Дифференциальные уравнения

Данил Заблоцкий

17 января 2024 г.

Оглавление

Глава 1

Основные понятия

Лекция 1: Начало

от 5 сен 10:28

1.1 Уравнение 1-го порядка

Определение 1 (Дифференциальное уравнение n-го порядка)**.** *Дифференциальным уравнением n-го порядка* называется уравнение вида:

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad x \in \underbrace{(a, b)}_{[a,b),\ [a,b],\ (a,b]} \subset \mathbb{R}, \tag{1.1}$$

где $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$.

Определение 2 (Дифференциальное уравнение, разрешенное относительно старшей производной)**.** *Дифференциальным уравнением, разрешенным относительно старшей производной* называется уравнение вида:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \quad x \in (a; b) \tag{1.2}$$

Определение 3 (Решение дифференциального уравнения)**.** *Решением дифференциального уравнения* 1.1 или 1.2 называется n раз дифференцируемая функция $y = \phi(x)$ на интервале (a, b), если при подстановке она обращает уравнение в тождество на этом интервале.

Пример.

$$y = \frac{1}{x+1}, \quad (-\infty; -1) \cup (-1; -\infty),$$

где $(-\infty; -1)$ – первое решение, а $(-1; -\infty)$ – второе решение.

Примечание (Предмет дифференциального уравнения).

1. Решение дифференциального уравнения.
2. Существует ли решение на $(a;b)$?
3. Единственность, $y(x_0) = y_0$ (задача Коши).
4. О продолжении.
5. Свойства решения:
   - ограниченность
   - монотонность
   - поведение решения вблизи границ ($x \to +\infty$)
   - нули функции на $(a;b)$

Определение 4 (Дифференциальное уравнение 1-го порядка). *Дифференциальным уравнением 1-го порядка* называется уравнение вида:

$$F(x, y, y') = 0, \quad x \in (a; b) \tag{1.3}$$

(неразрешенное относительно y')

Определение 5 (Дифференциальное уравнение, разрешеное относительно первой производной). *Дифференциальным уравнением 1-го порядка, разрешенным относительно первой производной*, называется уравнение вида:

$$y' = f(x, y), \quad x \in (a; b) \tag{1.4}$$

Определение 6 (Решение дифференциального уравнения 1.3 и 1.4). *Решением дифференциального уравнения* 1.3 и 1.4 называется дифференцируемая функция $y = \phi(x)$, обращающая уравнение в тождество на этом интервале.

Пример. $y' = -\frac{x}{y}$ имеет решение $x^2 + y^2 = c$, где c - произвольная константа, $c > 0$.

Определение 7 (Поле направлений). Сопоставим любой точке $(x_0, y_0) \to y'(x_0) = f(x_0, y_0) = \tan\alpha$ направления l. Семейство (совокупность) направлений l дает *поле направлений.*

Определение 8 (Интегральная кривая). Кривая, касающаяся в каждой своей точке поля направлений, называется *интегральной кривой*:

$$y = \phi(x, c) - \text{интергральная кривая} \equiv \text{график решения}$$

Определение 9 (Изоклины)**.** Кривые, вдоль которых поле направлений постоянно, называется *изоклинами*.

Пример. $y' = y - x^2$

Напишем уравнение изоклин: $y - x^2 = c$ (заменяем y' на c)

1. $c = 0 \Rightarrow y - x^2 = 0 \Rightarrow y = x^2$ (уравнение изоклины)

   $\tan\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0; \quad y\ const.$

2. $c = 1 \Rightarrow y - x^2 = 1 \Rightarrow y = x^2 + 1$

   $\tan\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 45°; \quad y \nearrow$

3. $c = 2 \Rightarrow y - x^2 = 2 \Rightarrow y = x^2 + 2$

   $\tan\alpha = 2 \Rightarrow \alpha = \arctan 2; \quad y \nearrow$

4. $c = -1 \Rightarrow y - x^2 = -1 \Rightarrow y = x^2 - 1$

   $\tan\alpha = -1 \Rightarrow \alpha = -45°; \quad y \searrow$

5. $c = -2 \Rightarrow y - x^2 = -2 \Rightarrow y = x^2 - 2$

   $\tan\alpha = -2 \Rightarrow \alpha = -\arctan 2; \quad y \searrow$

$$y' = 0$$
$$y' > 0, \quad y > x^2$$
$$y' < 0, \quad y < x^2$$

Определение 10 (Общее решение)**.** *Общее решение* – совокупность функций, которая содержит все решения уравнения.

Если решение задается функцией $y = \phi(x, c)$ или $\psi(x, y, c) = 0$, то общее решение должно удовлетворять условиям:

1. При любом c формула дает решение уравнение.

2. Любое решение уравнения находится по формуле при некотором $c = c_0$.

Определение 11 (Частное решение)**.** *Частное решение* определяется из общего при некотором $c = c_0$.

Пример. $y' = x \Rightarrow y = \frac{x^2}{2} + c$ – общее решение,

$$\begin{cases} c = 0: & y = \frac{x^2}{2}, \\ c = 1: & y = \frac{x^2}{2} + 1 \end{cases} \quad \text{– частное решение.}$$

1.2 Уравнения с разделяющимися переменными

Определение 12 (Уравнения с разделяющимися переменными). *Уравнениями с разделяющимися переменными* называются уравнения вида:

$$y' = f(x) \cdot g(y) \text{ или } f_1(x) \cdot g_1(y) \cdot dx + f_2(x) \cdot g_2(y) \cdot dy = 0,$$

$$\text{где } \begin{array}{l} f,\ f_1,\ f_2 \text{ зависят от } x, \\ g,\ g_1,\ g_2 \text{ зависят от } y \end{array}$$

Примечание (Алгоритм).

$$\left[\begin{array}{ll} g(y) = 0 & \Rightarrow y = c \\ \begin{cases} g(y) & \neq 0 \\ \frac{y'}{g(y)} & = f(x) \end{cases} & \Rightarrow \int \frac{y'dx}{g(y)} = \int f(x)dx \overset{dy=y'dx}{\Rightarrow} \end{array}\right.$$

$$\overset{dy=y'dx}{\Rightarrow} \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ll} y & = \phi(x,c) \\ \psi(x,y,c) & = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = c_1 \\ \left[\begin{array}{l} y = \phi(y, c_2) \\ \psi(x,y,c_2) = 0 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Пример. $y' = xy^2$

$$\left[\begin{array}{l} y = 0 \\ \begin{cases} \frac{dy}{y^2} & = xdx \\ y & \neq 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y^2} = \int xdx \Rightarrow -\frac{1}{y} = \frac{x^2}{2} + C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = -\frac{2}{x^2+2C},\ C \in \mathbb{R} \\ y = 0 \end{array}\right.$$

Теорема 1 (Задача Коши).

$$\begin{cases} y' & = f(x,y) \\ y(x_0) & = y_0 \end{cases} \tag{1.5}$$

$$f(x,y) \in C(D), \quad (x_0, y_0) \in D$$

Пример. $y' = \sqrt{y}$

$$\left[\begin{array}{l} y = 0 \\ \begin{cases} \frac{dy}{\sqrt{y}} & = \int dx \\ y & \neq 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow 2\sqrt{y} = x + C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \left(\frac{x+c}{2}\right)^2 \text{ при } x + c \geqslant 0$$

1. $y = 0 \cup$ парабола AB_1D_1;
2. x_0 на кривой $y = 0 \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ ABD \\ AB_1D_1 \\ AB_2D_2 \end{array}\right.$

Ответ: $\left[\begin{array}{l} y = 0 \\ y = \left(\frac{x+c}{2}\right)^2, \quad x + c \geqslant 0 \end{array}\right.$

Определение 13 (Точка единственности, неединственности решения, особое решение). Точка (x_0, y_0) называется *точкой единственности решения* $y = \phi(x)$, если через нее не проходит другое решение, не совпадающее с решением $y = \phi(x)$ ни в какой окрестности этой точки.

Остальные точки называются *точками неединственности.*

Решение, которое содержит точки неединственности, называется *особым решением.*

Теорема 2 (∃ и !-ть решения задачи Коши). Пусть $f(x, y)$ в 1.5:

1. Определена и непрерывна в прямоугольнике в прямоугольнике:
$$\Pi = \left\{(x, y): \ |x - x_0| \leqslant a, \ |y - y_0| \leqslant b\right\}$$
2. Удовлетворяет условию Липшица по y в Π:
$$\left(f'_y(x, y) \text{ непрерывна в } \Pi\right)$$

Тогда $\exists!$ решение задачи 1.5 в окрестности точки x_0:

$$(x_0 - h; x_0 + h),$$

где $h = \min\left(a; \frac{b}{M}\right)$, $M = \max|f(x, y)|$, $(x, y) \in \Pi$.

Определение 14 (Функция, удовлетворяющая условию Липшица). $f(x, y)$ *удовлетворяет условию Липшица* по переменной y, если $\exists L > 0$ такая, что $\forall (x, y_1)$ и (x, y_2) имеет место соотношение:

$$\left|f(x, y_1) - f(x, y_2)\right| \leqslant L \cdot |y_1 - y_2|$$

Если $f'_y(x, y)$ – непрерывна в Π, то выполняется условие Липшица: $\forall (x, y_1),\ (x, y_2) \in \Pi,\ \exists \widetilde{y} \in [y_1; y_2]$:

$$\left|f(x, y_1) - f(x, y_2)\right| \leqslant \left|f'_y(x, \widetilde{y}) \cdot (y_1 - y_2)\right| \leqslant \underbrace{\left|f'_y(x, \widetilde{y})\right|}_{\leqslant L} \cdot |y_1 - y_2| = L \cdot |y_1 - y_2|$$

Пример. $y' = \frac{1}{y^2}$, $f(x,y) = \frac{1}{y^2}$, $f'_y = \frac{2}{y^3}$

$$\int y^2 dy = \int y dx \Rightarrow \frac{y^3}{3} = x + c \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} y &= \sqrt[3]{3(x+c)} \\ y(x_0) &= y_0 \end{cases} \Rightarrow y = \sqrt[3]{3(x-x_0)} + y_0^3$$

Пример. $y' = signx = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$, $y = |x|$

Пример. $y' = y^2 - 2y + 1 = (y-1)^2$

$$\left[\begin{array}{l} y = 1 \\ \begin{cases} y &\neq 1 \\ \frac{dy}{(y-1)^2} &= \int dx \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow -\frac{1}{y-1} = x + C \Rightarrow y = 1 - \frac{1}{x+C}$$

$$\left[\begin{array}{l} y = 1, \\ y = 1 - \frac{1}{x+C_1}, \ (-\infty; -C_1), \\ y = 1 - \frac{1}{x+C_2}, \ (-C_2; +\infty) \end{array}\right.$$

Лекция 2: Продолжение

от 15 окт 08:47

1.3 Особые решения

Примечание.

$$\begin{cases} y' &= f(y), \ f \in C(D), \ D \subset \mathbb{R}, \\ y(x_0) &= y_0 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} f(y) = 0 \quad \Rightarrow y = c - ? \\ \begin{cases} f(y) &\neq 0, \\ \int \frac{dy}{f(y)} &= \int dx \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{ll} y &= \phi(x, C), \\ \psi(y, x, C) &= 0 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Для $\forall$ точки $x \in \{y = C\}$ $\exists$ точка (x_1, y_1) и интегральная кривая, проходящая через точку (x_1, y_1), которая пересекает прямую $y = C$ в точке x $\big(x \equiv (x, C)\big)$.

Проинтегрируем на отрезке $[x_1; x]$:

$$\int_{y_1}^{C} \frac{dy}{f(y)} = \int_{x_1}^{x} dx \Leftrightarrow \int_{y_1}^{C} \frac{dy}{f(y)} = x - x_1 \Leftrightarrow \underbrace{x}_{\text{конечная}} = x_1 + \underbrace{\int_{y_1}^{C} \frac{dy}{f(y)}}_{\text{конечный}},$$

(несобственный интеграл сходится)

Примечание (Критерий). Решение $y = C$ дифференциального уравнения $y' = f(y)$, $f \in C(D)$ такое, что $f(C) = 0$ называется *особым* $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \int_{y_1}^{C} \frac{dy}{f(y)} < \infty \quad \text{(несобственный интеграл сходится)}$$

Пример. $y' = 3y^{\frac{2}{3}}$

1. Непрерывно.
2. $f'_y = 2y^{-\frac{1}{3}}$ – разрывна в точке 0 (условие Липшица не выполнено?).

$$\left[\begin{array}{ll} y & = 0 \ ? \\ \int \frac{dy}{3y^{\frac{2}{3}}} & = \int dx \Rightarrow y^{\frac{1}{3}} = x + C \end{array}\right.$$

$$\int_{y_1}^{0} \frac{dy}{3y^{\frac{2}{3}}} = y^{\frac{1}{3}}\Big|_{y_1}^{0} = 0 - y_1^{\frac{1}{3}} < +\infty \overset{\text{по критерию}}{\Rightarrow} y = 0 - \text{особое}$$

Пример. Найти особое решение $y' = \begin{cases} y \cdot \ln y, & y > 0 \\ 0, & y = 0 \end{cases}$, $D = [0; +\infty)$:

$$f(y) = \begin{cases} y \cdot \ln y, & y > 0 \\ 0, & y = 0 \end{cases}$$

1. Непрерывно.

$$\lim_{y \to +0} (y \cdot \ln y) = \lim_{y \to +0} \frac{\ln y}{\frac{1}{y}} = \lim_{y \to +0} \frac{\frac{1}{y}}{\frac{1}{y^2}} = - \lim_{y \to +0} = 0$$

2. Условие Липшица:

$$\left| f(y_1) - f(y_2) \right| \leqslant L \cdot |y_1 - y_2|, \qquad \begin{array}{l} y_1 \in (0; +\infty), \\ y_2 = 0 \end{array}$$

$$\left| f(y_1) - f(y_2) \right| = |y_1 \cdot \ln y_1 - 0| \leqslant |y_1| \cdot |\ln y_1| \leqslant |y_1| \cdot L,$$

то есть $|\ln y_1| \leqslant L$.

Для $\forall L > 0 \ \exists y_1^*$ близкий к 0 и такой, что $|\ln y_1^*| > L$.

3. $f(y) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ y = 1 \end{array}\right.$

(a) $y = 0$:

$$\int_{y_1}^{0} \frac{dy}{y \cdot \ln y} = \int_{y_1}^{0} \frac{d(\ln y)}{\ln y} = \ln|\ln y|\Big|_{y_1}^{0} = \infty - \ln|\ln y_1| = \infty \Rightarrow$$

$\Rightarrow y = 0$ не является особым.

(b) $y = 1$:

$$\int_{y_1}^{1} \frac{dy}{y \cdot \ln y} = \ln|\ln y|\Big|_{y_1}^{1} = -\infty - \ln|\ln y_1| = -\infty \Rightarrow$$

$\Rightarrow y = 1$ не является особым.

Пример. Найти особое решение $y' = \begin{cases} y \cdot \ln^2 y, & y > 0 \\ 0, & y = 0 \end{cases}$, $D = [0; +\infty)$:

$$f(y) = \begin{cases} y \cdot \ln^2 y, & y > 0 \\ 0, & y = 0 \end{cases}$$

1. Непрерывно (аналогично).
2. Условие Липшица (аналогично).
3. $f(y) = 0 \Rightarrow y \cdot \ln^2 y = 0 \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ y = 1 \end{array} \right.$

(a) $y = 0$:

$$\int_{y_1}^{0} \frac{dy}{y \cdot \ln^2 y} = \int_{y_1}^{0} \frac{d(\ln y)}{\ln^2 y} = \frac{1}{\ln y}\Big|_{y_1}^{0} = 0 + \frac{1}{\ln y_1} \Rightarrow$$

$\Rightarrow y = 0$ – особое.

(b) $y = 1$:

$$\int_{y_1}^{1} \frac{dy}{y \cdot \ln^2 y} = -\frac{1}{\ln y}\Big|_{y_1}^{1} = -\infty + \frac{1}{\ln y_1} \text{ – расходится } \Rightarrow$$

$\Rightarrow y = 1$ не является особым.

Глава 2

Методы интегрирования дифференциальных уравнений 1-го порядка

2.1 Однородные уравнения

Определение 15 (Однородное уравнение первого порядка)**.** *Однородным уравнением первого порядка* называется уравнение вида:

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right), \quad f \in C(D) \tag{2.1}$$

или:

$$y' = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}, \tag{2.2}$$

где $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ являются однородными функциями одного и того же порядка.

Определение 16 (Однородная функция порядка k)**.** *Однородной функцией порядка k* называется функция:

$$P(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k \cdot P(x,y), \quad \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda \neq 0$$

Пример. $P(x,y) = x^2 - 2xy + 7y^2$

$$P(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)^2 - 2(\lambda x)(\lambda y) + 7(\lambda y)^2 = \lambda^2(x^2 - 2xy + 7y^2)$$

Пример. $x(x^2+y^2)dy = y(y^2 - xy + x^2)dx$

$$\underbrace{x^3 + xy^2}_{Q(x,y)}, \quad \underbrace{y^3 - xy^2 + yx^2}_{P(x,y)}$$

Примечание (Замена переменной). $t = \frac{y}{x} \Rightarrow y = t \cdot x$

$y = t(x) \cdot x \Rightarrow y' = t' \cdot x + t$ – подставим в 2.1 :
$t' \cdot x = f(t) - t$ – уравнение с разделяющей переменной (РП)

$$\frac{dt}{dx} x = f(t) - t$$

$$\left[\begin{array}{l} f(t) - t = 0 \\ \begin{cases} f(t) - t & \neq 0 \\ \int \frac{dt}{f(t)-t} & = \int \frac{dx}{x} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} t = \phi(x,C) & \Rightarrow y = x \cdot \phi(x,C) \\ \psi(t,x,C) = 0 & \Rightarrow \psi(\frac{y}{x}, x, C) = 0 \end{array}\right.$$

$t'x = 0 \Rightarrow t' = 0 \Rightarrow t = C \Rightarrow y = Cx$ – решение при C : $f(C) - C = 0$.

Изоклины: $f(\frac{y}{x}) = const$
$\frac{y}{x} = C \Rightarrow f(C) = const$
$y = Cx$ – изоклины уравнения 2.1

1. (a) Уравнение вида $y' = f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$ сводится к однородному с помощью замены:

   $$\begin{cases} x = \xi + \alpha \\ y = \eta + \beta \end{cases}, \quad (\alpha;\beta) \text{ – решение системы } \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

   (b) Прямые параллельны, то есть $a_1x + b_1y = k(a_2x + b_2y)$.
   Замена переменной $t = a_2x + b_2y$ и привести к уравнению с РП.

2. Замена переменной $y = t^m$. Подставить эту замену в уравнение и из условия однородности выбрать m.

Пример. $ydx + x(2xy + 1)dy = 0, \quad ydx + (2x^2 + x)dy = 0$

$$y = t^m \Rightarrow t^m dx + (2x^2t^m + x) \cdot mt^{m-1}dt = 0$$

$$m = 2m + 1 = m$$

$$m = -1 \Rightarrow y = t^{-1} = \frac{1}{t}$$

$$\frac{dx}{t} + \left(\frac{2x^2}{t} + x\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt = Q \Rightarrow$$

$$\Rightarrow dx - \frac{x}{t}\left(\frac{2x}{t} + 1\right)dt = 0 \text{ – однородное уравнение} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{x}{t}\left(\frac{2x}{t} + 1\right) \equiv f\left(\frac{x}{t}\right)$$

Замена переменной: $u = \frac{x}{t} \Rightarrow x = ut \Rightarrow dx = udt + tdu$

$$udt + tdu - u(2u + t)dt = 0$$
$$tdu - 2u^2 dt = 0, \quad t \neq 0, \; u^2 \neq 0$$
$$\int \frac{du}{2u^2} = \int \frac{dt}{t}$$
$$-\frac{1}{2u} = \ln|t| + C$$

$$\begin{cases} u = \frac{x}{t} \\ t = \frac{1}{y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = xy \\ t = \frac{1}{y} \end{cases}, \qquad \begin{matrix} -\frac{1}{xy} = \ln\left(\frac{1}{y}\right)^2 + C \\ -\frac{1}{xy} = \ln y^2 + C \end{matrix}$$

$$\ln y^2 - \frac{1}{xy} = C$$

$$u = 0 \Rightarrow x \cdot y = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 - \text{решение} \\ y = 0 - \text{решение} \end{array} \right.$$

Ответ: $\ln y^2 - \frac{1}{xy} = C, \quad x = 0, \; y = 0$

2.2 Линейные уравнения 1-го порядка

Определение 17 (Линейное уравнение 1-го порядка)**.** *Линейным уравнением 1-го порядка* называется уравнение вида:

$$a_0(x)y' + a_1(x)y = b(x), \tag{2.3}$$

$$a_0(x)y' + a_1(x)y = 0, \tag{2.4}$$

где $b(x), a_0(x), a_1 \in C(\alpha; \beta), \; a_0(x) \neq 0, \quad -\infty \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant +\infty$.

Примечание (Задача Коши)**.** $y(x_0) = y_0$

Теорема 3 ($\exists$ и !)**.**

$$y' = \underbrace{\frac{b(x)}{a_0(x)} - \frac{a_1(x)}{a_0(x)} y}_{f(x,y)}$$

$f \in C\big((\alpha; \beta) \times (-\infty; +\infty)\big)$.

2. $f'_y = -\frac{a_1(x)}{a_0(x)}$

Однородное уравнение 2.4.

$$y = 0 - \text{решение: } y = c \cdot e^{-\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)} dx}$$

Определение 18 (Линейное уравнение 1-го порядка). *Линейным уравнением 1-го порядка* называется уравнение вида:

$$y' + p(x) \cdot y = q(x), \tag{2.5}$$

$$y' + p(x) \cdot y = 0, \tag{2.6}$$

где $p(x), q(x) \in C(\alpha; \beta)$.

Примечание (Свойства 2.6).

1. Пусть $y_1(x)$ – решение 2.6 $\Rightarrow k \cdot y_1$ – решение 2.6, $k \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$.
2. Если y_1, y_2 – решения 2.6 $\Rightarrow y_1 + y_2$ – решение 2.6 ($k_1 y_1 + k_2 y_2$ – решение).
3. $y = 0$ – решение 2.6.

Утверждение. Решения 2.6 образуют линейное пространство:

$$y' + p(x)y = 0$$

$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx$$
$$\ln|y| = -\int p(x)dx + \ln|C|$$
$$(\star)\ y = C \cdot e^{-\int p(x)dx}$$

$$\begin{cases} y' + p(x)y &= 0 \\ y(x_0) &= y_0 \end{cases}, \quad [x_0; x]$$
$$\int_{x_0}^{x} \frac{y'(s)}{y(s)} ds = -\int_{x_0}^{x} p(s)dx$$

$$\int_{y_0}^{y} \frac{dy}{y} = -\int_{x_0}^{x} p(s)dx \Rightarrow \ln|y| - \ln|y_0| = -\int_{x_0}^{x} p(x)dx \Rightarrow$$
$$(\star\star)\ \Rightarrow y = y_0 \cdot e^{-\int_{x_0}^{x} p(x)dx},$$

при $C = y_0$.

4. Если y – частное решение, то $C \cdot y$ – общее решение 2.6.

Лекция 3: Продолжение

от 1 нояб 10:30

2.3 Интегрирующий множитель

Примечание. $\underset{\overset{\shortparallel}{P}}{y}dx - \underset{\overset{\shortparallel}{Q}}{x}dy = 0 \,\Big|\, \cdot \frac{1}{y^2}$

$$\begin{aligned} \frac{\delta P}{\delta y} &= y'_y = 1 \\ &\nparallel \\ \frac{\delta Q}{\delta x} &= \frac{\delta}{\delta x}(-x) = -1 \end{aligned}$$

$$\frac{ydx - xdy}{y^2} = 0 \Rightarrow d\left(\frac{x}{y}\right) = 0$$

$$\frac{x}{y} = C, \quad y = 0$$

Определение 19 (Интегрирующий множитель). Пусть

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{2.7}$$

не является уравнением в полных дифференциалах, $M, N \in C^2(D)$, D – односвязная область в $\mathbb{R}^2$.

$M(x,y)$ называется *интегрирующим множителем* уравнения 2.7, если

$$\mu(x,y)M(x,y)dx + \mu(x,y)N(x,y)dy$$

является полным дифференциалом некоторой функции $\frac{\delta P}{\delta y} = \frac{\delta Q}{\delta x}$.

Примечание. *I*. $\mu(x,y) \in C^2(D)$

$$\mu(x,y) \cdot M(x,y) = P(x,y), \quad \mu(x,y) \cdot N(x,y) = Q(x,y)$$

$$\frac{\delta\mu(x,y)}{\delta y}M(x,y) + \mu(x,y) \cdot \frac{\delta M(x,y)}{\delta y} = \frac{\delta\mu(x,y)}{\delta x}N(x,y) + \mu(x,y) \cdot \frac{\delta ?}{\delta x}$$

1. $\mu = \mu(x)$.
2. $\mu = \mu(x)$.
3. $\mu = \mu(\omega(x,y))$.

2.4 Методы построения интегрирующего множителя

Примечание.

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{2.8}$$

$$M, N \in C^2(D), \quad \frac{\delta N}{\delta x} \neq \frac{\delta M}{\delta y}, \quad \mu(x,y) \in C^1(D):$$

$$\underset{P(x,y)}{\underset{\parallel}{\mu(x,y)\cdot M(x,y)}}dx+\underset{Q(x,y)}{\underset{\parallel}{\mu(x,y)\cdot N(x,y)}}dy=0 \text{ -- уравнение в ПД?}$$

$$\frac{\delta Q}{\delta x}=\frac{\delta P}{\delta y}$$

$$\frac{\delta\mu(x,y)}{\delta x}\cdot N(x,y)+\mu(x,y)\cdot\frac{\delta N(x,y)}{\delta x}=$$
$$=\frac{\delta\mu(x,y)}{\delta y}\cdot M(x,y)+\mu(x,y)\cdot\frac{\delta M(x,y)}{\delta y}$$

1.

$$\mu=\mu(x)\Rightarrow\frac{\delta\mu}{\delta y}=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\mu'(x)\cdot N(x,y)+\mu(x)\cdot\frac{\delta N}{\delta x}=\mu(x)\cdot\frac{\delta M}{\delta y}$$

$$\underbrace{\frac{\mu'(x)}{\mu(x)}}_{\text{зависит от } x}=\underbrace{\frac{\frac{\delta M}{\delta y}-\frac{\delta N}{\delta x}}{N}}_{\text{зависит от } x}=F(x)$$
$$(M\neq 0 \text{ и } N\neq 0)$$

$$\int\frac{\mu'(x)}{\mu(x)}dx=\int F(x)dx$$

$$\ln|\mu(x)|=\ln c+\int F(x)dx,\quad \mu(x)=c\cdot e^{\int F(x)dx}\underset{c=1}{=}e^{\int F(x)dx}$$

2.

$$\mu=\mu(y)\Rightarrow\frac{\delta\mu}{\delta x}=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\mu'(y)\cdot M(x,y)+\mu(y)\cdot\frac{\delta M}{\delta y}=\mu(y)\cdot\frac{\delta N}{\delta x}$$

$$\underbrace{\frac{\mu'(y)}{\mu(y)}}_{\text{зависит от } y}=\underbrace{\frac{\frac{\delta N}{\delta x}-\frac{\delta M}{\delta y}}{M}}_{\text{зависит от } y}=F(y)$$

$$\int \frac{\mu'(y)}{\mu(y)}dy = \int F(y)dy$$

$$\ln|\mu(y)| = \ln c + \int F(y)dy, \quad \mu(y) = c\cdot e^{\int F(y)dy} \underset{c=1}{=} e^{\int F(y)dy}$$

3.

$$\mu = \mu\big(\omega(x,y)\big)$$

$$\frac{\delta\mu}{\delta\omega}\cdot\frac{\delta\omega}{\delta x}\cdot N + \mu\cdot\frac{\delta N}{\delta x} = \frac{\delta\mu}{\delta\omega}\cdot\frac{\delta\omega}{\delta y}\cdot M + \mu\cdot\frac{\delta M}{\delta y}$$

$$\frac{\frac{\delta\mu}{\delta\omega}}{\mu(\omega)} = \frac{\frac{\delta M}{\delta y} - \frac{\delta N}{\delta x}}{N\cdot\frac{\delta\omega}{\delta x} - M\cdot\frac{\delta\omega}{\delta y}} = F(\omega) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \mu(\omega) = e^{\int F(\omega)d\omega}$$

Пример.

$$(x^2+y^2+x)dx + ydy = 0, \quad M = x^2+y^2+x, \quad N = y$$

$$\begin{aligned} \tfrac{\delta N}{\delta x} &= 0 \\ &\not\Updownarrow \\ \tfrac{\delta M}{\delta y} &= 2y \end{aligned}$$

$$\mu = \mu(x) =?, \quad \mu(x^2+y^2+x)dx + \mu ydy = 0,$$

$$P = \mu(x^2+y^2+x), \quad Q = \mu y,$$

$$\frac{\delta P}{\delta y} = \frac{\delta Q}{\delta x}, \quad \frac{\delta M}{\delta y}(x^2+y^2+x) + \mu\cdot 2y = \frac{\delta\mu}{\delta x}\cdot y + \mu\cdot 0,$$

$$\frac{\mu'(x)}{M} = \frac{2y}{y} = 2, \quad \mu(x) = e^{2x},$$

$$e^{2x}(x^2+y^2+x)dx + e^{2x}\cdot ydy = 0,$$

$$P = e^{2x}(x^2+y^2+x), \quad Q = e^{2x}\cdot y,$$

$$\frac{\delta P}{\delta y} = 2e^{2x}\cdot y = \frac{\delta Q}{\delta x},$$

$$\begin{cases} \frac{\delta u}{\delta x} = e^{2x}(x^2+y^2+x) \\ \frac{\delta u}{\delta y} = e^{2x}\cdot y \end{cases} \Rightarrow u(x,y) = e^{2x}\cdot\frac{y^2}{2} + c(x),$$

$$u'_x = 2e^{2x}\cdot\frac{y^2}{2} + c'(x) = e^{2x}(x^2+y^2+x), \quad c'(x) = e^{2x}(x^2+x)$$

$$
\begin{aligned}
c(x) = \frac{e^{2x}}{2}(x^2+x) - \int \frac{e^{2x}}{2}(2x+1)dx \quad &= \\
= \frac{e^{2x}}{2}(x^2+x) - \frac{e^{2x}}{4}(2x+1) \quad &+ \quad \int \frac{e^{2x}}{4}\cdot 2dx = \\
= \frac{e^{2x}}{2}(x^2+x) \quad &- \quad \frac{e^{2x}}{4}(2x+1) + \frac{e^{2x}}{4} + C
\end{aligned}
$$

$$c(x) = \frac{e^{2x}}{2}\cdot x^2 + C$$

$$u(x,y) = e^{2x}\cdot \frac{x^2+y^2}{2} + C = \widetilde{C}$$

$$e^{2x}\cdot\frac{x^2+y^2}{2} = C \text{ -- общий интеграл}$$

Примечание (Свойства интегрирующего множителя (ИМ)).

1. Если μ_0 – ИМ, то $\forall c \in \mathbb{R} \quad \mu_1 = C\cdot\mu_0$ – тоже является ИМ.
2. Пусть μ_0 – ИМ уравнения (1.12), V_0 – соответствующий ему интеграл, то есть:
$$\mu_0\cdot Mdx + \mu_0\cdot Ndx = dV_0,$$
тогда для произвольной функции $\phi\in C^1(D),\ \phi\neq 0,\ \mu_1 = \mu_0\cdot\phi(V_0)$ – так же является ИМ.
$$
\begin{aligned}
Mdx + Ndy = 0, \quad \mu_1\cdot Mdx + \mu_1\cdot Ndy &= \\
= \mu_0\cdot\phi(V_0)\cdot Mdx + \mu_0\cdot\phi(V_0)\cdot Ndy &= \\
= \phi(V_0)(\mu_0\cdot Mdx + \mu_0\cdot Ndy) = \phi(V_0)dV_0 &= \\
= d\left(\int \phi(V_0)dV_0\right) = dV_1, \quad \int \phi(V_0)dV_0 = V_1
\end{aligned}
$$
3. Если μ_1 и μ_2 – интегральные множители уравнения 2.8, тогда:
$$\mu_2 = \mu_1\cdot\phi(V_1),$$
где ϕ – произвольная функция класса C^1, V_1 – соответствующий интеграл для μ_1.

Следствие. Если μ_1 и μ_2 – интегральные множители уравнения 2.8 и $\frac{\mu_1}{\mu_2}\neq const$, тогда $\frac{\mu_1}{\mu_2}$ – является интегралом для уравнения 2.8.

Теорема 4. Если уравнение 1-го порядка имеет общий интеграл $u(x,y) = C$, то оно имеет интегрирующий множитель.

Доказательство.

$$u(x,y) = C \begin{cases} Mdx + Ndy = 0 \\ du \equiv \frac{\delta u}{\delta x}dx + \frac{\delta u}{\delta y}dy = 0 \end{cases}$$

(dx, dy) – ненулевое решение если определитель равен 0, то есть

$$\begin{vmatrix} M & N \\ \frac{\delta u}{\delta x} & \frac{\delta u}{\delta y} \end{vmatrix} = M \cdot \frac{\delta u}{\delta y} - N \cdot \frac{\delta u}{\delta x} = 0$$

$$M \cdot \frac{\delta u}{\delta y} = N \cdot \frac{\delta u}{\delta x} \quad \Big| \cdot (MN) \Rightarrow \frac{1}{N} \cdot \frac{\delta u}{\delta y} = \frac{1}{M} \cdot \frac{\delta u}{\delta x} \stackrel{?}{=} \mu,$$

$$\mu \cdot Mdx + \mu \cdot Ndy = 0, \quad \frac{1}{M}\frac{\delta u}{\delta x} \cdot Mdx + \frac{1}{N} \cdot \frac{\delta u}{\delta y} \cdot Ndy = 0,$$

$$\frac{\delta u}{\delta x}dx + \frac{\delta u}{\delta y}dy = 0 \Rightarrow du = 0$$

□

Примечание (Еще один способ построения интегрального множителя)**.**

$$\underbrace{M_1dx + N_1dy}_{I} + \underbrace{M_2dx + N_2dy}_{II} = 0$$

Пусть μ_1 – интегральный множитель для I, V_1 – соответствующий ему интеграл, то есть:

$$dV_1 = \mu_1 \cdot M_1dx + \mu_2 \cdot N_2dy,$$

μ_2 – интегральный множитель для II, V_2 – соответствующий ему интеграл, то есть:

$$dV_2 = \mu_2 \cdot M_2dx + \mu_2 \cdot N_2dy,$$

тогда $\exists \phi, \psi \in C^1(D)$: $\mu_1 \cdot \phi(V_1) = \mu_2 \cdot \psi(V_2)$ и $\mu = \mu_1 \cdot \phi(V_1)$ или $\mu = \mu_2 \cdot \psi(V_2)$ – будет интегральным множителем.

Пример.

$$(\frac{y}{x} + 3x^2)dx + (1 + \frac{x^3}{y})dy = 0$$

$$(\frac{y}{x} + dy) + (3x^2dx + \frac{x^3}{y}dy) = 0$$

$\frac{y}{x}dx + dy = 0$ $\qquad$ $3x^2dx + \frac{x^3}{y}dy = 0$

$$\mu_1 = x \qquad \mu_2 = y$$

$ydx + xdy = 0$
$d(xy) = 0 \Rightarrow xy = C_1$

$3x^2ydx + x^3dy = 0$
$d(x^3y) = 0$

$$u_1 = xy \qquad u_2 = x^3y$$

$$x\phi(xy) = y\psi(x^3y), \quad \phi(t) = t^2,\ \psi(t) = t,$$

$$x(x^2y^2) = yx^3y = \mu$$

$$x^3y^2\left(\frac{y}{x} + 3x^2\right)dx + x^3y^2\left(1 + \frac{x^2}{y}\right)dy = 0$$

$$\underbrace{(x^2y^3 + 3x^5y^2)}_{P}dx + \underbrace{(x^3y^2 + x^6y)}_{Q}dy = 0$$

$$\begin{array}{rcl} \frac{\delta P}{\delta y} & = & 3x^2y^2 + 6x^5y \\ & & \parallel \qquad \Rightarrow \text{ уравнение в ПД} \\ \frac{\delta Q}{\delta x} & = & 3x^2y^2 + 6x^5y \end{array}$$

$$\begin{cases} \frac{\delta u}{\delta x} = x^2y^3 + 3x^5y^2 \\ \frac{\delta u}{\delta y} = x^3y^2 + x^6y \end{cases}$$

2.5 Теорема существования и единственности

Примечание (Задача Коши).

$$y' = f(x,y), \tag{2.9}$$

$$y(x_0) = y_0 \tag{2.10}$$

Теорема 5 (Теорема Пикара). Пусть функция $f(x,y)$ определена и непрерывна по совокупности переменных в прямоугольнике $\Pi = \{(x,y) : |x - x_0| \leqslant a,\ |y - y_0| \leqslant b\}$ и на переменной y удовлетворяет условию Липшица:

$$\big(f(x,y) \in C(\Pi) \cap Lipy(\Pi)\big)$$

Тогда $\exists!$ решение задачи Коши 2.9, 2.10 в $V_h = (x_0 - h; x_0 + h)$, где $h = \min\left(a, \frac{b}{M}, \frac{1}{L}\right)$, $M = \max\limits_{(x,y)\in\Pi}\big|f(x,y)\big|$.

Определение 20. $f(x,y) \in Lipy$, если $\exists L > 0 :\ \forall (x,y_1),\ (x,y_2) \in \Pi$ имеет место:

$$\big|f(x,y_1) - f(x,y_2)\big| \leqslant L \cdot |y_1 - y_2|$$

Лемма 1 (Об интегральном уравнении)**.** В предположении теоремы y является решением задачи 2.9, 2.10 $\Leftrightarrow$ оно является решением интегрального уравнения:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\big(x, y(s)\big)ds \tag{2.11}$$

Определение 21 (Решение интегрального уравнения 2.11)**.** *Решением интегрального уравнения 2.11* называется непрерывная функция y, обращающая уравнение в тождество.

Доказательство.

$\boxed{\Rightarrow}$ y – решение 2.9, 2.10, проинтегрируем 2.9 на $[x_0; x]$:

$$\int_{x_0}^{x} y'(x)dx = \int_{x_0}^{x} f\big(s, y(s)\big)ds$$

$$y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^{x} f\big(s, y(s)\big)ds, \text{ с учетом 2.10,}$$

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\big(s, y(x)\big)dx, \quad y(x) \text{ удовлетворяет уравнению 2.11}$$

$y(x)$ непрерывна (следует из дифференцируемости).

$\boxed{\Leftarrow}$ $y(x)$ – решение 2.11, $y(x)$ – непрерывна, $f(x, y)$ – непрерывна по условию теоремы $\Rightarrow$ интеграл с переменным верхним пределом можно дифференцировать:

$$y'(x) = f\big(x, y(x)\big) \cdot 1, \quad y(x) \text{ удовлетворяет уравнению 2.9}$$

$$\frac{d}{d\alpha}\int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} F(x, \alpha)d\alpha =$$
$$= \int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} F'_\alpha(x, \alpha)d\alpha + F(b(\alpha), \alpha) \cdot b'(\alpha) - F(a(\alpha), \alpha) \cdot a'(\alpha)$$

$$y(x_0) = y_0 + \int_{x_0}^{x_0} f\big(s, y(s)\big)ds, \text{ выполняется условие 2.10}$$

□

Доказательство.

1. Последовательность приближения Пикара:

$$\begin{aligned}
&y_0(x) = y_0,\\
&y_1(x) = y_0 + \textstyle\int_{x_0}^{x} f\big(s, y_0(s)\big)ds,\\
&y_2(x) = y_0 + \textstyle\int_{x_0}^{x} f\big(s, y_1(s)\big)ds,\\
&\vdots\\
&y_n(x) = y_0 + \textstyle\int_{x_0}^{x} f\big(s, y_{n-1}(s)\big)ds
\end{aligned}$$

2. $y_n(x)$ – непрерывна при $|x - x_0| \leqslant h$, $\big(x, y_n(x)\big) \in \Pi$.

   По индукции, $n = 1$:
$$\big|y_1(x) - y_0\big| \overset{?}{\leqslant} b$$
$$\big|y_1(x) - y_0\big| = \left|\int_{x_0}^{x} f\big(s, y_0(s)\big)ds\right| \leqslant$$
$$\leqslant \left|\int_{x_0}^{x} \Big|f\big(s, y_0(s)\big)\Big|dx\right| \leqslant M|x - x_0| \leqslant M \cdot h \leqslant M \cdot \frac{b}{M} = b$$

   Пусть $\big|y_{n-1}(x) - y_0\big| \leqslant b$, то есть $\big(x, y_{n-1}(x)\big) \in \Pi$. Докажем, что $\big(x, y_n(x)\big) \in \Pi$:
$$\big|y_n(x) - y_0\big| \leqslant \left|\int_{x_0}^{x} \Big|f\big(s, y_{n_1}(s)\big)\Big|\right| \leqslant$$
$$\leqslant M \cdot |x - x_0| \leqslant M \cdot h \leqslant M \cdot \frac{b}{M} = b$$

3. Покажем, что $\big\{y_n(x)\big\}_{n=1}^{\infty} \rightrightarrows \overline{y}(x)$.

   Составим функциональный ряд:
$$(\star) \quad \underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{y_0(x)}_{S_0(x)},\ y_1(x) - y_0(x)}_{S_1(x)=y_1(x)},\ y_2(x) - y_1(x)}_{S_2(x)=y_2(x)}, \ldots,\ y_1(x) - y_{n-1}(x)}_{S_n(x)=y_n(x)}, \ldots$$

Нужно дописать. $\square$

Лекция 4: Продолжение

от 19 нояб 8:44

Лемма 2 (Гронуолла)**.** Пусть $u(x) \geqslant 0$ и $u(x) \in C\big([x_0; x_0 + h]\big)$,
$$(\star) \quad u(x) \leqslant a + b\int_{x_0}^{x} u(t)dt, \quad a \geqslant 0,\ b \geqslant 0$$

Тогда $u(x) \leqslant a \cdot e^{b(x - x_0)}$ на $[x_0; x_0 + h]$.

Доказательство. $u(x) = e^{b(x - x_0)}v(x)$

На $[x_0; x_0+h]:\ v(x)$ – непрерывна и в точке $x_1:\ v(x_1) = \max\limits_{[x_0;x_0+h]} v(x)$.

$$
\begin{aligned}
&e^{b(x-x)}v(x_1) = u(x_1) \leqslant \\
&\qquad \leqslant a + b\int_{x_0}^{x_1} u(t)dt = a + b\int_{x_0}^{x_1} e^{b(t-x_0)}v(t)dt \leqslant \\
&\qquad \leqslant a + b\cdot v(x_1)\cdot \frac{e^{v(t-x_0)}}{b}\Big|_{x_0}^{x_1} = a + v(x_1)\cdot e^{b(x_1-x_0)} - v(x_1) \Rightarrow \\
&\qquad \Rightarrow 0 \leqslant a - v(x_1) \Rightarrow v(x_1) \leqslant a \Rightarrow \\
&\qquad \Rightarrow u(x) = e^{b(x-x_0)}v(x) \leqslant e^{b(x-x_0)}v(x_1) \leqslant a\cdot e^{b(x-x_0)}
\end{aligned}
$$

□

Следствие. Если $a = 0$, то $u(x) \equiv 0$.

2.6 Уравнения, не разрешенные относительно производной

Определение 22 (Уравнение, не разрешенное относительно производной). *Уравнением, не разрешенным относительно производной* называется уравнение вида:

$$f(x, y, y') = 0 \tag{2.12}$$

Примечание (Задача Коши). Найти прешение 2.12 при условиях:

$$\begin{cases} y(x_0) &= y_0 \\ y'(x_0) &= y_0' \end{cases} \tag{2.13}$$

Теорема 6 ($\exists$ и ! задачи Коши). Пусть $f \in C^1(D)$ и в точке $(x_0, y_0, y_0') \in D$,

$$f(x_0, y_0, y_0') = 0 \text{ и } f'_{y'}(x_0, y_0, y_0') \neq 0$$

Тогда на достаточно малом отрезке $[x_0 - h; x_0 + h]$ решение задачи Коши 2.12, 2.13 существует и единственно.

Пример. $(y')^2 = x^2$

$$\left[\begin{array}{l} y' = x \\ y' = -x \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = \frac{x^2}{2} + C \\ y = -\frac{x^2}{2} + C \end{array}\right.$$

Определение 23 (Особое решение, дискриминантная кривая). Решение $y = \phi(x)$ уравнения 2.12 называется *особым*, если через $\forall$ точку $y =$

$\phi(x)$, помимо того, проходит другое решение, имеющее ту же касательную, не совпадающее с исходным решением в сколь угодно малой окрестности этой точки.

Особые решения будем искать из системы:

$$\begin{cases} f(x,y,y') = 0 \\ f'_{y'}(x,y,y') = 0 \end{cases} \tag{2.14}$$

путем исключения y'.

Кривая, определенная уравнением 2.14 $\psi(x,y) = 0$, называется *дискриминантной*.

2.7 Интегрирование уравнений, не разрешенных относительно производной

Примечание.

1. Выразить, если это возможно, явно y' : $(y')_{1,2} = \dots$
2. Метод параметра: $y' = p$

$$x = \Phi(y,y') \tag{2.15}$$

$$y = \Psi(x,y') \tag{2.16}$$

Из 2.15: $y' = p \Rightarrow dy = pdx, \quad x = \Phi(y,p)$

$$dx = \frac{\delta\Phi}{\delta y}dy + \frac{\delta\Phi}{\delta p}dp$$
$$\frac{dy}{p} = \frac{\delta\Phi}{\delta y}dy + \frac{\delta\Phi}{\delta p}dp$$

$$\left[\begin{array}{l} p = 0 \\ p \neq 0 \\ \frac{dy}{p} = \frac{\delta\Phi}{\delta y}dy + \frac{\delta\Phi}{\delta p}dp \Rightarrow \begin{cases} y = y(p,c) \\ x = \Phi\big(y(p,c),p\big) \end{cases} \end{array}\right.$$

Из 2.16: $y = \Psi(x,p)$

$$dy = \frac{\delta\Psi}{\delta x}dx + \frac{\delta\Psi}{\delta p}dp$$
$$pdx = \frac{\delta\Psi}{\delta x}dx + \frac{\delta\Psi}{\delta p}dp \Rightarrow \begin{cases} x = x(p,c) \\ y = \Psi\big(x(p,c),p\big) \end{cases}$$

Примечание (Уравнение Лагранжа).

$$y = x \cdot F(y') + G(y')$$
$$y' = p \Rightarrow y = x \cdot F(p) + G(p)$$
$$\underset{\substack{\parallel \\ pdx}}{dy} = F(p)dx + x \cdot F'(p)dp + g'(p)dp$$
$$(p - F(p))dx - F'(p)dp \cdot x = G'(p)dp : \ dp \neq 0, \ p - F(p) \neq 0$$
$$\tfrac{dx}{dp} - \tfrac{F'(p)}{p-f(p)} \cdot x = \tfrac{G'(p)}{p-F(p)} - \text{линейное уравнение относительно } x$$

$$\left[\begin{array}{l} p - F(p) = 0 \Rightarrow p = p_0 \Rightarrow y = x \cdot \underset{\substack{\parallel \\ C_1}}{F(p_0)} + \underset{\substack{\parallel \\ C_2}}{G(p_0)} \Rightarrow y = x \cdot C_1 + C_2 \\ \begin{cases} p - F(p) \neq 0 \\ \frac{dx}{dp} - \frac{F'(p)}{p-F(p)} \cdot x = \frac{G'(p)}{p-F(p)} \Rightarrow \begin{cases} x = \phi(p, C) \\ y = \phi(p, C) \cdot F(p) + G(p) \end{cases} \end{cases} \\ dp = 0 \Rightarrow p = C \Rightarrow y = x \cdot F(C) + G(C) \end{array}\right.$$

Примечание (Уравнение Клеро).

$$y = xy' + G(y');$$
$$y = xp + G(p);$$
$$\underset{\substack{\parallel \\ pdx}}{dy} = xdp + pdx + G'(p)dp;$$
$$\big(x + G'(p)\big)dp = 0;$$
$$\begin{cases} x = -G'(p) \Rightarrow y = -G(p) \cdot p + G(p) \\ dp = 0 \Rightarrow p = C \Rightarrow y = xF(C) + G(C) \end{cases}$$

2.8 Уравнения высших порядков

Определение 24 (Уравнение n-го порядка). *Уравнением порядка n* называется уравнение вида:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0, \tag{2.17}$$

где x – неизвестная, n – наивысший порядок производной:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \tag{2.18}$$

Определение 25 (Решение уравнений 2.17 и 2.18). *Решением уравнений 2.17 и 2.18* называется n раз дифференцируемая функция, которая при подстановке в уравнение, обращает его в тождество.

Определение 26 (Задача Коши). *Задача Коши*: найти уравнения 2.18 удовлетворяющему начальным условиям:

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_0' \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{n-1} \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} y_0^\circ \\ y_1^\circ \\ \vdots \\ y_{n-1}^\circ \end{pmatrix} \tag{2.19}$$

Теорема 7 ($\exists$ и ! задачи Коши 2.18, 2.19). Пусть $f(x, y_0, y_1, \dots, y_{n-1})$ – непрерывна по совокупности переменных в параллелепипеде:

$$\Pi = \left\{(x, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) : \ |x - x_0| \leqslant a, \ |y_k - y_k^0| \leqslant b, \ k = \overline{0, n-1}\right\}$$

и удовлетворяет условию Липшица по переменным $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$

$$\left(\frac{\delta f}{\delta y_k} \text{ – непр.}, \ k = \overline{0, n-1}\right)$$

Тогда в окрестности точки x_0 $(x_0 - h; x_0 + h)$ решение задачи Коши существует и единственно, где:

$$h = \min\left\{a, \frac{b}{\max\{M_0, M_1, \dots, M_{n-1}\}}\right\}, \qquad M_k = \max\left|\frac{\delta f}{\delta y_k}\right|$$

2.9 Линейные уравнения высших порядков

Определение 27 (Линейное неоднородное уравнение порядка n, однородное уравнение). Уравнение вида:

$$a_0(x) \cdot y^{(n)} + a_1(x) \cdot y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x) \cdot y' + a_n(x) \cdot y = f(x), \quad a_0(x) \neq 0 \tag{2.20}$$

называется *линейным неоднородным порядка* n,

$$a_j(x) \in C(\alpha; \beta), \quad j = \overline{0, n}, \quad f(x) \in C(\alpha, \beta), \quad -\infty \leqslant \alpha < \beta \leqslant +\infty$$

Если $f(x) = 0$, то уравнение называется *однородным*.
Пусть $L[y] = Ly \equiv a_0(x) \cdot y^{(n)} + \dots + a_n(x) \cdot y$,

$$Ly = f \tag{2.21}$$

$$Ly = 0 \tag{2.22}$$

$$y^{(n)} = -\frac{a_1(x)}{a_0(x)} \cdot y^{(n-1)} - \dots - \frac{a_{n-1}(x)}{a_0(x)} \cdot y' - \frac{a_n(x)}{a_0(x)} \cdot y + \frac{f(x)}{a_0(x)} \tag{2.23}$$

Теорема 8 (О существовании и единственности). Пусть для уравнения 2.23 выполняются условия: $a_0(x) \neq 0$, $a_j(x) \in C(\alpha; \beta)$, $f(x) \in C(\alpha, \beta)$.

Тогда решение задачи Коши для уравнения 2.23 существует и единственно на (α, β).

Примечание (Свойства оператора Ly).

1. $L(\alpha y) = \alpha Ly, \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$ (свойство однородности);
2. $L(y_1 + y_2) = Ly_1 = Ly_2$ (свойство аддитивности).

Примечание (Свойства решений однородного линейного уравнения 2.22 или $Ly = 0$).

1. $y \equiv 0$ является решением 2.22;
2. Если $y_1(x)$ – решение 2.22, то $y(x) - \alpha y_1(x), \ \alpha \in \mathbb{R}$ также является решением:
$$Ly = L(\alpha y_1) = \alpha \underset{\substack{\shortparallel \\ 0}}{Ly_1} = 0$$
3. Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – решения 2.22, то $y(x) = y_1(x) + y_2(x)$ также является решением:
$$Ly = L(y_1 + y_2) = Ly_1 + Ly_2 = 0 + 0 = 0$$
4. Если $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ – решения 2.22, то $\forall c_i \in \mathbb{R}, \ i = \overline{1, n} \ y(x) = c_1 y_1(x) + \ldots + c_n y_n(x)$ так же является решением.

   $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ – линейно независимая система функций $\Rightarrow \forall y(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot y_i(x)$ – решение 2.22.

Определение 28 (Линейно зависимая система функций). Система функций $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ называется *линейно зависимой*, если $\exists$ такой набор $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}: \ \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_n^2 \neq 0$, что линейная комбинация
$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \ldots + \alpha_n y_n(x) = 0$$

Определение 29 (Линейно независимая система функций). Система функций $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ называется *линейно независимой*, если линейная комбинация этих функций равна 0 в случае, когда
$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0,$$
$$\alpha_1 y_1(x) + \ldots + \alpha_n y_n(x) = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0.$$

Определение 30 (Определитель Вронского). *Определителем Вронского (вронскианом)* системы функций $y_1(x), \ldots, y_n(x)$, имеющих производные до порядка $(n-1)$ включительно, называется определитель:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

Теорема 9. Если система функций $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ линейно зависима, то определитель Вронского равен 0, то есть $W(x) = 0$.

Доказательство. Из линейной зависимости $y_1(x), \ldots, y_n(x) \Rightarrow \exists \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$:

$$\alpha_1 y_1(x) + \ldots + \alpha_n y_n(x) = 0.$$

Пусть $\alpha_n \neq 0$, тогда:

$$\begin{aligned} & y_n(x) = -\tfrac{\alpha_1}{\alpha_n} y_1(x) - \tfrac{\alpha_2}{\alpha_n} y_2(x) - \ldots - \tfrac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} y_{n-1}(x) \\ & y_n'(x) = -\tfrac{\alpha_1}{\alpha_n} y_1'(x) - \tfrac{\alpha_2}{\alpha_n} y_2'(x) - \ldots - \tfrac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} y_{n-1}'(x) \\ & \vdots \\ & y_n^{(n-1)}(x) = -\tfrac{\alpha_1}{\alpha_n} y_1^{(n-1)}(x) - \tfrac{\alpha_2}{\alpha_n} y_2^{(n-1)}(x) - \ldots - \tfrac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} y_{n-1}^{(n-1)}(x) \end{aligned}$$

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & \cdots & y_{n-1}(x) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\alpha_k}{\alpha_n} y_k(x) \\ y_1'(x) & \cdots & y_{n-1}'(x) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\alpha_k}{\alpha_n} y_k'(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \cdots & y_{n-1}^{(n-1)}(x) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\alpha_k}{\alpha_n} y_k^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} = 0$$

□

Замечание. $W(x) = 0 \nRightarrow y_1(x), \ldots, y_n(x)$ – линейно зависима.

$$y_1(x) = \begin{cases} x^2, & x \geqslant 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}, \quad y_2(x) = \begin{cases} 0, & x \geqslant 0 \\ x^2, & x < 0 \end{cases}$$

$$W(x) = \begin{cases} \begin{vmatrix} x^2 & 0 \\ 2x & 0 \end{vmatrix} = 0, & x \geqslant 0 \\ \begin{vmatrix} 0 & x^2 \\ 0 & 2x \end{vmatrix} = 0, & x < 0 \end{cases} \equiv 0$$

$$\frac{y_1(x)}{y_2(x)} = \begin{cases} \infty, & x \geqslant 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}, \quad \frac{y_1(x)}{y_2(x)} = const \text{ ЛЗ}$$

$$\alpha_1 \cdot y_1 + \alpha_2 \cdot y_2 = 0, \quad y_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \cdot y_2$$

Лекция 5: Продолжение

от 5 дек 10:29

Теорема 10. Пусть $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ – система линейно независимых на

$(\alpha;\beta)$ решений уравнения $Ly = 0$. Тогда $W(x) \neq 0$ ни в какой точке интервала $(\alpha;\beta)$.

Доказательство. От противного. Предположим, что $\exists x_0 \in (\alpha;\beta)$. $W(x_0) = 0$,

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & \cdots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & \cdots & y_n'(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} c_1 y_1(x_0) + \ldots + c_n y_n(x_0) = 0 \\ c_1 y_1'(x_0) + \ldots + c_n y_n'(x_0) = 0 \\ \vdots \\ c_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \ldots + c_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases} \tag{2.24}$$

Однородная система линейно алгебраических уравнений, $\det = W(x_0) = 0, \Rightarrow$ система 2.24 имеет нетривиальное решение: $\overrightarrow{c^0} - (c_1^0, c_2^0, \ldots, c_n^0)$, $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ – линейно зависимая?

$$y(x) = c_1^0 \cdot y_1(x) + \ldots + c_n^0 \cdot y_n(x)$$

1. $y(x)$ – решение $Ly = 0$;
2. $$\begin{cases} y(x_0) = 0 \\ y'(x_0) = c_1^0 y_1'(x) + \ldots + c_n^0 y_n'(x)\Big|_{x=x_0} = 0 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = c_1^0 y_1^{(n-1)}(x) + \ldots + c_n^0 y_n^{(n-1)}(x)\Big|_{x=x_0} = 0 \end{cases}$$

1. $y \equiv 0 \Rightarrow Ly = 0 \Rightarrow$ из теоремы существования и единственности $\Rightarrow y(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k^0 y_k(x) \equiv 0 \Rightarrow y_1, \ldots, y_n$ – линейно зависимые $\Rightarrow$ противоречие.

□

Теорема 11 (Лиувилля-Остроградского $\big(W(x),\ W(x_0)\big)$). Пусть задано уравнение:

$$a_0(x) \cdot y^{(n)} + a_1(x) \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x) \cdot y' + a_n(c) \cdot y = 0,$$

$a_0(x) \neq 0,\ a_j(x) \in C(\alpha;\beta),\ j = \overline{0,n},\ -\infty \leqslant \alpha < \beta \leqslant +\infty$. Тогда:

$$W(x) = W(x_0) \cdot e^{-\int_{x_0}^{x} \frac{a_1(s)}{a_0(s)} ds}, \quad x_0 \in (\alpha;\beta)$$

Следствие. Если $\exists x_0 \in (\alpha;\beta):\ W(x_0) = 0 \Rightarrow W(x) = 0\ \forall x \in (\alpha;\beta)$

2.10 Построение общего решения уравнения $Ly = 0$

Определение 31 (Решение $Ly = 0$). Функция $y = \phi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$ называется *решением* $Ly = 0$, если для $\forall$ набора $C_1, C_2, \ldots, C_n$ она является решением $Ly = 0$ и для $\forall$ задачи Коши $y(x_0) = y_0^\circ$, $y'(x_0) = y_1^\circ$, $\ldots$, $y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}^\circ$ $\exists$ набор $C_1^\circ, C_2^\circ, \ldots, C_n^\circ$: $y = \phi(x, C_1^\circ, \ldots, C_n^\circ)$ является решением $Ly = 0$.

Теорема 12 (Структура решения однородного уравнения). Пусть $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ – линейно независимые решения $Ly = 0$ n-го порядка. Тогда:

$$y_{\text{OO}} = C_1 y_1(x) + \ldots + C_n y_n(x),$$

где $C_1, \ldots, C_n$ – произвольные константы.

Определение 32 (Фундаментальная система решений (ФСР)). Любые n линейно независимых решений задачи Коши уравнения $Ly = 0$ называются *фундаментальной системой решений (ФСР)*.

Теорема 13. ФСР уравнения $Ly = 0$ – существует.

Теорема 14. Любые $(n+1)$ решения задачи Коши для $Ly = 0 n$-го порядка линейно зависимы, то есть $\exists \alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}$:

$$\alpha_1^2 + \ldots + \alpha_{n+1}^2 \neq 0, \quad \alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \ldots + \alpha_{n+1} y_{n+1}(x) = 0$$

2.11 Линейные уравнения с переменными коэффициентами

Примечание. Решения линейного однородного уравнения n-го порядка с переменными коэффициентами – линейное пространство размерности n с базисом ФСР.

Нормированная ФСР – это задача Коши с начальными условиями:

$$(1, 0, \ldots, 0), (0, 1, \ldots, 0), \ldots, (0, 0, \ldots, 1)$$

Если имеем $y_1, y_2, \ldots, y_n$ – решений $Ly = 0$ и $\exists x_0 \in (\alpha; \beta) : W(x_0) \neq 0$, то пытаемся восстановить дифференциальное уравнение.

Пример. $n = 2,\ \{\sin x, \cos x\},\ w(x) = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} = -1 \neq 0$

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0, \quad a_0(x) \neq 0$$

$$y'' + p(x)y' + q(x)\cdot y = 0$$

$$\begin{cases} -\sin x + p(x)\cdot\cos x + q(x)\cdot\sin x = 0 \\ -\cos x - p(x)\cdot\sin x + q(x)\cdot\cos x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p(x) \\ q(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \neq 0$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \sin x & \sin x \\ \cos x & \cos x \end{vmatrix} = 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\begin{matrix} p(x) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 0 \\ q(x) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 1 \end{matrix} \Rightarrow y'' + y = 0$$

Примечание (Способы восстановления дифференциального уравнения)**.**

1. Способ первый:

$$\begin{cases} y^{(n)} + p_{n-1}(x)\cdot y^{(n-1)} + \ldots + p_1(x)\cdot y' + p_0(x)\cdot y = 0 \\ y_1^{(n)} + p_{n-1}(x)\cdot y_1^{(n-1)} + \ldots + p_1(x)\cdot y_1' + p_0(x)\cdot y_1 = 0 \\ y_2^{(n)} + p_{n-1}(x)\cdot y_2^{(n-1)} + \ldots + p_1(x)\cdot y_2' + p_0(x)\cdot y_2 = 0 \\ \vdots \\ y_n^{(n)} + p_{n-1}(x)\cdot y_n^{(n-1)} + \ldots + p_1(x)\cdot y_n' + p_0(x)\cdot y_n = 0 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_1 & y_1' & \ldots & y_1^{(n-1)} \\ y_2 & y_2' & \ldots & y_2^{(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_n & y_n' & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \begin{matrix} p_0 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{matrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = W(x) \neq 0$$

($\Rightarrow y_1, y_2, \ldots, y_n$ – ЛНЗ) $\Rightarrow$ система имеет ! решение $p_0(x), p_1(x), \ldots, p_{n-1}(x)$, которое выражается через $y_1, y_2, \ldots, y_n$ и их производные.

2. Способ второй: потерян

Пример. По второму способу:

$y_1 = x,\ y_2 = x^2,\ W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = 2x^2 - x^2 = x^2 \neq 0,$ при $x \neq 0$.

$$\begin{vmatrix} y_1'' & y_1' & y_1 \\ y_2'' & y_2' & y_2 \\ y_1'' & y_1' & y_1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1 & x \\ 2 & 2x & x^2 \\ y'' & y' & y \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y'' \cdot \begin{vmatrix} 2x & x^2 \\ y' & y \end{vmatrix} - y' \cdot \begin{vmatrix} 0 & x \\ 2 & x^2 \end{vmatrix} + y \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2x \end{vmatrix} = 0$$

$$x^2 \cdot y'' - 2x \cdot y' + 2y = 0$$

2.12 Структура общего решения линейного неоднородного уравнения $Ly = f$

Примечание.

$$Ly = a_0(x) \cdot y^{(n)} + a_1(x) \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x) \cdot y' + a_n(x) \cdot y = f(x), \quad (2.25)$$

где $a_0(x) \neq 0,\ a_j(x),\ f(x) \in C(\alpha;\beta),\ j = \overline{0,n},\ -\infty \leqslant \alpha < \beta \leqslant +\infty$

Теорема 15. Все решения уравнения вида 2.25 даются формулой:

$$y_{\text{он}} = y_{\text{оо}} + y_{2\text{чн}} \quad (2.26)$$

Доказательство. Пусть $y_{2\text{чн}}$ – произвольное частное решение 2.25, то есть

$$L(y_{2\text{н}}) = f(x)$$

1. Покажем, что решение 2.26 удовлетворяет 2.25:

$$L(y_{\text{он}}) = L(y_{\text{оо}} + y_{2\text{чн}}) = L(y_{\text{оо}}) + L(y_{2\text{чн}}) = 0 + f(x) = f(x)$$

2. Покажем, что формула 2.26 покрывает все решения 2.25:
$\widetilde{y}$ – частное решение 2.25, $L(\widetilde{y}) = f(x)$

$$\widetilde{y} = (\widetilde{y} - y_{\text{чн}}) + y_{\text{чн}}$$

$$L(\widetilde{y} - y_{\text{чн}}) = L(\widetilde{y}) - L(y_{\text{чн}}) = f(x) - f(x) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \widetilde{y} = (\widetilde{y} - y_{\text{чн}}) + y_{\text{чн}} = y_{\text{оо}} + y_{\text{чн}}$$

□

Построение общего решения неоднородного уравнения 2.25

Примечание (Метод вариации произвольных постоянных).

1. $y_1, y_2, \ldots, y_n$ – ФСР уравнения 2.25 $\Rightarrow y_{OO} = C_1 y_1(x) + \ldots + C_n y_n(x)$.
2. $y = y_{OH} = C_1(x)y_1(x) + \ldots + C_n(x)y_n(x)$. Найдем производные до n-го порядка:

$$\begin{aligned}
a_n(x):&\quad C_1(x)y_1(x) + \ldots + C_n(x)y_n(x)\\
a_{n-1}(x):&\quad C_1(x)y_1'(x) + \ldots + C_n(x)y_n'(x) + \underbrace{C_1'(x)y_1(x) + \ldots + C_n'(x)y_n(x)}_{\overset{\shortparallel}{0}}\\
a_{n-2}(x):&\quad C_1(x)y_1''(x) + \ldots + C_n(x)y_n''(x) + \underbrace{C_1'(x)y_1'(x) + \ldots + C_n'(x)y_n'(x)}_{\overset{\shortparallel}{0}}\\
\vdots\ &\quad \vdots\\
a_1(x):&\quad C_1(x)y_1^{(n-1)}(x) + \ldots + C_n(x)y_n^{(n-1)}(x) + \underbrace{C_1'(x)y_1^{(n-2)}(x) + \ldots + C_n'(x)y_n^{(n-2)}(x)}_{\overset{\shortparallel}{0}}\\
a_0(x):&\quad C_1(x)y_1^{(n)}(x) + \ldots + C_n(x)y_n^{(n)}(x) + \underbrace{C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + \ldots + C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x)}_{\overset{\shortparallel}{0}}
\end{aligned}$$

$$C_1(x)\underbrace{\left(a_0(x)y_1^{(n)}(x) + a_1(x)y_1^{(n-1)}(x) + \ldots + a_{n_1}(x)y_1' + a_n(x)y_1(x)\right)}_{\overset{\shortparallel}{0}}$$

Система n уравенений и n неизвестных $C_1'(x), \ldots, C_n'(x)$, определитель $\Delta =?$

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ y_1' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = W(x) \neq 0$$

Примечание (Метод вариации произвольных постоянных (продолжение?)).

$$y_{OH} = C_1(x) \cdot y_1 + \ldots = C_n(x)y_n$$

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + \ldots + C_n'(x)y_n = 0 \\ C_1'(x)y_1' + \ldots + C_n'(x)y_n' = 0 \\ \vdots \\ C_1'(x)y_1^{(n-2)} + \ldots + C_n'(x)y_n^{(n-2)} = 0 \\ C_1'(x)y_1^{(n-1)} + \ldots + C_n'(x)y_n^{(n-1)} = \frac{f(x)}{a_0(x)} \end{cases}$$

$\Delta = W(y_1, y_2, \ldots, y_n) \neq 0$, так как $y_1, y_2, \ldots, y_n$ – ФСР $\Rightarrow$ система имеет

! решение. Найти это решение по формулам Крамера:

$$C_k'(x) = \frac{W_k(x)}{W(x)}dx + C_k, \quad k = \overline{1,n}, \tag{2.27}$$

где:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ y_1' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix},$$

$$W_k(x) = \begin{vmatrix} y_1 & \cdots & y_n & 0 & y_{k+1} & \cdots & y_n \\ y_1' & \cdots & y_n' & 0 & y_{k+1}' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} & 0 & y_{k+1}^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

Проинтегрируем 2.27:

$$C_k(x) = \int \frac{W_k(x)}{W(x)}dx + C_k, \quad k = \overline{1,n}, \tag{2.28}$$

$$y(x) = y_{\text{ОН}} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{W_k(x)}{W(x)}dx + C_k\right)y_k = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} C_k y_k}_{\substack{\shortparallel \\ y_{\text{ОО}}}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} y_k \int \frac{W_k(x)}{W(x)}dx}_{\substack{\shortparallel \\ y_{\text{ЧН}}}}$$

Лекция 6: Конец

от 21 дек 8:48

2.13 Линейные уравнения с постоянными коэффициентами

Примечание. Рассмотрим:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_n y = 0, \tag{2.29}$$

где $a_0 \neq 0,\ a_i \in \mathbb{R}$. Теперь $y = e^{\lambda x},\ y' = \lambda e^{\lambda x}, \ldots, y^{(n)} = \lambda^n e^{\lambda x}$:

$$\underset{\substack{\nparallel \\ 0}}{e^{\lambda x}}(a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n) = 0 \tag{2.30}$$

$y = e^{\lambda x}$ – решение уравнения 2.29 $\Leftrightarrow$ λ – корень характеристического уравнения $T_n(\lambda) = 0,\ T_n(\lambda) = a_0\lambda^n + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n$.

Если $a_i \in \mathbb{R} \Rightarrow$ характеристическое уравнение 2.30 имеет ровно n корней, учитывая их кратность. Корни могут быть комплексными.

1. $\lambda_i \in \mathbb{R},\ \lambda_i \neq \lambda_m,\ i \neq m,\ i = \overline{1,n}$. Найти $y_1, y_2, \ldots, y_n$ – ФСР ?

$$y_1 = e^{\lambda_1 x},\ y_2 = e^{\lambda_2 x},\ \ldots,\ y_n = e^{\lambda_n x}$$

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ – корни характеристического многочлена 2.30.

$$W(x) = 0 \Leftrightarrow y_1, y_2, \ldots, y_n, \text{ так как решения } Ly = 0, \text{ ЛЗ}$$

$$W(x) \neq 0 \Rightarrow y_1, \ldots, y_n \text{ ЛНЗ}$$

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} & \cdots & e^{\lambda_n x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} & \cdots & \lambda_n e^{\lambda_n x} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 x} & \lambda_2^{n-1} e^{\lambda_2 x} & \cdots & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n x} \end{vmatrix} =$$

$$= e^{\lambda_1 x} e^{\lambda_2 x} \ldots e^{\lambda_n x} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} \neq 0 \text{ при } \lambda_i \neq \lambda m$$

$$\Rightarrow y_1, y_2, \ldots, y_n \text{ ЛНЗ } \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_{\text{OO}} = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \ldots + C_n e^{\lambda_n x}$$

2. $\underbrace{\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_m}_{\text{кратный}} = \lambda, \quad \underbrace{\lambda_{m+1}, \ldots, \lambda_n}_{\substack{\neq \\ \lambda}} \in \mathbb{R}$

$$\underbrace{e^{\lambda x}, e^{\lambda x}, \ldots, e^{\lambda x}}_{m} \qquad e^{\lambda_{m+1} x}, \ldots, e^{\lambda_n x}$$

$$\underset{\substack{\parallel \\ y_1}}{e^{\lambda x}}, \underset{\substack{\parallel \\ y_2}}{x e^{\lambda x}}, \ldots, \underset{\substack{\parallel \\ y_m}}{x^{m-1} e^{\lambda x}}$$

$y_1, y_2, \ldots, y_m$ – ФСР:

(a) ЛНЗ:

$$\alpha_1 e^{\lambda x} + \alpha_2 x e^{\lambda x} + \ldots + \alpha x^{m-1} e^{\lambda x} = 0$$

$$e^{\lambda x}(\alpha_1 + \alpha_2 x + \ldots + \alpha_m x^{m-1}) = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_m = 0$$

(b) Является решением 2.29:

$$L(x^k e^{\lambda x}) \overset{?}{=} 0, \quad k = \overline{0, m-1}$$

$$L(e^{\lambda x}) = e^{\lambda x} \cdot T_n(\lambda) \tag{2.31}$$

$$\frac{\delta^k}{\delta x^k}\big(L(e^{\lambda x})\big) = \frac{\delta^k}{\delta \lambda^k}\big(e^{\lambda x} T_n(\lambda)\big), \quad (u \cdot v)^{(k)} = \sum_{i=0}^{k} C_k^i u^{(i)} v^{(k-i)}$$

$$L\left(\frac{\delta^k}{\delta \lambda^k} e^{\lambda x}\right) = \sum_{i=0}^{k} C_k^i T_n^{(i)}(\lambda) \cdot (e^{\lambda x})^{(k-i)}$$

$$L(x^k e^{\lambda x}) = \sum_{i=0}^{k} C_k^i T_n^{(i)}(\lambda) x^{k-i} e^{\lambda x}$$

Если λ – корень $T_n(\lambda)$ кратности m, то:

$$T_n(\lambda) = T_n'(\lambda) = \ldots = T_n^{(m-1)}(\lambda) = 0, \quad T_n^{(m)}(\lambda) \neq 0$$

Правая часть $= 0$, если $k = \overline{0, m-1} \Rightarrow L(x^k e^{\lambda x}) = 0$, $k = \overline{0, m-1}$,

$y_{\text{OO}} = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x} + \ldots + C_m x^{m-1} e^{\lambda x} + C_{m+1} e^{\lambda_m x} + \ldots + C_n e^{\lambda_n x}$

3. $\lambda_{1,2} = a \pm b_i, \quad \underbrace{\lambda_3, \ldots, \lambda_n}_{\substack{\nparallel \\ \lambda_{1,2}}}$

$$y_1 = e^{(a+b_i)x} = e^{ax} \cdot e^{ibx} = e^{ax}(\cos bx + i \sin b_x)$$

$$y(x) = u(x) + iv(x), \quad y'(x) = u'(x) + iv'(x)$$

> **Утверждение.** $y(x)$ – решение $Ly = 0 \Leftrightarrow u(x)$ и $v(x)$ – решения 2.29.

$$Ly(x) = Lu(x) + iLv(x)$$

$$y_2 = e^{(a-bi)x} = e^{ax} \cdot e^{-ibx} = e^{ax}(\cos bx - i \sin bx);$$

$$\widetilde{y_1} = \frac{y_1 + y_2}{2} = e^{ax} \cdot \cos bx;$$

$$\widetilde{y_2} = \frac{y_1 - y_2}{2} = e^{ax} \cdot \sin bx$$

(a) $\widetilde{y_1}, \widetilde{y_2}$ – решения 2.29;

(b) $\widetilde{y_1}, \widetilde{y_2}$ – ЛНЗ?

$\Rightarrow \widetilde{y_1}, \widetilde{y_2}, y_3, \ldots, y_n$ – ФСР:

$$y_{\text{OO}} = C_1 e^{ax} \cos bx + C_2 e^{ax} \sin bx + C_3 e^{\lambda_3 x} + \ldots + C_n e^{\lambda_n x}$$

4. $\lambda_{1,2} = \lambda_{3,4} = \ldots = \lambda_{2m-1,2m} = a \pm bi, \quad \underbrace{\lambda_{2m+1}, \ldots, \lambda_n}_{\substack{\nparallel \\ \lambda_{1,2}}}$

$$y_1 = e^{ax} \cos bx,\ y_2 = xe^{ax} \cos bx,\ \ldots,\ y_m = x^{m-1} e^{ax} \cos bx,$$

$$y_{m+1} = e^{ax} \sin bx,\ y_{m+2} = xe^{ax} \sin bx,\ \ldots,\ y_{2m} = x^{m-1} e^{ax} \sin bx$$

$$y_{\text{ОО}} = e^{ax}(C_1 \cos bx + C_2 x \cos bx + \ldots + C_m x^{m-1} \cos bx) + \\ + e^{ax} \sin bx (C_{m+1} + C_{m+2} x + \ldots + C_{2m} x^{m-1}) + \\ + C_{2m+1} e^{\lambda_{2m} x} + \ldots + C_n e^{\lambda_n x}$$

$f(x)$ – специального вида

$$b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m, e^{ax}, \cos bx,\ sinbx$$

2.14 Линейные неоднородные уравнения с правой частью спец. вида

Примечание.

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x), \tag{2.32}$$

где $a_0 \neq 0,\ a_i \in \mathbb{R},\ i = \overline{0, n}$

$$a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0 \tag{2.33}$$

Пусть:

$$f(x) = e^{\alpha x} \big(P_m(x) \cos \beta x + Q_n(x) \sin \beta x \big) \tag{2.34}$$

Тогда частное решение уравнения 2.32 будем искать λ вида:

$$y_{\text{ЧН}} = e^{\alpha x} \big(M_k(x) \cos \beta x + N_k(x) \sin \beta x \big) \cdot x^{\tau},$$

где $k = \max(m, n),\ M_k(x), N_k(x)$ – многочлены степени k общего вида с неоднородными коэффициентами, τ – кратность числа $\alpha \pm \beta_i$ как корня характеристического уравнения 2.33, если $\alpha \pm \beta i$ не является корнем 2.33, то $\tau = 0$.

2. $f(x) = (b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m) e^{2x}$. Тогда:

$$y_{\text{ЧН}} = (d_0 + d_1 x + \ldots + d_m x^m) e^{\alpha x} \cdot x^{\tau},$$

где τ – кратность числа α как корня характеристического уравнения 2.33, если λ не является корнем характеристического уравнения 2.33, то $\tau = 0$.

3. Если $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_p(x)$, где $f_i(x)$ – многочлен вида 2.34, то $y_{\text{ОН}} = y_{\text{ОО}} + y^{(1)}_{\text{ЧН}} + y^{(2)}_{\text{ЧН}} + \ldots + y^{(p)}_{\text{ЧН}}$.

4. Если $f(x)$ – произвольного вида (отличного от вида 2.34), то $y_{\text{ОН}}$ находим с помощью метода вариаций произольных простоянных.

Примечание (Уравнение Эйлера).

$$a_0 x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} x y' + a_n y = f(x),$$

$x^k y^{(k)}$ сводится к уравнению с постоянными коэффициентами с помощью замены $x = e^t$ при $x > 0$ ($x = e^t$ при $x < 0$).

Пример. $x^3 y''' - x^2 y'' + 2xy' - 2y = x^3, \quad x = e^t$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y'_t}{e^t} = e^{-t} y'_t$$
$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{e^{-t}(y''_t - y'_t)}{e^t} = e^{-2t}(y''_t - y'_t)$$
$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{\frac{dy''}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{e^{-2t}(y'''_t - y''_t - 2y''_t + 2y'_t)}{e^t} = e^{-3t}(y'''_t - 3y''_t + 2y'_t)$$

$$e^{3t} \cdot e^{-3t}(y'''_t - 3y''_t + 2y'_t) - e^{2t} \cdot e^{-2t} \cdot (y''_t - y'_t) + 2e^t \cdot e^{-t} y'_t - 2y = e^{3t}$$
$$y'''_t - 4y''_t + 5y'_t - dy = e^{3t}, \quad \lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = 0$$

1. Характеристическое уравнение: $x^k y^{(k)} \to \lambda(\lambda - 1)\dots(\lambda - k + 1)$,
$$\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2) - \lambda(\lambda - 1) + 2\lambda - 2 = 0$$
$$(\lambda - 1)(\lambda^2 - 2\lambda - \lambda) + 2(\lambda - 1) = 0$$
$$(\lambda - 1)(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)^2(\lambda - 2) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda_1 = \lambda_2 = 1 \\ \lambda_3 = 2 \end{array} \right. \Rightarrow y_{\text{ОО}} = (C_1 + C_2 t)e^t + C_3 e^{2t}$$

2. $\lambda(\lambda^2 - 3\lambda + 2) - \lambda^2 + \lambda + 2\lambda - 2 = 0$
$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda - \lambda^2 + 3\lambda - 2 = 0$$
$$\lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y''' - 4y'' + 5y' - 2y = e^{3t}$$
$$f(t) = e^{3t} \Rightarrow \alpha \pm \beta i = 3 \neq \lambda_1, \lambda_2 \Rightarrow \tau = 0 \Rightarrow y_{\text{ЧН}} = Ae^{3t}$$
$$27Ae^{3t} - 36Ae^{3t} + 15Ae^{3t} - 2Ae^{3t} = e^{3t}$$
$$4A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{4} \Rightarrow y_{\text{ЧН}} = \frac{1}{4}e^{3t}$$

$$y_{\text{ОН}} = y_{\text{ОО}} + y_{\text{ЧН}} =$$
$$= (C_1 + C_2 t)e^t + C_3 e^{2t} + \frac{1}{4}e^{3t} = (C_1 + C_2 \ln x)x + C_3 x^2 + \frac{1}{4}x^3$$

$x > 0, \ x = e^t, \ \ln x = t$

Пример. $y'' - 3y' + 2y = 9e^{3x}$

1. $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \ \lambda_2 = 2.$
2. $f(x) = 9e^{3x} \Rightarrow \alpha \pm \beta i = 3 \neq \lambda_1, \lambda_2 \Rightarrow \tau = 0 \Rightarrow y_{\text{ЧН}} = Ae^{3x} \cdot x^{\circ} = Ae^{3x}.$

Пример. $y'' + 16y = x \cdot \sin 4x$

1. $\lambda^2 + 16 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 4i$.
2. $f(x) = x \sin x \Rightarrow \alpha \pm \beta i = 0 \pm 4i = \lambda_1 \Rightarrow \tau = 1$

$$y_{\text{ЧН}} = x(Ax + B) \sin x + x(Cx + D) \cos x$$

1. Характеристическое уравнение:

$$\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2) - \lambda(\lambda - 1) + 2\lambda - 2 = 0$$

$$(\lambda - 1)(\lambda^2 - 2\lambda - \lambda) + 2(\lambda - 1) = 0$$

$$(\lambda - 1)(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\lambda - 1)^2(\lambda - 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda_1 = \lambda_2 = 1 \\ \lambda_3 = 2 \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$y_{\text{OO}} = (C_1 + C_2 t)e^t + C_3 e^{2t}$$

Пример. $y'' - 8y' + 16y = e^{4x}(1 - x)$

1. $\lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0 \Rightarrow (\lambda - 4)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 4$, кратность – 2.
2. $f(x) = e^{4x}(1 - x) \Rightarrow \alpha \pm \beta i = 4 = \lambda_1 \Rightarrow \tau = 2$.

$$y_{\text{ЧН}} = e^{4x}(Ax + B)x^2 = e^{4x}(Ax^3 + Bx^2)$$