Методы оптимизации
КР-2, определения

Основано на учебно-методическом пособии “Методы оптимизации. Линейное программирование”
Файл создан Заблоцким Данилом

1 Выпуклое множество

Определение (Выпуклое множество). Множество $D \subseteq \mathbb{R}^n$ называется *выпуклым*, если вместе с любыми двумя его точками в множестве содержится отрезок, их соединящий:

$$\forall x^1, x^2 \in D,\ \forall \lambda \in (0,1) \quad x^\lambda = (1-\lambda)x^1 + \lambda x^2 \in D.$$

2 Выпуклая функция

Определение (Выпуклая функция). Функция $f : D \to \mathbb{R}$ называется *выпуклой*, если

$$\forall x^1, x^2 \in D,\ \forall \lambda \in (0,1) \quad f\big((1-\lambda)x^1 + \lambda x^2\big) \leqslant (1-\lambda)f(x^1) + \lambda f(x^2),$$

где D – выпуклое множество.

3 Задача выпуклого программирования

Задача (Выпуклого программирования).

$$\begin{cases} f(x) \to \min \\ \phi_i(x) \leqslant 0,\ i = \overline{1,m} \\ x \in G \end{cases}$$

Здесь f, ϕ_i – выпуклые на множестве G, $G \subseteq \mathbb{R}^n$ – выпуклое замкнутое множество.

4 Условие Слейтера

Примечание (Условие $\exists$-я внутренней точки множества D). $\exists \widetilde{x} \in G: \ \phi_i(\widetilde{x}) < 0 \ \forall i = \overline{1, m}$,

$D = \big\{ x \in G \mid \phi_i(x) \leqslant 0, \ i = \overline{1, m} \big\}$ – множество допустимых решений ЗВП.

5 Теорема о градиенте и производной по направлению

Теорема. Если функция $f(x)$ дифференцируема в x_0, то

$$f'_z(x_0) = \big(\nabla f(x_0), z\big).$$

Определение (Дифференцируемая в точке функция). Функция $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ *дифференцируема* в точке x_0, если она определена в некоторой окрестности этой точки и $\exists \nabla f(x_0)$:

$$f(x) = f(x_0) + \big(\nabla f(x_0), x - x_0\big) + O(\|x - x_0\|),$$

$$\text{где} \quad \nabla f(x_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \right).$$

Определение (Производная по направлению). Функция $f(x)$, точка x_0, z – направление.

Производной функции $f(x)$ в точке x_0 *по направлению* z называется предел

$$\lim_{\lambda \to 0+0} \frac{f(x_0 + \lambda z) - f(x_0)}{\lambda} = f'_z(x_0), \text{ если он } \exists.$$

6 Возможное направление

Определение (Возможное направление). Направление z называется *возможным (допустимым)* направлением в точке $x^0 \in D$, если $\forall i \in I_0$:

$$\big(\nabla \phi_i(x^0), z\big) < 0,$$

$$I_0 = \big\{ i \mid \phi_i(x^0) = 0 \big\} \text{ – множество активных ограничений.}$$

7 Прогрессивное направление

Определение (Прогрессивное направление)**.** Направление z называется *прогрессивным* в точке $x^0 \in D$, если

$$\begin{cases} \left(\nabla\phi_i(x^0), z\right) & < 0 \\ \left(f(x^0), z\right) & < 0 \end{cases}, \quad i \in I_0.$$

8 Критерий оптимальности задачи ВП

Теорема. $x^* \in D$ – оптимальное решение задачи ВП $\iff$ в точке x^* не существует прогрессивного направления.

9 Каноническая задача ВП

Определение (Каноническая задача ВП)**.** Задача ВП называется *канонической*, если её целевая функция линейна:

$$f = (c, x) \to \min .$$

10 Теорема Куна-Таккера о седловой точке

Теорема. $x^* \in G$ – оптимальное решение задачи ВП $\iff$ $\exists y^* \geqslant 0$: (x^*, y^*) является седловой точкой, соответствующей функции Лагранжа.

Определение (Седловая точка)**.** Точка (x^*, y^*) называется *седловой точкой* функции Лагранжа, если

$$L(x^*, y) \leqslant L(x^*, y^*) \leqslant L(x, y^*) \ \forall x \in G, \ y \geqslant o.$$

Определение (Функция Лагранжа для задачи ВП)**.**

$$L(x, y) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} y_i \phi_i(x), \text{ где } y_i \geqslant 0, \ i = \overline{1, m}.$$

13 Задача ЦЛП

$$
\begin{array}{lllll}
f(x) = & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max & & & (1)\\
& \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j & \leqslant & b_i, \quad i = \overline{1,m} & (2)\\
& x_j & \geqslant & 0, \quad j = \overline{1,n} & (3)\\
& x_j & \in & \mathbb{Z}, \quad j = \overline{1,n} & (4)
\end{array}
$$

14 Правильное отсечение

Определение (Правильное отсечение)**.** Пусть $\overline{x}$ – оптимальное решение текущей задачи ЛП.

Тогда отсечение $\sum_{j=1}^{n} \gamma_j x_j \leqslant \gamma_0$ называется *правильным*, если:

1. $\overline{x}$ не удовлетворяет отсечению, то есть
$$\sum_{j=1}^{n} \gamma_j \overline{x}_j > \gamma_0.$$
2. Любая целочисленная точка из области D удовлетворяет отсечению, то есть
$$\forall z \in \mathbb{Z}^n,\ z \in D \quad \sum_{j=1}^{n} \gamma_j z_j \leqslant \gamma_0.$$

15 Отсечение Гомори

Определение (Отсечение Гомори)**.**

$$\sum_{j \in N_b} \{a_{pj}\} x_j \geqslant \{a_{p0}\},$$

N_b – множество небазисных переменных.

Теорема. Отсечение Гомори является правильным.