Вопросы к экзамену по Теории Графов и Комбинаторным Алгоритмам
3 семестр

Данил Заблоцкий

17 января 2024 г.

Содержание

1 Определение графа. Примеры графов. Степени вершин графа. Лемма о рукопожатиях.

Определение 1 (Неориентированный граф, вершины и ребра графа). *Неориентированный граф* – пара множеств $G = (V, E)$, где

V – непустое конечное множество,
E – множество, состоящее из неупорядоченных пар элементов из V.

Элементы множества V называются *вершинами*, а элементы E – *ребрами* графа.

Примечание. Если $u, v \in V$, $\{u, v\} \in E$, то будем записывать

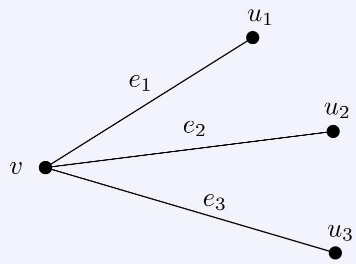
$$e = uv \ (= vu)$$

и говорить, что вершины u и v *смежны*, вершина u и ребро e – *инцидентны*.

Определение 2 (Степень вершины). *Степенью вершины* v называется число инцидентных ей ребер.

Обозначение: $d(v)$ $\big(deg(v)\big)$

Пример. $deg(v) = 3$



Пример. *Пустой граф* – граф без ребер: O_n.

Пример. *Полный граф* – граф, любая пара которого смежна: K_n.

Примечание.

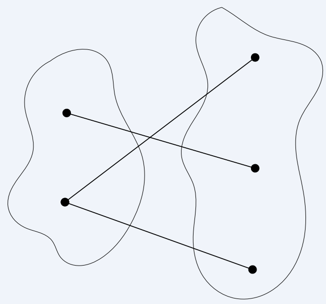
$$|E| = C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2} \text{ – число ребер.}$$

Пример. *Двудольный граф* – граф, вершины которого разбиты на 2 непересекающиеся части (доли) так, что любое ребро ведет из одной доли в другую.

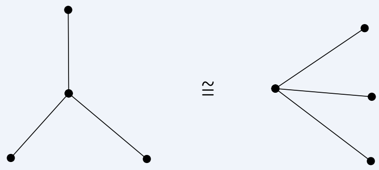
Если любая вершина одной доли смежна с любой вершиной другой доли, то такой граф называется *полным двудольным.*

Полный двудольный граф с долями размера p и q обозначают: $K_{p,q}$,

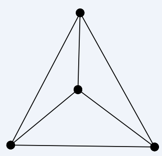
$$|E| = p \cdot q.$$



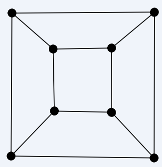
Пример. *Звезда* – полный двудольный граф $K_{1,q}$: одна доля состоит из одной вершины, а из нее веером расходятся лучи.



Пример. Графы многогранников



тетраэдр



куб

Лемма 1 (О рукопожатиях). Пусть $G = (V, E)$ – произвольный граф. Сумма степеней всех вершин графа G – четное число, равное удвоенному количеству его ребер:

$$\sum_{v \in V} deg_G(v) = 2|E| \qquad (1)$$

2 Маршруты, цепи, циклы. Лемма о выделении простой цепи. Лемма об объединении простых цепей.

Определение 3 (Маршрут)**.** *Маршрутом*, соединяющим вершины u и v ((u,v)-маршрут), называется чередующаяся последовательность вершин и ребер вида

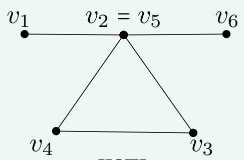
$$(u = v_1, e_1, v_2, \ldots, v_k, e_k, v_{k+1} = v)$$

такая, что $e_i = v_i v_{i+1},\ i = \overline{1,k}$.

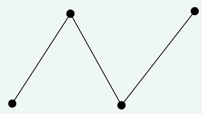
Определение 4 (Замкнутый маршрут)**.** Маршрут называется *замкнутым*, если первая вершина совпадает с последней, то есть

$$v_1 = v_{k+1}.$$

Определение 5 (Цепь, простая цепь)**.** Маршрут называется *цепью*, если в нем все ребра различны и *простой цепью*, если в нем все вершины различны (за исключением, быть может, первой и последней).

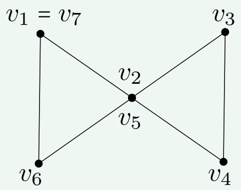


цепь

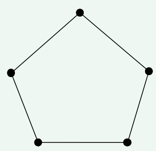


простая цепь

Определение 6 (Цикл, простой цикл)**.** Замкнутая цепь называется *циклом*, а замкнутая простая цепь – *простым циклом*.



цикл



простой цикл

Лемма 2 (О выделении простой цепи)**.** Всякий незамкнутый (u,v)-маршрут содержит простую (u,v)-цепь.

Лемма 3 (Об объединении простых цепей)**.** Объединение двух несовпадающих простых (u,v)-цепей содержит простой цикл.

3 Эйлеровы циклы. Критерий существования эйлерова цикла (теорема Эйлера).

Определение 7 (Эйлеров цикл)**.** Пусть $G = (V, E)$ – произвольный граф (мультиграф). Цикл в графе G называется *эйлеровым*, если он содержит все ребра графа.

Определение 8 (Эйлеров граф)**.** Граф называется *эйлеровым*, если в нем есть эйлеров цикл.

Теорема 1 (Эйлер, 1736)**.** В связном графе $G = (V, E)$ существует эйлеров цикл $\Leftrightarrow$ все вершины графа G четны (то есть имеют четную степень).

4 Гамильтоновы циклы. Достаточные условия существования гамильтонова цикла (теоремы Оре и Дирака).

Определение 9 (Гамильтонов цикл, граф)**.** Пусть $G = (V, E)$ – обыкновенный граф, $|V| = n$. Простой цикл в графе G называется *гамильтоновым*, если он проходит по всем вершинам графа.

Граф называется *гамильтоновым*, если он содержит гамильтонов цикл.

Определение 10 (Гамильтонова цепь)**.** Простая цепь в графе G называется *гамильтоновой*, если она проходит по всем вершинам графа.

Теорема 2 (Оре, 1960)**.** Пусть $n \geqslant 3$. Если в n-вершинном графе G для любой пары несмежных вершин u, v выполнено условие

$$deg(u) + deg(v) \geqslant n,$$

то граф – гамильтонов.

Теорема 3 (Дирак, 1953)**.** Пусть $n \geqslant 3$. Если в n-вершинном графе G для любой вершины выполнено условие

$$deg(v) \geqslant \frac{n}{2},$$

то граф – гамильтонов.

5 Изоморфизм графов. Помеченные и непомеченные графы. Теорема о числе помеченных n-вершинных графов.

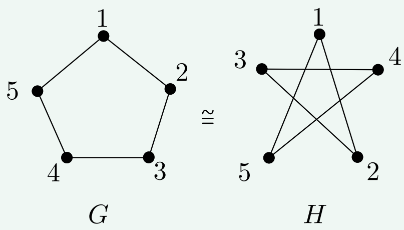
Определение 11 (Изоморфные графы). Графы $G = (V_G, E_G)$, $H = (V_H, E_H)$ называются *изоморфными*, если между множествами из вершин существует взаимноодназначное соответствие

$$\phi : V_G \to V_H,$$

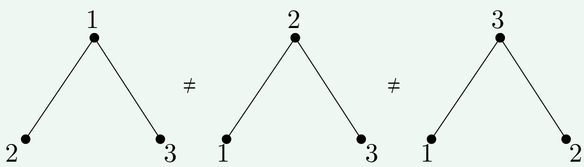
сохраняющее смежность, то есть $\forall u, v \in V_G$

$$uv \in E_G \Leftrightarrow \phi(u)\phi(v) \in E_H.$$

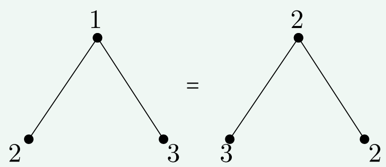
Обозначение: $G \cong H$



Определение 12 (Помеченный граф). Граф называется *помеченным*, если его вершины отличаются одна от другой какими-то метками.



3 разных помеченных графа



2 одинаковых помеченных графа

Теорема 4 (О числе помеченных n-вершинных графах)**.** Число p_n различных помеченных n-вершинных графов с фиксированным множеством вершин равно
$$2^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

6 Проблема изоморфизма. Инварианты графа. Примеры.

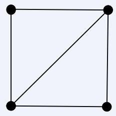
Определение 13 (Инвариант графа)**.** *Инвариант графа* $G = (V, E)$ – это число, набор чисел, функция или свойство связанные с графом и принимающие одно и то же значение на любом графе, изоморфном G, то есть
$$G \cong H \Rightarrow i(G) = i(G).$$

Инвариант i называется *полным*, если
$$i(G) = i(H) \Rightarrow G \cong H.$$

Обозначение: $i(G)$

Пример.

1. $n(G)$ – число вершин.
2. $m(G)$ – число ребер.
3. $\delta(G)$ – min степень.
4. $\Delta(G)$ – max степень.
5. $\phi(G)$ – плотность графа G – наибольшее число попарно смежных вершин.
6. $\varepsilon(G)$ – неплотность – наибольшее число попарно несмежных вершин.
7. $ds(G)$ – вектор степеней (или степенная последовательность) – последовательность степеней всех вершин, выписанная в порядке неубывания.
8. $\chi(G)$ – хроматическое число – наименьшее число χ, для которого граф имеет правильную χ-раскраску множества вершин (правильная раскраска – раскраска, при которой смежные вершины имеют разный цвет).

$Q_4:$ 

$$
\begin{array}{ll}
n(Q_4) = 4 & \phi(Q_4) = 3 \\
m(Q_4) = 5 & \varepsilon(Q_4) = 2 \\
\delta(Q_4) = 2 & ds(Q_4) = (2,2,3,3) \\
\Delta(Q_4) = 3 & \chi(Q_4) = 3
\end{array}
$$

7 Связные и несвязные графы. Лемма об удалении ребра. Оценки числа ребер связного графа.

Определение 14 (Соединимые вершины, связный граф)**.** Две вершины u, v графа G называются *соединимыми*, если в G $\exists$ (u, v)-маршрут.

Граф называется *связным*, если в нем любые две вершины соединимы.

Замечание. Тривиальный граф считается связным.

Определение 15 (Циклическое, ациклическое ребро)**.** Ребро e называется *циклическим*, если оно принадлежит некоторому циклу, и *ациклическим* – в противном случае.

Лемма 4 (Об удалении ребра)**.** Пусть $G = (V, E)$ – связный граф, $e \in E$.

1. Если e – циклическое ребро, то граф $G - e$ – связен.
2. Если e – ациклическое, то граф $G - e$ имеет ровно две компоненты связности.

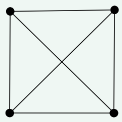
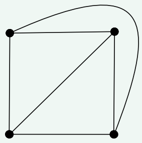
Теорема 5 (Оценки числа ребер связного графа)**.** Если G – связный (n, m)-граф, то

$$n - 1 \leqslant m \leqslant \frac{n(n-1)}{2}.$$

8 Плоские и планарные графы. Графы Куратовского. Формула Эйлера для плоских графов.

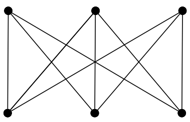
Определение 16 (Плоский, планарный граф). *Плоский граф* – это такой граф, вершины которого являются точками плоскости, а ребра – непрерывными плоскими линиями без самопересечений, соединяющими вершины так, что никакие два ребра не имеют общих точек вне вершин.

Планарный граф – это граф, изоморфный некоторому плоскому графу.

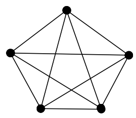
K_4 :  $\cong$ 

не плоский, но планарный — плоский

Замечание. Несложно доказать, что графы $K_{3,3}$ и K_5 – непланарны.



$K_{3,3}$



K_5

Определение 17 (Гомеоморфные графы). Два графа называются *гомеоморфными*, если их можно получить из одного и того же графа с помощью разбиения ребер, то есть замены некоторых ребер простыми цепями.

Теорема 6 (Понтрягин-Куратовский). Граф планарен $\Leftrightarrow$ он не содержит подграфов, гомеоморфных $K_{3,3}$ или K_5.

Определение 18 (Грань). *Гранью* плоского графа называется максимальное множество точек плоскости, каждая пара из которых может быть соединена непрерывной плоскоской линией, не пересекающей ребер графа.

Теорема 7 (Формула Эйлера). Для всякого связного плоского графа верна формула

$$n - m + l = 2, \tag{2}$$

где n – число вершин, m – число ребер, l – число граней графа.

9 Деревья. Первая теорема о деревьях.

Определение 19 (Ациклический граф, дерево). Граф называется *ациклическим*, если в нем нет цикла. Связный ациклический граф называется *деревом*.

Теорема 8 (Первая теорема о деревьях). Для (n, m)-графа G следующие утверждения эквивалентны:

1. G – дерево, то есть связный ациклический граф.
2. G – связен и $m = n - 1$.
3. G – ациклический и $m = n - 1$.

10 Деревья. Вторая теорема о деревьях.

Теорема 9 (Вторая теорема о деревьях). Для (n, m)-графа G следующие утверждения эквивалентны:

1. G – дерево, то есть связный ациклический граф.
4. G – ациклический и если любую пару его несмежных вершин соединить ребром, то полученный граф будет содержать ровно один цикл.
5. Любые две вершины графа G соединены единственной простой цепью.

11 Теорема Кэли о числе помеченных n-вершинных деревьев (с леммой).

Лемма 5. При $n \geqslant 2$ существует взаимнооднозначное соответствие между множеством всех помеченных n-вершинных деревьев с метками $1, 2, \ldots, n$ и множеством всех слов длины $n - 2$ в алфавите $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Теорема 10 (А. Кэли, 1889). Число различных помеченных деревьев с n вершинами равно

$$t_n = n^{n-2}.$$

12 Центр дерева. Центральные и бицентральные деревья. Теорема Жордана.

Примечание. $d(u, v)$ – *длина* самой короткой простой (u, v)-цепи (длина – число ребер).

Определение 20 (Эксцентриситет). *Эксцентриситет* вершины v – расстояние до самой удаленной от v вершины графа:

$$\varepsilon(v) = \max_{u \in V} d(v, u).$$

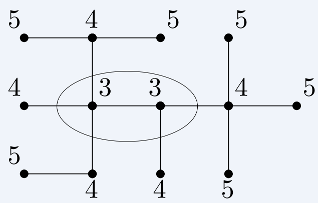
Определение 21 (Радиус). *Радиус* связного графа – это наименьший из эксцентриситетов его вершин:

$$\tau(G) = \min_{v \in V} \varepsilon(v).$$

Определение 22 (Центральная вершина). Вершина называется *центральной*, если ее эксцентриситет равен радиусу графа.

Определение 23 (Центр графа). Множество центральных вершин графа называется его *центром*.

Пример. Центр графа:



Определение 24 (Центральное, бицентральное дерево). Дерево, центр которого состоит из одной вершины, называется *центральным*, а дерево, центр которого состоит из двух смежных вершин – *бицентральным*.

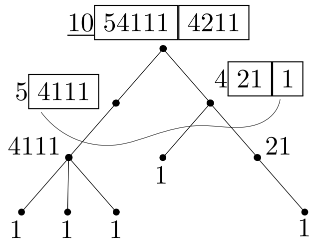
Теорема 11 (Жордан). Центр любого дерева состоит из одной или двух смежных вершин.

13 Изоморфизм деревьев. Процедура кортежирования (на примере). Теорема Эдмондса.

Примечание (Процедура кортежирования дерева).

Вход: n-вершинное дерево $T = (V, E)$.

Выход: Список натуральных чисел, представляющий кортеж T.



$\underline{3}11 > \underline{2}1$
$4\underline{2}11 > 4\underline{1}11$

Теорема 12 (Эдмондс)**.** Для изоморфизма деревьев необходимо и достаточно, чтобы совпадали их центральные кортежи.

14 Вершинная и реберная связность графа. Основное неравенство связности.

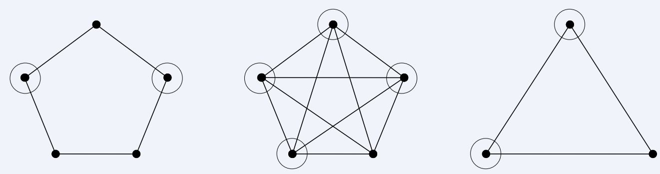
Определение 25 (Вершинная связность (связность))**.** *Вершинной связностью (связностью)* обыкновенного нетривиального графа G называется наименьшее число вершин, в результате удаления которых получается несвязный или тривиальный граф:

$$\mathcal{X}(G).$$

Примечание. Для тривиального графа по определению полагаем

$$\mathcal{X}(O_1) = 0.$$

Пример. Для C_5, K_5 и C_3

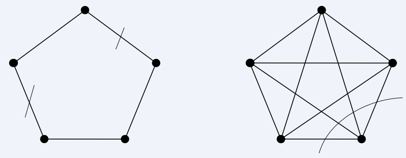


$\mathcal{X}(C_5) = 2$ $\mathcal{X}(K_5) = 4$ $\mathcal{X}(C_3) = 2$

Определение 26 (Реберная связность)**.** *Реберной связностью* нетривиального графа называется наименьшее число ребер, в результате удаления которых получается несвязный граф:

$$\lambda(G).$$

Пример. $\lambda(O_1) = 0,$



$\lambda(C_5) = 2$ $\lambda(K_5) = 4$

Теорема 13 (Основное неравенство связности)**.** Для любого графа G

$$\varkappa(G) \leqslant \lambda(G).$$

15 Отделимость и соединимость. Теорема Менгера.

Определение 27 (Разделение вершин)**.** Пусть $G = (V, E)$ – связный граф, s и t – две несмежные вершины. Говорят, что множество вершин $\Omega \subset V$ *разделяет* s и t, если эти вершины принадлежат разным компонентам связности графа $G - \Omega$.

Определение 28 (k-отделимые вершины)**.** Несмежные вершины s и t называются *k-отделимыми*, если k равно наименьшему числу вершин, разделяющих s и t.

Определение 29 (Вершинно-независимые цепи)**.** Две простые цепи, соединяющие s и t, называются *вершинно-независимыми*, если они не имеют общих вершин, отличных от s и t.

Определение 30 (l-соединимые вершины)**.** Вершины s и t называются *l-соединимыми*, если l равно наибольшему числу вершинно-независимых цепей.

Теорема 14 (Менгер)**.** В связном графе любые две несмежные вершины k-отделимы $\Leftrightarrow$ они k-соединимы.

16 Реберный вариант теоремы Менгера.

Определение 31 (Разделение вершин)**.** Пусть $G = (V, E)$ – связный граф, s и t – две его произвольные вершины. Говорят, что множество ребер $R \subset E$ *разделяет* s и t, если эти вершины принадлежат разным компонентам связности графа $G - R$.

Определение 32 (k-реберно-отделимые вершины)**.** Вершины s и t называются *k-реберно-отделимыми*, если k равно наименьшему числу ребер, разделяющих s и t.

Определение 33 (Вершинно-независимые цепи)**.** Две простые цепи, соединяющие s и t, называются *вершинно-независимыми*, если они не имеют общих вершин, отличных от s и t.

Определение 34 (Реберно-независимые цепи)**.** Две простые цепи, соединяющие s и t, называются *реберно-независимыми*, если они не имеют общих ребер.

Определение 35 (l-реберно-соединимые вершины)**.** Вершины s и t называются *l-реберно-соединимыми*, если наибольшее число реберно-независимых (s, t)-цепей равно l.

Теорема 15 (Реберный аналог теоремы Менгера)**.** В связном графе любые две вершины k-реберно-отделимы $\Leftrightarrow$ они k-реберно-соединимы.