Математический анализ

Данил Заблоцкий

2 января 2024 г.

Оглавление

Глава 5

Дифференциальное исчисление функций многих переменных

Лекция 1: Функции многих переменных

от 01 сен 10:28

5.1 Производная по вектору

Пусть $x = (x_1, x_2, x_3) = x(t)$, $f\big(x(t)\big) = f(x_1, x_2, x_3)$, тогда:

$$\frac{df\big(x(t)\big)}{dt} = \frac{\delta f}{\delta x_1} \cdot \frac{dx_1}{dt} + \frac{\delta f}{\delta x_2} \cdot \frac{dx_2}{dt} + \frac{\delta f}{\delta x_3} \cdot \frac{dx_3}{dt} = \\ = \frac{\delta f}{\delta x_1} \cdot v_1 + \frac{\delta f}{\delta x_2} \cdot v_2 + \frac{\delta f}{\delta x_3} \cdot v_3,$$

где $\vec{v} = \{v_1, v_2, v_3\}$ – скорость частицы, перемещающейся по γ-ну $x(t)$.

Определение 1 (Производная функции по вектору). Пусть D в $\mathbb{R}^n$ – область, $f : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$, вектор $v \in T\mathbb{R}^n_{x_0}$ – касательное пространство к R^n в точке x_0 (совокупность всех векторов, исходящих из точки x_0).

Производной функции f по вектору v называется величина

$$\frac{\delta f}{\delta \vec{v}} = D\vec{v}f(x_0) := \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t}, \text{ если } \lim \exists.$$

Утверждение. Пусть $f : D \to \mathbb{R}$ – дифференцируемо в точке $x_0 \in D$. Тогда $\forall \vec{v} \in T\mathbb{R}^n_{x_0} \exists \frac{\delta f}{\delta \vec{v}}(x_0)$:

$$\frac{\delta f}{\delta \vec{v}}(x_0) = \frac{\delta f}{\delta x_1}(x_0) \cdot v_1 + \frac{\delta f}{\delta x_2}(x_0) \cdot v_2 + \ldots + \frac{\delta f}{\delta x_n}(x_0) \cdot v_n = df(x_0) \cdot \vec{v},$$

где $df(x_0) \cdot \vec{v}$ – скалярное произведение,

$$df(x_0) = \left\{ \frac{\delta f}{\delta x_1}(x_0), \frac{\delta f}{\delta x_2}(x_0), \ldots, \frac{\delta f}{\delta x_n}(x_0) \right\},$$
$$\vec{v} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$$

Доказательство. Рассмотрим отображение $\gamma : [0; 1] \to \mathbb{R}^n$:

$$\vec{\gamma}(t) = \vec{x_0} + \vec{v} \cdot t \Leftrightarrow \vec{\gamma}(t) = \begin{Bmatrix} x_1 = x_0^{(1)} + v_1 \cdot t \\ x_2 = x_0^{(2)} + v_2 \cdot t \\ \vdots \\ x_n = x_0^{(n)} + v_n \cdot t \end{Bmatrix}, \quad t \in [0; 1]$$

Заметим, что $\gamma(t)$ дифференцируемо в точке $t = 0 \Rightarrow$ отображение $f \circ \gamma : [0; 1] \to \mathbb{R}$ – дифференцируемо в точке $t = 0$.

$$f \circ \gamma = f\big(\gamma(t)\big) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{df\big(\gamma(t)\big)}{dt}\bigg|_{t=0} = \left(\frac{\delta f}{\delta x_1} \cdot \frac{dx_1}{dt} + \frac{\delta f}{\delta x_2} \cdot \frac{dx_2}{dt} + \ldots + \frac{\delta f}{\delta x_n} \cdot \frac{dx_n}{dt} \right)\bigg|_{t=0} =$$
$$= \left(\frac{\delta f}{\delta x_1} \cdot v_1 + \frac{\delta f}{\delta x_2} \cdot v_2 + \ldots + \frac{\delta f}{\delta x_n} \cdot v_n \right)\bigg|_{t=0} = df\big(\gamma(0)\big) \cdot \vec{v}$$

Если f дифференцируемо в точке $x_0 \Rightarrow \forall \vec{\gamma}(t) = \vec{x_0} + \vec{v} \cdot t$:

$$\frac{df\big(\gamma(t)\big)}{dt} := \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + v \cdot t) - f(x_0)}{t} = \frac{\delta f}{\delta \vec{v}}(x_0)$$

□

Утверждение (Известно из алгебры)**.** Если $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – линейное, то $\exists! \vec{a} \in \mathbb{R}^n : \forall x \in \mathbb{R}^n$

$$L(x) = \vec{a} \cdot \vec{x},$$

$$\big(L(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 L(x_1) + \lambda_2 L(x_2)\big)$$

где $\vec{a} \cdot \vec{x}$ – скалярное произведение.

Определение 2 (Градиент функции в точке)**.** Пусть $f : D \to \mathbb{R}$, D – область в $\mathbb{R}^n$, f – дифференцируема в точке $x \in D$. Вектор $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$:

$$df(x) \cdot h = \vec{a} \cdot h, \quad h \in \mathbb{R}$$

называется *градиентом функции f в точке* $x \in \mathbb{R}^n$ и обозначается

$$gradf(x)$$

Если в $\mathbb{R}^n$ зафиксировать ортонормированный базис, то

$$grad f(x) = \left\{\frac{\delta f}{\delta x_1}(x), \frac{\delta f}{\delta x_2}(x), \ldots, \frac{\delta f}{\delta x_n}(x)\right\}$$

Определение 3 (Производная по направлению вектора). Если $\vec{v} \in T\mathbb{R}^n_{x_0}$, $|\vec{v}| = 1$, то $\frac{\delta f}{\delta \vec{v}}(x)$ называется *производной по направлению вектора* $\vec{v}$.

Пример.

$$\begin{cases} \cos\alpha = \cos\langle\vec{v}, 0x\rangle \\ \cos\beta = \cos\langle\vec{v}, 0y\rangle \end{cases} \text{ – направляющие косинусы}$$

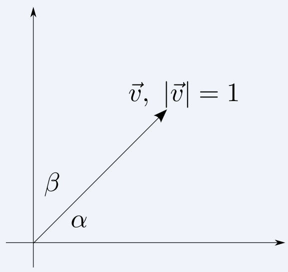

Рис. 5.1: $\vec{v} = \{\cos\alpha, \cos\beta\}$

Так как при данных условиях $\vec{v} = \{\cos\alpha_1, \cos\alpha_2, \ldots, \cos\alpha_n\}$:

$$\frac{\delta f}{\delta \vec{v}}(x) = \frac{\delta f}{\delta x_1} \cdot \cos\alpha_1 + \ldots + \frac{\delta f}{\delta x_n} \cdot \cos\alpha_n.$$

Смысл градиента: градиент показывает направление самого быстрого возрастания функции.

5.2 Основные теоремы дифференциального исчисления функций многих переменных

Теорема 1 (О среднем). Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$, $x \in D$, $x + h \in D$, $[x, x+h] \subset D$, $f : D \to \mathbb{R}$ – дифференцируемо на $(x, x+h)$ и непрерывно на $[x, x+h]$. Тогда $\exists \xi \in (x, x+h)$:

$$f(x+h) - f(x) = f'(\xi) \cdot h = \frac{\delta f}{\delta x_1}(\xi) \cdot h^1 + \frac{\delta f}{\delta x_2}(\xi) \cdot h^2 + \ldots + \frac{\delta f}{\delta x_n}(\xi) \cdot h^n,$$

где $\{1, 2, \ldots, n\}$ над h – индексы.

Доказательство. Рассмотрим отображение $\gamma : [0;1] \to D$, определенное:

$$\gamma(t) = x + t \cdot h, \quad \gamma(t) = \begin{cases} x_1(t) = x_1 + t \cdot h^1 \\ x_2(t) = x_2 + t \cdot h^2 \\ \vdots \\ x_n(t) = x_n + t \cdot h^n \end{cases},$$

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad h = \{h^1, h^2, \dots, h^n\}, \ t \in [0;1],$$

$$\begin{matrix} \gamma(0) = x, \\ \gamma(1) = x + h \end{matrix}, \quad [0;1] \xrightarrow{\gamma} [x; x+h].$$

Заметим, что $gamma(t)$ дифференцируемо на $(0;1)$, непрерывно на $[0;1]$, причем $\big(x_i(t)\big)' = h^i$.

Рассмотрим функцию $F(t) = f\big(\gamma(t)\big), \ F : [0;1] \to \mathbb{R}$. Имеем:

1. F – дифференцируема на $(0;1)$ (как композиция двух дифференцируемых).
2. F – непрерывна на $[0;1]$ (как композиция двух непрерывных).

Следовательно, по теореме Лагранжа:

$$\begin{matrix} F(1) & - & F(0) & = F'(\tau) \cdot (1-0), \ \tau \in (0;1) \\ \| & & \| & \\ f(x+h) & - & f(x) & = \Big(f\big(\gamma(\tau)\big)\Big)' \cdot 1 \end{matrix},$$

$$\Big(f\big(\gamma(\tau)\big)\Big)' \cdot 1 = f'\big(\gamma(\tau)\big) \cdot \gamma'(\tau) = \underset{\substack{\| \\ x_1'(t)}}{\frac{\delta f}{\delta x_1}} \cdot h' + \frac{\delta f}{\delta x_2} \cdot h_2 + \ldots + \frac{\delta f}{\delta x_n} \cdot h^n.$$

Пусть $\gamma(\tau) = \xi \in D$, тогда:

$$f(x+h) - f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\delta f}{\delta x_1}(\xi) & \frac{\delta f}{\delta x_2}(\xi) & \cdots & \frac{\delta f}{\delta x_n}(\xi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h^1 \\ h^2 \\ \vdots \\ h^n \end{pmatrix} = f'(\xi) \cdot h.$$

□

Следствие. Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}$ – дифференцируема на D и $\forall x \in D \ d(fx) = 0$ (то есть $\forall i \ \frac{\delta f}{\delta x_i} = 0$). Тогда $f(x) = const$.

Доказательство. Пусть $x_0 \in D$ и $B(x_0, \rho) \subset D$ – шар $\exists$, так как D – область. Тогда $\forall x \in B(x_0, \rho) \quad [x_0; x] \subset B(x_0, \rho) \subset D$. Следовательно:

$$f(x) - f(x_0) = \underset{\substack{\| \\ \left\{\frac{\delta f}{\delta x_1}(\xi), \dots, \frac{\delta f}{\delta x_n}(\xi)\right\}}}{f'(\xi)} \cdot (x - x_0) = 0.$$

Таким образом, $\forall x \in B(x_0, \rho)\ f(x) = f(x_0)$.

Построим путь из точки x_0 к некоторой точке $x \in D$:

$$\gamma : [0; 1] \to D, \qquad \begin{matrix} \gamma(0) = x_0 \\ \gamma(1) = x \end{matrix}\ .$$

По определению пути, γ – непрерывно. Тогда $\exists \delta :\ \forall 0 \leqslant t \leqslant \delta$

$$\gamma(t) \in B(x_0, \rho) \Rightarrow f\big(\gamma(t)\big) = f(x_0),\ t \in [0; \delta],$$

где t – точка из $B(x_0, \rho)$.

Пусть $\Delta = \sup \delta \Rightarrow f\big(\gamma(\Delta)\big) = f(x_0)$. Покажем, что $\Delta = 1$.

Пусть $\Delta < 1$ $(\Delta \neq 1)$. Построим шар $B\big(\gamma(\Delta), \rho_\Delta\big)$. Тогда $\exists \varepsilon > 0 :$ $\Delta - \varepsilon < t < \Delta + \varepsilon$.

Но тогда $f\big(\gamma(\Delta+\varepsilon)\big) = f(x_0)$ (так как точка $\gamma(\Delta+\varepsilon) \in B\big(\gamma(\Delta), \rho_\Delta\big)$) – противоречие с тем, что $\Delta = \sup \delta \Rightarrow \Delta = 1$.

$\gamma(1) = x$ и $f(x) = f(x_0) \Rightarrow$ так как $x \in D$ – произведение точек, то имеем, что $\forall x \in D\ f(x) = f(x_0) \Rightarrow f(x)$ – $const$. □

Теорема 2 (Достаточное условие дифференцируемости функции)**.** Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}$, f имеет непрерывные частные производные в каждой окрестности точки $x \in D$. Тогда f – дифференцируема в точке x.

Доказательство. Без ограничения общности, будем считать, что окрестность точки $x_0 \in D$ является шаром $B(x_0, \rho) \subset D$.

Пусть $h : x_0 + h \in B(x_0, \rho)$. Здесь

$$\begin{matrix} x_0 = (x^1, x^2, \dots, x^n) \\ x_0 + h = (x^1 + h^1, x^2 + h^2, \dots, x^n + h^n) \end{matrix}\ .$$

Заметим, что точки

$$\begin{matrix} x_1 = (x^1, x^2 + h^2, \dots, x^n + h^n) \\ x_2 = (x^1, x^2, x^3 + h^3, \dots, x^n + h^n) \\ \vdots \\ x_{n-1} = (x^1, x^2, x^3, \dots, x^{n-1}, x^n + h^n) \end{matrix} \quad \in B(x_0, \rho).$$

$$
\begin{aligned}
&f(x_0+h)-f(x_0)= \\
&\qquad = f(x_0+h)-f(x_1)+f(x_1)-f(x_2)+f(x_2)-\dots \\
&\qquad\quad \dots - f(x_{n-1})+f(x_{n-1})-f(x_0)= \\
&= f(x^1+h^1,\dots,x^n+h^n)-f(x^1,x^2+h^2,\dots,x^n+h^n)+ \\
&+ f(x^1,x^2+h^2,\dots,x^n+h^n)-f(x^1,x^2,\dots,x^n+h^n)+ \\
&+ f(x^1,x^2,\dots,x^n+h^n)-\dots-f(x^1,x^2,\dots,x^{n-1},x^n)+ \\
&+ f(x^1,x^2,\dots,x^{n-1},x^n+h^n)-f(x^1,x^2,\dots,x^n)= \\
&= \left|\begin{array}{c}\text{Теорема Лагранжа для}\\ \text{функции одной переменной}\end{array}\right| = \\
&= \frac{\delta f}{\delta x_1}(x^1+\theta^1h^1,x^2+h^2,\dots,x^n+h^n)\cdot h^1+ \\
&+ \frac{\delta f}{\delta x^2}(x^1,x^2+\theta^2h^2,\dots,x^n+h^n)\cdot h^2+\dots \\
&\qquad \dots+\frac{\delta f}{\delta x^n}(x^1,x^2,\dots,x^n+\theta^nh^n)\cdot h^n.
\end{aligned}
$$

Используя непрерывность частных производных, запишем:

$$
\begin{aligned}
&f(x_0+h)-f(x_0)= \\
&\qquad = \frac{\delta f}{\delta x^1}(x^1,x^2,\dots,x^n)\cdot h^1+\alpha^1(h^1)+\dots \\
&\qquad\qquad \dots+\frac{\delta f}{\delta x^n}(x^1,x^2,\dots,x^n)\cdot h^n+\alpha^n(h^n),
\end{aligned}
$$

где $\alpha^1,\alpha^2,\dots,\alpha^n$ стремятся к нулю при $\vec{h}\to 0$.

Это означает, что:

$$
\begin{gathered}
f(x_0+h)-f(x_0)=L(x_0)\cdot h+\underset{h\to 0}{o}(h) \\
\left(\text{где } L(x_0)=\tfrac{\delta f}{\delta x^1}(x_0)\cdot h^1+\dots+\tfrac{\delta f}{\delta x^n}(x_0)\cdot h^n=df(x_0)\right)
\end{gathered}
\quad\Rightarrow
$$

$\Rightarrow$ по определению $f(x)$ дифференцируема в точке x_0. □

Лекция 2: Производные высших порядков

от 06 сен 08:47

5.3 Производные высших порядков

Определение 4 (Вторая производная функции по переменным)**.** Пусть $f: D\to\mathbb{R}$, D – область в $\mathbb{R}^n$. Производная по переменной x^j от производной по переменной x^i называется *второй производной функции f по переменным x^i, x^j* и обозначается

$$\frac{\delta^2 f}{\delta x^i\delta x^j}(x) \text{ или } f''_{x^i,x^j}(x).$$

Теорема 3 (О смешанных производных)**.** Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}$, $x \in D$, f имеет в D непрерывные смешанные производные (второго порядка). Тогда эти производные не зависят от порядка дифференцирования.

Доказательство. Пусть $\frac{\delta^2 f}{\delta x^i \delta x^j}$ и $\frac{\delta^2 f}{\delta x^j \delta x^i}$ – непрерывны в точке $x \in D$.

Так как остальные переменные фиксированы, то можно считать, что f зависит только от двух переменных.

Тогда $D \subset \mathbb{R}^2$, $f : D \to \mathbb{R}$ и $\frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y}$ и $\frac{\delta^2 f}{\delta y \delta x}$ – непрерывны в точке $x_0 = (x, y) \in D$.

Покажем, что $\frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y} = \frac{\delta^2 f}{\delta y \delta x}$.

Рассмотрим функции:

$$\begin{array}{l} \phi(t) = f(x + t \cdot \Delta x, y + \Delta y) - f(x + t \cdot \Delta x, y) \\ \psi(t) = f(x + \Delta x, y + t \cdot \Delta y) - f(x, y + t \cdot \Delta y) \end{array}, \quad t \in [0; 1].$$

Имеем:

$$\begin{aligned} &\phi(1) - \phi(0) = \\ &\qquad = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y) - f(x, y + \Delta y) + f(x, y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\psi(1) - \psi(0) = \\ &\qquad = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y) + f(x, y) \end{aligned}$$

Тогда:

$$\phi(1) - \phi(0) = \psi(1) - \psi(0) \tag{5.1}$$

$$\begin{aligned} &\phi(1) - \phi(0) = \phi'(\xi) \cdot (1 - 0) = \\ &\quad = \frac{\delta f}{\delta x}(x + \xi \cdot \Delta x, y + \Delta y) \cdot \Delta x + \frac{\delta f}{\delta y}(x + \xi \cdot \Delta x, y + \Delta y) - \\ &\quad\quad - \frac{\delta f}{\delta x}(x + \xi \cdot \Delta x, y) \cdot \Delta x - \frac{\delta f}{\delta y}(x + \xi \cdot \Delta x, y) \cdot 0 = \\ &\quad\quad = \left(\frac{\delta f}{\delta x}(x + \xi \cdot \Delta x, y + \Delta y) - \frac{\delta f}{\delta x}(x + \xi \cdot \Delta x, y)\right) = \\ &\quad\quad\quad = \left| \begin{array}{l} \text{по теореме Лагранжа для} \\ \text{функции 1-ой переменной} \end{array} \right| = \\ &\quad\quad\quad\quad = \frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y}(x + \xi \cdot \Delta x, y + \eta \cdot \Delta y) \Delta x \Delta y. \end{aligned}$$

Положим $(x + \xi \Delta x, y + \eta \cdot \Delta y) = P \in \Pi$.

Аналогично:

$$\psi(1) - \psi(0) = \psi'(\xi)\cdot(1-0) =$$
$$= \frac{\delta f}{\delta x}(x+\Delta x, y+\xi\cdot\Delta y)\cdot 0 + \frac{\delta f}{\delta y}(x+\Delta x, y+\xi\cdot\Delta y)\cdot\Delta y -$$
$$- \frac{\delta f}{\delta x}(x, y+\xi\cdot\Delta y)\cdot 0 - \frac{\delta f}{\delta y}(x, y+\xi\cdot\Delta y)\cdot\Delta y =$$
$$= \left(\frac{\delta f}{\delta y}(x+\Delta x, y+\xi\cdot\Delta y) - \frac{\delta f}{\delta y}(x, y+\xi\cdot\Delta y)\right)\Delta y =$$
$$= \left|\begin{array}{l}\text{по теореме Лагранжа для}\\ \text{функции 1-ой переменной}\end{array}\right| =$$
$$= \frac{\delta^2 f}{\delta y\delta x}(x+\tau\cdot\Delta x, y+\xi\cdot\Delta y)\Delta y\Delta x$$

Положим, что $(x+\tau\cdot\Delta x, y+\xi\cdot\Delta y) = Q$.
Тогда из 5.1 следует, что:

$$\begin{array}{ccc}\frac{\delta^2 f}{\delta x\delta y}(P)\Delta x\Delta y & = & \frac{\delta^2 f}{\delta y\delta x}(Q)\Delta x\Delta y\\ \parallel & & \parallel \\ \frac{\delta^2 f}{\delta x\delta y}(x+\xi\cdot\Delta x, y+\eta\cdot\Delta y) & = & \frac{\delta^2 f}{\delta y\delta x}(x+\tau\cdot\Delta x, y+\xi\cdot\Delta y)\end{array}.$$

Используя непрерывность частных производных при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0 \Rightarrow$

$$x+\xi\cdot\Delta x \to x, \quad y+\eta\cdot\Delta y \to y.$$

Таким образом,

$$\frac{\delta^2 f}{\delta x\delta y} = \frac{\delta^2 f}{\delta y\delta x}.$$

□

5.4 Формула Тейлора

Определение 5 (Гладкая функция класса $C^{(k)}$). Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}$. Будем говорить, что f является *гладкой функцией класса* $C^{(k)}$ (k-го порядка), то есть $f \in C^{(k)}(D,\mathbb{R})$, если f имеет непрерывные частные производные до k-го порядка включительно.

Теорема 4 (Формула Тейлора). Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}$, $f \in C^{(k)}(D,\mathbb{R})$, $x \in D$, $x+h \in D$, $[x; x+h] \subset D$. Тогда:

$$f(x+h) = f(x) + \sum_{i=1}^{k-1}\frac{1}{i!}\left(\frac{\delta}{\delta x^1}\cdot h^1 + \ldots + \frac{\delta}{\delta x^n}\cdot h^n\right)^i \cdot f(x) + R^k,$$

где R^k – остаточный член,

$$R^k = \frac{1}{k!}\left(\frac{\delta}{\delta x^1}\cdot h^1 + \ldots + \frac{\delta}{\delta x^n}\cdot h^n\right)^k \cdot f(x+\xi\cdot h),$$

$$x = (x^1, \ldots, x^n), \quad h = (h^1, \ldots, h^n).$$

Доказательство. Рассмотрим функцию:

$$\phi(t) = f(x + t\cdot h),\ t \in [0;1]$$

Применим формулу Тейлора к $\phi(t)$:

$$\phi(1) = \phi(0) + \frac{1}{1!}\cdot\phi'(0)\cdot(1-0) + \frac{1}{2!}\cdot\phi''(0)\cdot(1-0)^2 + \\ + \frac{1}{3!}\cdot\phi'''(0)\cdot(1-0)^3 + \ldots + \frac{1}{k!}\cdot\phi^{(k)}\cdot(1-0)^k. \quad (5.2)$$

$$\phi(1) = f(x+h), \quad \phi(0) = f(x).$$

$$\phi'(0) = f'(x+th)\cdot(x+t\cdot h)'_k\Big|_{t=0} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\delta f(x+t\cdot h)}{\delta x^1} & \frac{\delta f(x+t\cdot h)}{\delta x^2} & \cdots & \frac{\delta f(x+t\cdot h)}{\delta x^n}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} h^1 \\ h^2 \\ \vdots \\ h^n\end{pmatrix}\Bigg|_{t=0} =$$

$$= \left(\frac{\delta f(x+t\cdot h)}{\delta x^1}\cdot h^1 + \frac{\delta f(x+t\cdot h)}{\delta x^2}\cdot h^2 + \ldots + \frac{\delta f(x+t\cdot h)}{\delta x^n}\cdot h^n\right)\Bigg|_{t=0} =$$

$$= \frac{\delta f}{\delta x^1}(x)\cdot h^1 + \frac{\delta f}{\delta x^2}(x)\cdot h^2 + \ldots + \frac{\delta f}{\delta x^n}(x)\cdot h^n =$$

$$= \left(\frac{\delta}{\delta x^1}\cdot h^1 + \ldots + \frac{\delta}{\delta x^n}\cdot h^n\right)\cdot f(x)$$

$$\phi''(0) = \left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\delta f(x+t\cdot h)}{\delta x^i}\cdot h^i\right)'_t\Bigg|_{t=0} =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\delta^2 f(x+t\cdot h)}{\delta x^i\delta x^j}\cdot h^i h^j\right)\Bigg|_{t=0} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\delta^2 f(x)}{\delta x^i \delta x^j}\cdot h^i h^j =$$

$$= \left(\frac{\delta}{\delta x^1}\cdot h^1 + \ldots + \frac{\delta}{\delta x^n}\cdot h^n\right)^2\cdot f(x)$$

И так далее. Подставим получившиеся выражения в 5.2 и получим искомое. □

Пример. Запишем формулу Тейлора для функции $f(x, y)$:

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{1}{1!}\left(\frac{\delta f}{\delta x}(x_0,y_0)\Delta x + \frac{\delta f}{\delta y}(x_0,y_0)\Delta y\right) +$$
$$+\frac{1}{2!}\left(\frac{\delta^2 f}{\delta x^2}(x_0,y_0)\cdot(\Delta x)^2 + \right.$$
$$\left. +2\cdot\frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y}(x_0,y_0)\Delta x \Delta y + \frac{\delta^2 f}{\delta y^2}(x_0,y_0)\cdot(\Delta y)^2\right) +$$
$$+\frac{1}{3!}\cdot\left(\frac{\delta^3 f}{\delta x^3}(x_0,y_0)\cdot(\Delta x)^3 + 3\cdot\frac{\delta^3 f}{\delta x^2 \delta y}(x_0,y_0)\cdot(\Delta x)^2\Delta y + \right.$$
$$\left. +3\cdot\frac{\delta^3 f}{\delta x \delta y^2}(x_0,y_0)\cdot\Delta x(\Delta y)^2 + \frac{\delta^3 f}{\delta y^3}(x_0,y_0)\cdot(\Delta y)^3\right) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{k!}\cdot\left(\frac{\delta}{\delta x}\Delta x + \frac{\delta}{\delta y}\Delta y\right)^k \cdot f(x_0 + \xi\cdot\Delta x, y_0 + \eta\cdot\Delta y),$$
$$\Delta x = x - x_0, \quad \Delta y = y - y_0.$$

5.5 Экстремумы функций многих переменных

Определение 6 (Точка локального максимума (минимума)). Пусть X – метрическое пространство (МП), $f : X \to \mathbb{R}$. Точка x_0 называется *точкой локального максимума (минимума)*, если $\exists U(x_0) \subset X : \ \forall x \in U(x_0)$

$$f(x) \leqslant f(x_0) \quad \big(f(x) \geqslant f(x_0)\big)$$

Теорема 5 (Необходимое условие локального экстремума). Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$ – точка локального экстремума, тогда в точке x_0 $\forall i = \overline{1,n}$

$$\frac{\delta(x_0)}{\delta x^i} = 0.$$

Доказательство. Фиксируем все переменные за исключением x^i, тогда можно рассматривать функцию $f(x^1, \ldots, x^i, \ldots, x^n)$ как функцию одной переменной, для которой x_0 – точка локального экстремума, следовательно $\frac{\delta f}{\delta x^i}(x_0) = 0$,

$$i \text{ – произвольная } \Rightarrow \forall i \text{ выполняется.}$$

□

Определение 7 (Критическая точка функции). Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}^k$ – дифференцируемо в точке $x_0 \in D$. Точка x_0 называется *критической точкой функции* $f(x)$, если:

$$rank\mathfrak{I}f(x_0) < \min(n, k),$$

где $\mathfrak{I}f(x_0)$ – матрица Якоби функции $f(x_0)$.

Пример. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x \cdot y \\ y - z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$
$$\mathfrak{I}f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\delta u}{\delta x} & \frac{\delta u}{\delta y} & \frac{\delta u}{\delta z} \\ \frac{\delta v}{\delta x} & \frac{\delta v}{\delta y} & \frac{\delta v}{\delta z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & x & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x_0) = \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases} \text{ – критическая точка.}$$

$$n = 3, \quad k = 2$$

Множество точек прямой, получаемой пересечением плоскостей $x = 0$ и $y = 0$ – множество критических точек функции $f(x, y, z)$.

Определение 8 (Квадратичная форма на касательном пространстве). Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}$, f имеет производную в точке $x_0 \in D$. На касательном пространстве $T\mathbb{R}^n_{(x_0)}$ определим квадратичную форму

$$Q(h) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\delta^2 f}{\delta x^i \delta x^j}(x_0) \cdot h^i h^j, \quad Q : T\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}.$$

Теорема 6 (Достаточное условие локального экстремума). Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке $x \in D$, x – критическая точка для f, $f \in C^n(D, \mathbb{R})$, $n = 2$. Тогда, если:

1. $Q(h)$ – знакоположительна, то в точке x – локальный минимум.
2. $Q(h)$ – знакоотрицательна, то в точке x – локальный максимум.
3. $Q(h)$ может принимать различные значения $(> 0, < 0)$, тогда в точке x нет экстремума.

Доказательство. По формуле Тейлора:

$$f(x+h) - f(x) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\delta^2 f(x)}{\delta x^i \delta x^j} \cdot h^i h^j + o(\|h\|^2) =$$

$$= \frac{\|h\|^2}{2} \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\delta^2 f(x)}{\delta x^i \delta x^j} \cdot \frac{h^i}{\|h\|} \frac{h^j}{\|h\|} + \alpha(h) \right) = \left| \begin{array}{c} \text{где } \alpha(h) \to 0 \text{ при} \\ h \to 0 \end{array} \right| =$$

$$= \frac{\|h\|^2}{2} \cdot \left(Q\left(\frac{h}{\|h\|} \right) + \alpha(h) \right).$$

Вектор $\frac{h}{\|h\|} < S^{(n-1)}$ – единичная $(n-1)$-мерная сфера. Сфера $S^{(n-1)}$ – компактное множество $\Rightarrow$ по теореме Больцано - Вейерштраса, $\exists e_1, e_2 \in S^{(n-1)}$:

$$Q_1(e_1) = \max Q(h) = M, \quad Q_2(e_2) = \min Q(h) = m$$

1. Если $Q(h)$ – знакоположительна $\Rightarrow m > 0$. Следовательно, $\exists \delta > 0 : \forall h \ \|h\| < \delta, \ |\alpha(h)| < m$

$$Q\left(\frac{h}{\|h\|} \right) + \alpha(h) > 0,$$

   следовательно, $\forall h : \ \|h\| < \delta$

$$f(x+h) - f(x) > 0,$$

   по определению, x – точка локального минимума (здесь $\|h\| < \delta$ – аналог понятия окрестности точки x).

2. Если $Q(h)$ – знакоотрицательна, то $M < 0$. Тогда $\exists \delta > 0 : \forall h \ \|h\| < \delta \ |\alpha(h)| < -M$

$$Q\left(\frac{h}{\|h\|} \right) + \alpha(h) < 0,$$

   следовательно, $\forall h : \ \|h\| < \delta$

$$f(x+h) - f(x) < 0,$$

   тогда x – точка локального максимума.

3. Если $Q(h)$ – знакопеременна, то $m < 0 < M, \ \forall t > 0$

$$Q(t \cdot e_2) < 0, \quad Q(t \cdot e_1) > 0,$$

   тогда в точке x нет экстремума.

□

Замечание. На практике для определения max и min можно пользоваться критерием Сильвестра из алгебры.

Определение 9 (Наеявно заданная уравнением функция). Пусть D – область в $\mathbb{R}^k$, Ω – область в $\mathbb{R}^k$, $F : D \times \Omega \to \mathbb{R}^k$.

Пусть функция $f : D \to \Omega$:

$$y = f(x) \Leftrightarrow F(x, y) = 0.$$

Говорят, что уравнение $F(x, y) = 0$ *неявно задает* функцию $y = f(x)$.

Пример. $x^2 + y^2 = 1$

$$y = \pm\sqrt{1 - x^2}, \quad y = \begin{cases} \sqrt{1 - x^2}, & x \in Q \\ -\sqrt{1 - x^2}, & x \notin Q \end{cases}$$

Лекция 3: Теорема о неявной функции

от 12 сен 10:30

5.6 Теорема о неявной функции

Теорема 7 (О неявной функции). Пусть $F(x, y)$ отображает окрестность $U(x_0; y_0) \subset \mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}$, $F : U(x_0, y_0) \to \mathbb{R}$.

Пусть F имеет следующие свойства:

1. $F(x_0, y_0) = 0$.
2. $F(x, y) \in C^P(U, \mathbb{R})$, $p \geqslant 1$.
3. $\frac{\delta F}{\delta y}(x_0, y_0) \neq 0$.

Тогда $\exists$ открезки I_x, I_y : $f : I_x \to I_y$:

1. $I_x \times I_y \subset U(x_0, y_0)$.
2. $\forall x \in I_x$ $y = f(x) \Leftrightarrow F(x, y) = 0$.
3. $f \in C^P(I_x, I_y)$.
4. $\forall x \in I_x$ $f'(x) = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}$.

Доказательство. Будем считать, что окрестность $U(x_0, y_0)$ – круг с центром в точке (x_0, y_0). Для определенности будем считать, что $F'_y(x_0, y_0) > 0$.

В силу непрерывности F'_y $\exists$ окрестность $V(x_0, y_0) \subset U(x_0, y_0)$: $\forall (x, y) \in V$ $F'_y(x, y) > 0$. Если посмотрим на функцию $F(x, y)$ при фиксированной x как на функцию по переменной y, то $F(\overline{x}, y)$ будет монотонной (в силу того, что $F'_y(\overline{x}, y) > 0$). Тогда для $\beta = \frac{1}{2}\tau$, где τ – радиус круга $U(x_0, y_0)$.

$$F(x_0, y_0 - \beta) < F(x_0, y_0) < F(x_0, y_0 + \beta).$$

Так как $F(x,y)$ непрерывна, то $\exists\delta>0: \ \forall x\in[x_0-\delta,x_0+\delta]$

$$F(x,y_0-\beta)<0, \quad F(x,y_0+\beta)>0.$$

При фиусированном x функция $f(\overline{x},y)$ непрерывно монотонна, на концах отрезка $[y_0-\beta;y_0+\beta]$ имеет разные знаки, тогда $\exists! y_x\in[y_0-\beta;y_0+\beta]: \ F(\overline{x},y_x)=0$. В силу непрерывности $F(x,y)$ по x, $\exists\delta>0:$ $\forall x\in[x_0-\delta;x_0+\delta]$ $F(x,y_x=0)$.

Определим функцию $f:[x_0-\delta;x_0+\delta]\to[y_0-\beta;y_0+\beta]$ положив, что $y=f(x)\Leftrightarrow F(x,y)=0$, то есть $y_x=f(x)$.

Положим $f\in C^{(P)}(I_x,I_y)$.

1. Покажем, что f – непрерывна.

   Для начала покажем, что f непрерывна в точке x_0.

   Пусть $\varepsilon>0$ задано. Покажем, что $\exists\delta>0: \ \forall x\in(x_0-\delta;x_0+\delta)\Rightarrow f(x)\in(y_0-\varepsilon;y_0+\varepsilon)$.

   Будем считать, что $\varepsilon<\beta\Rightarrow[y_0-\varepsilon;y_0+\varepsilon]\subset[y_0-\beta;y_0+\beta]\Rightarrow$ найдется отрезок $[x_0-\delta;x_0+\delta]$ и функция

$$\hat{f}(x):[x_0-\delta;x_0+\delta]\to[y_0-\varepsilon;y_0+\varepsilon],$$

$$\hat{f}(x)=y\Leftrightarrow F(x,y)=0.$$

   Но на $[x_0-\delta;x_0+\delta]$ $\hat{f}(x)\equiv f(x)\Rightarrow f\big([x_0-\delta;x_0+\delta]\big)\subset[y_0-\varepsilon;y_0+\varepsilon]\Rightarrow f(x)$ непрерывна в точке x_0.

   Теперь, пусть $x\in I_x=[x_0-\delta;x_0+\delta]$.

   Для точки (x,y_x) выполнены все условия теоремы $\Rightarrow\exists$ отрезок $[x-\alpha;x+\alpha]=\widehat{I}_x$ и $[y_x-\gamma;y_x+\gamma]=\widehat{I}_y$ и функция $g:\widehat{I}_x\to\widehat{I}_y:$ $g(\overline{x})=y\Leftrightarrow F(\overline{x},y)=0 \ \forall\overline{x}\in\widehat{I}_x$.

   Но на отрезке $[x-\alpha;x+\alpha]$ функция $g(x)\equiv f(x)$.

   По построению $g(x)$ непрерывна в точке x, следовательно и $f(x)$ непрерывна в точке x.

2. Покажем, что $f(x)$ дифференцируема на I_x.

   Пусть $x\in I_x, \ x+\Delta x\in I_x, \ y=f(x), \ y+\Delta y=f(x+\Delta x)$. Тогда

$$0=\underset{\substack{\| \\ 0}}{F(x+\Delta x,y+\Delta y)}-\underset{\substack{\| \\ 0}}{F(x,y)}=$$

$$=\left|\begin{matrix}\text{Теорема}\\ \text{о среднем}\end{matrix}\right|=F'_x(x+\theta\cdot\Delta x,y+\theta\cdot\Delta y)\Delta x+ \\ +F'_y(x+\theta\cdot\Delta x,y+\theta\cdot\Delta y)\Delta y, \ 0<\theta<1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{-F'_x(x+\theta\cdot\Delta x,y+\theta\cdot\Delta y)}{F'_y(x+\theta\cdot\Delta x,y+\theta\cdot\Delta y)}$$

Поскольку f – непрерывная функция, то при $\Delta x \to 0 : \ \Delta y \to 0 \ \big(f(x+\Delta x) - f(x) = \Delta y \to 0\big)$. Тогда:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)} \tag{5.3}$$

Из теоремы о непрерывности композиции непрерывной функции $\Rightarrow f'(x)$ – непрерывна в точке $x \Rightarrow f \in C^{(1)}(I_x, I_y)$.

Если $F \in C^{(p)}(U, \mathbb{R}), \ p > 1$, то:

$$f''(x) = \left(-\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}\right)' = \frac{(-F'_x)' \cdot F'_y + F'_x \cdot (F'_y)'}{(F'_y)^2} =$$
$$= \frac{-\big(F''_{xx} + F''_{xy} \cdot \underset{\substack{\| \\ y'(x)}}{f'(x)}\big) \cdot F'_y + F'_x \cdot \big(F''_{yx} + F''_{yy} \cdot f'(x)\big)}{(F'_y)^2}, \tag{5.4}$$

где $F''_{xx}, F''_{xy}, F''_{yy}$ вычисляются в точке $\big(x, f(x)\big) \Rightarrow f(x) \in C^{(2)}(I_x, I_y)$, если $F(x,y) \in C^{(2)}(U, \mathbb{R})$.

Заметим, что в левой части выражения 5.4 производная функции f имеет порядок на 1 больше, чем производная функции f в правой части. Тогда по индукции можно показать, что $f \in C^{(p)}(I_x, I_y)$, если $F(x,y) \in C^{(p)}(U, \mathbb{R})$.

$\square$

Теорема 8 (О неявной функции вида $F(x^1, \ldots, x^m, y) = 0$). Если $F : U \to \mathbb{R}$, где $U \subset \mathbb{R}^{m+1}$ – окрестность точки $(x_0, y_0) = (x_0^1, \ldots, x_0^m, y_0) \in \mathbb{R}^{m+1}$:

1. $F(x_0, y_0) = F(x_0^1, \ldots, x_0^m, y_0) = 0$.
2. $F \in C^{(p)}(U, \mathbb{R})$.
3. $F'_y(x_0, y_0) = F'_y(x_0^1, \ldots, x_0^m, y_0) \neq 0$, тогда $\exists (m+1)$-мерный промежуток $I = I_x^m \times I_y^1$, где:

$$I_x^m = \big\{x = (x^1, \ldots, x^m) \in \mathbb{R}^m \ \big| \ |x^i - x_0^i| < \alpha^i, \ i = \overline{1,m}\big\},$$
$$I_y^1 = \big\{y \in \mathbb{R} \ \big| \ |y - y_0| < \beta\big\},$$

$I \subset U$ и $\exists$ функция $f : I_x^m \to I_y^1$:

(a) $f \in C^{(p)}(I_x^m, I_y^1)$.

(b) $\forall (x,y) \in I = I_x^m \times I_y^1 \quad y = f(x^1, \ldots, x^m) \Leftrightarrow F(x^1, \ldots, x^m, y) = 0$.

(c) $f'(x) = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}$, то есть $\frac{\delta f}{\delta x^i} = -\frac{F'_{x^i}(x,y)}{F'_y(x,y)}$.

Доказательство. Повторить доказательство теоремы 7, понимая под x набор $(x^1, \dots, x^m)$, под δ – набор $(\alpha^1, \dots, \alpha^m)$.

Если в функциях $f(x^1, \dots, x^m)$ и $F(x^1, \dots, x^m, y)$ фиксировать все переменные, кроме x^i и y, то мы окажемся в условиях теоремы 7, при этом роль x играет переменная $x^i \Rightarrow$ верен пункт 3.

И рассуждая аналогично доказательству теоремы 7, получаем, что

$$f \in C^{(p)}(I_x^m, I_y^1), \text{ если } F \in C^{(p)}(U, \mathbb{R}).$$

$\square$

Далее, рассмотрим общий случай.

Рассмотрим систему уравнений:

$$\begin{cases} F^1(x^1, \dots, x^m, y^1, \dots, y^n) = 0 \\ F^2(x^1, \dots, x^m, y^1, \dots, y^n) = 0 \\ \vdots \\ F^n(x^1, \dots, x^m, y^1, \dots, y^n) = 0 \end{cases}, \tag{5.5}$$

которую будем решать относительно $y^1, \dots, y^n$, то есть искать *локально* эквивалентную систему функциональных связей,

$$\begin{cases} y^1 = f^1(x^1, \dots, x^m) \\ y^2 = f^1(x^1, \dots, x^m) \\ \vdots \\ y^n = f^1(x^1, \dots, x^m) \end{cases}. \tag{5.6}$$

Для кратности и удобства будем считать, что $x = (x^1, \dots, x^m)$, $y = (y^1, \dots, y^n)$, тогда систему 5.5 будем записывать как $F(x, y) = 0$, а систему 5.6 – как $y = f(x)$. Если

$$\begin{aligned} x_0 &= (x_0^1, \dots, x_0^m), \quad & y_0 &= (y_0^1, \dots, y_0^n), \\ \alpha &= (\alpha^1, \dots, \alpha^m), \quad & \beta &= (\beta^1, \dots, \beta^n), \end{aligned}$$

то запись $|x - x_0| < \alpha$ или $|y - y_0| < \beta$ будет означать, что

$$\begin{matrix} |x^i - x_0^i| < \alpha^i, \ i = \overline{1, m} \\ |y^i - y_0^i| < \beta^i, \ i = \overline{1, n} \end{matrix}.$$

Далее положим, что

$$f'(x) = \begin{pmatrix} \frac{\delta f^1}{\delta x^1} & \dots & \frac{\delta f^1}{\delta x^m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\delta f^n}{\delta x^1} & \dots & \frac{\delta f^n}{\delta x^m} \end{pmatrix}(x)$$

$$F'_x(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\delta F^1}{\delta x^1} & \dots & \frac{\delta F^1}{\delta x^m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\delta F^n}{\delta x^1} & \dots & \frac{\delta F^n}{\delta x^m} \end{pmatrix}(x, y)$$

$$F'_y(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\delta F^1}{\delta y^1} & \dots & \frac{\delta F^1}{\delta y^m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\delta F^n}{\delta y^1} & \dots & \frac{\delta F^n}{\delta y^m} \end{pmatrix}(x, y)$$

Заметим, что матрица $F'_y(x,y)$ – квадратная, следовательно она обратима тогда и только тогда, когда $\left|F'_y(x,y)\right| \neq 0$ (определитель $\neq 0$).

Обозначим матрицу, обратную к $F'_y(x,y)$ как $\left[F'_y(x,y)\right]^{-1}$.

Теорема 9 (О неявной функции, общий случай). Пусть $F : U(x_0, y_0) \to \mathbb{R}^n$, где $U(x_0, y_0) \subset \mathbb{R}^{m+n}$ – окрестность точки (x_0, y_0) такая, что

1. $F \in C^{(p)}(U, \mathbb{R}^n),\ p \geqslant 1$.
2. $F(x_0, y_0) = 0$.
3. $F'_y(x_0, y_0)$ – обратная матрица.

Тогда $\exists (n+m)$-мерный промежуток $I = I_x^m \times I_y^n \subset U(x_0; y_0)$, где

$$I_x^m = \left\{x \in \mathbb{R}^m \;\middle|\; |x - x_0| < \alpha\right\},$$
$$I_x^n = \left\{y \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; |y - y_0| < \beta\right\},$$

то есть $f : I_x^m \to I_y^n$:

- $\forall (x,y) \in I_x^m \times I_y^n\ F(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x)$.
- $f'(x) = -\left[F'_y(x,y)\right]^{-1} \cdot F'_x(x,y)$.

Доказательство. Например, можно посмотреть в Зориче. □

5.7 Приложение теоремы о неявной функции

Определение 10 (Диффиоморвизм класса $C^{(p)}$, гомеоморфизм). Пусть D, G – области в $\mathbb{R}^n$. Отображение $f : D \to G$ называтеся *диффиоморфизмом класса* $C^{(p)}$, $p \geqslant 0$, если:

1. f – обратимое.
2. $f \in C^{(p)}(D, G)$.
3. $f^{-1} \in C^{(p)}(D, G)$.

При $p = 0$ f называется *гомеоморфизмом*, то есть f – гомеоморфизм, если f – взаимно однозначное отображение и f, f^{-1} – непрерывны.

Пример. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = e^x$ – нет.
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+,\ f(x) = e^x$ – да, диффиоморфизм класса C^∞.

Пример. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$ – нет.
$f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ – да, диффиоморфизм класса C^∞.

Пример. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3$ – гомеоморфизм класса C^0, но не диффиоморфизм, так как $f^{-1} = \sqrt[3]{y}$ теряет непрерывность.

Теорема 10 (Об обратной функции)**.** Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}^n$, $x_0 \in D$. Кроме того,

- $f \in C^{(p)}(D, \mathbb{R}^n),\ p \geqslant 1$.
- $f(x_0) = y_0$.
- $\underset{\text{(матрица Якоби в } x_0)}{f'(x_0)}$ – обратимая.

Тогда $\exists$ окрестности U, V точек x_0 и y_0 соответственно:

- $f : U \to V$ – диффиоморфизм U на V класса $C^{(p)}(U, V)$.
- $\forall y \in V\ [f^{-1}]'(y) = [f'(x)]^{-1},\ y = f(x)$.

Доказательство. Рассмотрим $F(x, y) = y - f(x)$.

1. $F(x, y) \in C^{(p)}(D \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.
2. $F'_x(x_0, y_0) = -f'(x)$ – обратима.
3. $F(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x)$.

Следовательно, по теореме 7 $\exists n$-мерные промежутки I^n_x и I^n_y и $\exists$ отображение $g(y)$:

1. $g : I^n_y \to I^n_x$.
2. $g(y) = x \Leftrightarrow F(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x)$.
3. $g(y) \in C^{(p)}(I^n_y, I^n_x)$.
4. $\forall y \in I^n_y\ g'(y) = -\Big[F'_x\big(g(y), y\big)\Big] \cdot F'_y\big(g(y), y\big)$, где $g'(y)$, $\Big[F'_x\big(g(y), y\big)\Big]$, $F'_y\big(g(y), y\big)$ – матрицы.

$$f(x) = \begin{pmatrix} f^1(x^1, \dots, x^n) \\ f^2(x^1, \dots, x^n) \\ \vdots \\ f^n(x^1, \dots, x^n) \end{pmatrix}$$

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} y^1 - f^1(x^1, \dots, x^n) \\ y^2 - f^2(x^1, \dots, x^n) \\ \vdots \\ y^n - f^n(x^1, \dots, x^n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F^1(x, y) \\ F^2(x, y) \\ \vdots \\ F^n(x, y) \end{pmatrix}$$

$$F'_x(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\delta F^1}{\delta x^1} & \dots & \frac{\delta F^1}{\delta x^n} \\ \frac{\delta F^2}{\delta x^1} & \dots & \frac{\delta F^2}{\delta x^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\delta F^n}{\delta x^1} & \dots & \frac{\delta F^n}{\delta x^n} \end{pmatrix}(x, y) = \begin{pmatrix} -\frac{\delta f^1}{\delta x^1} & \dots & -\frac{\delta f^1}{\delta x^n} \\ -\frac{\delta f^2}{\delta x^1} & \dots & -\frac{\delta f^2}{\delta x^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{\delta f^n}{\delta x^1} & \dots & -\frac{\delta f^n}{\delta x^n} \end{pmatrix}(x)$$

$$F'_y(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\delta F^1}{\delta y^1} & \dots & \frac{\delta F^1}{\delta y^n} \\ \frac{\delta F^2}{\delta y^1} & \dots & \frac{\delta F^2}{\delta y^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\delta F^n}{\delta y^1} & \dots & \frac{\delta F^n}{\delta y^n} \end{pmatrix}(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Положим $V = I^n_y,\ U = g(V)$.
Тогда из 1. и 2. $\Rightarrow f\big|_U$ и $g\big|_V$ – взаимно обратны.
Из 4. $\Rightarrow \forall y \in V$

$$g'(y) = -\Big[F'_x\big(g(y), y\big)\Big]^{-1} = \big[f'(x)\big]^{-1},$$
$$g'(y) = \big[f^{-1}(y)\big]^{-1} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \big[f'(x)\big]^{-1} = \big[f^{-1}(x)\big]'.$$

Исходя из свойств отображения f и приведенных выше построений, f – диффиоморфизм. □

Лекция 3: Продолжение

от 17 сен 8:44

Определение 11 (k-мерная поверхность)**.** Множество $S \subset \mathbb{R}^n$ называется *k-мерной поверхностью*, если $\forall x \in S\ \exists U(x) \subset \mathbb{R}^n$ и $\exists$ диффиоморфизм $\phi : U(x) \to I^n$:

$$\phi\big(U(x) \cap S\big) = I^k,$$

где $I^n = \big\{x \in \mathbb{R}^n \ \big|\ |x^i| < 1\big\}$,

$$I^k = \big\{x \in \mathbb{R}^n \ \big|\ x^{k+1} = x^{k+2} = \ldots = x^n = 0\big\}.$$

Пример. $S = \mathbb{R}^n$ – поверхность в $\mathbb{R}^n$,

$$t^i(x^i) = \frac{2}{\pi} \cdot \arctan x^i,$$

$$\mathfrak{J} = \begin{pmatrix} \frac{\delta t^1}{\delta x^1} & \frac{\delta t^1}{\delta x^2} & \cdots & \frac{\delta t^1}{\delta x^n} \\ \frac{\delta t^2}{\delta x^1} & \frac{\delta t^2}{\delta x^2} & \cdots & \frac{\delta t^2}{\delta x^n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\delta t^n}{\delta x^1} & \frac{\delta t^n}{\delta x^2} & \cdots & \frac{\delta t^n}{\delta x^n} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{1+(x^1)^2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{1+(x^2)^2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{1+(x^n)^2} \end{pmatrix}$$

Утверждение. Пусть задана система уравнений:

$$\begin{cases} F^1(x^1, \ldots, x^n) = 0 \\ \vdots \\ F^{n-k}(x^1, \ldots, x^n) = 0 \end{cases}, \quad F^i(x) \in C^{(1)} \tag{5.7}$$

Кроме того,

$$\begin{vmatrix} \frac{\delta F^1}{\delta x^1} & \cdots & \frac{\delta F^1}{\delta x^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\delta F^{n-k}}{\delta x^1} & \cdots & \frac{\delta F^{n-k}}{\delta x^n} \end{vmatrix}(x) \neq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Тогда решение этой системы является k-мерной поверхностью в $\mathbb{R}^n$.

Доказательство. По теореме о неявной функции, система 5.7 эквивалентна системе

$$\begin{cases} x^{k+1} = f^1(x^1, \ldots, x^k) \\ x^{k+2} = f^2(x^1, \ldots, x^k) \\ \vdots \\ x^n = f^{n-k}(x^1, \ldots, x^k) \end{cases}$$

Положим:

$$\begin{aligned} t^1 &= x^1 \\ t^2 &= x^2 \\ &\vdots \\ t^k &= x^k \\ t^{k+1} &= x^{k+1} - f^1(x^1, \dots, x^k) = 0 \\ t^{k+2} &= x^{k+2} - f^2(x^1, \dots, x^k) = 0 \\ &\vdots \\ t^n &= x^n - f^{n-k}(x^1, \dots, x^k) = 0 \end{aligned}$$

Таким образом построенное отображение является диффиоморфизмом $\Rightarrow$ решение системы 5.7 – k-мерная поверхность в $\mathbb{R}^n$. $\square$

Определение 12 (Локальная карта или параметризация поверхности)**.** Пусть S – k-мерная поверхность в $\mathbb{R}^n$, $x_0 \in S$ и $\phi : U(x_0) \to I^n$ – диффиоморфизм:

$$\phi\big(U(x_0) \cap S\big) = I^k.$$

Ограничение ϕ^{-1} на I^k будем называть *локальной картой* или *параметризацией поверхности* S в окрестности точки x_0.

Определение 13 (Касательное пространство)**.** Пусть S – k-мерная поверхность в $\mathbb{R}^n$, $x_0 \in S$, $x = x(t) : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ – параметризация S в окрестности точки x_0, при этом $x_0 = x(0)$.

Касательным пространством (или плоскостью) к S в точке x_0 называется k-мерная плоскость, заданная уравнением:

$$x = x_0 + x'(0) \cdot t, \tag{5.8}$$

$$x_0 = (x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^n)$$

$$x(t) = \begin{cases} x^1(t^1, \dots, t^k) \\ x^2(t^1, \dots, t^k) \\ \vdots \\ x^n(t^1, \dots, t^k) \end{cases}$$

$$x'(t) = \begin{pmatrix} \frac{\delta x^1}{\delta t^1} & \dots & \frac{\delta x^1}{\delta t^k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\delta x^n}{\delta t^1} & \dots & \frac{\delta x^n}{\delta t^k} \end{pmatrix}(t), \quad t = \begin{pmatrix} t^1 \\ t^2 \\ \vdots \\ t^k \end{pmatrix}$$

Таким образом касательное пространство задается системой из 5.8:

$$\begin{cases} x^1 = x_0^1 + \frac{\delta x^1}{\delta t^1}(0) \cdot t^1 + \ldots + \frac{\delta x^1}{\delta t^k}(0) \cdot t^k \\ x^2 = x_0^2 + \frac{\delta x^2}{\delta t^1}(0) \cdot t^1 + \ldots + \frac{\delta x^2}{\delta t^k}(0) \cdot t^k \\ \vdots \\ x^n = x_0^n + \frac{\delta x^n}{\delta t^1}(0) \cdot t^1 + \ldots + \frac{\delta x^n}{\delta t^k}(0) \cdot t^k \end{cases}.$$

Пример. Пусть $\gamma = \gamma(t)$ – гладкая кривая в $\mathbb{R}^3$, $\gamma : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}.$

Обозначим $x_0 = x(0),\ y_0 = y(0),\ z_0 = z(0)$.
5.8 – касательное пространство к кривой γ в точке x_0.

$$\begin{cases} x = x_0 + x'(0) \cdot t \\ y = y_0 + y'(0) \cdot t \\ z = z_0 + z'(0) \cdot t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - x_0 = x'(0) \cdot t \\ y - y_0 = y'(0) \cdot t \\ z - z_0 = z'(0) \cdot t \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x - x_0}{x'(0)} = \frac{y - y_0}{y'(0)} = \frac{z - z_0}{z'(0)} = t.$$

Пример. $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

Пусть $z_0 > 0$, тогда в окрестности точки (x_0, y_0, z_0) сферу можно параметризировать следующими уравнениями:

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = \sqrt{1 - u^2 - v^2} \end{cases}.$$

Касательное пространство к сфере в точке (x_0, y_0, z_0):

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\delta x}{\delta u} & \frac{\delta x}{\delta v} \\ \frac{\delta y}{\delta u} & \frac{\delta y}{\delta v} \\ \frac{\delta z}{\delta u} & \frac{\delta z}{\delta v} \end{pmatrix} (u_0, v_0) \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + \frac{\delta x}{\delta u}(u_0, v_0) \cdot u + \frac{\delta x}{\delta v}(u_0, v_0) \cdot v \\ y = y_0 + \frac{\delta y}{\delta u}(u_0, v_0) \cdot u + \frac{\delta y}{\delta v}(u_0, v_0) \cdot v \\ z = z_0 + \frac{\delta z}{\delta u}(u_0, v_0) \cdot u + \frac{\delta z}{\delta v}(u_0, v_0) \cdot v \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + u \\ y = y_0 + v \\ z = z_0 - \frac{u_0}{\sqrt{1 - u_0^2 - v_0^2}} \cdot u - \frac{v_0}{\sqrt{1 - u_0^2 - v_0^2}} \cdot v \end{cases}.$$

Утверждение. Пусть S – k-мерная поверхность в $\mathbb{R}^n$ задается системой уравнений:

$$\begin{cases} F^1(x^1, \ldots, x^n) = 0 \\ \vdots \\ F^{n-k}(x^1, \ldots, x^n) = 0, \end{cases} \text{, причем } \begin{vmatrix} \frac{\delta F^1}{\delta x^{k+1}} & \ldots & \frac{\delta F^1}{\delta x^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\delta F^{n-1}}{\delta x^{k+1}} & \ldots & \frac{\delta F^{n-1}}{\delta x^n} \end{vmatrix} (x_0) \neq 0 \tag{5.9}$$

Тогда касательная плоскость к S в точке x_0 задается системой уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\delta F^1}{\delta x^1}(x_0) \cdot (x^1 - x_0^1) + \ldots + \frac{\delta F^1}{\delta x^n}(x_0)(x^n - x_0^n) = 0 \\ \vdots \\ \frac{\delta F^{n-k}}{\delta x^1}(x_0) \cdot (x^1 - x_0^1) + \ldots + \frac{\delta F^{n-k}}{\delta x^n}(x_0)(x^n - x_0^n) = 0 \end{cases},$$

или кратко:

$$F'(x_0) \cdot (x - x_0) = 0.$$

Доказательство. Обозначим $(x^1, \ldots, x^k) = u,\ (x^{k+1}, \ldots, x^n) = v,$

$$F = \begin{pmatrix} F^1 \\ \vdots \\ F^{n-k} \end{pmatrix}.$$

Тогда условия утверждения запишем в виде:

$$F(u, v) = 0, \quad \left|F'_v(u_0, v_0)\right| \neq 0.$$

Тогда по теореме о неявной функции система 5.9 эквивалентна системе

$$\begin{cases} u = u \\ v = f(u) \end{cases}.$$

Тогда касательная плоскость задается:

$$\text{роль } t = \begin{pmatrix} t^1 \\ \vdots \\ t^k \end{pmatrix} \text{ играет } u = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^k \end{pmatrix}.$$

Тогда систему можно записать в виде:

$$\begin{cases} x^1 = t^1 \\ \vdots \\ x^k = t^k \\ x^{k+1} = f^1(t^1, \ldots, t^k) \\ \vdots \\ x^n = f^{n-k}(t^1, \ldots, t^k) \end{cases},$$

$$t_0 = (t_0^k, \ldots, t_0^k) = (x_0^1, \ldots, x_0^k).$$

$$x'(t_0) = \begin{pmatrix} \frac{\delta x^1}{\delta t^1} & \dots & \frac{\delta x^1}{\delta t^k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\delta x^k}{\delta t^1} & \dots & \frac{\delta x^k}{\delta t^k} \\ \frac{\delta f^1}{\delta t^1} & \dots & \frac{\delta f^1}{\delta t^k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\delta f^{n-k}}{\delta t^1} & \dots & \frac{\delta f^{n-k}}{\delta t^k} \end{pmatrix} (t_0),$$

$$x = x_0 + x'(t_0) \cdot t.$$

$$\begin{cases} x^1 = x_0^1 + 1 \cdot t^1 \\ \vdots \\ x^k = x_0^k + 1 \cdot t^k \\ x^{k+1} = x_0^{k+1} + \frac{\delta f^1}{\delta t^1}(t_0) \cdot t^1 + \ldots + \frac{\delta f^1}{\delta t^k}(x_0) \cdot t^k \\ \vdots \\ x^n = x_0^n + \frac{\delta f^{n-k}}{\delta t^1}(t_0) \cdot t^1 + \ldots + \frac{\delta f^{n-k}}{\delta t^k}(t_0) \cdot t^k \end{cases} \tag{5.10}$$

Из 5.10 следует, что:

$$t^1 = x^1 - x_0^1,$$
$$t^2 = x^2 - x_0^2,$$
$$\vdots$$
$$t^k = x^k - x_0^k.$$

Из теоремы 7:

$$f'(u_0) = -\big[F_v'(u_0, v_0)\big]^{-1} \cdot F_u'(u_0, v_0).$$

Преобразуем 5.10:

$$\begin{cases} \left.\begin{matrix} x^1 - x_0^1 = t^1 \\ \vdots \\ x^k - x_0^k = t^k \end{matrix}\right\} u - u_0 = u - u_0 \\ x^{k+1} - x_0^{k+1} = \frac{\delta f^1}{\delta t^1}(t_0) \cdot (x^1 - x_0^1) + \ldots + \frac{\delta f^1}{\delta t^k}(t_0) \cdot (x^k - x_0^k) \\ \vdots \\ x^n - x_0^n = \frac{\delta f^{n-k}}{\delta t^1}(t_0) \cdot (x^1 - x_0^1) + \ldots + \frac{\delta f^{n-k}}{\delta t^k}(t_0) \cdot (x^k - x_0^k) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u - u_0 = u - u_0 \\ v - v_0 = f'(u_0) \cdot (u - u_0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u - u_0 = u - u_0 \\ v - v_0 = \underbrace{-\big[F_v'(u_0, v_0)\big]^{-1} \cdot F_u'(u_0, v_0) \cdot (u - u_0)}_{f'(u_0)} \quad \Big| \cdot F_v'(u_0, v_0) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \big[F_v'(u_0, v_0)\big](v - v_0) + F_u'(u_0, v_0) \cdot (u - u_0) = 0. \qquad \square$$

Итак, мы вывели, что если поверхность задана системой уравнений

$$\begin{cases} F^1(x^1,\dots,x^n)=0 \\ \vdots \\ F^{n-k}(x^1,\dots,x^n)=0 \end{cases} \quad \text{или } F(x)=0,$$

$$F=\begin{pmatrix} F^1(x) \\ \vdots \\ F^{n-k}(x) \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} x=(x^1,\dots,x^n) \\ x_0=(x_0^1,\dots,x_0^n) \end{matrix}.$$

Тогда уравнение касательной плоскости кратко записывается:

$$F'_x(x_0)\cdot(x-x_0)=0.$$

Обозначим $x-x_0=\xi$, то есть:

$$\xi=\begin{pmatrix} \xi^1 \\ \vdots \\ \xi^n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x'-x'_0 \\ \vdots \\ x^n-x_0^n \end{pmatrix}.$$

Таким образом получаем, что уравнение касательного пространства (плоскости) имеет вид:

$$F'_x(x_0)\cdot\xi=0.$$

Таким образом касательнаое пространство (плоскость) к поверхности, заданной уравнением $F(x)=0$, в точке x_0 состоит из векторов ξ, удовлетворяющих уравнению:

$$F'_x(x_0)\cdot\xi=0 \tag{5.11}$$

Лекция 5: Продолжение

от 22 сен 10:29

Теорема 11 (О структуре касательного пространства)**.** Пусть S – k-мерная поверхность в $\mathbb{R}^n$, $x_0\in S$. Тогда касательное пространство TS_{x_0} в точке x_0 состоит из направляющих векторов касательных к гладким кривым на поверхности S, проходящих через точку x_0.

Доказательство. Пусть $x=x(t)$ – гладкая кривая в $\mathbb{R}^n$, то есть

$$\begin{cases} x^1=x^1(t) \\ \vdots \\ x^n=x^n(t) \end{cases}, \quad t\in\mathbb{R}.$$

$x_0=x(t_0)$. Касательный вектор в точке x_0 к кривой имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \frac{dx^1}{dt}(t_0) \\ \vdots \\ \frac{dx^n}{dt}(t_0) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} {x^1}'(t_0) \\ \vdots \\ {x^n}'(t_0) \end{pmatrix}.$$

1. Пусть S – k-мерная поверхность, задана системой уравнений $F(x)=$

0 и пусть $x = x(t)$ – гладкая кривая на S. Покажем, что вектор $x'(t_0) = \begin{pmatrix} \frac{dx^1}{dt}(t_0) \\ \vdots \\ \frac{dx^n}{dt}(t_0) \end{pmatrix} : \ x'(t_0) \in TS_{x_0}, \ x_0 = x(t_0)$, то есть покажем, что $x'(t_0)$ удовлетворяет уравнению $F'_x(t_0) \cdot \xi = 0$.

Так как кривая $x = x(t)$ лежит на S, то $F\big(x(t)\big) = 0$ – верно. Продифференцируем $F\big(x(t)\big) = 0$ по t в точке x_0:

$$F'_x(x_0) \cdot x'(t_0) = 0,$$

это и есть уравнение касательного пространства, то есть $x'(t_0)$ удовлетворяет уравнению касательного пространства $F'_x(x_0) \cdot \xi = 0$.

2. Пусть $\xi = (\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^n) \in TS_{x_0}$, то есть ξ удовлетворяет уравнению $F'_x(x_0) \cdot \xi = 0$

   Покажем, что $\exists$ гладкая кривая l на поверхности S:

   - $x_0 \in l$
   - ξ является направляющим вектором касательной к l в точке x_0

   Поверхность S задана системой уравнений:

   $$\begin{cases} F^1(x) = 0 \\ \vdots \\ F^{n-k}(x) = 0 \end{cases} \tag{5.12}$$

   Пусть

   $$\begin{vmatrix} \frac{\delta F^1}{\delta x^{k+1}} & \cdots & \frac{\delta F^1}{\delta x^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\delta F^{n-k}}{\delta x^{k+1}} & \cdots & \frac{\delta F^{n-k}}{\delta x^n} \end{vmatrix} (x_0) \neq 0.$$

   По теореме о неявной функции, система 5.12 эквивалентна системе:

   $$\begin{cases} x^{k+1} = f^1(x^1, \dots, x^k) \\ \vdots \\ x^n = f^{n-k}(x^1, \dots, x^k) \end{cases} \tag{5.13}$$

   Обозначим $u = (x^1, \dots, x^k), \ v = (x^{k+1}, \dots, x^n)$, тогда 5.13 имеет вид:

   $$v = f(u).$$

Тогда по утверждению касательное пространство задается уравнениями:

$$\begin{cases} x^{k+1} = x_0^{k+1} + \frac{\delta f^1}{\delta x^1}(x_0) \cdot (x^1 - x_0^1) + \ldots + \frac{\delta f^1}{\delta x^k}(x_0) \cdot (x^k - x_0^k) \\ \vdots \\ x^n = x_0^n + \frac{\delta f^{n-k}}{\delta x^1}(x_0) \cdot (x^1 - x_0^1) + \ldots + \frac{\delta f^{n-k}}{\delta x^k}(x_0) \cdot (x^k - x_0^k) \end{cases} \tag{5.14}$$

Пусть

$$\eta = \begin{pmatrix} \eta' \\ \vdots \\ \eta^k \\ \eta^{k+1} \\ \vdots \\ \eta^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 - x_0^1 \\ \vdots \\ x^k - x_0^k \\ x^{k+1} - x_0^{k+1} \\ \vdots \\ x^n - x_0^n \end{pmatrix}.$$

Тогда система 5.14 примет вид:

$$\begin{cases} \eta^{k+1} = \frac{\delta f^1}{\delta x^1}(x_0) \cdot \eta^1 + \ldots + \frac{\delta f^1}{\delta x^k}(x_0) \cdot \eta^k \\ \vdots \\ \eta^n = \frac{\delta f^{n-k}}{\delta x^1}(x_0) \cdot \eta^1 + \ldots + \frac{\delta f^{n-k}}{\delta x^k}(x_0) \cdot \eta^k \end{cases} \tag{5.15}$$

Таким образом, если вектор $\xi \in TS_{x_0}$, то он полностью определяется своими первыми k координатами, а остальные можно волучить с помощью системы 5.15.

Построим кривую в $\mathbb{R}^n$, то есть зададим ее уравнением $x = x(t)$:

$$l : \begin{cases} x^1 = x_0^1 + \xi^1 t \\ \vdots \\ x^k = x_0^k + \xi^k t \\ \left.\begin{array}{l} x^{k+1} = f^1(x_0^1 + \xi^1 t, \ldots, x_0^k + \xi^k t) \\ \vdots \\ x^n = f^{n-k}(x_0^1 + \xi^1 t, \ldots, x_0^k + \xi^k t) \end{array}\right\} v = f(u) \end{cases} \tag{5.16}$$

Пусть точка x_0 соответствует параметру $t = 0$:

$$x(0) = \begin{cases} x^1 = x_0^1 \\ \vdots \\ x^k = x_0^k \\ x^{k+1} = f^1(x_0^1, \ldots, x_0^k) \\ \vdots \\ x^n = f^{n-k}(x_0^1, \ldots, x_0^k) \end{cases},$$

то есть кривая проходит через точку x_0.

Далее, функция f удовлетворяет условию $v = f(u) \Leftrightarrow F(u, v) = 0$. Тогда $F(u, f(u)) = 0 \Rightarrow l$, заданная системой 5.16, $l \subset S$.

$$(5.16)'_t : \; x'_t(0) = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \vdots \\ \xi^k \\ \frac{\delta f^1}{\delta x^1}(x_0) \cdot \xi^1 + \ldots + \frac{\delta f^1}{\delta x^k}(x_0) \cdot \xi^k \\ \vdots \\ \frac{\delta f^{n-k}}{\delta x^1}(x_0) \cdot \xi^1 + \ldots + \frac{\delta f^{n-k}}{\delta x^k}(x_0) \cdot \xi^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \vdots \\ \xi^k \\ \xi^{k+1} \\ \vdots \\ \xi^n \end{pmatrix}.$$

Таким образом построили гладкий путь, лежащий на поверхности S, проходящий через точку $x_0 \in S$, вектор $x'(t_0)$ – его касательный вектор $\in TS_{x_0}$.

□

5.8 Условный экстремум функции многих переменных

Задача. Дана функция $u = f(x^1, \ldots, x^n)$ и дана поверхность, заданная уравнениями:

$$\begin{cases} F^1(x^1, \ldots, x^n) = 0 \\ \vdots \\ F^m(x^1, \ldots, x^n) = 0 \end{cases} \tag{5.17}$$

Нужно найти точку $x_0 = (x_0^1, \ldots, x_0^n)$, в которой:

$$f(x_0^1, \ldots, x_0^n) = \max_{(\min)} f(x^1, \ldots, x^n),$$

где max (min) берется по всем точкам $(x_0^1, \ldots, x_0^n)$, удовлетворяющих уравнениям 5.17.

Задача (Геометрическая формулировка)**.** Пусть система 5.17 задает в пространстве $\mathbb{R}^n$ m-мерную поверхность S. Найти точку $x_0 \in S$: $\exists U_x(x_0) = U(x_0) \cap S : \; \forall x \in U_s(x_0)$:

$$\underset{x_0 - \max}{f(x) \leqslant f(x_0)} \text{ (или } \underset{x_0 - \min}{f(x) \geqslant f(x_0)})$$

Определение 14 (Линия уровня (c-уровень))**.** Пусть $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ – область. *Линией уровня (c-уровнем)* функции f называется множество

$$N_c = \big\{x \in D \;\big|\; f(x) = c\big\}.$$

Лемма 1. Если x_0 – точка условного локального экстремума для функции f и x_0 не является критической для функции f (то есть $df(x_0) \neq 0$), то касательное пространство $TS_{x_0} \subset TN_{x_0}$, где

$$N_{x_0} = \left\{x \in D \;\middle|\; f(x) = f(x_0)\right\},$$

– поверхность уровня, проходящая через x_0.

Доказательство. Пусть $\xi \in TS_{x_0}$. Пусть $x = x(t)$ – гладкая кривая на $S:\ x(0) = x_0,\ x'(0) = \xi$ (по теореме 11).

Так как точка x_0 – условный экстремум для функции f, то точка $t = 0$ есть локальный экстремум для функции $f\big(x(t)\big)$ (по теореме Ферма, потом нужно добавить ссылку),

$$\Big[f\big(x(t)\big)\Big]'_t(0) = 0 \Leftrightarrow f'_x(x_0) \cdot x'_t(0) = 0 \tag{5.18}$$

Касательное пространство к N_{x_0} в точке x_0 имеет уравнение:

$$f'_x(x_0) \cdot \xi = 0 \tag{5.19}$$

Заметим, что 5.18 и 5.19 – одно и то же уравнение, то есть

$$x'_t(0) = \xi \Rightarrow x'_t(0) \in TN_{x_0}.$$

□

Теорема 12 (Необходимое условие условного локального экстремума)**.** Пусть система уровней

$$\begin{cases} F^1(x^1, \ldots, x^n) = 0 \\ \vdots \\ F^{n-k}(x^1, \ldots, x^n) = 0 \end{cases} \tag{5.20}$$

задает $(n-k)$-мерную гладкую поверхность S в $D \subset \mathbb{R}^n,\ D$ – область. Функция $f : D \to \mathbb{R}$ – гладкая. Если $x_0 \in S$ является точкой условного локального экстремума для функции f, то существует такой набор чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-k} \in \mathbb{R}$:

$$gradf(x_0) = \sum_{i=1}^{n-k} \lambda_i \cdot gradF^i(x_0).$$

Доказательство. Касательное пространство TS_{x_0} задается системой уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\delta F^1}{\delta x^1}(x_0) \cdot \xi^1 + \ldots + \frac{\delta F^1}{\delta x^n}(x_0) \cdot \xi^n = 0 \\ \vdots \\ \frac{\delta F^{n-k}}{\delta x^1}(x_0) \cdot \xi^1 + \ldots + \frac{\delta F^{n-k}}{\delta x^n}(x_0) \cdot \xi^n = 0 \end{cases}, \tag{5.21}$$

но $\forall i = \overline{1, n-k}$:

$$\left\{\frac{\delta F^i}{\delta x^1} \cdot (x_0), \ldots, \frac{\delta F^i}{\delta x^n} \cdot (x_0)\right\} = gradF^i(x_0).$$

Перепишем 5.21 в виде:

$$\begin{cases} \big(gradF^1(x_0), \xi\big) = 0 \\ \vdots \\ \big(gradF^{n-k}(x_0,), \xi\big) = 0 \end{cases} \tag{5.22}$$

Касательное пространство TN_{x_0} к $N_{x_0} = \{x \in D \mid f(x) = f(x_0)\}$ задается уравнением: $f'(x_0) \cdot \xi = 0$. Заметим, что:

$$f'(x_0) = gradf(x_0) = \left\{\frac{\delta f(x_0)}{\delta x^1}, \ldots, \frac{\delta f(x_0)}{\delta x^n}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x_0) \cdot \xi = 0 \Leftrightarrow \big(gradf(x_0), \xi\big) = 0 \tag{5.23}$$

Таким образом из леммы 1 следует, что $\forall \xi$, удовлетворяющего системе уравнений 5.22, так же удовлетворяет уравнению 5.23, то есть из того, что $\forall i \in \overline{1, n-k}$

$$\xi \perp gradF^i(x_0) \Rightarrow \xi \perp gradf(x_0) \Rightarrow$$

$\Rightarrow \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-k} \in \mathbb{R}$:

$$gradf(x_0) = \sum_{i=1}^{n-k} \lambda_i \cdot gradF^i(x_0).$$

$\square$

Метод Лагранжа

Задача. Пусть требуется найти условный экстремум функции $f : D \to \mathbb{R}$, D – область в $\mathbb{R}^n$, на поверхности S, заданной системой уравнений:

$$\begin{cases} F^1(x^1, \ldots, x^n) = 0 \\ \vdots \\ F^k(x^1, \ldots, x^n) = 0 \end{cases}.$$

Составим функцию Лагранжа:

$$L(x, \lambda) = L(x^1, \ldots, x^n, \lambda^1, \ldots, \lambda^k) =$$
$$= f(x^1, \ldots, x^n) + \sum_{i=1}^{k} \lambda^i \cdot F^i(x^1, \ldots, x^n),$$

$\lambda = (\lambda^1, \ldots, \lambda^k),\ \ \lambda^i \in \mathbb{R}$ – коэффициент, в общем случае пока неизвестен.

Необходимое условие локального экстремума для функции L :

$$\begin{cases} \left.\begin{aligned} &\frac{\delta L}{\delta x^1} = \frac{\delta f}{\delta x^1} + \sum_{i=1}^k \lambda^i \cdot \frac{\delta F^i}{\delta x^1} = 0 \\ &\vdots \\ &\frac{\delta L}{\delta x^n} = \frac{\delta f}{\delta x^n} + \sum_{i=1}^k \lambda^i \cdot \frac{\delta F^i}{\delta x^n} = 0 \end{aligned}\right\} \text{необходимое условие условного экстремума функции } f \\ \left.\begin{aligned} &\frac{\delta L}{\delta \lambda^1} = F^1(x^1, \ldots, x^n) = 0 \\ &\vdots \\ &\frac{\delta L}{\delta \lambda^k} = F^k(x^1, \ldots, x^n) = 0 \end{aligned}\right\} \text{поверхность } S \end{cases} \tag{5.24}$$

Определение 15 (Условный экстремум). Пусть $f : D \to \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}^n$ – область, S – поверхность в D, *условным экстремумом* функции f называется экстремум функции $f\big|_S$.

Лекция 6: Продолжение

от 28 сен 8:48

Достаточное условие условного локального экстремума

Примечание. Пусть $f : D \to \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}^n$ – область, $f \in C^{(2)}(D, \mathbb{R}),\ S$ – $(n-k)$-мерная поверхность в D, заданная системой уравнений:

$$\begin{cases} F^1(x^1, \ldots, x^n) = 0 \\ \vdots \\ F^k(x^1, \ldots, x^n) = 0 \end{cases}.$$

Функция Лагранжа:

$$L(x, \lambda) = f(x^1, \ldots, x^n) + \sum_{i=0}^{k} \lambda_i \cdot F^i(x^1, \ldots, x^n).$$

Здесь $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ выбираются таким образом, чтобы было выполнено необходимое условие условного экстремума в точке x_0 (5.24).

$$\begin{cases} \frac{\delta L}{\delta x^i} = 0 \\ \vdots \\ \frac{\delta L}{\delta \lambda_j} = 0 \end{cases} \Rightarrow x_0, \quad \lambda_1, \ldots, \lambda_k.$$

Теорема 13 (Достаточное условие условного экстремума)**.** Если при введенных выше условиях квадратичная форма

$$Q(\xi)=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\delta^2 L}{\delta x^i\delta x^j}(x_0)\cdot\xi^i\xi^j,\ \big(\xi=(\xi^1,\ldots,\xi^n)\big)$$

1. Знакоопределена на TS_{x_0}:
   - если Q знакоположительна, то точка x_0 – точка условного локального min
   - если Q знакоотрицательна, то точка x_0 – точка условного локального max
2. Если Q может принимать значения разных знаков, то в точке x_0 условного экстремума не наблюдается.

Доказательство. Заметим, что $f\big|_S$ и $L\big|_S$ совпадают. В самом деле, если $x\in S$, то:

$$L(x,\lambda)=f(\underset{(x^1,\ldots,x^n)}{\underset{\parallel}{x}})+\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\cdot \underset{0}{\underset{\parallel}{F^i(x)}}=f(x).$$

Поэтому покажем, что условие знакопостоянства Q является достаточным для экстремума функции $L\big|_s$.

Имеем, что

$$\begin{cases}\frac{\delta L}{\delta x^1}(x_0)=0\\ \vdots\\ \frac{\delta L}{\delta x^n}(x_0)=0\end{cases}.$$

По формуле Тейлора:

$$L\big|_S(x)-L(x_0)=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\delta^2 L(x_0)}{\delta x^i\delta x^j}\cdot(x^i-x_0^i)(x^j-x_0^j)+o\big(\|x-x_0\|^2\big)\quad(5.25)$$

Так как $S-m=(n-k)$-мерная поверхность, то существует гладкое отображение $x(t):\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n:\ x=x(t)\subset S\ \forall t\in\mathbb{R}^m,\ x(0)=x_0$. Отображение $x(t)$ биективно отображает $\mathbb{R}^m$ на $U_S(x_0)=U(x_0)\cap S$.

Если $x\in S$, то условие дифференцируемости $x(t)$:

$$x-x_0=x(\underset{\in\mathbb{R}^m}{t})-x(0)=x'(0)\cdot t+o\big(\|t\|\big)$$

или

$$\begin{cases}x^1-x_0^1=\frac{\delta x^1}{\delta t^1}(0)\cdot t^1+\ldots+\frac{\delta x^1}{\delta t^m}(0)\cdot t^m+o\big(\|t\|\big)\\ \vdots\\ x^n-x_0^n=\frac{\delta x^n}{\delta t^1}(0)\cdot t^1+\ldots+\frac{\delta x^n}{\delta t^m}(0)\cdot t^m+o\big(\|t\|\big)\end{cases}$$

или кратко

$$\begin{cases} x^1 - x_0^1 = \sum_{i=1}^m \frac{\delta x^1}{\delta t^i}(0)\cdot t^i + o\big(\|t\|\big) \\ \vdots \\ x^n - x_0^n = \sum_{i=1}^m \frac{\delta x^n}{\delta t^i}(0)\cdot t^i + o\big(\|t\|\big) \end{cases} \tag{5.26}$$

Подставим 5.26 в 5.25:

$$L\Big|_S(x) - L(x_0) = \frac{1}{2}\cdot\sum_{i,j=1}^n \frac{\delta^2 L(x_0)}{\delta x^i \delta x^j}\cdot \underbrace{\left(\sum_{\alpha=1}^m \frac{\delta x^i}{\delta t^\alpha}(0)\cdot t^\alpha + o\big(\|t\|\big)\right)}_{x^i - x_0^i}\cdot$$

$$\cdot\underbrace{\left(\sum_{\beta=1}^m \frac{\delta x^j}{\delta t^\beta}(0)\cdot t^\beta + o\big(\|t\|\big)\right)}_{x^j - x_0^j} + o\big(\|x - x_0\|^2\big) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n \frac{\delta^2 L(x_0)}{\delta x^i \delta x^j}\cdot\left[\left(\sum_{\alpha=1}^m \frac{\delta x^i}{\delta t^\alpha}(0)\cdot t^\alpha\right)\cdot\left(\sum_{\beta=1}^m \frac{\delta x^i}{\delta t^\beta}(0)\cdot t^\beta\right) + \right.$$

$$+\left(\sum_{\alpha=1}^m \frac{\delta x^i}{\delta t^\alpha}(0)\cdot t^\alpha\right)\cdot o\big(\|t\|\big) + \left(\sum_{\beta=1}^m \frac{\delta x^i}{\delta t^\beta}(0)\cdot t^\beta\right)\cdot$$

$$\left.\cdot\, o\big(\|t\|\big) + o\big(\|t\|\big)\right] + o\big(\|x - x_0\|^2\big) \overset{(\heartsuit)}{=} \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n \frac{\delta^2 L(x_0)}{\delta x^i \delta x^j}\cdot$$

$$\cdot\sum_{\alpha,\beta=1}^m \frac{\delta x^i}{\delta t^\alpha}\cdot\frac{x^i}{\delta t^\beta}\cdot t^\alpha\cdot t^\beta + o\big(\|t\|^2\big) = \frac{\|t\|^2}{2}\cdot\sum_{i,j=1}^n \frac{\delta^2 L(x_0)}{\delta x^i \delta x^j}\cdot$$

$$\cdot\underbrace{\sum_{\alpha,\beta=1}^m \frac{\delta x^i}{\delta t^\alpha}\cdot\frac{\delta x^j}{\delta t^\beta}\cdot\frac{t^\alpha}{\|t\|}\cdot\frac{t^\beta}{\|t\|}}_{\xi^i,\xi^j \text{ – координаты вектора } \xi\in TS_{x_0}} + o\big(\|t\|^2\big) = \frac{\|t\|^2}{2}Q(\xi) + o\big(\|t\|^2\big).$$

Таким образом получаем, что

$$L\Big|_S(x) - L(x_0) = \frac{\|t\|^2}{2}\cdot Q(\xi) + o\big(\|t\|^2\big),\ \xi \in TS_{x_0}.$$

Тогда, если $Q > 0$, то

$$L\Big|_S(x) - L(x_0) > 0 \Rightarrow x_0 \text{ – min для } L\Big|_S(x) \Rightarrow x_0 \text{ – min для } f\Big|_S.$$

Если $Q < 0$, то

$$L\Big|_S(x) - L(x_0) < 0 \Rightarrow x_0 \text{ – локальный max для } L\Big|_S(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_0 \text{ – локальный max для } f\Big|_S\ (\forall x \in U_S(x_0))$$

Если Q – знакопеременна, то не для всех $x \in U_S(x_0)$ разность $L\big|_S(x) - L(x_0)$ имеет постоянный знак $\Rightarrow$ в этом случае в точке x_0 нет экстремума.

Докажем (♡), то есть покажем, что

$$o\big(\|t\|\big)\cdot\sum_{\alpha=1}^{m}\frac{\delta x^i}{\delta t^\alpha}\cdot t^\alpha = o\big(\|t\|^2\big)$$

и

$$o\big(\|x-x_0\|^2\big)=o\big(\|t\|^2\big),\ x\in S.$$

В самом деле,

$$\left|\sum_{\alpha=1}^{m}\frac{\delta x^i}{\delta t^\alpha}(0)\cdot t^\alpha\right| \leqslant \sum_{\alpha=1}^{m}\left|\frac{\delta x^i}{\delta t^\alpha}(0)\right|\cdot\left|t^\alpha\right| \leqslant \|t\|\cdot\underbrace{\sum_{\alpha=1}^{m}\left|\frac{\delta x^i}{\delta t^\alpha}(0)\right|}_{\substack{\parallel\\ const>0}} = \underbrace{\overset{>0}{A}\cdot\|t\|}_{\substack{\parallel\\ O(\|t\|)}}.$$

Таким образом,

$$o\big(\|t\|\big)\cdot\left|\sum_{\alpha=1}^{m}\frac{\delta x^i(0)}{\delta t^\alpha}\cdot t^\alpha\right| \leqslant o\big(\|t\|\big)\cdot O\big(\|t\|\big)=$$

$$=\omega(t)\cdot\|t\|\cdot\gamma(t)\cdot\|t\| = \left|\begin{array}{c}\text{где } \omega(t)\to 0 \text{ при } t\to 0,\\ \gamma(t) - \text{ограниченная функция}\end{array}\right| =$$

$$=\underset{\substack{\parallel\\ \omega(t)\gamma(t)}}{\alpha(t)}\cdot\|t\|^2 = o\big(\|t\|^2\big),\quad \begin{array}{l}\alpha(t)\to 0,\\ t\to 0\end{array}.$$

Далее, если $x\in S$, то

$$\|x-x_0\|^2 = \left\|\begin{pmatrix}x^1-x_0^1\\ \vdots\\ x^n-x_0^n\end{pmatrix}\right\|^2 \overset{5.26}{=} \left\|\begin{pmatrix}\sum_{\alpha=1}^{m}\frac{\delta x^1}{\delta t^\alpha}\cdot t^\alpha + o\big(\|t\|\big)\\ \vdots\\ \sum_{\alpha=1}^{m}\frac{\delta x^n}{\delta t^\alpha}\cdot t^\alpha + o\big(\|t\|\big)\end{pmatrix}\right\|^2 =$$

$$=\left(\sum_{\alpha=1}^{m}\frac{\delta x^1}{\delta t^\alpha}\cdot t^\alpha + o\big(\|t\|\big)\right)^2 + \ldots + \left(\sum_{\alpha=1}^{m}\frac{\delta x^n}{\delta t^\alpha} + o\big(\|t\|\big)\right)^2 =$$

$$=\left(\sum_{\alpha=1}^{m}\frac{\delta x^1}{\delta t^\alpha}\cdot t^\alpha\right)^2 + \ldots + \left(\sum_{\alpha=1}^{m}\frac{\delta x^n}{\delta t^\alpha}\right)^2 + o\big(\|t\|^2\big) \leqslant$$

$$\leqslant \left(\max_\alpha\frac{\delta x^1}{\delta t^\alpha}\right)^2\cdot\left(\sum_{\alpha=1}^{m}t^\alpha\right)^2 + \ldots + \left(\max_\alpha\frac{\delta x^n}{\delta t^\alpha}\right)^2\cdot\left(\sum_{\alpha=1}^{m}t^\alpha\right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant \|t\|^2\cdot\left(\left(\max_\alpha\frac{\delta x^1}{\delta t^\alpha}\right)^2 + \left(\max\frac{\delta x^n}{\delta t^\alpha}\right)^2\right) \leqslant$$

$$\leqslant \|t\|^2\cdot\underbrace{\left(\max_i\left(\max_\alpha\frac{\delta x^i}{\delta t^\alpha}(0)\right)\right)^2\cdot n}_{\substack{\parallel\\ const>0}} = B\|t\|^2 = o\big(\|t\|^2\big).$$

Поэтому

$$o\big(\|x-x_0\|^2\big) = \\ = \beta(x-x_0)\cdot\|x-x_0\|^2 = \beta(t)\cdot\|x-x_0\|^2 \leqslant \beta(t)\cdot B\cdot\|t\|^2 = \\ = o\big(\|t\|^2\big)$$

$$\big(\beta(x-x_0)\to 0 \text{ при } x\to x_0 \Leftrightarrow t\to 0\big)$$

$\square$

Глава 6

Теория рядов

6.1 Введение

Определение 16 (Ряд)**.** *Рядом* называется выражение:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots, \quad a_i \in \mathbb{R}.$$

Числа a_i называются *членами ряда*, a_n – *n-ым членом ряда*.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{6.1}$$

Рассмотрим числа:

$$\begin{aligned} &A_1 = a_1, \\ &A_2 = a_1 + a_2, \\ &\vdots \\ &A_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n. \end{aligned}$$

Числа $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называются *частичными суммами ряда* 6.1.

Определение 17 (Сходящийся ряд)**.** Говорят, что ряд 6.1 *сходится*, если существует конечный предел частичных сумм, то есть

$$\exists \lim_{n \to \infty} A_n = A.$$

Тогда сумма бесконечного ряда 6.1 полагается равной

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Пример.

$$10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \ldots + \frac{1}{10^n} + \ldots = 10 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{10^k}$$

$$A_n = \frac{1}{10^0} + \frac{1}{10^1} + \ldots + \frac{1}{10^n} = \frac{1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1} = \\ = \frac{\frac{1}{10^n} - 1}{\frac{1}{10} - 1} = \frac{1 - \frac{1}{10^n}}{\frac{9}{10}} = \frac{10}{9} \cdot \left(1 - \frac{1}{10^n}\right)$$

$$\lim_{n \to \infty} A_n = \lim_{n \to \infty} \frac{10}{9} \left(1 - \frac{1}{10^n}\right) = \frac{10}{9}$$

6.1.1 Гармонический ряд

Определение 18 (Среднее гармоническое)**.** Число c называется *средним гармоническим* чисел a и b $(a, b \neq 0)$, если

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right).$$

Определение 19 (Гармонический ряд)**.** Ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \tag{6.2}$$

называется *гармоническим.*

Примечание. Докажем, что ряд 6.2 расходится.

Если $\exists \varepsilon > 0\ \forall N\ \exists n > N\ \exists p > 0$

$$|a_{n+1} + \ldots + a_{n+p}| \geqslant \varepsilon$$

$$\left|\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+p}\right| \geqslant \left|\frac{1}{n+p} + \frac{1}{n+p} + \ldots + \frac{1}{n+p}\right| = \\ = \frac{p}{n+p} \underset{n=p}{=} \frac{1}{2},$$

то есть для $\forall N: \ \varepsilon = \frac{1}{2},\ p = n,\ n = N + 1 \Rightarrow$ по критерию Коши, гармонический ряд 6.2 расходится.

6.1.2 Основные свойства сходящихся рядов

Теорема 14 (Критерий Коши). Ряд 6.1 сходится тогда и только тогда, когда $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}:\ \forall n > N,\ \forall p > 0$

$$|a_{n+1} + \ldots + a_{n+p}| < \varepsilon.$$

Доказательство. Ряд 6.1 сходится $\underset{\text{по определению}}{\Leftrightarrow} \exists \lim\limits_{n\to\infty} A_n \Leftrightarrow A_n$ – фундаментальная последовательность: $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}:\ \forall n > N$ и $\forall p > 0$

$$|A_n - A_{n+p}| < \varepsilon, \quad \left(\begin{array}{c}\text{критерий Коши сходимости}\\ \text{последовательности}\end{array}\right).$$

Имеем

$$\begin{aligned}&|A_n - A_{n+p}| = \\ &\quad = \big|a_1 + a_2 + \ldots + a_n - (a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots + a_{n+p})\big| = \\ &\qquad = |a_{n+1} + \ldots + a_{n+p}| < \varepsilon.\end{aligned}$$

□

Замечание. Со всякой последовательностью x_n можно связать ряд, частичными суммами которого являются члены этой последовательности. Пусть:

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots.$$

Тогда ряд

$$\underbrace{x_1}_{a_1} + \underbrace{(x_2 - x_1)}_{a_2} + \underbrace{(x_3 - x_2)}_{a_3} + \ldots + \underbrace{(x_n - x_{n-1})}_{a_n} + \ldots,$$

$$A_n = a_1 + \ldots + a_n = x_1 + (x_2 - x_1) + \ldots + (x_n - x_{n-1}) = x_n.$$

Теорема 15 (Необходимое условие сходимости ряда). Если ряд 6.1 сходится, тогда:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Доказательство. Пусть ряд 6.1 сходится, тогда $\exists \lim\limits_{n\to\infty} A_n$:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} (A_n - A_{n-1}) = \\ = \lim_{n\to\infty} A_n - \lim_{n\to\infty} A_{n-1} &= 0\end{aligned}$$

□