Методы оптимизации

Данил Заблоцкий

3 марта 2024 г.

Оглавление

Введение

Лекция 1: Начало

от 9 фев 8:45

Определение 1 (Методы оптимизации)**.** *Методы оптимизации* – раздел прикладной математикик, предметом изучения которого является теория и методы оптимизационных задач.

Определение 2 (Оптимизационная задача)**.** *Оптимизационная задача* – задача выбора из множества возможных ваариантов наилучших в некотором смысле.

Примечание.

$$\begin{cases} f(x) \to \min(\max) \\ x \in D \end{cases},$$

где

$$\begin{aligned} D &\quad \text{– множество допустимых решений,} \\ x \in D &\quad \text{– допустимое решение,} \\ f(x) &\quad \text{– целевая функция (критерий оптимизации)} \end{aligned}$$

Задачи математического программирования (МП) и их классификация

Примечание. Немного истории:

1939г. Л.В. Конторович 1947г. Д. Данциг

С 50-х годов – бурное развитие

1975г. Нобелевская премия по экономике Конторовичу и Купмаксу

Примечание (Задача математического программирования).

1. $f(x) \to \max(\min)$.
2. $g(x)\#0,\ i = \overline{1,m}, \quad \# \in \{\leqslant, \geqslant, =\}$.
3. $\underset{(x \in R^n)}{x_j \in R},\ j = \overline{1,n}$.

$$x = (x_1, \dots, x_n)$$

Определение 3 (Оптимальное решение, глобальный экстремум). $x^* \in D$ называется *оптимальным решением* задачи 1–3, если $\forall x \in D$

$$f(x^*) \geqslant f(x)$$

для задачи на max и $\forall x \in D$

$$f(x^*) \leqslant f(x)$$

для задачи на min.

x^* является *глобальным экстремумом*.

Определение 4 (Разделимая, неразделимая задача). Задача 1–3, которая обладает оптимальным решением, называется *разделимой*, и *неразделимой* в противном случае.

$D = R^n$ – задача *безусловной оптимизации*, в противном случае – задача *условной оптимизации*.

Примечание (Классификация).

1. Если f, g_i являются линейными, то задача является задачей *линейного программирования* (ЛП).
2. Если хотя бы одна из функций f, g_i нелинейная, то задача *нелинейного программирования*.

f, g_i – выпуклые, то *выпуклого программирования*.

Глава 1

Линейное программирование

1.1 Постановка задачи, теорема эквивалентности

Определение 5 (Общая задача ЛП (ЗЛП)).

$$f(x) = c_0 + \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \longrightarrow \max(\min),$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \# b_i, \quad i = \overline{1,n}, \ \# \in \{\leqslant, \geqslant, =\}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j \in \mathfrak{I} \subseteq \{1, \dots, n\}$$

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \ b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ — переменные задачи}$$

Примечание (Матричная задача).

$$f(x) = (c, x) \longrightarrow \max(\min)$$

$$Ax \# b$$

$$x_i \geqslant 0, \quad j \in \mathfrak{I} \subseteq \{1, \dots, n\}$$

Примечание (Каноническая ЗЛП (КЗЛП)).

$$f(x) = (c, x) \longrightarrow \max$$

$$Ax = b$$

$$x \geqslant \vec{0}, \quad \vec{0} = (0, \dots, 0)$$

Примечание (Симметричная ЗЛП).

$$\begin{array}{ccc} f(x) = (c,x) \longrightarrow \max & & f(x) = (c,x) \longrightarrow \min \\ Ax \leqslant b & \text{или} & Ax \geqslant b \\ x \geqslant \vec{0}, \quad \vec{0} = (0,\ldots,0) & & x \geqslant \vec{0} \end{array}$$

Замечание. Без ограничения общности далее положим $c_0 = 0$, так как добавление константы не влияет на процесс нахождения оптимального решения.

1.1.1 Примеры моделей ЛП

Пример. Задача о составлении оптимального плана производства.

$$\begin{array}{ll} m \text{ ресурсов}, & i = \overline{1,m} \\ n \text{ видов продукции}, & j = \overline{1,n} \end{array}$$

Известно:

b_i – запас i-го ресурса, $i = \overline{1,m}$
a_{ij} – количество ресурса i, требуемое для производства 1 единицы продукции вида j
c_j – прибыль от продажи 1 единицы j-го продукта

Необходимо составить план производства, максимализирующий суммарную прибыль.

Переменные: x_j единицы продукции вида j производства, $j = \overline{1,n}$,

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \longrightarrow \max,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i, \;\; i = \overline{1,m},$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = \overline{1,n}.$$

Пример. О максимальном потоке в сети.

$$\begin{array}{ll} G = (V,E) & \text{– ориентированный взвешенный граф} \\ c : E \to R & \text{– веса дуг – пропускная способность} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} s & \text{– источник} \\ t & \text{– сток} \end{array}$$

Пусть x_{ij} – поток по дуге $(i,j) \in E$

$$f = \sum_{j:(s,j)\in E} x_{sj} \longrightarrow \max,$$

$$\sum_{j:(j,i)\in E} x_{ji} = \sum_{k:(i,k)\in E} x_i k, \quad i \in V \setminus \{s,t\},$$
$$0 \leqslant x_{ij} \leqslant c_{ij}, \quad (i,j) \in E.$$

Лекция 2: Продолжение

от 16 фев 8:45

Пример. Задача Канторовича

Производятся различные виды шпона с помощью станков разной производительности в единицу времени.

Как распределить задание между станками, чтобы получить шпон в нужном ассортименте в наибольшем количестве?

n	видов шпона	$j = 1 \dots n$
m	станков	$i = 1 \dots m$

a_{ij}	ед. шпона j-го вида, производимое i-м станков в ед. времени
t_i	лимит времени работы i-го станка
b_j	количество ед. шпона j-го вида в комплекте

Максимизировать число комплектов.

Пусть z – число комплектов, x_{ij} – количество единиц шпона j-го вида, производимого на i-м станке (x_{ij} – время i-го станка на пространство j-го продукта).

$$z \to \max,$$
$$\sum_{i=1}^m x_{ij} \geqslant b_j z,\ j = 1 \dots n$$
$$\sum_{j=1}^n \frac{x_{ij}}{a_{ij}} \leqslant t_i,\ i = 1 \dots m$$
$$x_{ij} \geqslant 0,\ z \geqslant 0,\ i = 1 \dots m,\ j = 1 \dots n, \quad z \in \mathbb{Z}.$$

1.1.2 Теорема эквивалентности задач ЛП

Определение 6 (Эквивалентные задачи МП)**.** Две задачи МП

$$\overset{(I)}{\begin{cases} f(x) \to opt \\ x \in D \end{cases}}, \quad \overset{(\overline{I})}{\begin{cases} \overline{f}(\overline{x}) \to \overline{opt} \\ \overline{x} \in \overline{D} \end{cases}}, \quad \begin{matrix} D \xrightarrow{\phi} \overline{D} \\ \overline{D} \xrightarrow{\overline{\phi}} D \end{matrix}$$

называются *эквивалентными*, если любому допустимому решению каждой из них по некоторому правилу соответствует допустимое решение другой задачи, причем оптимальному решению соответствует оптимальное.

Теорема 1 (Первая теорема эквивалентности)**.** Для любой задачи ЛП $\exists$ эквивалентная ей каноническая ЗЛП.

Примечание (Идея доказательства). $n = 2,\ m = 3$

$f = c_1x_1 + c_2x_2 \to \min$

$$\begin{aligned} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leqslant b_2 \\ & a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \geqslant b_3 \\ & x_1 \leqslant 0 \\ & x_2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$\overline{f} = -c_1x_1 - c_2x_2 \to \max$

$$\begin{aligned} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + x_3 = b_2 \\ & a_{31}x_1 + a_{32}x_2 - x_4 = b_3 \\ & x_1 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0,\ x_4 \geqslant 0 \\ & x_2 = x_2' - x_2'',\ x_2' \geqslant 0,\ x_2'' \geqslant 0 \end{aligned}$$

КЗЛП
$\overline{f} = -c_1x_1 - c_2x_2' + c_2x_2'' \to \max$

$$\begin{aligned} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2' - a_{12}x_2'' = b_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2' - a_22x_2'' + x_3 = b_2 \\ & a_{31}x_1 + a_{32}x_2' - a_{32}x_2'' - x_4 = b_3 \\ & x_1 \geqslant 0,\ x_2', x_2'', x_3, x_4 \geqslant 0 \end{aligned}$$

Неоднозначность-разность: $\forall x \in D\ f(x) = -f(\overline{x}),\ \overline{x} \in \overline{D}$

$$\overline{x} = \phi(x).$$

Очевидно, что оптимальность также сохраняется при таких преобразованиях.

Теорема 2 (Вторая теорема эквивалентности). Для любой задачи ЛП $\exists$ эквивалентная ей симметричная задача ЛП.

Примечание (Идея).

$$\alpha = \beta \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \leqslant \beta \\ \alpha \geqslant \beta \end{cases} \qquad \begin{array}{l|l} (c,x) \to \max & (c,x) \to \min \\ Ax \leqslant b & Ax \geqslant b \\ x \geqslant 0 & x \geqslant 0 \end{array}$$

Замечание. Смысл теоремы 2 в том, чтобы свести решение ЗЛП к КЗЛП.

Примечание (Геометрическая интерпретация). $n = 2$
$f = c_1x_1 + c_2x_2 \to \max, \quad a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \leqslant b_i,\ i = 1 \ldots m$
Линии уровня целевой функции

$$c_1x_1 + c_2x_2 = const, \quad \perp \nabla f = (c_1, c_2).$$

$$\begin{array}{ccl} & & \exists! x^* \text{ – оптимальное решение} \\ & \nearrow & \\ \text{ЗЛП разрешима} & & \\ & \searrow & \\ & & \text{бесконечно много опт. решений} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccl} & & f \to +\infty \text{ на } D \text{ (неогр. сверху на } D) \\ & \nearrow & \\ \text{ЗЛП неразрешима} & & \\ & \searrow & \\ & & D = \varnothing \text{ нет дополнительных решений} \end{array}$$

1.2 Базисные решения КЗЛП

Примечание.

1. $f = (c, x) \to \max$.
2. $Ax = b$.
3. $x \geqslant \overline{0}$.

$$A_{m\times n} = (A^1, A^2, \ldots, A^n), \quad A^j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \text{ – } j\text{-ый столбец матрицы } A.$$

Определение 7 (Базисное решение системы 2)**.** Пусть $\overline{x}$ – решение системы 2. Вектор $\overline{x}$ называется *базисным решением системы 2*, если система векторных столбцов матрицы A, соответствующая ненулевым компонентам вектора $\overline{x}$, линейно независима.

Замечание. В случае однородной системы ($b = 0$), решение $x = 0$ является базисным.

Определение 8 (Базисное решение КЗЛП)**.** Неотрицательное базисное решение системы 2 называется *базисным (опорным) решением КЗЛП*.

Пример. $3x_1 - 4x_2 + x_3 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 & +2x_2 & +3x_3 & -x_4 & +x_5 & = 1 \\ 2x_1 & +4x_2 & & +x_4 & +2x_5 & = 2 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & \mathbf{3} & \mathbf{-1} & 1 \\ 2 & 4 & \mathbf{0} & \mathbf{1} & 2 \end{pmatrix}$$

$x^1 = (0,0,1,2,0)$ – базисное решение системы, так как $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ соответствует базису $\{A^3, A^4\}$.

$$\begin{aligned}
&x^1 \text{ БР КЗЛП} \\
&x^2 = \left(1, 0, -\tfrac{1}{3}, 0, 0\right) \text{ БР СЛАУ, но не КЗЛП} \\
&x^3 = (0,0,0,0,1) \text{ БР КЗЛП}
\end{aligned}$$

Определение 9 (Вырожденное базисное решение)**.** x – базисное решение КЗЛП называется *вырожденным*, если число ненулевых компонент вектора x меньше ранга матрицы A.

Замечание. x^3 – вырожденное. Недостаток: соответствует разным наборам базисных столбцов матрицы.

x^3 соответствует $\{A_1, A_5\}, \{A_3, A_5\}, \{A_4, A_5\}$.

Лекция 3: Продложение

от 1 мар 8:45