Теория Вероятностей

Основано на лекциях Мещерякова Е.А.
Конспект написан Заблоцким Данилом

Весенний семестр 2024

Эти записи не одобряются лекторами, и я вношу в них изменения (часто существенно) после лекций. Они далеко не точно отражают то, что на самом деле читалось, и, в частности, все ошибки почти наверняка мои.

Оглавление

Глава 0

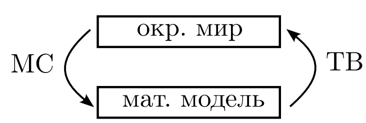
Введение

Лекция 1: Введение

от 14 фев 8:45

Массовое явление – явление, для которого можно неоднократно повторить исходные условия.

Случайное событие – результат эксперимента.



Ω – множество всех элементарных случайных событий (элементарных исходов), $w \in \Omega$ – *элементарный исход.*

Определение 1 (Благоприятный элементарный исход)**.** Пусть A – исходное событие, $w \in \Omega$ – *благоприятный* для A, если w влечет A.

Тогда A – это *подмножество* Ω *с подмножеством всех благоприятных для* A *исходов.*

Примечание. A, B – случайные события ($A, B \subset \Omega$).

$$\begin{array}{ccccc} \text{Не } A & = & \overline{A} & = & \Omega \setminus A \\ A \text{ и } B & = & A \cdot B & = & A \cap B, \\ A \text{ или } B & = & A + B & = & A \cup B. \end{array}$$

Ω – достоверное, $\varnothing = \overline{\Omega}$ – невозможное событие.

Определение 2 (Алгебра)**.** $\mathcal{F}$ – семейство подмножеств Ω, $\mathcal{F}$ – *алгебра*, если

1. $\Omega \in \mathcal{F}$ ($\phi \in \mathcal{F}$).
2. $A \in \mathcal{F} \implies \overline{A} \in \mathcal{F}$.
3. $A, B \in \mathcal{F} \implies AB \in \mathcal{F},\ A + B \in \mathcal{F}$.

   Если, кроме этого, верное еще и
4. $\forall \{A_\alpha\} \subset \mathcal{F}$
$$\bigcap_\alpha A_\alpha \in \mathcal{F} \text{ и } \bigcup_\alpha A_\alpha \in \mathcal{F}.$$

то $\mathcal{F}$ – G-алгебра.

Замечание. Случайные события должны образовывать G-алгебру.

Замечание. Очевидно, что
$$\overline{\sum_\alpha A_\alpha} = \prod_\alpha \overline{A_\alpha} \text{ и } \overline{\prod_\alpha A_\alpha} = \sum_\alpha \overline{A_\alpha}.$$

Замечание.
$$A \implies B \text{ то же самое, что и } A \leqslant B$$
$$A \iff B \text{ то же самое, что и } A = B$$

Определение 3 (Вероятностное пространство)**.** *Вероятностное пространство* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, где Ω – множество элементарных исходов, $\mathcal{F}$ – G-алгебра подмножеств Ω, P – мера на $\mathcal{F}$, $P : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$.

A_1 $\forall A \in \mathcal{F}\ P(A) \geqslant 0$.

A_2 $P(\Omega) = 1$ (условие нормировки).

A_3 $\forall A, B \in \mathcal{F}\ AB = \varnothing \implies P(A + B) = P(A) + P(B)$.

A_4 $\{A_n\} \subset \mathcal{F}\ A_{n+1} \leqslant A_n,\ \bigcap_n A_n = \varnothing$
$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = 0 \text{ (непрерывность меры).}$$

Теорема 1 (Свойства вероятностей). $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ – вероятностное пространство.

1. $A \in \mathcal{F} \implies P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

   Доказательство. $B = \overline{A},\ AB = \varnothing,\ A + B = \Omega,$

   $$1 = P(\Omega) = P(A + \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}).$$

   □

   Следовательно, $P(\varnothing) = 0$.

2. $A \subseteq B \implies P(A) \leqslant P(B)$.

   Доказательство. $C = B \backslash A = B \cap \overline{A} \in \mathcal{F},\ B = A + C,\ AC = \varnothing,$

   $$P(B) = P(A) + \underset{\geqslant 0}{P(C)} \geqslant P(A).$$

   □

   Следовательно, $\forall A \in \mathcal{F}\ 0 \geqslant P(A) \geqslant 1\ (\phi \subseteq A \subseteq \Omega)$.

3. $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F},\ A_i A_j = \varnothing\ (i \neq j)$.
   Тогда $P(A_1 + \ldots + A_n) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k)$.

   Доказательство. Индукция по n. □

4. $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F} \implies P(A_1 + \ldots + A_n) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)$.

   Доказательство. $B_k = A_k \backslash \left(\sum_{i=1}^{k-1} A_i\right),\ \sum_{k=1}^{n} A_k = \sum_{k=1}^{n} B_k$.

   $$P\left(\sum A_k\right) = P(\sum B_k) = \sum P(B_k) \leqslant \sum P(A_k)\ (B_k \leqslant A_k).$$

   □

5. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

   Доказательство. $C = A \setminus B,\ P(A) = P(C + AB) = P(C) + P(AB),$

   $$P(C) = P(A) - P(AB),$$

   $$P(A \cup B) = P(B + C) = P(B) + P(C) = P(B) + P(A) - P(AB).$$

   □

A_3^* **(G-аддитивность)**

$$\{A_n\} \subset \mathcal{F},\ A_iA_j = \varnothing \implies P\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

> **Теорема 2.** A_1, A_2, A_3 и A_4 $\iff$ A_1, A_2, A_3^*.

Доказательство.

$\boxed{\Rightarrow}$ Покажем, что A_3 и A_4 $\implies$ A_3^*: $\{A_n\} \subset \mathcal{F},\ A_iA_j = \varnothing$,

$$B_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} A_k, \qquad A = \sum_{k=1}^{\infty} A_k,$$

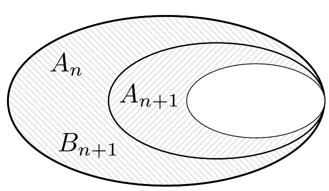
$$A = A_1 + \ldots + A_n + B_n,$$
$$P(A) = P(A_1) + \ldots + P(A_n) + P(B_n).$$

$$B_{n+1} \leqslant B_n,\ \bigcap_n B_n = \varnothing \implies B_n \to 0,\ P(B_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

$$\begin{array}{ccc} P(A) & = & \sum_{k=1}^{n} P(A_k) + P(B_n) \to \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) + 0 \\ \downarrow & & \\ P(A) & & \end{array}.$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Пусть есть A_3^*. Построим последовательность $A_1, \ldots, A_n, \varnothing, \ldots, \varnothing, \ldots$:

$$\left.\begin{array}{ccc} P\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right) & = & P\left(\sum_{k=1}^{n} A_k\right) \\ \| & & \\ \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) & = & \sum_{k=1}^{n} P(A_k) \end{array}\right. \implies A_3.$$



$\{A_n\} \subset \mathcal{F},\ A_n \geqslant A_{n+1}$ и $\bigcap A_n = \varnothing$.

$$B_{n+1} = A_n \setminus A_{n+1},\ B_iB_j = \varnothing,\ \bigcup B_n = \bigcup A_n, \qquad B_1 = A_1,$$

$$\begin{array}{ccc} P\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right) & = & P\left(\sum_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(B_n) \text{ – сходится} \\ \| & & \\ P(A_1) & & \end{array},$$

$$A_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} B_k \implies \begin{array}{r} P(A_n) = \sum_{k=n+1}^{\infty} P(B_k) \to 0 \\ \left|\sum_{k=1}^{\infty} B_k - \sum_{k=1}^{n} P(B_k)\right| \to 0 \end{array} \implies A_4.$$

□

Пример. $\Omega = \{B, H\},\ \mathcal{F} = \{\varnothing, \Omega, \{B\}, \{H\}\}$,

$$P(\Omega) = 1, \qquad P(\varnothing) = 0,$$

$$\begin{array}{cc} \text{М} & \text{Ж} \\ P(B) = 0 & P(B) = \frac{1}{2} \\ P(H) = 1 & P(H) = \frac{1}{2} \end{array}$$

◇

Глава 1

Классическая схема и комбинаторика

Определение 4 (Классическая схема). Ω – конечное множество равновозможных исходов, $\mathcal{F}$ – все подмножества Ω (их $2^{|\Omega|}$),

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

Это *классическая схема*.

Пример. $2\,\mathrm{d}G$ нас интересует сумма,

$$\left.\begin{array}{c}\Omega_1 \text{ – исход сумма от 2 до 12} \\ \text{(2 и 7 неравновозможные)}\end{array}\right\}\text{не классическая схема}$$

$$\left.\begin{array}{c}\Omega_2 \text{ – множество очков на кубиках} \\ (\{1,1\} \text{ и } \{1,2\} \text{ неравновозможные})\end{array}\right\}\text{не классическая схема}$$

$$\left.\begin{array}{c}\Omega_3 \text{ – упорядоченная пара очков на кубиках} \\ \text{(все 36 исходов равновозможные)}\end{array}\right\}\text{классическая схема}$$

$\diamond$

Определение 5 (Число перестановок различных шаров). *Число перестановок n различных шаров* (перестановки отличаются порядком шаров) – $P(n)$,

$$P(n) = n!.$$

Определение 6 (Число перестановок шаров разных видов)**.** Пусть есть $n_1, \ldots, n_m$ шаров m видов,

$$n = n_1 + \ldots + n_m.$$

Число перестановок этих n шаров равно $P(n_1, \ldots, n_m)$,

$$P(n_1, \ldots, n_m) = \frac{(n_1 + \ldots + n_m)!}{n_1! n_2! \ldots n_m!}.$$

Определение 7 (Размещения элементов по местам)**.** *Размещения n элементов по k местам.*

Выкладываем в ряд k шариков из имеющихся n:

$$A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

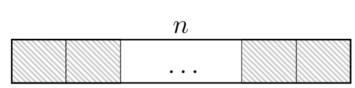
Замечание. Если мы разрешим шарики повторять, то получим размещения с повторениями:

$$\overline{A_n^k} = n \cdot n \cdot \ldots \cdot n = n^k.$$

Определение 8 (Сочетания k элементов из n)**.** Число k-элементных подмножеств из n-элементов множества – C_n^k:

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Пример. $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$ (n – число всех подмножеств),



1 – входит в подмножество

0 – не входит

Каждая полоска взаимно однозначно задает подмножество $\Longrightarrow$ есть биекция между подмножествами и полосками $\Longrightarrow$ число подмножеств равно числу полосок и равно

$$\overline{A_2^n} = 2^n.$$

◇

Пример. Хотим разложить n одинаковых монет по k кошелькам (различным):

1. Нет пустых кошельков.

$$\underbrace{\circ\circ\circ\ldots\circ}_{n \text{ монет}}$$

Будем ставить перегородки, монеты между перегородками попадают в один кошелек.

$$\begin{array}{l|l} \text{до } 1^{\text{й}} \text{ перегородки} & 1^{\text{й}} \text{ кошелек} \\ \text{от } 1^{\text{й}} \text{ до } 2^{\text{й}} \text{ перегородки} & 2^{\text{й}} \text{ кошелек} \\ \vdots & \\ \text{от } k-1^{\text{й}} \text{ до } k^{\text{й}} \text{ перегородки} & k^{\text{й}} \text{ кошелек} \end{array}$$

Есть биекция между разложением монет по кошелькам и расстановкой перегородок.

Считаем способы расстановки перегородок.

Перегородки ставятся по одной между монетами.

C_{n-1}^{k-1} – число способов поставить $k-1$ перегородку и $n-1$ мест.

2. Могут быть пустые кошельки.

$$\underbrace{\boxed{\square\square\square\ldots\square\square}}_{n+k-1 \text{ – клетка}}$$

Закрасим $k-1$ клетку, отличающую перегородку.

Между k-ой и $(k+1)$-ой крашенными клетками лежат монеты.

Тогда есть биекция между крашенными полосками и монетами в кошельках.

$$\text{Таких полосок} \quad \begin{array}{c} C_{n+k-1}^{k-1} \\ \| \\ C_{n+k-1}^{n} \end{array} = \overline{C_k^n}$$

◇

	Без повторений	С повторениями
Важен порядок	$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$	$\overline{A_n^k} = n^k$
Не важен порядок	$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$	$\overline{C_n^k} = C_{n+k-1}^k$