Методы оптимизации

Данил Заблоцкий

9 февраля 2024 г.

Оглавление

Введение

Лекция 1: Начало

от 9 фев 8:45

Определение 1 (Методы оптимизации). *Методы оптимизации* – раздел прикладной математикик, предметом изучения которого является теория и методы оптимизационных задач.

Определение 2 (Оптимизационная задача). *Оптимизационная задача* – задача выбора из множества возможных ваариантов наилучших в некотором смысле.

Примечание.

$$\begin{cases} f(x) \to \min(\max) \\ x \in D \end{cases},$$

где

$$\begin{aligned} D & \text{ – множество допустимых решений,} \\ x \in D & \text{ – допустимое решение,} \\ f(x) & \text{ – целевая функция (критерий оптимизации)} \end{aligned}$$

Задачи математического программирования (МП) и их классификация

Примечание. Немного истории:

1939г. Л.В. Конторович 1947г. Д. Данциг

С 50-х годов – бурное развитие

1975г. Нобелевская премия по экономике Конторовичу и Купмаксу

Примечание (Задача математического программирования).

1. $f(x) \to \max(\min)$.

2. $g(x)\#0,\ i = \overline{1,m}, \quad \# \in \{\leqslant, \geqslant, =\}$.
3. $\underset{(x \in R^n)}{x_j \in R},\ j = \overline{1,n}$.

$$x = (x_1, \ldots, x_n)$$

Определение 3 (Оптимальное решение, глобальный экстремум)**.** $x^* \in D$ называется *оптимальным решением* задачи 1–3, если $\forall x \in D$

$$f(x^*) \geqslant f(x)$$

для задачи на max и $\forall x \in D$

$$f(x^*) \leqslant f(x)$$

для задачи на min.

x^* является *глобальным экстремумом*.

Определение 4 (Разделимая, неразделимая задача)**.** Задача 1–3, которая обладает оптимальным решением, называется *разделимой*, и *неразделимой* в противном случае.

$D = R^n$ – задача *безусловной оптимизации*, в противном случае – задача *условной оптимизации*.

Примечание (Классификация)**.**

1. Если f, g_i являются линейными, то задача является задачей *линейного программирования* (ЛП).
2. Если хотя бы одна из функций f, g_i нелинейная, то задача *нелинейного программирования*.

f, g_i – выпуклые, то *выпуклого программирования*.

Глава 1

Линейное программирование

1.1 Постановка задачи, теорема эквивалентности

Определение 5 (Общая задача ЛП (ЗЛП)).

$$f(x) = c_0 + \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \longrightarrow \max(\min),$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \# b_i, \quad i = \overline{1, n}, \;\; \# \in \{\leqslant, \geqslant, =\}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j \in \mathfrak{I} \subseteq \{1, \dots, n\}$$

$$A_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \; x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} - \text{переменные задачи}$$

Примечание (Матричная задача).

$$f(x) = (c, x) \longrightarrow \max(\min)$$

$$Ax \# b$$

$$x_i \geqslant 0, \quad j \in \mathfrak{I} \subseteq \{1, \dots, n\}$$

Примечание (Каноническая ЗЛП (КЗЛП)).

$$f(x) = (c, x) \longrightarrow \max$$

$$Ax = b$$

$$x \geqslant \vec{0}, \quad \vec{0} = (0, \dots, 0)$$

Примечание (Симметричная ЗЛП).

$$\begin{array}{ccc} f(x) = (c,x) \longrightarrow \max & & f(x) = (c,x) \longrightarrow \min \\ Ax \leqslant b & \text{или} & Ax \geqslant b \\ x \geqslant \vec{0}, \quad \vec{0} = (0,\dots,0) & & x \geqslant \vec{0} \end{array}$$

Замечание. Без ограничения общности далее положим $c_0 = 0$, так как добавление константы не влияет на процесс нахождения оптимального решения.

1.1.1 Примеры моделей ЛП

Пример. Задача о составлении оптимального плана производства.

$$\begin{array}{ll} m \text{ ресурсов}, & i = \overline{1,m} \\ n \text{ видов продукции}, & j = \overline{1,n} \end{array}$$

Известно:

b_i – запас i-го ресурса, $i = \overline{1,m}$

a_{ij} – количество ресурса i, требуемое для производства 1 единицы продукции вида j

c_j – прибыль от продажи 1 единицы j-го продукта

Необходимо составить план производства, максимализирующий суммарную прибыль.

Переменные: x_j единицы продукции вида j производства, $j = \overline{1,n}$,

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \longrightarrow \max,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i, \ i = \overline{1,m},$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = \overline{1,n}.$$

Пример. О максимальном потоке в сети.

$$\begin{array}{ll} G = (V,E) & \text{– ориентированный взвешенный граф} \\ c : E \to R & \text{– веса дуг – пропускная способность} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} s & \text{– источник} \\ t & \text{– сток} \end{array}$$

Пусть x_{ij} – поток по дуге $(i,j) \in E$

$$f = \sum_{j:(s,j)\in E} x_{sj} \longrightarrow \max,$$

$$\sum_{j:(j,i)\in E} x_{ji} = \sum_{k:(i,k)\in E} x_i k, \quad i \in V \setminus \{s,t\},$$
$$0 \leqslant x_{ij} \leqslant c_{ij}, \quad (i,j) \in E.$$