

Теория алгоритмов и сложности вычислений

Заблоцкий Данил

22 марта 2024 г.

Оглавление

1	Введение	2
1.1	Неразрешимые проблемы	5
	Список используемой литературы	5

Глава 1

Введение

Лекция 1: Начало

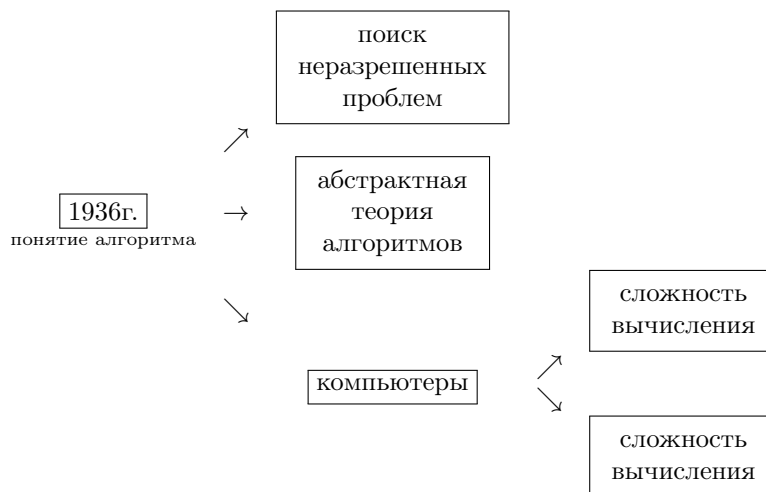
от 13 фев 12:45

Примечание (История). ?

1936г.	алгоритм Евклида (>2 тыс.) алгоритм сложения, умножения (>1 тыс.) метод Гаусса ⋮
1900г.	Гильберт

аксиомы \longrightarrow теоремы

1931г.	Гёдель
1936г.	формализация понятия алгоритма: модели вычислений Чёрч – λ -исчисление Тьюринг – машина Тьюринга Пост – машина Поста Марков – алгорифмы Маркова Клини – рекурсивные функции

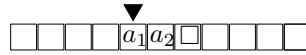


Примечание.

$A = \{a_1, \dots, a_m\}$ – рабочий алфавит

Определение 1.1 (Машина Тьюринга). *Машина Тьюринга* (МТ) над алфавитом A состоит из:

1. Бесконечной в обе стороны ленты, разбитой на ячейки. Ячейка может быть пустой (записан \square), или содержать символ из A .



2. Каретка, которая движется над лентой, читает и пишет символы в ячейки.
3. Внутренние состояния:

$$q_0, q_1, q_2, \dots, q_n \quad \left| \quad \begin{array}{l} q_0 - \text{конечное} \\ q_1 - \text{начальное} \end{array} \right.$$

4. Программа – набор правил вида:

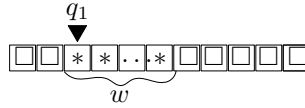
$$(q_i, a) \longrightarrow (q_j, b, S),$$

где q_i – любое состояние $\neq q_0$
 a, b – символы из $A \cup \{\square\}$
 q_j – набор состояний
 S – сдвиг R и L
 ции (q_i, a)

$$q_i \neq q_0, \quad a \in A \cup \{\square\}.$$

Определение 1.2 (Работа МТ). Работа МТ M на слове $w \in A^*$:

1. (на рисунке)



2. Согласно программе M работает.
3. M останавливается, если она нападает в q_0

$$(M(w) \downarrow)$$

и результат работы $M(w)$ – это слово, которое остается записанным. Иначе M не останавливается на w

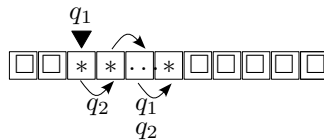
$$(M(w) \uparrow).$$

Определение 1.3 (Вычисление функции МТ). МТ M вычисляет функцию $f_M : A^* \rightarrow A^*$, если $\forall w \in A^*$ если $f_M(w)$ определена, то $M(w) \downarrow$ и $M(w) = f_M(w)$, а если $f_M(w)$ не определена, то $M(w) \uparrow$.

Примечание (Тезис Тьюринга). Если $f : A^* \rightarrow A^*$ вычислима интуитивно, то \exists МТ M , которая ее вычисляет.

Пример.

$$f(w) = \begin{cases} 1, & \text{если } |w| \text{ – четная длина } w \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$



$q_1 \Rightarrow$ четная

$q_2 \Rightarrow$ нечетная

$$\begin{array}{ll} (q_1, 0) \rightarrow (q_2, \square, R) & (q_2, 0) \rightarrow (q_1, \square, R) \\ (q_1, 1) \rightarrow (q_2, \square, R) & (q_2, 1) \rightarrow (q_1, \square, R) \\ (q_1, \square) \rightarrow (q_0, 1, L) & (q_2, \square) \rightarrow (q_0, 0, R) \end{array}$$

Лекция ? : Продолжение

от 12 мар 12:45

1.1 Неразрешимые проблемы

Примечание (Проблема истинности в арифметике). Гильберт, 1900.

$$\mathfrak{N} = \langle \mathbb{N}, +, \cdot, 1 \rangle,$$

$$\forall x \exists y (x = y + y), \quad \exists x \exists y (x = y + y),$$

$$P(z) = \forall x \forall y \left((z = xy) \rightarrow ((x = 1) \vee (y = 1)) \right) \wedge \neg(z = 1) - \text{простое число},$$

$$\forall x \exists y \exists z \left(\neg(x = 2) \rightarrow (P(y) \wedge P(z) \wedge (x + x = y + z)) \right) - \text{гипотеза Гольдбака}.$$

- **ВХОД** арифметическое утверждение Φ ;
- **ВЫХОД** 1, если Φ истинно над \mathfrak{N} ($\mathfrak{N} \models \Phi$),
0 иначе.

Теорема 1.4 (Чери, 1936). Проблема истинности в арифметике неразрешима.

Примечание (Проблема истинности в геометрии).

$$\mathfrak{R} = \langle \mathbb{R}, +, -, \cdot, /, 0, 1 \rangle,$$

- **ВХОД** утверждение Φ ;
- **ВЫХОД** 1, если Φ истинно над \mathfrak{R} ($\mathfrak{R} \models \Phi$),
0 иначе.

Теорема 1.5 (Тарекий, 1940-е). Проблема истинности в геометрии *разрешима*.

Примечание (Десятая проблема Гильберта). 23 проблем, 1900.

- **ВХОД** диофантово уравнение $P(x_1, \dots, x_n) = 0$;
- **ВЫХОД** 1, если \exists решение $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ $P(a_1, \dots, a_n) = 0$,
0 иначе.

Теорема 1.6 (1970, М.Дэвис, Х.Пантнем, Дж.Робинсон, Ю.В. Матиясевич). 10-я проблема Гильберта неразрешима.

Литература

- [1] И.В. Ашаев – «Основы теории алгоритмов»
- [2] Верещагин, Вялый, Шень – «Вычислимые функции»
- [3] Китаев, Вялый, Шень – «Классические и квантовые вычисления»