

Комплексный анализ

Данил Заблоцкий

16 февраля 2024 г.

Оглавление

1	Голоморфные функции	2
1.1	Комплексная плоскость	2
1.1.1	Комплексные числа	2
1.1.2	Топология комплексной плоскости	3
	Список используемой литературы	4

Глава 1

Голоморфные функции

Лекция 1: Начало

от 15 фев 12:45

1.1 Комплексная плоскость

1.1.1 Комплексные числа

Примечание. $\mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}(x_1, y_1) + (x_2, y_2) &:= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\ (x_1, y_1)(x_2, y_2) &:= (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}z = (x, y) &= x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R} \\ |z| = r &= \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \phi = \arg z\end{aligned}$$

$$\operatorname{Arg} z := \arg z + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{aligned}z &= |z|(\cos \arg z + i \sin \arg z) \\ e^{i\phi} &= i \sin \phi + \cos \phi, \quad e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy}\end{aligned}$$

$$z = |z|e^{i \arg z} \Rightarrow z^n = |z|^n e^{i n \arg z} = |z|^n (\cos(n \arg z) + i \sin(n \arg z))$$

Теорема 1 (Свойства комплексных чисел).

- | | |
|---|--|
| 1. $z \cdot \bar{z} = z ^2$. | 7. $ z_1 + z_2 \leq z_1 + z_2 $. |
| 2. $\overline{(z_1 + z_2)} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$. | 8. $ z_1 - z_2 \leq z_1 - z_2 $. |
| 3. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$. | 9. $\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 \pmod{2\pi}$. |
| 4. $\overline{\bar{z}} = z$. | 10. $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2 \pmod{2\pi}$. |
| 5. $\bar{z} = z \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$. | |
| 6. $ z_1 \cdot z_2 = z_1 \cdot z_2 $. | |

Примечание.

$$\xi = \frac{x}{1+|z|^2}, \quad \eta = \frac{y}{1+|z|^2}, \quad \zeta = \frac{|z|^2}{1+|z|^2},$$

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - \zeta = 0.$$

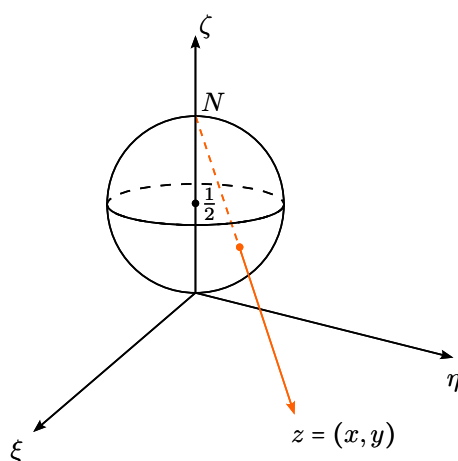


Рис. 1.1: Сфера Римана S

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0, \quad A, B, C, D \in \mathbb{R},$$

γ – окружность на \mathbb{C} , $P(\Upsilon)$ – окружность на S .

$$A\xi + B\eta + C\zeta + D(1 - \zeta) = 0,$$

$$\overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}, \quad P(\infty) := N.$$

1.1.2 Топология комплексной плоскости

Примечание. $M_1, M_2 \in \mathbb{R}^3$,

$$\text{dist}(M_1, M_2) := \sqrt{(\zeta_1 - \zeta_2)^2 + (\eta_1 - \eta_2)^2 + (\xi_1 - \xi_2)^2},$$

$d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$, $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ – расстояние на комплексной плоскости,

$$\rho(z_1, z_2) = \text{dist}(\rho(z_1), \rho(z_2)).$$

Определение 1 (Окрестность). Множество называется *окрестностью*, если оно содержит шар с центром в точке x_0 .

Литература

- [1] Шабат – «Введение в комплексный анализ, 1976» (том 1)
- [2] Привалов – «Введение в ТФКП, 1967»
- [3] Бицадзе – «Основы теории аналитических функций комплексного переменного, 1984»
- [4] Волковыский, Лунц, Араманович – «Сборник задач по ТФКП», 1975»
- [5] Гилев В.М. – «Основы комплексного анализа. Ч.1», 2000»
- [6] Исапенко К.А. – «Комплексный анализ в примерах и упражнениях (Ч.1, 2017, Ч.2, 2018)»
- [7] Мещеряков Е.А., Чемеркин А.А. – «Комплексный анализ. Практикум»
- [8] Боярчук А.К. – «Справочное пособие по высшей математике» (том 4)