Вопросы к экзамену по Теории Графов и Комбинаторным Алгоритмам
3 семестр

Данил Заблоцкий

18 января 2024 г.

Содержание

1 Определение графа. Примеры графов. Степени вершин графа. Лемма о рукопожатиях.

Определение 1 (Неориентированный граф, вершины и ребра графа). *Неориентированный граф* – пара множеств $G = (V, E)$, где

V – непустое конечное множество,
E – множество, состоящее из неупорядоченных пар элементов из V.

Элементы множества V называются *вершинами*, а элементы E – *ребрами* графа.

Примечание. Если $u, v \in V$, $\{u, v\} \in E$, то будем записывать

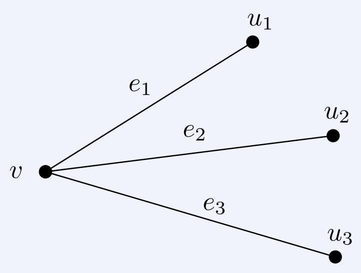
$$e = uv \ (= vu)$$

и говорить, что вершины u и v *смежны*, вершина u и ребро e – *инцидентны*.

Определение 2 (Степень вершины). *Степенью вершины* v называется число инцидентных ей ребер.

Обозначение: $d(v)$ $\big(deg(v)\big)$

Пример. $deg(v) = 3$



Пример. *Пустой граф* – граф без ребер: O_n.

Пример. *Полный граф* – граф, любая пара которого смежна: K_n.

Примечание.

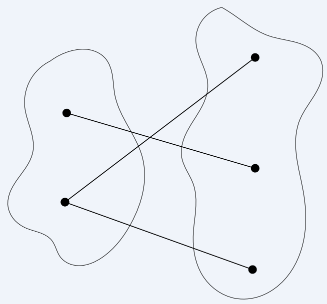
$$|E| = C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2} \text{ – число ребер.}$$

Пример. *Двудольный граф* – граф, вершины которого разбиты на 2 непересекающиеся части (доли) так, что любое ребро ведет из одной доли в другую.

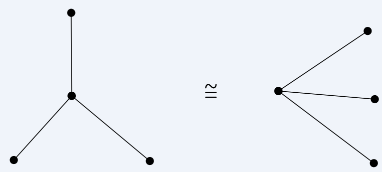
Если любая вершина одной доли смежна с любой вершиной другой доли, то такой граф называется *полным двудольным*.

Полный двудольный граф с долями размера p и q обозначают: $K_{p,q}$,

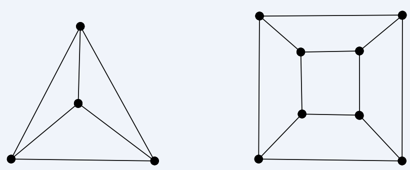
$$|E| = p \cdot q.$$



Пример. *Звезда* – полный двудольный граф $K_{1,q}$: одна доля состоит из одной вершины, а из нее веером расходятся лучи.



Пример. Графы многогранников



тетраэдр куб

Лемма 1 (О рукопожатиях). Пусть $G = (V, E)$ – произвольный граф. Сумма степеней всех вершин графа G – четное число, равное удвоенному количеству его ребер:

$$\sum_{v \in V} deg_G(v) = 2|E| \tag{1}$$

Доказательство. Индукция по числу ребер графа G.

1. Если $|E| = 0$, то формула 1 верно.
2. Предположим, что формула 1 верна для любого графа, в котором число ребер $\leqslant m$, где $m \geqslant 0$.
3. Пусть $|E| = m + 1$. Выберем произвольное ребро $e = uv$ и удалим его из графа G. Получим граф $G' = (V, E')$, где $|E'| = m$.

   По предположению индукции для графа G' формула 1 верна:

$$\sum_{v \in V} deg_{G'}(v) = 2|E'| = 2m.$$

   Вернем ребро $e = uv$:

$$\sum_{v \in V} deg_G(v) = \sum_{v \in V} deg_{G'}(v) + 2 = 2m + 2 = 2(m + 1) = 2|E|.$$

□

2 Маршруты, цепи, циклы. Лемма о выделении простой цепи. Лемма об объединении простых цепей.

Определение 3 (Маршрут)**.** *Маршрутом*, соединяющим вершины u и v ((u, v)-маршрут), называется чередующаяся последовательность вершин и ребер вида

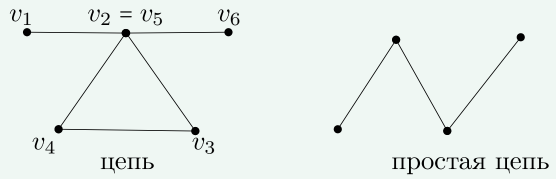
$$(u = v_1, e_1, v_2, \ldots, v_k, e_k, v_{k+1} = v)$$

такая, что $e_i = v_i v_{i+1},\ i = \overline{1, k}$.

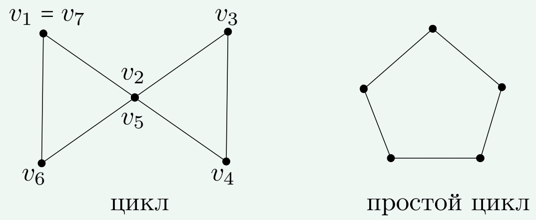
Определение 4 (Замкнутый маршрут)**.** Маршрут называется *замкнутым*, если первая вершина совпадает с последней, то есть

$$v_1 = v_{k+1}.$$

Определение 5 (Цепь, простая цепь). Маршрут называется *цепью*, если в нем все ребра различны и *простой цепью*, если в нем все вершины различны (за исключением, быть может, первой и последней).



Определение 6 (Цикл, простой цикл). Замкнутая цепь называется *циклом*, а замкнутая простая цепь – *простым циклом*.

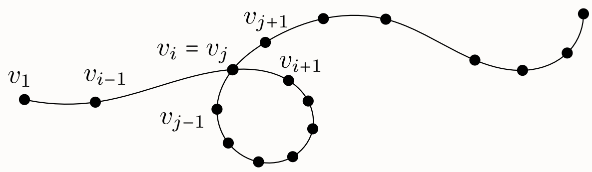


Лемма 2 (О выделении простой цепи). Всякий незамкнутый (u, v)-маршрут содержит простую (u, v)-цепь.

Доказательство.

1. Если все вершины (u, v)-маршрута различны, то (u, v) – простая цепь.

2. Пусть v_i – первая из вершин, имеющая в нем повторение, а v_j – последнее повторение.



$(v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}, v_i, v_{j+1}, \ldots)$ – заменим на более короткий, исключив цикл. Если в более коротком маршруте еще есть повторяющиеся вершины, то поступаем также.

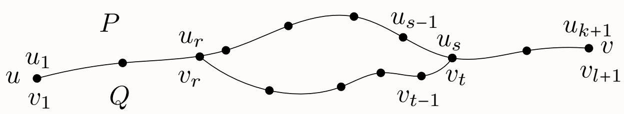
В конце концов получим незамкнутый (u, v)-маршрут, в котором все вершины различны, то есть простую цепь.

□

Лемма 3 (Об объединении простых цепей). Объединение двух несовпадающих простых (u, v)-цепей содержит простой цикл.

Доказательство. Предположим, что $P = (u_1, \dots, u_{k+1})$, $Q = (v_1, \dots, v_{l+1})$ – две несовпадающие простые цепи:

$$u = u_1 = v_1, \quad v = u_{k+1} = v_{l+1},$$



Предположим, что u_{r+1} и v_{r+1} – первые несовпадающие вершины этих цепей, а $u_s = v_t$ – первые совпадающие за v_{r+1} и u_{r+1}. Тогда

$$\left.\begin{array}{l}(u_r, u_s) \text{ – фрагмент } P \\ (v_r, v_s) \text{ – фрагмент } Q\end{array}\right. \text{ – образуют простой цикл.}$$

□

3 Эйлеровы циклы. Критерий существования эйлерова цикла (теорема Эйлера).

Определение 7 (Эйлеров цикл). Пусть $G = (V, E)$ – произвольный граф (мультиграф). Цикл в графе G называется *эйлеровым*, если он содержит все ребра графа.

Определение 8 (Эйлеров граф). Граф называется *эйлеровым*, если в нем есть эйлеров цикл.

Теорема 1 (Эйлер, 1736). В связном графе $G = (V, E)$ существует эйлеров цикл $\Leftrightarrow$ все вершины графа G четны (то есть имеют четную степень).

Доказательство.

$\boxed{\Rightarrow}$ (необходимость)

Пусть граф G – эйлеров. Эйлеров цикл, проходя через каждую вершину графа, входит в нее по одному ребру и выходт по другому. Значит каждая вершина должна быть инцидентна четному числу ребер.

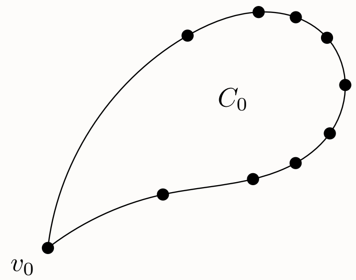
$\boxed{\Leftarrow}$ (достаточность)

Пусть G – связен, все его вершины имеют четную степень.

Рассмотрим следующий алгоритм и докажем, что он обязательно построит эйлеров цикл.

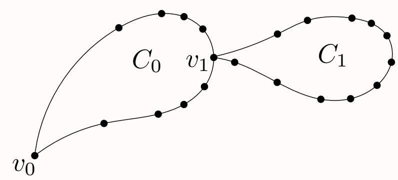
Примечание (Алгоритм построения эйлерова цикла)**.** Рассмотрим произвольную вершину v_0 и построим из нее маршрут C_0.

Пройденные вершины запоминаем, а ребра удаляем. Действуем так до тех пор, пока не получим граф G_1, в котором нет ребер инцидентных очередной вершине маршрута C_0.



Если C_0 содержит все ребра графа G, то он и есть эйлеров цикл и все доказано.

В противном случае, в силу связности графа G в цикле C_0 найдется вершина v_1, инцидентная некоторому ребру графа G_1. Начинаем стоить из нее (v_1) цикл C_1 в графе G_1.



Если все циклы C_0 и C_1 содержат все ребра графа G_1, то алгоритм завершает работу.

В противном случае, в одном из циклов C_0, C_1 найдется вершина v_2, инцидентная какому-то ребру графа G_2. Строим из нее цикл C_2 в графе G_2 и так далее.

В конце концов, получим, что после построения цикла C_k, оставшийся граф G_{k+1} пуст $\Rightarrow$ в построенных циклах все ребра G. Тогда контруируем в графе G эйлеров цикл из ребер построенных циклов.

□

4 Гамильтоновы циклы. Достаточные условия существования гамильтонова цикла (теоремы Оре и Дирака).

Определение 9 (Гамильтонов цикл, граф)**.** Пусть $G = (V, E)$ – обыкновенный граф, $|V| = n$. Простой цикл в графе G называется *гамильтоновым*, если он проходит по всем вершинам графа.

Граф называется *гамильтоновым*, если он содержит гамильтонов цикл.

Определение 10 (Гамильтонова цепь)**.** Простая цепь в графе G называется *гамильтоновой*, если она проходит по всем вершинам графа.

Теорема 2 (Оре, 1960)**.** Пусть $n \geqslant 3$. Если в n-вершинном графе G для любой пары несмежных вершин u, v выполнено условие

$$deg(u) + deg(v) \geqslant n,$$

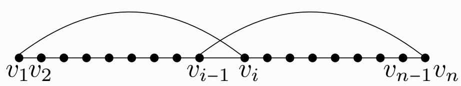
то граф – гамильтонов.

Доказательство. От противного. Предположим, что граф G удовлетворяет условию теоремы, но G – негамильтонов.

Соединив любые две несмежные вершины графа ребром, мы вновь получим граф, удовлетворяющий условию теоремы. Поскольку полный граф гамильтонов, то существует мауксимальный негамильтонов граф G^*, удовлетворяющий условию теоремы.

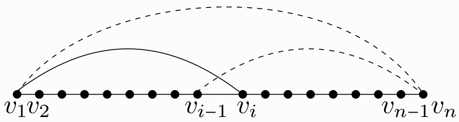
Это значит, что соединив две несмежные вершины графа G^* ребром, мы получим гамильтонов цикл. Поэтому любые две вершины графа G^* соединены гамильтоновой цепью.

Выберем в G^* пару несмежных вершин v_1, v_n и пусть $(v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}, v_n)$ – гамильтонова цепь в G^*.



Если в графе G^* вершины v_1 и v_i – смежные, то вершины v_{i-1} и v_n не могут быть смежными, иначе в G^* существовал бы гамильтонов цикл

$$(v_1, v_i, v_n, v_{i-1}, v_1),$$



Отсюда следует, что

$$deg(v_n) \leqslant n - 1 - deg(v_1).$$

Следовательно, $deg(v_1) + deg(v_n) \leqslant n - 1$ – противоречие с условием.

□

Теорема 3 (Дирак, 1953)**.** Пусть $n \geqslant 3$. Если в n-вершинном графе G для любой вершины выполнено условие

$$deg(v) \geqslant \frac{n}{2},$$

то граф – гамильтонов.

Доказательство. Теорема Дирака следует из теоремы Оре. □

5 Изоморфизм графов. Помеченные и непомеченные графы. Теорема о числе помеченных n-вершинных графов.

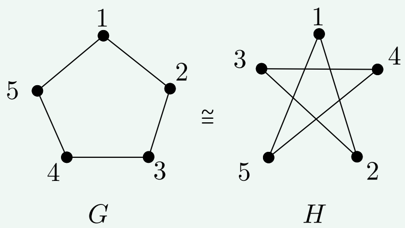
Определение 11 (Изоморфные графы)**.** Графы $G = (V_G, E_G)$, $H = (V_H, E_H)$ называются *изоморфными*, если между множествами из вершин существует взаимнооднозначное соответствие

$$\phi : V_G \to V_H,$$

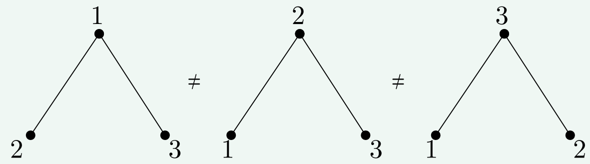
сохраняющее смежность, то есть $\forall u, v \in V_G$

$$uv \in E_G \Leftrightarrow \phi(u)\phi(v) \in E_H.$$

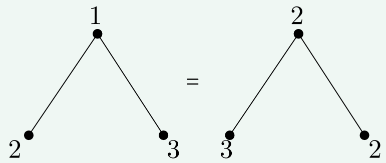
Обозначение: $G \cong H$



Определение 12 (Помеченный граф)**.** Граф называется *помеченным*, если его вершины отличаются одна от другой какими-то метками.



3 разных помеченных графа



2 одинаковых помеченных графа

Теорема 4 (О числе помеченных n-вершинных графах)**.** Число p_n различных помеченных n-вершинных графов с фиксированным множеством вершин равно

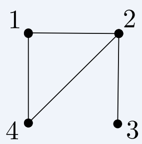
$$2^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

Доказательство. В помеченном n-вершинном графе G можно перенумеровать все пары вершин (таких пар всего $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$) и поставить графу G взаимнооднозначное соответствие его характеристический вектор длины $k = \frac{n(n-1)}{2}$, i-ая компонента которого равна

$$e_i = \begin{cases} 1, & \text{если пара вершин с номером } i \text{ смежна} \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Пример. $e = (\underset{e_1}{1}, \underset{e_2}{0}, \underset{e_3}{1}, \underset{e_4}{1}, \underset{e_5}{1}, \underset{e_6}{0})$

G:



$$\underset{1}{\{1,2\}}, \underset{2}{\{1,3\}}, \underset{3}{\{1,4\}}, \underset{4}{\{2,3\}}, \underset{5}{\{2,4\}}, \underset{6}{\{3,4\}}$$

Тогда p_n равно числу булевых векторов длины $k = \frac{n(n-1)}{2}$, то есть

$$p_n = 2^k = 2^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

□

6 Проблема изоморфизма. Инварианты графа. Примеры.

Определение 13 (Инвариант графа). *Инвариант графа* $G = (V, E)$ – это число, набор чисел, функция или свойство связанные с графом и принимающие одно и то же значение на любом графе, изоморфном G, то есть

$$G \cong H \Rightarrow i(G) = i(G).$$

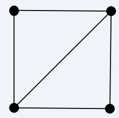
Инвариант i называется *полным*, если

$$i(G) = i(H) \Rightarrow G \cong H.$$

Обозначение: $i(G)$

Пример.

1. $n(G)$ – число вершин.
2. $m(G)$ – число ребер.
3. $\delta(G)$ – min степень.
4. $\Delta(G)$ – max степень.
5. $\phi(G)$ – плотность графа G – наибольшее число попарно смежных вершин.
6. $\varepsilon(G)$ – неплотность – наибольшее число попарно несмежных вершин.
7. $ds(G)$ – вектор степеней (или степенная последовательность) – последовательность степеней всех вершин, выписанная в порядке неубывания.
8. $\chi(G)$ – хроматическое число – наименьшее число χ, для которого граф имеет правильную χ-раскраску множества вершин (правильная раскраска – раскраска, при которой смежные вершины имеют разный цвет).

Q_4 :


$n(Q_4) = 4$ $\quad \phi(Q_4) = 3$
$m(Q_4) = 5$ $\quad \varepsilon(Q_4) = 2$
$\delta(Q_4) = 2$ $\quad ds(Q_4) = (2, 2, 3, 3)$
$\Delta(Q_4) = 3$ $\quad \chi(Q_4) = 3$

7 Связные и несвязные графы. Лемма об удалении ребра. Оценки числа ребер связного графа.

Определение 14 (Соединимые вершины, связный граф)**.** Две вершины u, v графа G называются *соединимыми*, если в G $\exists$ (u, v)-маршрут.

Граф называется *связным*, если в нем любые две вершины соединимы.

Замечание. Тривиальный граф считается связным.

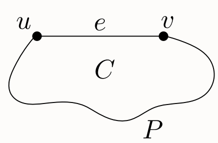
Определение 15 (Циклическое, ациклическое ребро)**.** Ребро e называется *циклическим*, если оно принадлежит некоторому циклу, и *ациклическим* – в противном случае.

Лемма 4 (Об удалении ребра)**.** Пусть $G = (V, E)$ – связный граф, $e \in E$.

1. Если e – циклическое ребро, то граф $G - e$ – связен.
2. Если e – ациклическое, то граф $G - e$ имеет ровно две компоненты связности.

Доказательство.

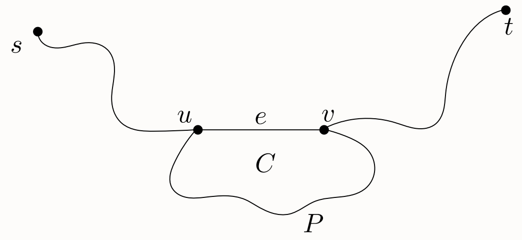
1. Пусть $e = (u, v)$ – циклическое, входит в цикл C, который можно рассмотреть как объединение ребра e и (u, v)-цепи P.



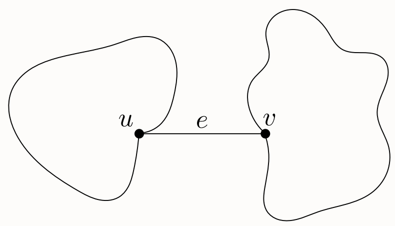
Чтобы доказать, что $G - e$ – связен, нужно доказать, что любые его две вершины соединимы.

Рассмотрим две произвольные вершины, назовем их s и t. Так как по условию G – связный, то $\exists$ (s,t)-маршрут.

Если этот (s,t)-маршрут проходит по ребру e, то заменим в нем ребро e на (u,v)-цепь P, получили новый (s,t)-маршрут, не проходящий по $e \Rightarrow G - e$ – связен.

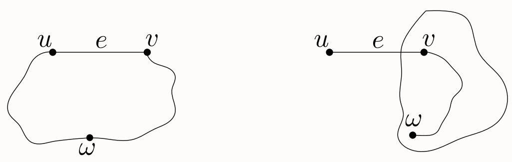


2. Пусть $e = uv$ ацикличен, очевидно, что $G - e$ – несвязный.



Чтобы доказать, что в $G-e$ ровно 2 компоненты связности, нужно доказать, что любая вершина ω содержится в одной компоненте с в u или v.

По условию G – связен, значит в нем $\exists$ простая (u,ω)-цепь и простая (v,ω)-цепь. Заметим, что ребро e может входить в одну, и только в одну, из этих цепей, иначе e было бы циклическим.



Предположим, что ребро e входит в (u,ω)-цепь. Тогда вершины v и ω находятся в одной компоненте связности.

$\square$

Теорема 5 (Оценки числа ребер связного графа)**.** Если G – связный (n, m)-граф, то

$$n - 1 \leqslant m \leqslant \frac{n(n-1)}{2}.$$

Доказательство. Доказательство требует только нижняя оценка.

Пусть $G = (V, E)$ – связный.

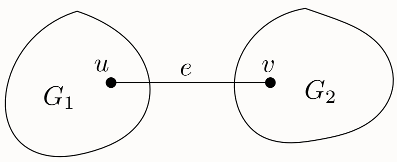
Доказывать будем индукцией по числу $|E|$ ребер. Если $|E| = m = 0$, то G – тривиальный граф, то есть $|V| = n = 1 \Rightarrow m = n - 1 = 0$. Предположим, что для графа, где $|E| < m$, неравенство верно. Пусть $|E| = m \geqslant 1$.

1. Если в G есть циклы, то рассмотрим какое-нибудь циклическое ребро e и удалим его из G. Тогда по лемме об удалении ребра, $G - e$ связен, а количество ребер $m - 1$.

   По предположению индукции, $m - 1 \geqslant n - 1 \Rightarrow m \geqslant n > n - 1$.

2. Пусть в G нет циклов, рассмотрим произвольное ребро e, оно ациклическое, удалим его, тогда в $G - e$ ровно две компоненты связности.

   Обозначим их G_1 и G_2.

   Пусть G_1 – (n_1, m_1)-граф, а G_2 – (n_2, m_2)-граф. Тогда

   $$m_1 \geqslant n_1 - 1$$
   $$m_2 \geqslant n_2 - 1$$

   (по предположению индукции, так как $m_1 < m,\ m_2 < m$)

   Следовательно,

   $$m - 1 = m_1 + m_2 \geqslant n_1 - 1 + n_2 - 1 = n_1 + n_2 - 2 = n - 2,$$

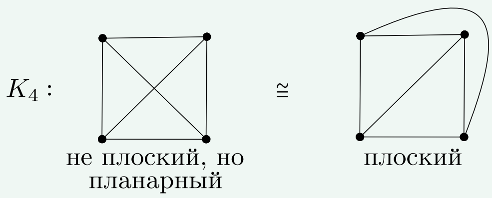
   то есть $m - 1 \geqslant n - 2 \Rightarrow m \geqslant n - 1$.

□

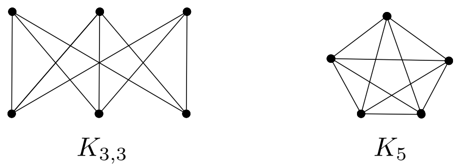
8 Плоские и планарные графы. Графы Куратовского. Формула Эйлера для плоских графов.

Определение 16 (Плоский, планарный граф). *Плоский граф* – это такой граф, вершины которого являются точками плоскости, а ребра – непрерывными плоскими линиями без самопересечений, соединяющими вершины так, что никакие два ребра не имеют общих точек вне вершин.

Планарный граф – это граф, изоморфный некоторому плоскому графу.



Замечание. Несложно доказать, что графы $K_{3,3}$ и K_5 – непланарны.



Определение 17 (Гомеоморфные графы). Два графа называются *гомеоморфными*, если их можно получить из одного и того же графа с помощью разбиения ребер, то есть замены некоторых ребер простыми цепями.

Теорема 6 (Понтрягин-Куратовский). Граф планарен $\Leftrightarrow$ он не содержит подграфов, гомеоморфных $K_{3,3}$ или K_5.

Определение 18 (Грань). *Гранью* плоского графа называется максимальное множество точек плоскости, каждая пара из которых может быть соединена непрерывной плоскоской линией, не пересекающей ребер графа.

Теорема 7 (Формула Эйлера)**.** Для всякого связного плоского графа верна формула

$$n - m + l = 2, \tag{2}$$

где n – число вершин, m – число ребер, l – число граней графа.

Доказательство. Рассмотрим две операции перехода от связного плоского графа G к его связному плоскому подграфу, не изменяющие величины $n - m + l$.

1. Удаление ребра, принадлежащего сразу двум граням (одно из которых может быть внешней), при этом m и l уменьшаются на 1.

2. Удаление висячей вершины вместе с инцидентным ребром. При этом n и m уменьшаются на 1.

Очевидно, что любой связный плоский граф, выполняя эти две операции, можно превратить в тривиальный граф, не меняя величины $n - m + l$, а для тривиального графа:

$$n - m + l = 2.$$

Значит формула 2 верна для любого связного плоского графа. □

9 Деревья. Первая теорема о деревьях.

Определение 19 (Ациклический граф, дерево)**.** Граф называется *ациклическим*, если в нем нет цикла. Связный ациклический граф называется *деревом*.

Теорема 8 (Первая теорема о деревьях)**.** Для (n, m)-графа G следующие утверждения эквивалентны:

1. G – дерево, то есть связный ациклический граф.

2. G – связен и $m = n - 1$.

3. G – ациклический и $m = n - 1$.

Доказательство.

$\boxed{1. \Rightarrow 2.}$ Пусть граф $G = (V, E)$ связен и ациклический.

Очевидно, что G – плоский граф, имеющий одну (внешнюю) грань. По формуле Эйлера:

$$n - m + 1 = 2 \Rightarrow m = n - 1.$$

$\boxed{2. \Rightarrow 3.}$ Пусть G связен и $m = n - 1$.

Предположим противное, то есть в графе G есть цикл.

Рассмотрим произвольное ребро e этого цикла и удалим его из графа G.

По лемме об удалении ребра, граф $G - e$ тоже связен, а число ребер в нем: $n - 2$, но по теореме 5, число ребер в связном графе $\geqslant n - 1$ – противоречие.

Значит в графе G циклов нет $\Rightarrow G$ – ациклический.

$\boxed{3. \Rightarrow 1.}$ Пусть G ациклический и число ребер $m = n - 1$.

Докажем, что G – связен. Обозначим k – число компонент связности.

Пусть i-ая компонента является (n_i, m_i)-графом, $i = \overline{1, k}$. Каждая компонента является деревом и по ранее доказанному $m_i = n_i - 1$, тогда

$$n - 1 = m = \sum_{i=1}^{k} m_i = \sum_{i=1}^{k} (n_i - 1) = \sum_{i=1}^{k} n_i - k = n - k \Rightarrow \boxed{k = 1},$$

то есть в графе G одна компонента связности $\Rightarrow G$ – связен.

□

10 Деревья. Вторая теорема о деревьях.

Теорема 9 (Вторая теорема о деревьях)**.** Для (n, m)-графа G следующие утверждения эквивалентны:

1. G – дерево, то есть связный ациклический граф.

4. G – ациклический и если любую пару его несмежных вершин соединить ребром, то полученный граф будет содержать ровно один цикл.

5. Любые две вершины графа G соединены единственной простой цепью.

Доказательство.

$\boxed{1. \Rightarrow 4.}$ Пусть G дерево, то есть связный ациклический граф.

В связном графе G любые две несмежные вершины u и v соединены простой (u, v)-цепью.

Если соединены u и v ребром e, то образуется цикл. А два цикла образоваться не могут в силу свойства циклов.

$\boxed{4. \Rightarrow 5.}$ Пусть G ациклический и если любую пару его несмежных вершин соединить ребром, то полученный граф будет содержать ровно один цикл.

Любые две несмежные вершины u и v графа G соединимы, иначе при добавлении ребра не получился бы цикл.

Любые две смежные вершины тоже соединимы. В силу леммы о выделении простой цепи любые две вершины графа G соединены цепью, а две цепи быть не может, иначе в графе G был бы цикл, а он ациклический.

$\boxed{5. \Rightarrow 1.}$ Поскольку любые две вершины графа G соединены одной простой цепью, то граф связен.

Если бы в графе G был цикл, то любые две вершины этого цикла были бы соединены двумя цепями, а это невозможно $\Rightarrow G$ – ациклический.

□

11 Теорема Кэли о числе помеченных n-вершинных деревьев (с леммой).

Лемма 5. При $n \geqslant 2$ существует взаимнооднозначное соответствие между множеством всех помеченных n-вершинных деревьев с метками $1, 2, \ldots, n$ и множеством всех слов длины $n - 2$ в алфавите $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Доказательство.

1. Докажем, что каждому дереву T с множеством вершин $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ можно однозначно поставить в соответствие слово длины $n-2$ в алфавите $\{1, 2, \ldots, n\}$ (код Прюфера (чей блин)).

   Если $n = 2$, то сопоставим дереву T слово длины 0 («пустое» слово).

   Пусть теперь $n \geqslant 3$. Согласно лемме о литьях дерева (искать в конспекте) в дереве T есть листья.

   Обозначим через v_1 первый лист дерева T (то есть висячую вершину с наименьшим номером), а через $e_1 = v_1u_1$ – соответствующее ребро дерева T.

   Удалив из T вершину v_1 вместе с ребром e_1 получим новое дерево T_1. В нем снова найдем лист с наименьшим номером v_2 и ребро $e_2 = v_2u_2$. Эта редукция повторяется, пока после удаления $e_{n-2} = v_{n-2}u_{n-2}$ не останется единственное ребро $e_{n-1} = v_{n-1}u_{n-1}$.

   Тогда слово $\Omega = u_1u_2 \ldots u_{n-2}$ однозначно определяется деревом T (код Прюфера).

2. Покажем, что при $n \geqslant 2$ каждое слово вида $\Omega = u_1u_2 \ldots u_{n-2}$, где $u_i \in V = \{1, 2, \ldots, n\}$ однозначно определяет некоторое дерево на множестве вершин V. В V есть номер, отсутствующий в Ω.

   Найдем наименьший номер $v_1 \in V$, который не входит в Ω. Этот номер определяет ребро $e_1 = v_1u_1$.

Вычеркнем v_1 из V и u_1 из Ω. Найдем наименьший номер $v_2 \in V$ и положим ребро $e_2 = v_2 u_2$ и так далее.

После определения ребра $e_{n-2} = v_{n-2} u_{n-2}$ в множестве $V \setminus \{v_1, v_2, \ldots, v_{n-2}\}$ останется всего два числа. Они определяют последнее ребро $e_{n-1} = v_{n-1} v_n$.

Осталось доказать, что граф $T = (V, E)$ является деревом, где $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}\}$.

Действительно, одно ребро e_{n-1} образует дерево. Пусть ребра $e_{n-1}, e_{n-2}, \ldots, e_{i+1}$ образуют дерево T', $i = \overline{1, n-2}$.

Тогда ребра $e_{n-1}, e_{n-2}, \ldots, e_{i+1}, e_i$, где $e_i = v_i u_i$, тоже образуют дерево, так как u_i является вершиной дерева T', а v_i – нет.

□

Теорема 10 (А. Кэли, 1889)**.** Число различных помеченных деревьев с n вершинами равно

$$t_n = n^{n-2}.$$

Доказательство. При $n = 1$ формула, очевидно, верна.

При $n \geqslant 2$ в силу леммы 5 число помеченных n-вершинных деревьев равно числу слов длины $n - 2$, в которых каждая «буква» может принимать любую из n значений $1, 2, \ldots, n$, а таких слов всего n^{n-2}. □

12 Центр дерева. Центральные и бицентральные деревья. Теорема Жордана.

Примечание. $d(u, v)$ – *длина* самой короткой простой (u, v)-цепи (длина – число ребер).

Определение 20 (Эксцентриситет)**.** *Эксцентриситет* вершины v – расстояние до самой удаленной от v вершины графа:

$$\varepsilon(v) = \max_{u \in V} d(v, u).$$

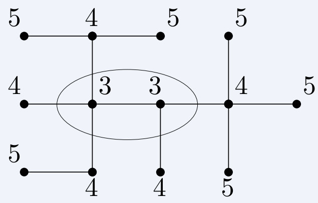
Определение 21 (Радиус)**.** *Радиус* связного графа – это наименьший из эксцентриситетов его вершин:

$$\tau(G) = \min_{v \in V} \varepsilon(v).$$

Определение 22 (Центральная вершина)**.** Вершина называется *центральной*, если ее эксцентриситет равен радиусу графа.

Определение 23 (Центр графа)**.** Множество центральных вершин графа называется его *центром*.

Пример. Центр графа:



Определение 24 (Центральное, бицентральное дерево)**.** Дерево, центр которого состоит из одной вершины, называется *центральным*, а дерево, центр которого состоит из двух смежных вершин – *бицентральным*.

Теорема 11 (Жордан)**.** Центр любого дерева состоит из одной или двух смежных вершин.

Доказательство. Утверждение очевидно для деревьев K_1 и K_2.

Пусть $T = (V, E)$ – некоторое дерево и $|V| = n \geqslant 3$. Удалим из дерева T все листья. Заметим, что при этом эксцентриситет каждой вершины оставшегося дерева T' уменьшился ровно на 1.

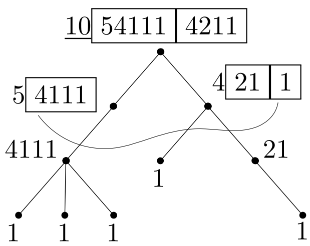
Это означает, что центры деревьев T и T' совпадают. Продолжая процесс удаления листьев, мы получим либо дерево K_1, либо дерево K_2. □

13 Изоморфизм деревьев. Процедура кортежирования (на примере). Теорема Эдмондса.

Примечание (Процедура кортежирования дерева)**.**

Вход: n-вершинное дерево $T = (V, E)$.

Выход: Список натуральных чисел, представляющий кортеж T.



$\underline{3}11 > \underline{2}1$

$4\underline{2}11 > 4\underline{1}11$

Теорема 12 (Эдмондс)**.** Для изоморфизма деревьев необходимо и достаточно, чтобы совпадали их центральные кортежи.

Доказательство.

$\boxed{\Rightarrow}$ $T \cong T'$, тогда при любом изоморфизме ϕ множество V_1 листьев дерева T взаимнооднозначно отображается на множество V_1' дерева T'. Соответствуют друг другу множества V_2 и V_2' вершин второго уровня деревьев и так далее.

Поэтому соответствующие друг другу вершины имеют одинаковый уровень и получают одинаковые кортижи. В частности совпадают центральные вершины.

$\boxed{\Leftarrow}$ Пусть кортежи T и T' одинаковые ($c(T) = c(T')$). По кортежу дерева T однозначно восстанавливается само дерево T, а по кортежу дерева T' – однозначно восстанавливается такое же дерево $T' \Rightarrow T \cong T'$.

□

14 Вершинная и реберная связность графа. Основное неравенство связности.

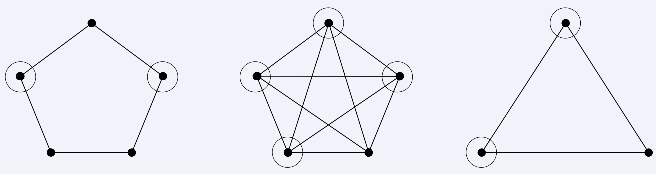
Определение 25 (Вершинная связность (связность))**.** *Вершинной связностью (связностью)* обыкновенного нетривиального графа G называется наименьшее число вершин, в результате удаления которых получается несвязный или тривиальный граф:

$$\mathcal{X}(G).$$

Примечание. Для тривиального графа по определению полагаем

$$\mathcal{X}(O_1) = 0.$$

Пример. Для C_5, K_5 и C_3

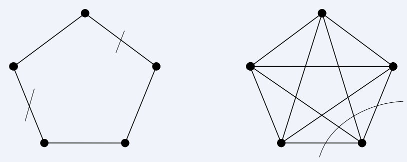


$\mathcal{X}(C_5) = 2$ $\quad$ $\mathcal{X}(K_5) = 4$ $\quad$ $\mathcal{X}(C_3) = 2$

Определение 26 (Реберная связность). *Реберной связностью* нетривиального графа называется наименьшее число ребер, в результате удаления которых получается несвязный граф:

$$\lambda(G).$$

Пример. $\lambda(O_1) = 0$,



$\lambda(C_5) = 2$ $\lambda(K_5) = 4$

Теорема 13 (Основное неравенство связности). Для любого графа G

$$\mathcal{X}(G) \leqslant \lambda(G).$$

Доказательство. Если граф несвязный или тривиальный, то

$$\mathcal{X}(G) = 0 = \lambda(G).$$

Пусть $G = (V, E)$ связный и нетривиальный $\Rightarrow \lambda(G) = \lambda > 0$.

Выберем в графе G λ ребер, в результате удаления которых получается несвязный граф, обозначим:

$$L \subset E,$$

$|L| = \lambda > 0,\ G - L$ – несвязный.

Из определения реберной связности и лемме об удалении ребра следует, что граф $G - L$ имеет ровно две компоненты связности, причем концы каждого ребра из L принадлежат разным компонентам.

Обозначим через V_1 – множество вершин первой компоненты связности, V_2 – множество вершин второй компоненты связности,

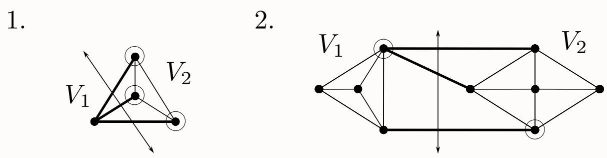
$$|V_1| \leqslant |V_2|.$$

Для каждого ребра из L выберем одну инцидентную ему вершину следующим образом:

1. Если $|V_1| = 1$, то все выбранные вершины лежат в V_2.
2. Если $|V_1| > 1$, то вершины выбраны так, чтобы среди оставшихся были вершины и из V_1, и из V_2.

Множество выбранных таким образом вершин обозначим U.

$$|U| \leqslant |L| = \lambda.$$



(выделены ребра L, обведены вершины U)

Удалим из G все вершины множества U, при этом будут удалены все ребра множества L и может еще какие-то ребра. Следовательно, оставшийся граф $G - U$ будет несвязен или тривиален. Значит:

$$\mathcal{X}(G) \leqslant |U| \leqslant \lambda = \lambda(G).$$

$\square$

15 Отделимость и соединимость. Теорема Менгера.

Определение 27 (Разделение вершин). Пусть $G = (V, E)$ – связный граф, s и t – две несмежные вершины. Говорят, что множество вершин $\Omega \subset V$ *разделяет* s и t, если эти вершины принадлежат разным компонентам связности графа $G - \Omega$.

Определение 28 (k-отделимые вершины). Несмежные вершины s и t называются k-*отделимыми*, если k равно наименьшему числу вершин, разделяющих s и t.

Определение 29 (Вершинно-независимые цепи). Две простые цепи, соединяющие s и t, называются *вершинно-независимыми*, если они не имеют общих вершин, отличных от s и t.

Определение 30 (l-соединимые вершины). Вершины s и t называются l-*соединимыми*, если l равно наибольшему числу вершинно-независимых цепей.

Теорема 14 (Менгер). В связном графе любые две несмежные вершины k-отделимы $\Leftrightarrow$ они k-соединимы.

16 Реберный вариант теоремы Менгера.

Определение 31 (Разделение вершин). Пусть $G = (V, E)$ – связный граф, s и t – две его произвольные вершины. Говорят, что множество ребер $R \subset E$ *разделяет* s и t, если эти вершины принадлежат разным компонентам связности графа $G - R$.

Определение 32 (k-реберно-отделимые вершины). Вершины s и t называются *k-реберно-отделимыми*, если k равно наименьшему числу ребер, разделяющих s и t.

Определение 33 (Вершинно-независимые цепи). Две простые цепи, соединяющие s и t, называются *вершинно-независимыми*, если они не имеют общих вершин, отличных от s и t.

Определение 34 (Реберно-независимые цепи). Две простые цепи, соединяющие s и t, называются *реберно-независимыми*, если они не имеют общих ребер.

Определение 35 (l-реберно-соединимые вершины). Вершины s и t называются *l-реберно-соединимыми*, если наибольшее число реберно-независимых (s, t)-цепей равно l.

Теорема 15 (Реберный аналог теоремы Менгера). В связном графе любые две вершины k-реберно-отделимы $\Leftrightarrow$ они k-реберно-соединимы.

17 Критерии вершинной и реберной k-связности графа.

Следствие (Критерий вершинной k-связности графа). Граф G k-связен $\Leftrightarrow$ любая пара его вершин соединена не менее, чем k вершинно-независимыми цепями.

Следствие (Критерий реберной k-связности графа). Граф k-реберно-связен $\Leftrightarrow$ любая пара его вершин соединена не менее, чем k реберно-независимыми цепями.

18 Ориентированные графы. Основные понятия. Ормаршруты и полумаршруты. Ориентированые аналоги теоремы Менгера.

Определение 36 (Ориентированный граф (орграф), вершины, дуги). *Ориентированный граф (орграф)* G состоит из непустого конечного множества V и конечного множества $E \subset V \times V$ – упорядоченных пар элементов множества V:

$$G = (V, E).$$

Элементы множества V называются *вершинами*, а элементы множества E – *дугами* орграфа G.

Определение 37 (Ориентированный маршрут (ормаршрут), его длина, замкнутый ормаршрут). Пусть $G = (V, E)$ – орграф. *Ориентированным маршрутом (ормаршрутом)* в орграфе G называется чередующаяся последовательность его вершин и дуг:

$$P = (v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots, v_k, e_k, v_{k+1}),$$

в которой $e_i = v_i v_{i+1}$ – дуга орграфа G, $i = \overline{1, k}$.

Ормаршрут P также называется *ориентированным* (v_1, v_{k+1})-*маршрутом*.

Длина такого маршрута равна числу k его дуг.

Ормаршрут P называется *замкнутым*, если $v_1 = v_{k+1}$.

Определение 38 (Полумаршрут). Последовательность

$$P = (v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots, v_k, e_k, v_{k+1})$$

вершин и дуг орграфа $G = (V, E)$ называется *полумаршрутом*, если для любого $i = \overline{1, k}$ либо $e_i = v_i v_{i+1} \in E$, либо $e_i = v_{i+1} v_i \in E$.

Определение 39 (Слабо связный (слабый) орграф). Орграф называется *слабо связным (слабым)*, если любые две его вершины соединены полумаршрутом.

Примечание (Доп. определения). Для ориентированной теоремы Менгера:

Определение 40 (Вершинно-независимые (s,t)-пути). Два (s,t)-пути называются *вершинно-независимыми*, если у них нет общих вершин, отличных от s и t.

Определение 41 ((s,t)-разделяющее множество вершин). Множество W вершин орграфа G называется (s,t)*-разделяющим*, если в орграфе $G - W$ вершина t не достижима из s.

Теорема 16 (Ориентированная теорема Менгера). Пусть $G = (V, E)$ – слабо связный орграф. Для любой пары вершин $s, t \in V$ таких, что $st \notin E$, наименьшее число вершин в (s,t)-разделяющем множестве равно наибольшему числу вершинно-независимых (s,t)-путей.

Доказательство. Доказательство этой теоремы почти дословно, с учетом специфики орграфов, повторяет доказательство теоремы Менгера. □

Примечание (Доп. определения). Для реберного аналога ориентированной теоремы Менгера:

Определение 42 (Независимые по дугам (s,t)-пути). Два (s,t)-пути называются *независимыми по дугам*, если они не имеют общих дуг.

Определение 43 ((s,t)-разделяющее множество дуг). Множество R дуг орграфа G называется (s,t)*-разделяющим*, если в орграфе $G - R$ вершина t не достижима из s.

Теорема 17 (Реберный аналог ориентированной теоремы Менгера). Пусть $G = (V, E)$ – слабо связный орграф. Для любой пары вершин $s, t \in V$ наименьшее число дуг в (s,t)-разделяющем множестве равно наибольшему числу независимых по дугам (s,t)-путей.

Доказательство. Доказательство этой теоремы почти дословно, с учетом специфики орграфов, повторяет доказательство реберного аналога теоремы Менгера. □

19 Ориентированные графы. Достижимость и связность. Три типа связности. Критерии сильной, односторонней и слабой связности орграфа.

Примечание. Существует три различных понятия связности орграфа.

Определение 44 (Достижимая вершина)**.** Если в орграфе G существует ориентированный (u, v)-маршрут, то говорят, что вершина v достижима из вершины u.

Примечание. Любая вершина считается достижимой из самой себя.

Определение 45 (Сильно связный (сильный) орграф)**.** Орграф называется *сильно связным (сильным)*, если любые его две вершины взаимно достижимы.

Определение 46 (Односторонне связный (односторонний) орграф)**.** Орграф называется *односторонне связным (односторонним)*, если для любой пары его вершин хотя бы одна достижма из другой.

Определение 47 (Слабо связный (слабый) орграф)**.** Орграф называется *слабо связным (слабым)*, если любые две его вершины соединены полумаршрутом.

Определение 48 (Несвязный орграф)**.** Орграф называется *несвязным*, если он даже не является слабым.

Теорема 18 (Критерий сильной связности)**.** Орграф является сильно связным, если и только если в нем есть остовный замкнутый ормаршрут.

Доказательство.

$\boxed{\Rightarrow}$ Пусть $G = (V, E)$ – сильно связный орграф и $C = (v_1, v_2, \ldots, v_k, v_1)$ – замкнутый ормаршрут в G, проходящий через максимально возможное число вершин. Предположим, что этот ормаршрут не является остовным и рассмотрим некоторую вершину v, не входящую в C.

Так как G – сильно связный орграф, то в нем существуют ориентированный (v_1, v)-маршрут $P_1 = (v_1, u_2, \ldots, u_p, v)$ и ориентированный (v, v_1)-маршрут $P_2 = (v, \omega_2, \ldots, \omega_q, v_1)$. Но тогда замкнутый ормаршрут

$$C' = (v_1, v_2, \dots, v_k, v_1, u_2, \dots, u_p, v, \omega_2, \dots, \omega_q, v_1)$$

содержит большее, чем C, число вершин, что противоречит выбору ормаршрута C.

Следовательно, C – остовный ормаршрут.

$\boxed{\Leftarrow}$ Пусть u, v – две произвольные вершины орграфа G, а $C = (v_1, v_2, \dots, u, \dots, v, \dots, v_n, v_1)$ – остовный замкнутый ормаршрут.

Тогда вершина v достижима из u по (u, v)-фрагменту ормаршрута C, а вершина u достижима из v по (v, u)-фрагменту C.

□

Теорема 19 (Критерий односторонней связности). Орграф является односторонне связным, если и только если в нем есть остовный ормаршрут.

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы о критерии сильной связности. □

Теорема 20 (Критерий слабой связности). Орграф является слабо связным, если и только если в нем есть остовный полумаршрут.

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы о критерии сильной связности. □

20 Основные структуры данных для представления графов в памяти компьютера. Их достоинства и недостатки.

Примечание.

1. **Матрица инцидентности** Это матрица с n строками, соответствующими вершинам, и m столбцами, соответствующими ребрам или дугам. Для неориентированного графа столбец, соответствующий ребру uv, содержит единицы в строках, соответствующих вершинам u, v, и нули в остальных строках. Для орграфа столбец, соответствующий дуге uv, содержит -1 в строке u, 1 в строке v и нули во всех остальных строках. Петлю, то есть дугу вида vv удобно представлять значением 2 в строке v.

   Достоинства. Классический способ представления графа в теории.

Недостатки. С алгоритмической точки зрения, эта структура является самым худшим способом представления графа.

Во-первых, она требует порядка nm (то есть $\theta(nm)$) ячеек памяти, большинство из которых занято нулями.

Во-вторых, неудобен доступ к информации. Ответ на элементарный вопрос типа «смежны ли некоторые вершины u, v?» или «существует ли вершина, смежная с данной вершиной v?» требует в худшем случае просмотра всех строки, то есть $O(m)$ шагов.

② **Матрица смежности** Это квадратная матрица $A = (a_{ij})$ размера $n \times n$, где

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } v_i v_j \in E \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

В неориентированном графе $v_i v_j \in E \Leftrightarrow v_j v_i \in E$, так что матрица смежности неориентированного графа симметрична, а для ориентированного графа - необязательно.

Достоинства. Прямой доступ к информации – возможность за один шаг получить ответ на вопрос «смежны ли некоторые вершины u, v?», а также удалить или добавить ребро uv.

Недостатки. Во-первых, ответ на вопрос «существует ли вершина, смежная с данной вершиной v?» требует в худшем случае просмотра всей строки, т.е. $O(n)$ операций.

Во-вторых, независимо от числа ребер и дуг графа объем занятой памяти составляет $\theta(n^2)$.

В-третьих, начальное заполнение матрицы смежности путем «естественной» процедуры имеет трудоемкость $\theta(n^2)$, что сразу сводит на нет алгоритмы линейной трудоемкости $O(n)$ при работе с графами, содержащими $O(n)$ ребер.

③ **Массив ребер и дуг**

Достоинства. Эта структура данных более предпочтительна по сравнению с ① и ② в смысле экономии памяти, если m $m \ll n^2$. Для хранения всего графа потребуется всего порядка m ячеек памяти.

Недостатки. Ответ на каждый из основых вопросов: «смежны ли некоторые вершины u, v?» или «существует ли вершина, смежная с данной вершиной v?» – требует в худшем случае просмотра всего массива, т.е. $O(m)$ шагов.

④ **Списки соседних вершин** Это динамическая структура данных, основанная на аппарате ссылочных переменных.

Для неориентированного графа она содержит для каждой вершины $v \in V$ список вершин, смежных с v. Каждый элемент списка является записью, содержащей информационное поле с меткой вершины u, смежной с v, и поле с указателем на следующий элемент списка.

Начало каждого списка хранится в массиве A ссылочных переменных, каждый элемент $A[v]$ которого является указателем на начало списка, содержащего вершины, смежные с вершиной v. Весь такой список вместе с указателем будем обозначать $A[v]$. Заметим, что для неориентированного графа каждое ребро uv представлено в списках дважды: элементом v в списке $A[u]$ и элементом u в списке $A[v]$.

Достоинства. Во-первых, для отыскания вершины, смежной с данной вершиной v, не нужно просматривать строку, как в матрице смежности, а достаточно лишь перейти по ссылке $A[v]$.

Во-вторых, число ячеек памяти, необходимое для представления графа посредством списков соседних вершин, имеет порядок $\theta(n+m)$.

В-третьих, это динамическая структура: при удалении ребра uv список $A[u]$ автоматически «сжимается», чем достигается экономия памяти.

Недостатки. Для удаления ребра uv требуется $O(n)$ операций: удалив элемент v списка $A[u]$, необходимо отыскать элемент u в списке $A[v]$, затратив в худшем случае n переходов по ссылке. Поэтому предпочтительнее использовать следующую модифицированную структуру данных.

5 **Списки соседних вершин с перекрестными ссылками** В этой структуре элемент v списка $A[u]$ содержит ссылку на элемент u списка $A[v]$, и наоборот.

Заметим, что для неориентированного графа каждое ребро uv представлено в списках дважды: элементом v в списке $A[u]$ и элементом u в списке $A[v]$.

Достоинства. Удаление ребра uv может быть выполнено за $O(1)$ операций (т.е. за число операций, ограниченное константой независимо от n). Для этого, удалив элемент v из списка $A[u]$, мы просто переходим по ссылке на элемент u списка $A[v]$ и удаляем его.

Недостатки. По всей видимости, лишен существенных недостатков по мнению В. П. Ильева, но проверять этот факт лень. Ну он профессор, так что, думаю, ему можно доверять на слово (хоть он и не говорил ни слова из этого раздела, лол).

6 **Списки соседних вершин для орграфов** В этой структуре $A[v]$ является указателем на начало списка, содержашего вершины, в которые ведут дуги из v.

Достоинства. Для орграфа каждая дуга uv представлена лишь один раз – элементом v в списке $A[u]$. Соответственно, удаление каждой дуги требует $O(1)$ операций.

Недостатки. При решении комбинаторных задач часто бывает нужно знать, какие дуги также и входят в вершину. Для этого приходится дополнительно использовать списки $B[v]$, содержащие вершины, из которых идут дуги в вершину v.

В ряде случаев вместо пары списков A, B для представления ориентированного графа предпочтительнее использовать *двумерный список*, в котором каждый элемент соответствует дуге uv и является как бы элементов сразу двух списков – «горизонтального» $A[u]$ и «вертикального» $B[v]$.

21 Задача о минимальном остовном дереве. Алгоритм Прима.

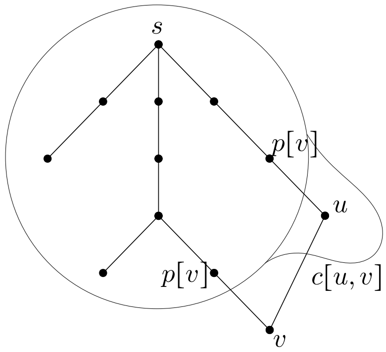
Примечание (ТГ постановка)**.** Задан связный неориентированный граф G, неотрицательная весовая функция $c : E \to \mathbb{R}_+$.

Требуется найти связный остовной подграф графа G минимального веса.

Замечание. Существует связный остовной подграф минимального веса, который является остовным деревом.

Примечание (Алгоритм Прима)**.** Взвешенный неориентированный граф G будет представлен весовой матрицей, то есть симметричной матрицей $C = (c_{ij})$ размера $n \times n$, где

$$c_{uv} = \begin{cases} \text{вес ребра } uv, & \text{если } uv \in E, \\ \infty, & \text{если } uv \notin E. \end{cases}$$



$$\begin{array}{ll} \text{Было:} & d[v] = c\big[p[v], v\big] \\ \text{Стало:} & d[v] = c[u, v] \end{array}$$

22 Задача о кратчайших путях. Алгоритм Дейкстры.

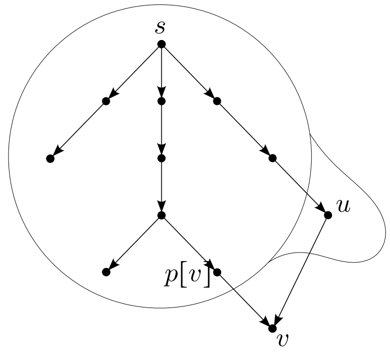
Примечание (ТГ постановка). Дан ориентированный граф G, неотрицательная весовая функция $c : E \to \mathbb{R}_+$ (вес дуг интерпретируется как их длины).

Требуется найти кратчайший путь от заданной величины $s \in V$ до заданной вершины $t \in V$ (при условии, что такой путь существует).

Замечание. Под длиной пути понимается сумма длин всех в этом пути дуг.

Примечание (Алгоритм Дейкстры). Ориентированный граф G будет представлен весовой матрицей $C = (c_{uv}),\ u, v \in V$, где

$$c_{uv} = \begin{cases} \text{вес дуги } uv, & \text{если } uv \in E, \\ \infty, & \text{если } uv \notin E. \end{cases}$$



23 Определение потока в сети. Увеличивающие пути. Лемма об увеличении потока.

Определение 49 (Поток в сети). *Потоком* из s в t в сети G называется функция $f : E \to \mathbb{R}_+$, удовлетворяющая условиям:

$$0 \leqslant f(e) \leqslant c(e) \quad \forall e \in E, \tag{3}$$

$$\sum_{v\in A(u)} f(uv) - \sum_{v\in B(u)} f(vu) = \begin{cases} b, & \text{если } u = s \\ 0, & \text{если } u \notin \{s,t\} \\ -b, & \text{если } u = t \end{cases}. \tag{4}$$

Определение 50 (Увеличивающий путь). *Увеличивающим путем* для потока f называется (s,t)-полупуть P, в котором любая прямая дуга e ненасыщена (то есть $f(e) < c(e)$), а любая обратная дуга e непуста (то есть $f(e) > 0$).

Лемма 6 (Об увеличении потока). Если для потока f в сети G существует увеличивающий путь P, то поток может быть увеличен.

Доказательство. Положим $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, где

$$\begin{matrix} \delta_1 = \min\{c(e) - f(e) : \ e \text{ – прямая дуга } P\} > 0, \\ \delta_2 = \min\{f(e) : \ e \text{ – обратная дуга } P\} \end{matrix} \quad \Rightarrow$$

$\Rightarrow \delta > 0$. Положим

$$f'(e) = \begin{cases} f(e) + \delta, & \text{если } e \text{ – прямая дуга пути } P \\ f(e) - \delta, & \text{если } e \text{ – обратная дуга пути } P \\ f(e), & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Легко увидеть, что f' – поток (f' удовлетворяет условиям 3, 4) и его величина

$$b(f') = b(f) + \delta.$$

□

24 Алгоритм Эдмондса-Карпа построения максимального потока.

Примечание (Алгоритм Эдмондса-Карпа). Пусть имеется двухполосная сеть $G = (V, E)$ (это обыкновенный ориентированный граф), $|V| = n$, $|E| = m$, и некоторый поток f из s в t в сети G.

Построим вспомогательную сеть $G_f = (V, E_f)$ по правилу: $uv \in E_f \Leftrightarrow$ выполнено хотя бы одно из двух условий:

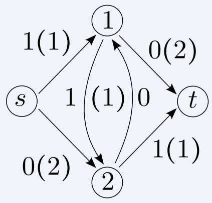
1. В G есть дуга $uv: \ f(uv) < c(uv)$.
2. В G есть дуга $vu: \ f(vu) > 0$.

Пропускные способности дуг сети G_f зададим следующим образом:

- если выполнено только условие 1., то $c_f(uv) = c(uv) - f(uv)$,
- если выполнено только условие 2., то $c_f(uv) = f(vu)$,
- если выполнены оба условия, то $c_f(uv) = c(uv) - f(uv) + f(vu)$.

Пример. $b(f) = 1$

G:



G_f: