak{B}"', shift left] \arrow[r, dashed, shift right] \arrow[d] & \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = F(h) \arrow[d, dashed] \\
f_t'(x) \arrow[r, "\mathfrak{B}"', Rightarrow] & \phi(x) \arrow[r, dashed, shift left] \arrow[r, dashed, shift right] & f'(x)
\end{tikzcd}$$

Докажем существование двойной верхней стрелки. Имеем:

$$\left.\begin{aligned} f_t(x) &\underset{\mathfrak{B}}{\longrightarrow} f(x) \\ f_t(x+h) &\underset{\mathfrak{B}}{\longrightarrow} f(x+h) \end{aligned}\right\} \Rightarrow F_t(h) \underset{\mathfrak{B}}{\longrightarrow} F(h),$$

$$\begin{aligned}
&\left|F_{t_1}(h) - F_{t_2}(h)\right| = \\
&\qquad = \left|\overbrace{\frac{f_{t_1}(x+h)-f_{t_1}(x)}{h}}^{=f'_{t_1}(\xi)\cdot|h|} - \frac{f_{t_2}(x+h)-f_{t_2}(x)}{h}\right| = \\
&\qquad = \frac{1}{|h|}\left|f'_{t_1}(\xi)\cdot|h| - f'_{t_2}(\xi)\cdot|h|\right| = \\
&\qquad = \left|f'_{t_1}(\xi) - f'_{t_2}(\xi)\right|,\ \xi \in (x; x+h).
\end{aligned}$$

Пусть $\varepsilon > 0$ задано. Тогда $\exists B \in \mathfrak{B}: \ \forall t_1, t_2 \in B$

$$\left|f'_{t_1}(\xi) - f'_{t_2}(\xi)\right| < \varepsilon.$$

Таким образом семейство $\left\{F_t(h)\right\}$ сходится равномерно на $(a;b)$.
Правая вертикальная стрелка следует из теоремы 45. □

Следствие. Если

- $\forall n \ f_n(x)$ непрерывна на $(a;b)$,
- ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ равномерно сходится на $(a;b)$,

то его сумма $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ непрерывна на $(a;b)$, то есть $\forall x_0 \in (a;b)$

$$\lim_{x\to x_0} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to x_0} f_n(x).$$

Следствие. Если

- $\forall n \ f_n(x) \in R[a;b]$ (интегрируема на $[a;b]$),
- ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ равномерно сходится на $[a;b]$,

то его сумма интегрируема на $[a;b]$ и

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)dx.$$

Следствие. Если

- $\forall n \ f_n(x)$ дифференцируема на $(a;b)$,
- $\exists x_0 \in [a;b]$: ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ сходится,
- ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$ сходится равномерно на $(a;b)$,

то

1. Ряд сходится на $(a;b)$ равномерно.
2. Его сумма дифференцируема на $(a;b)$.
3. $\forall x \in (a;b)$
$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x).$$