

Комплексный анализ

Определения к тестированию

Основано на конспектах лекций Аксёновой Е.В.
Файл создан Заблоцким Данилом

Содержание

1	Модуль и аргумент комплексного числа	4
2	Алгебраическая, показательная и тригонометрическая формы записи комплексного числа	4
3	Сопряжённое к комплексному числу	5
4	Сложение, умножение и деление комплексных чисел	5
5	Формула Эйлера	5
6	Формула Муавра	5
7	Расстояние между двумя конечными точками на комплексной плоскости	5
8	Окрестность конечной точки на комплексной плоскости	6
9	Окрестность бесконечно удалённой точки	6
10	Предельная точка множества	6
11	Внутренняя точка множества	6
12	Граничная точка множества	6
13	Предел последовательности комплексных чисел	7
14	Предел функции	7
15	Непрерывность функции в точке	7
16	Производная функции в точке	7
17	Равномерная сходимости последовательности функций на множестве	8

18	Признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда	8
19	Теорема Вейерштрасса (о равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций)	8
20	Путь, эквивалентные пути, жорданов путь, кривая, кривая Жордана, гладкая кривая, кусочногладкая кривая (это разные вопросы)	8
21	Множество связное	9
22	Область, односвязная область	9
23	Производная функции в точке	9
24	Моногенная в точке функция	10
25	Голоморфная в точке функция	10
26	Голоморфная в области функция	10
27	Условия Коши-Римана	10
28	Степенной ряд	10
29	1-я теорема Абеля	11
30	Радиус сходимости степенного ряда	11
31	Формула Коши-Адамара	11
32	Формула Даламбера	11
33	Конформное в точке отображение	11
34	Регулярное в точке отображение	12
35	Связь между голоморфностью и конформностью	12
36	Определение функций e^z , $\sin z$, $\cos z$, $\ln z$, $\operatorname{Ln} z$, $\operatorname{Arg} z$, $\operatorname{Arcsin} z$, $\operatorname{Arccos} z$, выражение тригонометрических функций через экспоненту	12
37	Дробно-линейная функция	12
38	Общий вид дробно-линейного автоморфизма верхней полуплоскости	13
39	Общий вид дробно-линейного автоморфизма единичного круга	13

40	Общий вид дробно-линейного изоморфизма верхней полуплоскости на единичный круг	13
41	Лемма Гурса (Гауса?)	13
42	Интегральная теорема Коши	13
43	Интеграл Коши от степенной функции по замкнутому контуру	14
44	Интегральная формула Коши	14
45	Интеграл типа Коши	14
46	Теорема Лиувилля	14
47	Теоремы Мореры и Вейерштрасса	14
48	Ряд Тейлора голоморфной в круге функции	15
49	Ряд Лорана голоморфной в кольце функции	15
50	Правильная и главная части ряда Лорана в конечной точке и в бесконечно удалённой точке	15
51	Определение вычета в конечной точке и в бесконечно удалённой	16
52	Вормулы для вычисления вычета в полюсе k -го порядка в конечной точке и в бесконечно удалённой	16
53	Гармоническая функция	17
54	Определения целой и мероморфной функций	17
55	Теорема Римана	17

1 Модуль и аргумент комплексного числа

Определение. Полярные координаты комплексного числа:

$$z = x + iy,$$

полярный радиус:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

и полярный угол ϕ , то есть угол между положительным направлением оси OX и вектора z , соответственно называется его *модулем* и *аргументом*.

Модуль определяется однозначно, а аргумент – с точностью до слагаемого $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

2 Алгебраическая, показательная и тригонометрическая формы записи комплексного числа

Алгебраическая форма записи:

$$z = (x, y) = x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R},$$

Показательная форма записи:

$$z = |z| \cdot e^{i \arg z}.$$

Тригонометрическая форма записи:

$$z = |z| \cdot (\cos \arg z + i \sin \arg z),$$

3 Сопряжённое к комплексному числу

$$\bar{z} = x - iy.$$

4 Сложение, умножение и деление комплексных чисел

$$z_1 + z_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2),$$

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1) = \\ &= x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1), \end{aligned}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{|z_2|^2},$$

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2.$$

5 Формула Эйлера

$$e^{i\phi} = \cos \phi + i \sin \phi, \quad \forall \phi \in \mathbb{R}.$$

6 Формула Муавра

$$z^n = r^n (\cos n\phi + i \sin n\phi).$$

Определение. Корнем n -ой степени комплексного числа z называется комплексное число, n -ая степень которого равна z ,

$$z^n = z_0,$$

$$\sqrt[n]{z_0} = \sqrt[n]{|z_0|} \cdot e^{i \frac{\arg z_0 + 2\pi k}{n}}, \quad 0 \leq k \leq n-1.$$

7 Расстояние между двумя конечными точками на комплексной плоскости

$$\text{dist}(z_1, z_2) := |z_1 - z_2|, \quad \text{где } z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

8 Окрестность конечной точки на комплексной плоскости

Определение. Множество называется *окрестностью* точки, если оно содержит некоторый шарик с центром в этой точке.

Обозначение.

$$O_z, \quad z \in \overline{\mathbb{C}}.$$

9 Окрестность бесконечно удалённой точки

Определение. Множество $V \subset \overline{\mathbb{C}}$ является *окрестностью бесконечно удалённой точки*, если $\exists \varepsilon > 0$:

$$\{z \in \overline{\mathbb{C}} : |z| > \varepsilon\} \subset V.$$

10 Предельная точка множества

Определение. Точка называется *предельной* точкой множества, если в любой ее окрестности есть точки множества, отличные от данной.

Замечание. Точка является предельной точкой множества на расширенной комплексной плоскости $(\overline{\mathbb{C}})$ $\iff \forall$ ее окрестность содержит бесконечное число точек данного множества.

11 Внутренняя точка множества

Определение. $\mathfrak{D} \subset \mathbb{C}$. $z \in \mathfrak{D}$ называется *внутренней точкой* множества \mathfrak{D} , если $\mathfrak{D} \in O_z$.

12 Граничная точка множества

Определение. Точка называется *граничной* точкой множества, если в любой ее окрестности есть как точки множества, так и точки его дополнения.

Обозначение.

$$\partial \mathfrak{D}.$$

13 Предел последовательности комплексных чисел

Определение. Комплексное число z_0 называется *пределом последовательности комплексных чисел* $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, если $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0$

$$|z_n - z_0| < \varepsilon \quad (d(z_n, z_0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0),$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0.$$

14 Предел функции

Определение. $\mathfrak{D} \subset \text{dom } f$, $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ – предельная точка \mathfrak{D} . Тогда $\omega_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ называется *пределом отображения* f , $\omega_0 := \lim_{\mathfrak{D} \ni z \rightarrow z_0} f(z)$, если $\forall V \in O_{\omega_0} \exists U \in O_{z_0}$

$$f(\mathring{U} \cap \mathfrak{D}) \subset V.$$

$\text{dom } f$ – область определения функции.

15 Непрерывность функции в точке

Определение. Функция f называется *непрерывной в точке* $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$, если

1. $z_0 \in \text{dom } f$.
2. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall z \in \mathfrak{D}$

$$0 < |z - z_0| < \delta \implies |f(z) - \omega_0| < \varepsilon.$$

16 Производная функции в точке

Определение. Если $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ определена в некоторой окрестности точки $z_0 \in \mathbb{C}$ и $\exists \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} =: f'(z_0)$ называется *производной функции в точке* z_0 .

17 Равномерная сходимость последовательности функций на множестве

Определение. Пусть $(n \in \mathbb{N}), f_n : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, D := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \text{dom } f_n$.

$A \subset \mathfrak{D}, f : A \rightarrow \mathbb{C}$. Говорят, что последовательность $f_n \Rightarrow f$ на A , если $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall z \in A \forall n \geq n_0$

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$$

$$(\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0$$

$$\sup_{z \in A} |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon, |z - z_0| < \delta \implies |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon).$$

18 Признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда

Примечание. Предположим, что $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ таков, что $\forall n \in \mathbb{N} \forall z \in A |f_n(z)|$, причем $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ равномерно абсолютно сходится на A .

19 Теорема Вейерштрасса (о равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций)

Теорема. Если $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset C(A), f_n \Rightarrow f$, то $f \in C(A)$.

20 Путь, эквивалентные пути, жорданов путь, кривая, кривая Жордана, гладкая кривая, кусочногладкая кривая (это разные вопросы)

Определение (Путь). Путем $\gamma : [a; b] \rightarrow \mathbb{C}$ называется непрерывное отображение $[a; b]$ в \mathbb{C} .

Определение (Эквивалентные пути). $\gamma_1 : [a_1; b_1] \rightarrow \mathbb{C}, \gamma_2 : [a_2; b_2] \rightarrow \mathbb{C}$. $\gamma_1 \sim \gamma_2$, если \exists возрастающая непрерывная функция

$$\phi : [a_1; b_1] \xrightarrow{\text{на}} [a_2; b_2] : \gamma_1(t) = \gamma_2(\phi(t)), \quad \forall t \in [a_1; b_1].$$

Определение (Жорданов путь). Путь называется *жордановым*, если он является взаимно однозначной функцией.

Определение (Гладкая кривая). Кривая называется *гладкой*, если в каждой ее точке \exists касательная, непрерывно изменяющаяся вдоль кривой (если в каждой ее точке \exists непрерывная производная).

Определение (Кусочногладкая кривая). Кривая, состоящая из конечного числа гладких дуг, называется *кусочно-гладкой*.

21 Множество связное

Определение. Множество $A \subset \mathbb{C}$ называется *связным*, если не существует $U, V \in O_p \mathbb{C} : U \cap A \neq \emptyset, V \cap A \neq \emptyset, U \cap V = \emptyset$.

Обозначение. $O_p \mathbb{C}$ – совокупность всех открытых множеств.

Определение. Множество называется *линейно связным*, если \forall две его точки можно соединить путем, значения которого лежат в этом множестве.

22 Область, односвязная область

Определение. Областью в $\mathbb{C} (\overline{\mathbb{C}})$ называется \forall непустое открытое связное множество.

Область называется *односвязной*, если \forall замкнутая кривая гомотопна некоторой точки этой прямой (кривая гомотопна точке, если она стягивается в эту точку).

23 Производная функции в точке

Определение. Если $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ определена в некоторой окрестности точки $z_0 \in \mathbb{C}$ и $\exists \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} =: f'(z_0)$ называется *производной функции в точке z_0* .

24 Моногенная в точке функция

Определение. Если $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ определена в некоторой окрестности точки $z_0 \in \mathbb{C}$, то она называется *моногенной в точке* z_0 , если \exists конечный $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} =: f'(z_0)$.

Другими словами, функция называется моногенной в точке, если она имеет в этой точке конечную производную.

25 Голоморфная в точке функция

Определение. Функция называется *голоморфной в точке*, если она моногенна в некоторой ее окрестности, то есть дифференцируема в каждой точке ее окрестности.

26 Голоморфная в области функция

Определение. Функция называется *голоморфной* в области, если она моногенна в каждой точке этой области.

27 Условия Коши-Римана

Примечание. Если функция

$$f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

дифференцируема в точке z , то ее действительная и мнимая части обладают частными производными первого порядка, которые удовлетворяют условиям Коши-Римана:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0), \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \end{cases}$$

28 Степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad \text{где } \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}, \quad z, z_0 \in \mathbb{C}.$$

29 1-я теорема Абеля

Теорема. Если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ сходится в точке $z_1 \in \mathbb{C}$, то он
абсолютно сходится при $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$.
А если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ расходится в точке $z_1 \in \mathbb{C}$, то он рас-
ходится и при $|z - z_0| > |z_1 - z_0|$.

30 Радиус сходимости степенного ряда

Определение. Элемент $R \in [0; +\infty]$ называется *радиусом сходимости* ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$, если при $|z - z_0| < R$ исходный ряд абсолютно сходится, а при $|z - z_0| > R$ исходный ряд расходится.

31 Формула Коши-Адамара

Теорема. Для степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ положим $l := \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Тогда:

1. Если $l = 0$, то исходный ряд сходится $\forall z \in \mathbb{C}$.
2. Если $l = \infty$, то исходный ряд сходится только в точке z_0 .
3. Если $l \in (0; +\infty)$, то при $|z - z_0| < \frac{1}{l}$, а при $|z - z_0| > \frac{1}{l}$ исходный ряд расходится.

32 Формула Даламбера

Замечание. Если $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$, то этот предел равен R (радиусу сходимости).

33 Конформное в точке отображение

Определение. $f : \mathfrak{D} \rightarrow \mathbb{C}$ называется *конформным отображением*, если оно является гомеоморфизмом и оно конформно в каждой точке области \mathfrak{D} .

34 Регулярное в точке отображение

Определение. Функция называется *регулярной в точке*, если она имеет в этой точке конечную производную от 0.

35 Связь между голоморфностью и конформностью

Примечание. Каждое конформное в области отображение голоморфно и регулярно в этой области.

Любое однолистное голоморфное и регулярное в области отображение конформно в этой области.

36 Определение функций e^z , $\sin z$, $\cos z$, $\ln z$, $\operatorname{Ln} z$, $\operatorname{Arg} z$, $\operatorname{Arcsin} z$, $\operatorname{Arccos} z$, выражение тригонометрических функций через экспоненту

$$e^z = \omega = |\omega| e^{i \arg \omega} = e^{\ln |\omega| + i \arg \omega} = e^{\ln |\omega| + i \arg \omega + 2\pi k i}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$z = \ln |\omega| + i \arg \omega + 2\pi k i = \ln |\omega| + i \operatorname{Arg} \omega,$$

$$\ln z = \ln |z| + i \arg z,$$

$$\operatorname{Ln} z = \ln z + 2\pi k i = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z$$

$$\operatorname{Arg} z := \arg z + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!},$$

$$\operatorname{Arcsin} z = -i \operatorname{Ln} i(z + \sqrt{z^2 - 1}),$$

$$\operatorname{Arccos} z = -i \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}),$$

$$e^{-iz} = \cos z - i \sin z,$$

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z,$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \cdot e^{i \frac{\arg z}{n}}.$$

37 Дробно-линейная функция

Определение. Дробно-линейным отображением называется функция вида

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

38 Общий вид дробно-линейного автоморфизма верхней полуплоскости

Примечание. Каждый дробно-линейный автоморфизм верхней полуплоскости представим в виде $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, где $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ и $ad - bc > 0$.

\forall отображение такого вида является отображением верхней полуплоскости на себя (то есть ее автоморфизмом).

39 Общий вид дробно-линейного автоморфизма единичного круга

Примечание. Каждый дробно-линейный автоморфизм единичного круга на себя можно представить в виде $f(z) = e^{i\theta} \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$, где $\theta \in \mathbb{R}$, $|a| < 1$.

\forall отображение такого вида является автоморфизмом единичного круга.

40 Общий вид дробно-линейного изоморфизма верхней полуплоскости на единичный круг

Примечание. Каждый дробно-линейный изоморфизм верхней полуплоскости на единичный круг можно представить в виде

$$f(z) = e^{i\theta} \frac{z-a}{z-\bar{a}}, \text{ где } \theta \in \mathbb{R}, \operatorname{Im} a > 0.$$

\forall отображение такого вида является изоморфизмом верхней полуплоскости на единичный круг.

41 Лемма Гурса (Гауса?)

Лемма. Если функция f непрерывна в области \mathfrak{D} , то для любой спрямляемой кривой Жордана $\gamma \subset \mathfrak{D}$, для любого $\varepsilon > 0$ \exists вписанная в γ ломанная P такая, что

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz - \int_P f(z) dz \right| < \varepsilon.$$

42 Интегральная теорема Коши

Теорема. Пусть \mathfrak{D} – односвязная область в \mathbb{C} , функция f голоморфна в \mathfrak{D} . Тогда для любой замкнутой спрямляемой кривой Жордана γ

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

43 Интеграл Коши от степенной функции по замкнутому контуру

НАЙТИ

44 Интегральная формула Коши

Теорема. Если функция f голоморфна в односвязной области D , ограничена замкнутой спрямляемой кривой Жордана γ , непрерывна вплоть до границы, то

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \begin{cases} f(z_0), & \text{если } z_0 \in \mathfrak{D} \\ 0, & \text{если } z_0 \notin \text{cl } \mathfrak{D} \end{cases}.$$

45 Интеграл типа Коши

Определение. Пусть односвязная область \mathfrak{D} ограничена замкнутой спрямляемой кривой Жордана γ , а функция f непрерывна на γ . Положим

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in \mathfrak{D}.$$

Функция F называется *интегралом типа Коши*.

46 Теорема Лиувилля

Теорема. Если функция f голоморфна в \mathbb{C} и ограничена, то $f = \text{const}$.

47 Теоремы Мореры и Вейерштрасса

Теорема (Морера). Для того, чтобы непрерывная в односвязной области функция была голоморфна в этой области, необходимо и достаточно, чтобы интеграл от этой функции по \forall замкнутому контуру (то есть по \forall замкнутой спрямляемой кривой Жордана), лежащему в области, был равен 0.

Теорема (Вейерштрасса). Равномерный предел последовательности голоморфных функций является голоморфной функцией, то есть если $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{H}(\mathfrak{D})$ и $f_n \rightrightarrows f$ внутри \mathfrak{D} , то $f \in \mathcal{H}(\mathfrak{D})$.

48 Ряд Тейлора голоморфной в круге функции

Теорема. Пусть $f \in \mathcal{H}(\mathfrak{D})$. Тогда $\forall z_0 \in \mathfrak{D} \exists r > 0$: при $|z - z_0| < r$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n.$$

49 Ряд Лорана голоморфной в кольце функции

Теорема. Если функция f голоморфна в кольце $r < |z - z_0| < R$, то в этом кольце она разлагается в ряд Лорана:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

с коэффициентами c_n , определяемыми формулами:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi - z_0| = \rho} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi, \quad \forall \rho \in (r, R).$$

50 Правильная и главная части ряда Лорана в конечной точке и в бесконечно удалённой точке

Примечание (В конечной точке). Рассмотрим ряд Лорана:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

где z_0 — фиксированная точка комплексной плоскости, $c_n \in \mathbb{C}$.

$$\begin{array}{ll} \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n & \text{— правильная часть,} \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n} & \text{— главная часть.} \end{array}$$

Примечание (В бесконечно удалённой точке). Пусть функция $f(z)$ является голоморфной в окрестности бесконечно удалённой точки. Тогда функция $f\left(\frac{1}{t}\right)$ имеет разложение в окрестности $t = 0$:

$$f\left(\frac{1}{t}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{-n}}{t^n}.$$

Делая замену переменной $t = \frac{1}{z}$ и, полагая $c_n = b_{-n}$, получаем разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{z^n} + \sum_{n=1}^{\infty} b_{-n} z^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n,$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_{-n}}{z^n} & \quad - \text{правильная часть,} \\ \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n & \quad - \text{главная часть.} \end{aligned}$$

51 Определение вычета в конечной точке и в бесконечно удалённой

Определение. Если z_0 – изолированная точка функции f , то вычетом f относительно z_0 (в точке z_0) называется интеграл $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz$, где γ – произвольный контур, ограничивающий область \mathfrak{D} : f непрерывна в $\mathfrak{D} \setminus \{z_0\}$ и голоморфна в $\mathfrak{D} \setminus \{z_0\}$, то есть в качестве γ можно брать любую окрестность сколь угодно малого радиуса с центром в z_0 .

Обозначение.

$$\operatorname{Res} f \Big|_{z=z_0} := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz.$$

Если особая точка является бесконечно удаленной точкой, то $\operatorname{Res}_{\infty} f = -c - 1$.

52 Вормулы для вычисления вычета в полюсе k -го порядка в конечной точке и в бесконечно удалённой

1. Если $z_0 \in \mathbb{C}$ – простой полюс функции f , то

$$\operatorname{Res} f = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z)$$

2. Если $z_0 \in \mathbb{C}$ – полюс порядка k функции f , то

$$\operatorname{Res} f = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} ((z - z_0)^k f(z))^{(k-1)}.$$

3. Если $f(z) = \frac{\phi(z)}{\psi(z)}$, где $\phi(z_0) \neq 0$, $\psi(z_0) = 0$ и $\psi'(z_0) \neq 0$, то

$$\operatorname{Res} f = \frac{\phi(z_0)}{\psi'(z_0)}.$$

4. Если ∞ – полюс порядка k функции f , то

$$\operatorname{Res}_{\infty} f = \frac{(-1)^k}{(k+1)!} \lim_{z \rightarrow \infty} z^{k+1} f^{(k+1)}(z).$$

5. Если $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$, то $Res f = -\lim_{z \rightarrow \infty} z f(z)$.
6. Если f ограничена в проколотой окрестности ∞ , то есть ∞ является устранимой точкой, то

$$Res f = \lim_{z \rightarrow \infty} z^2 f'(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} z(f(\infty) - f(z)),$$

где $f(\infty) := \lim_{z \rightarrow \infty} f(z)$.

53 Гармоническая функция

Определение. Определенная в односвязной области $\mathfrak{D} \subset \mathbb{R}^2$ функция $u(x, y)$ называется *гармонической функцией*, если $u \in C^2(\mathfrak{D})$ и

$$\Delta u := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \equiv 0,$$

Δ – оператор Лапласа.

54 Определения целой и мероморфной функций

Определение (Целая функция). Голоморфная в \mathbb{C} функция называется *целой функцией*.

Определение (Мероморфная функция). Функция, голоморфная в области \mathfrak{D} всюду, за исключением полюсов, называется *мероморфной* в этой области функцией.

55 Теорема Римана

Теорема. Любая односвязная область \mathfrak{D} , граница которой содержит более одной точки, конформно эквивалентна единичному кругу.