

Теория игр и исследование операций

Диктант 2, определения

Основано на учебно-методическом пособии
Файл создан Заблоцким Данилом

Содержание

4	Задача коммивояжера	2
5	Динамическое программирование	2
6	Задача сетевого планирования и управления	4

4 Задача коммивояжера

Определение (Маршрут коммивояжера). n городов, каждому присвоен номер от 1 до n . Известны расстояния c_{ij} между городами i и j , $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, n}$. Если между городами i и j , $i \neq j$, нет дороги, то $c_{ij} = \infty$. Вообще говоря, $c_{ij} \neq c_{ji}$. Коммивояжер (бродячий торговец), выезжая из какого-либо города, должен посетить все города, побывав в каждом из них ровно один раз, и вернуться в исходный город. Объезд городов, удовлетворяющий этим требованиям, называется *маршрутом коммивояжера*.

Определение (Гамильтонов цикл). Цикл, в который каждая вершина графа входит ровно один раз, называется *гамильтоновым циклом*.

Определение (Приведенная матрица, приведение матрицы, константы приведения). Матрицу $C^2 = (c_{ij}^2)$ называют *приведенной матрицей*, операцию ее построения – *приведением матрицы C* , а величины α_i, β_j – *константами приведения*.

5 Динамическое программирование

Определение (Динамическое программирование). *Динамическое программирование (ДП)* – раздел математического программирования, посвященный теории и методам решения многошаговых задач оптимального управления.

Определение (Динамическая система, дискретная ДС). *Динамическая система* – это объект, способный развиваться во времени, переходя из одного состояния в другое. Если смена состояний в динамической системе происходит в отдельные дискретные моменты времени, то она называется *дискретной динамической системой (ДС)*.

Определение (Марковское свойство). Качество $f(u)$ управления u , под воздействием которого система переходит из состояния x в состояние $y = \phi(x, u)$, зависит только от x и u и не зависит от того, каким образом ДС пришла в состояние x , называется *марковским свойством*. Другими словами, $f(u) = f(x, u)$, где $y = \phi(x, u)$.

Определение (Траектория из x_0 в x_k). *Траекторией* из x_0 в x_k называется набор состояний $T = (x_0, x_1, \dots, x_k)$, где $x_i = \phi(x_{i-1}, u^i)$, $i = \overline{1, k}$.

Определение (Показатель качества траектории (вес траектории)). В силу марковского свойства мы можем определить *показатель качества траектории* как

$$f(T) = \sum_{i=1}^k f(u^i).$$

Поскольку величина $f(T)$ складывается из весов управлений, входящих в траекторию, ее также называют *весом траектории*.

Определение (Принцип оптимальности). Для оптимальности всей последовательности управлений (u^1, \dots, u^k) необходимо, чтобы завершающая часть этой последовательности (u^i, \dots, u^k) также была оптимальной $\forall i: 1 \leq i \leq k$.

Системы (процессы), для которых справедливо это свойство, называются *марковскими*.

Определение (Разрешимое, неразрешимое УБ). Решить УБ означает определить для любого $x \in X$ величины $L(x)$ и $R(x)$. Если это возможно, то УБ называется *разрешимым*. Если же $\exists x \in X$, такой что $L(x)$ ($R(x)$) определить невозможно, то УБ называется *неразрешимым*.

Определение (Контур). *Контуром* в графе переходов называется замкнутый ориентированный маршрут.

Определение (Задача о замене оборудования). При эксплуатации станков, автомобилей, самолетов и других устройств возникает задача определения оптимальных сроков обновления их парка, известная как *задача о замене оборудования*.

Предприятие собирается использовать автомобиль в течение n лет с возможной его заменой: в конце каждого года имеющийся автомобиль либо остается в эксплуатации, либо производится замена старого автомобиля на новый. Стоимость нового равна d , и в течение n лет данная величина остается неизменной. Пусть для автомобиля возраста t заданы $a(t)$ – доход от использования автомобиля (в год), $b(t)$ – ежегодные затраты на его эксплуатацию, $c(t)$ – его ликвидная стоимость, $t = \overline{0, n-1}$. Требуется определить оптимальные сроки замены автомобиля с целью максимизации суммарной прибыли от его использования.

6 Задача сетевого планирования и управления

Определение (Задача СПУ). *Задача сетевого планирования и управления (задача СПУ) возникает в строительстве, проектировании, на производстве и в других областях практической деятельности человека.*

Имеется проект, состоящий из взаимосвязанных работ. Для каждой работы известно ее время выполнения. Между работами есть логическая взаимосвязь: для каждой работы определен перечень работ, которые должны быть завершены к началу ее выполнения. Необходимо составить расписание выполнения работ, определяющее время начала каждой работы, следуя которому можно завершить весь проект за минимальное время T_{\min} .

Определение (Событие, сетевая модель). *Событием назовем стадию выполнения проекта, соответствующую началу или окончанию некоторых работ. Тогда всю информацию о проекте, включая заданное отношение частичного порядка на множестве работ, удобно представить в форме ориентированного графа $G = (X, U)$, который называется *сетевой моделью*.*

Определение (Свершенное событие). Будем говорить, что событие *свершилось*, если завершены все работы, предшествовавшие этому событию, то есть дуги, входящие в вершину-событие. После того, как событие свершилось, могут начинаться работы-дуги, выходящие из соответствующей вершины.

Определение (Непротиворечивая сетевая модель). В графе G должны присутствовать замкнутые ориентированные последовательности дуг – контуры. Такая сетевая модель называется *непротиворечивой*.

Определение (Расписание, условие допустимости). *Расписание* – это набор чисел $\{t(x, y)\}$, которые сопоставлены каждой дуге $(x, y) \in U$ и задают время начала работы (x, y) , для которых имеет место *условие допустимости*: если работа (x, y) предшествует работе (y, z) , то

$$t(y, z) \geq t(x, y) + \tau(x, y).$$

Определение (Ранний момент T_x^P). *Ранний момент T_x^P совершения события x – это минимальный момент времени, в который может свершиться это событие.*

Определение (Поздний момент T_x^Π). *Поздний момент* T_x^Π совершения события x – это максимальный момент времени совершения этого события, не приводящий к увеличению времени выполнения всего проекта сверх T_{\min} .

Определение (Критическое событие). Событие называется *критическим*, если $T_x^P = T_x^\Pi$. Очевидно, что начало проекта α и окончание проекта β являются критическими событиями:

$$T_\alpha^P = T_\alpha^\Pi = 0, \quad T_\beta^P = T_\beta^\Pi = T_{\min}.$$

Определение (Полный резерв работы, критическая работа). *Полным резервом работы* (x, y) называется величина

$$R(x, y) = (T_y^\Pi - \tau(x, y)) - T_x^P.$$

Работа называется *критической*, если $R(x, y) = 0$.

Определение (Критический путь). *Критический путь* – это ориентированная последовательность критических работ от начального события α к конечному β .

Определение (Раннее расписание). *Раннее расписание* $\{t^P(x, y)\}$ – это расписание, в котором каждой работе (x, y) приписан момент ее начала, раньше которого она не может начаться, то есть

$$t^P(x, y) = T_x^P, \quad \forall (x, y) \in U.$$

Определение (Позднее расписание). *Позднее расписание* $\{t^\Pi(x, y)\}$ – это расписание, в котором каждой работе (x, y) приписан момент ее начала, позже которого она начаться не должна (так как в противном случае будет нарушен срок окончания проекта T_{\min}), то есть

$$t^\Pi(x, y) = T_y^\Pi - \tau(x, y), \quad \forall (x, y) \in U.$$