

Комплексный Анализ

Основано на лекциях Мельникова Е.В.

Конспект написан Заблоцким Данилом

Весенний семестр 2024

Эти записи не одобряются лекторами, и я вношу в них изменения (часто существенно) после лекций. Они далеко не точно отражают то, что на самом деле читалось, и, в частности, все ошибки почти наверняка мои.

Оглавление

1	Голоморфные функции	3
1.1	Комплексная плоскость	3
1.1.1	Комплексные числа	3
1.1.2	Топология комплексной плоскости	5
1.1.3	Пути, кривые и области	11
1.2	Функции комплексного переменного	13
1.2.1	Структура функции комплексного переменного	13
1.2.2	Степенные ряды	15
1.2.3	Дифференцируемые и конформные отображения	19
1.2.4	Дробно-линейные отображения	22
1.2.5	Элементарные функции	25
1.3	Теория интеграла Коши	26
1.3.1	Определения и основные свойства интеграла Коши	26
1.3.2	Интегральная теорема Коши	27
1.3.3	Интегральная формула Коши, интеграл типа Коши	29
1.3.4	Неопределенный интеграл теорем Мореры и Вейерштрасса	30
1.4	Ряды Тейлора и Лорана. Элементы теории вычетов	32
1.4.1	Разложение голоморфной функции в ряд Тейлора	32
1.4.2	Ряды Лорана	33
1.4.3	Классификация изолированных особых точек	33
1.4.4	Вычеты	35
1.4.5	Вычисление интегралов	36
1.4.6	Гармонические функции	37
1.4.7	Целые и мероморфные функции	37
1.5	Основные принципы комплексного анализа	38
1.5.1	Принцип аргумента и Теорема Руше	38
	Список используемой литературы	38

Глава 1

Голоморфные функции

Лекция 1: Начало

от 15 фев 12:45

1.1 Комплексная плоскость

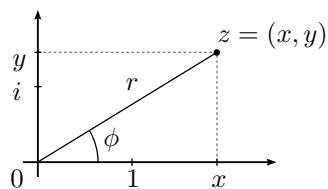
1.1.1 Комплексные числа

$$\mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R},$$

$$\begin{aligned}(x_1, y_1) + (x_2, y_2) &:= (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \\ (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) &:= (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1).\end{aligned}$$

$$z = (x, y) = x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned}(1, 0) &=: 1, \\ (0, 1) &=: i, \\ (0, 0) &=: 0\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}x &=: \operatorname{Re} z \\ y &=: \operatorname{Im} z\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x &= r \cdot \cos \phi \\ y &= r \cdot \sin \phi\end{aligned}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} =: |z|,$$

$$\phi =: \arg z, \quad \underbrace{0 \leq \arg z < 2\pi}_{\text{главное значение аргумента}}$$

$$\operatorname{Arg} z := \arg z + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \bar{z} = x - iy$$

Формула Эйлера:

$$e^{i\phi} = \cos \phi + i \sin \phi, \quad \forall \phi \in \mathbb{R}$$

Тригонометрическая форма записи:

$$z = |z| \cdot (\cos \arg z + i \sin \arg z)$$

Показательная форма записи:

$$z = |z| e^{i \arg z}$$

Формула Муавра:

$$z^n = r^n (\cos n\phi + i \sin n\phi)$$

$$e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy}$$

$$z^n = |z|^n e^{in \arg z}$$

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$$

$$z = r e^{ir}, \quad z^n = z_0$$

$$\sqrt[n]{z_0} = \sqrt[n]{|z_0|} \cdot e^{i \frac{\arg z_0 + 2\pi k}{n}}, \quad 0 \leq k \leq n-1.$$

Теорема 1. $\forall z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ справедливы равенства:

$$1. \quad z \cdot \bar{z} = |z|^2$$

$$6. \quad |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

$$2. \quad \overline{(z_1 + z_2)} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

$$7. \quad |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

$$3. \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$$

$$8. \quad \left| |z_1| - |z_2| \right| \leq |z_1 - z_2|$$

$$4. \quad \bar{\bar{z}} = z$$

$$9. \quad \arg(z_1 \cdot z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 \pmod{2\pi}$$

$$5. \quad \bar{z} = z \iff z \in \mathbb{R}$$

$$10. \quad \arg \left(\frac{z_1}{z_2} \right) = \arg z_1 - \arg z_2 \pmod{2\pi}$$

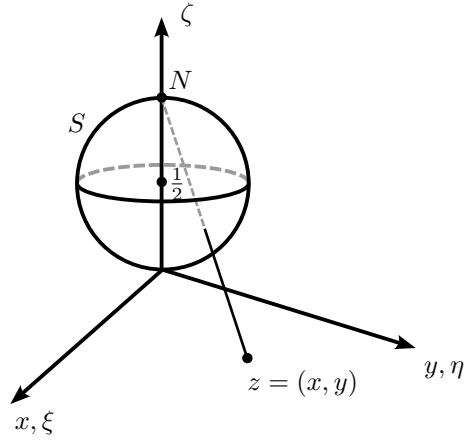


Рис. 1.1: Сфера Римана

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta - \zeta = 0, \quad \begin{cases} \xi = \frac{x}{1+|z|^2} \\ \eta = \frac{y}{1+|z|^2} \\ \zeta = \frac{|z|^2}{1+|z|^2} \end{cases}.$$

$$P : \mathbb{C} \xrightarrow{\text{на}} S \setminus \{N\}, \quad P(z) = (\xi, \eta, \zeta).$$

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0, \quad A, B, C, D \in \mathbb{R}$$

общее уравнение окружности

$$\begin{aligned} \gamma & \text{ — окружность на } \mathbb{C}, \\ P(\gamma) & \text{ — окружность на } S. \end{aligned}$$

$$|z|^2 = x^2 + y^2 = \frac{\zeta}{1-\zeta}, \quad \begin{cases} x = \frac{\xi}{1-\zeta} \\ y = \frac{\eta}{1-\zeta} \end{cases}.$$

$$A\zeta + B\xi + C\eta + D(1-\zeta) = 0, \quad \begin{aligned} \overline{\mathbb{C}} &:= \mathbb{C} \cup \{\infty\} \\ P(\infty) &:= N \end{aligned}.$$

1.1.2 Топология комплексной плоскости

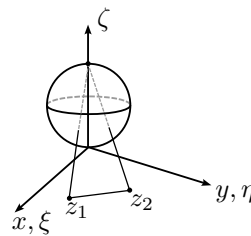
$$\alpha - \beta = \frac{12}{43}.$$

$$M_1, M_2 \in \mathbb{R}^3,$$

$$\text{dist}(M_1, M_2) := \sqrt{(\xi_1 - \xi_2)^2 + (\eta_1 - \eta_2)^2 + (\zeta_1 - \zeta_2)^2},$$

$$d(z_1, z_2) := |z_1 - z_2|, \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C},$$

$$\rho(z_1, z_2) := \text{dist}(P(z_1), P(z_2)),$$



$$B_\varepsilon(z_0) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \varepsilon\},$$

$$P : \mathbb{C} \xrightarrow{\text{на}} S \setminus \{N\}.$$

Определение 1 (Окрестность точки). Множество называется *окрестностью точки*, если оно содержит некоторый шарик с центром в этой точке.

Обозначение.

$$O_z, \quad z \in \overline{\mathbb{C}}.$$

Лекция 2: Продолжение

от 22 фев 12:45

$$\begin{aligned} d : \mathbb{C}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ \forall z \in \mathbb{C} \quad d(z; \infty) &:= +\infty, \quad d : \mathbb{C}^2 \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \\ \rho : \overline{\mathbb{C}}^2 &\rightarrow \mathbb{R}, \quad \rho(z; \infty) \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Свойство (Свойства окрестностей). $\forall z \in \overline{\mathbb{C}}$:

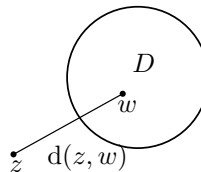
1. $\forall V \in O_z \quad z \in V$.
2. $\forall U, V \in O_z \quad U \cap V \in O_z$.
3. $\forall U \in O_z, \forall V \supset U \quad V \in O_z$.
4. $\forall V \in O_z, \exists U \in O_z : U \subset V \text{ \& } \forall w \in U \quad U \in O_w$.

Определение 2 (Открытое множество). Множество называется *открытым*, если оно является окрестностью каждой своей точки.

Определение 3 (Окрестность множества). *Окрестностью множества* называется множество, являющееся окрестностью каждой точки исходного множества (V – окрестность множества A , если $\forall z \in A \quad V \in O_z$).

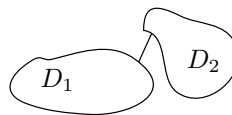
Определение 4. $D \subset \overline{\mathbb{C}}$, $z \in \mathbb{C}$,

$$\text{dist}(z, D) := \inf_{w \in D} d(z, w),$$



Определение 5. $D_1, D_2 \subset \overline{\mathbb{C}}$,

$$\text{dist}(D_1, D_2) := \inf_{z \in D_1, w \in D_2} d(z, w),$$



Определение 6 (Внутренность). Множество всех внутренних точек называется *внутренностью*.

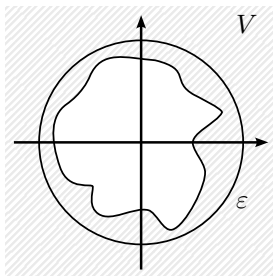
Обозначение.

$$\text{int } D.$$

Определение 7 (Предельная точка множества). Точка называется *предельной точкой множества*, если в любой ее окрестности есть точки множества, отличные от данной.

Замечание. Точка является предельной точкой множества на расширенной комплексной плоскости $(\overline{\mathbb{C}})$ $\iff \forall$ ее окрестность содержит бесконечное число точек данного множества.

Определение 8 (Окрестность бесконечно удаленной точки). Множество $V \subset \overline{\mathbb{C}}$ является *окрестностью бесконечно удаленной точки*, если $\exists \varepsilon > 0 : \{z \in \overline{\mathbb{C}} : |z| > \varepsilon\} \subset V$.



Определение 9 (Точка прикосновения множества). Точка $z \in \overline{\mathbb{C}}$ расширенной комплексной плоскости называется *точкой прикосновения* множества $D \subset \overline{\mathbb{C}}$, если пересечение $\forall V \in O_z \quad V \cap D \neq \emptyset$.

Обозначение.

$\text{cl } D$ – замыкание (closure)

Определение 10 (Замкнутое множество). Множество называется *замкнутым*, если его дополнение открыто.

Обозначение.

∂D

Определение 11 (Граничная точка). Точка называется *граничной точкой* множества, если в любой ее окрестности есть как точки множества, так и точки его дополнения.

Обозначение. Множество всех замкнутых подмножеств в $\overline{\mathbb{C}}$:

$\text{Cl } \overline{\mathbb{C}}$ (closed)

Определение 12 (Компактное множество). Множество в $\overline{\mathbb{C}}$ называется *компактным*, если \forall его открытое покрытие имеет конечное подпокрытие.

Обозначение.

v – покрытие множества D , если $D \subset \bigcup_{V \in v} V$,

Обозначение.

$\mathcal{P}(\overline{\mathbb{C}})$ – совокупность всех подмножеств $\overline{\mathbb{C}}$.

Критерий 1 (Компактности). Подмножество \mathbb{C} компактно \iff оно замкнуто и ограничено.

Примечание. Множество ограничено, если оно содержится в некотором шаре.

Замечание. $\overline{\mathbb{C}}$ – компактно.

Определение 13. Последовательность $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ сходится к $z \in \mathbb{C}$, если $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0$

$$|z_n - z| < \varepsilon.$$

$$d(z_n, z) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad z_n \rightarrow \infty, \text{ если } \lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = \pm \infty.$$

$$z = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n, \quad z_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} z.$$

Замечание.

$$z_n \rightarrow z \text{ в } \mathbb{C} \iff \begin{cases} \operatorname{Re} z_n \rightarrow \operatorname{Re} z \\ \operatorname{Im} z_n \rightarrow \operatorname{Im} z \end{cases} \text{ в } \mathbb{R},$$

$$|z_n - z| = \sqrt{(\operatorname{Re} z_n - \operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z_n - \operatorname{Im} z)^2} \geq |\operatorname{Re} z_n - \operatorname{Re} z|,$$

$$\operatorname{Re}(z_1 \pm z_2) = \operatorname{Re} z_1 \pm \operatorname{Re} z_2.$$

Критерий 2 (Коши). Последовательность $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ сходится $\iff \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq n_0$

$$|z_n - z_m| < \varepsilon.$$

Критерий 3 (Коши в $\overline{\mathbb{C}}$). Последовательность $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \overline{\mathbb{C}}$ сходится $\iff \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq n_0$

$$\rho(z_n, z_m) < \varepsilon,$$

$$z_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} z \iff \rho(z_n, z) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Критерий 4 (Компактности (расширенный)). Подмножество $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ компактно $\iff \forall$ его последовательность имеет сходящуюся подпоследовательность: $D \subset \overline{\mathbb{C}} \forall \{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset D \exists \{z_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} :$

$$z_{n_k} \rightarrow z \in D.$$

Пусть $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C} :$

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n.$$

Определение 14 (Числовой ряд). Числовым рядом называется формальная сумма членов.

Определение 15 (Абсолютно сходящийся числовой ряд). Числовой ряд называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|.$$

Критерий 5 (Коши (сходимости ряда)). $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ сходится $\iff \forall \varepsilon > 0 \exists m \in \mathbb{N} : \forall n \geq m \forall k \in \mathbb{N}$

$$\underbrace{|z_{n+1} + z_{n+2} + \dots + z_{n+k}|}_{|S_{n+k} - S_n|} < \varepsilon.$$

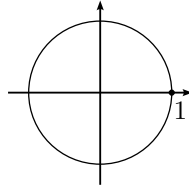
Следствие 1. Если ряд сходится, то его общий член стремится к 0.

Следствие 2. Каждый абсолютно сходящийся числовой ряд сходится.

1.1.3 Пути, кривые и области

Определение 16 (Путь). Путем $\gamma : [a; b] \rightarrow \mathbb{C}$ называется непрерывное отображение $[a; b]$ в \mathbb{C} .

Пример. $\gamma(t) = e^{it}$,



$$0 \leq t \leq 2\pi.$$

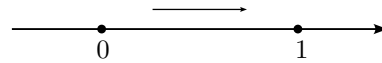
◇

Определение 17. $\gamma_1 : [a_1; b_1] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma_2 : [a_2; b_2] \rightarrow \mathbb{C}$. $\gamma_1 \sim \gamma_2$, если \exists возрастающая непрерывная функция $\phi : [a_1; b_1] \xrightarrow{\text{на}} [a_2; b_2]$:

$$\gamma_1(t) = \gamma_2(\phi(t)), \quad \forall t \in [a_1; b_1].$$

Пример.

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &= t & 0 \leq t \leq 1 \\ \gamma_2(t) &= \sin t & 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \\ \gamma_3(t) &= \sin t & 0 \leq t \leq \pi \\ \gamma_4(t) &= \cos t & 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$



$$\phi(t) = \arcsin t,$$

$$\gamma_1(t) = \gamma_2(\phi(t)).$$

◇

Определение 18 (Жорданов путь). Путь называется *жордановым*, если он является взаимно однозначной функцией.

Лемма 1. Для каждого жорданова пути $\exists \delta > 0$: для \forall некольцевой точки пути окружность в этой точке с радиусом δ пересекает этот путь не более чем в двух точках.

Определение 19 (Кривая). *Кривой* называется класс эквивалентных между собой путей.

Лекция 3: Продолжение

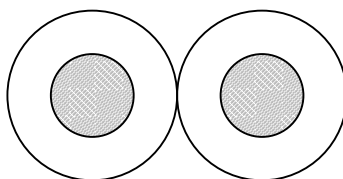
от 29 фев 12:45

Определение 20 (Связное множество). $A \subset \overline{\mathbb{C}}$ называется *связным*, если $\exists U, V \in \text{Op}\overline{\mathbb{C}}: U \cap A \neq \emptyset, U \cap V = \emptyset$.

Обозначение.

$\text{Op}\overline{\mathbb{C}}$ – совокупность всех открытых множеств

Пример. Несвязно:



◇

Определение 21 (Линейно связное множество). Множество называется *линейно связным*, если любые две его точки можно соединить путем, значения которого лежат в этом множестве.

Замечание. В пространстве \mathbb{R}^n , и в частности $\overline{\mathbb{C}}$, любое открытое множество связно \iff оно линейно связно.

Определение 22 (Область). *Областью* в $\overline{\mathbb{C}}$ (\mathbb{C}) называется любое непустое открытое связное множество.

Определение 23 (Замкнутая область). *Замкнутой областью* будем называть замыкание области.

1.2 Функции комплексного переменного

1.2.1 Структура функции комплексного переменного

$f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$

$\text{dom } f$ – область определения функции

$\text{im } f$ – область значения функции

Определение 24 (Предел отображения). $D \subset \text{dom } f$, $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ – предельная точка D . Тогда $w_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ называется *пределом отображения* f ,

$$w_0 := \lim_{D \ni z \rightarrow z_0} f(z), \text{ если } \forall V \in O_{w_0} \exists U \in O_{z_0} : f(\dot{U} \cap D) \subset V,$$

$$U \in O_{z_0}, \quad \dot{U} = U \setminus \{z_0\}.$$

Примечание. В случае, когда $z_0, w_0 \in \mathbb{C}$ следует, что $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall z \in D$

$$0 < |z - z_0| < \delta \implies |f(z) - w_0| < \varepsilon.$$

Определение 25 (Непрерывная функция в точке). Функция f называется *непрерывной в точке* $z_0 \in \mathbb{C}$, если:

1. $z_0 \in \text{dom } f$.
2. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall z \in D$

$$0 < |z - z_0| < \delta \implies |f(z) - w_0| < \varepsilon.$$

Определение 26 (Непрерывная функция на множестве). Функция $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ непрерывна на $D \subset \mathbb{C}$, если

1. $D \subset \text{dom } f$.
2. $\forall z_0 \in D \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall z \in D$

$$|z - z_0| < \delta \implies |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon.$$

Примечание (Функция Дирихле).

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases},$$

непрерывна на \mathbb{Q} , непрерывна на $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Замечание. Если множество является открытым или совпадает с областью определения функции, то непрерывность функции на этом множестве равносильно ее непрерывности в каждой точке.

$$f_n : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} (n \in \mathbb{N}), \quad D := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \operatorname{dom} f_n.$$

Определение 27. $A \subset D$, $f : A \rightarrow \mathbb{C}$, $f_n \rightrightarrows f$ на A , если $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall z \in A \forall n \geq n_0$

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon.$$

$$\left(\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \sup_{z \in A} |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon, |z - z_0| < \delta \implies |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon \right).$$

Теорема 2 (Вейерштрасса). Если $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset C(A)$, $f_n \rightrightarrows f$, то $f \in C(A)$.

Определение 28 (Функциональный ряд). *Функциональным рядом* называется формальная сумма членов последовательности функций.

Обозначение. $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$.

Определение 29 (Числовой ряд). $\forall z \in D \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ называется *числовым рядом* $\{f_n(z)\}_{n \in \mathbb{N}}$.

$$S_n := \sum_{k=1}^n f_k - \text{частичная сумма.}$$

Теорема 3 (Признак Вейерштрасса). $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ таков, что $\forall n \in \mathbb{N} \forall z \in A |f_n| \leq c_n$, причем $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ равномерно абсолютно сходится на A .

Теорема 4 (Критерий Коши (равномерная сходимоть)). $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ равномерно сходится на $A \iff \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq n_0$

$$\sup_{z \in A} |f_n(z) - f_m(z)| < \varepsilon.$$

Определение 30 (Линейная функция). Функция $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ называется *линейной*, если $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C} \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

$$f(\alpha z_1 + \beta z_2) = \alpha f(z_1) + \beta f(z_2).$$

Замечание. Функция $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ является линейной $\iff \exists a \in \mathbb{C} : \forall z \in \mathbb{C}$

$$f(z) = az.$$

1.2.2 Степенные ряды

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \text{ где } \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}, z, z_0 \in \mathbb{C}.$$

Теорема 5 (1-я теорема Абеля). Если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ сходится в точке $z_1 \in \mathbb{C}$, то он абсолютно сходится при $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$.

А если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ расходится в точке $z_1 \in \mathbb{C}$, то он расходится и при $|z - z_0| > |z_1 - z_0|$.

Доказательство.

$$1. \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z_1 - z_0)^n \text{ сходится} \implies |a_n (z_1 - z_0)^n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

$$c := \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n (z_1 - z_0)^n| < +\infty, \quad |z - z_0| < |z_1 - z_0|.$$

Рассмотрим

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n (z - z_0)^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n (z_1 - z_0)^n| \cdot \left| \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \right|^n \leq c \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \right|^n < +\infty.$$

2. добавить

□

Определение 31 (Радиус сходимости). Элемент $R \in [0; +\infty]$ называется *радиусом сходимости* ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$, если при $|z - z_0| < R$ исходный ряд абсолютно сходится, а при $|z - z_0| > R$ исходный ряд расходится.

Теорема 6 (Коши-Адамара). Для степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ положим $l := \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Тогда:

1. Если $l = 0$, то исходный ряд сходится $\forall z \in \mathbb{C}$.
2. Если $l = \infty$, то исходный ряд сходится только в точке z_0 .
3. Если $l \in (0; +\infty)$, то при $|z - z_0| < \frac{1}{l}$, а при $|z - z_0| > \frac{1}{l}$ исходный ряд расходится.

Доказательство.

$$1. \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0,$$

$$z \in \mathbb{C}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} |a_n(z - z_0)^n|.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n(z - z_0)^n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \cdot |z - z_0| = 0 \implies \text{ряд сходится.}$$

$$2. \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty,$$

$$\exists \{a_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \quad \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} \rightarrow +\infty.$$

$$\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} \cdot |z - z_0| \rightarrow +\infty \implies |a_{n_k}|.$$

$$3. \quad |z - z_0| < \frac{1}{l} \implies l|z - z_0| < 1.$$

Дописать.

□

Лекция 4: Продолжение

от 7 мар 12:45

Следствие 3. Для любого $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ $R = \frac{1}{l}$, где $l := \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.

Замечание. Если $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$, то этот предел равен R (радиусу сходимости).

Теорема 7 (О непрерывности степенного ряда). Пусть R – радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$. Тогда $\forall r \in (0; R)$ равномерно абсолютно сходится при $|z - z_0| \leq r$.

Доказательство.

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n(z - z_0)|^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \cdot r^n < +\infty,$$

исходный ряд сходится равномерно по признаку Вейерштрасса. \square

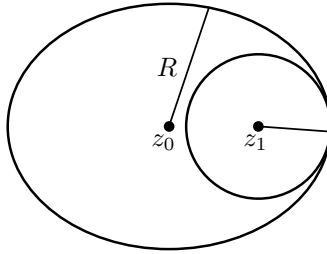
Следствие 4. Каждый степенной ряд непрерывен внутри своего круга сходимости.

Примечание. $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$ – круг сходимости.

Теорема 8. Пусть R – радиус сходимости $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$. Предположим, что $|z_1 - z_0| < R$. Тогда $\exists \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z - z_1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

при $|z - z_1| < \text{dist}(z_1, \{w \in \mathbb{C} : |w - z_0| = R\})$.

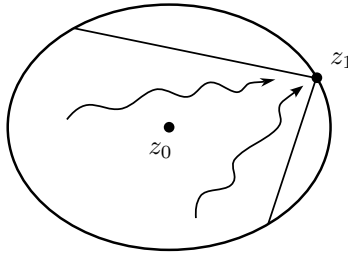


Замечание. Свойства ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$, $|z - z_0| < R$ идентичны свойствам ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$, $|w| < R$.

Теорема 9 (Вторая теорема Абеля). Если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ сходится в точке $z_1 \neq z_0$ и $S(z)$ – его сумма при $|z-z_0| < |z_1-z_0|$, то

$$\lim_{z \rightarrow z_0} S(z) = S(z_1) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z_1 - z_0)^n$$

при стремлении z к z_1 по любому пути, заключенному между двумя хордами к окружности $|z-z_0| = |z_1-z_0|$, исходящими из точки z_1 .



$$[z_0, z_1) \ni z \rightarrow z_1, \quad z - z_0 =: (z_1 - z_0)t, \quad 0 \leq t < 1.$$

$$e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!},$$

$$\begin{aligned} \sin z &:= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \\ \cos z &:= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \end{aligned} \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad e^{iz} = \cos z + i \sin z.$$

Теорема 10 (Единственность). Если ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ и $\sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$ сходятся в круге $|z| < R \neq 0$ и в точках ненулевой плоскости $\{z_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, лежащей в этом круге и сходящейся к нулю, суммы этих рядов совпадают, то $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n = b_n$.

Доказательство.

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{N} \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n z_k^n &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n z_k^n, \quad z_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \implies a_0 = b_0, \\ \forall k \in \mathbb{N} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n z_k^{n-1} &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n z_k^{n-1}, \quad z_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \implies a_1 = b_1, \\ &\vdots \end{aligned}$$

□

1.2.3 Дифференцируемые и конформные отображения

Определение 32 (Дифференцируемое отображение). Отображение $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, определенное в некоторой окрестности точки $z_0 \in \mathbb{C}$, называется *дифференцируемым* в этой точке, если $\exists a \in \mathbb{C} : \forall z$ достаточно близких к z_0 справедливо равенство:

$$f(z) - f(z_0) = a \cdot (z - z_0) + o(z - z_0).$$

Замечание. Из определения вытекает, что дифференцируемость функции в точке равносильна существованию $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \in \mathbb{C}$.

Определение 33 (Голоморфная функция). Функция называется *голоморфной* в точке, если она моногенна в некоторой ее окрестности, то есть она ???.

Определение 34 (Регулярная функция). Функция называется *регулярной* в точке, если она имеет в этой точке конечную производную, отличную от 0.

Замечание. $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$,

$$\begin{array}{cc} \parallel & \parallel \\ \text{Re } f & \text{Im } f \end{array}$$

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} &= \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) + iv(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0)}{\Delta x} = \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0), \end{aligned}$$

$$z = x_0 + \Delta x + iy_0.$$

Пример. $f(z) = f(x + iy) = x + 2iy$,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 \neq \frac{\partial v}{\partial y} = 2.$$

◇

Теорема 11. Если вещественная и мнимая части функции f дифференцируемы в точке (x_0, y_0) и в этой точке выполнены условия Коши-Римана, то f монотонна в $z_0 = x_0 + iy_0$.

Замечание. Предположим, что f дифференцируема в точке z_0 и $f'(z_0) \neq 0$ (другими словами, f регулярна в точке z_0)

$$\Delta w = f(z) - f(z_0), \quad \Delta z = z - z_0,$$

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = f'(z_0) \implies \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta w}{\Delta z} \right| = |f'(z_0)| \neq 0,$$

$$\left| \frac{\Delta w}{\Delta z} \right| \approx |f'(z_0)|.$$

Это свойство называется *постоянством искажения масштаба*.

$$\Delta w \approx f'(z_0) \cdot \Delta z, \quad \arg \Delta w = \arg f'(z_0) + \arg \Delta z.$$

Определение 35 (Конформное отображение). $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ называется *конформным отображением*, если оно является гомеоморфизмом и оно конформно в каждой точке области D , то есть в каждой точке области D сохраняется постоянство изменения масштаба.

Определение 36 (Голоморфная функция). Функция называется *голоморфной в области*, если она моногенна в каждой точке этой области.

Определение 37 (Одноместная функция). Если комплексная функция взаимнооднозначна в некоторой области, то она называется *одноместной в этой области*.

Если f определена в $D \forall z_1, z_2 \in D$ из $f(z_1) = f(z_2) \implies z_1 = z_2$.

Теорема 12. Каждое конформное в области отображение гомеоморфно и ???

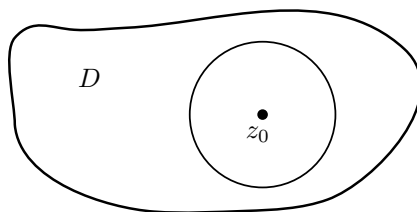
Теорема 13. Каждое одноместное гомеоморфное и регулярное отображение является конформным отображением в этой области.

Теорема 14 (О голоморфной сумме степенного ряда). Пусть ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ сходится в круге $|z| < R \neq 0$ и $S(z)$ – его сумма в этом круге. Тогда S голоморфна при $|z| < R$ и $S'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ при $|z| < R$.

Следствие 5. Сумма каждого степенного ряда в круге его сходимости бесконечно дифференцируема.

Определение 38 (Аналитическая функция). Функция называется *аналитической* в области, если в некоторой окрестности каждой точки этой области она раскладывается в степенной ряд,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad |z - z_0| < r, \quad \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C},$$



Следствие 6. Каждая аналитическая функция бесконечно дифференцируема.

Замечание. Каждая голоморфная в области функция является аналитической.

Определение 39 (Антиконформное отображение). Отображение называется *антиконформным* или *конформным отображением второго рода* в области, если в каждой точке этой области имеет место постоянство искажения масштаба и ... квазиконсерватизм углов.

Определение 40 (Антианалитическое отображение). Отображение называется *антианалитическим* в области, если его сопряженное аналитично в этой области.

Теорема 15. u и v – вещественная и мнимая части комплексного числа $f = u + iv$. Если u и v непрерывно дифференцируемы в этой области и в каждой точке этой области для функции f имеет место консерватизм, то функция f голоморфна и регулярна в этой области.

Теорема 16. Если функции u, v непрерывно дифференцируемы в области и в этой области функция f обладает свойством постоянства искажения масштабов, то f голоморфна или антиголоморфна в этой области.

Замечание. Функция антиголоморфна, если голоморфны ее отображения.

Определение 41 (Голоморфная в бесконечно удаленной точке функция). Говорят, что функция f *голоморфна в бесконечно удаленной точке*, если функция $g(z) := f\left(\frac{1}{z}\right)$ голоморфна.

1.2.4 Дробно-линейные отображения

Определение 42 (Дробно-линейное отображение). *Дробно-линейным отображением* называется функция вида

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Если выполняется $ad - bc \neq 0$, то дробно-линейное отображение называется *невыврожденным*.

Пример. $f\left(-\frac{d}{c}\right) := \infty$, $f(\infty) := \frac{d}{c}$. ◇

Теорема 17.

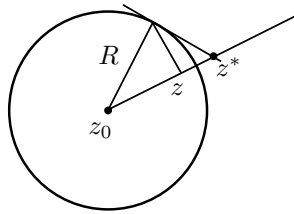
1. Каждое дробно-линейное отображение является гомеоморфизмом $\overline{\mathbb{C}}$ на $\overline{\mathbb{C}}$.
2. Каждая дробно-линейная функция однозначно определяется своими значениями в трех различных точках.
3. Любое двойное отношение сохраняется при дробно-линейном отображении, если f – дробно-линейная функция, то \forall различных z_1, z_2, z_3, z_4

$$\frac{z_3 - z - 1}{z_3 - z_2} : \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2} = \frac{f(z_3) - f(z_1)}{f(z_3) - f(z_2)} : \frac{f(z_4) - f(z_1)}{f(z_4) - f(z_2)}.$$

4. Суперпозиция дробно-линейных функций является дробно-линейной функцией.
5. Определяя произведение двух дробно-линейных функций как их суперпозицию, получаем, что множество всех дробно-линейных функций образует группу (M) .

Определение 43 (Симметричная точка). $z^* \in \mathbb{C}$ называется *симметричной точкой* z из круга $|\xi - z_0| \leq R$, если:

1. $\arg(z^* - z_0) = \arg(z - z_0)$.
2. $|z^* - z_0| \cdot |z - z_0| = R^2$.



$$\frac{R}{|z - z_0|} = \frac{|z^* - z_0|}{R}.$$

Формула для симметричной точки: $z^* = \frac{R^2}{\bar{z} - \bar{z}_0} + z_0$.

Определение 44 (Отображение симметрии). *Отображением симметрии* мы называем сопоставление каких-то симметричных им относительно какой-то окрестности.

Теорема 18. Каждая дробно-линейная функция является суперпозицией четного числа симметрий относительно окружности или прямой.

Определение 45 (Общее уравнение окружности).

$$A(x^2 + y^2) + bx + b_1y + c = 0,$$

$$B := \frac{b + ib_1}{2}, \quad Az\bar{z} + \bar{B}z + B\bar{z} + c = 0.$$

Теорема 19. При \forall дробно-линейном отображении окрестность переходит в окружность.

Теорема 20. Если $ad - bc \neq 0$, то дробно-линейная функция $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ во всех точках $z \in \mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$ голоморфна и регулярна.

Теорема 21. Каждый дробно-линейный автоморфизм верхней полуплоскости представим в виде

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

где $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ и $ad - bc > 0$.

\forall отображение такого вида является отображением верхней полуплоскости на себя (то есть, ее автоморфизмом).

Теорема 22. Каждый дробно-линейный изоморфизм верхней полуплоскости на единичном круге можно представить в виде

$$f(z) = e^{i\theta} \frac{z - a}{z - \bar{a}},$$

где $\theta \in \mathbb{R}$, $\operatorname{Im} a > 0$.

\forall отображение такого вида является изоморфизмом верхней полуплоскости на единичном круге.

Теорема 23. Каждый дробно-линейный автоморфизм единичного круга на себя можно представить в виде

$$f(z) = e^{i\theta} \frac{z - a}{1 - \bar{a}z},$$

где $\theta \in \mathbb{R}$, $|a| < 1$.

\forall отображение такого вида является автоморфизмом единичного круга.

1.2.5 Элементарные функции

$$z^n (n \in \mathbb{N}), \quad e^z, \quad \sin z, \quad \cos z,$$

$$\begin{aligned} \tan z &:= \frac{\sin z}{\cos z}, & \cot z &:= \frac{\cos z}{\sin z}, \\ \operatorname{ch} z &:= \frac{e^z + e^{-z}}{2}, & \operatorname{sh} z &:= \frac{e^z - e^{-z}}{2}. \end{aligned}$$

Примечание (Функция Жуковского).

$$\begin{aligned} w &= \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right), & w(0) &:= \infty, \\ w &= z + \sqrt{z^2 - 1}, & w(\infty) &:= \infty. \end{aligned}$$

$$z_1 \cdot z_2 = 1.$$

Областью одноместности функции Жуковского является точки, не уд. $z_1 \cdot z_2 = 1$, в частности единичный круг, его внешность, верхняя и нижняя полуплоскости.

Функция Жуковского является конформным отображением \forall области, не содержащих точки ± 1 .

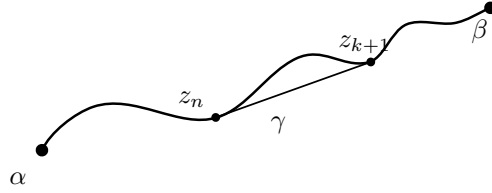
Лекция 5: Продолжение

от 14 мар 12:45

1.3 Теория интеграла Коши

1.3.1 Определения и основные свойства интеграла Коши

Определение 46 (Разбиение кривой Жордана). Пусть γ – кривая Жордана, $\gamma \in \mathbb{C}$ с концами $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.



Разбиением кривой Жордана назовем $\sigma := \{z_0, z_1, \dots, z_n, \xi_0, \dots, \xi_{n-1}\}$, где $n \in \mathbb{N}$, $z_0 = \alpha$, $z_n = \beta$, $z_{k+1} \notin \overbrace{z_0 z_k}^{\Delta z_k} \forall k \in \overline{0, n-1}$, $\xi_k \in \overbrace{z_k, z_{k+1}}^{\Delta z_k}$

$$\Delta z_k := z_{k+1} - z_k,$$

$$d(\sigma) := \max_{0 \leq k < n-1} |\Delta z_k| - \text{диаметр разбиения } \sigma.$$

Определение 47. Если $f : \gamma \rightarrow \mathbb{C}$, σ – интегральная сумма, то

$$S_\sigma(f) := \sum_{k=1}^{n-1} f(\xi_k) \underbrace{(z_{k+1} - z_k)}_{\Delta z_k}.$$

Определение 48. $\Pi(\gamma)$ – множество всех разбиений кривой γ ,

$$\Phi : \Pi(\gamma) \rightarrow \mathbb{C}.$$

Будем говорить, что $\exists \lim_{d(\sigma) \rightarrow 0} \Phi(\sigma) = w \in \mathbb{C}$, если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall \sigma \in \Pi(\gamma) \ d(\sigma) < \delta \implies |\Phi(\sigma) - w| < \varepsilon$.

Определение 49 (Интеграл Коши). Если $f : \gamma \rightarrow \mathbb{C}$ и $\exists \lim_{d(\sigma) \rightarrow 0} S_\sigma(f) \in \mathbb{C}$, то

$$\int_\gamma f(z) dz := \lim_{d(\sigma) \rightarrow 0} S_\sigma(f)$$

называется *интегралом Коши* от функции f по кривой γ .

Теорема 24. Если f непрерывна на спрямляемой кривой Жордана γ , то $\int_\gamma f(z) dz$ существует (то есть является элементом \mathbb{C}).

Доказательство. $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$,

$$\begin{aligned} \int_\gamma f(z) dz &= \int_\gamma (u(x, y) + iv(x, y)) d(x + iy) = \\ &= \int_\gamma u dx - v dy + \int_\gamma v dx + u dy \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

□

1.3.2 Интегральная теорема Коши

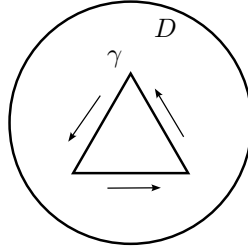
Лемма 2 (Гауса). Если функция f непрерывна в области D , то для любой спрямляемой кривой Жордана $\gamma \subset D$, для любого $\varepsilon > 0$ существует вписанная в γ ломанная P такая, что

$$\left| \int_\gamma f(z) dz - \int_P f(z) dz \right| < \varepsilon.$$

Теорема 25 (Интегральная теорема Коши). Пусть D – односвязная область в \mathbb{C} , функция f голоморфна в D . Тогда для любой замкнутой спрямляемой кривой Жордана γ

$$\int_\gamma f(z) dz = 0.$$

Доказательство. Пусть $\gamma = \Delta$ в D .



Докажем, что интеграл по этому треугольнику равен нулю. Допустим противное:

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| =: M \neq 0.$$

$$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \quad \int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{k=1}^4 \int_{\gamma_k} f(z) dz,$$

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \sum_{k=1}^n \left| \int_{\gamma_k} f(z) dz \right|,$$

$$\overline{\Delta}_0 := \gamma, \quad \overline{\Delta}_1 := \gamma_i : \left| \int_{\gamma_i} f(z) dz \right| \geq \frac{M}{4},$$

$$\exists \overline{\Delta}_2 : \left| \int_{\overline{\Delta}_2} f(z) dz \right| \geq \frac{M}{4^2}.$$

Продолжая этот процесс, мы получим последовательность $\{\overline{\Delta}_k\}$:

$$\left| \int_{\overline{\Delta}_k} f(z) dz \right| \geq \frac{M}{4^k},$$

$$D(\overline{\Delta}_{k+1}) \subset D(\overline{\Delta}_k).$$

То есть можем считать эту последовательность $\{\overline{\Delta}_k\}$ как последовательность вложенных множеств $\implies \exists z_0 \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} D(\overline{\Delta}_k) \neq \emptyset$.

????????

В силу произвольности ε получаем, что $M = 0$,

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz - \int_P f(z) dz \right| < \varepsilon.$$

□

Теорема 26 (Обобщенная интегральная теорема Коши). Если функция f голоморфна в односвязной области D , ограниченной замкнутой спрямляемой кривой Жордана γ и f непрерывна вплоть до границы, то есть $\forall z_0 \in \gamma$

$$\lim_{D \ni z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0) \implies \int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

Следствие 7. Если область D ограничена конечным числом замкнутых спрямляемых кривых Жордана. Если f голоморфна в этой области ???

Следствие 8. Утверждение обобщенной теоремы остается в силе, если условие голоморфности функции f в области нарушается в конечном количестве точек $z_1, \dots, z_n \in D$, в которых функция ведет себя так:

$$\lim_{\exists \rightarrow z_k} (z - z_k) f(z) = 0 \quad (0 \leq k \leq n).$$

1.3.3 Интегральная формула Коши, интеграл типа Коши

Теорема 27 (Интегральная формула Коши). Если функция f голоморфна в односвязной области D , ограничена замкнутой спрямляемой кривой Жордана γ , непрерывна вплоть до границы, то

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \begin{cases} f(z_0), & \text{если } z_0 \in D \\ 0, & \text{если } z_0 \notin \text{cl } D \end{cases}$$

Определение 50 (Интеграл типа Коши). Пусть односвязная область D ограничена замкнутой спрямляемой кривой Жордана γ , а функция f непрерывна на γ . Положим

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi, \quad z \in D.$$

Эта функция F называется *интегралом типа Коши*.

Теорема 28 (Лиувилль). Если функция f голоморфна в \mathbb{C} и ограничена, то $f \equiv \text{const.}$

Доказательство. $R > 0, z \in \mathbb{C}$

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi-z|=R} \frac{f(\xi)}{(\xi-z)^2} d\xi.$$

Пусть $M > 0 : \sup_{z \in \mathbb{C}} |f(z)| \leq M \implies$

$$|f'(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{|\xi-z|=R} \frac{|f(\xi)|}{|\xi-z|^2} |d\xi| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{M}{R^2} \cdot 2\pi R = \frac{M}{R} \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0 \implies$$

$$\implies f'(z) = 0 \quad (\forall z \in \mathbb{C}).$$

$$u'_x = u'_y = v'_x = v'_y = 0 \implies u = \text{const}, v = \text{const} \implies f = \text{const}.$$

□

1.3.4 Неопределенный интеграл теорем Мореры и Вейерштрасса

Теорема 29. Непрерывная в односвязной области D функция f голоморфна в этой области $\iff \forall z_0, z \in D \int_{z_0}^z f(\xi) d\xi$ не зависит от пути интегрирования, соединяющего области D точек z_0, z .

Определение 51 (Первообразная голоморфной в области). *Первообразной голоморфной в области D функции f называется голоморфная в D функция $F : \forall z \in D F'(z) = f(z)$.*

Замечание. Любые две первообразные голоморфной функции отличаются только на константу.

Определение 52 (Неопределенный интеграл). Совокупность всех первообразных голоморфной функции называется ее *неопределенным интегралом*.

Обозначение. $\int f(z) dz = F(z) + c$.

Замечание. Если функция f голоморфна в области D и F – ее первообразная, то $\forall z_0, z \in D$

$$\int_{z_0}^z f(\xi) d\xi = F(z) - F(z_0).$$

Теорема 30 (Морера). Для того, чтобы непрерывная в односвязной области функция была голоморфна в этой области, необходимо и достаточно, чтобы интеграл от этой функции по любому замкнутому контуру, лежащему в области, был равен 0.

Замечание. В сторону достаточности условия теоремы Мореры можно ослабить. Если функция непрерывна в односвязной области и $\int_{\Delta} f(z) dz = 0$, то функция голоморфна $\forall \Delta \in D$.

Определение 53. Пусть $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset C(D)$. Говорят, что эта последовательность сходится равномерно к f внутри D , если $\forall K \in D \subseteq D \ f_n \rightrightarrows f$ на K , то есть $\forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0$

$$\sup_{I \in K} |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon.$$

Теорема 31 (Вейерштрасса). Равномерный предел последовательности голоморфных функций является голоморфной функцией, то есть если $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{H}(D)$ и $f_n \rightrightarrows f$ внутри D , то $f \in \mathcal{H}(D)$.

Определение 54 (Корень многочлена). Корнем многочлена $P(z) := a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$, где $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$, называется число $z_0 \in \mathbb{C} : P(z_0) = 0$.

Теорема 32 (Безу). Если z_0 – корень многочлена P , то \exists многочлен $Q : P(z) = (z - z_0) \cdot Q(z_0)$.

Теорема 33 (Основная теорема алгебры). Каждый многочлен с комплексными коэффициентами в $\deg \geq 1$ имеет к.б. один комплексный корень.

Следствие 9. Каждый многочлен n -ой степени имеет n корней.

Лекция 6: Продолжение

от 21 мар 12:45

1.4 Ряды Тейлора и Лорана. Элементы теории вычетов

1.4.1 Разложение голоморфной функции в ряд Тейлора

Теорема 34. Пусть $f \in \mathcal{H}(D)$. Тогда $\forall z_0 \in D \exists r > 0$: при $|z - z_0| < r$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n.$$

Следствие 10. $\mathcal{H}(D) = \mathcal{A}(D)$.

Теорема 35. Пусть f голоморфна в $B_r(z_0) \forall z \in B_r(z_0) f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n$.

Тогда $\forall n \in \mathbb{N}$

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi - z_0| = \rho} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi \quad \forall \rho \in (0, r).$$

То есть любой степенной ряд является рядом Тейлора для своей суммы.

Доказательство. Радиус сходимости $\geq r$, $\rho \in (0, r)$.

$|z - z_0| = \rho \implies$ ряд сходится, рассмотрим:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi - z_0| = \rho} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{k+1}} d\xi = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi - z_0| = \rho} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} C_n (\xi - z_0)^n}{(\xi - z_0)^{k+1}} d\xi = \\ &= -\frac{k!}{2\pi i} \cdot C_k \cdot 2\pi i = C_k \cdot k!, \\ C_k &= \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}. \end{aligned}$$

□

Теорема 36 (Неравенство Коши). Пусть f голоморфна в D и $B_r[z_0] \subset D$, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(z - z_0)^n$.
 Пусть $M := \sup_{|z-z_0| \leq r} |f(z)|$. Тогда $\forall n \in \mathbb{N} \quad |C_n| \leq \frac{M}{r^n}$.

Определение 55 (Предельная точка). Точка называется *предельной точкой множества*, если в любой ее окрестности есть точки множества, отличные от данной.

Следствие 11. Любые две аналитические в области функции, совпадающие на множестве, имеющем в этом множестве предельную точку, тождественно равны.

1.4.2 Ряды Лорана

Определение 56 (Ряд Лорана). *Рядом Лорана* называется степенной ряд вида $\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n(z - z_0)^n$. Ряд Лорана раскладывается на сумму двух рядов:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n(z - z_0)^n := \sum_{n=0}^{\infty} C_n(z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} C_{-n}(z - z_0)^{-n}.$$

Ряд Лорана сходится \iff сходятся обе его составляющие.

Область сходимости ряда Лорана: $0 \leq r < |z - z_0| < R \leq +\infty$.

Теорема 37 (О ряде Лорана). Если функция f голоморфна в кольце $r < |z - z_0| < R$, то в этом кольце она разлагается в ряд Лорана.
 $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n(z - z_0)^n$ с коэффициентами C_n , определяемыми формулами:

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi - z_0| = \rho} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi \quad \forall \rho \in (r, R).$$

1.4.3 Классификация изолированных особых точек

Определение 57 (Правильная точка). Точка $z_0 \in \text{dom } f$ называется *правильной точкой* функции f , если f определена в некоторой области и непрерывна в самой функции.

Определение 58 (Особая точка). *Особой* точкой функции называется предельная точка ее области определения, этой области не принадлежащая.

Определение 59 (Изолированная особая точка). Особая точка называется *изолированной* особой точкой, если в некоторой ее окрестности других особых точек нет.

Замечание. Особая точка функции называется изолированной, если в проколотовой окрестности этой точки функция голоморфна.

Пример.

$$f(z) = \frac{1}{\sin \frac{1}{z}},$$

$z_0 = 0$ – особая точка,
 $\sin \frac{1}{z} = 0 \implies \frac{1}{z} = \pi k, k \in \mathbb{Z},$
 $z_k = \frac{1}{\pi k}, k \in \mathbb{Z}$ – особые точки,

$$\frac{1}{\pi(k+1)} < \frac{1}{\pi k} < \frac{1}{\pi(k-1)}.$$

◇

Теорема 38 (О путях и полюсах). Изолированная особая точка z_0 функции f является полюсом порядка m функции $f \iff$ она является путем m -го порядка функции $\rho(z) = \frac{1}{f(z)}$.

Доказательство. Самостоятельно. □

Теорема 39 (Сохоцкий). Изолированная особая точка функции является существенно особой точкой \iff в любой ее окрестности функция принимает значения сколь угодно близкие к любому числу $a \in \mathbb{C}$.

Определение 60 (A -точка). Пусть $A \in \mathbb{C}$, точка z называется A -точкой функции f , если $f(z) = A$.

Теорема 40 (Большая теорема Пикара). В окрестности существенно особой точки z_0 голоморфной функции $f \forall A \in \mathbb{C}$, за исключением быть может одного, существует последовательность A -точек функции f , сходящаяся к точке z_0 .

1.4.4 Вычеты

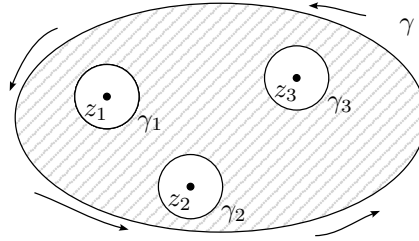
Определение 61 (Вычет функции относительно точки). Если z_0 – изолированная особая точка функции f , то *вычетом* f относительно z_0 называется интеграл $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz$, где γ – произвольный контур, ограничивающий область D : f непрерывна в $\text{cl } D \setminus \{z_0\}$ и голоморфна в $D \setminus \{z_0\}$, то есть в качестве γ можно брать любую окрестность сколь угодно малого радиуса с центром в точке z_0 .

Обозначение. $\text{Res } f|_{z=z_0} := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz$.

Теорема 41 (Основная теорема теории вычетов). Пусть γ – замкнутый контур, ограничивающий односвязную область D , функция f непрерывна на $\text{cl } D = D \cup \gamma$ и голоморфна внутри D , за исключением конечного числа точек. Тогда:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^m \text{Res } f|_{z_k}.$$

Доказательство. $m = 3$,



$$\Gamma = \gamma \cup \gamma_1^- \cup \gamma_2^- \cup \gamma_3^-,$$

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0 = \int_{\gamma} f(z) dz - \int_{\gamma_1} f(z) dz - \int_{\gamma_2} f(z) dz - \int_{\gamma_3} f(z) dz.$$

□

Теорема 42 (О сумме вычетов). Если функция голоморфна в $\overline{\mathbb{C}}$, за исключением конечного числа изолированных о.т., то

$$\sum_{k=0}^m \operatorname{Res}_{z_k} f = 0.$$

1.4.5 Вычисление интегралов

Определение 62. Главным значением по Коши интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ называется

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) dx =: Vp \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx.$$

Замечание. Если несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ сходится, то его значение совпадает с его главным значением по Коши. Обратно неверно.

Лемма 3. Пусть

1. Для некоторого $R_0 > 0$ функция f непрерывна при $|z| > R_0$ и $\operatorname{Im} z \geq 0$.
2. $\lim_{R \rightarrow \infty} \sup_{z \in \gamma_R} |zf(z)| = 0$.

Тогда $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} f(z) dz = 0$.

Лемма 4 (Жордана). Пусть $\alpha > 0$,

1. Для некоторого $R_0 > 0$ функция f непрерывна при $|z| > R_0$ и $\operatorname{Im} z \geq 0$.
2. $\lim_{R \rightarrow \infty} \sup_{z \in \gamma_A} |f(z)| = 0$.

Тогда $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} e^{i\alpha z} f(z) dz = 0$.

1.4.6 Гармонические функции

Определение 63 (Гармоническая функция). Определенная в односвязной области $D \subset \mathbb{R}^2$ функция $u(x, y)$ называется *гармонической функцией*, если $u \in C^2(D)$ и

$$\Delta u := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \equiv 0,$$

где Δ – оператор Лапласа.

Теорема 43. Если функция f голоморфна в односвязной области $D \subset \mathbb{C}$, то ее вещественная и мнимая части являются гармоническими функциями в этой области.

Доказательство.

$$f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial v}{\partial x} \right) = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}.$$

Получаем, что смеш. производные непрерывны, значит они равны
 $\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \equiv 0 \Rightarrow$ вещественная и мнимая части являются гармоническими. \square

1.4.7 Целые и мероморфные функции

Определение 64 (Целая функция). Голоморфная в \mathbb{C} функция называется *целой функцией*. Целая функция называется *трансцендентной*, если бесконечность является ее существенно о.т.

Определение 65 (Мероморфная функция). Функция, голоморфная в области D всюду, за исключением полюсов, называется *мероморфной* в этой области функцией.

Теорема 44 (О мероморфной функции). Если ∞ является устранимой о.т. мероморфной функции, то данная функция является частным двух многочленов, то есть является рациональной функцией.

Доказательство. ∞ – изолированная о.т. (в силу условия), z_1, \dots, z_n – конечное число оптимальных точек.

$$f(z) = h(z) + \sum_{k=1}^m f_k \left(\frac{1}{z - z_0} \right),$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = C_0, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} h(z) = C_0$$

$$\Rightarrow h = \text{const} \text{ (по теореме Лиувилля)} \Rightarrow f(z) = C_0 + \sum_{k=1}^m f_k \left(\frac{1}{z - z_k} \right) = \frac{P(z)}{Q(z)}. \quad \square$$

Лекция 7: Продолжение

от 28 мар 12:45

1.5 Основные принципы комплексного анализа

1.5.1 Принцип аргумента и Теорема Руше

Определение 66. Пусть f голоморфна в некоторой проколотой окрестности точки z_0 , а z_0 не хуже, чем полюс, тогда:

$$f(z) = \sum_n C_n (z - z_0)^n,$$

$$M_f(z_0) := \inf \{n \in \mathbb{Z} : C_n \neq 0\}.$$

Лемма 5. Пусть z_0 – обычная точка или полюс функции f . Тогда

$$\text{Res}_{z_0} \frac{f'}{f} = M_f(z_0).$$

Примечание. $\frac{f'}{f} = (\ln f(z))'$ – логарифмическая производная функции f .

Замечание. Предположим, что есть многозначная функция ϕ и кривая γ . Если мы можем выделить ветвь функции ϕ , которая будет непрерывна в окрестности $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma(a), \gamma(b)$, то вариацией этой функции вдоль кривой γ

Литература

- [1] Шабат – «Введение в комплексный анализ, 1976» (том 1)
- [2] Привалов – «Введение в ТФКП, 1967»
- [3] Бицадзе – «Основы теории аналитических функций комплексного переменного, 1984»
- [4] Волковыский, Лунц, Араманович – «Сборник задач по ТФКП», 1975»
- [5] Гилев В.М. – «Основы комплексного анализа. Ч.1», 2000»
- [6] Исапенко К.А. – «Комплексный анализ в примерах и упражнениях (Ч.1, 2017, Ч.2, 2018)»
- [7] Мещеряков Е.А., Чемеркин А.А. – «Комплексный анализ. Практикум»
- [8] Боярчук А.К. – «Справочное пособие по высшей математике» (том 4)