Комплексный Анализ

Основано на лекциях Мельникова Е.В.
Конспект написан Заблоцким Данилом

Весенний семестр 2024

Оглавление

Глава 1

Голоморфные функции

Лекция 1: Начало

от 15 фев 12:45

1.1 Комплексная плоскость

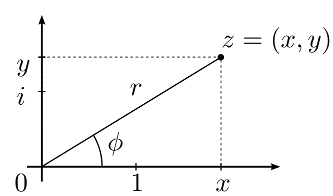
1.1.1 Комплексные числа

$\mathbb{R}^2 \coloneqq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$,

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) \coloneqq (x_1 + x_2, y_1 + y_2),$$
$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) \coloneqq (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

$$z = (x, y) = x + iy,\ x, y \in \mathbb{R}$$

$$(1,0) =: 1,$$
$$(0,1) =: i,$$
$$(0,0) =: 0$$



$$x =: \operatorname{Re} z$$
$$y =: \operatorname{Im} z$$

$$x = r \cdot \cos \phi$$
$$y = r \cdot \sin \phi$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} =: |z|,$$

$$\phi =: \arg z, \qquad \underbrace{0 \leqslant \arg z < 2\pi}_{\text{главное значение аргумента}}$$

$$\operatorname{Arg} z \coloneqq \arg z + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}, \qquad \overline{z} = x - iy$$

Формула Эйлера:	$e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi, \quad \forall \phi \in \mathbb{R}$
Тригонометрическая форма записи:	$z = \lvert z\rvert \cdot (\cos\arg z + i \sin\arg z)$
Показательная форма записи:	$z = \lvert z\rvert\, e^{i\arg z}$
Формула Муавра:	$z^n = r^n(\cos n\phi + i\sin n\phi)$
$e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy}$	$z^n = \lvert z\rvert^n\, e^{in\arg z}$
$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}\cdot e^{z_2}$	$z = re^{ir}, \quad z^n = z_0$

$$\sqrt[n]{z_0} = \sqrt[n]{|z_0|} \cdot e^{i\frac{\arg z_0 + 2\pi k}{n}}, \quad 0 \leqslant k \leqslant n-1.$$

Теорема 1. $\forall z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ справедливы равенства:

1. $z \cdot \overline{z} = |z|^2$
2. $\overline{(z_1 + z_2)} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
3. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
4. $\overline{\overline{z}} = z$
5. $\overline{z} = z \iff z \in \mathbb{R}$
6. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
7. $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$
8. $\big|\,|z_1| - |z_2|\,\big| \leqslant |z_1 - z_2|$
9. $\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 \pmod{2\pi}$
10. $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2 \pmod{2\pi}$

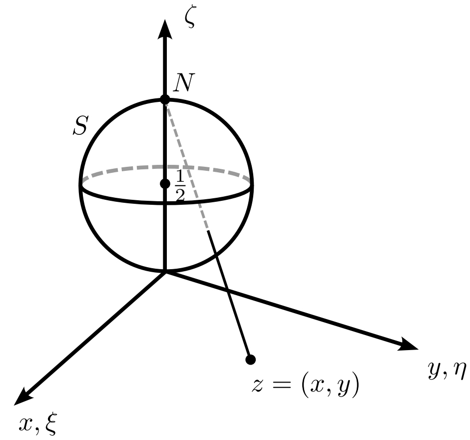


Рис. 1.1: Сфера Римана

$$\xi^2+\eta^2+\zeta-\zeta=0, \quad \begin{cases} \xi = \frac{x}{1+|z|^2} \\ \eta = \frac{y}{1+|z|^2} \\ \zeta = \frac{|z|^2}{1+|z|^2} \end{cases}.$$

$$P:\mathbb{C}\overset{\text{на}}{\to} S\setminus\{N\}, \quad P(z)=(\xi,\eta,\zeta).$$

$$\underbrace{A(x^2+y^2)+Bx+Cy+D=0,\ A,B,C,D\in\mathbb{R}}_{\text{общее уравнение окружности}}$$

$$\begin{aligned} \gamma &\quad \text{– окружность на } \mathbb{C}, \\ P(\gamma) &\quad \text{– окружность на } S. \end{aligned}$$

$$|z|^2=x^2+y^2=\frac{\zeta}{1-\zeta}, \quad \begin{cases} x=\frac{\xi}{1-\zeta} \\ y=\frac{\eta}{1-\zeta} \end{cases}.$$

$$A\zeta+B\xi+C\eta+D(1-\zeta)=0, \quad \begin{aligned} \overline{\mathbb{C}} &\coloneqq \mathbb{C}\cup\{\infty\} \\ P(\infty) &\coloneqq N \end{aligned}.$$

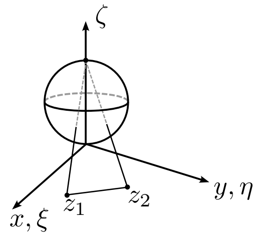
1.1.2 Топология комплексной плоскости

$$\alpha-\beta=\frac{12}{43}.$$

$M_1, M_2\in\mathbb{R}^3$,

$$\operatorname{dist}(M_1,M_2)\coloneqq\sqrt{(\xi_1-\xi_2)^2+(\eta_1-\eta_2)^2+(\zeta_1-\zeta_2)^2},$$

$$d(z_1, z_2) \coloneqq |z_1 - z_2|\,,\ z_1, z_2 \in \mathbb{C},$$



$$\rho(z_1, z_2) \coloneqq \operatorname{dist}\big(P(z_1), P(z_2)\big),$$

$$B_\varepsilon(z_0) \coloneqq \big\{z \in \mathbb{C} :\ |z - z_0| < \varepsilon\big\}, \qquad P : \mathbb{C} \overset{\text{на}}{\to} S \setminus \{N\}.$$

Определение 1 (Окрестность точки)**.** Множество называется *окрестностью точки*, если оно содержит некоторый шарик с центром в этой точке.

Обозначение.

$$O_z, \quad z \in \overline{\mathbb{C}}.$$

Лекция 2: Продолжение

от 22 фев 12:45

$$\forall z \in \mathbb{C}\ d(z;\infty) \coloneqq +\infty, \qquad \begin{aligned} d :&\quad \mathbb{C}^2 \to \mathbb{R} \\ d :&\quad \mathbb{C}^2 \to \overline{\mathbb{R}} \\ \rho :&\quad \overline{\mathbb{C}}^2 \to \mathbb{R}, \quad \rho(z;\infty) \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Свойство (Свойства окрестностей)**.** $\forall z \in \overline{\mathbb{C}}$:

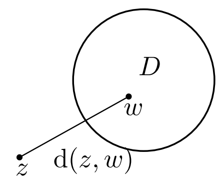
1. $\forall V \in O_z \quad z \in V$.
2. $\forall U, V \in O_z \quad U \cap V \in O_z$.
3. $\forall U \in O_z,\ \forall V \supset U \quad V \in O_z$.
4. $\forall V \in O_z,\ \exists U \in O_z :\ U \subset V\ \&\ \forall w \in U \quad U \in O_w$.

Определение 2 (Открытое множество)**.** Множество называется *открытым*, если оно является окрестностью каждой своей точки.

Определение 3 (Окрестность множества)**.** *Окрестностью множества* называется множество, являющееся окрестностью каждой точки исходного множества (V – окрестность множества A, если $\forall z \in A\ V \in O_z$).

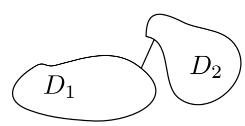
Определение 4. $D \subset \overline{\mathbb{C}},\ z \in \mathbb{C}$,

$$\operatorname{dist}(z, D) \coloneqq \inf_{w \in D} \mathrm{d}(z, w),$$



Определение 5. $D_1, D_2 \subset \overline{\mathbb{C}}$,

$$\operatorname{dist}(D_1, D_2) \coloneqq \inf_{z \in D_1,\ w \in D_2} \mathrm{d}(z, w),$$



Определение 6 (Внутренность)**.** Множество всех внутренних точек называется *внутренностью*.

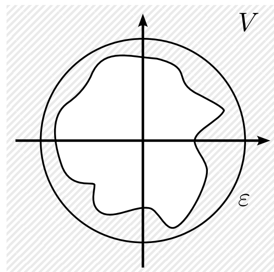
Обозначение.

$$\operatorname{int} D.$$

Определение 7 (Предельная точка множества)**.** Точка называется *предельной точкой множества*, если в любой ее окрестности есть точки множества, отличные от данной.

Замечание. Точка является предельной точкой множества на расширенной комплексной плоскости ($\overline{\mathbb{C}}$) $\iff$ $\forall$ ее окрестность содержит бесконечное число точек данного множества.

Определение 8 (Окрестность бесконечно удаленной точки)**.** Множество $V \subset \overline{\mathbb{C}}$ является *окрестностью бесконечно удаленной точки*, если $\exists \varepsilon > 0 : \left\{ z \in \overline{\mathbb{C}} : \ |z| > \varepsilon \right\} \subset V$.



Определение 9 (Точка прикосновения множества)**.** Точка $z \in \overline{\mathbb{C}}$ расширенной комплексной плоскости называется *точкой прикосновения множества* $D \subset \overline{\mathbb{C}}$, если пересечение $\forall V \in O_z \quad V \cap D \neq \varnothing$.

Обозначение.

$$\operatorname{cl} D - \textit{замыкание} \text{ (closure)}$$

Определение 10 (Замкнутое множество)**.** Множество называется *замкнутым*, если его дополнение открыто.

Обозначение.

$$\partial D$$

Определение 11 (Граничная точка)**.** Точка называется *граничной точкой множества*, если в любой ее окрестности есть как точки множества, так и точки его дополнения.

Обозначение. Множество всех замкнутых подмножеств в $\overline{\mathbb{C}}$:

$$\operatorname{Cl} \overline{\mathbb{C}} \text{ (closed)}$$

Определение 12 (Компактное множество)**.** Множество в $\overline{\mathbb{C}}$ называется *компактным*, если $\forall$ его открытое покрытие имеет конечное подпокрытие.

Обозначение.

$$v \text{ – покрытие множества } D, \text{ если } D \underset{V \in v}{\subset} UV,$$

Обозначение.

$$\mathcal{P}(\overline{\mathbb{C}}) \text{ – совокупность всех подмножеств } \overline{\mathbb{C}}.$$

Критерий 1 (Компактности)**.** Подмножество $\mathbb{C}$ компактно $\iff$ оно замкнуто и ограничено.

Примечание. Множество ограничено, если оно содержится в некотором шаре.

Замечание. $\overline{\mathbb{C}}$ – компактно.

Определение 13. Последовательность $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ сходится к $z \in \mathbb{C}$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} :\ \forall n \geqslant n_0$

$$|z_n - z| < \varepsilon.$$

$$\mathrm{d}(z_n, z) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \qquad z_n \to \infty, \text{ если } \lim_{n\to\infty} |z_n| = \pm\infty.$$

$$z = \lim_{n\to\infty} z_n, \qquad z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} z.$$

Замечание.

$$z_n \to z \text{ в } \mathbb{C} \iff \begin{cases} \operatorname{Re} z_n \to \operatorname{Re} z \\ \operatorname{Im} z_n \to \operatorname{Im} z \end{cases} \text{ в } \mathbb{R},$$

$$|z_n - z| = \sqrt{(\operatorname{Re} z_n - \operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z_n - \operatorname{Im} z)^2} \geqslant |\operatorname{Re} z_n - \operatorname{Re} z|\,,$$

$$\operatorname{Re}(z_1 \pm z_2) = \operatorname{Re} z_1 \pm \operatorname{Re} z_2.$$

Критерий 2 (Коши)**.** Последовательность $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ сходится $\iff$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} :\ \forall n, m \geqslant n_0$

$$|z_n - z_m| < \varepsilon.$$

Критерий 3 (Коши в $\overline{\mathbb{C}}$). Последовательность $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \overline{\mathbb{C}}$ сходится $\iff \forall\varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}:\ \forall n, m \geqslant n_0$

$$\rho(z_n, z_m) < \varepsilon,$$

$$z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} z \iff \rho(z_n, z) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Критерий 4 (Компактности (расширенный)). Подмножество $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ компактно $\iff \forall$ его последовательность имеет сходящуюся подпоследовательность: $D \subset \overline{\mathbb{C}}\ \forall\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset D\ \exists\{z_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}:$

$$z_{n_k} \to z \in D.$$

Пусть $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}:$

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} S_n.$$

Определение 14 (Числовой ряд). *Числовым рядом* называется формальная сумма членов.

Определение 15 (Абсолютно сходящийся числовой ряд). Числовой ряд называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|\,.$$

Критерий 5 (Коши (сходимости ряда)). $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ сходится $\iff \forall\varepsilon > 0\ \exists m \in \mathbb{N}:\ \forall n \geqslant m\ \forall k \in \mathbb{N}$

$$\underbrace{|z_{n+1} + z_{n+2} + \ldots + z_{n+k}|}_{|S_{n+k} - S_n|} < \varepsilon.$$

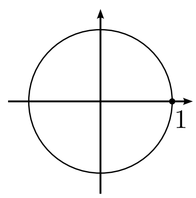
Следствие 1. Если ряд сходится, то его общий член стремится к 0.

Следствие 2. Каждый абсолютно сходящийся числовой ряд сходится.

1.1.3 Пути, кривые и области

Определение 16 (Путь)**.** Путем $\gamma : [a;b] \to \mathbb{C}$ называется непрерывное отображение $[a;b]$ в $\mathbb{C}$.

Пример. $\gamma(t) = e^{it}$,



$0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$

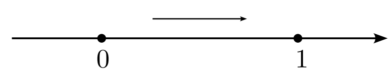
◇

Определение 17. $\gamma_1 : [a_1;b_1] \to \mathbb{C}$, $\gamma_2 : [a_2;b_2] \to \mathbb{C}$. $\gamma_1 \sim \gamma_2$, если $\exists$ возрастающая непрерывная функция $\phi : [a_1;b_1] \xrightarrow{\text{на}} [a_2;b_2]$:

$$\gamma_1(t) = \gamma_2\big(\phi(t)\big), \quad \forall t \in [a_1;b_1].$$

Пример.

$$\begin{array}{ll} \gamma_1(t) = t & 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ \gamma_2(t) = \sin t & 0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2} \\ \gamma_3(t) = \sin t & 0 \leqslant t \leqslant \pi \\ \gamma_4(t) = \cos t & 0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2} \end{array}$$



$\phi(t) = \arcsin t$,

$$\gamma_1(t) = \gamma_2\left(\phi(t)\right).$$

◇

Определение 18 (Жорданов путь)**.** Путь называется *жордановым*, если он является взаимно однозначной функцией.

Лемма 1. Для каждого жорданова пути $\exists \delta > 0$: для $\forall$ некольцевой точки пути окружность в этой точке с радиусом δ пересекает этот путь не более чем в двух точках.

Определение 19 (Кривая)**.** *Кривой* называется класс эквивалентных между собой путей.

Лекция 3: Продолжение

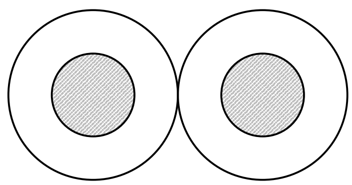
от 29 фев 12:45

Определение 20 (Связное множество)**.** $A \subset \overline{\mathbb{C}}$ называется *связным*, если $\nexists U, V \in Op\overline{\mathbb{C}} : \ U \cap A \neq \varnothing, \ U \cap V = \varnothing$.

Обозначение.

$$Op\overline{\mathbb{C}} \text{ – совокупность всех открытых множеств}$$

Пример. Несвязно:



◇

Определение 21 (Линейно связное множество)**.** Множество называется *линейно связным*, если любые две его точки можно соединить путем, значения которого лежат в этом множестве.

Замечание. В пространстве $\mathbb{R}^n$, и в частности $\overline{\mathbb{C}}$, любое открытое множество связно $\iff$ оно линейно связно.

Определение 22 (Область)**.** *Областью* в $\overline{\mathbb{C}}$ ($\mathbb{C}$) называется любое непустое открытое связное множество.

Определение 23 (Замкнутая область)**.** *Замкнутой областью* будем называть замыкание области.

1.2 Функции комплексного переменного

1.2.1 Структура функции комплексного переменного

$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$\operatorname{dom} f$ – область определения функции
$\operatorname{im} f$ – область значения функции

Определение 24 (Предел отображения). $D \subset \operatorname{dom} f,\ z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ – предельная точка D. Тогда $w_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ называется *пределом отображения* f,

$$w_0 \coloneqq \lim_{D \ni z \to z_0} f(z), \text{ если } \forall V \in O_{w_0}\ \exists U \in O_{z_0} :\ f(\mathring{U} \cap D) \subset V,$$

$$U \in O_{z_0}, \quad \mathring{U} = U \setminus \{z_0\}.$$

Примечание. В случае, когда $z_0, w_0 \in \mathbb{C}$ следует, что $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ \forall z \in D$

$$0 < |z - z_0| < \delta \implies \big|f(z) - w_0\big| < \varepsilon.$$

Определение 25 (Непрерывная функция в точке). Функция f называется *непрерывной в точке* $z_0 \in \mathbb{C}$, если:

1. $z_0 \in \operatorname{dom} f$.
2. $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ \forall z \in D$
$$0 < |z - z_0| < \delta \implies \big|f(z) - w_0\big| < \varepsilon.$$

Определение 26 (Непрерывная функция на множестве). Функция $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ непрерывна на $D \subset \mathbb{C}$, если

1. $D \subset \operatorname{dom} f$.
2. $\forall z_0 \in D\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall z \in D$
$$|z - z_0| < \delta \implies \big|f(z) - f(z_0)\big| < \varepsilon.$$

Примечание (Функция Дирихле).

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases},$$

непрерывна на $\mathbb{Q}$, непрерывна на $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Замечание. Если множество является открытым или совпадает с областью определения функции, то непрерывность функции на этом множестве равносильно ее непрерывности в каждой точке.

$$f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}(n \in \mathbb{N}), \quad D \coloneqq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{dom} f_n.$$

Определение 27. $A \subset D,\ f : A \to \mathbb{C},\ f_n \rightrightarrows f$ на A, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}:\ \forall z \in A\ \forall n \geqslant n_0$

$$\left|f_n(z) - f(z)\right| < \varepsilon.$$

$\Big(\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant n_0 \quad \sup\limits_{z\in A}\left|f_n(z) - f(z)\right| < \varepsilon,\ |z - z_0| < \delta \implies \left|f(z) - f(z_0)\right| < \varepsilon\Big).$

Теорема 2 (Вейерштрасса)**.** Если $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C(A),\ f_n \rightrightarrows f$, то $f \in C(A)$.

Определение 28 (Функциональный ряд)**.** *Функциональным рядом* называется формальная сумма членов последовательности функции.

Обозначение. $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$.

Определение 29 (Числовой ряд)**.** $\forall z \in D\ \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ называется *числовым рядом* $\big\{f_n(z)\big\}_{n\in\mathbb{N}}$.

$$S_n \coloneqq \sum_{k=1}^{n} f_k \text{ – частичная сумма.}$$

Теорема 3 (Признак Вейерштрасса)**.** $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ таков, что $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall z \in A\ |f_n| \leqslant c_n$, причем $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ равномерно абсолютно сходится на A.

Теорема 4 (Критерий Коши (равномерная сходимость))**.** $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ равномерно сходится на $A \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n, m \geqslant n_0$

$$\sup_{z\in A}\left|f_n(z) - f_n(z_0)\right| < \varepsilon.$$

Определение 30 (Линейная функция)**.** Функция $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ называется *линейной*, если $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}\ \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

$$f(\alpha z_1 + \beta z_2) = \alpha f(z_1) + \beta f(z_2).$$

Замечание. Функция $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ является линейной $\iff \exists a \in \mathbb{C} : \forall z \in \mathbb{C}$

$$f(z) = az.$$

1.2.2 Степенные ряды

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \text{ где } \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C},\ z, z_0 \in \mathbb{C}.$$

Теорема 5 (1-я теорема Абеля)**.** Если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ сходится в точке $\underset{\substack{\neq \\ z_0}}{z_1} \in \mathbb{C}$, то он абсолютно сходится при $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$.

А если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ расходится в точке $\underset{\substack{\neq \\ z_0}}{z_1} \in \mathbb{C}$, то он расходится и при $|z - z_0| > |z_1 - z_0|$.

Доказательство.

1. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z_1 - z_0)^n$ сходится $\implies \big|a_n (z_1 - z_0)^n\big| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$.

$$c \coloneqq \sup_{n \in \mathbb{N}} \big|a_n (z_1 - z_0)^n\big| < +\infty, \quad |z - z_0| < |z_1 - z_0|.$$

Рассмотрим

$$\sum_{n=0}^{\infty} \big|a_n (z - z_0)^n\big| = \sum_{n=0}^{\infty} \big|a_n (z_1 - z_0)^n\big| \cdot \left|\frac{z - z_0}{z_1 - z_0}\right|^n \leqslant c \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{z - z_0}{z_1 - z_0}\right|^n < +\infty.$$

2. **добавить**

□

Определение 31 (Радиус сходимости)**.** Элемент $R \in [0; +\infty]$ называется *радиусом сходимости* ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$, если при $|z - z_0| < R$ исходный ряд абсолютно сходится, а при $|z - z_0| > R$ исходный ряд расходится.

Теорема 6 (Коши-Адамара)**.** Для степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ положим $l \coloneqq \varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Тогда:

1. Если $l = 0$, то исходный ряд сходится $\forall z \in \mathbb{C}$.
2. Если $l = \infty$, то исходный ряд сходится только в точке z_0.
3. Если $l \in (0; +\infty)$, то при $|z-z_0| < \frac{1}{l}$, а при $|z-z_0| > \frac{1}{l}$ исходный ряд расходится.

Доказательство.

1. $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$,
$$z \in \mathbb{C},\ \sum_{n=0}^{\infty} \left|a_n(z-z_0)^n\right|.$$
$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|a_n(z-z_0)^n\right|} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \cdot |z-z_0| = 0 \implies$ ряд сходится.
2. $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$,
$$\exists \{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \quad \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} \to +\infty.$$
$\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} \cdot |z-z_0| \to +\infty \implies |a_{n_k}|$.
3. $|z-z_0| < \frac{1}{l} \implies l|z-z_0| < 1$.

   Дописать.

□

Лекция 4: Продолжение

от 7 мар 12:45

Следствие 3. Для любого $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ $R = \frac{1}{l}$, где $l \coloneqq \varlimsup \sqrt[n]{|a_n|}$.

Замечание. Если $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$, то этот предел равен R (радиусу сходимости).

Теорема 7 (О непрерывности степенного ряда)**.** Пусть R – радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$. Тогда $\forall r \in (0; R)$ равномерно абсолютно сходится при $|z-z_0| \leqslant r$.

Доказательство.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left|a_n(z-z_0)\right|^n \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \cdot r^n < +\infty,$$

исходный ряд сходится равномерно по признаку Вейерштрасса. □

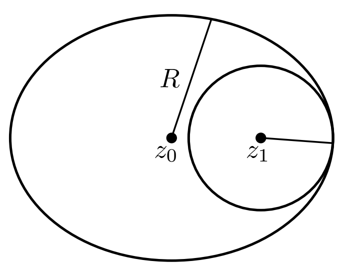
Следствие 4. Каждый степенной ряд непрерывен внутри своего круга сходимости.

Примечание. $\{z \in \mathbb{C} : \ |z - z_0| < R\}$ – круг сходимости.

Теорема 8. Пусть R – радиус сходимости $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$. Предположим, что $|z_1 - z_0| < R$. Тогда $\exists \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

при $|z - z_1| < \operatorname{dist}\big(z_1, \{w \in \mathbb{C} : \ |w - z_0| = R\}\big)$.

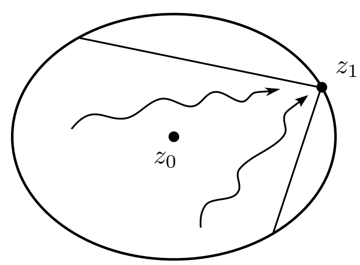


Замечание. Свойства ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n, \ |z-z_0| < R$ идентичны свойствам ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n, \ |w| < R$.

Теорема 9 (Вторая теорема Абеля)**.** Если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ сходится в точке $z_1 \neq z_0$ и $S(z)$ – его сумма при $|z-z_0| < |z_1 - z_0|$, то

$$\lim_{z \to z_0} S(z) = S(z_1) \coloneqq \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z_1 - z_0)^n$$

при стремлении z к z_1 по любому пути, заключенному между двумя хордами к окружности $|z-z_0| = |z_1 - z_0|$, исходящими из точки z_1.



$$[z_0, z_1) \ni z \to z_1, \quad z - z_0 =: (z_1 - z_0)t, \ 0 \leqslant t < 1.$$

$$e^z \coloneqq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!},$$

$$\begin{matrix} \sin z \coloneqq \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \\ \cos z \coloneqq \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \end{matrix} \qquad \forall z \in \mathbb{C} \ e^{iz} = \cos z + i \sin z.$$

Теорема 10 (Единственность)**.** Если ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_n z^n$ и $\sum_{k=0}^{\infty} b_n z^n$ сходятся в круге $|z| < R \neq 0$ и в точках ненулевой плоскости $\{z_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, лежащей в этом круге и сходящейся к нулю, суммы этих рядов совпадают, то $\forall n \in \overline{\mathbb{N}} a_n = b_n$.

Доказательство.

$$\forall k \in \mathbb{N} \ \sum_{n=0}^{\infty} a_n z_k^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z_k^n, \ z_k \xrightarrow[k \to \infty]{} 0 \implies a_0 = b_0,$$

$$\forall k \in \mathbb{N} \ \sum_{n=1}^{\infty} a_n z_k^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z_k^{n-1}, \ z_k \xrightarrow[k \to \infty]{0} \implies a_1 = b_1,$$

$$\vdots$$

□

1.2.3 Дифференцируемые и конформные отображения

Определение 32 (Дифференцируемое отображение)**.** Отображение $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, определенное в некоторой окрестности точки $z_0 \in \mathbb{C}$, называется *дифференцируемым* в этой точке, если $\exists a \in \mathbb{C} : \ \forall z$ достаточно близких к z_0 справедливо равенство:

$$f(z) - f(z_0) = a \cdot (z - z_0) + o(z - z_0).$$

Замечание. Из определния вытекает, что дифференциемость функции в точке равносильна существованию $\lim\limits_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} \in \mathbb{C}$.

Определение 33 (Голоморфная функция)**.** Функция называется *голоморфной* в точке, если она моногенна в некоторой ее окрестности, то есть она ???.

Определение 34 (Регулярная функция)**.** Функция называется *регулярной* в точке, если она имеет в этой точке конечную производную, отличную от 0.

Замечание. $f(z) = f(x+iy) = \underset{\operatorname{Re} f}{\underset{\parallel}{u(x,y)}} + i\underset{\operatorname{Im} f}{\underset{\parallel}{v(x,y)}}$,

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} =$$

$$= \lim_{\triangle x \to 0} \frac{u(x_0+, y_0) + iv(x_0 + \triangle x, y_0) - u(x_0, y_0 - iv(x_0, y_0))}{\triangle x} =$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0),$$

$$z = x_0 + \triangle x + iy_0.$$

Пример. $f(z) = f(x+iy) = x + 2iy$,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 \neq \frac{\partial v}{\partial y} = 2.$$

◇

Теорема 11. Если вещественная и мнимая части функции f дифференцируемы в точке (x_0, y_0) и в этой точке выполнены условия Коши-Римана, то f монотонна в $z_0 = x_0 + iy_0$.

Замечание. Предположим, что f дифференцируема в точке z_0 и $f'(z_0) \neq 0$ (другими словами, f регулярна в точке z_0)

$$\triangle w = f(z) - f(z_0), \ \triangle z = z - z_0,$$

$$\lim_{\triangle z\to 0}\frac{\triangle w}{\triangle z}=f'(z_0)\implies \lim_{\triangle z\to 0}\left|\frac{\triangle w}{\triangle z}\right|=\left|f'(z_0)\right|\neq 0,$$

$$\left|\frac{\triangle w}{\triangle z}\right|\approx\left|f'(z_0)\right|.$$

Это свойство называется *постоянством искажения масштаба.*

$$\triangle w\approx f'(z_0)\cdot\triangle z,\quad \arg\triangle w=\arg f'(z_0)+\arg\triangle z.$$

Определение 35 (Конфорное отображение)**.** $f : D \to \mathbb{C}$ называется *конформным отображением*, если оно является гомеоморфизмом и оно конформно в каждой точке области D, то есть в каждой точки области D сохраняется постоянство изменения масштаба.

Определение 36 (Голоморфная функция)**.** Функция называется *голоморфной в области*, если она моногенна в каждой точке этой области.

Определение 37 (Одноместная функция)**.** Если комплексная функция взаимнооднозначна в некоторой области, то она называется *одноместной в этой области.*

Если f определена в D $\forall z_1, z_2 \in D$ из $f(z_1) = f(z_2) \implies z_1 = z_2$.

Теорема 12. Каждое конфорное в области отображение гомеоморфно и ???

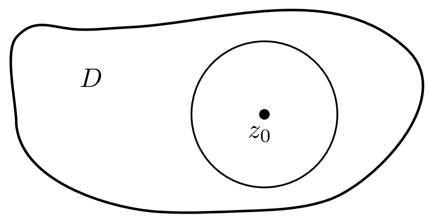
Теорема 13. Каждое одноместное гомеоморфное и регулярное отображение является конфорным отображением в этой области.

Теорема 14 (О голоморфной сумме степенного ряда)**.** Пусть ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ сходится в круге $|z| < R \neq 0$ и $S(z)$ – его сумма в этом круге. Тогда S голоморфна при $|z| < R$ и $S'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ при $|z| < R$.

Следствие 5. Сумма каждого степенного ряда в круге его сходимости бесконечно дифференцируема.

Определение 38 (Аналитическая функция)**.** Функция называется *аналитической* в области, если в некоторой окружности каждой точки этой области она раскладывается в степенной ряд,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad |z - z_0| < r, \quad \{a_n\}_{n \in \overline{\mathbb{N}}} \subset \mathbb{C},$$



Следствие 6. Каждая аналитическая функция бесконечно дифференцируема.

Замечание. Каждая голоморфная в области функция является аналитической.

Определение 39 (Антикофорное отображение)**.** Отображение называется *антиконформным* или конформным отображением второго рода в области, если в каждой точке этой области имеет место постоянство искажения масштаба и ... квасиконсерватсум углов.

Определение 40 (Антианалитическое отображение)**.** Отображение называется *антианалитическим* в области, если его сопряженное аналитично в этой области.

Теорема 15. u и v – вещественная и мнимая части комплексного числа $f = u+iv$. Если u и v непрерывно дифференцируемы в этой области и в каждой точке этой области для функции f имеет место консерватизм, то функция f голоморфна и регулярна в этой области.

Теорема 16. Если функции u, v непрерывно дифференцируемы в области и в этой области функция f обладает свойством постоянства искажения масштабов, то f голоморфна или атиголоморфна в этой области.

Замечание. Функция антиголоморфна, если голоморфны ее отображения.

Определение 41 (Голоморфная в бесконечно удаленной точке функция)**.** Говорят, что функция f *голоморфна в бесконечно удаленной точке*, если функция $g(z) \coloneqq f\left(\frac{1}{z}\right)$ голоморфна.

1.2.4 Дробно-линейные отображения

Определение 42 (Дробно-линейное отображение)**.** *Дробно-линейным отображением* называется функция вида

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}.$$

Если выполняется $ad - bc \neq 0$, то дробно-линейное отображение называется *невырожденным*.

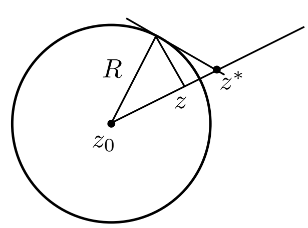
Пример. $f\left(-\frac{d}{c}\right) \coloneqq \infty, \quad f(\infty) \coloneqq \frac{d}{c}.$ ◇

Теорема 17.

1. Каждое дробно-линейное отображение является гомеоморфизмом $\overline{\mathbb{C}}$ на $\overline{\mathbb{C}}$.
2. Каждая дробно-линейная функция однозначно определяется своими значениями в трех различных точках.
3. Любое двойное отношение сохраняется при дробно-линейном отображении, если f – дробно-линейная функция, то $\forall$ различных z_1, z_2, z_3, z_4
$$\frac{z_3 - z - 1}{z_3 - z_2} : \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2} = \frac{f(z_3) - f(z_1)}{f(z_3) - f(z_2)} : \frac{f(z_4) - f(z_1)}{f(z_4) - f(z_2)}.$$
4. Суперпозиция дробно-линейных функций является дробно-линейной функцией.
5. Определяя произведение двух дробно-линейных функций как их суперпозицию, получаем, что множество всех дробно-линейных функций образует группу (M).

Определение 43 (Симметричная точка)**.** $z^* \in \mathbb{C}$ называется *симметричной точкой* z из круга $|\xi - z_0| \leqslant R$, если:

1. $\arg(z^* - z_0) = \arg(z - z_0)$.
2. $|z^* - z_0| \cdot |z - z_0| = R^2$.



$$\frac{R}{|z - z_0|} = \frac{|z^* - z_0|}{R}.$$

Формула для симметричной точки: $z^* = \frac{R^2}{\overline{z} - \overline{z_0}} + z_0$.

Определение 44 (Отображение симметрии). *Отображением симметрии* мы называем сопоставление каких-то симметричных им относительно какой-то окрестности.

Теорема 18. Каждая дробно-линейная функция является суперпозицией четного числа симметрий относительно окружности или прямой.

Определение 45 (Общее уравнение окружности).

$$A(x^2+y^2)+bx+b_1y+c=0,$$

$$B \coloneqq \frac{b+ib_1}{2}, \quad Az\overline{z}+\overline{B}z+B\overline{z}+c=0.$$

Теорема 19. При $\forall$ дробно-линейном отображении окрестность переходит в окружность.

Теорема 20. Если $ad-bc\neq 0$, то дробно-линейная функция $f(z)=\frac{az+b}{cz+d}$ во всех точках $z\in\mathbb{C}\setminus\left\{-\frac{d}{c}\right\}$ голоморфна и регулярна.

Теорема 21. Каждый дробно-линейный автоморфизм верхней полуплоскости представим в виде

$$f(z)=\frac{az+b}{cz+d},$$

где $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ и $ad-bc>0$.

$\forall$ отображение такого вида является отображением верхней полуплоскости на себя (то есть, ее автоморфизмом).

Теорема 22. Каждый дробно-линейный изоморфизм верхней полуплоскости на единичном круге можно представить в виде

$$f(z)=e^{i\theta}\frac{z-a}{z-\overline{a}},$$

где $\theta\in\mathbb{R},\ \operatorname{Im}a>0$.

$\forall$ отображение такого вида является изоморфизмом верхней полуплоскости на единичном круге.

Теорема 23. Каждый дробно-линейный автоморфизм единичного круга на себя можно представить в виде

$$f(z) = e^{i\theta}\frac{z-a}{1-\overline{a}z},$$

где $\theta \in \mathbb{R},\ |a| < 1.$

$\forall$ отображение такого вида является автоморфизмом единичного круга.

1.2.5 Элементарные функции

$$z^n (n \in \mathbb{N}),\ e^z,\ \sin z,\ \cos z,$$

$$\begin{array}{ll} \tan z := \frac{\sin z}{\cos z}, & \cot z := \frac{\cos z}{\sin z}, \\ \operatorname{ch} z := \frac{e^z + e^{-z}}{2}, & \operatorname{sh} z := \frac{e^z - e^{-z}}{2}. \end{array}$$

Примечание (Функция Жуковского).

$$\begin{array}{ll} w = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}), & w(0) := \infty, \\ w = z + \sqrt{z^2 - 1}, & w(\infty) := \infty. \end{array}$$

$$z_1 \cdot z_2 = 1.$$

Областью одноместности функции Жуковского является точки, не уд. $z_1 \cdot z_2 = 1$, в частности единичный круг, его внешность, верхняя и нижняя полуплоскости.

Функция Жуковского является конфорным отображением $\forall$ области, не содержащих точки ± 1.

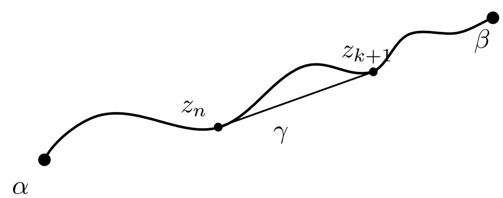
Лекция 5: Продолжение

от 14 мар 12:45

1.3 Теория интеграла Коши

1.3.1 Определения и основные свойства интеграла Коши

Определение 46 (Разбиение кривой Жордана)**.** Пусть γ – кривая Жордана, $\gamma \in \mathbb{C}$ с концами $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.



Разбиением кривой Жордана назовем $\sigma \coloneqq \{z_0, z_1, \ldots, z_n, \xi_0, \ldots \xi_{n-1}\}$, где $n \in \mathbb{N},\ z_0 = \alpha,\ z_n = \beta,\ z_{k+1} \notin \overbrace{z_0 z_k}\ \forall k \in \overline{0, n-1},\ \zeta_k \in \overbrace{z_k, z_{k+1}}$

$$\triangle z_k \coloneqq z_{k+1} - z_k,$$

$$\mathrm{d}(\sigma) \coloneqq \max_{0 \leqslant k < n-1} |\triangle z_k| \text{ – диаметр разбиения } \sigma.$$

Определение 47. Если $f : \gamma \to \mathbb{C},\ \sigma$ – интегральная сумма, то

$$S_\sigma(f) \coloneqq \sum_{k=1}^{n-1} f(S_k) \underbrace{(z_{k+1} - z_n)}_{\triangle z_k}.$$

Определение 48. $\prod(\gamma)$ – множество всех разбиений кривой γ,

$$\Phi : \prod(\gamma) \to \mathbb{C}.$$

Будем говорить, что $\exists \lim\limits_{d(\sigma)\to 0} \Phi(v) = w \in \mathbb{C}$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ \forall \sigma \in \prod(\gamma)\ \ \mathrm{d}(\sigma) < \delta \implies \big|\Phi(\sigma) - w\big| < \varepsilon$.

Определение 49 (Интеграл Коши)**.** Если $f : \gamma \to \mathbb{C}$ и $\exists \lim\limits_{\mathrm{d}(\sigma)\to 0} S_\sigma(f) \in \mathbb{C}$, то

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}\,z \coloneqq \lim_{\mathrm{d}(\sigma)\to 0} S_\sigma(f)$$

называется *интегралом Коши* от функции f по кривой γ.

Теорема 24. Если f непрерывна на спрямляемой кривой Жордана γ, то $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}\,z$ существует (то есть является элементом $\mathbb{C}$).

Доказательство. $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$,

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}\,z = \int_\gamma \big(u(x,y) + iv(x,y)\big)\,\mathrm{d}(x+iy) =$$
$$= \int_\gamma u\,\mathrm{d}\,x - v\,\mathrm{d}\,y + \int_\gamma v\,\mathrm{d}\,x + u\,\mathrm{d}\,y \in \mathbb{C}.$$

□

1.3.2 Интегральная теорема Коши

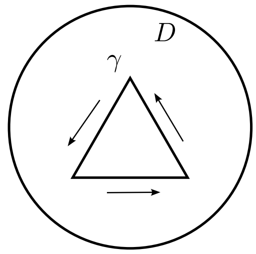
Лемма 2 (Гауса)**.** Если функция f непрерывна в области D, то для любой спрямляемой кривой Жордана $\gamma \subset D$, для любого $\varepsilon > 0$ существует вписанная в γ ломанная P такая, что

$$\left| \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}\,z - \int_P f(z)\,\mathrm{d}\,z \right| < \varepsilon.$$

Теорема 25 (Интегральная теорема Коши)**.** Пусть D – односвязная область в $\mathbb{C}$, функция f голоморфна в D. Тогда для любой замкнутой спрямляемой кривой Жордана γ

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}\,z = 0.$$

Доказательство. Пусть γ – $\triangle$ в D.



Докажем, что интеграл по этому треугольнику равен нулю. Допустим противное:

$$\left|\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}\,z\right| =: M \neq 0.$$

$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \quad \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}\,z = \sum_{k=1}^4 \int_{\gamma_n} f(z)\,\mathrm{d}\,z,$

$$\left|\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}\,z\right| \leqslant \sum_{k=1}^n \left|\int_{\gamma k} f(z)\,\mathrm{d}\,z\right|,$$

$$\overline{\triangle_0} \coloneqq \gamma, \quad \overline{\triangle_1} \coloneqq \gamma_i : \left|\int_{\gamma_i} f(z)\,\mathrm{d}\,z\right| \geqslant \frac{M}{4},$$

$$\exists \overline{\triangle_2} : \left|\int_{\overline{\triangle_2}} f(z) dz\right| \geqslant \frac{M}{4^2}.$$

Продолжая этот процесс, мы получм последовательность $\{\overline{\triangle_k}\}$:

$$\left|\int_{\overline{\triangle_k}} f(z)\,\mathrm{d}\,z\right| \geqslant \frac{M}{4^k},$$

$$D(\overline{\triangle_{k+1}}) \subset D(\overline{\triangle_k}).$$

То есть можем считать эту последовательность $\{\overline{\triangle_k}\}$ как последовательность вложенных множеств $\implies \exists z_0 \in \bigcap\limits_{k\in\mathbb{N}} D(\overline{\triangle_k}) \neq \varnothing$.

????????

В силу произвольности ε получаем, что $M = 0$,

$$\left|\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}\,z - \int_P f(z)\,\mathrm{d}\,z\right| < \varepsilon.$$

$\square$

Теорема 26 (Обобщенная интегральная теорема Коши)**.** Если функция f голоморфна в односвязной области D, ограниченной замкнутой спрямляемой кривой Жордана γ и f непрерывна вплоть до границы, то есть $\forall z_0 \in \gamma$

$$\lim_{D \ni z \to z_0} f(z) = f(z_0) \implies \int_\gamma f(z) \,\mathrm{d}\, z = 0.$$

Следствие 7. Если область D ограничена конечным числом замкнутых спрямляемых кривых Жордана. Если f голоморфна в этой области ???

Следствие 8. Утверждение обобщенной теоремы остается в силе, если условие голоморфности функции f в области нарушается в конечном количестве точек $z_1, \dots z_n \in D$, в которых функция ведет себя так:

$$\lim_{\exists \to z_k} (z - z_k) f(z) = 0 \quad (0 \leqslant k \leqslant n).$$

1.3.3 Интегральная формула Коши, интеграл типа Коши

Теорема 27 (Интегральная формула Коши)**.** Если функция f голоморфна в односвязной области D, ограничена замкнутой спрямляемой кривой Жордана γ, непрерывна вплоть до границы, то

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} \,\mathrm{d}\, z = \begin{cases} f(z_0), \text{ если } z_0 \in D \\ 0, \text{ если } z_0 \notin \operatorname{cl} D \end{cases}$$

Определение 50 (Интеграл типа Коши)**.** Пусть односвязная область D ограничена замкнутой спрямляемой кривой Жордана γ, а функция f непрерывна на γ. Положим

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z} \,\mathrm{d}\, \xi, \ z \in D.$$

Эта функция F называется *интегралом типа Коши.*

Теорема 28 (Лиувилль)**.** Если функция f голоморфна в $\mathbb{C}$ и ограничена, то $f \equiv const$.

Доказательство. $R > 0,\ z \in \mathbb{C}$

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi - z| = R} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} \,\mathrm{d}\,\xi.$$

Пусть $M > 0 : \sup\limits_{z \in \mathbb{C}} \big|f(z)\big| \leqslant M \implies$

$$\big|f'(z)\big| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{|\xi - z| = R} \frac{|f(\xi)|}{|\xi - z|^2} \,|\mathrm{d}\,\xi| \leqslant \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{M}{R^2} \cdot 2\pi R = \frac{M}{R} \xrightarrow[R \to +\infty]{} 0 \implies$$

$\implies f'(z) = 0\ (\forall z \in \mathbb{C}).$

$$u_x^{'} = u_y^{'} = v_x^{'} = v_y^{'} = 0 \implies u = const,\ v = const \implies f = const.$$

□

1.3.4 Неопределенный интеграл теорем Мореры и Вейерштрасса

Теорема 29. Непрерывная в односвязной области D функция f голоморфна в этой области $\iff \forall z_0, z \in D\ \int_{z_0}^{z} f(\xi) \,\mathrm{d}\,\xi$ не зависит от пути интегрирования, соединяющего области D точек z_0, z.

Определение 51 (Первообразная голоморфной в области)**.** *Первообразной голоморфной в области* D функции f называется голоморфная в D функция $F :\ \forall z \in D\ F'(z) = f(z)$.

Замечание. Любые две первообразные голоморфной функции отличаются только на константу.

Определение 52 (Неопределенный интеграл)**.** Совокупность всех первообразных голоморфной функции называется ее *неопределенным интегралом.*

Обозначение. $\int f(z) \,\mathrm{d}\,z = F(z) + c.$

Замечание. Если функция f голоморфна в области D и F – ее первообразная, то $\forall z_0, z \in D$

$$\int_{z_0}^{z} f(\xi) \,\mathrm{d}\,\xi = F(z) - F(z_0).$$

Теорема 30 (Морера)**.** Для того, чтобы непрерывная в односвязной области функция была голоморфна в этой области, необходимо и достаточно, чтобы интеграл от этой функции по любому замкнутому контуру, лежащему в области, был равен 0.

Замечание. В сторону достаточности условия теоремы Мореры можно ослабить. Если функция непрерывна в односвязной области и $\int_{\triangle} f(z)\,\mathrm{d}\,z = 0$, то функция голоморфна $\forall \triangle \Subset D$.

Определение 53. Пусть $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C(D)$. Говорят, что эта последовательность сходится равномерно к f внутри D, если $\forall K \in D \Subset D$ $f_n \rightrightarrows f$ на K, то есть $\forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N}: \ \forall n \geqslant n_0$

$$\sup_{I\in K}\big|f_n(z) - f(z)\big| < \varepsilon.$$

Теорема 31 (Вейерштрасса)**.** Равномерный предел последовательности голоморфных функций является голоморфной функцией, то есть если $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}(D)$ и $f_n \rightrightarrows f$ внутри D, то $f \in \mathcal{H}(D)$.

Определение 54 (Корень многочлена)**.** *Корнем многочлена* $P(z) \coloneqq a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0$, где $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$, называется число $z_0 \in \mathbb{C}: \ P(z_0) = 0$.

Теорема 32 (Безу)**.** Если z_0 – корень многочлена P, то $\exists$ многочлен $Q: \ P(z) = (z - z_0)\cdot Q(z_0)$.

Теорема 33 (Основная теорема алгебры)**.** Каждый многочлен с комплексными коэффициентами в $\deg \geqslant 1$ имеет к.б. один комплексный корень.

Следствие 9. Каждый многочлен n-ой степени имеет n корней.

Лекция 6: Продолжение

от 21 мар 12:45

1.4 Ряды Тейлора и Лорана. Элементы теории вычетов

1.4.1 Разложение голоморфной функции в ряд Тейлора

Теорема 34. Пусть $f \in \mathcal{H}(D)$. Тогда $\forall z_0 \in D\ \exists r > 0$: при $|z - z_0| < r$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_n)^n.$$

Следствие 10. $\mathcal{H}(D) = \mathcal{A}(D)$.

Теорема 35. Пусть f голоморфна в $B_r(z_0)$ $\forall z \in B_r(z_0)$ $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(z - z_0)^n$.

Тогда $\forall n \in \overline{\mathbb{N}}$

$$C_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi - z_0| = \rho} \frac{f(z)}{(\xi - z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}\,\xi \quad \forall \rho \in (0, r).$$

То есть любой степенной ряд является рядом Тейлора для своей суммы.

Доказательство. Радиус сходимости $\geqslant r$, $\rho \in (0; r)$.

$|z - z_0| = \rho \implies$ ряд сходится, рассмотрим:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi - z_0| = \rho} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{k+1}}\,\mathrm{d}\,\xi = \\ = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi - z_0| = \rho} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} C_n(\xi - z_0)^n}{(\xi - z_0)^{k+1}}\,\mathrm{d}\,\xi = \\ = -\frac{k!}{2\pi i}\cdot C_k \cdot 2\pi i = C_n \cdot k!,$$

$$C_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}.$$

□

Теорема 36 (Неравенство Коши)**.** Пусть f голоморфна в D и $B_r[z_0] \subset D$, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-z_0)^n$.

Пусть $M \coloneqq \sup\limits_{|z-z_0| \leqslant r} \left|f(z)\right|$. Тогда $\forall n \in \overline{\mathbb{N}}$ $|C_n| \leqslant \frac{M}{r^n}$.

Определение 55 (Предельная точка)**.** Точка называется *предельной точкой множества*, если в любой ее окрестности есть точки множества, отличные от данной.

Следствие 11. Любые две аналитические в области функции, совпадающие на множестве, имеющем в этом множестве предельную точку, тождественно равны.

1.4.2 Ряды Лорана

Определение 56 (Ряд Лорана)**.** *Рядом Лорана* называется степенной ряд вида $\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n(z-z_0)^n$. Ряд Лорана раскладывается на сумму двух рядов:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n(z-z_0)^n \coloneqq \sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} C_{-n}(z-z_0)^{-n}.$$

Ряд Лорана сходится $\iff$ сходятся обе его составляющие.

Область сходимости ряда Лорана: $0 \leqslant r < |z-z_0| < R \leqslant +\infty$.

Теорема 37 (О ряде Лорана)**.** Если функция f голоморфна в кольце $r < |z-z_0| < R$, то в этом кольце она разлагается в ряд Лорана.

$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n(z-z_0)^n$ с коэфициентами C_n, определяемыми формулами:

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi - z_0| = \rho} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} \,\mathrm{d}\,\xi \quad \forall \rho \in (r, R).$$

1.4.3 Классификация изолированных особых точек

Определение 57 (Правильная точка)**.** Точка $z_0 \in \operatorname{dom} f$ называется *правильной* точкой функции f, если f определена в некоторой области и непрерывна в самой функции.

Определение 58 (Особая точка)**.** *Особой* точкой функции называется предельная точка ее области определения, этой области не принадлежащая.

Определение 59 (Изолированная особая точка)**.** Особая точка называется *изолированной* особой точкой, если в некоторой ее окрестности других особых точек нет.

Замечание. Особая точка функции называется изолированной, если в проколотой окрестности этой точки функция голоморфна.

Пример.

$$f(z) = \frac{1}{\sin\frac{1}{z}},$$

$z_0 = 0$ – особая точка,
$\sin\frac{1}{z} = 0 \implies \frac{1}{z} = \pi k,\ k \in Z,$
$z_k = \frac{1}{\pi k},\ k \in \mathbb{Z}$ – особые точки,

$$\frac{1}{\pi(k+1)} < \frac{1}{\pi k} < \frac{1}{\pi(k-1)}.$$

◇

Теорема 38 (О путях и полюсах)**.** Изолированная особая точка z_0 функции f является полюсом порядка m функции $f \iff$ она является путем m-го порядка функции $\rho(z) = \frac{1}{f(x)}$.

Доказательство. Самостоятельно. □

Теорема 39 (Сохоцкий)**.** Изолированная особая точка функции является существенно особой точкой $\iff$ в любой ее окрестности функция принимает значения сколь угодно близкие к любому числу $a \in \overline{\mathbb{C}}$.

Определение 60 (A-точка)**.** Пусть $A \in \mathbb{C}$, точка z называется *A-точкой* функции f, если $f(z) = A$.

Теорема 40 (Большая теорема Пикара)**.** В окрестности существенно особой точки z_0 голоморфной функции f $\forall A \in \mathbb{C}$, за исключением быть может одного, существует последовательность A-точек функции f, сходящаяся к точке z_0.

1.4.4 Вычеты

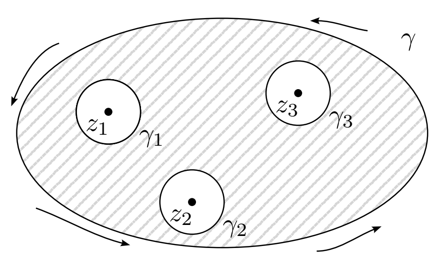
Определение 61 (Вычет функции относительно точки). Если z_0 – изолированная особая точка функции f, то *вычетом* f относительно z_0 называется интеграл $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}\,z$, где γ – произволный контур, ограничивающий область D: f непрерывна в $\operatorname{cl} D \setminus \{z_0\}$ и голоморфна в $D \setminus \{z_0\}$, то есть в качестве γ можно брать любую окрестность сколь угодно малого радиуса с центром в точке z_0.

Обозначение. $\operatorname{Res} f\big|_{z=z_0} := \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}\,z$.

Теорема 41 (Основная теорема теории вычетов). Пусть γ – замкнутый контур, ограничивающий односвязную область D, функция f непрерывна на $\operatorname{cl} D = D \cup \gamma$ и голоморфна внутри D, за исключением конечного числа точек. Тогда:

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}\,z = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} \operatorname*{Res}_{z_k} f.$$

Доказательство. $m = 3$,



$$\Gamma = \gamma \cup \gamma_1^- \cup \gamma_2^- \cup \gamma_3^-,$$

$$\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}\,z = 0 = \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}\,z - \int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}\,z - \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}\,z - \int_{\gamma_3} f(z)\,\mathrm{d}\,z.$$

□

Теорема 42 (О сумме вычетов)**.** Если функция голоморфна в $\overline{\mathbb{C}}$, за исключением конечного числа изолированных о.т., то

$$\sum_{k=0}^{m} \operatorname*{Res}_{z_k} f = 0.$$

1.4.5 Вычисление интегралов

Определение 62. Главным значнием по Коши интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ называется

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\,\mathrm{d}\,x =: Vp \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}\,x.$$

Замечание. Если несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}\,x$ сходится, то его значение совпадает с его главным значением по Коши, Обратно неверно.

Лемма 3. Пусть

1. Для некоторого $R_0 > 0$ функция f непрерывна при $|z| > R_0$ и $\operatorname{Im} z \geqslant 0$.
2. $\lim\limits_{R\to\infty} \sup\limits_{z\in\gamma_R} \left|zf(z)\right| = 0$.

Тогда $\lim\limits_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}\,z = 0$.

Лемма 4 (Жордана)**.** Пусть $\alpha > 0$,

1. Для некоторого $R_0 > 0$ функция f непрерывна при $|z| > R_0$ и $\operatorname{Im} z \geqslant 0$.
2. $\lim\limits_{R\to\infty} \sup\limits_{z\in\gamma_A} \left|f(z)\right| = 0$.

Тогда $\lim\limits_{R\to\infty} \int_{\gamma R} e^{i\alpha z} f(z)\,\mathrm{d}\,z = 0$.

1.4.6 Гармонические функции

Определение 63 (Гармоническая функция)**.** Определенная в односвязной области $D \subset \mathbb{R}^2$ функция $u(x, y)$ называется *гармонической функцией*, если $u \in C^2(D)$ и

$$\triangle u \coloneqq \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \equiv 0,$$

где $\triangle$ – оператор Лапласа.

Теорема 43. Если функция f голоморфна в односвязной области $D \subset \mathbb{C}$, то ее вещественная и мнимая части являются гармоническими функциями в этой области.

Доказательство.

$$f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \ \frac{partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\frac{partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial v}{\partial x}\right) = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}.$$

Получаем, что смеш. производные непрерывны, зачит они равны $\implies \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \equiv 0 \implies$ вещественная и мнимая части являются гармоническими. □

1.4.7 Целые и мероморфные функции

Определение 64 (Целая функция)**.** Голоморфная в $\mathbb{C}$ функция называется *целой функцией*. Целая функция называется *трансцендентной*, если бесконечность является ее существенно о.т.

Определение 65 (Мероморфная функция)**.** Функция, голоморфная в области D всюду, за исключением полюсов, называется *мероморфной* в этой области функцией.

Теорема 44 (О мероморфной функции)**.** Если ∞ является устранимой о.т. мероморфной функции, то данная функция является частным двух многочленов, то есть является рациональной функцией.

Доказательство. ∞ – изолированная о.т. (в силу условия), $z_1, \ldots, z_n$ – конечное число оптимальных точек.

$$f(z) = h(z) + \sum_{k=1}^{m} f_k\left(\frac{1}{z - z_0}\right),$$

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = C_0, \quad \lim_{z\to\infty} h(z) = C_0$$

$\implies h = const$ (по теореме Лиувиля) $\implies f(z) = C_0 + \sum_{k=1}^{m} f_k\left(\frac{1}{z-z_k}\right) = \frac{P(z)}{Q(z)}$. □

Литература

[1] Шабат – «Введение в комплексный анализ, 1976» (том 1)

[2] Привалов – «Введение в ТФКП, 1967»

[3] Бицадзе – «Основы теории аналитических функций комплексного переменного, 1984»

[4] Волковыский, Лунц, Араманович – «Сборник задач по ТФКП», 1975»

[5] Гилев В.М. – «Основы комплексного анализа. Ч.1», 2000»

[6] Исапенко К.А. – «Комплексный анализ в примерах и упражнениях (Ч.1, 2017, Ч.2, 2018)»

[7] Мещеряков Е.А., Чемеркин А.А. – «Комплексный анализ. Практикум»

[8] Боярчук А.К. – «Справочное пособие по высшей математике» (том 4)