

Дифференциальные уравнения

Данил Заблоцкий

20 февраля 2024 г.

Оглавление

1	Основные понятия	2
1.1	Уравнение 1-го порядка	2
1.2	Уравнения с разделяющимися переменными	5
1.3	Особые решения	7
2	Методы интегрирования дифференциальных уравнений 1-го порядка	10
2.1	Однородные уравнения	10
2.2	Линейные уравнения 1-го порядка	12
2.3	Интегрирующий множитель	13
2.4	Методы построения интегрирующего множителя	14
2.5	Теорема существования и единственности	19
2.6	Уравнения, не разрешенные относительно производной	22
2.7	Интегрирование уравнений, не разрешенных относительно производной	23
2.8	Уравнения высших порядков	24
2.9	Линейные уравнения высших порядков	25
2.10	Построение общего решения уравнения $Ly = 0$	29
2.11	Линейные уравнения с переменными коэффициентами	29
2.12	Структура общего решения линейного неоднородного уравнения $Ly = f$	31
2.13	Линейные уравнения с постоянными коэффициентами	33
2.14	Линейные неоднородные уравнения с правой частью спец. вида	36
3	Системы дифференциальных уравнений 1-го порядка	39

Глава 1

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Лекция 1: Начало

от 5 сен 10:28

1.1 Уравнение 1-го порядка

Определение 1 (Дифференциальное уравнение n -го порядка). Дифференциальным уравнением n -го порядка называется уравнение вида:

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad x \in \begin{matrix} (a, b) \\ [a, b], [a, b], (a, b) \end{matrix} \subset \mathbb{R}, \quad (1.1)$$

где $-\infty \leq a < b \leq +\infty$.

Определение 2 (Дифференциальное уравнение, разрешенное относительно старшей производной). Дифференциальным уравнением, разрешенным относительно старшей производной называется уравнение вида:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \quad x \in (a; b) \quad (1.2)$$

Определение 3 (Решение дифференциального уравнения). Решением дифференциального уравнения 1.1 или 1.2 называется n раз дифференцируемая функция $y = \phi(x)$ на интервале (a, b) , если при подстановке она обращает уравнение в тождество на этом интервале.

Пример.

$$y = \frac{1}{x+1}, \quad (-\infty; -1) \cup (-1; -\infty),$$

где $(-\infty; -1)$ – первое решение, а $(-1; -\infty)$ – второе решение.

Примечание (Предмет дифференциального уравнения).

1. Решение дифференциального уравнения.
2. Существует ли решение на $(a; b)$?
3. Единственность, $y(x_0) = y_0$ (задача Коши).
4. О продолжении.
5. Свойства решения:
 - ограниченность
 - монотонность
 - поведение решения вблизи границ $(x \rightarrow +\infty)$
 - нули функции на $(a; b)$

Определение 4 (Дифференциальное уравнение 1-го порядка). Дифференциальным уравнением 1-го порядка называется уравнение вида:

$$F(x, y, y') = 0, \quad x \in (a; b) \quad (1.3)$$

(неразрешенное относительно y')

Определение 5 (Дифференциальное уравнение, разрешенное относительно первой производной). Дифференциальным уравнением 1-го порядка, разрешенным относительно первой производной, называется уравнение вида:

$$y' = f(x, y), \quad x \in (a; b) \quad (1.4)$$

Определение 6 (Решение дифференциального уравнения 1.3 и 1.4). Решением дифференциального уравнения 1.3 и 1.4 называется дифференцируемая функция $y = \phi(x)$, обращающая уравнение в тождество на этом интервале.

Пример. $y' = -\frac{x}{y}$ имеет решение $x^2 + y^2 = c$, где c - произвольная константа, $c > 0$.

Определение 7 (Поле направлений). Сопоставим любой точке $(x_0, y_0) \rightarrow y'(x_0) = f(x_0, y_0) = \tan \alpha$ направления l . Семейство (совокупность) направлений l дает поле направлений.

Определение 8 (Интегральная кривая). Кривая, касающаяся в каждой своей точке поля направлений, называется *интегральной кривой*:

$$y = \phi(x, c) - \text{интегральная кривая} \equiv \text{график решения}$$

Определение 9 (Изоклины). Кривые, вдоль которых поле направлений постоянно, называется *изоклинами*.

Пример. $y' = y - x^2$

Напишем уравнение изоклин: $y - x^2 = c$ (заменяем y' на c)

$$1. \quad c = 0 \Rightarrow y - x^2 = 0 \Rightarrow y = x^2 \text{ (уравнение изоклины)}$$

$$\tan \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0; \quad y \text{ const.}$$

$$2. \quad c = 1 \Rightarrow y - x^2 = 1 \Rightarrow y = x^2 + 1$$

$$\tan \alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 45^\circ; \quad y \nearrow$$

$$3. \quad c = 2 \Rightarrow y - x^2 = 2 \Rightarrow y = x^2 + 2$$

$$\tan \alpha = 2 \Rightarrow \alpha = \arctan 2; \quad y \nearrow$$

$$4. \quad c = -1 \Rightarrow y - x^2 = -1 \Rightarrow y = x^2 - 1$$

$$\tan \alpha = -1 \Rightarrow \alpha = -45^\circ; \quad y \searrow$$

$$5. \quad c = -2 \Rightarrow y - x^2 = -2 \Rightarrow y = x^2 - 2$$

$$\tan \alpha = -2 \Rightarrow \alpha = -\arctan 2; \quad y \searrow$$

$$y' = 0$$

$$y' > 0, \quad y > x^2$$

$$y' < 0, \quad y < x^2$$

Определение 10 (Общее решение). *Общее решение* – совокупность функций, которая содержит все решения уравнения.

Если решение задается функцией $y = \phi(x, c)$ или $\psi(x, y, c) = 0$, то общее решение должно удовлетворять условиям:

1. При любом c формула дает решение уравнения.
2. Любое решение уравнения находится по формуле при некотором $c = c_0$.

Определение 11 (Частное решение). *Частное решение* определяется из общего при некотором $c = c_0$.

Пример. $y' = x \Rightarrow y = \frac{x^2}{2} + c$ – общее решение,

$$\begin{cases} c = 0: & y = \frac{x^2}{2}, \\ c = 1: & y = \frac{x^2}{2} + 1 \end{cases} \quad \text{– частное решение.}$$

1.2 Уравнения с разделяющимися переменными

Определение 12 (Уравнения с разделяющимися переменными). Уравнениями с разделяющимися переменными называются уравнения вида:

$$y' = f(x) \cdot g(y) \text{ или } f_1(x) \cdot g_1(y) \cdot dx + f_2(x) \cdot g_2(y) \cdot dy = 0,$$

где f, f_1, f_2 зависят от x ,
 g, g_1, g_2 зависят от y

Примечание (Алгоритм).

$$\left[\begin{array}{l} g(y) = 0 \Rightarrow y = c \\ \frac{g(y)}{\frac{y'}{g(y)}} \neq 0 \Rightarrow \int \frac{y' dx}{g(y)} = \int f(x) dx \xrightarrow{dy=y' dx} \\ \xrightarrow{dy=y' dx} \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx \Rightarrow \\ \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = \phi(x, c) \\ \psi(x, y, c) = 0 \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = c_1 \\ y = \phi(y, c_2) \\ \psi(x, y, c_2) = 0 \end{array} \right]$$

Пример. $y' = xy^2$

$$\left[\begin{array}{l} y = 0 \\ \frac{dy}{y^2} = x dx \\ y \neq 0 \end{array} \right] \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y^2} = \int x dx \Rightarrow -\frac{1}{y} = \frac{x^2}{2} + C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = -\frac{2}{x^2 + 2C}, C \in \mathbb{R} \\ y = 0 \end{array} \right]$$

Теорема 1 (Задача Коши).

$$\left\{ \begin{array}{l} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{array} \right. \quad (1.5)$$

$$f(x, y) \in C(D), \quad (x_0, y_0) \in D$$

Пример. $y' = \sqrt{y}$

$$\left[\begin{array}{l} y = 0 \\ \frac{dy}{\sqrt{y}} = \int dx \\ y \neq 0 \end{array} \right] \Leftrightarrow 2\sqrt{y} = x + C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \left(\frac{x+c}{2}\right)^2 \text{ при } x+c \geq 0$$

1. $y = 0 \cup$ парабола AB_1D_1 ;

2. x_0 на кривой $y = 0$ $\begin{cases} y = 0 \\ ABD \\ AB_1D_1 \\ AB_2D_2 \end{cases}$

Ответ: $\begin{cases} y = 0 \\ y = \left(\frac{x+c}{2}\right)^2, \quad x+c \geq 0 \end{cases}$

Определение 13 (Точка единственности, неединственности решения, особое решение). Точка (x_0, y_0) называется *точкой единственности решения* $y = \phi(x)$, если через нее не проходит другое решение, не совпадающее с решением $y = \phi(x)$ ни в какой окрестности этой точки.

Остальные точки называются *точками неединственности*.

Решение, которое содержит точки неединственности, называется *особым решением*.

Теорема 2 (\exists и !-ть решения задачи Коши). Пусть $f(x, y)$ в 1.5:

1. Определена и непрерывна в прямоугольнике в прямоугольнике:

$$\Pi = \{(x, y) : |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}$$

2. Удовлетворяет условию Липшица по y в Π :

$$(f'_y(x, y) \text{ непрерывна в } \Pi)$$

Тогда $\exists!$ решение задачи 1.5 в окрестности точки x_0 :

$$(x_0 - h; x_0 + h),$$

где $h = \min\left(a; \frac{b}{M}\right)$, $M = \max|f(x, y)|$, $(x, y) \in \Pi$.

Определение 14 (Функция, удовлетворяющая условию Липшица). $f(x, y)$ удовлетворяет условию Липшица по переменной y , если $\exists L > 0$ такая, что $\forall (x, y_1)$ и (x, y_2) имеет место соотношение:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L \cdot |y_1 - y_2|$$

Если $f'_y(x, y)$ – непрерывна в Π , то выполняется условие Липшица: $\forall (x, y_1), (x, y_2) \in \Pi, \exists \tilde{y} \in [y_1; y_2]$:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq |f'_y(x, \tilde{y}) \cdot (y_1 - y_2)| \leq \underbrace{|f'_y(x, \tilde{y})|}_{\leq L} \cdot |y_1 - y_2| = L \cdot |y_1 - y_2|$$

Пример. $y' = \frac{1}{y^2}$, $f(x, y) = \frac{1}{y^2}$, $f'_y = \frac{2}{y^3}$

$$\int y^2 dy = \int y dx \Rightarrow \frac{y^3}{3} = x + c \Rightarrow \begin{cases} y = \sqrt[3]{3(x+c)} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \Rightarrow y = \sqrt[3]{3(x-x_0)} + y_0^3$$

Пример. $y' = \operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$, $y = |x|$

Пример. $y' = y^2 - 2y + 1 = (y-1)^2$

$$\begin{cases} y = 1 \\ \frac{dy}{(y-1)^2} = \int dx \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{y-1} = x + C \Rightarrow y = 1 - \frac{1}{x+C}$$

$$\begin{cases} y = 1, \\ y = 1 - \frac{1}{x+C_1}, & (-\infty; -C_1), \\ y = 1 - \frac{1}{x+C_2}, & (-C_2; +\infty) \end{cases}$$

Лекция 2: Продолжение

от 15 окт 08:47

1.3 Особые решения

Примечание.

$$\begin{cases} y' = f(y), & f \in C(D), \quad D \subset \mathbb{R}, \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(y) = 0 \Rightarrow y = c - ? \\ \frac{f(y)}{f(y)} = \int dx \Rightarrow \begin{cases} y = \phi(x, C), \\ \psi(y, x, C) = 0 \end{cases} \end{cases}$$

Для \forall точки $x \in \{y = C\}$ \exists точка (x_1, y_1) и интегральная кривая, проходящая через точку (x_1, y_1) , которая пересекает прямую $y = C$ в точке x ($x \equiv (x, C)$).

Проинтегрируем на отрезке $[x_1; x]$:

$$\int_{y_1}^C \frac{dy}{f(y)} = \int_{x_1}^x dx \Leftrightarrow \int_{y_1}^C \frac{dy}{f(y)} = x - x_1 \Leftrightarrow \underbrace{x}_{\text{конечная}} = x_1 + \underbrace{\int_{y_1}^C \frac{dy}{f(y)}}_{\text{конечный}},$$

(несобственный интеграл сходится)

Примечание (Критерий). Решение $y = C$ дифференциального уравнения $y' = f(y)$, $f \in C(D)$ такое, что $f(C) = 0$ называется *особым* \Leftrightarrow

$$\Leftrightarrow \int_{y_1}^C \frac{dy}{f(y)} < \infty \quad (\text{несобственный интеграл сходится})$$

Пример. $y' = 3y^{\frac{2}{3}}$

1. Непрерывно.
2. $f'_y = 2y^{-\frac{1}{3}}$ – разрывна в точке 0 (условие Липшица не выполнено?).

$$\begin{cases} y = 0 ? \\ \int \frac{dy}{3y^{\frac{2}{3}}} = \int dx \Rightarrow y^{\frac{1}{3}} = x + C \end{cases}$$

$$\int_{y_1}^0 \frac{dy}{3y^{\frac{2}{3}}} = y^{\frac{1}{3}} \Big|_{y_1}^0 = 0 - y_1^{\frac{1}{3}} < +\infty \xrightarrow{\text{по критерию}} y = 0 - \text{особое}$$

Пример. Найти особое решение $y' = \begin{cases} y \cdot \ln y, & y > 0 \\ 0, & y = 0 \end{cases}$, $D = [0; +\infty)$:

$$f(y) = \begin{cases} y \cdot \ln y, & y > 0 \\ 0, & y = 0 \end{cases}$$

1. Непрерывно.

$$\lim_{y \rightarrow +0} (y \cdot \ln y) = \lim_{y \rightarrow +0} \frac{\ln y}{\frac{1}{y}} = \lim_{y \rightarrow +0} \frac{\frac{1}{y}}{\frac{1}{y^2}} = - \lim_{y \rightarrow +0} y = 0$$

2. Условие Липшица:

$$|f(y_1) - f(y_2)| \leq L \cdot |y_1 - y_2|, \quad \begin{matrix} y_1 \in (0; +\infty), \\ y_2 = 0 \end{matrix}$$

$$|f(y_1) - f(y_2)| = |y_1 \cdot \ln y_1 - 0| \leq |y_1| \cdot |\ln y_1| \leq |y_1| \cdot L,$$

то есть $|\ln y_1| \leq L$.

Для $\forall L > 0 \exists y_1^*$ близкий к 0 и такой, что $|\ln y_1^*| > L$.

$$3. f(y) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

(а) $y = 0$:

$$\int_{y_1}^0 \frac{dy}{y \cdot \ln y} = \int_{y_1}^0 \frac{d(\ln y)}{\ln y} = \ln |\ln y| \Big|_{y_1}^0 = \infty - \ln |\ln y_1| = \infty \Rightarrow$$

$\Rightarrow y = 0$ не является особым.

(b) $y = 1$:

$$\int_{y_1}^1 \frac{dy}{y \cdot \ln y} = \ln |\ln y| \Big|_{y_1}^1 = -\infty - \ln |\ln y_1| = -\infty \Rightarrow$$

 $\Rightarrow y = 1$ не является особым.

Пример. Найти особое решение $y' = \begin{cases} y \cdot \ln^2 y, & y > 0 \\ 0, & y = 0 \end{cases}$, $D = [0; +\infty)$:

$$f(y) = \begin{cases} y \cdot \ln^2 y, & y > 0 \\ 0, & y = 0 \end{cases}$$

1. Непрерывно (аналогично).
2. Условие Липшица (аналогично).
3. $f(y) = 0 \Rightarrow y \cdot \ln^2 y = 0 \begin{cases} y = 0 \\ y = 1 \end{cases}$

(a) $y = 0$:

$$\int_{y_1}^0 \frac{dy}{y \cdot \ln^2 y} = \int_{y_1}^0 \frac{d(\ln y)}{\ln^2 y} = \frac{1}{\ln y} \Big|_{y_1}^0 = 0 + \frac{1}{\ln y_1} \Rightarrow$$

 $\Rightarrow y = 0$ – особое.(b) $y = 1$:

$$\int_{y_1}^1 \frac{dy}{y \cdot \ln^2 y} = -\frac{1}{\ln y} \Big|_{y_1}^1 = -\infty + \frac{1}{\ln y_1} - \text{расходится} \Rightarrow$$

 $\Rightarrow y = 1$ не является особым.

Глава 2

Методы интегрирования дифференциальных уравнений 1-го порядка

2.1 Однородные уравнения

Определение 15 (Однородное уравнение первого порядка). *Однородным уравнением первого порядка* называется уравнение вида:

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right), \quad f \in C(D) \quad (2.1)$$

или:

$$y' = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}, \quad (2.2)$$

где $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ являются однородными функциями одного и того же порядка.

Определение 16 (Однородная функция порядка k). *Однородной функцией порядка k* называется функция:

$$P(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k \cdot P(x, y), \quad \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$$

Пример. $P(x, y) = x^2 - 2xy + 7y^2$

$$P(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)^2 - 2(\lambda x)(\lambda y) + 7(\lambda y)^2 = \lambda^2(x^2 - 2xy + 7y^2)$$

Пример. $x(x^2 + y^2)dy = y(y^2 - xy + x^2)dx$

$$\underbrace{x^3 + xy^2}_{Q(x, y)}, \quad \underbrace{y^3 - xy^2 + yx^2}_{P(x, y)}$$

Примечание (Замена переменной). $t = \frac{y}{x} \Rightarrow y = t \cdot x$

$y = t(x) \cdot x \Rightarrow y' = t' \cdot x + t$ – подставим в 2.1 :

$t' \cdot x = f(t) - t$ – уравнение с разделяющей переменной (РП)

$$\frac{dt}{dx} x = f(t) - t$$

$$\left[\begin{array}{l} f(t) - t = 0 \\ \left\{ \begin{array}{l} f(t) - t \neq 0 \\ \int \frac{dt}{f(t)-t} = \int \frac{dx}{x} \end{array} \right. \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \phi(x, C) \Rightarrow y = x \cdot \phi(x, C) \\ \psi(t, x, C) = 0 \Rightarrow \psi\left(\frac{y}{x}, x, C\right) = 0 \end{array} \right]$$

$t'x = 0 \Rightarrow t' = 0 \Rightarrow t = C \Rightarrow y = Cx$ – решение при $C: f(C) - C = 0$.

Изоклины: $f\left(\frac{y}{x}\right) = \text{const}$
 $\frac{y}{x} = C \Rightarrow f(C) = \text{const}$
 $y = Cx$ – изоклины уравнения 2.1

- (а) Уравнение вида $y' = f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$ сводится к однородному с помощью замены:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \xi + \alpha \\ y = \eta + \beta \end{array} \right., \quad (\alpha; \beta) - \text{решение системы} \quad \left\{ \begin{array}{l} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{array} \right.$$

- (б) Прямые параллельны, то есть $a_1x + b_1y = k(a_2x + b_2y)$.

Замена переменной $t = a_2x + b_2y$ и привести к уравнению с РП.

- Замена переменной $y = t^m$. Подставить эту замену в уравнение и из условия однородности выбрать m .

Пример. $ydx + x(2xy + 1)dy = 0, \quad ydx + (2x^2 + x)dy = 0$

$$y = t^m \Rightarrow t^m dx + (2x^2 t^m + x) \cdot m t^{m-1} dt = 0$$

$$m = 2m + 1 = m$$

$$m = -1 \Rightarrow y = t^{-1} = \frac{1}{t}$$

$$\frac{dx}{t} + \left(\frac{2x^2}{t} + x \right) \left(-\frac{1}{t^2} \right) dt = Q \Rightarrow$$

$$\Rightarrow dx - \frac{x}{t} \left(\frac{2x}{t} + 1 \right) dt = 0 - \text{однородное уравнение} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{x}{t} \left(\frac{2x}{t} + 1 \right) \equiv f\left(\frac{x}{t}\right)$$

Замена переменной: $u = \frac{x}{t} \Rightarrow x = ut \Rightarrow dx = udt + tdu$

$$udt + tdu - u(2u + t)dt = 0$$

$$tdu - 2u^2dt = 0, \quad t \neq 0, \quad u^2 \neq 0$$

$$\int \frac{du}{2u^2} = \int \frac{dt}{t}$$

$$-\frac{1}{2u} = \ln|t| + C$$

$$\begin{cases} u = \frac{x}{t} \\ t = \frac{1}{y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = xy \\ t = \frac{1}{y} \end{cases}, \quad \begin{aligned} -\frac{1}{xy} &= \ln\left(\frac{1}{y}\right)^2 + C \\ -\frac{1}{xy} &= \ln y^2 + C \end{aligned}$$

$$\ln y^2 - \frac{1}{xy} = C$$

$$u = 0 \Rightarrow x \cdot y = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 - \text{решение} \\ y = 0 - \text{решение} \end{cases}$$

Ответ: $\ln y^2 - \frac{1}{xy} = C, \quad x = 0, \quad y = 0$

2.2 Линейные уравнения 1-го порядка

Определение 17 (Линейное уравнение 1-го порядка). *Линейным уравнением 1-го порядка* называется уравнение вида:

$$a_0(x)y' + a_1(x)y = b(x), \quad (2.3)$$

$$a_0(x)y' + a_1(x)y = 0, \quad (2.4)$$

где $b(x), a_0(x), a_1 \in C(\alpha; \beta), a_0(x) \neq 0, -\infty \leq \alpha \leq \beta \leq +\infty$.

Примечание (Задача Коши). $y(x_0) = y_0$

Теорема 3 (\exists и !).

$$y' = \underbrace{\frac{b(x)}{a_0(x)} - \frac{a_1(x)}{a_0(x)}y}_{f(x,y)}$$

$$f \in C((\alpha; \beta) \times (-\infty; +\infty)).$$

$$2. \quad f'_y = -\frac{a_1(x)}{a_0(x)}$$

Однородное уравнение 2.4.

$$y = 0 - \text{решение: } y = c \cdot e^{-\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)} dx}$$

Определение 18 (Линейное уравнение 1-го порядка). *Линейным уравнением 1-го порядка* называется уравнение вида:

$$y' + p(x) \cdot y = q(x), \quad (2.5)$$

$$y' + p(x) \cdot y = 0, \quad (2.6)$$

где $p(x), q(x) \in C(\alpha; \beta)$.

Примечание (Свойства 2.6).

1. Пусть $y_1(x)$ – решение 2.6 $\Rightarrow k \cdot y_1$ – решение 2.6, $k \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$.
2. Если y_1, y_2 – решения 2.6 $\Rightarrow y_1 + y_2$ – решение 2.6 ($k_1 y_1 + k_2 y_2$ – решение).
3. $y = 0$ – решение 2.6.

Утверждение. Решения 2.6 образуют линейное пространство:

$$y' + p(x)y = 0$$

$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx$$

$$\ln |y| = - \int p(x)dx + \ln |C|$$

$$(*) \quad y = C \cdot e^{-\int p(x)dx}$$

$$\begin{cases} y' + p(x)y = 0 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}, \quad [x_0; x]$$

$$\int_{x_0}^x \frac{y'(s)}{y(s)} ds = - \int_{x_0}^x p(s) ds$$

$$\int_{y_0}^y \frac{dy}{y} = - \int_{x_0}^x p(s) ds \Rightarrow \ln |y| - \ln |y_0| = - \int_{x_0}^x p(x) dx \Rightarrow$$

$$(**) \Rightarrow y = y_0 \cdot e^{-\int_{x_0}^x p(x) dx},$$

при $C = y_0$.

4. Если y – частное решение, то $C \cdot y$ – общее решение 2.6.

Лекция 3: Продолжение

от 1 нояб 10:30

2.3 Интегрирующий множитель

Примечание. $ydx - xdy = 0 \mid \cdot \frac{1}{y^2}$

$$\begin{matrix} \parallel & \parallel \\ P & Q \end{matrix}$$

$$\frac{\delta P}{\delta y} = y'_y = 1$$

$$\begin{matrix} \neq \\ \parallel \end{matrix} \quad \frac{\delta Q}{\delta x} = \frac{\delta}{\delta x}(-x) = -1$$

$$\frac{ydx - xdy}{y^2} = 0 \Rightarrow d\left(\frac{x}{y}\right) = 0$$

$$\frac{x}{y} = C, \quad y \neq 0$$

Определение 19 (Интегрирующий множитель). Пусть

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (2.7)$$

не является уравнением в полных дифференциалах, $M, N \in C^2(D)$, D – односвязная область в \mathbb{R}^2 .

$M(x, y)$ называется *интегрирующим множителем* уравнения 2.7, если

$$\mu(x, y)M(x, y)dx + \mu(x, y)N(x, y)dy$$

является полным дифференциалом некоторой функции $\frac{\delta P}{\delta y} = \frac{\delta Q}{\delta x}$.

Примечание. I. $\mu(x, y) \in C^2(D)$

$$\mu(x, y) \cdot M(x, y) = P(x, y), \quad \mu(x, y) \cdot N(x, y) = Q(x, y)$$

$$\frac{\delta \mu(x, y)}{\delta y} M(x, y) + \mu(x, y) \cdot \frac{\delta M(x, y)}{\delta y} = \frac{\delta \mu(x, y)}{\delta x} N(x, y) + \mu(x, y) \cdot \frac{\delta N(x, y)}{\delta x}$$

1. $\mu = \mu(x)$.
2. $\mu = \mu(y)$.
3. $\mu = \mu(\omega(x, y))$.

2.4 Методы построения интегрирующего множителя

Примечание.

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (2.8)$$

$$M, N \in C^2(D), \quad \frac{\delta N}{\delta x} \neq \frac{\delta M}{\delta y}, \quad \mu(x, y) \in C^1(D) :$$

$$\mu(x, y) \cdot \overset{\parallel}{P(x, y)} M(x, y) dx + \mu(x, y) \cdot \overset{\parallel}{Q(x, y)} N(x, y) dy = 0 - \text{уравнение в ПД?}$$

$$\frac{\delta Q}{\delta x} = \frac{\delta P}{\delta y}$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta \mu(x, y)}{\delta x} \cdot N(x, y) + \mu(x, y) \cdot \frac{\delta N(x, y)}{\delta x} &= \\ &= \frac{\delta \mu(x, y)}{\delta y} \cdot M(x, y) + \mu(x, y) \cdot \frac{\delta M(x, y)}{\delta y} \end{aligned}$$

1.

$$\begin{aligned} \mu = \mu(x) \Rightarrow \frac{\delta \mu}{\delta y} &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \mu'(x) \cdot N(x, y) + \mu(x) \cdot \frac{\delta N}{\delta x} &= \mu(x) \cdot \frac{\delta M}{\delta y} \end{aligned}$$

$$\underbrace{\frac{\mu'(x)}{\mu(x)}}_{\text{зависит от } x} = \underbrace{\frac{\frac{\delta M}{\delta y} - \frac{\delta N}{\delta x}}{N}}_{\text{зависит от } x} = F(x)$$

($M \neq 0$ и $N \neq 0$)

$$\int \frac{\mu'(x)}{\mu(x)} dx = \int F(x) dx$$

$$\ln |\mu(x)| = \ln c + \int F(x) dx, \quad \mu(x) = c \cdot e^{\int F(x) dx} \underset{c=1}{=} e^{\int F(x) dx}$$

2.

$$\begin{aligned} \mu = \mu(y) \Rightarrow \frac{\delta \mu}{\delta x} &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \mu'(y) \cdot M(x, y) + \mu(y) \cdot \frac{\delta M}{\delta y} &= \mu(y) \cdot \frac{\delta N}{\delta x} \end{aligned}$$

$$\underbrace{\frac{\mu'(y)}{\mu(y)}}_{\text{зависит от } y} = \underbrace{\frac{\frac{\delta N}{\delta x} - \frac{\delta M}{\delta y}}{M}}_{\text{зависит от } y} = F(y)$$

$$\int \frac{\mu'(y)}{\mu(y)} dy = \int F(y) dy$$

$$\ln |\mu(y)| = \ln c + \int F(y) dy, \quad \mu(y) = c \cdot e^{\int F(y) dy} \underset{c=1}{=} e^{\int F(y) dy}$$

3.

$$\mu = \mu(\omega(x, y))$$

$$\frac{\delta \mu}{\delta \omega} \cdot \frac{\delta \omega}{\delta x} \cdot N + \mu \cdot \frac{\delta N}{\delta x} = \frac{\delta \mu}{\delta \omega} \cdot \frac{\delta \omega}{\delta y} \cdot M + \mu \cdot \frac{\delta M}{\delta y}$$

$$\begin{aligned} \frac{\frac{\delta \mu}{\delta \omega}}{\mu(\omega)} &= \frac{\frac{\delta M}{\delta y} - \frac{\delta N}{\delta x}}{N \cdot \frac{\delta \omega}{\delta x} - M \cdot \frac{\delta \omega}{\delta y}} = F(\omega) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \mu(\omega) = e^{\int F(\omega) d\omega} \end{aligned}$$

Пример.

$$(x^2 + y^2 + x)dx + ydy = 0, \quad M = x^2 + y^2 + x, \quad N = y$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta N}{\delta x} &= 0 \\ \frac{\delta M}{\delta y} &= 2y \end{aligned}$$

$$\mu = \mu(x) = ?, \quad \mu(x^2 + y^2 + x)dx + \mu y dy = 0,$$

$$P = \mu(x^2 + y^2 + x), \quad Q = \mu y,$$

$$\frac{\delta P}{\delta y} = \frac{\delta Q}{\delta x}, \quad \frac{\delta M}{\delta y}(x^2 + y^2 + x) + \mu \cdot 2y = \frac{\delta \mu}{\delta x} \cdot y + \mu \cdot 0,$$

$$\frac{\mu'(x)}{M} = \frac{2y}{y} = 2, \quad \mu(x) = e^{2x},$$

$$e^{2x}(x^2 + y^2 + x)dx + e^{2x} \cdot y dy = 0,$$

$$P = e^{2x}(x^2 + y^2 + x), \quad Q = e^{2x} \cdot y,$$

$$\frac{\delta P}{\delta y} = 2e^{2x} \cdot y = \frac{\delta Q}{\delta x},$$

$$\begin{cases} \frac{\delta u}{\delta x} = e^{2x}(x^2 + y^2 + x) \\ \frac{\delta u}{\delta y} = e^{2x} \cdot y \end{cases} \Rightarrow u(x, y) = e^{2x} \cdot \frac{y^2}{2} + c(x),$$

$$u'_x = 2e^{2x} \cdot \frac{y^2}{2} + c'(x) = e^{2x}(x^2 + y^2 + x), \quad c'(x) = e^{2x}(x^2 + x)$$

$$\begin{aligned}
c(x) &= \frac{e^{2x}}{2}(x^2 + x) - \int \frac{e^{2x}}{2}(2x + 1)dx = \\
&= \frac{e^{2x}}{2}(x^2 + x) - \frac{e^{2x}}{4}(2x + 1) + \int \frac{e^{2x}}{4} \cdot 2dx = \\
&= \frac{e^{2x}}{2}(x^2 + x) - \frac{e^{2x}}{4}(2x + 1) + \frac{e^{2x}}{4} + C \\
c(x) &= \frac{e^{2x}}{2} \cdot x^2 + C \\
u(x, y) &= e^{2x} \cdot \frac{x^2 + y^2}{2} + C = \tilde{C} \\
e^{2x} \cdot \frac{x^2 + y^2}{2} &= C - \text{общий интеграл}
\end{aligned}$$

Примечание (Свойства интегрирующего множителя (ИМ)).

1. Если μ_0 – ИМ, то $\forall c \in \mathbb{R} \quad \mu_1 = c \cdot \mu_0$ – тоже является ИМ.
2. Пусть μ_0 – ИМ уравнения (1.12), V_0 – соответствующий ему интеграл, то есть:

$$\mu_0 \cdot Mdx + \mu_0 \cdot Ndy = dV_0,$$

тогда для произвольной функции $\phi \in C^1(D)$, $\phi \neq 0$, $\mu_1 = \mu_0 \cdot \phi(V_0)$ – так же является ИМ.

$$\begin{aligned}
Mdx + Ndy &= 0, \quad \mu_1 \cdot Mdx + \mu_1 \cdot Ndy = \\
&= \mu_0 \cdot \phi(V_0) \cdot Mdx + \mu_0 \cdot \phi(V_0) \cdot Ndy = \\
&= \phi(V_0)(\mu_0 \cdot Mdx + \mu_0 \cdot Ndy) = \phi(V_0)dV_0 = \\
&= d\left(\int \phi(V_0)dV_0\right) = dV_1, \quad \int \phi(V_0)dV_0 = V_1
\end{aligned}$$

3. Если μ_1 и μ_2 – интегральные множители уравнения 2.8, тогда:

$$\mu_2 = \mu_1 \cdot \phi(V_1),$$

где ϕ – произвольная функция класса C^1 , V_1 – соответствующий интеграл для μ_1 .

Следствие. Если μ_1 и μ_2 – интегральные множители уравнения 2.8 и $\frac{\mu_1}{\mu_2} \neq \text{const}$, тогда $\frac{\mu_1}{\mu_2}$ – является интегралом для уравнения 2.8.

Теорема 4. Если уравнение 1-го порядка имеет общий интеграл $u(x, y) = C$, то оно имеет интегрирующий множитель.

Доказательство.

$$u(x, y) = C \begin{cases} Mdx + Ndy = 0 \\ du \equiv \frac{\delta u}{\delta x} dx + \frac{\delta u}{\delta y} dy = 0 \end{cases}$$

(dx, dy) – ненулевое решение если определитель равен 0, то есть

$$\begin{vmatrix} M & N \\ \frac{\delta u}{\delta x} & \frac{\delta u}{\delta y} \end{vmatrix} = M \cdot \frac{\delta u}{\delta y} - N \cdot \frac{\delta u}{\delta x} = 0$$

$$M \cdot \frac{\delta u}{\delta y} = N \cdot \frac{\delta u}{\delta x} \quad \Bigg| \cdot (MN) \Rightarrow \frac{1}{N} \cdot \frac{\delta u}{\delta y} = \frac{1}{M} \cdot \frac{\delta u}{\delta x} \stackrel{?}{=} \mu,$$

$$\begin{aligned} \mu \cdot Mdx + \mu \cdot Ndy = 0, \quad \frac{1}{M} \frac{\delta u}{\delta x} \cdot Mdx + \frac{1}{N} \cdot \frac{\delta u}{\delta y} \cdot Ndy = 0, \\ \frac{\delta u}{\delta x} dx + \frac{\delta u}{\delta y} dy = 0 \Rightarrow du = 0 \end{aligned}$$

□

Примечание (Еще один способ построения интегрального множителя).

$$\underbrace{M_1 dx + N_1 dy}_I + \underbrace{M_2 dx + N_2 dy}_{II} = 0$$

Пусть μ_1 – интегральный множитель для I , V_1 – соответствующий ему интеграл, то есть:

$$dV_1 = \mu_1 \cdot M_1 dx + \mu_1 \cdot N_1 dy,$$

μ_2 – интегральный множитель для II , V_2 – соответствующий ему интеграл, то есть:

$$dV_2 = \mu_2 \cdot M_2 dx + \mu_2 \cdot N_2 dy,$$

тогда $\exists \phi, \psi \in C^1(D) : \mu_1 \cdot \phi(V_1) = \mu_2 \cdot \psi(V_2)$ и $\mu = \mu_1 \cdot \phi(V_1)$ или $\mu = \mu_2 \cdot \psi(V_2)$ – будет интегральным множителем.

Пример.

$$\left(\frac{y}{x} + 3x^2\right)dx + \left(1 + \frac{x^3}{y}\right)dy = 0$$

$$\left(\frac{y}{x} + dy\right) + \left(3x^2 dx + \frac{x^3}{y} dy\right) = 0$$

$$\frac{y}{x}dx + dy = 0$$

$$\mu_1 = x$$

$$ydx + xdy = 0$$

$$d(xy) = 0 \Rightarrow xy = C_1$$

$$u_1 = xy$$

$$3x^2dx + \frac{x^3}{y}dy = 0$$

$$\mu_2 = y$$

$$3x^2ydx + x^3dy = 0$$

$$d(x^3y) = 0$$

$$u_2 = x^3y$$

$$x\phi(xy) = y\psi(x^3y), \quad \phi(t) = t^2, \quad \psi(t) = t,$$

$$x(x^2y^2) = yx^3y = \mu$$

$$x^3y^2\left(\frac{y}{x} + 3x^2\right)dx + x^3y^2\left(1 + \frac{x^2}{y}\right)dy = 0$$

$$\underbrace{(x^2y^3 + 3x^5y^2)}_P dx + \underbrace{(x^3y^2 + x^6y)}_Q dy = 0$$

$$\frac{\delta P}{\delta y} = 3x^2y^2 + 6x^5y$$

$$\parallel \Rightarrow \text{уравнение в ПД}$$

$$\frac{\delta Q}{\delta x} = 3x^2y^2 + 6x^5y$$

$$\begin{cases} \frac{\delta u}{\delta x} = x^2y^3 + 3x^5y^2 \\ \frac{\delta u}{\delta y} = x^3y^2 + x^6y \end{cases}$$

2.5 Теорема существования и единственности

Примечание (Задача Коши).

$$y' = f(x, y), \quad (2.9)$$

$$y(x_0) = y_0 \quad (2.10)$$

Теорема 5 (Теорема Пикара). Пусть функция $f(x, y)$ определена и непрерывна по совокупности переменных в прямоугольнике $\Pi = \{(x, y) : |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}$ и на переменной y удовлетворяет условию Липшица:

$$(f(x, y) \in C(\Pi) \cap Lip_y(\Pi))$$

Тогда $\exists!$ решение задачи Коши 2.9, 2.10 в $V_h = (x_0 - h; x_0 + h)$, где $h = \min\left(a, \frac{b}{M}, \frac{1}{L}\right)$, $M = \max_{(x, y) \in \Pi} |f(x, y)|$.

Определение 20. $f(x, y) \in Lip_y$, если $\exists L > 0 : \forall (x, y_1), (x, y_2) \in \Pi$ имеет место:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L \cdot |y_1 - y_2|$$

Лемма 1 (Об интегральном уравнении). В предположении теоремы y является решением задачи 2.9, 2.10 \Leftrightarrow оно является решением интегрального уравнения:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y(s)) ds \quad (2.11)$$

Определение 21 (Решение интегрального уравнения 2.11). Решением интегрального уравнения 2.11 называется непрерывная функция y , обращающая уравнение в тождество.

Доказательство.

\Rightarrow y – решение 2.9, 2.10, проинтегрируем 2.9 на $[x_0; x]$:

$$\int_{x_0}^x y'(s) ds = \int_{x_0}^x f(s, y(s)) ds$$

$$y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^x f(s, y(s)) ds, \text{ с учетом 2.10,}$$

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y(s)) ds, \quad y(x) \text{ удовлетворяет уравнению 2.11}$$

$y(x)$ непрерывна (следует из дифференцируемости).

\Leftarrow $y(x)$ – решение 2.11, $y(x)$ – непрерывна, $f(x, y)$ – непрерывна по условию теоремы \Rightarrow интеграл с переменным верхним пределом можно дифференцировать:

$$y'(x) = f(x, y(x)) \cdot 1, \quad y(x) \text{ удовлетворяет уравнению 2.9}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\alpha} \int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} F(x, \alpha) d\alpha &= \\ &= \int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} F'_\alpha(x, \alpha) d\alpha + F(b(\alpha), \alpha) \cdot b'(\alpha) - F(a(\alpha), \alpha) \cdot a'(\alpha) \end{aligned}$$

$$y(x_0) = y_0 + \int_{x_0}^{x_0} f(s, y(s)) ds, \text{ выполняется условие 2.10}$$

□

Доказательство.

1. Последовательность приближения Пикара:

$$\begin{aligned} y_0(x) &= y_0, \\ y_1(x) &= y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y_0(s)) ds, \\ y_2(x) &= y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y_1(s)) ds, \\ &\vdots \\ y_n(x) &= y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y_{n-1}(s)) ds \end{aligned}$$

2. $y_n(x)$ – непрерывна при $|x - x_0| \leq h$, $(x, y_n(x)) \in \Pi$.

По индукции, $n = 1$:

$$|y_1(x) - y_0| \stackrel{?}{\leq} b$$

$$\begin{aligned} |y_1(x) - y_0| &= \left| \int_{x_0}^x f(s, y_0(s)) ds \right| \leq \\ &\leq \left| \int_{x_0}^x |f(s, y_0(s))| dx \right| \leq M|x - x_0| \leq M \cdot h \leq M \cdot \frac{b}{M} = b \end{aligned}$$

Пусть $|y_{n-1}(x) - y_0| \leq b$, то есть $(x, y_{n-1}(x)) \in \Pi$. Докажем, что $(x, y_n(x)) \in \Pi$:

$$\begin{aligned} |y_n(x) - y_0| &\leq \left| \int_{x_0}^x |f(s, y_{n-1}(s))| \right| \leq \\ &\leq M \cdot |x - x_0| \leq M \cdot h \leq M \cdot \frac{b}{M} = b \end{aligned}$$

3. Покажем, что $\{y_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \Rightarrow \bar{y}(x)$.

Составим функциональный ряд:

$$\begin{aligned} (*) \quad & \underbrace{y_0(x)}_{S_0(x)}, \underbrace{y_1(x) - y_0(x)}_{S_1(x)=y_1(x)}, \underbrace{y_2(x) - y_1(x)}_{S_2(x)=y_2(x)}, \dots, \underbrace{y_1(x) - y_{n-1}(x)}_{S_n(x)=y_n(x)}, \dots \end{aligned}$$

Нужно дописать. □

Лекция 4: Продолжение

от 19 нояб 8:44

Лемма 2 (Гронуолла). Пусть $u(x) \geq 0$ и $u(x) \in C([x_0; x_0 + h])$,

$$(*) \quad u(x) \leq a + b \int_{x_0}^x u(t) dt, \quad a \geq 0, \quad b \geq 0$$

Тогда $u(x) \leq a \cdot e^{b(x-x_0)}$ на $[x_0; x_0 + h]$.

Доказательство. $u(x) = e^{b(x-x_0)} v(x)$

На $[x_0; x_0+h]$: $v(x)$ – непрерывна и в точке x_1 : $v(x_1) = \max_{[x_0; x_0+h]} v(x)$.

$$\begin{aligned} e^{b(x-x_0)}v(x_1) &= u(x_1) \leq \\ &\leq a + b \int_{x_0}^{x_1} u(t)dt = a + b \int_{x_0}^{x_1} e^{b(t-x_0)}v(t)dt \leq \\ &\leq a + b \cdot v(x_1) \cdot \frac{e^{v(t-x_0)}}{b} \Big|_{x_0}^{x_1} = a + v(x_1) \cdot e^{b(x_1-x_0)} - v(x_1) \Rightarrow \\ &\Rightarrow 0 \leq a - v(x_1) \Rightarrow v(x_1) \leq a \Rightarrow \\ &\Rightarrow u(x) = e^{b(x-x_0)}v(x) \leq e^{b(x-x_0)}v(x_1) \leq a \cdot e^{b(x-x_0)} \end{aligned}$$

□

Следствие. Если $a = 0$, то $u(x) \equiv 0$.

2.6 Уравнения, не разрешенные относительно производной

Определение 22 (Уравнение, не разрешенное относительно производной). Уравнением, не разрешенным относительно производной называется уравнение вида:

$$f(x, y, y') = 0 \quad (2.12)$$

Примечание (Задача Коши). Найти прешение 2.12 при условиях:

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \end{cases} \quad (2.13)$$

Теорема 6 (\exists и ! задачи Коши). Пусть $f \in C^1(D)$ и в точке $(x_0, y_0, y'_0) \in D$,

$$f(x_0, y_0, y'_0) = 0 \text{ и } f'_{y'}(x_0, y_0, y'_0) \neq 0$$

Тогда на достаточно малом отрезке $[x_0 - h; x_0 + h]$ решение задачи Коши 2.12, 2.13 существует и единственно.

Пример. $(y')^2 = x^2$

$$\begin{cases} y' = x \\ y' = -x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{x^2}{2} + C \\ y = -\frac{x^2}{2} + C \end{cases}$$

Определение 23 (Особое решение, дискриминантная кривая). Решение $y = \phi(x)$ уравнения 2.12 называется *особым*, если через \forall точку $y =$

$\phi(x)$, помимо того, проходит другое решение, имеющее ту же касательную, не совпадающее с исходным решением в сколь угодно малой окрестности этой точки.

Особые решения будем искать из системы:

$$\begin{cases} f(x, y, y') = 0 \\ f'_{y'}(x, y, y') = 0 \end{cases} \quad (2.14)$$

путем исключения y' .

Кривая, определенная уравнением 2.14 $\psi(x, y) = 0$, называется *дискриминантной*.

2.7 Интегрирование уравнений, не разрешенных относительно производной

Примечание.

1. Выразить, если это возможно, явно $y' : (y')_{1,2} = \dots$
2. Метод параметра: $y' = p$

$$x = \Phi(y, y') \quad (2.15)$$

$$y = \Psi(x, y') \quad (2.16)$$

Из 2.15: $y' = p \Rightarrow dy = p dx, \quad x = \Phi(y, p)$

$$dx = \frac{\delta \Phi}{\delta y} dy + \frac{\delta \Phi}{\delta p} dp$$

$$\frac{dy}{p} = \frac{\delta \Phi}{\delta y} dy + \frac{\delta \Phi}{\delta p} dp$$

$$\begin{cases} p = 0 \\ p \neq 0 \end{cases} \quad \frac{dy}{p} = \frac{\delta \Phi}{\delta y} dy + \frac{\delta \Phi}{\delta p} dp \Rightarrow \begin{cases} y = y(p, c) \\ x = \Phi(y(p, c), p) \end{cases}$$

Из 2.16: $y = \Psi(x, p)$

$$dy = \frac{\delta \Psi}{\delta x} dx + \frac{\delta \Psi}{\delta p} dp$$

$$p dx = \frac{\delta \Psi}{\delta x} dx + \frac{\delta \Psi}{\delta p} dp \Rightarrow \begin{cases} x = x(p, c) \\ y = \Psi(x(p, c), p) \end{cases}$$

Примечание (Уравнение Лагранжа).

$$\begin{aligned}
 y &= x \cdot F(y') + G(y') \\
 y' = p &\Rightarrow y = x \cdot F(p) + G(p) \\
 dy &= F(p)dx + x \cdot F'(p)dp + G'(p)dp \\
 &\quad \parallel \\
 &\quad p dx \\
 (p - F(p))dx - F'(p)dp \cdot x &= G'(p)dp: \quad dp \neq 0, \quad p - F(p) \neq 0 \\
 \frac{dx}{dp} - \frac{F'(p)}{p - F(p)} \cdot x &= \frac{G'(p)}{p - F(p)} - \text{линейное уравнение относительно } x
 \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{l} p - F(p) = 0 \Rightarrow p = p_0 \Rightarrow y = x \cdot F(p_0) + G(p_0) \Rightarrow y = x \cdot C_1 + C_2 \\ \quad \parallel \quad \parallel \\ \quad C_1 \quad C_2 \\ \left\{ \begin{array}{l} p - F(p) \neq 0 \\ \frac{dx}{dp} - \frac{F'(p)}{p - F(p)} \cdot x = \frac{G'(p)}{p - F(p)} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \phi(p, C) \\ y = \phi(p, C) \cdot F(p) + G(p) \end{array} \right. \\ dp = 0 \Rightarrow p = C \Rightarrow y = x \cdot F(C) + G(C) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Примечание (Уравнение Клеро).

$$\begin{aligned}
 y &= xy' + G(y'); \\
 y &= xp + G(p); \\
 dy &= xdp + p dx + G'(p)dp; \\
 &\quad \parallel \\
 &\quad p dx \\
 (x + G'(p))dp &= 0; \\
 \left\{ \begin{array}{l} x = -G'(p) \Rightarrow y = -G(p) \cdot p + G(p) \\ dp = 0 \Rightarrow p = C \Rightarrow y = xF(C) + G(C) \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

2.8 Уравнения высших порядков

Определение 24 (Уравнение n -го порядка). Уравнением порядка n называется уравнение вида:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (2.17)$$

где x — неизвестная, n — наивысший порядок производной:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (2.18)$$

Определение 25 (Решение уравнений 2.17 и 2.18). Решением уравнений 2.17 и 2.18 называется n раз дифференцируемая функция, которая при подстановке в уравнение, обращает его в тождество.

Определение 26 (Задача Коши). *Задача Коши:* найти уравнения 2.18 удовлетворяющему начальным условиям:

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{n-1} \end{cases} \quad \begin{pmatrix} y_0^0 \\ y_1^0 \\ \vdots \\ y_{n-1}^0 \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

Теорема 7 (\exists и $!$ задачи Коши 2.18, 2.19). Пусть $f(x, y_0, y_1, \dots, y_{n-1})$ – непрерывна по совокупности переменных в параллелепипеде:

$$\Pi = \{(x, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) : |x - x_0| \leq a, |y_k - y_k^0| \leq b, k = \overline{0, n-1}\}$$

и удовлетворяет условию Липшица по переменным y_0, y_1, \dots, y_{n-1}

$$\left(\frac{\delta f}{\delta y_k} - \text{непр.}, k = \overline{0, n-1} \right)$$

Тогда в окрестности точки x_0 ($x_0 - h; x_0 + h$) решение задачи Коши существует и единственно, где:

$$h = \min \left\{ a, \frac{b}{\max\{M_0, M_1, \dots, M_{n-1}\}} \right\}, \quad M_k = \max \left| \frac{\delta f}{\delta y_k} \right|$$

2.9 Линейные уравнения высших порядков

Определение 27 (Линейное неоднородное уравнение порядка n , однородное уравнение). Уравнение вида:

$$a_0(x) \cdot y^{(n)} + a_1(x) \cdot y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x) \cdot y' + a_n(x) \cdot y = f(x), \quad a_0(x) \neq 0 \quad (2.20)$$

называется *линейным неоднородным порядком n* ,

$$a_j(x) \in C(\alpha; \beta), \quad j = \overline{0, n}, \quad f(x) \in C(\alpha, \beta), \quad -\infty \leq \alpha < \beta \leq +\infty$$

Если $f(x) = 0$, то уравнение называется *однородным*.

Пусть $L[y] = Ly \equiv a_0(x) \cdot y^{(n)} + \dots + a_n(x) \cdot y$,

$$Ly = f \quad (2.21)$$

$$Ly = 0 \quad (2.22)$$

$$y^{(n)} = -\frac{a_1(x)}{a_0(x)} \cdot y^{(n-1)} - \dots - \frac{a_{n-1}(x)}{a_0(x)} \cdot y' - \frac{a_n(x)}{a_0(x)} \cdot y + \frac{f(x)}{a_0(x)} \quad (2.23)$$

Теорема 8 (О существовании и единственности). Пусть для уравнения 2.23 выполняются условия: $a_0(x) \neq 0$, $a_j(x) \in C(\alpha; \beta)$, $f(x) \in C(\alpha, \beta)$.

Тогда решение задачи Коши для уравнения 2.23 существует и единственно на (α, β) .

Примечание (Свойства оператора Ly).

1. $L(\alpha y) = \alpha Ly$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ (свойство однородности);
2. $L(y_1 + y_2) = Ly_1 + Ly_2$ (свойство аддитивности).

Примечание (Свойства решений однородного линейного уравнения 2.22 или $Ly = 0$).

1. $y \equiv 0$ является решением 2.22;
2. Если $y_1(x)$ – решение 2.22, то $y(x) - \alpha y_1(x)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ также является решением:

$$Ly = L(\alpha y_1) = \alpha Ly_1 = 0$$

3. Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – решения 2.22, то $y(x) = y_1(x) + y_2(x)$ также является решением:

$$Ly = L(y_1 + y_2) = Ly_1 + Ly_2 = 0 + 0 = 0$$

4. Если $y_1(x), \dots, y_n(x)$ – решения 2.22, то $\forall c_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1, n}$ $y(x) = c_1 y_1(x) + \dots + c_n y_n(x)$ так же является решением.

$y_1(x), \dots, y_n(x)$ – линейно независимая система функций $\Rightarrow \forall y(x) = \sum_{i=1}^n c_i \cdot y_i(x)$ – решение 2.22.

Определение 28 (Линейно зависимая система функций). Система функций $y_1(x), \dots, y_n(x)$ называется *линейно зависимой*, если \exists такой набор $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$: $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2 \neq 0$, что линейная комбинация

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \dots + \alpha_n y_n(x) = 0$$

Определение 29 (Линейно независимая система функций). Система функций $y_1(x), \dots, y_n(x)$ называется *линейно независимой*, если линейная комбинация этих функций равна 0 в случае, когда

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0,$$

$$\alpha_1 y_1(x) + \dots + \alpha_n y_n(x) = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0.$$

Определение 30 (Определитель Вронского). *Определителем Вронского (вронскианом)* системы функций $y_1(x), \dots, y_n(x)$, имеющих производ-

ные до порядка $(n-1)$ включительно, называется определитель:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

Теорема 9. Если система функций $y_1(x), \dots, y_n(x)$ линейно зависима, то определитель Вронского равен 0, то есть $W(x) = 0$.

Доказательство. Из линейной зависимости $y_1(x), \dots, y_n(x) \Rightarrow \exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$:

$$\alpha_1 y_1(x) + \dots + \alpha_n y_n(x) = 0.$$

Пусть $\alpha_n \neq 0$, тогда:

$$\begin{aligned} y_n(x) &= -\frac{\alpha_1}{\alpha_n} y_1(x) - \frac{\alpha_2}{\alpha_n} y_2(x) - \dots - \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} y_{n-1}(x) \\ y_n'(x) &= -\frac{\alpha_1}{\alpha_n} y_1'(x) - \frac{\alpha_2}{\alpha_n} y_2'(x) - \dots - \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} y_{n-1}'(x) \\ &\vdots \\ y_n^{(n-1)}(x) &= -\frac{\alpha_1}{\alpha_n} y_1^{(n-1)}(x) - \frac{\alpha_2}{\alpha_n} y_2^{(n-1)}(x) - \dots - \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} y_{n-1}^{(n-1)}(x) \end{aligned}$$

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & \cdots & y_{n-1}(x) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\alpha_k}{\alpha_n} y_k(x) \\ y_1'(x) & \cdots & y_{n-1}'(x) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\alpha_k}{\alpha_n} y_k'(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \cdots & y_{n-1}^{(n-1)}(x) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\alpha_k}{\alpha_n} y_k^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} = 0$$

□

Замечание. $W(x) = 0 \nRightarrow y_1(x), \dots, y_n(x)$ – линейно зависима.

$$y_1(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}, \quad y_2(x) = \begin{cases} 0, & x \geq 0 \\ x^2, & x < 0 \end{cases}$$

$$W(x) = \begin{cases} \begin{vmatrix} x^2 & 0 \\ 2x & 0 \end{vmatrix} = 0, & x \geq 0 \\ \begin{vmatrix} 0 & x^2 \\ 0 & 2x \end{vmatrix} = 0, & x < 0 \end{cases} \equiv 0$$

$$\frac{y_1(x)}{y_2(x)} = \begin{cases} \infty, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}, \quad \frac{y_1(x)}{y_2(x)} = \text{const} \text{ ЛЗ}$$

$$\alpha_1 \cdot y_1 + \alpha_2 \cdot y_2 = 0, \quad y_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \cdot y_2$$

Лекция 5: Продолжение

от 5 дек 10:29

Теорема 10. Пусть $y_1(x), \dots, y_n(x)$ – система линейно независимых на

$(\alpha; \beta)$ решений уравнения $Ly = 0$. Тогда $W(x) \neq 0$ ни в какой точке интервала $(\alpha; \beta)$.

Доказательство. От противного. Предположим, что $\exists x_0 \in (\alpha; \beta)$. $W(x_0) = 0$,

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & \cdots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & \cdots & y_n'(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} c_1 y_1(x_0) + \dots + c_n y_n(x_0) = 0 \\ c_1 y_1'(x_0) + \dots + c_n y_n'(x_0) = 0 \\ \vdots \\ c_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \dots + c_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases} \quad (2.24)$$

Однородная система линейно алгебраических уравнений, $\det W(x_0) = 0$, \Rightarrow система 2.24 имеет нетривиальное решение: $\vec{c}^0 = (c_1^0, c_2^0, \dots, c_n^0)$, $y_1(x), \dots, y_n(x)$ – линейно зависимая?

$$y(x) = c_1^0 \cdot y_1(x) + \dots + c_n^0 \cdot y_n(x)$$

1. $y(x)$ – решение $Ly = 0$;

$$2. \begin{cases} y(x_0) = 0 \\ y'(x_0) = c_1^0 y_1'(x_0) + \dots + c_n^0 y_n'(x_0) \Big|_{x=x_0} = 0 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = c_1^0 y_1^{(n-1)}(x_0) + \dots + c_n^0 y_n^{(n-1)}(x_0) \Big|_{x=x_0} = 0 \end{cases}$$

1. $y \equiv 0 \Rightarrow Ly = 0 \Rightarrow$ из теоремы существования и единственности $\Rightarrow y(x) = \sum_{k=1}^n c_k^0 y_k(x) \equiv 0 \Rightarrow y_1, \dots, y_n$ – линейно зависимые \Rightarrow противоречие.

□

Теорема 11 (Лиувилля-Остроградского $(W(x), W(x_0))$). Пусть задано уравнение:

$$a_0(x) \cdot y^{(n)} + a_1(x) \cdot y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x) \cdot y' + a_n(x) \cdot y = 0,$$

$a_0(x) \neq 0$, $a_j(x) \in C(\alpha; \beta)$, $j = \overline{0, n}$, $-\infty \leq \alpha < \beta \leq +\infty$. Тогда:

$$W(x) = W(x_0) \cdot e^{-\int_{x_0}^x \frac{a_1(s)}{a_0(s)} ds}, \quad x_0 \in (\alpha; \beta)$$

Следствие. Если $\exists x_0 \in (\alpha; \beta) : W(x_0) = 0 \Rightarrow W(x) = 0 \quad \forall x \in (\alpha; \beta)$

2.10 Построение общего решения уравнения $Ly = 0$

Определение 31 (Решение $Ly = 0$). Функция $y = \phi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$ называется *решением* $Ly = 0$, если для \forall набора C_1, C_2, \dots, C_n она является решением $Ly = 0$ и для \forall задачи Коши $y(x_0) = y_0^o, y'(x_0) = y_1^o, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}^o \exists$ набор $C_1^o, C_2^o, \dots, C_n^o : y = \phi(x, C_1^o, \dots, C_n^o)$ является решением $Ly = 0$.

Теорема 12 (Структура решения однородного уравнения). Пусть $y_1(x), \dots, y_n(x)$ – линейно независимые решения $Ly = 0$ n -го порядка. Тогда:

$$y_{\text{ОО}} = C_1 y_1(x) + \dots + C_n y_n(x),$$

где C_1, \dots, C_n – произвольные константы.

Определение 32 (Фундаментальная система решений (ФСР)). Любые n линейно независимых решений задачи Коши уравнения $Ly = 0$ называются *фундаментальной системой решений (ФСР)*.

Теорема 13. ФСР уравнения $Ly = 0$ – существует.

Теорема 14. Любые $(n + 1)$ решения задачи Коши для $Ly = 0$ n -го порядка линейно зависимы, то есть $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}$:

$$\alpha_1^2 + \dots + \alpha_{n+1}^2 \neq 0, \quad \alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \dots + \alpha_{n+1} y_{n+1}(x) = 0$$

2.11 Линейные уравнения с переменными коэффициентами

Примечание. Решения линейного однородного уравнения n -го порядка с переменными коэффициентами – линейное пространство размерности n с базисом ФСР.

Нормированная ФСР – это задача Коши с начальными условиями:

$$(1, 0, \dots, 0), (0, 1, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 1)$$

Если имеем y_1, y_2, \dots, y_n – решений $Ly = 0$ и $\exists x_0 \in (\alpha; \beta) : W(x_0) \neq 0$, то пытаемся восстановить дифференциальное уравнение.

Пример. $n = 2$, $\{\sin x, \cos x\}$, $w(x) = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} = -1 \neq 0$

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0, \quad a_0(x) \neq 0$$

$$y'' + p(x)y' + q(x) \cdot y = 0$$

$$\begin{cases} -\sin x + p(x) \cdot \cos x + q(x) \cdot \sin x = 0 \\ -\cos x - p(x) \cdot \sin x + q(x) \cdot \cos x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p(x) \\ q(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \neq 0$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \sin x & \sin x \\ \cos x & \cos x \end{vmatrix} = 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{\Delta_1}{\Delta} = 0 \\ q(x) &= \frac{\Delta_2}{\Delta} = 1 \end{aligned} \Rightarrow y'' + y = 0$$

Примечание (Способы восстановления дифференциального уравнения).

1. Способ первый:

$$\begin{cases} y^{(n)} + p_{n-1}(x) \cdot y^{(n-1)} + \dots + p_1(x) \cdot y' + p_0(x) \cdot y = 0 \\ y_1^{(n)} + p_{n-1}(x) \cdot y_1^{(n-1)} + \dots + p_1(x) \cdot y_1' + p_0(x) \cdot y_1 = 0 \\ y_2^{(n)} + p_{n-1}(x) \cdot y_2^{(n-1)} + \dots + p_1(x) \cdot y_2' + p_0(x) \cdot y_2 = 0 \\ \vdots \\ y_n^{(n)} + p_{n-1}(x) \cdot y_n^{(n-1)} + \dots + p_1(x) \cdot y_n' + p_0(x) \cdot y_n = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} y_1 & y_1' & \dots & y_1^{(n-1)} \\ y_2 & y_2' & \dots & y_2^{(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_n & y_n' & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = W(x) \neq 0 \end{aligned}$$

($\Rightarrow y_1, y_2, \dots, y_n$ — ЛНЗ) \Rightarrow система имеет ! решение $p_0(x), p_1(x), \dots, p_{n-1}(x)$, которое выражается через y_1, y_2, \dots, y_n и их производные.

2. Способ второй: потерян

Пример. По второму способу:
$$y_1 = x, y_2 = x^2, W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = 2x^2 - x^2 = x^2 \neq 0, \text{ при } x \neq 0.$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} y_1'' & y_1' & y_1 \\ y_2'' & y_2' & y_2 \\ y_1'' & y_1' & y_1 \end{vmatrix} = 0 &\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1 & x \\ 2 & 2x & x^2 \\ y'' & y' & y \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow y'' \cdot \begin{vmatrix} 2x & x^2 \\ y' & y \end{vmatrix} - y' \cdot \begin{vmatrix} 0 & x \\ 2 & x^2 \end{vmatrix} + y \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2x \end{vmatrix} = 0 \\ &x^2 \cdot y'' - 2x \cdot y' + 2y = 0 \end{aligned}$$

2.12 Структура общего решения линейного неоднородного уравнения $Ly = f$ **Примечание.**

$$Ly = a_0(x) \cdot y^{(n)} + a_1(x) \cdot y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x) \cdot y' + a_n(x) \cdot y = f(x), \quad (2.25)$$

где $a_0(x) \neq 0$, $a_j(x)$, $f(x) \in C(\alpha; \beta)$, $j = \overline{0, n}$, $-\infty \leq \alpha < \beta \leq +\infty$

Теорема 15. Все решения уравнения вида 2.25 даются формулой:

$$y_{\text{ОН}} = y_{\text{ОО}} + y_{2\text{ЧН}} \quad (2.26)$$

Доказательство. Пусть $y_{2\text{ЧН}}$ – произвольное частное решение 2.25, то есть

$$L(y_{2\text{ЧН}}) = f(x)$$

1. Покажем, что решение 2.26 удовлетворяет 2.25:

$$L(y_{\text{ОН}}) = L(y_{\text{ОО}} + y_{2\text{ЧН}}) = L(y_{\text{ОО}}) + L(y_{2\text{ЧН}}) = 0 + f(x) = f(x)$$

2. Покажем, что формула 2.26 покрывает все решения 2.25:

\tilde{y} – частное решение 2.25, $L(\tilde{y}) = f(x)$

$$\tilde{y} = (\tilde{y} - y_{\text{ЧН}}) + y_{\text{ЧН}}$$

$$\begin{aligned} L(\tilde{y} - y_{\text{ЧН}}) &= L(\tilde{y}) - L(y_{\text{ЧН}}) = f(x) - f(x) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \tilde{y} = (\tilde{y} - y_{\text{ЧН}}) + y_{\text{ЧН}} = y_{\text{ОО}} + y_{\text{ЧН}} \end{aligned}$$

□

Построение общего решения неоднородного уравнения 2.25

Примечание (Метод вариации произвольных постоянных).

1. y_1, y_2, \dots, y_n – ФСР уравнения 2.25 $\Rightarrow y_{\text{ОО}} = C_1 y_1(x) + \dots + C_n y_n(x)$.

2. $y = y_{\text{ОН}} = C_1(x) y_1(x) + \dots + C_n(x) y_n(x)$. Найдем производные до n -го порядка:

$$\begin{aligned}
 a_n(x) &: C_1(x) y_1(x) + \dots + C_n(x) y_n(x) \\
 a_{n-1}(x) &: C_1(x) y_1'(x) + \dots + C_n(x) y_n'(x) + \underbrace{C_1'(x) y_1(x) + \dots + C_n'(x) y_n(x)}_{\parallel 0} \\
 a_{n-2}(x) &: C_1(x) y_1''(x) + \dots + C_n(x) y_n''(x) + \underbrace{C_1'(x) y_1'(x) + \dots + C_n'(x) y_n'(x)}_{\parallel 0} \\
 &\vdots \\
 a_1(x) &: C_1(x) y_1^{(n-1)}(x) + \dots + C_n(x) y_n^{(n-1)}(x) + \underbrace{C_1'(x) y_1^{(n-2)}(x) + \dots + C_n'(x) y_n^{(n-2)}(x)}_{\parallel 0} \\
 a_0(x) &: C_1(x) y_1^{(n)}(x) + \dots + C_n(x) y_n^{(n)}(x) + \underbrace{C_1'(x) y_1^{(n-1)}(x) + \dots + C_n'(x) y_n^{(n-1)}(x)}_{\parallel 0} \\
 C_1(x) & \underbrace{(a_0(x) y_1^{(n)}(x) + a_1(x) y_1^{(n-1)}(x) + \dots + a_{n-1}(x) y_1' + a_n(x) y_1(x))}_{\parallel 0}
 \end{aligned}$$

Система n уравнений и n неизвестных $C_1'(x), \dots, C_n'(x)$, определитель $\Delta = ?$

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ y_1' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = W(x) \neq 0$$

Примечание (Метод вариации произвольных постоянных (продолжение?)).

$$\begin{aligned}
 y_{\text{ОН}} &= C_1(x) \cdot y_1 + \dots + C_n(x) y_n \\
 \begin{cases} C_1'(x) y_1 + \dots + C_n'(x) y_n = 0 \\ C_1'(x) y_1' + \dots + C_n'(x) y_n' = 0 \\ \vdots \\ C_1'(x) y_1^{(n-2)} + \dots + C_n'(x) y_n^{(n-2)} = 0 \\ C_1'(x) y_1^{(n-1)} + \dots + C_n'(x) y_n^{(n-1)} = \frac{f(x)}{a_0(x)} \end{cases}
 \end{aligned}$$

$\Delta = W(y_1, y_2, \dots, y_n) \neq 0$, так как y_1, y_2, \dots, y_n – ФСР \Rightarrow система имеет

! решение. Найти это решение по формулам Крамера:

$$C'_k(x) = \frac{W_k(x)}{W(x)} dx + C_k, \quad k = \overline{1, n}, \quad (2.27)$$

где:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ y'_1 & \cdots & y'_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix},$$

$$W_k(x) = \begin{vmatrix} y_1 & \cdots & y_n & 0 & y_{k+1} & \cdots & y_n \\ y'_1 & \cdots & y'_n & 0 & y'_{k+1} & \cdots & y'_n \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} & 0 & y_{k+1}^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

Проинтегрируем 2.27:

$$C_k(x) = \int \frac{W_k(x)}{W(x)} dx + C_k, \quad k = \overline{1, n}, \quad (2.28)$$

$$y(x) = y_{\text{OH}} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{W_k(x)}{W(x)} dx + C_k \right) y_k = \underbrace{\sum_{k=1}^n C_k y_k}_{\text{y.OO}} + \underbrace{\sum_{k=1}^n y_k \int \frac{W_k(x)}{W(x)} dx}_{\text{y.чн}}$$

Лекция 6: Конец

от 21 дек 8:48

2.13 Линейные уравнения с постоянными коэффициентами

Примечание. Рассмотрим:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \quad (2.29)$$

где $a_0 \neq 0$, $a_i \in \mathbb{R}$. Теперь $y = e^{\lambda x}$, $y' = \lambda e^{\lambda x}$, \dots , $y^{(n)} = \lambda^n e^{\lambda x}$:

$$e^{\lambda x} (a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n) = 0 \quad (2.30)$$

$y = e^{\lambda x}$ – решение уравнения 2.29 $\Leftrightarrow \lambda$ – корень характеристического уравнения $T_n(\lambda) = 0$, $T_n(\lambda) = a_0 \lambda^n + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n$.

Если $a_i \in \mathbb{R} \Rightarrow$ характеристическое уравнение 2.30 имеет ровно n корней, учитывая их кратность. Корни могут быть комплексными.

1. $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $\lambda_i \neq \lambda_m$, $i \neq m$, $i = \overline{1, n}$. Найти y_1, y_2, \dots, y_n – ФСР ?

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, y_2 = e^{\lambda_2 x}, \dots, y_n = e^{\lambda_n x}$$

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ – корни характеристического многочлена 2.30.

$W(x) = 0 \Leftrightarrow y_1, y_2, \dots, y_n$, так как решения $Ly = 0$, ЛЗ

$W(x) \neq 0 \Rightarrow y_1, \dots, y_n$ ЛНЗ

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} & \dots & e^{\lambda_n x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} & \dots & \lambda_n e^{\lambda_n x} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 x} & \lambda_2^{n-1} e^{\lambda_2 x} & \dots & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n x} \end{vmatrix} =$$

$$= e^{\lambda_1 x} e^{\lambda_2 x} \dots e^{\lambda_n x} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} \neq 0 \text{ при } \lambda_i \neq \lambda_m$$

$\Rightarrow y_1, y_2, \dots, y_n$ ЛНЗ \Rightarrow

$$\Rightarrow y_{\text{ОО}} = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \dots + C_n e^{\lambda_n x}$$

$$2. \underbrace{\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m = \lambda}_{\text{кратный}}, \quad \underbrace{\lambda_{m+1}, \dots, \lambda_n}_{\substack{\neq \\ \lambda}} \in \mathbb{R}$$

$$\underbrace{e^{\lambda x}, e^{\lambda x}, \dots, e^{\lambda x}}_m \quad e^{\lambda_{m+1} x}, \dots, e^{\lambda_n x}$$

$$\underbrace{e^{\lambda x}, x e^{\lambda x}, \dots, x^{m-1} e^{\lambda x}}_{\substack{\parallel \\ y_1 \quad \parallel \\ y_2 \quad \parallel \\ y_m}}$$

y_1, y_2, \dots, y_m – ФСР:

(а) ЛНЗ:

$$\alpha_1 e^{\lambda x} + \alpha_2 x e^{\lambda x} + \dots + \alpha_m x^{m-1} e^{\lambda x} = 0$$

$$e^{\lambda x} (\alpha_1 + \alpha_2 x + \dots + \alpha_m x^{m-1}) = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = 0$$

(б) Является решением 2.29:

$$L(x^k e^{\lambda x}) \stackrel{?}{=} 0, \quad k = \overline{0, m-1}$$

$$L(e^{\lambda x}) = e^{\lambda x} \cdot T_n(\lambda) \quad (2.31)$$

$$\frac{\delta^k}{\delta x^k} (L(e^{\lambda x})) = \frac{\delta^k}{\delta \lambda^k} (e^{\lambda x} T_n(\lambda)), \quad (u \cdot v)^{(k)} = \sum_{i=0}^k C_k^i u^{(i)} v^{(k-i)}$$

$$L\left(\frac{\delta^k}{\delta \lambda^k} e^{\lambda x}\right) = \sum_{i=0}^k C_k^i T_n^{(i)}(\lambda) \cdot (e^{\lambda x})^{(k-i)}$$

$$L(x^k e^{\lambda x}) = \sum_{i=0}^k C_k^i T_n^{(i)}(\lambda) x^{k-i} e^{\lambda x}$$

Если λ – корень $T_n(\lambda)$ кратности m , то:

$$T_n(\lambda) = T_n'(\lambda) = \dots = T_n^{(m-1)}(\lambda) = 0, \quad T_n^{(m)}(\lambda) \neq 0$$

Правая часть = 0, если $k = \overline{0, m-1} \Rightarrow L(x^k e^{\lambda x}) = 0, \quad k = \overline{0, m-1},$

$$y_{\text{ОО}} = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x} + \dots + C_m x^{m-1} e^{\lambda x} + C_{m+1} e^{\lambda_m x} + \dots + C_n e^{\lambda_n x}$$

$$3. \quad \lambda_{1,2} = a \pm b_i, \quad \lambda_3, \dots, \lambda_n$$

$$\quad \quad \quad \uparrow$$

$$\quad \quad \quad \lambda_{1,2}$$

$$y_1 = e^{(a+bi)x} = e^{ax} \cdot e^{ibx} = e^{ax} (\cos bx + i \sin bx)$$

$$y(x) = u(x) + iv(x), \quad y'(x) = u'(x) + iv'(x)$$

Утверждение. $y(x)$ – решение $Ly = 0 \Leftrightarrow u(x)$ и $v(x)$ – решения 2.29.

$$Ly(x) = Lu(x) + iLv(x)$$

$$y_2 = e^{(a-bi)x} = e^{ax} \cdot e^{-ibx} = e^{ax} (\cos bx - i \sin bx);$$

$$\tilde{y}_1 = \frac{y_1 + y_2}{2} = e^{ax} \cdot \cos bx;$$

$$\tilde{y}_2 = \frac{y_1 - y_2}{2} = e^{ax} \cdot \sin bx$$

(а) \tilde{y}_1, \tilde{y}_2 – решения 2.29;

(б) \tilde{y}_1, \tilde{y}_2 – ЛНЗ?

$\Rightarrow \tilde{y}_1, \tilde{y}_2, y_3, \dots, y_n$ – ФСР:

$$y_{\text{ОО}} = C_1 e^{ax} \cos bx + C_2 e^{ax} \sin bx + C_3 e^{\lambda_3 x} + \dots + C_n e^{\lambda_n x}$$

$$4. \quad \lambda_{1,2} = \lambda_{3,4} = \dots = \lambda_{2m-1,2m} = a \pm bi, \quad \lambda_{2m+1}, \dots, \lambda_n$$

$$\quad \quad \quad \uparrow$$

$$\quad \quad \quad \lambda_{1,2}$$

$$y_1 = e^{ax} \cos bx, \quad y_2 = x e^{ax} \cos bx, \quad \dots, \quad y_m = x^{m-1} e^{ax} \cos bx,$$

$$y_{m+1} = e^{ax} \sin bx, \quad y_{m+2} = x e^{ax} \sin bx, \quad \dots, \quad y_{2m} = x^{m-1} e^{ax} \sin bx$$

$$y_{\text{ОО}} = e^{ax}(C_1 \cos bx + C_2 x \cos bx + \dots + C_m x^{m-1} \cos bx) + \\ + e^{ax} \sin bx (C_{m+1} + C_{m+2} x + \dots + C_{2m} x^{m-1}) + \\ + C_{2m+1} e^{\lambda_{2m} x} + \dots + C_n e^{\lambda_n x}$$

$f(x)$ – специального вида

$$b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m, e^{ax}, \cos bx, \sin bx$$

2.14 Линейные неоднородные уравнения с правой частью спец. вида

Примечание.

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x), \quad (2.32)$$

где $a_0 \neq 0$, $a_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{0, n}$

$$a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0 \quad (2.33)$$

Пусть:

$$f(x) = e^{\alpha x} (P_m(x) \cos \beta x + Q_n(x) \sin \beta x) \quad (2.34)$$

Тогда частное решение уравнения 2.32 будем искать λ вида:

$$y_{\text{ЧН}} = e^{\alpha x} (M_k(x) \cos \beta x + N_k(x) \sin \beta x) \cdot x^\tau,$$

где $k = \max(m, n)$, $M_k(x), N_k(x)$ – многочлены степени k общего вида с неоднородными коэффициентами, τ – кратность числа $\alpha \pm \beta i$ как корня характеристического уравнения 2.33, если $\alpha \pm \beta i$ не является корнем 2.33, то $\tau = 0$.

2. $f(x) = (b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m) e^{2x}$. Тогда:

$$y_{\text{ЧН}} = (d_0 + d_1 x + \dots + d_m x^m) e^{\alpha x} \cdot x^\tau,$$

где τ – кратность числа α как корня характеристического уравнения 2.33, если λ не является корнем характеристического уравнения 2.33, то $\tau = 0$.

3. Если $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_p(x)$, где $f_i(x)$ – многочлен вида 2.34, то $y_{\text{ОН}} = y_{\text{ОО}} + y_{\text{ЧН}}^{(1)} + y_{\text{ЧН}}^{(2)} + \dots + y_{\text{ЧН}}^{(p)}$.

4. Если $f(x)$ – произвольного вида (отличного от вида 2.34), то $y_{\text{ОН}}$ находим с помощью метода вариаций произвольных постоянных.

Примечание (Уравнение Эйлера).

$$a_0 x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} x y' + a_n y = f(x),$$

$x^k y^{(k)}$ сводится к уравнению с постоянными коэффициентами с помощью замены $x = e^t$ при $x > 0$ ($x = e^t$ при $x < 0$).

Пример. $x^3 y''' - x^2 y'' + 2xy' - 2y = x^3, \quad x = e^t$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y'_t}{e^t} = e^{-t} y'_t$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{e^{-t}(y''_t - y'_t)}{e^t} = e^{-2t}(y''_t - y'_t)$$

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{\frac{dy''}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{e^{-2t}(y'''_t - y''_t - 2y'_t + 2y_t)}{e^t} = e^{-3t}(y'''_t - 3y''_t + 2y'_t)$$

$$e^{3t} \cdot e^{-3t}(y'''_t - 3y''_t + 2y'_t) - e^{2t} \cdot e^{-2t} \cdot (y''_t - y'_t) + 2e^t \cdot e^{-t} y'_t - 2y = e^{3t}$$

$$y'''_t - 4y''_t + 5y'_t - 2y = e^{3t}, \quad \lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = 0$$

1. Характеристическое уравнение: $x^k y^{(k)} \rightarrow \lambda(\lambda - 1) \dots (\lambda - k + 1)$,

$$\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2) - \lambda(\lambda - 1) + 2\lambda - 2 = 0$$

$$(\lambda - 1)(\lambda^2 - 2\lambda - \lambda) + 2(\lambda - 1) = 0$$

$$(\lambda - 1)(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)^2(\lambda - 2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \lambda_2 = 1 \\ \lambda_3 = 2 \end{cases} \Rightarrow y_{\text{ОО}} = (C_1 + C_2 t)e^t + C_3 e^{2t}$$

2. $\lambda(\lambda^2 - 3\lambda + 2) - \lambda^2 + \lambda + 2\lambda - 2 = 0$

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda - \lambda^2 + 3\lambda - 2 = 0$$

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y''' - 4y'' + 5y' - 2y = e^{3t}$$

$$f(t) = e^{3t} \Rightarrow \alpha \pm \beta i = 3 \neq \lambda_1, \lambda_2 \Rightarrow \tau = 0 \Rightarrow y_{\text{ЧН}} = Ae^{3t}$$

$$27Ae^{3t} - 36Ae^{3t} + 15Ae^{3t} - 2Ae^{3t} = e^{3t}$$

$$4A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{4} \Rightarrow y_{\text{ЧН}} = \frac{1}{4}e^{3t}$$

$$y_{\text{ОН}} = y_{\text{ОО}} + y_{\text{ЧН}} =$$

$$= (C_1 + C_2 t)e^t + C_3 e^{2t} + \frac{1}{4}e^{3t} = (C_1 + C_2 \ln x)x + C_3 x^2 + \frac{1}{4}x^3$$

$$x > 0, \quad x = e^t, \quad \ln x = t$$

Пример. $y'' - 3y' + 2y = 9e^{3x}$

1. $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2.$

2. $f(x) = 9e^{3x} \Rightarrow \alpha \pm \beta i = 3 \neq \lambda_1, \lambda_2 \Rightarrow \tau = 0 \Rightarrow y_{\text{ЧН}} = Ae^{3x} \cdot x^0 = Ae^{3x}.$

Пример. $y'' + 16y = x \cdot \sin 4x$

$$1. \lambda^2 + 16 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 4i.$$

$$2. f(x) = x \sin x \Rightarrow \alpha \pm \beta i = 0 \pm 4i = \lambda_1 \Rightarrow \tau = 1$$

$$y_{\text{ЧН}} = x(Ax + B) \sin x + x(Cx + D) \cos x$$

1. Характеристическое уравнение:

$$\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2) - \lambda(\lambda - 1) + 2\lambda - 2 = 0$$

$$(\lambda - 1)(\lambda^2 - 2\lambda - \lambda) + 2(\lambda - 1) = 0$$

$$(\lambda - 1)(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\lambda - 1)^2(\lambda - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \lambda_2 = 1 \\ \lambda_3 = 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$y_{\text{ОО}} = (C_1 + C_2 t)e^t + C_3 e^{2t}$$

Пример. $y'' - 8y' + 16y = e^{4x}(1 - x)$

$$1. \lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0 \Rightarrow (\lambda - 4)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 4, \text{ кратность } - 2.$$

$$2. f(x) = e^{4x}(1 - x) \Rightarrow \alpha \pm \beta i = 4 = \lambda_1 \Rightarrow \tau = 2.$$

$$y_{\text{ЧН}} = e^{4x}(Ax + B)x^2 = e^{4x}(Ax^3 + Bx^2)$$

Глава 3

Системы дифференциальных уравнений 1-го порядка

Лекция 7: Начало

от 20 фев 10:30

Примечание. Рассмотрим систему 1-го порядка из m уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} F_1(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) = 0 \\ \vdots \\ F_m(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) = 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

Далее, $m = n$.

1 уравнение	система
x	t (нез. переменная)
y	$\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$
$ y $	$\ \bar{x}\ = (\sum_{i=1}^n x_i^2)^{\frac{1}{2}}$

Определение 33 (Нормальная система ДУ 1-го порядка). Система ДУ 1-го порядка называется *нормальной*, если она имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(t, x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_n(t, x_1, \dots, x_n) \end{cases} \quad (3.2)$$

или

$$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(t, \bar{x}), \text{ где } \dot{\bar{x}} = \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

Определение 34 (Решение системы ДУ 1-го порядка). Решением системы ДУ 1-го порядка $\bar{x}(t) = \phi(t) = \begin{pmatrix} \phi_1(t) \\ \vdots \\ \phi_n(t) \end{pmatrix}$ называется набор дифференцируемых функций, обращающих уравнения системы в тождества.

Определение 35 (Задача Коши для системы ДУ 1-го порядка). Задачей Коши для системы ДУ 1-го порядка называется задача отыскания решения системы 3.2 и 3.3, удовлетворяющего начальным условиям:

$$\begin{cases} x_1(t_0) = x_1^0 \\ \vdots \\ x_n(t_0) = x_n^0 \end{cases} \quad (3.4)$$

или

$$\bar{x}(t_0) = \bar{x}^0. \quad (3.5)$$

Теорема 16 (Э и ! решения задачи Коши для системы). Пусть $\bar{f}(t, \bar{x})$ определена и непрерывна в области $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ и удовлетворяет условию Липшица по переменным x_1, \dots, x_n или более сильное условие: частные производные $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ непрерывны в области D , $i, j = \overline{1, n}$.

Тогда решение задачи 3.2, 3.4 или 3.3, 3.5 существует и единственно в интервале $(t_0 - h; t_0 + h)$, где $h = \frac{r}{\sqrt{M^2 + 1}}$, где r – радиус шара B_r с центром (t_0, \bar{x}^0) , целиком лежащим в области D ,

$$M = \sup_{B_r} \|\bar{f}(t, \bar{x})\|.$$

Определение 36 (Линейная система ДУ 1-го порядка). Система ДУ 1-го порядка называется *линейной*, если она имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}(t) \cdot x_1 + \dots + a_{1n}(t) \cdot x_n + g_1(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = a_{n1}(t) \cdot x_1 + \dots + a_{nn}(t) \cdot x_n + g_n(t) \end{cases} \quad (3.6)$$

или

$$\dot{\bar{x}} = A(t) \cdot \bar{x} + \bar{g}(t). \quad (3.7)$$

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}, \quad \bar{g}(t) = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ \vdots \\ g_n(t) \end{pmatrix}.$$

Определение 37 (Однородные системы 3.6, 3.7). Система 3.6 или 3.7 называется *однородной*, если $\bar{g}(t) = 0$, то есть:

$$\dot{\bar{x}} = A(t) \cdot \bar{x}. \quad (3.8)$$

Если матрица $A(t)$ имеет постоянные элементы, то $A(t) = A$.

Примечание $((\alpha, \beta))$.

$$-\infty \leq \alpha < \beta \leq +\infty.$$

Теорема 17 (О продолжаемости решения системы на интервал). Пусть $a_{ij}(t)$ и $g_j(t)$ непрерывны на (α, β) , $i, j = \overline{1, n}$.

Тогда решение задачи Коши 3.5, 3.7 существует, единственно и продолжаемо на (α, β) .

Определение 38 (Линейно зависимая система функций). Система функций $\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n$ называется *линейно зависимой* на (α, β) , если существует набор действительных чисел c_1, \dots, c_n , на всех равных нулю, такой, что:

$$c_1 \bar{x}^1 + \dots + c_n \bar{x}^n = 0 \quad \text{на } (\alpha, \beta). \quad (3.9)$$

Определение 39 (Линейно независимая система функций). Если в равенстве 3.9 $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$, то система функций $\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n$ — *линейно независима*.

Определение 40 (Фундаментальная система решений (ФСР)). Любая система линейно независимых решений 3.8 $\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n$ называется *фундаментальной системой решений (ФСР)*.

Определение 41 (Фундаментальная матрица). Матрица, столбцы которой являются ФСР, называется *фундаментальной матрицей системы*,

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} x_1^1 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n^1 & \dots & x_n^n \end{pmatrix}.$$

Определение 42 (Определитель Вронского системы). *Определителем Вронского системы* называется определитель фундаментальной матрицы,

$$W(t) = \det \Phi(t).$$

Теорема 18. Если система функций $\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n$ линейно зависима, то $W(t) = 0$.

Следствие. Если $W_{\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n}(t) \neq 0$, то $\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n$ – линейно независимая система функций.

Теорема 19. Пусть $\exists t_0 \in (\alpha, \beta) : W(t_0) = 0$ и $a_{ij}(t)$ из 3.8 непрерывны на (α, β) .

Тогда $W(t) = 0$ на (α, β) и $\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n$ линейно зависимы на (α, β) .

Доказательство. Рассмотрим $\dot{\bar{x}} = A\bar{x}$,

$$\begin{array}{l} \bar{x}(t) \equiv 0 - \text{решение} \\ \bar{x}(t_0) = 0 \end{array}$$

Пусть $W(t_0) = 0 \Rightarrow \exists c_1, \dots, c_n :$

$$c_1 \bar{x}^1(t_0) + \dots + c_n \bar{x}^n(t_0) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \bar{x}(t) \equiv c_1 \bar{x}^1(t) + \dots + c_n \bar{x}^n(t) \\ \bar{x}(t_0) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \bar{x}(t) = c_1 \bar{x}^1(t) + \dots + c_n \bar{x}^n(t) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n - \text{линейно зависимая} \Rightarrow W(t) = 0.$$

□

Теорема 20 (Формула Лиувилля-Остроградского). Определитель Вронского для матрицы, составленной из решений 3.8, находится по Л-О:

$$W(t) = W(t_0) e^{\int_{t_0}^t \text{Tr} A(s) ds},$$

где trace – след, $\text{Tr} A(t) = a_{11}(t) + \dots + a_{nn}(t)$.

Доказательство.

$$W(t) = \sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} x_1^1 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{i-1}^1 & \dots & x_{i-1}^n \\ x_i^1 & \dots & x_i^n \\ x_{i+1}^1 & \dots & x_{i+1}^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n^1 & \dots & x_n^n \end{vmatrix} \ominus$$

Для произвольного x^i :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1^j \\ \vdots \\ \dot{x}_i^j \\ \vdots \\ \dot{x}_n^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1}(t) & \dots & a_{in}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^j \\ \vdots \\ x_i^j \\ \vdots \\ x_n^j \end{pmatrix},$$

$$\dot{x}_i^j = a_{i1}(t)x_1^j + a_{i2}(t)x_2^j + \dots + a_{in}(t)x_n^j = \sum_{k=1}^n a_{ik}x_k^j, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, n}.$$

$$\ominus \sum_{i=1}^n \left| \begin{array}{ccc} x_1^1 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^n a_{ik}x_k^1 & \cdots & \sum_{k=1}^n a_{ik}x_k^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n^1 & \cdots & x_n^n \end{array} \right| = \left| a_{ii}x_i^1 \quad a_{ii}x_i^2 \quad \cdots \quad a_{ii}x_i^n \right|,$$

$$\sum_{k=1}^n a_{ik}x_k^1 - a_{i1}x_1^1 - a_{i2}x_2^1 - \dots - a_{ii-1}x_{i-1}^1 - a_{ii+1}x_{i+1}^1 - \dots - a_{in}x_n^1 = \bigcirc a_{ii}x_i^1.$$

□