

Методы оптимизации

КР-2, определения

Основано на учебно-методическом пособии “Методы оптимизации. Линейное программирование”
Файл создан Заблоцким Данилом

1 Выпуклое множество

Определение (Выпуклое множество). Множество $D \subseteq \mathbb{R}^n$ называется *выпуклым*, если вместе с любыми двумя его точками в множестве содержится отрезок, их соединяющий:

$$\forall x^1, x^2 \in D, \forall \lambda \in (0, 1) \quad x^\lambda = (1 - \lambda)x^1 + \lambda x^2 \in D.$$

2 Выпуклая функция

Определение (Выпуклая функция). Функция $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ называется *выпуклой*, если

$$\forall x^1, x^2 \in D, \forall \lambda \in (0, 1) \quad f((1 - \lambda)x^1 + \lambda x^2) \leq (1 - \lambda)f(x^1) + \lambda f(x^2),$$

где D – выпуклое множество.

3 Задача выпуклого программирования

Задача (Выпуклого программирования).

$$\begin{cases} f(x) \rightarrow \min \\ \phi_i(x) \leq 0, \quad i = \overline{1, m} \\ x \in G \end{cases}$$

Здесь f, ϕ_i – выпуклые на множестве G , $G \subseteq \mathbb{R}^n$ – выпуклое замкнутое множество.

4 Условие Слейтера

Примечание (Условие \exists -я внутренней точки множества D). $\exists \tilde{x} \in G : \phi_i(\tilde{x}) < 0 \ \forall i = \overline{1, m}$,

$D = \{x \in G \mid \phi_i(x) \leq 0, i = \overline{1, m}\}$ – множество дополнительных решений ЗВП.

5 Теорема о градиенте и производной по направлению

Теорема. Если функция $f(x)$ дифференцируема в x_0 , то

$$f'_z(x_0) = (\nabla f(x_0), z).$$

Определение (Дифференцируемая в точке функция). Функция $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ дифференцируема в точке x_0 , если она определена в некоторой окрестности этой точки и $\exists \nabla f(x_0)$:

$$f(x) = f(x_0) + (\nabla f(x_0), x - x_0) + O(\|x - x_0\|),$$

$$\text{где } \nabla f(x_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \right).$$

Определение (Производная по направлению). Функция $f(x)$, точка x_0 , z – направление.

Производной функции $f(x)$ в точке x_0 по направлению z называется предел

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0+0} \frac{f(x_0 + \lambda z) - f(x_0)}{\lambda} = f'_z(x_0), \text{ если он } \exists.$$

6 Возможное направление

Определение (Возможное направление). Направление z называется возможным (допустимым) направлением в точке $x^0 \in D$, если $\forall i \in I_0$:

$$(\nabla \phi_i(x^0), z) < 0,$$

$$I_0 = \{i \mid \phi_i(x^0) = 0\} \text{ – множество активных ограничений.}$$

7 Прогрессивное направление

Определение (Прогрессивное направление). Направление z называется *прогрессивным* в точке $x^0 \in D$, если

$$\begin{cases} (\nabla \phi_i(x^0), z) < 0 \\ (f(x^0), z) < 0 \end{cases}, \quad i \in I_0.$$

8 Критерий оптимальности задачи ВП

Теорема. $x^* \in D$ – оптимальное решение задачи ВП \iff в точке x^* не существует прогрессивного направления.

9 Каноническая задача ВП

Определение (Каноническая задача ВП). Задача ВП называется *канонической*, если её целевая функция линейна:

$$f = (c, x) \rightarrow \min.$$

10 Теорема Куна-Таккера о седловой точке

Теорема. $x^* \in G$ – оптимальное решение задачи ВП $\iff \exists y^* \geq 0 : (x^*, y^*)$ является седловой точкой, соответствующей функции Лагранжа.

Определение (Седловая точка). Точка (x^*, y^*) называется *седловой точкой* функции Лагранжа, если

$$L(x^*, y) \leq L(x^*, y^*) \leq L(x, y^*) \quad \forall x \in G, y \geq 0.$$

Определение (Функция Лагранжа для задачи ВП).

$$L(x, y) = f(x) + \sum_{i=1}^m y_i \phi_i(x), \text{ где } y_i \geq 0, i = \overline{1, m}.$$

13 Задача ЦЛП

$$f(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max \quad (1)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = \overline{1, m} \quad (2)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n} \quad (3)$$

$$x_j \in \mathbb{Z}, \quad j = \overline{1, n} \quad (4)$$

14 Правильное отсечение

Определение (Правильное отсечение). Пусть \bar{x} – оптимальное решение текущей задачи ЛП.

Тогда отсечение $\sum_{j=1}^n \gamma_j x_j \leq \gamma_0$ называется *правильным*, если:

1. \bar{x} не удовлетворяет отсечению, то есть

$$\sum_{j=1}^n \gamma_j \bar{x}_j > \gamma_0.$$

2. Любая целочисленная точка из области D удовлетворяет отсечению, то есть

$$\forall z \in \mathbb{Z}^n, \quad z \in D \quad \sum_{j=1}^n \gamma_j z_j \leq \gamma_0.$$

15 Отсечение Гомори

Определение (Отсечение Гомори).

$$\sum_{j \in N_b} \{a_{pj}\} x_j \geq \{a_{p0}\},$$

N_b – множество небазисных переменных.

Теорема. Отсечение Гомори является правильным.