Комплексный анализ
Определения к тестированию

Основано на конспектах лекций Аксёновой Е.В.
Файл создан Заблоцким Данилом

Содержание

1 Модуль и аргумент коплексного числа

Определение. *Полярные координаты* комплексного числа:

$$z = x + iy,$$

полярный радиус:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

и *полярный угол* ϕ, то есть угол между положительным направлением оси OX и вектора z, соответственно называется его *молулем и аргументом.*

Модуль определяется однозначно, а аргумент – с точностью до слагаемого $2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

2 Алгербраическая, показательная и тригонометрическая формы записи комплексного числа

Алгебраическая форма записи:

$$z = (x, y) = x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R},$$

Показательная форма записи:

$$z = |z| \cdot e^{i \arg z}.$$

Тригонометрическая форма записи:

$$z = |z| \cdot (\cos \arg z + i \sin \arg z),$$

3 Сопряжённое к комплексному числу

$$\overline{z} = x - iy.$$

4 Сложение, умножение и деление комплексных чисел

$$z_1 + z_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2),$$

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 = (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = \\ = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1) = \\ = x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1), \end{aligned}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{|z_2|^2},$$

$$z \cdot \overline{z} = |z|^2.$$

5 Формула Эйлера

$$e^{i\phi} = \cos\phi + i \sin\phi, \quad \forall \phi \in \mathbb{R}.$$

6 Формула Муавра

$$z^n = r^n (\cos n\phi + i \sin n\phi).$$

Определение. *Корнем n-ой степени* комплексного числа z называется комплексное число, n-ая степень которого равна z,

$$z^n = z_0,$$

$$\sqrt[n]{z_0} = \sqrt[n]{|z_0|} \cdot e^{i \frac{\arg z_0 + 2\pi k}{n}}, \quad 0 \leqslant k \leqslant n-1.$$

7 Расстояние между двумя конечными точками на комплексной плоскости

$$\mathrm{dist}(z_1, z_2) \coloneqq |z_1 - z_2|, \text{ где } z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

8 Окрестность конечной точки на комплексной плоскости

Определение. Множество называется *окрестностью* точки, если оно содержит некоторый шарик с центром в этой точке.

Обозначение.

$$O_z, \quad z \in \overline{\mathbb{C}}.$$

9 Окрестность бесконечно удалённой точки

Определение. Множество $V \subset \overline{\mathbb{C}}$ является *окрестностью бесконечно удаленной точки*, если $\exists \varepsilon > 0$:

$$\left\{z \in \overline{\mathbb{C}} : |z| > \varepsilon\right\} \subset V.$$

10 Предельная точка множества

Определение. Точка называется *предельной* точкой множества, если в любой ее окрестности есть точки множества, отличные от данной.

Замечание. Точка является предельной точкой множества на расширенной комплексной плоскости $(\overline{\mathbb{C}}) \iff \forall$ ее окрестность содержит бесконечное число точек данного множества.

11 Внутренняя точка множества

Определение. $\mathfrak{D} \subset \mathbb{C}$. $z \in \mathfrak{D}$ называется *внутренней точкой* множества $\mathfrak{D}$, если $\mathfrak{D} \in O_z$.

12 Граничная точка множества

Определение. Точка называется *граничной* точкой множества, если в любой ее окрестности есть как точки множества, так и точки его дополнения.

Обозначение.

$$\partial\mathfrak{D}.$$

13 Предел последовательности комплексных чисел

Определение. Комплексное число z_0 называется *пределом последовательности комплексных чисел* $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, если $\forall\varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}:\ \forall n \geqslant n_0$

$$|z_n - z_0| < \varepsilon \quad \left(\mathrm{d}(z_n, z_0) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\right),$$

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z_0.$$

14 Предел функции

Определение. $\mathfrak{D} \subset \operatorname{dom} f,\ z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ – предельная точка $\mathfrak{D}$. Тогда $\omega_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ называется *пределом отображения* f, $\omega_0 := \lim\limits_{\mathfrak{D}\ni z\to z_0} f(z)$, если $\forall V \in O_{\omega_0}\ \exists U \in O_{z_0}$

$$f(\mathring{U} \cap \mathfrak{D}) \subset V.$$

$\operatorname{dom} f$ – область определения функции.

15 Непрерывность функции в точке

Определение. Функция f называется *непрерывной в точке* $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$, если

1. $z_0 \in \operatorname{dom} f$.
2. $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0:\ \forall z \in \mathfrak{D}$

$$0 < |z - z_0| < \delta \implies |f(z) - \omega_0| < \varepsilon.$$

16 Производная функции в точке

Определение. Если $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ определена в некоторой окрестности точки $z_0 \in \mathbb{C}$ и $\exists \lim\limits_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} =: f'(z_0)$ называется *производной функции в точке* z_0.

17 Равномерная сходимость последовательности функций на множестве

Определение. Пусть $(n \in \mathbb{N})$, $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $D \coloneqq \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{dom} f_n$.

$A \subset \mathfrak{D}$, $f : A \to \mathbb{C}$. Говорят, что последовательность $f_n \rightrightarrows f$ на A, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} :\ \forall z \in A\ \forall n \geqslant n_0$

$$\big|f_n(z) - f(z)\big| < \varepsilon$$

$$\Big(\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} :\ \forall n \geqslant n_0$$

$$\sup_{z\in A}\big|f_n(z) - f(z)\big| < \varepsilon,\ |z - z_0| < \delta \implies \big|f(z) - f(z_0)\big| < \varepsilon\Big).$$

18 Признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда

Примечание. Предположим, что $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ таков, что $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall z \in A\ \big|f_n(z)\big|$, причем $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ равномерно абсолютно сходится на A.

19 Теорема Вейерштрасса (о равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций)

Теорема. Если $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C(A)$, $f_n \rightrightarrows f$, то $f \in C(A)$.

20 Путь, эквивалентные пути, жорданов путь, кривая, кривая Жордана, гладкая кривая, кусочногладкая кривая (это разные вопросы)

Определение (Путь). *Путем* $\gamma : [a; b] \to \mathbb{C}$ называется непрерывное отображение $[a; b]$ в $\mathbb{C}$.

Определение (Эквивалентные пути). $\gamma_1 : [a_1; b_2] \to \mathbb{C}$, $\gamma_2 : [a_2; b_2] \to \mathbb{C}$.

$\gamma_1 \sim \gamma_2$, если $\exists$ возрастающая непрерывная функция

$$\phi : [a_1; b_1] \xrightarrow{\text{на}} [a_2; b_2] :\ \gamma_1(t) = \gamma_2\big(\phi(t)\big), \quad \forall t \in [a_1; b_1].$$

Определение (Жорданов путь). Путь называется *жордановым*, если он является взаимно однозначной функцией.

Определение (Гладкая кривая). Кривая называется *гладкой*, если в каждой ее точке $\exists$ касательная, непрерывно изменяющаяся вдоль кривой (если в каждой ее точке $\exists$ непрерывная производная).

Определение (Кусочногладкая кривая). Кривая, состоящая из конечного числа гладких дуг, называется *кусочно-гладкой*.

21 Множество связное

Определение. Множество $A \subset \overline{\mathbb{C}}$ называется *связным*, если не существует $U, V \in O_p\overline{\mathbb{C}}: \ U \cap A \neq \varnothing, \ V \cap A \neq \varnothing, \ U \cap V = \varnothing$.

Обозначение. *$O_p\overline{\mathbb{C}}$ – совокупность всех открытых множеств.*

Определение. Множество называется *линейно связным*, если $\forall$ две его точки можно соединить путем, значения которого лежат в этом множестве.

22 Область, односвязная область

Определение. *Областью в* $\mathbb{C}$ ($\overline{\mathbb{C}}$) называется $\forall$ непустое открытое связное множество.

Область называется *односвязной*, если $\forall$ замкнутая кривая гомотопна некоторой точки этой прямой (кривая гомотопна точке, если она стягивается в эту точку).

23 Производная функции в точке

Определение. Если $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ определена в некоторой окрестности точки $z_0 \in \mathbb{C}$ и $\exists \lim\limits_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} =: f'(z_0)$ называется *производной функции в точке* z_0.

24 Моногенная в точке функция

Определение. Если $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ определена в некоторой окрестности точки $z_0 \in \mathbb{C}$, то она называется *моногенной в точке* z_0, если $\exists$ конечный $\lim\limits_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} =: f'(z_0)$.

Другими словами, функция называется моногенной в точке, если она имеет в этой точке конечную производную.

25 Голоморфная в точке функция

Определение. Функция называется *голоморфной в точке*, если она моногенна в некоторой ее окрестности, то есть дифференцируема в каждой точке ее окрестности.

26 Голоморфная в области функция

Определение. Функция называется *голоморфной* в области, если она моногенна в каждой точке этой области.

27 Условия Коши-Римана

Примечание. Если функция

$$f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$$

дифференцируема в точке z, то ее действительная и мнимая части обладают частными производными первого порядка, которые удовлетворяют условиям Коши-Римана:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0), \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \end{cases}$$

28 Степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, \quad \text{где } \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C},\ z, z_0 \in \mathbb{C}.$$

29 1-я теорема Абеля

Теорема. Если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ сходится в точке $\underset{z_0}{\underset{\not\Vert}{z_1}} \in \mathbb{C}$, то он абсолютно сходится при $|z-z_0| < |z_1-z_0|$.

А если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ расходится в точке $\underset{z_0}{\underset{\not\Vert}{z_1}} \in \mathbb{C}$, то он расходится и при $|z-z_0| > |z_1-z_0|$.

30 Радиус сходимости степенного ряда

Определение. Элемент $R \in [0; +\infty]$ называется *радиусом сходимости* ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, если при $|z-z_0| < R$ исходный ряд абсолютно сходится, а при $|z-z_0| > R$ исходный ряд расходится.

31 Формула Коши-Адамара

Теорема. Для степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ положим $l \coloneqq \varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Тогда:

1. Если $l = 0$, то исходный ряд сходится $\forall z \in \mathbb{C}$.
2. Если $l = \infty$, то исходный ряд сходится только в точке z_0.
3. Если $l \in (0; +\infty)$, то при $|z-z_0| < \frac{1}{l}$, а при $|z-z_0| > \frac{1}{l}$ исходный ряд расходится.

32 Формула Даламбера

Замечание. Если $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$, то этот предел равен R (радиусу сходимости).

33 Конформное в точке отображение

Определение. $f : \mathfrak{D} \to \mathbb{C}$ называется *конформным отображением*, если оно является гомеоморфизмом и оно конформно в каждой точке области $\mathfrak{D}$.

34 Регулярное в точке отображение

Определение. Функция называется *регулярной в точке*, если она имеет в этой точке конечную производную от 0.

35 Связь между голоморфностью и конформностью

Примечание. Каждое конфорное в области отображение голоморфно и регулярно в этой области.

Любое однолистное голоморфное и регулярное в области отображение конформно в этой области.

36 Определение функций e^z, $\sin z$, $\cos z$, $\ln z$, $\operatorname{Ln} z$, $\operatorname{Arg} z$, $\operatorname{Arcsin} z$, $\operatorname{Arccos} z$, выражение тригонометрических функций через экспоненту

$$
\begin{aligned}
&e^z = \omega = |\omega|\, e^{i \arg \omega} = e^{\ln|\omega| + i \arg \omega} = e^{\ln|\omega| + i \arg \omega + 2\pi k i},\ k \in \mathbb{Z},\\
&z = \ln|\omega| + i \arg \omega + 2\pi k i = \ln|\omega| + i \operatorname{Arg} \omega,\\
&\ln z = \ln|z| + i \arg z,\\
&\operatorname{Ln} z = \ln z + 2\pi k i = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z\\
&\operatorname{Arg} z \coloneqq \arg z + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z},\\
&\sin z = \tfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \tfrac{z^{2n}}{(2n)!}\\
&\cos z = \tfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \tfrac{z^{2n+1}}{(2n+1)!},\\
&\operatorname{Arcsin} z = -i \operatorname{Ln} i(z + \sqrt{z^2 - 1}),\\
&\operatorname{Arccos} z = -i \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
e^{-iz} &= \cos z - i \sin z,\\
e^{iz} &= \cos z + i \sin z,\\
\sqrt[n]{z} &= \sqrt[n]{|z|} \cdot e^{i \frac{\arg z}{2} + ?}
\end{aligned}
$$

37 Дробно-линейная функция

Определение. *Дробно-линейным отображением* называется функция вида

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

38 Общий вид дробно-линейного автоморфизма верхней полуплоскости

Примечание. Каждый дробно-линейный автоморфизм верхней полуплоскости представим в виде $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, где $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ и $ad - bc > 0$.

$\forall$ отображение такого вида является отображением верхней полуплоскости на себя (то есть ее автоморфизмом).

39 Общий вид дробно-линейного автоморфизма единичного круга

Примечание. Каждый дробно-линейный автоморфизм единичного круга на себя можно представить в виде $f(z) = e^{i\theta}\frac{z-a}{1-\overline{a}z}$, где $\theta \in \mathbb{R},\ |a| < 1$.

$\forall$ отображение такого вида является автоморфизмом единичного круга.

40 Общий вид дробно-линейного изоморфизма верхней полуплоскости на единичный круг

Примечание. Каждый дробно-линейный изоморфизм верхней полуплоскости на единичный круг можно представить в виде

$$f(z) = e^{i\theta}\frac{z-a}{z-\overline{a}},\ \text{где } \theta \in \mathbb{R},\ \operatorname{Im} a > 0.$$

$\forall$ отображение такого вида является изоморфизмом верхней полуплоскости на единичный круг.

41 Лемма Гурса (Гауса?)

Лемма. Если функция f непрерывна в области $\mathfrak{D}$, то для любой спрямляемой кривой Жордана $\gamma \subset \mathfrak{D}$, для любого $\varepsilon > 0$ $\exists$ вписанная в γ ломанная P такая, что

$$\left| \int_\gamma f(z)dz - \int_P f(z)dz \right| < \varepsilon.$$

42 Интегральная теорема Коши

Теорема. Пусть $\mathfrak{D}$ – односвязная область в $\mathbb{C}$, функция f голоморфна в $\mathfrak{D}$. Тогда для любой замкнутой спрямляемой кривой Жордана γ

$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

43 Интеграл Коши от степенной функции по замкнутому контуру

НАЙТИ

44 Интегральная формула Коши

Теорема. Если функция f голоморфна в односвязной области D, ограничена замкнутой спрямляемой кривой Жордана γ, непрерывна вплоть до границы, то

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(z)}{z-z_0}dz = \begin{cases} f(z_0), & \text{если } z_0 \in \mathfrak{D} \\ 0, & \text{если } z_0 \notin \operatorname{cl}\mathfrak{D} \end{cases}.$$

45 Интеграл типа Коши

Определение. Пусть односвязная область $\mathfrak{D}$ ограничена замкнутой спрямляемой кривой Жордана γ, а функция f непрерывна на γ. Положим

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta, \quad z \in \mathfrak{D}.$$

Функция F называется *интегралом типа Коши.*

46 Теорема Лиувилля

Теорема. Если функция f голоморфна в $\mathbb{C}$ и ограничена, то $f = \mathrm{const}$.

47 Теоремы Мореры и Вейерштрасса

Теорема (Морера)**.** Для того, чтобы непрерывная в односвязной области функция была голоморфна в этой области, необходимо и достаточно, чтобы интеграл от этой функции по $\forall$ замкнутому контуру (то есть по $\forall$ замкнутой спрямляемой кривой Жордана), лежащему в области, был равен 0.

Теорема (Вейерштрасса)**.** Равномерный предел последовательности голоморфных функция является голоморфной функцией, то есть если $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}(\mathfrak{D})$ и $f_n \rightrightarrows f$ внутри $\mathfrak{D}$, то $f \in \mathcal{H}(\mathfrak{D})$.

48 Ряд Тейлора голоморфной в круге функции

Теорема. Пусть $f \in \mathcal{H}(\mathfrak{D})$. Тогда $\forall z_0 \in \mathfrak{D}\ \exists r > 0$: при $|z - z_0| < r$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n.$$

49 Ряд Лорана голоморфной в кольце функции

Теорема. Если функция f голоморфна в кольце $r \subset |z - z_0| \subset R$, то в этом кольце она разлагается в ряд Лорана:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

с коэфициентами c_n, определяемыми формулами:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi - z_0 = \rho|} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi, \quad \forall \rho \in (r, R).$$

50 Правильная и главная части ряда Лорана в конечной точке и в бесконечно удалённой точке

Примечание (В конечной точке). Рассмотрим ряд Лорана:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

где z_0 – фиксированная точка комплексной плоскости, $c_n \in \mathbb{C}$.

$$\begin{array}{ll} \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n & \text{– правильная часть,} \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n} & \text{– главная часть.} \end{array}$$

Примечание (В бесконечно удаленной точке). Пусть функция $f(z)$ является голоморфной в окрестности бесконечно удаленной точки. Тогда функция $f\left(\frac{1}{t}\right)$ имеет разложение в окрестности $t = 0$:

$$f\left(\frac{1}{t}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{-n}}{t^n}.$$

Делая замену переменной $t = \frac{1}{z}$ и, полагая $c_n - b_{-n}$, получаем разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{z^n} + \sum_{n=1}^{\infty} b_{-n} z^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n,$$

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_{-n}}{z^n}$ – правильная часть,
$\sum_{n=1}^{\infty} c_n z_n$ – главная часть.

51 Определение вычета в конечной точке и в бесконечно удалённой

Определение. Если z_0 – изолированная точка функции f, то вычетом f относительно z_0 (в точке z_0) называется интеграл $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)dz$, где γ – произвольный контур, ограничивающий область $\mathfrak{D}$: f непрерывна в $\mathrm{d}\,\mathfrak{D} \setminus \{z_0\}$ и голоморфна в $\mathfrak{D} \setminus \{z_0\}$, то есть в качестве γ можно брать любую окрестность сколь угодно малого радиуса с центром в z_0.

Обозначение.

$$Resf\Big|_{z=z_0} := \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)dz.$$

Если особая точка является бесконечно удаленной точкой, то $\underset{\infty}{Resf} = -c - 1$.

52 Вормулы для вычисления вычета в полюсе k-го порядка в конечной точке и в бесконечно удалённой

1. Если $z_0 \in \mathbb{C}$ – простой полюс функции f, то

$$\underset{z_0}{Resf} = \lim_{z\to z_0}(z - z_0)f(z)$$

2. Если $z_0 \in \mathbb{C}$ – полюс порядка k функции f, то

$$\underset{z_0}{Resf} = \frac{1}{(k-1)!}\lim_{z\to z_0}\left((z - z_0)^k f(z)\right)^{(k-1)}.$$

3. Если $f(z) = \frac{\phi(z)}{\psi(z)}$, где $\phi(z_0) \neq 0,\ \psi(z_0) = 0$ и $\psi'(z_0) \neq 0$, то

$$\underset{z_0}{Resf} = \frac{\phi(z_0)}{\psi(z_0)}.$$

4. Если ∞ – полюс порядка k функции f, то

$$\underset{\infty}{Resf} = \frac{(-1)^k}{(k+1)!}\lim_{z\to\infty} z^{k+1} f^{(k+1)}(z).$$

5. Если $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = 0$, то $\underset{\infty}{Res} f = -\lim\limits_{z\to\infty} zf(z)$.

6. Если f ограничена в проколотой окрестности ∞, то есть ∞ является устранимой точкой, то

$$\underset{\infty}{Res} f = \lim_{z\to\infty} z^2 f'(z) = \lim_{z\to\infty} z\big(f(\infty) - f(z)\big),$$

где $f(\infty) \coloneqq \lim\limits_{z\to\infty} f(z)$.

53 Гармоническая функция

Определение. Определенная в односвязной области $\mathfrak{D} \subset \mathbb{R}^2$ функция $u(x, y)$ называется *гармонической функцией*, если $u \in C^2(\mathfrak{D})$ и

$$\triangle u \coloneqq \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \equiv 0,$$

$\triangle$ – оператор Лапласа.

54 Определения целой и мероморфной функций

Определение (Целая функция)**.** Голоморфная в $\mathbb{C}$ функция называется *целой функцией*.

Определение (Мероморфная функция)**.** Функция, голоморфная в области $\mathfrak{D}$ всюду, за исключением полюсов, называется *мероморфной* в этой области функцией.

55 Теорема Римана

Теорема. Любая односвязная область $\mathfrak{D}$, граница которой содержит более одной точки, конформно эквивалентна единичному кругу.