

Комплексный Анализ

Основано на лекциях Мельникова Е.В.

Конспект написан Заблоцким Данилом

Весенний семестр 2024

Эти записи не одобряются лекторами, и я вношу в них изменения (часто существенно) после лекций. Они далеко не точно отражают то, что на самом деле читалось, и, в частности, все ошибки почти наверняка мои.

Оглавление

1	Голоморфные функции	3
1.1	Комплексная плоскость	3
1.1.1	Комплексные числа	3
1.1.2	Топология комплексной плоскости	5
1.1.3	Пути, кривые и области	11
	Список используемой литературы	11

Глава 1

Голоморфные функции

Лекция 1: Начало

от 15 фев 12:45

1.1 Комплексная плоскость

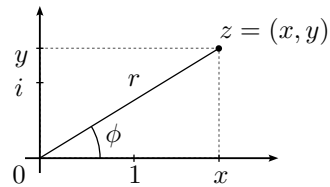
1.1.1 Комплексные числа

$$\mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R},$$

$$\begin{aligned}(x_1, y_1) + (x_2, y_2) &:= (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \\ (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) &:= (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1).\end{aligned}$$

$$z = (x, y) = x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned}(1, 0) &=: 1, \\ (0, 1) &=: i, \\ (0, 0) &=: 0\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}x &=: \operatorname{Re} z \\ y &=: \operatorname{Im} z\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x &= r \cdot \cos \phi \\ y &= r \cdot \sin \phi\end{aligned}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} =: |z|,$$

$$\phi =: \arg z, \quad \underbrace{0 \leq \arg z < 2\pi}_{\text{главное значение аргумента}}$$

$$\operatorname{Arg} z := \arg z + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \bar{z} = x - iy$$

Формула Эйлера:

$$e^{i\phi} = \cos \phi + i \sin \phi, \quad \forall \phi \in \mathbb{R}$$

Тригонометрическая форма записи:

$$z = |z| \cdot (\cos \arg z + i \sin \arg z)$$

Показательная форма записи:

$$z = |z| e^{i \arg z}$$

Формула Муавра:

$$z^n = r^n (\cos n\phi + i \sin n\phi)$$

$$e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy}$$

$$z^n = |z|^n e^{in \arg z}$$

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$$

$$z = r e^{ir}, \quad z^n = z_0$$

$$\sqrt[n]{z_0} = \sqrt[n]{|z_0|} \cdot e^{i \frac{\arg z_0 + 2\pi k}{n}}, \quad 0 \leq k \leq n-1.$$

Теорема 1. $\forall z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ справедливы равенства:

$$1. \quad z \cdot \bar{z} = |z|^2$$

$$6. \quad |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

$$2. \quad \overline{(z_1 + z_2)} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

$$7. \quad |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

$$3. \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$$

$$8. \quad \left| |z_1| - |z_2| \right| \leq |z_1 - z_2|$$

$$4. \quad \bar{\bar{z}} = z$$

$$9. \quad \arg(z_1 \cdot z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 \pmod{2\pi}$$

$$5. \quad \bar{z} = z \iff z \in \mathbb{R}$$

$$10. \quad \arg \left(\frac{z_1}{z_2} \right) = \arg z_1 - \arg z_2 \pmod{2\pi}$$

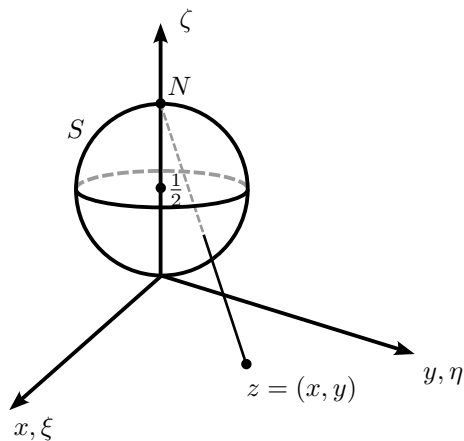


Рис. 1.1: Сфера Римана

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta - \zeta = 0, \quad \begin{cases} \xi = \frac{x}{1+|z|^2} \\ \eta = \frac{y}{1+|z|^2} \\ \zeta = \frac{|z|^2}{1+|z|^2} \end{cases}.$$

$$P : \mathbb{C} \xrightarrow{\text{на}} S \setminus \{N\}, \quad P(z) = (\xi, \eta, \zeta).$$

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0, \quad A, B, C, D \in \mathbb{R}$$

общее уравнение окружности

$$\begin{aligned} \gamma & \text{ — окружность на } \mathbb{C}, \\ P(\gamma) & \text{ — окружность на } S. \end{aligned}$$

$$|z|^2 = x^2 + y^2 = \frac{\zeta}{1-\zeta}, \quad \begin{cases} x = \frac{\xi}{1-\zeta} \\ y = \frac{\eta}{1-\zeta} \end{cases}.$$

$$A\zeta + B\xi + C\eta + D(1-\zeta) = 0, \quad \begin{aligned} \overline{\mathbb{C}} &:= \mathbb{C} \cup \{\infty\} \\ P(\infty) &:= N \end{aligned}.$$

1.1.2 Топология комплексной плоскости

Меня зовут Данил, мне 19 лет!

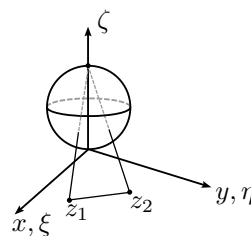
$$\alpha - \beta = \frac{12}{43}.$$

$$M_1, M_2 \in \mathbb{R}^3,$$

$$\text{dist}(M_1, M_2) := \sqrt{(\xi_1 - \xi_2)^2 + (\eta_1 - \eta_2)^2 + (\zeta_1 - \zeta_2)^2},$$

$$d(z_1, z_2) := |z_1 - z_2|, \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C},$$

$$\rho(z_1, z_2) := \text{dist}(P(z_1), P(z_2)),$$



$$B_\varepsilon(z_0) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \varepsilon\},$$

$$P : \mathbb{C} \xrightarrow{\text{на}} S \setminus \{N\}.$$

Определение 1 (Окрестность точки). Множество называется *окрестностью точки*, если оно содержит некоторый шарик с центром в этой точке.

Обозначение.

$$O_z, \quad z \in \overline{\mathbb{C}}.$$

Лекция 2: Продолжение

от 22 фев 12:45

$$\begin{aligned} \forall z \in \mathbb{C} \quad d(z; \infty) &:= +\infty, & d : \mathbb{C}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ & & d : \mathbb{C}^2 &\rightarrow \overline{\mathbb{R}} \\ \rho : \overline{\mathbb{C}}^2 &\rightarrow \mathbb{R}, & \rho(z; \infty) &\in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Свойство (Свойства окрестностей). $\forall z \in \overline{\mathbb{C}}$:

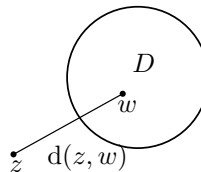
1. $\forall V \in O_z \quad z \in V$.
2. $\forall U, V \in O_z \quad U \cap V \in O_z$.
3. $\forall U \in O_z, \forall V \supset U \quad V \in O_z$.
4. $\forall V \in O_z, \exists U \in O_z : U \subset V \text{ \& } \forall w \in U \quad U \in O_w$.

Определение 2 (Открытое множество). Множество называется *открытым*, если оно является окрестностью каждой своей точки.

Определение 3 (Окрестность множества). *Окрестностью множества* называется множество, являющееся окрестностью каждой точки исходного множества (V – окрестность множества A , если $\forall z \in A \quad V \in O_z$).

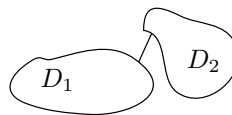
Определение 4. $D \subset \overline{\mathbb{C}}$, $z \in \mathbb{C}$,

$$\text{dist}(z, D) := \inf_{w \in D} d(z, w),$$



Определение 5. $D_1, D_2 \subset \overline{\mathbb{C}}$,

$$\text{dist}(D_1, D_2) := \inf_{z \in D_1, w \in D_2} d(z, w),$$



Определение 6 (Внутренность). Множество всех внутренних точек называется *внутренностью*.

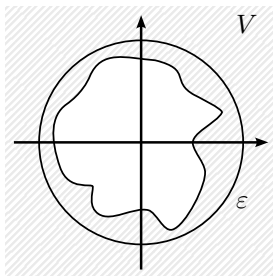
Обозначение.

$$\text{int } D.$$

Определение 7 (Предельная точка множества). Точка называется *предельной точкой множества*, если в любой ее окрестности есть точки множества, отличные от данной.

Замечание. Точка является предельной точкой множества на расширенной комплексной плоскости $(\overline{\mathbb{C}})$ $\iff \forall$ ее окрестность содержит бесконечное число точек данного множества.

Определение 8 (Окрестность бесконечно удаленной точки). Множество $V \subset \overline{\mathbb{C}}$ является *окрестностью бесконечно удаленной точки*, если $\exists \varepsilon > 0 : \{z \in \overline{\mathbb{C}} : |z| > \varepsilon\} \subset V$.



Определение 9 (Точка прикосновения множества). Точка $z \in \overline{\mathbb{C}}$ расширенной комплексной плоскости называется *точкой прикосновения* множества $D \subset \overline{\mathbb{C}}$, если пересечение $\forall V \in O_z \quad V \cap D \neq \emptyset$.

Обозначение.

$\text{cl } D$ – замыкание (closure)

Определение 10 (Замкнутое множество). Множество называется *замкнутым*, если его дополнение открыто.

Обозначение.

∂D

Определение 11 (Граничная точка). Точка называется *граничной точкой* множества, если в любой ее окрестности есть как точки множества, так и точки его дополнения.

Обозначение. Множество всех замкнутых подмножеств в $\overline{\mathbb{C}}$:

$\text{Cl } \overline{\mathbb{C}}$ (closed)

Определение 12 (Компактное множество). Множество в $\overline{\mathbb{C}}$ называется *компактным*, если \forall его открытое покрытие имеет конечное подпокрытие.

Обозначение.

v – покрытие множества D , если $D \subset \bigcup_{V \in v} V$,

Обозначение.

$\mathcal{P}(\overline{\mathbb{C}})$ – совокупность всех подмножеств $\overline{\mathbb{C}}$.

Критерий 1 (Компактности). Подмножество \mathbb{C} компактно \iff оно замкнуто и ограничено.

Примечание. Множество ограничено, если оно содержится в некотором шаре.

Замечание. $\overline{\mathbb{C}}$ – компактно.

Определение 13. Последовательность $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ сходится к $z \in \mathbb{C}$, если $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0$

$$|z_n - z| < \varepsilon.$$

$$d(z_n, z) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad z_n \rightarrow \infty, \text{ если } \lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = \pm \infty.$$

$$z = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n, \quad z_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} z.$$

Замечание.

$$z_n \rightarrow z \text{ в } \mathbb{C} \iff \begin{cases} \operatorname{Re} z_n \rightarrow \operatorname{Re} z \\ \operatorname{Im} z_n \rightarrow \operatorname{Im} z \end{cases} \text{ в } \mathbb{R},$$

$$|z_n - z| = \sqrt{(\operatorname{Re} z_n - \operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z_n - \operatorname{Im} z)^2} \geq |\operatorname{Re} z_n - \operatorname{Re} z|,$$

$$\operatorname{Re}(z_1 \pm z_2) = \operatorname{Re} z_1 \pm \operatorname{Re} z_2.$$

Критерий 2 (Коши). Последовательность $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ сходится $\iff \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq n_0$

$$|z_n - z_m| < \varepsilon.$$

Критерий 3 (Коши в $\overline{\mathbb{C}}$). Последовательность $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \overline{\mathbb{C}}$ сходится $\iff \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq n_0$

$$\rho(z_n, z_m) < \varepsilon,$$

$$z_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} z \iff \rho(z_n, z) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Критерий 4 (Компактности (расширенный)). Подмножество $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ компактно $\iff \forall$ его последовательность имеет сходящуюся подпоследовательность: $D \subset \overline{\mathbb{C}} \forall \{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset D \exists \{z_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} :$

$$z_{n_k} \rightarrow z \in D.$$

Пусть $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C} :$

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n.$$

Определение 14 (Числовой ряд). Числовым рядом называется формальная сумма членов.

Определение 15 (Абсолютно сходящийся числовой ряд). Числовой ряд называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|.$$

Критерий 5 (Коши (сходимости ряда)). $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ сходится $\iff \forall \varepsilon > 0 \exists m \in \mathbb{N} : \forall n \geq m \forall k \in \mathbb{N}$

$$\underbrace{|z_{n+1} + z_{n+2} + \dots + z_{n+k}|}_{|S_{n+k} - S_n|} < \varepsilon.$$

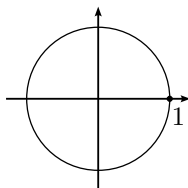
Следствие 1. Если ряд сходится, то его общий член стремится к 0.

Следствие 2. Каждый абсолютно сходящийся числовой ряд сходится.

1.1.3 Пути, кривые и области

Определение 16 (Путь). Путем $\gamma : [a; b] \rightarrow \mathbb{C}$ называется непрерывное отображение $[a; b]$ в \mathbb{C} .

Пример. $\gamma(t) = e^{it}$,



$$0 \leq t \leq 2\pi.$$

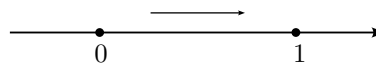
◇

Определение 17. $\gamma_1 : [a_1; b_1] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma_2 : [a_2; b_2] \rightarrow \mathbb{C}$. $\gamma_1 \sim \gamma_2$, если \exists возрастающая непрерывная функция $\phi : [a_1; b_1] \xrightarrow{\text{на}} [a_2; b_2]$:

$$\gamma_1(t) = \gamma_2(\phi(t)), \quad \forall t \in [a_1; b_1].$$

Пример.

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &= t & 0 \leq t \leq 1 \\ \gamma_2(t) &= \sin t & 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \\ \gamma_3(t) &= \sin t & 0 \leq t \leq \pi \\ \gamma_4(t) &= \cos t & 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$



$$\phi(t) = \arcsin t,$$

$$\gamma_1(t) = \gamma_2(\phi(t)).$$

◇

Литература

- [1] Шабат – «Введение в комплексный анализ, 1976» (том 1)
- [2] Привалов – «Введение в ТФКП, 1967»
- [3] Бицадзе – «Основы теории аналитических функций комплексного переменного, 1984»
- [4] Волковыский, Лунц, Араманович – «Сборник задач по ТФКП», 1975»
- [5] Гилев В.М. – «Основы комплексного анализа. Ч.1», 2000»
- [6] Исапенко К.А. – «Комплексный анализ в примерах и упражнениях (Ч.1, 2017, Ч.2, 2018)»
- [7] Мещеряков Е.А., Чемеркин А.А. – «Комплексный анализ. Практикум»
- [8] Боярчук А.К. – «Справочное пособие по высшей математике» (том 4)