Теория вероятностей

Заблоцкий Данил

1 апреля 2024 г.

Оглавление

Введение

Лекция 1: Введение

от 14 фев 8:45

Примечание. *Массовое явление* – явление, для которого можно неоднократно повторить исходные условия.

Случайное событие – результат эксперимента.

$$\begin{tikzcd} \boxed{\textbf{окр. мир}} \arrow[d, bend right=60, "\textbf{МС}"'] \\ \boxed{\textbf{мат. модель}} \arrow[u, bend right=60, "\textbf{ТВ}"'] \end{tikzcd}$$

Ω – множество всех элементарных случайных событий (элементарных исходов), $w \in \Omega$ – *элементарный исход.*

Определение 0.1 (Благоприятный элементарный исход)**.** Пусть A – исходное событие, $w \in \Omega$ – *благоприятный* для A, если w влечет A.

Тогда A – это *подмножество* Ω *с подмножеством всех благоприятных для* A *исходов.*

Примечание. A, B – случайные события ($A, B \subset \Omega$).

$$\begin{array}{rcccl} \text{Не } A & = & \overline{A} & = & \Omega \backslash A \\ A \text{ и } B & = & A \cdot B & = & A \cap B, \\ A \text{ или } B & = & A + B & = & A \cup B. \end{array}$$

Ω – достоверное, $\varnothing = \overline{\Omega}$ – невозможное событие.

Определение 0.2 (Алгебра)**.** $\mathcal{F}$ – семейство подмножеств Ω, $\mathcal{F}$ – *алгебра*, если

1. $\Omega \in \mathcal{F}$ $(\phi \in \mathcal{F})$.
2. $A \in \mathcal{F} \Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{F}$.
3. $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow AB \in \mathcal{F},\ A + B \in \mathcal{F}$.
   Если, кроме этого, верное еще и
4. $\forall \{A_\alpha\} \subset \mathcal{F}$
$$\bigcap_\alpha A_\alpha \in \mathcal{F} \text{ и } \bigcup_\alpha A_\alpha \in \mathcal{F}.$$

то $\mathcal{F}$ – G-алгебра.

Замечание. Случайные события должны образовывать G-алгебру.

Замечание. Очевидно, что
$$\overline{\sum_\alpha A_\alpha} = \prod_\alpha \overline{A_\alpha} \text{ и } \overline{\prod_\alpha A_\alpha} = \sum_\alpha \overline{A_\alpha}.$$

Замечание.
$$A \Rightarrow B \text{ то же самое, что и } A \leqslant B$$
$$A \Leftrightarrow B \text{ то же самое, что и } A = B$$

Определение 0.3 (Вероятностное пространство)**.** *Вероятностное пространство* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, где Ω – множество элементарных исходов, $\mathcal{F}$ – G-алгебра подмножеств Ω, P – мера на $\mathcal{F}$, $P : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$.

A_1 $\forall A \in \mathcal{F}\ P(A) \geqslant 0$.

A_2 $P(\Omega) = 1$ (условие нормировки).

A_3 $\forall A, B \in \mathcal{F}\ AB = \varnothing \Rightarrow P(A + B) = P(A) + P(B)$.

A_4 $\{A_n\} \subset \mathcal{F}\ A_{n+1} \leqslant A_n,\ \bigcap_n A_n = \varnothing$
$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = 0 \text{ (непрерывность меры).}$$

Теорема 0.4 (Свойства вероятностей). $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ – вероятностное пространство.

1. $A \in \mathcal{F} \Rightarrow P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

   Доказательство. $B = \overline{A},\ AB = \varnothing,\ A + B = \Omega,$
   $$1 = P(\Omega) = P(A + \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}).$$
   □

   Следовательно, $P(\varnothing) = 0$.

2. $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leqslant P(B)$.

   Доказательство. $C = B \backslash A = B \cap \overline{A} \in \mathcal{F},\ B = A + C,\ AC = \varnothing,$
   $$P(B) = P(A) + \underset{\geqslant 0}{P(C)} \geqslant P(A).$$
   □

   Следовательно, $\forall A \in \mathcal{F}\ 0 \geqslant P(A) \geqslant 1\ (\phi \subseteq A \subseteq \Omega)$.

3. $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F},\ A_i A_j = \varnothing\ (i \neq j)$.
   Тогда $P(A_1 + \ldots + A_n) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k)$.

   Доказательство. Индукция по n. □

4. $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F} \Rightarrow P(A_1 + \ldots + A_n) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)$.

   Доказательство. $B_k = A_k \backslash \left(\sum_{i=1}^{k-1} A_i\right),\ \sum_{k=1}^{n} A_k = \sum_{k=1}^{n} B_k.$
   $$P\left(\sum A_k\right) = P(\sum B_k) = \sum P(B_k) \leqslant \sum P(A_k)\ (B_k \leqslant A_k).$$
   □

5. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

   Доказательство. $C = A \backslash B,\ P(A) = P(C + AB) = P(C) + P(AB),$
   $$P(C) = P(A) - P(AB),$$
   $$P(A \cup B) = P(B + C) = P(B) + P(C) = P(B) + P(A) - P(AB).$$
   □

A_3^* **(G-аддитивность)**

$$\{A_n\} \subset \mathcal{F},\ A_i A_j = \varnothing \Rightarrow P\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

Теорема 0.5. A_1, A_2, A_3 и A_4 $\Leftrightarrow$ A_1, A_2, A_3^*.

Доказательство.

$\boxed{\Rightarrow}$ Покажем, что A_3 и A_4 $\Rightarrow$ A_3^*:

$\{A_n\} \subset \mathcal{F},\ A_iA_j = \varnothing,$

$$B_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} A_k, \qquad A = \sum_{k=1}^{\infty} A_k,$$

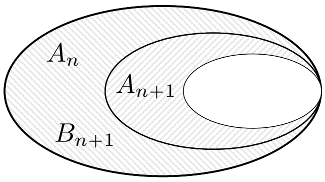
$$A = A_1 + \ldots + A_n + B_n,$$
$$P(A) = P(A_1) + \ldots + P(A_n) + P(B_n).$$

$B_{n+1} \leqslant B_n,\ \bigcap_n B_n = \varnothing \Rightarrow B_n \to 0,\ P(B_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$

$$\begin{array}{ccc} P(A) & = & \sum_{k=1}^{n} P(A_k) + P(B_n) \to \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) + 0 \\ \downarrow & & \\ P(A) & & \end{array}.$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Пусть есть A_3^*. Построим последовательность $A_1, \ldots, A_n, \varnothing, \ldots, \varnothing, \ldots$:

$$\left.\begin{array}{ccc} P\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right) & = & P\left(\sum_{k=1}^{n} A_k\right) \\ \parallel & & \\ \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) & = & \sum_{k=1}^{n} P(A_k) \end{array}\right. \Rightarrow A_3.$$



$\{A_n\} \subset \mathcal{F},\ A_n \geqslant A_{n+1}$ и $\bigcap A_n = \varnothing.$

$B_{n+1} = A_n \backslash A_{n+1},\ B_iB_j = \varnothing,\ \bigcup B_n = \bigcup A_n, \qquad B_1 = A_1,$

$$\begin{array}{ccc} P\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right) & = & P\left(\sum_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(B_n) - \text{сходится} \\ \parallel & & \\ P(A_1) & & \end{array},$$

$$\left.\begin{array}{r} A_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} B_k \Rightarrow P(A_n) = \sum_{k=n+1}^{\infty} P(B_k) \to 0 \\ \left|\sum_{k=1}^{\infty} B_k - \sum_{k=1}^{n} P(B_k)\right| \to 0 \end{array}\right. \Rightarrow A_4.$$

$\square$

Пример. $\Omega = \{B, H\}$, $\mathcal{F} = \{\varnothing, \Omega, \{B\}, \{H\}\}$,

$$P(\Omega) = 1, \qquad P(\varnothing) = 0,$$

$$\begin{array}{cc} \text{М} & \text{Ж} \\ P(B) = 0 & P(B) = \frac{1}{2} \\ P(H) = 1 & P(H) = \frac{1}{2} \end{array}$$