Теория вероятностей
Итоговый диктант, определения

Основано на лекциях Аксёновой Екатерины
Файл создан Заблоцким Данилом

Содержание

1 Алгебра событий

Определение (Алгебра)**.** $\mathcal{F}$ – семейство подмножеств Ω, $\mathcal{F}$ – *алгебра*, если:

1. $\Omega \in \mathcal{F}$ $(\varnothing \in \mathcal{F})$.
2. $A \in \mathcal{F} \implies \overline{A} \in \mathcal{F}$.
3. $A, B \in \mathcal{F} \implies AB \in \mathcal{F},\ A + B \in \mathcal{F}$.

2 Сигма-алгебра событий

Определение (σ-алгебра)**.** $\mathcal{F}$ – семейство подмножеств Ω, $\mathcal{F}$ – *σ-алгебра*, если:

1. $\Omega \in \mathcal{F}$ $(\varnothing \in \mathcal{F})$.
2. $A \in \mathcal{F} \implies \overline{A} \in \mathcal{F}$.
3. $A, B \in \mathcal{F} \implies AB \in \mathcal{F},\ A + B \in \mathcal{F}$.
4. $\forall \{A_\alpha\} \subset \mathcal{F}\ \bigcap\limits_\alpha A_\alpha \in \mathcal{F}$ и $\bigcup\limits_\alpha A_\alpha \in \mathcal{F}$.

3 Борелевская сигма-алгебра

Примечание. Взято не из лекций.

Определение (Борелевская σ-алгебра)**.** $\mathbb{R}$ – топологическое пространство, *борелевская σ-алгебра* – это алгебра, порожденная всеми интервалами.

4 Определение меры

Примечание. Взято не из лекций.

Определение (Мера). Пусть X – некоторое множество и Σ – α-алгебра над X.

Функция μ из Σ в расширенную действительную числовую прямую называется *мерой*, если она удовлетворяет следующим свойствам:

- неотрицательность: для всех E в Σ имеем
$$\mu(E) \geqslant 0;$$
- пустой набор:
$$\mu(\varnothing) = 0;$$
- счетная аддитивность (или σ-аддитивность): для всех счетных наборов попарно непересекающихся множеств в Σ:
$$\{E_k\}_{k=1}^{\infty},$$
$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k).$$

5 Аксиомы вероятности

Определение. Вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Ω – множество элементарных исходов, $\mathcal{F}$ – σ-алгебра подмножеств Ω, P – мера на $\mathcal{F}$, $P : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$,

A_1 $\forall A \in \mathcal{F}\ P(A) \geqslant 0.$

A_2 $P(\Omega) = 1$ (условие нормировки).

A_3 $\forall A, B \in \mathcal{F}\ AB = \varnothing \implies P(A + B) = P(A) + P(B).$

A_4 $\{A_n\} \subset \mathcal{F}\ A_{n+1} \leqslant A_n\ \bigcap\limits_n A_n = \varnothing,$

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = 0 \text{ (непрерывность меры).}$$

6 Определение вероятности в классической схеме

Определение (Вероятность в классической схеме). Ω – конечное множество равновозможных исходов. $\mathcal{F}$ – все подмножества Ω (их $2^{|\Omega|}$),

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

7 Формула числа перестановок

Определение (формула числа перестановок). *Число перестановок* n различных шаров (перестановки отличаются порядком шаров) – $P(n)$,

$$P(n) = n!, \quad n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1 = n!,\ 0! = 1.$$

Пусть есть $n_1, \ldots, n_m$ шаров m видов, $n = n_1 + \ldots + n_m$.
Число перестановок этих n шаров равно $P(n_1, \ldots, n_m)$,

$$P(n_1, \ldots, n_m) = \frac{(n_1 + \ldots + n_m)!}{n_1! n_2! \ldots n_n!}.$$

8 Формула числа размещений

Определение (Формула числа размещений). *Размещения* n элементов по k местам. Выкладываем в ряд k шариков из имеющихся n:

$$A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

9 Формула числа сочетаний

Определение (Формула числа сочетаний). *Сочетания* k элементов из n. Число k-элементарных подмножеств из n-элементов множества – C_n^k,

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

10 Формула числа размещений с повторениями

Замечание. Если мы разрешим шарики повторять, то получим размещения с повторениями:

$$\overline{A_n^k} = n \cdot n \cdot \ldots \cdot n = n^k.$$