Комплексный Анализ

Основано на лекциях Мельникова Е.В.
Конспект написан Заблоцким Данилом

Весенний семестр 2024

Оглавление

Глава 1

Голоморфные функции

Лекция 1: Начало

от 15 фев 12:45

1.1 Комплексная плоскость

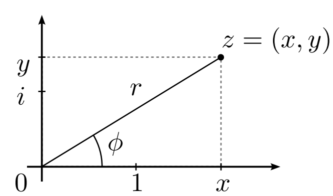
1.1.1 Комплексные числа

$\mathbb{R}^2 \coloneqq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$,

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) \coloneqq (x_1 + x_2, y_1 + y_2),$$
$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) \coloneqq (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

$$z = (x, y) = x + iy,\ \ x, y \in \mathbb{R}$$

$$(1,0) =: 1,$$
$$(0,1) =: i,$$
$$(0,0) =: 0$$



$$x =: \operatorname{Re} z$$
$$y =: \operatorname{Im} z$$

$$x = r \cdot \cos \phi$$
$$y = r \cdot \sin \phi$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} =: |z|,$$

$$\phi =: \arg z, \qquad \underbrace{0 \leqslant \arg z < 2\pi}_{\text{главное значение аргумента}}$$

$$\operatorname{Arg} z \coloneqq \arg z + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}, \qquad \overline{z} = x - iy$$

Формула Эйлера:	$e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi, \quad \forall\phi \in \mathbb{R}$
Тригонометрическая форма записи:	$z = \lvert z\rvert \cdot (\cos\arg z + i\sin\arg z)$
Показательная форма записи:	$z = \lvert z\rvert\, e^{i\arg z}$
Формула Муавра:	$z^n = r^n(\cos n\phi + i\sin n\phi)$
$e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy}$	$z^n = \lvert z\rvert^n\, e^{in\arg z}$
$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$	$z = re^{ir}, \quad z^n = z_0$

$$\sqrt[n]{z_0} = \sqrt[n]{|z_0|} \cdot e^{i\frac{\arg z_0 + 2\pi k}{n}}, \quad 0 \leqslant k \leqslant n-1.$$

Теорема 1. $\forall z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ справедливы равенства:

1. $z \cdot \overline{z} = |z|^2$
2. $\overline{(z_1 + z_2)} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
3. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
4. $\overline{\overline{z}} = z$
5. $\overline{z} = z \iff z \in \mathbb{R}$
6. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
7. $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$
8. $\big|\,|z_1| - |z_2|\,\big| \leqslant |z_1 - z_2|$
9. $\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 \pmod{2\pi}$
10. $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2 \pmod{2\pi}$

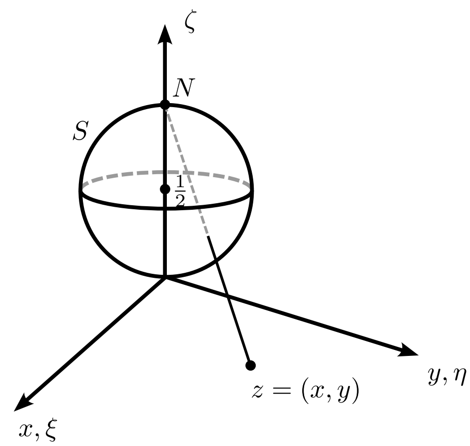


Рис. 1.1: Сфера Римана

$$\xi^2+\eta^2+\zeta-\zeta=0, \quad \begin{cases} \xi=\frac{x}{1+|z|^2} \\ \eta=\frac{y}{1+|z|^2} \\ \zeta=\frac{|z|^2}{1+|z|^2} \end{cases}.$$

$$P:\mathbb{C}\overset{\text{на}}{\to}S\setminus\{N\}, \quad P(z)=(\xi,\eta,\zeta).$$

$$\underset{\text{общее уравнение окружности}}{A(x^2+y^2)+Bx+Cy+D=0,\ A,B,C,D\in\mathbb{R}}$$

$$\begin{array}{rl} \gamma & \text{– окружность на } \mathbb{C}, \\ P(\gamma) & \text{– окружность на } S. \end{array}$$

$$|z|^2=x^2+y^2=\frac{\zeta}{1-\zeta}, \quad \begin{cases} x=\frac{\xi}{1-\zeta} \\ y=\frac{\eta}{1-\zeta} \end{cases}.$$

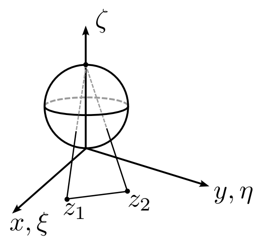
$$A\zeta+B\xi+C\eta+D(1-\zeta)=0, \quad \begin{array}{rl} \overline{\mathbb{C}} & :=\mathbb{C}\cup\{\infty\} \\ P(\infty) & :=N \end{array}.$$

1.1.2 Топология комплексной плоскости

$M_1, M_2 \in \mathbb{R}^3$,

$$\operatorname{dist}(M_1,M_2):=\sqrt{(\xi_1-\xi_2)^2+(\eta_1-\eta_2)^2+(\zeta_1-\zeta_2)^2},$$

$$d(z_1, z_2) \coloneqq |z_1 - z_2|\,,\ \ z_1, z_2 \in \mathbb{C},$$



$$\rho(z_1, z_2) \coloneqq \operatorname{dist}\big(P(z_1), P(z_2)\big),$$

$$B_\varepsilon(z_0) \coloneqq \big\{z \in \mathbb{C} :\ |z - z_0| < \varepsilon\big\}, \qquad P : \mathbb{C} \overset{\text{на}}{\to} S \setminus \{N\}.$$

Определение 1 (Окрестность точки)**.** Множество называется *окрестностью точки*, если оно содержит некоторый шарик с центром в этой точке.

Обозначение.

$$O_z, \quad z \in \overline{\mathbb{C}}.$$

Лекция 2: Продолжение

от 22 фев 12:45

$$\forall z \in \mathbb{C}\ d(z; \infty) \coloneqq +\infty, \qquad \begin{aligned} d :&\quad \mathbb{C}^2 \to \mathbb{R} \\ d :&\quad \mathbb{C}^2 \to \overline{\mathbb{R}} \\ \rho :&\quad \overline{\mathbb{C}}^2 \to \mathbb{R}, \quad \rho(z; \infty) \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Свойство (Свойства окрестностей)**.** $\forall z \in \overline{\mathbb{C}}$:

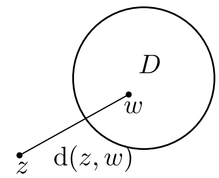
1. $\forall V \in O_z \quad z \in V$.
2. $\forall U, V \in O_z \quad U \cap V \in O_z$.
3. $\forall U \in O_z,\ \forall V \supset U \quad V \in O_z$.
4. $\forall V \in O_z,\ \exists U \in O_z :\ U \subset V\ \&\ \forall w \in U \quad U \in O_w$.

Определение 2 (Открытое множество)**.** Множество называется *открытым*, если оно является окрестностью каждой своей точки.

Определение 3 (Окрестность множества)**.** *Окрестностью множества* называется множество, являющееся окрестностью каждой точки исходного множества (V – окрестность множества A, если $\forall z \in A\ V \in O_z$).

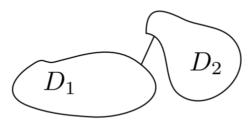
Определение 4. $D \subset \overline{\mathbb{C}},\ z \in \mathbb{C}$,

$$\operatorname{dist}(z, D) \coloneqq \inf_{w \in D} \mathrm{d}(z, w),$$



Определение 5. $D_1, D_2 \subset \overline{\mathbb{C}}$,

$$\operatorname{dist}(D_1, D_2) \coloneqq \inf_{z \in D_1,\ w \in D_2} \mathrm{d}(z, w),$$



Определение 6 (Внутренность)**.** Множество всех внутренних точек называется *внутренностью*.

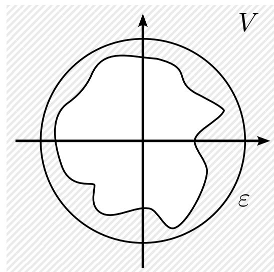
Обозначение.

$$\operatorname{int} D.$$

Определение 7 (Предельная точка множества)**.** Точка называется *предельной точкой множества*, если в любой ее окрестности есть точки множества, отличные от данной.

Замечание. Точка является предельной точкой множества на расширенной комплексной плоскости ($\overline{\mathbb{C}}$) $\iff$ $\forall$ ее окрестность содержит бесконечное число точек данного множества.

Определение 8 (Окрестность бесконечно удаленной точки)**.** Множество $V \subset \overline{\mathbb{C}}$ является *окрестностью бесконечно удаленной точки*, если $\exists \varepsilon > 0 : \left\{z \in \overline{\mathbb{C}} : \ |z| > \varepsilon\right\} \subset V$.



Определение 9 (Точка прикосновения множества)**.** Точка $z \in \overline{\mathbb{C}}$ расширенной комплексной плоскости называется *точкой прикосновения множества* $D \subset \overline{\mathbb{C}}$, если пересечение $\forall V \in O_z \quad V \cap D \neq \varnothing$.

Обозначение.

$$\operatorname{cl} D - \textit{замыкание} \text{ (closure)}$$

Определение 10 (Замкнутое множество)**.** Множество называется *замкнутым*, если его дополнение открыто.

Обозначение.

$$\partial D$$

Определение 11 (Граничная точка)**.** Точка называется *граничной точкой множества*, если в любой ее окрестности есть как точки множества, так и точки его дополнения.

Обозначение. Множество всех замкнутых подмножеств в $\overline{\mathbb{C}}$:

$$\operatorname{Cl} \overline{\mathbb{C}} \text{ (closed)}$$

Определение 12 (Компактное множество)**.** Множество в $\overline{\mathbb{C}}$ называется *компактным*, если $\forall$ его открытое покрытие имеет конечное подпокрытие.

Обозначение.

$$v \text{ – покрытие множества } D, \text{ если } D \underset{V\in v}{\subset} UV,$$

Обозначение.

$$\mathcal{P}(\overline{\mathbb{C}}) \text{ – совокупность всех подмножеств } \overline{\mathbb{C}}.$$

Критерий 1 (Компактности)**.** Подмножество $\mathbb{C}$ компактно $\iff$ оно замкнуто и ограничено.

Примечание. Множество ограничено, если оно содержится в некотором шаре.

Замечание. $\overline{\mathbb{C}}$ – компактно.

Определение 13. Последовательность $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ сходится к $z \in \mathbb{C}$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} :\ \forall n \geqslant n_0$

$$|z_n - z| < \varepsilon.$$

$$\mathrm{d}(z_n, z) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \qquad z_n \to \infty, \text{ если } \lim_{n\to\infty} |z_n| = \pm\infty.$$

$$z = \lim_{n\to\infty} z_n, \qquad z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} z.$$

Замечание.

$$z_n \to z \text{ в } \mathbb{C} \iff \begin{cases} \operatorname{Re} z_n \to \operatorname{Re} z \\ \operatorname{Im} z_n \to \operatorname{Im} z \end{cases} \text{ в } \mathbb{R},$$

$$|z_n - z| = \sqrt{(\operatorname{Re} z_n - \operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z_n - \operatorname{Im} z)^2} \geqslant |\operatorname{Re} z_n - \operatorname{Re} z|,$$

$$\operatorname{Re}(z_1 \pm z_2) = \operatorname{Re} z_1 \pm \operatorname{Re} z_2.$$

Критерий 2 (Коши)**.** Последовательность $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ сходится $\iff$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} :\ \forall n, m \geqslant n_0$

$$|z_n - z_m| < \varepsilon.$$

Критерий 3 (Коши в $\overline{\mathbb{C}}$). Последовательность $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \overline{\mathbb{C}}$ сходится $\iff \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}: \ \forall n, m \geqslant n_0$

$$\rho(z_n, z_m) < \varepsilon,$$

$$z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} z \iff \rho(z_n, z) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Критерий 4 (Компактности (расширенный)). Подмножество $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ компактно $\iff \forall$ его последовательность имеет сходящуюся подпоследовательность: $D \subset \overline{\mathbb{C}}\ \forall \{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset D\ \exists \{z_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$:

$$z_{n_k} \to z \in D.$$

Пусть $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} S_n.$$

Определение 14 (Числовой ряд). *Числовым рядом* называется формальная сумма членов.

Определение 15 (Абсолютно сходящийся числовой ряд). Числовой ряд называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|.$$

Критерий 5 (Коши (сходимости ряда)). $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ сходится $\iff \forall \varepsilon > 0\ \exists m \in \mathbb{N}: \ \forall n \geqslant m\ \forall k \in \mathbb{N}$

$$\underbrace{|z_{n+1} + z_{n+2} + \ldots + z_{n+k}|}_{|S_{n+k} - S_n|} < \varepsilon.$$

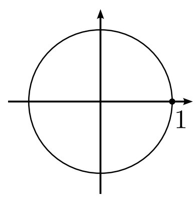
Следствие 1. Если ряд сходится, то его общий член стремится к 0.

Следствие 2. Каждый абсолютно сходящийся числовой ряд сходится.

1.1.3 Пути, кривые и области

Определение 16 (Путь)**.** Путем $\gamma : [a; b] \to \mathbb{C}$ называется непрерывное отображение $[a; b]$ в $\mathbb{C}$.

Пример. $\gamma(t) = e^{it}$,



$$0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$$

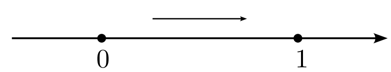
◇

Определение 17. $\gamma_1 : [a_1; b_1] \to \mathbb{C}$, $\gamma_2 : [a_2; b_2] \to \mathbb{C}$. $\gamma_1 \sim \gamma_2$, если $\exists$ возрастающая непрерывная функция $\phi : [a_1; b_1] \xrightarrow{\text{на}} [a_2; b_2]$:

$$\gamma_1(t) = \gamma_2\big(\phi(t)\big), \quad \forall t \in [a_1; b_1].$$

Пример.

$$\begin{array}{ll} \gamma_1(t) = t & 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ \gamma_2(t) = \sin t & 0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2} \\ \gamma_3(t) = \sin t & 0 \leqslant t \leqslant \pi \\ \gamma_4(t) = \cos t & 0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2} \end{array}$$



$\phi(t) = \arcsin t$,

$$\gamma_1(t) = \gamma_2\left(\phi(t)\right).$$

◇

Литература

[1] Шабат – «Введение в комплексный анализ, 1976» (том 1)

[2] Привалов – «Введение в ТФКП, 1967»

[3] Бицадзе – «Основы теории аналитических функций комплексного переменного, 1984»

[4] Волковыский, Лунц, Араманович – «Сборник задач по ТФКП», 1975»

[5] Гилев В.М. – «Основы комплексного анализа. Ч.1», 2000»

[6] Исапенко К.А. – «Комплексный анализ в примерах и упражнениях (Ч.1, 2017, Ч.2, 2018)»

[7] Мещеряков Е.А., Чемеркин А.А. – «Комплексный анализ. Практикум»

[8] Боярчук А.К. – «Справочное пособие по высшей математике» (том 4)