Теория игр и исследование операций
Диктант, определения

Основано на учебно-методическом пособии
Файл создан Заблоцким Данилом

Содержание

1 Задача о максимальном потоке

Определение (Двухполюсная сеть). Задан ориентированный граф $S = (V, E)$ с двумя выделенными вершинами: *источником* s и *стоком* t. Каждой дуге e графа приписано неотрицательное число $c(e)$ – *пропускная способность* дуги.

Такой граф называется *двухполюсной сетью.*

Определение (Поток, дуговые потоки, величина потока, максимальный поток). *Потоком* из s в t в сети S называется функция

$$f:\ E \to R,$$

удовлетворяющая условиям:

$$0 \leqslant f(e) \leqslant c(e),\ \forall e \in E,$$

$$\sum_{y \in A(x)} f(x,y) - \sum_{y \in B(x)} f(y,x) = \begin{cases} v, & x = s \\ 0, & x \notin \{s,t\} \\ -v, & x = t \end{cases}$$

Числа $f(e) \geqslant 0$ называются *дуговыми потоками*. Величина $v = v(f)$ называется *величиной потока* f. Поток f называется *максимальным*, если величина $v(f)$ максимальна.

Определение (Допустимая дуга, увеличивающий путь). Дуга e в сети S называется *допустимой дугой* из x в y относительно потока f, если:

$$\text{либо } e = (x,y) \text{ и } f(e) < c(e) \text{ (прямая дуга)},$$

$$\text{либо } e = (y,x) \text{ и } f(e) > 0 \text{ (обратная дуга)}.$$

Увеличивающим путем для данного потока f и s в t называется такая последовательность вершин $P = (s = x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k = t)$, что $\forall i = 1, \ldots, k$ либо $e_i = (x_{i-1}, x_i) \in E$, либо $e_i = (x_i, x_{i-1}) \in E$ и e_i – допустимая дуга из x_{i-1} в x_i относительно потока f.

Определение (Разрез). *Разрезом* $(X, \overline{X})$ называется множество дуг $e = (x, y)$ таких, что $x \in X,\ y \in \overline{X}$. Разрез $(X, \overline{X})$ *разделяет* вершины s и t, если $s \in X,\ t \in \overline{X}$. *Пропускная способность* разреза $(X, \overline{X}):\ c(X, \overline{X}) = \sum_{e \in (X, \overline{X})} c(e)$. *Поток через разрез* $(X, \overline{X})$ определяется:

$$f(X, \overline{X}) = \sum_{e \in (X, \overline{X})} f(e).$$

Определение (Минимальный разрез). *Минимальным разрезом* называется разрез, разделяющий s и t, с минимальной пропускной способностью среди всех таких разрезов.

Определение (Условие баланса). Необходимое условие разрешимости задачи являетяс так называемое *условие баланса*:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

2 Задачи транспортного типа

$$f = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min \tag{1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leqslant a_i,\ i = 1, \ldots, m \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geqslant b_j,\ j = 1, \ldots, n \tag{3}$$

$$x_{ij} \geqslant 0,\ i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n \tag{4}$$

Для разрешимости задачи (1)-(4) необходимо, чтобы общий объем производства покрывал суммарный спрос:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \geqslant \sum_{j=1}^{n} b_j \tag{5}$$

Определение (Открытая транспортная задача (ОТЗ)). В случае строгого неравенства в (5) задача (1)-(4) называется *открытой транспортной задачей* (ОТЗ), в противном случае задача принимает вид:

$$f = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min \tag{6}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i,\ i = 1, \ldots, m \tag{7}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j,\ j = 1, \ldots, n \tag{8}$$

$$x_{ij} \geqslant 0,\ i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n \tag{9}$$

Определение (Закрытая транспортная задача (ЗТЗ)). Задача (6)-(9) называется *закрытой транспортной задачей* (ЗТЗ) и является канонической задачей ЛП.

Определение (План перевозок (план ЗТЗ)). Допустимую, то есть удовлетворяющую ограничениям (7)-(9), таблицу (матрицу) $X = (x_{ij})$ размера $(m \times n)$, будем называть *планом перевозок*, или просто *планом ЗТЗ*.

Определение (Базисное решение). Ненулевое допустимое решение x канонической задачи ЛП называется *базисным*, если система вектор-столбцов матрицы ограничений, соответствующих ненулевым компонентам вектора x, является линейно-независимой.

Определение (Основная коммуникация). Каждая переменная x_{ij} плана перевозок соответствует возможной *коммуникации* A_iB_j между пунктами производства и потребления. Коммуникацию A_iB_j назовем *основной коммуникацией*, если вдоль нее осуществляется перевозка, при этом соответствующую клетку таблицы будем считать *отмеченной*.

Определение (Граф перевозок). Рассмотрим граф, вершины которого соответствуют пунктам A_i и B_j, а ребра – основным коммуникациям A_iB_j. Будем называть его *графиком перевозок*.

Двойственная задача имеет вид:

$$\sum_{j=1}^{n} b_j v_j - \sum_{i=1}^{m} a_i u_i \to \max \tag{10}$$

$$u_i \geqslant 0, \ i = 1, \ldots, m \tag{11}$$

$$v_j \geqslant 0, \ j = 1, \ldots, n \tag{12}$$

$$v_j - u_i \leqslant c_{ij}, \ i = 1, \ldots, m, \ j = 1, \ldots, n \tag{13}$$

Определение (Потенциалы). Переменные $u_i, \ i = 1, \ldots, m$ и $v_j, \ j = 1, \ldots, n$ называются *потенциалами*.

Введем переменные:

$$x_{ij} = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & \text{работник } i \text{ назначен на должность } j, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{array} \right\}$$

$$f = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min \tag{14}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \ i = 1, \ldots, n \tag{15}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1,\ j = 1, \dots, n \tag{16}$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\},\ i = 1, \dots n,\ j = 1, \dots, n \tag{17}$$

Определение (Задача целочисленного линейного программирования). Задача (14)-(19) является задачей *целочисленного линейного программирования* (ЦЛП). Поскольку ее переменные не просто целочисленные, а принимают лишь два значения 0 и 1, то такие задачи относят также к классу задач *булева программирования*.

Определение (Задача о назначениях на максимум). На практике возникает также постановка, в которой c_{ij} представляют собой *эффективность* от назначения работника i на должность j. В этом случае необходимо максимизировать суммарную эффективность.

Такую задачу будем называть *задачей о назначениях на максимум*. Она может быть сведена к задаче на минимум путем домножения целевой функции на -1.

3 Элементы теории игр

Определение (Конфликт). Под *конфликтом* обычно понимают любое явление, применительно к которому имеет смысл говорить, кто и как в этом явлении участвует, каковы его возможные исходы, как в этих исходах заинтересован и в чем эта заинтересованность состоит.

Определение (Теория игр, игрок, игра). Математические модели и методы принятия решений в условиях конфликта составляют предмет *теории игр*. Конфликтующие стороны назовем *игроками*, а под *игрой* будем понимать математическую модель конфликта.

Определение (Ход, стретегия, ситуация, невозможная ситуация). Игра состоит из последовательности *ходов*. *Стратегией* игрока называют систему правил, определяющих его выбор варианта действия при каждом ходе. Комбинация стратегий всех игроков называется *ситуацией*. Некоторые комбинации стратегий могут оказаться несовместимыми, и в этом случае говорят о *невозможной ситуации*.

Определение (Игра n лиц в нормальной форме). Говорят, что задана *игра n лиц в нормальной форме*, если заданы:

1. Множество игроков $N = \{1, \dots, n\}$.
2. Множества X_i стратегий игроков, $i = 1, \dots, n$.
3. Множество $X \subseteq X_1 \times \dots \times X_n$ возможных ситуаций.
4. Вектор-функция *выигрыша* $H: \ X \to R^n$, ставящая каждой ситуации $x \in X$ вектор выигрышей $H(x) = \big(H_1(x), \dots, H_n(x)\big)$.

Определение (Кооперативная игра). В случае, когда игроки в процессе игры могут образовывать коалиции и выбирать свои стратегии, преследуя общие цели по договоренности друг с другом, игра называется *кооперативной*.

Определение (Антагонистическая игра (с нулевой суммой), платежная функция). Игра называется *антагонистической игрой* или *игрой с нулевой суммой*, если $\forall x \in X, \ \forall y \in Y \ H_1(x,y) + H_2(x,y) = 0$. Функция $H(x,y) = H_1(x,y) = -H_2(x,y)$ называется *платежной функцией*.

Определение (Седловая точка). В случае антагонистической игры ситуация равновесия (x^*, y^*) является *седловой точкой* платежной функции:

$$H(x, y^*) \leqslant H(x^*, y^*) \leqslant H(x^*, y), \ \forall x \in X, \ \forall y \in Y.$$

Определение (Решение антагонистической игры). *Решение антагонистической игры* – пара оптимальных стратегий (x^*, y^*), образующих седловую точку платежной функции.

Определение (Нижняя, верхняя цена игры). Величины u^0 и v^0 называются *нижней* и *верхней ценой игры* соответственно.

Определение (Принцип минимакса). Приведенные рассуждения носят название *принципа минимакса*, который кратко может быть сформулирован следующим образом: каждый из игроков стремится максимально увеличить свой гарантированный выигрыш.

$$u(x) \leqslant v(y), \ \forall x \in X, \ \forall y \in Y \tag{18}$$

$$u^0 \leqslant v^0 \tag{19}$$

Определение (Основные неравенства, цена игры)**.** Соотношения (18)-(19) называются *основными неравенствами*. В случае достижения равенства $u^0 = v^0$ эта величина называется *ценой игры*.

Определение (Матричная игра, чистые стратегии)**.** Конечная антагонистическая игра называется *матричной игрой*. Стратегии каждого игрока в матричной игре можно пронумеровать. Будем считать, что игрок I имеет стратегии $i = 1, \dots, m$, а игрок II – стратегии $j = 1, \dots, n$. В дальнейшем будем называть их *чистыми стратегиями (ч.с.)*.

Определение (Оптимальные ч.с., решение игры в ч.с., разрешимая игра в ч.с., цена игры в ч.с.)**.** Седлова точка платежной матрицы дает *ситуацию равновесия* (p, q) в матричной игре, когда игроку I невыгодно отступать от своей максиминной ч.с. p, а игроку II – от минимаксной ч.с. q, поскольку, отклоняясь от этих стратегий, игроки могут разве что уменьшить свой выигрыш.

Если (p, q) – седлова точка, то стратегии p, q называются *оптимальными ч.с.* Пара (p, q) оптимальных ч.с. называется *решением игры в ч.с.*, а сама матричная игра – *разрешимой в ч.с.* Величина $u^0 = v^0$ называется в этом случае *ценой игры в ч.с.*

Определение (Смешанная стретегия (с.с.))**.** *Смешанной стратегией (с.с.)* игрока в матричной игре называется вероятностное распределение на множестве его ч.с.

Определение (Нижняя, верхняя цены игры в с.с., разрешимая в с.с., оптимальные в с.с., цена игры в с.с.)**.** Числа u^*, v^* называются соответственно *нижней* и *верхней ценой игры в с.с.*

Матричная игра называется *разрешимой в с.с.*, если $u^* = v^*$. Стратегии x^*, y^*, для которых $u(x^*) = u^* = v^* = v(y^*)$, называются *оптимальными с.с.* Пара (x^*, y^*) оптимальных с.с. образует *ситуацию равновесия в с.с.*, а величина $u^* = v^*$ – *цена игры в с.с.* – равна ожидаемому среднему выигрышу игрока I (и, соответственно, ожидаемому среднему проигрышу игрока II).