Методы Оптимизации

Основано на лекциях Романовой А.А.

Конспект написан Заблоцким Данилом

Весенний семестр 2024

Оглавление

Введение

Лекция 1: Начало

от 9 фев 8:45

Методы оптимизации – раздел прикладной математики, предметом изучения которого является теория и методы оптимизации.

Определение 1 (Оптимизационная задача). *Оптимизационная задача* – задача выбора из множества возможных вариантов, наилучших в некотором смысле,

$$\begin{cases} f(x) \to \min \ (\max) \\ x \in D \end{cases},$$

где

$$\begin{aligned} D &\ – \text{ множество допустимых решений,} \\ x \in D &\ – \text{ допустимое решение,} \\ f(x) &\ – \text{ целевая функция (критерий оптимизации).} \end{aligned}$$

Задачи математического программирования (МП) и их классификация

1939 г.	Л.В. Конторович
1947 г.	Д. Данциг
с 50 гг.	бурное развитие
1975 г.	Нобелевская премия по экономике Конторовичу и Купмаксу

Определение 2 (Задача математического программирования).

$$\begin{aligned} &(1) \quad f(x) \to \max(\min) \\ &(2) \quad g_i(x)\#0, \ i = \overline{1,m}, \ \# \in \{\leqslant, \geqslant, =\} \\ &(3) \quad x_j \in \mathbb{R}, \ j = \overline{1,n} \ \big(x \in \mathbb{R}^n, \ x = (x_1, \dots, x_n)\big) \end{aligned}$$

Множество точек x, удовлетворяющих условиям (2)–(3), называется *множеством D доп. решений*.

Определение 3 (Оптимальное решение)**.** $x^* \in D$ называется *оптимальным решением* задачи (1)–(3), если $\forall x \in D$ $f(x^*) \geqslant f(x)$ для задачи на $\max$ и $\forall x \in D$ $f(x^*) \leqslant f(x)$ для задачи на $\min$.

x^* является *глобальным экстремумом*.

Определение 4 (Разрешимая задача)**.** Задача (1)–(3), которая обладает оптимальным решением, называется *разрешимой*, и *неразрешимой* в противном случае.

$D = \mathbb{R}^n$ – задача *безусловной оптимизации*, в противном случае – *задача условной оптимизации*.

Примечание (Классификация)**.**

1. Если f, g_i являются линейными, то задача является задачей *линейного программирования (ЛП)*.
2. Если хотя бы одна из функций f и g_i нелинейная, то задача *нелинейного програмирования*.
3. f, g_i – выпуклые, то *выпукголого программирования*.

Глава 1

Линейное программирование

1.1 Постановка задачи, теорема эквивалентности

Определение 5 (Общая задача ЛП (ЗЛП)).

$$\begin{aligned} f(x) = \quad & c_0 + \textstyle\sum_{j=1}^n c_j x_j \to \max\ (\min) \\ & \textstyle\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \# b_i,\ i = \overline{1,m},\ \# \in \{\leqslant, \geqslant, =\} \\ & x_j \geqslant 0,\ j \in \mathcal{J} \leqslant \{1, \ldots, n\} \end{aligned}$$

$$\underbrace{A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}^C \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}_{\text{дано}} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Замечание. Б.о.о. далее полагаем $c_0 = 0$, так как добавление константы не влияет на процесс нахожденя оптимального решения.

Примечание (Матричная задача).

$$\begin{aligned} f(x) = \quad & (c, x) \to \max\ (\min) \\ & Ax \# b \\ & x_j \geqslant 0,\ j \in \mathcal{J} \subseteq \{1, \ldots, n\} \end{aligned}$$

Примечание (Каноническая ЗЛП (КЗЛП)).

$$\begin{aligned} f(x) = \quad & (c, x) \to \max \\ & Ax = b \\ & x \geqslant \overline{0}\ \big(\overline{0} = (0, \ldots, 0)\big) \end{aligned}$$

Примечание (Симметричная ЗЛП).

$$\begin{array}{rl} f(x) = & (c,x) \to \max \\ & Ax < b \\ & x \geqslant \overline{0} \end{array} \quad \text{или} \quad \begin{array}{rl} f(x) = & (c,x) \to \min \\ & Ax \geqslant b \\ & x \geqslant \overline{0} \end{array}$$

Примеры моделей ЛП

Пример. Задача о составлении оптимального плана пространства

$$\begin{array}{lll} m & \text{ресурсов} & i = \overline{1,m} \\ n & \text{видов продукции} & j = \overline{1,n} \end{array}$$

Известно: b_i – запас i-го ресурса, $i = \overline{1,m}$

a_{ij} – кол-во рес. i, требуемое для пр-ва 1ед. прод. вида j

c_j – прибыль от продажи 1ед. jго продукта

Необходимо составить план производства, максимизирующий суммарную прибыль.

Переменные: x_j ед. продукции вида j производства ($j = \overline{1,n}$),

$$\begin{array}{l} \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i,\ i = \overline{1,m} \\ x_j \geqslant 0,\ j = \overline{1,n} \end{array}$$

◇

Пример. О максимальном потоке

$G = (V,E)$ ориент. взвешенный

$c : E \to \mathbb{R}$ – веса дуг – пропускная способность

s – источник

t – сток

Пусть x_{ij} – поток по дуге $(i,j) \in E$,

$$\left\{ \begin{array}{rl} f = & \sum_{j:(s,j)\in E} x_{sj} \to \max \\ & \sum_{j:(j,i)\in E} x_{ji} = \sum_{k:(i,k)\in E} x_{ik},\ i \in V \setminus \{s,t\} \\ & 0 \leqslant x_{ij} \leqslant c_{ij},\ (i,j) \in E \end{array} \right.$$

◇

Теорема эквивалентности задач ЛП

Определение 6 (Эквивалентные задачи). Две задачи МП

$$\overset{(I)}{\begin{cases} f(x) \to opt \\ x \in D \end{cases}} \qquad \overset{(\overline{I})}{\begin{cases} \overline{f}(\overline{x}) \to \overline{opt} \\ \overline{x} \to \overline{D} \end{cases}} \qquad \begin{array}{l} D \xrightarrow{\phi} \overline{D} \\ \overline{D} \xrightarrow{\overline{\phi}} D \end{array}$$

называются *эквивалентными*, если любому допустимому решению каждой из них по некоторому правилу соответсвует допустимое решение другой задачи, причем оптимальному решению соответсвует оптимальное.

Теорема 1 (Первая теорема эквивалентности). Для любой задачи ЛП $\exists$ эквивалентная ей каноническая ЗЛП.

Примечание (Идея доказательства). $n = 2,\ m = 3$

$$\begin{array}{ll} f = c_1x_1 + c_2x_2 \to \min & \overline{f} = -c_1x_1 - c_2x_2 \to \max \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leqslant b_2 & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \geqslant b_3 & a_{31}x_1 + a_{32}x_2 - x_4 = b_3 \\ x_1 \geqslant 0 & x_1, x_3, x_4 \geqslant 0 \\ x_2 \in \mathbb{R} & x_2 = x_2' - x_2'',\ x_2' \geqslant 0,\ x_2'' \geqslant 0 \end{array}$$

$$\text{КЗЛП} \qquad \begin{array}{l} \overline{f} = -c_1x_1 - c_2x_2' + c_2x_2'' \to \max \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2' - a_{12}x_2'' = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2' - a_{22}x_2'' + x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2' - a_{32}x_2'' - x_4 = b_3 \\ x_1, x_2', x_2'', x_3, x_4 \geqslant 0 \end{array}$$

Неоднозначность – разность, $\forall x \in D\ f(x) = -f(\overline{x}),\ \overline{x} \in \overline{D}$

$$\overline{x} = \phi(x).$$

Очевидно, что оптимальность также сохраняется при таких преобразованиях.

Теорема 2 (Вторая теорема эквивалентности). Для любой задачи ЛП $\exists$ эквивалентная ей симметричная задача ЛП.

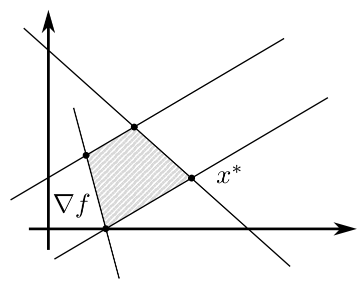
Примечание (Идея доказательства).

$$\alpha = \beta \iff \begin{cases} \alpha \leqslant \beta \\ \alpha \geqslant \beta \end{cases} \qquad \begin{array}{l|l} (c, x) \to \max & (c, x) \to \min \\ Ax \leqslant b & Ax \geqslant b \\ x \geqslant 0 & x \geqslant 0 \end{array}$$

Замечание. Смысл теоремы 1 в том, чтобы свести решение ЗЛП к КЗЛП.

Примечание (Геометрическая интерпретация). $n = 2$,

$$\begin{array}{l} f = c_1x_1 + c_2x_2 \to \max \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \leqslant b_i,\ i = \overline{1, m} \end{array}$$



Линии уровня целевой функции

$$\begin{array}{l} c_1x_1 + c_2x_2 = const \\ \perp \nabla f = (c_1, c_2) \end{array}$$

$$\text{ЗЛП разрешима} \begin{array}{l} \nearrow \quad \exists! x^* \text{ – опт. решение} \\ \searrow \quad \text{беск. много опт. реш.} \end{array}$$

$$\text{ЗЛП неразрешима} \begin{array}{l} \nearrow \quad f \to +\infty \text{ на мн-ве } D \text{ (ф-я неогр. сверху на } D\text{)} \\ \searrow \quad D = \varnothing \text{ нет доп. реш.} \end{array}$$

1.2 Базисные решения КЗЛП

$$\text{КЗЛП} \quad \begin{array}{l} (1)\ f = (c, x) \to \max \\ \left.\begin{array}{ll} (2) & Ax = b \\ (3) & x \geqslant \overline{0} \end{array}\right\} D \end{array}$$

$$A_{m\times n} = (A^1, A^2, \ldots, A^n) \quad A^j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \text{ – } j\text{-ый столбец матрицы } A$$

Определение 7 (Базисное решение системы (2)). Пусть $\overline{x}$ – решение системы (2). Вектор $\overline{x}$ называется *базисным решением системы* (2), если система векторных столбцов матрицы A, соответствующая ненулевым компонентам вектора $\overline{x}$, линейно независима.

Замечание. В случае однородной системы ($b = 0$), решение $x = 0$ является базисным.

Определение 8 (Базисное решение КЗЛП). Неотрицательное базисное решение системы (2) называется *базисным (опорным) решением КЗЛП.*

Пример.

$$3x_1 - 4x_2 + x_3 \to \max$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_4 + 2x_5 = 2 \\ x_j \geqslant 0,\ j = \overline{1,5} \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & \mathbf{3} & \mathbf{-1} & 1 \\ 2 & 4 & \mathbf{0} & \mathbf{1} & 2 \end{pmatrix}$$

$x^1 = (0,0,1,2,0)$ – базисное решение системы, так как $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ соответствует базису $\{A^3, A^4\}$.

$$\begin{array}{ll} x^1 & \text{и БР КЗЛП} \\ x^2 = & (1,0,-\frac{1}{3}\ ,0,0) \text{ БР СЛАУ, но не КЗЛП} \\ x^3 = & (0,0,0,0,1) \text{ БР КЗЛП} \end{array}$$

◇

Определение 9 (Вырожденное решение). x – базисное решение КЗЛП называется *вырожденным*, если число ненулевых компонент вектора x меньше ранга матрицы A.

Примечание. x^3 – вырожденное, недост.: соответствует разным наборам баз. столбцов матрицы.

x^3 соответствует $\{A_1, A_5\}, \{A_3, A_5\}, \{A_4, A_5\}$.