Комплексный анализ

Заблоцкий Данил

21 марта 2024 г.

Оглавление

Глава 1

Голоморфные функции

Лекция 1: Начало

от 15 фев 12:45

1.1 Комплексная плоскость

1.1.1 Комплексные числа

Примечание. $\mathbb{R}^2 \coloneqq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}(x_1, y_1) + (x_2, y_2) &\coloneqq (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\ (x_1, y_1)(x_2, y_2) &\coloneqq (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 - x_2y_1)\end{aligned}$$

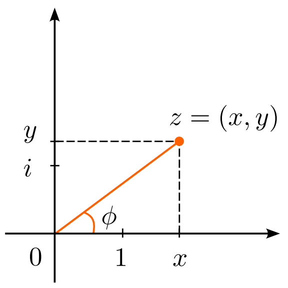


Рис. 1.1: $x = r\cos\phi,\ y = r\sin\phi$

$$\begin{matrix} z = (x, y) = x + iy \\ \overline{z} = x - iy \end{matrix}, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

$$(1, 0) \eqqcolon 1, \quad (0, 1) \eqqcolon i, \quad (0, 0) \eqqcolon 0$$

$$x \eqqcolon Rez, \quad y \eqqcolon Imz$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \eqqcolon |z|$$

$$\phi = argz, \qquad \underbrace{0 \leqslant argz < 2\pi}_{\text{главное значение аргумента}}$$

$$Argz \coloneqq argz + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\boxed{e^{i\phi} = \cos\phi + i\cdot\sin\phi,\ \forall\phi\in\mathbb{R}}$$ – формула Эйлера

$$\boxed{z = |z|(\cos argz + i\cdot\sin argz)}$$ – тригонометрическая форма записи

$$\boxed{z = |z|e^{iargz}}$$ – показательная форма записи

$$e^z = e^{x+iy} = e^x\cdot e^{iy},\quad e^{z_1+z_2} = e^{z_1}\cdot e^{z_2}$$

$$z^n = |z|^n e^{inargz},\quad z = re^{ir}$$

$$\boxed{z^n = r^n(\cos n\phi + i\sin n\phi)}$$ – формула Муавра

$$z^n = z_0,\quad \sqrt[n]{z_0} = \sqrt[n]{|z_0|}\cdot e^{i\frac{argz_0+2\pi k}{n}},\ 0\leqslant k\leqslant n-1$$

Теорема 1.1 (Свойства комплексных чисел)**.** $\forall z, z_1, z_2\in\mathbb{C}$ справедливы равенства:

1. $z\cdot\overline{z} = |z|^2$.
2. $\overline{(z_1+z_2)} = \overline{z_1}+\overline{z_2}$.
3. $\overline{z_1\cdot z_2} = \overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$.
4. $\overline{\overline{z}} = z$.
5. $\overline{z} = z \Leftrightarrow z\in\mathbb{R}$.
6. $|z_1\cdot z_2| = |z_1|\cdot|z_2|$.
7. $|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$.
8. $\big||z_1|-|z_2|\big|\leqslant|z_1-z_2|$.
9. $arg(z_1\cdot z_2) \underset{(mod\ 2\pi)}{=} argz_1 + argz_2$.
10. $arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) \underset{(mod\ 2\pi)}{=} argz_1 - argz_2$.

Примечание.

$$\xi = \frac{x}{1+|z|^2}, \quad \eta = \frac{y}{1+|z|^2}, \quad \zeta = \frac{|z|^2}{1+|z|^2},$$

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - \zeta = 0.$$

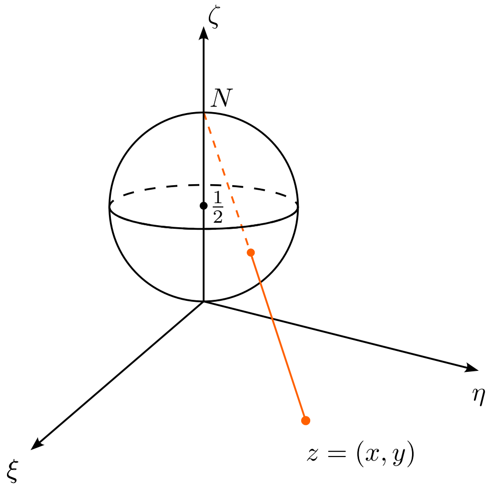


Рис. 1.2: Сфера Римана S

$$P : \mathbb{C} \xrightarrow{\text{на}} S \setminus \{N\}, \quad P(z) = (\xi, \eta, \zeta)$$

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0, \quad A, B, C, D \in \mathbb{R},$$

$$\gamma \text{ -- окружность на } \mathbb{C}, \quad P(\Upsilon) \text{ -- окружность на } S.$$

$$|z|^2 = x^2 + y^2 = \frac{\zeta}{1-\zeta}, \quad \begin{cases} x = \frac{\xi}{1-\zeta} \\ y = \frac{\eta}{1-\zeta} \end{cases}$$

$$A\zeta + B\xi + C\eta + D(1-\zeta) = 0,$$

$$\overline{\mathbb{C}} \coloneqq \mathbb{C} \cup \{\infty\}, \quad P(\infty) \coloneqq N.$$

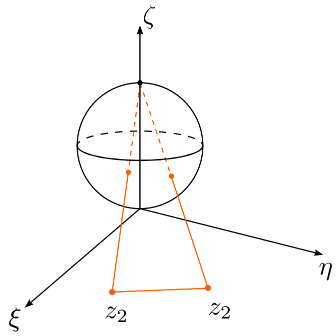
1.1.2 Топология комплексной плоскости

Примечание. $M_1, M_2 \in \mathbb{R}^3$,

$$dist(M_1, M_2) \coloneqq \sqrt{(\xi_1 - \xi_2)^2 + (\eta_1 - \eta_2)^2 + (\zeta_1 - \zeta_2)^2},$$

$d(z_1, z_2) \coloneqq |z_1 - z_2|,\ z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ – расстояние на комплексной плоскости,

$$\rho(z_1, z_2) \coloneqq dist\big(P(z_1), P(z_2)\big).$$



$$B_\varepsilon(z_0) \coloneqq \{z \in \mathbb{C} :\ |z - z_0| < \varepsilon\}$$

Определение 1.2 (Окрестность)**.** Множество называется *окрестностью* точки, если оно содержит шар с центром в этой точке.

$$\text{Обозначение:}\quad O_z,\ z \in \overline{\mathbb{C}}.$$

Примечание.

$$\forall z \in \mathbb{C}\quad d(z, \infty) \coloneqq +\infty,$$

$$d :\ \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{R},$$
$$d :\ \mathbb{C}^2 \longrightarrow \overline{\mathbb{R}},$$
$$\rho : \overline{\mathbb{C}^2} \longrightarrow \mathbb{R},\quad \rho(z, \infty) \in \mathbb{R}.$$

Лекция 2: Продолжение

от 22 фев 12:45

Примечание (Свойства окрестностей)**.**

1. $\forall z \in \overline{\mathbb{C}},\ \forall V \in O_z\quad z \in V.$
2. $\forall z \in \overline{\mathbb{C}},\ \forall U, V \in O_z\quad U \cap V \in O_z.$
3. $\forall z \in \overline{\mathbb{C}},\ \forall U \in O_z,\ \forall V \supset U\quad V \in O_z.$
4. $\forall z \in \overline{\mathbb{C}},\ \forall V \in O_z,\ \exists U \in O_z :\ U \subset V \ \&\ \forall w \in U\quad U \in O_w.$

Определение 1.3 (Открытое множество). Множество называется *открытым*, если оно является окрестностью каждой своей точки.

Определение 1.4 (Окрестность множества). *Окрестностью множества* называется множество, являющееся окрестностью каждой точки исходного множества.

Примечание. $D \subset \overline{\mathbb{C}},\ z \in \mathbb{C}$

$$dist(z, D) := \inf_{w \in D} d(z, w).$$

$D_1, D_2 \subset \overline{\mathbb{C}}$

$$dist(D_1, D_2) := \inf_{\substack{z \in D_1 \\ w \in D_2}} d(z, w).$$

Определение 1.5 (Внутренняя точка). $D \subset \overline{\mathbb{C}},\ z \in D$ называется *внутренней точкой* множества D, если $D \in O_z$.

Определение 1.6 (Внутренность). Множество всех внутренних точек называется *внутренностью* и обозначается:

$$intD.$$

Определение 1.7 (Предельная точка множества). Точка называется *предельной точкой множества*, если в любой ее окрестности есть точки множества, отличные от данной.

Замечание. Точка является предельной точкой множества на расширенной комплексной плоскости $\Leftrightarrow$ любая ее окрестность содержит бесконечное число точек данного множества.

Определение 1.8 (Окрестность бесконечности). $V \subset \overline{\mathbb{C}}$ является *окрестностью бесконечности*, если $\exists \varepsilon > 0 : \ \{z \in \overline{\mathbb{C}} : \ |z| > \varepsilon\} \subset V$.

Определение 1.9 (Точка прикосновения, замыкание). Точка $z \in \overline{\mathbb{C}}$ называется *точкой прикосновения множества* D, если $\forall V \in O_z \quad V \cap D \neq \emptyset$.

Множество всех точек прикосновения называется *замыканием* и обозначается:

$$clD.$$

Определение 1.10 (Замкнутое множество). Множество называется *замкнутым*, если его дополнение открыто.

Определение 1.11 (Граничная точка)**.** Точка называется *граничной точкой множества*, если в любой ее окрестности есть как точки множества, так и точки его дополнения.

Обозначение: ∂D.

Примечание. *Множество всех замкнутых подмножеств расширенной комплексной плоскости*:

$$Cl\overline{\mathbb{C}}.$$

Определение 1.12 (Компактное множество)**.** Множество $\overline{\mathbb{C}}$ называется *компактным*, если любое его открытое покрытие имеет конечное подпокрытие.

Примечание. v – покрытие множества D, если $D \subset \bigcup_{V \in v} V,\ v \subset \underbrace{\mathcal{P}(\overline{\mathbb{C}})}_{2^{\overline{\mathbb{C}}}}$

Теорема 1.13 (Критерий компактности (первый))**.** Подмножество $\mathbb{C}$ компактно $\Leftrightarrow$ оно замкнуто и ограниченно.

Примечание. Множество ограниченно, если оно содержится в некотором шаре.

Замечание. $\overline{\mathbb{C}}$ – компактно.

Определение 1.14. $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ сходится к $z \in \mathbb{C}$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}:\ \forall n \geqslant n_0 \quad |z_n - z| < \varepsilon$.

$$d(z_n, z) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0,$$

$z_n \longrightarrow \infty$, если $\lim\limits_{n \to \infty} |z_n| = \pm\infty$,

$$z = \lim_{n \to \infty} z_n, \quad z_n \xrightarrow[n \to \infty]{} z.$$

Замечание. $z_n \longrightarrow z$ в $\mathbb{C} \Leftrightarrow \begin{cases} Rez_n \longrightarrow Rez \\ Imz_n \longrightarrow Inz \end{cases}$ в $\mathbb{R}$.

$$|z_n - z| = \sqrt{(Rez_n - Rez)^2 + (Imz_n - Imz)^2} \geqslant |Rez_n - Rez|,$$

$$Re(z_1 \pm z_2) = Rez_1 \pm Rez_2.$$

Теорема 1.15 (Критерий Коши)**.** Последовательность $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ сходится $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}:\ \forall n, m \geqslant n_0$

$$|z_n - z_m| < \varepsilon.$$

Теорема 1.16 (Критерий Коши (в $\overline{\mathbb{C}}$)). Последовательность $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ сходится $\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n, m \geqslant n_0$

$$\rho(z_n, z_m) < \varepsilon.$$

Примечание. $z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} z \Leftrightarrow \rho(z_n, z) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Теорема 1.17 (Критерий компактности (второй)). $D \subset \overline{\mathbb{C}}$, $\forall\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset D$ $\exists\{z_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$:

$$z_{n_k} \longrightarrow z \in D.$$

Примечание. $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$

$$S_n := \sum_{k=1}^{\infty} z_k, \quad \sum_{n=1}^{\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} S_n.$$

Определение 1.18 (Числовой ряд). *Числовым рядом* называется формальная сумма членов

Определение 1.19 (Абсолютно сходящийся числовой ряд). Числовой ряд называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$.

Теорема 1.20 (Критерий Коши сходимости ряда). Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ сходится $\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists m \in \mathbb{N} :\ \forall n \geqslant m\ \forall k \in \mathbb{N}$

$$\underbrace{|z_{n+1} + z_{n+2} + \ldots + z_{n+k}|}_{|S_{n+k} - S_n|} < \varepsilon.$$

Следствие 1.21. Если ряд сходится, то его общий член стремится к нулю.

Следствие 1.22. Каждый абсолютно сходящийся числовой ряд – сходится.

1.1.3 Пути, кривые и области

Определение 1.23 (Путь). $\gamma :\ [a; b] \longrightarrow \mathbb{C},\ \gamma$ – непрерывное отображение $[a; b]$ в $\mathbb{C}$ – это *путь*.

Пример. $\gamma(t) = e^{it}, \quad o \leqslant t \leqslant 2\pi$.

Определение 1.24 (Эквивалентные пути).

$$\begin{aligned}\gamma_1 &: [a_1; b_1] \longrightarrow \mathbb{C},\\ \gamma_2 &: [a_2; b_2] \longrightarrow \mathbb{C}.\end{aligned}$$

$\gamma_1 \sim \gamma_2$, если $\exists$ возрастающая непрерывная функция $\phi : [a_1; b_1] \longrightarrow [a_2; b_2]$:

$$\gamma_1(t) = \gamma_2\big(\phi(t)\big), \quad \forall t \in [a_1, b_1].$$

Пример.

$$\begin{array}{ll} \gamma_1(t) = t, & 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ \gamma_2(t) = \sin t, & 0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2} \\ \gamma_3(t) = \sin t, & 0 \leqslant t \leqslant \pi \\ \gamma_4(t) = \cos t, & 0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2} \end{array},$$

$$\phi(t) = \arcsin t, \quad \gamma_1(t) = \gamma_2\big(\phi(t)\big).$$

Определение 1.25 (Жорданов путь). Путь называется *жордановым*, если он является взаимно однозначной функцией.

Лемма 1.26. Для каждого жорданова пути $\exists \delta > 0$: для любой не кольцевой точки пути окружность с центром в этой точке с радиусом δ пересекает путь не более чем в двух точках (δ – стандартный радиус жорданова пути).

Определение 1.27 (Кривая). *Кривой* называется класс эквивалентных между собой путей.

Лекция 3: Продолжение

от 29 фев 12:45

Определение 1.28 (Связное множество). $A \subset \overline{\mathbb{C}}$ называется *связным*, если $\nexists U, V \in O_P\overline{\mathbb{C}}$: $U \cap A \neq \emptyset$, $U \cap V = \emptyset$.

$$O_P\overline{\mathbb{C}} \text{ – совокупность всех открытых множеств}$$

Пример. $A = \big\{(0, y) : \ -1 \leqslant y \leqslant 1\big\} \cup \big\{\big(x, \sin\frac{1}{x}\big) : \ 0 < x \leqslant 1\big\}$ – связное.

Определение 1.29 (Линейно связное множество). Множество называется *линейно связным*, если любые его точки можно соединить путем, значения которого лежат в этом множестве.

Замечание. В пространстве $\mathbb{R}^n$, и в частности $\overline{\mathbb{C}}$, любое открытое множество связно $\Leftrightarrow$ оно линейно связно.

Определение 1.30 (Область). *Областью* в $\overline{\mathbb{C}}$ называется любое непустое открытое связное множество.

Определение 1.31 (Замкнутая область). *Замкнутой областью* будем называть замыкание области.

1.2 Функции комплексного переменного

1.2.1 Структура функции комплексного переменного

Примечание. $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$

$domf$ – область определения функции
imf – область значения функции

Определение 1.32 (Предел отображения). $D \subset domf$, $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ – предельная точка D. Тогда $w_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ называется *пределом отображения* f,

$$w_0 \coloneqq \lim_{D \ni z \to z_0} f(z), \text{ если } \forall V \in O_{w_0} \ \exists U \in O_{z_0} : \ f(\mathring{U} \cap D) \subset V,$$

$$U \in O_{z_0}, \quad \mathring{U} = U \setminus \{z_0\}.$$

Примечание. В случае, когда $z_0, w_0 \in \mathbb{C}$ следует, что $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \ \forall z \in D$

$$0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow \big| f(z) - w_0 \big| < \varepsilon.$$

Определение 1.33 (Непрерывная функция в точке). Функция f называется *непрерывной в точке* $z_0 \in \mathbb{C}$, если:

1. $z_0 \in domf$.
2. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \ \forall z \in D$
$$0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - w_0| < \varepsilon.$$

Определение 1.34 (Непрерывная функция на множестве)**.** Функция $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ непрерывна на $D \subset \mathbb{C}$, если

1. $D \subset dom f$.
2. $\forall z_0 \in D\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall z \in D$

$$|z - z_0| < \delta \Rightarrow \big|f(z) - f(z_0)\big| < \varepsilon.$$

Примечание (Функция Дирихле)**.** $D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$, непрерывна на $\mathbb{Q}$, непрерывна на $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Замечание. Если множество является открытым или совпадает с областью определения функции, то непрерывность функции на этом множестве равносильно ее непрерывности в каждой точке.

$$f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C} (n \in \mathbb{N}), \quad D \coloneqq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} dom f_n.$$

Определение 1.35. $A \subset D,\ f : A \to \mathbb{C},\ f_n \rightrightarrows f$ на A, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} :\ \forall z \in A\ \forall n \geqslant n_0$

$$\big|f_n(z) - f(z)\big| < \varepsilon.$$

($\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant n_0\ \ \sup\limits_{z \in A}\big|f_n(z) - f(z)\big| < \varepsilon,\ |z - z_0| < \delta \Rightarrow \big|f(z) - f(z_0)\big| < \varepsilon$).

Теорема 1.36 (Вейерштрасса)**.** Если $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset C(A),\ f_n \rightrightarrows f$, то $f \in C(A)$.

Определение 1.37 (Функциональный ряд)**.** *Функциональным рядом* называется формальная сумма членов последовательности функции.

$$\text{Обозначение: } \sum_{n=1}^{\infty} f_n.$$

Определение 1.38 (Числовой ряд)**.** $\forall z \in D$ $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ называется *числовым рядом* $\{f_n(z)\}_{n \in \mathbb{N}}$.

$$S_n \coloneqq \sum_{k=1}^{n} f_k \text{ – частичная сумма.}$$

Теорема 1.39 (Признак Вейерштрасса)**.** $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ таков, что $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall z \in A$ $|f_n| \leqslant c_n$, причем $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ равномерно абсолютно сходится на A.

Теорема 1.40 (Критерий Коши (равномерная сходимость))**.** $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ равномерно сходится на $A \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n, m \geqslant n_0$

$$\sup_{z\in A}\big|f_n(z) - f_n(z_0)\big| < \varepsilon.$$

Определение 1.41 (Линейная функция)**.** Функция $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ называется *линейной*, если $\forall\alpha, \beta \in \mathbb{C}\ \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

$$f(\alpha z_1 + \beta z_2) = \alpha f(z_1) + \beta f(z_2).$$

Замечание. Функция $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ является линейной $\Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{C} : \forall z \in \mathbb{C}$

$$f(z) = az$$

1.2.2 Степенные ряды

Примечание. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$, где $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C},\ z, z_0 \in \mathbb{C}$.

Теорема 1.42 (1-я теорема Абеля)**.** Если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ сходится в точке $\underset{z_0}{z_1 \underset{\not\parallel}{}} \in \mathbb{C}$, то он абсолютно сходится при $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$. А если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ расходится в точке $\underset{z_0}{z_1 \underset{\not\parallel}{}} \in \mathbb{C}$, то он расходится и при $|z - z_0| > |z_1 - z_0|$.

Доказательство.

1. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z_1 - z_0)^n$ сходится $\Rightarrow \big|a_n(z_1 - z_0)^n\big| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$

   $$c := \sup_{n\in\mathbb{N}}\big|a_n(z_1 - z_0)^n\big| < +\infty, \quad |z - z_0| < |z_1 - z_0|.$$

   Рассмотрим

   $$\sum_{n=0}^{\infty}\big|a_n(z-z_0)^n\big| = \sum_{n=0}^{\infty}\big|a_n(z_1-z_0)^n\big|\cdot\left|\frac{z - z_0}{z_1 - z_0}\right|^n \leqslant c\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{z - z_0}{z_1 - z_0}\right|^n < +\infty.$$

2. **добавить**

$\square$

Определение 1.43 (Радиус сходимости)**.** Элемент $R \in [0; +\infty]$ называется *радиусом сходимости* ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, если при $|z-z_0| < R$ исходный ряд абсолютно сходится, а при $|z - z_0| > R$ исходный ряд расходится.

Теорема 1.44 (Коши-Адамара). Для степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ положим $l \coloneqq \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$. Тогда:

1. Если $l = 0$, то исходный ряд сходится $\forall z \in \mathbb{C}$.
2. Если $l = \infty$, то исходный ряд сходится только в точке z_0.
3. Если $l \in (0; +\infty)$, то при $|z - z_0| < \frac{1}{l}$, а при $|z - z_0| > \frac{1}{l}$ исходный ряд расходится.

Доказательство.

1. $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$,
$$z \in \mathbb{C},\ \sum_{n=0}^{\infty} \left|a_n(z-z_0)^n\right|.$$
$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|a_n(z-z_0)^n\right|} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \cdot |z - z_0| = 0 \Rightarrow$ ряд сходится.
2. $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$,
$$\exists \{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \qquad \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} \to +\infty.$$
$\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} \cdot |z - z_0| \to +\infty \Rightarrow |a_{n_k}|$.
3. $|z - z_0| < \frac{1}{l} \Rightarrow l|z - z_0| < 1$.

$\square$

Лекция 4: Продолжение

от 7 мар 12:45

Лекция 5: Продолжение

от 14 мар 12:45

Теорема 1.45 (Единственности). Если ряды $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ и $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ сходятся в круге $|z| \in R \neq 0$ и в

Лекция 5: Продолжение

от 21 мар 12:45

Теорема 1.46. $f = u_i v$ у и в вещественные мнимые части комлпексной функции ф, если у и в непрерывно дифференцируемы в функции и в этой области в точке консерватизм угло

Теорема 1.47. $f = u + iv$ если функции у и в непрерывно дифференцируемы в области и в этой области функция ф обладает свойством постоянства искажения масштаба, то фунцкия ф голоморфна или антиголоморфна.

Функция антиголоморфна, если голоморфны ее сопряженные.

Определение 1.48. Говорят, что фунцкия f голоморфна (моногенна) в бесконечно удаленной точке, если функция $g(z) := f\left(\frac{1}{z}\right)$ голоморфна (моногенна) в нуле.

$$f(z) = \frac{1}{z}, \quad g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right) = z.$$

Примечание.

$$df(z_0): \ \mathbb{C} \ni h \to f^{(z_0)} \cdot h \in \mathbb{C}.$$

$$df(z_0) = f^{(z_0)} dz,$$

$$f(z) = z, \quad \mathbb{C} \ni h \to h \in \mathbb{C},$$

$$\forall z \in \mathbb{C} f^{(z)} \ f^{(z)} = 1,$$

$$df(z_0)(h) = f^{(z_0)} \cdot h,$$

Примечание (Правила дифференцирования)**.**

1. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C} \quad (\alpha f + \beta g)' = \alpha \cdot f' + \beta \cdot g'$;

1.2.3 Дробно линейные отображения

$\mapsto \to \to f : D \mapsto \mathbb{R}$

Литература

[1] Шабат – «Введение в комплексный анализ, 1976» (том 1)

[2] Привалов – «Введение в ТФКП, 1967»

[3] Бицадзе – «Основы теории аналитических функций комплексного переменного, 1984»

[4] Волковыский, Лунц, Араманович – «Сборник задач по ТФКП», 1975»

[5] Гилев В.М. – «Основы комплексного анализа. Ч.1», 2000»

[6] Исапенко К.А. – «Комплексный анализ в примерах и упражнениях (Ч.1, 2017, Ч.2, 2018)»

[7] Мещеряков Е.А., Чемеркин А.А. – «Комплексный анализ. Практикум»

[8] Боярчук А.К. – «Справочное пособие по высшей математике» (том 4)