Теория вероятностей

Данил Заблоцкий

14 февраля 2024 г.

Оглавление

Лекция 1: Начало

от 14 фев 8:45

Введение

Примечание. *Массовое явление* – явление, для которого можно неоднозначно повторить исходные условия.

Случайное событие – результат эксперимента.

Определение 1 (Благоприятное событие, подмножество с подмножеством всех благоприятных исходов)**.** Пусть A – случайное событие, $\omega \in \Omega$ – *благоприятное событие* для A, если ω влечет A.

Тогда A – *подмножество* Ω *с подмножеством всех благоприятных для* A *исходов*.

Пример. A и B – случайные события $(A, B \subset \Omega)$,

$$\text{не } A = \overline{A} = \Omega \setminus A$$
$$A \text{ и } B = A \cdot B = A \cap B$$
$$A \text{ или } B = A + B = A \cup B$$

Определение 2 (Алгебра, сигма-алгебра)**.** F – семейство подмножеств Ω. F называется *алгерой*, если:

1. $\Omega \in F$ $(\varnothing \in F)$.
2. $A \in F \Rightarrow \overline{A} \in F$.
3. $A, B \in F \Rightarrow AB \in F,\ A + B \in F$.

Если, кроме этого, верно $\forall \{A_\alpha\} \subset F\ \bigcap_\alpha A_\alpha \in F$, то F называется *сигма-алгеброй (σ-алгеброй)*.

Замечание. Случайные события должны образовывать σ-алгебру.

Замечание. Очевидно, что $\overline{\Sigma_\alpha A_\alpha} = \Pi_\alpha \overline{A_\alpha}$, $\overline{\Pi_\alpha A_\alpha} = \Sigma_\alpha \overline{A_\alpha}$.

Замечание. $A \Rightarrow B$ тождественно $A \subseteq B$.

$A \Leftrightarrow B$ тождественно $A = B$.

Определение 3 (Мера на сигма-алгебре)**.** Вероятностное пространство (Ω, F, P).

Ω – множество элементов исходов, F – σ-алгебра, P – *мера* на F, то есть $P : F \longrightarrow R$:

A1 $\quad \forall A \in F \quad P(A) \geqslant 0.$

A2 $P(\Omega) = 1$ (условие нормировки), мера конечна.

A3 $\forall A, B \in F \quad AB = \varnothing \Rightarrow P(A + B) = P(A) + P(B)$.

A4 $\{A_n\} \subset F,\ A_{n+1} \subseteq A_n \quad \bigcap_n A_n = \varnothing,\ \lim\limits_{n\to\infty} P(A_n) = 0$ (непрерывность меры).

Теорема 1 (Свойство вероятностей). (Ω, F, P) – вероятностное пространство.

1. $A \in F \Rightarrow P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.
2. $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leqslant P(B)$.
3. $A_1, \ldots, A_n \in F \quad A_iA_j = \varnothing\ (i \neq j)$.
4. $A_1, \ldots, A_n \in F \quad P(A_1 + \ldots + A_n) \leqslant \sum_{k=1}^n P(A_k)$.
5. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

Доказательство.

1. $\begin{array}{l} B = \overline{A},\ AB = \varnothing,\ A + B = \Omega \\ 1 = P(\Omega) = P(A + \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}) \end{array} \Rightarrow P(\varnothing) = 0.$

2. $\begin{array}{l} C = B \setminus A = B \cup \overline{A} \in F,\ B = A + C,\ AC = \varnothing \\ P(B) = P(A) + P(C) \geqslant P(A) \end{array} \Rightarrow \forall \underset{\varnothing \subseteq A \subseteq \Omega}{A \in F}$

$$0 \leqslant P(A) \leqslant 1.$$

3. Индукция по n.

4. $\begin{array}{l} B_k = A_k \setminus (\sum_{i=1}^{k-1} A_i),\ \sum_{k=1}^n A_k = \sum_{k=1}^n B_k \\ P(\sum A_k) = P(\sum B_k) = \sum P(B_k) \leqslant \sum P(A_k) \end{array} \Rightarrow B_k \subseteq A_k.$

5. $C = A \setminus B. \quad P(A) = P(C + AB) = P(C) + P(AB)$.

   $P(C) = P(A) - P(AB). \quad P(A \cup B) = P(B + C) = P(B) + P(C) = P(B) + P(A) - P(AB)$.

$\square$

Примечание (σ-аддитивность). A3*

$$\{A_n\} \subset F \quad A_iA_j = \varnothing \Rightarrow P\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

Теорема 2.

$$\text{A1}, \text{A2}, \text{A3} \text{ и } \text{A4} \Leftrightarrow \text{A1}, \text{A2}, \text{A3}^*.$$

Доказательство. Покажем, что A3 и A4 $\Rightarrow$ A3*.

$\{A_n\} \subset F \quad A_i A_j = \varnothing. \quad B = \sum_{k=n+1}^{\infty}, \ A = \sum_{k=1}^{\infty} A_k,$

$$A = A_1 + \ldots + A_n + B_n,$$

$$P(A) = P(A_1) + \ldots + P(A_n) + P(B_n).$$

$B_{n+1} \subseteq B_n, \ \bigcap_n B_n = \varnothing \Rightarrow B_n \longrightarrow 0, \ P(B_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k) + P(B_n) \longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) + 0.$$

Пусть выполняется A3*.

$A_1, \ldots, A_n, ?$ последовательность $A_1, \ldots, A_n, \varnothing, \ldots, \varnothing, \ldots,$

$$\left.\begin{array}{ccc} P\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right) & = & P\left(\sum_{k=1}^{n} A_k\right) \\ \shortparallel & & \\ \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) & = & \sum_{k=1}^{n} P(A_k) \end{array}\right. \Rightarrow \text{A3}.$$

$\{A_n\} \subset F, \ A_n \supseteq A_{n+1}$ и $\bigcap A_n = \varnothing.$

$B_{n+1} = A_n \setminus A_{n+1}, \quad B?B = \varnothing, \ \bigcup B_n = \bigcup A_n.$

$$B_1 = A_1.$$

$$\underset{\substack{\shortparallel \\ P(A_1)}}{P\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right)} = P\left(\sum_{n=1}^{\infty} P(B_n)\right) \text{ – сходится.}$$

$$A_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} B_k \Rightarrow P(A_n) = \sum_{k=n+1}^{\infty} P(B_k) \to 0 \Rightarrow \text{A4}.$$

□

Пример. $\Omega = \{B, H\}, \ F = \big\{\varnothing, \Omega, \{B\}, \{H\}\big\}.$