Теория Вероятностей

Основано на лекциях Мещерякова Е.А.

Конспект написан Заблоцким Данилом

Весенний семестр 2024

Эти записи не одобряются лекторами, и я вношу в них изменения (часто существенно) после лекций. Они далеко не точно отражают то, что на самом деле читалось, и, в частности, все ошибки почти наверняка мои.

Содержание

Лекция 1: Введение

от 14 фев 8:45

0 Введение

Массовое явление – явление, для которого можно неоднократно повторить исходные условия.

Случайное событие – результат эксперимента.

$$\begin{tikzcd} \boxed{\text{окр. мир}} \arrow[d, bend right=60, "\text{МС}"'] \\ \boxed{\text{мат. модель}} \arrow[u, bend right=60, "\text{ТВ}"'] \end{tikzcd}$$

Ω – множество всех элементарных случайных событий (элементарных исходов), $w \in \Omega$ – *элементарный исход.*

Определение 1 (Благоприятный элементарный исход)**.** Пусть A – исходное событие, $w \in \Omega$ – *благоприятный* для A, если w влечет A.

Тогда A – это *подмножество* Ω *с подмножеством всех благоприятных для* A *исходов.*

Примечание. A, B – случайные события ($A, B \subset \Omega$).

$$\begin{array}{rcccc} \text{Не } A & = & \overline{A} & = & \Omega \setminus A \\ A \text{ и } B & = & A \cdot B & = & A \cap B, \\ A \text{ или } B & = & A + B & = & A \cup B. \end{array}$$

Ω – достоверное, $\varnothing = \overline{\Omega}$ – невозможное событие.

Определение 2 (Алгебра)**.** $\mathcal{F}$ – семейство подмножеств Ω, $\mathcal{F}$ – *алгебра*, если

1. $\Omega \in \mathcal{F}$ $(\phi \in \mathcal{F})$.
2. $A \in \mathcal{F} \implies \overline{A} \in \mathcal{F}$.
3. $A, B \in \mathcal{F} \implies AB \in \mathcal{F},\ A + B \in \mathcal{F}$.

   Если, кроме этого, верное еще и
4. $\forall \{A_\alpha\} \subset \mathcal{F}$
$$\bigcap_\alpha A_\alpha \in \mathcal{F} \text{ и } \bigcup_\alpha A_\alpha \in \mathcal{F}.$$

то $\mathcal{F}$ – σ-алгебра.

Замечание. Случайные события должны образовывать σ-алгебру.

Замечание. Очевидно, что
$$\overline{\sum_\alpha A_\alpha} = \prod_\alpha \overline{A_\alpha} \text{ и } \overline{\prod_\alpha A_\alpha} = \sum_\alpha \overline{A_\alpha}.$$

Замечание.
$$A \implies B \text{ то же самое, что и } A \leqslant B$$
$$A \iff B \text{ то же самое, что и } A = B$$

Определение 3 (Вероятностное пространство)**.** *Вероятностное пространство* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, где Ω – множество элементарных исходов, $\mathcal{F}$ – σ-алгебра подмножеств Ω, P – мера на $\mathcal{F}$, $P : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$.

A_1 $\forall A \in \mathcal{F}\ P(A) \geqslant 0$.

A_2 $P(\Omega) = 1$ (условие нормировки).

A_3 $\forall A, B \in \mathcal{F}\ AB = \varnothing \implies P(A + B) = P(A) + P(B)$.

A_4 $\{A_n\} \subset \mathcal{F}\ A_{n+1} \leqslant A_n,\ \bigcap_n A_n = \varnothing$
$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = 0 \text{ (непрерывность меры).}$$

Теорема 1 (Свойства вероятностей). $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ – вероятностное пространство.

1. $A \in \mathcal{F} \implies P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

   Доказательство. $B = \overline{A},\ AB = \varnothing,\ A + B = \Omega,$

   $$1 = P(\Omega) = P(A + \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}).$$

   □

   Следовательно, $P(\varnothing) = 0$.

2. $A \subseteq B \implies P(A) \leqslant P(B)$.

   Доказательство. $C = B \backslash A = B \cap \overline{A} \in \mathcal{F},\ B = A + C,\ AC = \varnothing,$

   $$P(B) = P(A) + \underset{\geqslant 0}{P(C)} \geqslant P(A).$$

   □

   Следовательно, $\forall A \in \mathcal{F}\ 0 \geqslant P(A) \geqslant 1\ (\phi \subseteq A \subseteq \Omega)$.

3. $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F},\ A_i A_j = \varnothing\ (i \neq j)$.
   Тогда $P(A_1 + \ldots + A_n) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k)$.

   Доказательство. Индукция по n. □

4. $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F} \implies P(A_1 + \ldots + A_n) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)$.

   Доказательство. $B_k = A_k \backslash \left(\sum_{i=1}^{k-1} A_i \right),\ \sum_{k=1}^{n} A_k = \sum_{k=1}^{n} B_k.$

   $$P\left(\sum A_k \right) = P(\sum B_k) = \sum P(B_k) \leqslant \sum P(A_k)\ (B_k \leqslant A_k).$$

   □

5. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

   Доказательство. $C = A \setminus B,\ P(A) = P(C + AB) = P(C) + P(AB),$

   $$P(C) = P(A) - P(AB),$$

   $$P(A \cup B) = P(B + C) = P(B) + P(C) = P(B) + P(A) - P(AB).$$

   □

A_3^* **(G-аддитивность)**

$$\{A_n\} \subset \mathcal{F},\ A_iA_j = \varnothing \implies P\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

Теорема 2. A_1, A_2, A_3 и A_4 $\iff$ A_1, A_2, A_3^*.

Доказательство.

$\boxed{\Rightarrow}$ Покажем, что A_3 и A_4 $\implies$ A_3^*: $\{A_n\} \subset \mathcal{F},\ A_iA_j = \varnothing$,

$$B_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} A_k, \qquad A = \sum_{k=1}^{\infty} A_k,$$

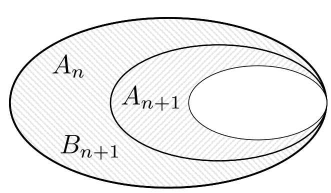
$$A = A_1 + \ldots + A_n + B_n,$$
$$P(A) = P(A_1) + \ldots + P(A_n) + P(B_n).$$

$$B_{n+1} \leqslant B_n,\ \bigcap_n B_n = \varnothing \implies B_n \to 0,\ P(B_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

$$\begin{array}{ccl} P(A) & = & \sum_{k=1}^{n} P(A_k) + P(B_n) \to \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) + 0 \\ \downarrow & & \\ P(A) & & \end{array}.$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Пусть есть A_3^*. Построим последовательность $A_1, \ldots, A_n, \varnothing, \ldots, \varnothing, \ldots$:

$$\left.\begin{array}{ccc} P\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right) & = & P\left(\sum_{k=1}^{n} A_k\right) \\ \| & & \\ \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) & = & \sum_{k=1}^{n} P(A_k) \end{array}\right. \implies A_3.$$



$\{A_n\} \subset \mathcal{F},\ A_n \geqslant A_{n+1}$ и $\bigcap A_n = \varnothing$.

$$B_{n+1} = A_n \setminus A_{n+1},\ B_iB_j = \varnothing,\ \bigcup B_n = \bigcup A_n, \qquad B_1 = A_1,$$

$$\begin{array}{ccc} P\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right) & = & P\left(\sum_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(B_n) \text{ – сходится} \\ \parallel & & \\ P(A_1) & & \end{array},$$

$$A_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} B_k \implies \begin{array}{c} P(A_n) = \sum_{k=n+1}^{\infty} P(B_k) \to 0 \\ \left|\sum_{k=1}^{\infty} B_k - \sum_{k=1}^{n} P(B_k)\right| \to 0 \end{array} \implies A_4.$$

□

Пример. $\Omega = \{B, H\},\ \mathcal{F} = \{\varnothing, \Omega, \{B\}, \{H\}\}$,

$$P(\Omega) = 1, \qquad P(\varnothing) = 0,$$

$$\begin{array}{cc} \text{М} & \text{Ж} \\ P(B) = 0 & P(B) = \frac{1}{2} \\ P(H) = 1 & P(H) = \frac{1}{2} \end{array}$$

◇

Лекция 2: Продолжение

от 21 фев 8:45

1 Классическая схема и комбинаторика

Определение 4 (Классическая схема). Ω – конечное множество равновозможных исходов, $\mathcal{F}$ – все подмножества Ω (их $2^{|\Omega|}$),

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

Это *классическая схема*.

Пример. $2\,\mathrm{d}G$ нас интересует сумма,

$$\left.\begin{array}{c} \Omega_1 \text{ – исход сумма от 2 до 12} \\ \text{(2 и 7 неравновозможные)} \end{array}\right\} \text{не классическая схема}$$

$$\left.\begin{array}{c} \Omega_2 \text{ – множество очков на кубиках} \\ (\{1,1\} \text{ и } \{1,2\} \text{ неравновозможные}) \end{array}\right\} \text{не классическая схема}$$

$$\left.\begin{array}{c} \Omega_3 \text{ – упорядоченная пара очков на кубиках} \\ \text{(все 36 исходов равновозможные)} \end{array}\right\} \text{классическая схема}$$

◇

Определение 5 (Число перестановок различных шаров). *Число перестановок n различных шаров* (перестановки отличаются порядком шаров) – $P(n)$,

$$P(n) = n!.$$

Определение 6 (Число перестановок шаров разных видов)**.** Пусть есть $n_1, \ldots, n_m$ шаров m видов,

$$n = n_1 + \ldots + n_m.$$

Число перестановок этих n шаров равно $P(n_1, \ldots, n_m)$,

$$P(n_1, \ldots, n_m) = \frac{(n_1 + \ldots + n_m)!}{n_1! n_2! \ldots n_m!}.$$

Определение 7 (Размещения элементов по местам)**.** *Размещения n элементов по k местам.*

Выкладываем в ряд k шариков из имеющихся n:

$$A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

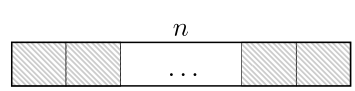
Замечание. Если мы разрешим шарики повторять, то получим размещения с повторениями:

$$\overline{A_n^k} = n \cdot n \cdot \ldots \cdot n = n^k.$$

Определение 8 (Сочетания k элементов из n)**.** Число k-элементных подмножеств из n-элементов множества – C_n^k:

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Пример. $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$ (n – число всех подмножеств),



1 – входит в подмножество

0 – не входит

Каждая полоска взаимно однозначно задает подмножество $\Longrightarrow$ есть биекция между подмножествами и полосками $\Longrightarrow$ число подмножеств равно числу полосок и равно

$$\overline{A_2^n} = 2^n.$$

◇

Пример. Хотим разложить n одинаковых монет по k кошелькам (различным):

1. Нет пустых кошельков.

$$\underbrace{\circ\circ\circ\ldots\circ}_{n\text{ монет}}$$

   Будем ставить перегородки, монеты между перегородками попадают в один кошелек.

$$\begin{array}{l|l} \text{до } 1^{\text{й}} \text{ перегородки} & 1^{\text{й}} \text{ кошелек} \\ \text{от } 1^{\text{й}} \text{ до } 2^{\text{й}} \text{ перегородки} & 2^{\text{й}} \text{ кошелек} \\ \vdots & \\ \text{от } k-1^{\text{й}} \text{ до } k^{\text{й}} \text{ перегородки} & k^{\text{й}} \text{ кошелек} \end{array}$$

   Есть биекция между разложением монет по кошелькам и расстановкой перегородок.

   Считаем способы расстановки перегородок.

   Перегородки ставятся по одной между монетами.

   C_{n-1}^{k-1} – число способов поставить $k-1$ перегородку и $n-1$ мест.

2. Могут быть пустые кошельки.

$$\underset{n+k-1\text{ – клетка}}{\boxed{\square\square\square\ldots\square\square}}$$

   Закрасим $k-1$ клетку, отличающую перегородку.

   Между k-ой и $(k+1)$-ой крашенными клетками лежат монеты.

   Тогда есть биекция между крашенными полосками и монетами в кошельках.

$$\text{Таких полосок}\quad \begin{array}{ccc} C_{n+k-1}^{k-1} & = & \overline{C_k^n} \\ \| & & \\ C_{n+k-1}^{n} & & \end{array}$$

◇

	Без повторений	С повторениями
Важен порядок	$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$	$\overline{A_n^k} = n^k$
Не важен порядок	$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$	$\overline{C_n^k} = C_{n+k-1}^k$

Пример (Гипергеометрическое распределение). N различных шариков (есть номера). Из них M белых шариков.

Вынимаем n шариков,

$$P(\text{ровно } k \text{ белых среди } n) = ?$$

Исход – неупорядоченный набор из n шаров (всего N); шары не повторяются,

$$A = \text{“ровно } k \text{ белых”}, \qquad |A| = C_M^k \cdot C_{N-M}^{n-k},$$

$$P(A) = \frac{C_M^k \cdot C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n} = \frac{M!(N-M)!n!(N-n)!}{k!(M-k)!(n-k)!(N-M-n+k)!N!}.$$

$\diamond$

2 Геометрическая схема

Пусть μ – *мера в* $\mathbb{R}^n$ (чаще всего Жордана).

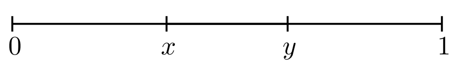
Ω – некоторое измеримое множество. *Исход* – точка Ω, все исходы равновозможны.

$\mathcal{F}$ – σ-алгебра измеримых подмножеств Ω,

$$A \in \mathcal{F} \implies P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}.$$

Пример. Палку 1м ломаем на 2 части, затем большую часть ломаем еще на две:

$$P(\text{из них составляем треугольник})$$

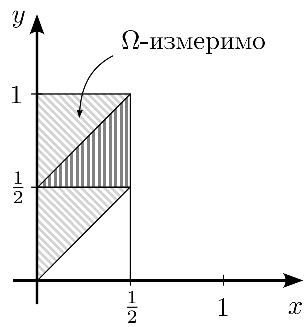


x – место $1^{\text{го}}$ разлома, $x \leqslant \frac{1}{2}$

y – место $2^{\text{го}}$ разлома

Исход – пара чисел $(x; y)$ – точка с координатами $(x; y)$.

Ω – все исходы; $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$, $x \leqslant y \leqslant 1$.



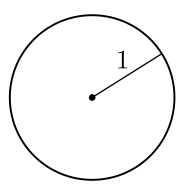
Длины сторон: $x,\ y-x,\ 1-y$,

$$\begin{cases} x+y-x & >1-y \\ x+1-y & >y-x \\ y-x+1-y & >x \end{cases}, \qquad \begin{array}{l} y>\frac{1}{2} \\ y<x+\frac{1}{2} \\ x<\frac{1}{2} \end{array},$$

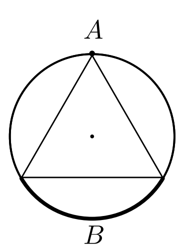
$$P=\frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}=\frac{\frac{1}{8}}{\frac{3}{8}}=\frac{1}{3}.$$

◇

Пример. AB – хорда, $P(AB>\sqrt{3})$,

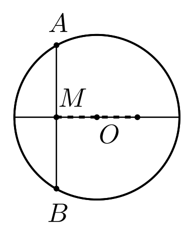


1. Исход – точка B – точка на окружности.
   Ω – вся окружность, $|\Omega|=360^\circ \implies P(AB>\sqrt{3})=\frac{1}{3}$.



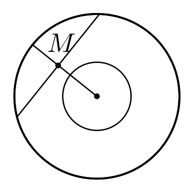
2. AB – всегда вертикальна.

   Исход – точка M на диаметре. Ω – диаметр, $|\Omega| = 2 \implies P(AB > \sqrt{3}) = \frac{1}{2}$.



3. Исход – точка M – середина хорды.

   Ω – круг, $|\Omega| = \pi \implies P(AB > \sqrt{3}) = \frac{\pi(\frac{1}{2})^2}{\pi} = \frac{1}{4}$.



◇

Лекция 3: Продолжение

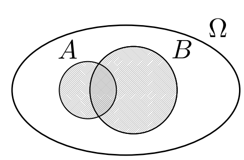
от 21 фев 8:46

3 Независимость событий

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ – вероятностное пространство, $B \in \mathcal{F},\ P(B) > 0$.

Определение 9. Пусть $P(B) > 0$ условий. Все исходы – это B, исходы $AB \implies$

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}.$$



Теорема 3 (Умножение вероятностей)**.**

$$P(AB) = P(A|B) \cdot P(B).$$

Доказательство. Очевидно. □

Получили новое вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P_B))$,

$$P_B(A) = \frac{P(AB)}{P(B)} \geqslant 0, \qquad P_B(\Omega) = \frac{P(\Omega B)}{P(B)} = 1,$$

$$A_n \searrow \varnothing \implies A_n B \searrow \varnothing,$$

$$P_B(A_n) = \frac{P(A_n B)}{P(B)} \to 0.$$

Пример. N шаров, M белых.

Вытаскиваем два исхода по очереди:

$$P(\text{оба белых})$$

$$\begin{array}{lll} A - & \text{“1” белый } P(A) & = \frac{M}{N}, \\ B - & \text{“2” белый } P(B|A) & = \frac{M-1}{N-1} \end{array}$$

$$P(AB) = P(B|A) \cdot P(A) = \frac{M(M-1)}{N(N-1)}.$$

◇

Пример. Два шара одновременно.

Исход – пара шаров, неупорядоченных, без повторений.

$$(\Omega) = C_N^2, \ |A| = C_M^2,$$

$$P(\text{оба белых}) = \frac{C_M^2}{C_N^2} = \frac{M!2!(N-2)!}{2!(M-2)!N!} = \frac{M(M-1)}{N(N-1)}.$$

◇

Теорема 4. Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$, тогда

$$\begin{aligned} P(A_1 \ldots A_n) &= P(A_1 \ldots A_{n-1}|A_n) \cdot P(A_n) \\ &= P(A_1|A_2 \ldots A_n) \cdot P(A_2|A_3 \ldots A_n) \cdot \ldots \cdot P(A_{n-1}|A_n) \cdot P(A_n). \end{aligned}$$

Доказательство.

$\boxed{\textbf{База}}$ $P(A_1 A_2) = P(A_1|A_2)P(A_2)$.

Переход Пусть верно для $A_2 \dots A_{n+1}$, добавим A_1:

$$B = A_2 \dots A_{n+1},$$

$$\begin{aligned} P(A_1 B) &= P(A_1 A_2 \dots A_{n+1}) \\ &= P(A_1 | A_2 \dots A_{n+1}) \cdot \big(P(A_2 | A_3 \dots A_{n+1}) \cdot P(A_{n+1})\big). \end{aligned}$$

□

Определение 10 (Разбиение)**.** *Разбиение* – множество событий $H_1, \dots, H_n$ таких, что

1. $H_i H_j = \varnothing$, $\forall i \neq j$.
2. $\sum_{j=1}^{n} H_j = \Omega$.

Теорема 5 (Формула полной вероятности)**.** Пусть A – случайные события, $H_1, \dots, H_n$ – разбиения, тогда

$$P(A) = \sum_{j=1}^{n} P(A|H_j) \cdot P(H_j).$$

Доказательство. $\sum H_j = \Omega, \quad A \cdot \sum H_j = A,$

$$A \cdot H_j \cap AH_j = \varnothing,$$

$$\begin{aligned} P(A) &= P\left(A \cdot \sum H_j\right) \\ &= P\left(\sum_j AH_j\right) \\ &= \sum_j P(AH_j) \\ &= \sum_j P(A|H_j) P(H_j) \end{aligned}$$

□

Пример. N билетов, M хороших.

A_1 – зашли 1ым и вытащили хороший билет
A_2 – зашли 2ым и вытащили хороший билет

$P(A_1) = \frac{M}{N}, \quad A_1$ и $\overline{A_1}$ – разбиение,

$$\begin{aligned} P(A_2) &= P(A_2|A_1) \cdot P(A_1) + P(A_2|\overline{A_1})P(\overline{A_1}) \\ &= \frac{M-1}{N-1} \cdot \frac{M}{N} + \frac{M}{N-1} \cdot \frac{N-M}{N} \\ &= \frac{M}{N(N-1)}(M-1+N-M) \\ &= \frac{M}{N} \end{aligned}$$

◇

Теорема 6 (Формула Байесса)**.** $H_1, \ldots, H_n$ – разбиение, $A \in \mathcal{F}$,

$$P(H_i|A) = \frac{P(A|H_i)P(H_i)}{\sum_j P(A|H_j)P(H_j)},$$

апостериорные вероятности,

$$P(H_i) \text{ – априорные вероятности.}$$

Доказательство.

$$P(H_i|A) = \frac{P(AH_j)}{P(A)} = \frac{P(A|H_i) \cdot P(H_i)}{\sum_j P(A|H_j) \cdot P(H_j)}.$$

□

Пример. N билетов, M – хороших, A_1, A_2,

$$\begin{aligned} P(A_1) &= \frac{M}{N}, \\ P(A_1|A_2) &= \frac{P(A_1A_2)}{P(A_2)} = \frac{P(A_2|A_1)P(A_1)}{P(A_2)} = \frac{\frac{M-1}{N-1} \cdot \frac{N}{M}}{\frac{M}{N}} = \frac{M-1}{N-1}, \\ P(A_2|A_1) &= \frac{M-1}{N-1}. \end{aligned}$$

◇

Определение 11 (Независимые события)**.** $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ – в.п., $A, B \in \mathcal{F}$.
Говорят, что A и B *независимы*, если $P(A|B) = P(A)$ (A не зависит от B).

Замечание. Если A не зависит от B, то B не зависит от A:

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(A)} = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(A)} = P(B).$$

Замечание. Если A и B независимы, то

$$P(AB) = P(A|B) \cdot P(B) = P(A) \cdot P(B).$$

Определение 12 (Независимые в совокупности)**.** $A_1, \dots, A_n$ *независимы в совокупности*, если

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1)P(A_2)\dots P(A_n).$$

Пример. A_1, A_2 – орел в $1^{\text{м}}$ и $2^{\text{м}}$ бросках,

$$P(A_1) = \frac{1}{2} = P(A_2)$$
$$P(A_1 A_2) = \frac{1}{4} = P(A_1)P(A_2)$$

◇

Пример. 52 карты, вытаскиваем одну, A – туз, B – бубновая,

$$P(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$
$$P(B) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$
$$P(AB) = \frac{1}{52} = P(A) \cdot P(B)$$

◇

Пример. $2, 3, 5, 30$, A_2, A_3, A_5, A_k : число$\vdots k$.

Выбираем одно число:

$$P(A_2) = \frac{1}{2} = P(A_3) = P(A_5)$$
$$P(A_2 A_3) = \frac{1}{4} = P(A_2) \cdot P(A_3) \implies A_2 \text{ и } A_3 \text{ независимы}$$

$$A_2 \text{ и } A_5 \text{ – независимы,}$$
$$A_3 \text{ и } A_5 \text{ – независимы,}$$
$$\underset{\frac{1}{4}}{\underset{||}{P(A_2 A_3 A_5)}} \neq \underset{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{P(A_2)P(A_3)P(A_5)}).$$

◇

Замечание. "зависимые" = "не являются независимыми".

Теорема 7. Если $A_1, \dots, A_n$ независимы в совокупности, $P(A_1 \dots A_n) > 0$, $i_1 \dots i_k j_1 \dots j_m$ – различные индексы от 1 до n, то

$$P(A_{i_1} \dots A_{i_k} | A_{j_1} \dots A_{j_m}) = P(A_{i_1} \dots A_{i_k}).$$

Доказательство. $P(A_{i_1} \dots A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \dots P(A_{i_k})$,

$$P\left(\underbrace{A_{i_1} \dots A_{i_k}}_{A} \underbrace{A_{j_1} \dots A_{j_m}}_{B}\right) = P(A_{i_1}) \dots P(A_{i_k}) P(A_{j_1}) \dots P(A_{j_m}),$$

$$P(AB) = P(A)P(B),$$

$\implies P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = P(A).$ □

Определение 13 (Алгебра, порожденная γ)**.** γ – некоторое конечное семейство множеств $A_1, \dots, A_n$.

Алгебра (σ-алгебра), порожденная γ – это минимальная по включению алгебра (σ-алгебра), содержащая все элементы γ.

Пусть $A_1 \dots A_n$ – разбиение Ω – α,

$$\mathcal{A}(\alpha) \text{ – } \sigma\text{-алгебра, порожденная } \alpha,$$
$$\mathcal{A}(\alpha) \text{ – конечно, содержит все множества вида } A_{i_1} + \dots + A_{i_k}.$$

Теорема 8. Любая конечная σ-алгебра порождена некоторым разбиением.

Доказательство. $\mathcal{B}$ – конечная σ-алгебра, $w \in \Omega$, $\quad \mathcal{B}_w = \{B \in \mathcal{B}: \ w \in B\}$,

$$B_w = \bigcap_{B \in \mathcal{B}_w} B \ni w \quad \text{и} \quad w \in B \implies B \supset B_w.$$

$w_1, w_2 \in \Omega$, покажем, что $B_{w_1} = B_{w_2}$ или $B_{w_1} \cap B_{w_2} = \varnothing$.

Пусть $B_{w_1} \cap B_{w_2} \neq \varnothing$, $w \in B_{w_1} \cap B_{w_2}$,

$$w \in B_{w_1} \implies B_{w_1} \supset B_w \implies \forall B \in \mathcal{B}_{w_1} \quad w \in B,$$

$$\underset{\substack{\| \\ B_{w_1}}}{\bigcap_{B \in \mathcal{B}_{w_1}}} \subset \bigcap_{w \in B} B = B_w \qquad \implies B_{w_1} = B_w = B_{w_2}.$$

□

Определение 14 (Независимые σ-алгебры)**.** $\mathcal{A}_1 \dots \mathcal{A}_n$ – σ-алгебры, они *независимы*, если $A_1 \dots A_n$ независимы для всех $A_i \in \mathcal{A}_i$.

Теорема 9. Конечные $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n$ σ-алгебры независимы $\iff$ независимы порождающие их разбиения.

Лемма 1. A и B независимы, тогда A и $\overline{B}$ тоже независимы.

Доказательство.

$$\begin{aligned} P(A\overline{B}) &= P(A) - P(AB) \\ &= P(A) - P(A)P(B) \\ &= P(A)\left(1 - P(B)\right) \\ &= P(A)P(\overline{B}). \end{aligned}$$

□