Математический анализ

Данил Заблоцкий

17 января 2024 г.

Оглавление

Глава 5

Дифференциальное исчисление функций многих переменных

Лекция 1: Функции многих переменных

от 01 сен 10:28

5.1 Производная по вектору

Примечание. Пусть $x = (x_1, x_2, x_3) = x(t)$, $f\big(x(t)\big) = f(x_1, x_2, x_3)$, тогда:

$$\frac{df\big(x(t)\big)}{dt} = \frac{\delta f}{\delta x_1} \cdot \frac{dx_1}{dt} + \frac{\delta f}{\delta x_2} \cdot \frac{dx_2}{dt} + \frac{\delta f}{\delta x_3} \cdot \frac{dx_3}{dt} = \\ = \frac{\delta f}{\delta x_1} \cdot v_1 + \frac{\delta f}{\delta x_2} \cdot v_2 + \frac{\delta f}{\delta x_3} \cdot v_3,$$

где $\vec{v} = \{v_1, v_2, v_3\}$ – скорость частицы, перемещающейся по γ-ну $x(t)$.

Определение 1 (Производная функции по вектору)**.** Пусть D в $\mathbb{R}^n$ – область, $f : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$, вектор $v \in T\mathbb{R}^n_{x_0}$ – касательное пространство к R^n в точке x_0 (совокупность всех векторов, исходящих из точки x_0).

Производной функции f по вектору v называется величина

$$\frac{\delta f}{\delta \vec{v}} = D\vec{v}f(x_0) \coloneqq \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t}, \text{ если } \lim \exists.$$

Утверждение. Пусть $f : D \to \mathbb{R}$ – дифференцируемо в точке $x_0 \in D$. Тогда $\forall \vec{v} \in T\mathbb{R}^n_{x_0} \exists \frac{\delta f}{\delta \vec{v}}(x_0)$:

$$\frac{\delta f}{\delta \vec{v}}(x_0) = \frac{\delta f}{\delta x_1}(x_0) \cdot v_1 + \frac{\delta f}{\delta x_2}(x_0) \cdot v_2 + \ldots + \frac{\delta f}{\delta x_n}(x_0) \cdot v_n = df(x_0) \cdot \vec{v},$$

где $df(x_0) \cdot \vec{v}$ – скалярное произведение,

$$df(x_0) = \left\{ \frac{\delta f}{\delta x_1}(x_0), \frac{\delta f}{\delta x_2}(x_0), \ldots, \frac{\delta f}{\delta x_n}(x_0) \right\},$$
$$\vec{v} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$$

Доказательство. Рассмотрим отображение $\gamma : [0;1] \to \mathbb{R}^n$:

$$\vec{\gamma}(t) = \vec{x_0} + \vec{v} \cdot t \Leftrightarrow \vec{\gamma}(t) = \left\{ \begin{array}{l} x_1 = x_0^{(1)} + v_1 \cdot t \\ x_2 = x_0^{(2)} + v_2 \cdot t \\ \vdots \\ x_n = x_0^{(n)} + v_n \cdot t \end{array} \right\}, \quad t \in [0;1]$$

Заметим, что $\gamma(t)$ дифференцируемо в точке $t = 0 \Rightarrow$ отображение $f \circ \gamma : [0;1] \to \mathbb{R}$ – дифференцируемо в точке $t = 0$.

$$f \circ \gamma = f\big(\gamma(t)\big) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{df\big(\gamma(t)\big)}{dt}\bigg|_{t=0} = \left(\frac{\delta f}{\delta x_1} \cdot \frac{dx_1}{dt} + \frac{\delta f}{\delta x_2} \cdot \frac{dx_2}{dt} + \ldots + \frac{\delta f}{\delta x_n} \cdot \frac{dx_n}{dt} \right)\bigg|_{t=0} =$$
$$= \left(\frac{\delta f}{\delta x_1} \cdot v_1 + \frac{\delta f}{\delta x_2} \cdot v_2 + \ldots + \frac{\delta f}{\delta x_n} \cdot v_n \right)\bigg|_{t=0} = df\big(\gamma(0)\big) \cdot \vec{v}$$

Если f дифференцируемо в точке $x_0 \Rightarrow \forall \vec{\gamma}(t) = \vec{x_0} + \vec{v} \cdot t$:

$$\frac{df\big(\gamma(t)\big)}{dt} \coloneqq \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + v \cdot t) - f(x_0)}{t} = \frac{\delta f}{\delta \vec{v}}(x_0)$$

□

Утверждение (Известно из алгебры). Если $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – линейное, то $\exists! \vec{a} \in \mathbb{R}^n : \forall x \in \mathbb{R}^n$

$$L(x) = \vec{a} \cdot \vec{x},$$

$$\big(L(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 L(x_1) + \lambda_2 L(x_2)\big)$$

где $\vec{a} \cdot \vec{x}$ – скалярное произведение.

Определение 2 (Градиент функции в точке). Пусть $f : D \to \mathbb{R}$, D – область в $\mathbb{R}^n$, f – дифференцируема в точке $x \in D$. Вектор $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$:

$$df(x) \cdot h = \vec{a} \cdot h, \quad h \in \mathbb{R}$$

называется *градиентом функции f в точке $x \in \mathbb{R}^n$* и обозначается

$$gradf(x)$$

Если в $\mathbb{R}^n$ зафиксировать ортонормированный базис, то

$$gradf(x) = \left\{ \frac{\delta f}{\delta x_1}(x), \frac{\delta f}{\delta x_2}(x), \ldots, \frac{\delta f}{\delta x_n}(x) \right\}$$

Определение 3 (Производная по направлению вектора). Если $\vec{v} \in T\mathbb{R}^n_{x_0}$, $|\vec{v}| = 1$, то $\frac{\delta f}{\delta \vec{v}}(x)$ называется *производной по направлению вектора $\vec{v}$*.

Пример.

$$\begin{cases} \cos\alpha = \cos\langle\vec{v}, 0x\rangle \\ \cos\beta = \cos\langle\vec{v}, 0y\rangle \end{cases} \text{ – направляющие косинусы}$$

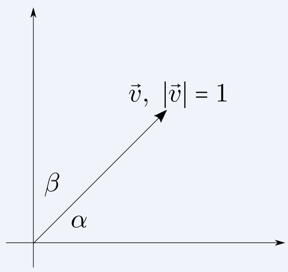


Рис. 5.1: $\vec{v} = \{\cos\alpha, \cos\beta\}$

Так как при данных условиях $\vec{v} = \{\cos\alpha_1, \cos\alpha_2, \ldots, \cos\alpha_n\}$:

$$\frac{\delta f}{\delta \vec{v}}(x) = \frac{\delta f}{\delta x_1} \cdot \cos\alpha_1 + \ldots + \frac{\delta f}{\delta x_n} \cdot \cos\alpha_n.$$

Примечание (Смысл градиента). Градиент показывает направление самого быстрого возрастания функции.

5.2 Основные теоремы дифференциального исчисления функций многих переменных

Теорема 1 (О среднем). Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$, $x \in D$, $x+h \in D$, $[x, x+h] \subset D$, $f : D \to \mathbb{R}$ – дифференцируемо на $(x, x+h)$ и непрерывно на $[x, x+h]$. Тогда $\exists \xi \in (x, x+h)$:

$$f(x+h) - f(x) = f'(\xi) \cdot h = \frac{\delta f}{\delta x_1}(\xi) \cdot h^1 + \frac{\delta f}{\delta x_2}(\xi) \cdot h^2 + \ldots + \frac{\delta f}{\delta x_n}(\xi) \cdot h^n,$$

где $\{1, 2, \ldots, n\}$ над h – индексы.

Доказательство. Рассмотрим отображение $\gamma : [0;1] \to D$, определенное:

$$\gamma(t) = x + t \cdot h, \quad \gamma(t) = \begin{cases} x_1(t) = x_1 + t \cdot h^1 \\ x_2(t) = x_2 + t \cdot h^2 \\ \vdots \\ x_n(t) = x_n + t \cdot h^n \end{cases},$$

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad h = \{h^1, h^2, \ldots, h^n\}, \ t \in [0;1],$$

$$\begin{matrix} \gamma(0) = x, \\ \gamma(1) = x + h \end{matrix}, \quad [0;1] \xrightarrow{\gamma} [x; x+h].$$

Заметим, что $gamma(t)$ дифференцируемо на $(0;1)$, непрерывно на $[0;1]$, причем $\big(x_i(t)\big)' = h^i$.

Рассмотрим функцию $F(t) = f\big(\gamma(t)\big)$, $F : [0;1] \to \mathbb{R}$. Имеем:

1. F – дифференцируема на $(0;1)$ (как композиция двух дифференцируемых).
2. F – непрерывна на $[0;1]$ (как композиция двух непрерывных).

Следовательно, по теореме Лагранжа:

$$\begin{matrix} F(1) & - & F(0) & = F'(\tau) \cdot (1-0), \ \tau \in (0;1) \\ \shortparallel & & \shortparallel & \\ f(x+h) & - & f(x) & = \Big(f\big(\gamma(\tau)\big)\Big)' \cdot 1 \end{matrix},$$

$$\Big(f\big(\gamma(\tau)\big)\Big)' \cdot 1 = f'\big(\gamma(\tau)\big) \cdot \gamma'(\tau) = \underset{\substack{\shortparallel \\ x_1'(t)}}{\frac{\delta f}{\delta x_1}} \cdot h' + \frac{\delta f}{\delta x_2} \cdot h_2 + \ldots + \frac{\delta f}{\delta x_n} \cdot h^n.$$

Пусть $\gamma(\tau) = \xi \in D$, тогда:

$$f(x+h) - f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\delta f}{\delta x_1}(\xi) & \cdots & \frac{\delta f}{\delta x_n}(\xi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h^1 \\ \vdots \\ h^n \end{pmatrix} = f'(\xi) \cdot h.$$

□

Следствие. Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}$ – дифференцируема на D и $\forall x \in D$ $d(fx) = 0$ (то есть $\forall i$ $\frac{\delta f}{\delta x_i} = 0$). Тогда $f(x) = const$.

Доказательство. Пусть $x_0 \in D$ и $B(x_0, \rho) \subset D$ – шар $\exists$, так как D – область. Тогда $\forall x \in B(x_0, \rho)$ $[x_0; x] \subset B(x_0, \rho) \subset D$. Следовательно:

$$f(x) - f(x_0) = \underset{\left\{\frac{\delta f}{\delta x_1}(\xi), \ldots, \frac{\delta f}{\delta x_n}(\xi)\right\}}{\underset{\parallel}{f'(\xi)}} \cdot (x - x_0) = 0.$$

Таким образом, $\forall x \in B(x_0, \rho)$ $f(x) = f(x_0)$.

Построим путь из точки x_0 к некоторой точке $x \in D$:

$$\gamma : [0; 1] \to D, \quad \begin{matrix} \gamma(0) = x_0 \\ \gamma(1) = x \end{matrix}.$$

По определению пути, γ – непрерывно. Тогда $\exists \delta :$ $\forall 0 \leqslant t \leqslant \delta$

$$\gamma(t) \in B(x_0, \rho) \Rightarrow f\big(\gamma(t)\big) = f(x_0), \ t \in [0; \delta],$$

где t – точка из $B(x_0, \rho)$.

Пусть $\Delta = \sup \delta \Rightarrow f\big(\gamma(\Delta)\big) = f(x_0)$. Покажем, что $\Delta = 1$.

Пусть $\Delta < 1$ $(\Delta \neq 1)$. Построим шар $B\big(\gamma(\Delta), \rho_\Delta\big)$. Тогда $\exists \varepsilon > 0$: $\Delta - \varepsilon < t < \Delta + \varepsilon$.

Но тогда $f\big(\gamma(\Delta+\varepsilon)\big) = f(x_0)$ (так как точка $\gamma(\Delta+\varepsilon) \in B\big(\gamma(\Delta), \rho_\Delta\big)$) – противоречие с тем, что $\Delta = \sup \delta \Rightarrow \Delta = 1$.

$\gamma(1) = x$ и $f(x) = f(x_0) \Rightarrow$ так как $x \in D$ – произведение точек, то имеем, что $\forall x \in D$ $f(x) = f(x_0) \Rightarrow f(x)$ – $const$. □

Теорема 2 (Достаточное условие дифференцируемости функции)**.** Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}$, f имеет непрерывные частные производные в каждой окрестности точки $x \in D$. Тогда f – дифференцируема в точке x.

Доказательство. Без ограничения общности, будем считать, что окрестность точки $x_0 \in D$ является шаром $B(x_0, \rho) \subset D$.

Пусть $h : x_0 + h \in B(x_0, \rho)$. Здесь

$$\begin{matrix} x_0 = (x^1, x^2, \ldots, x^n) \\ x_0 + h = (x^1 + h^1, x^2 + h^2, \ldots, x^n + h^n) \end{matrix}.$$

Заметим, что точки

$$\begin{matrix} x_1 = (x^1, x^2 + h^2, \ldots, x^n + h^n) \\ x_2 = (x^1, x^2, x^3 + h^3, \ldots, x^n + h^n) \\ \vdots \\ x_{n-1} = (x^1, x^2, x^3, \ldots, x^{n-1}, x^n + h^n) \end{matrix} \in B(x_0, \rho).$$

$$
\begin{aligned}
&f(x_0+h)-f(x_0) = \\
&\qquad = f(x_0+h)-f(x_1)+f(x_1)-f(x_2)+f(x_2)-\ldots \\
&\qquad \ldots - f(x_{n-1})+f(x_{n-1})-f(x_0) = \\
&\qquad = f(x^1+h^1,\ldots,x^n+h^n)-f(x^1,x^2+h^2,\ldots,x^n+h^n)+ \\
&\qquad + f(x^1,x^2+h^2,\ldots,x^n+h^n)-f(x^1,x^2,\ldots,x^n+h^n)+ \\
&\qquad + f(x^1,x^2,\ldots,x^n+h^n)-\ldots-f(x^1,x^2,\ldots,x^{n-1},x^n)+ \\
&\qquad + f(x^1,x^2,\ldots,x^{n-1},x^n+h^n)-f(x^1,x^2,\ldots,x^n) = \\
&\qquad = \left|\begin{array}{c}\text{Теорема Лагранжа для}\\ \text{функции одной переменной}\end{array}\right| = \\
&\qquad = \frac{\delta f}{\delta x_1}(x^1+\theta^1h^1,x^2+h^2,\ldots,x^n+h^n)\cdot h^1+ \\
&\qquad + \frac{\delta f}{\delta x^2}(x^1,x^2+\theta^2h^2,\ldots,x^n+h^n)\cdot h^2+\ldots \\
&\qquad \ldots + \frac{\delta f}{\delta x^n}(x^1,x^2,\ldots,x^n+\theta^nh^n)\cdot h^n.
\end{aligned}
$$

Используя непрерывность частных производных, запишем:

$$
\begin{aligned}
&f(x_0+h)-f(x_0) = \\
&\qquad = \frac{\delta f}{\delta x^1}(x^1,x^2,\ldots,x^n)\cdot h^1+\alpha^1(h^1)+\ldots \\
&\qquad \ldots + \frac{\delta f}{\delta x^n}(x^1,x^2,\ldots,x^n)\cdot h^n+\alpha^n(h^n),
\end{aligned}
$$

где $\alpha^1,\alpha^2,\ldots,\alpha^n$ стремятся к нулю при $\vec{h}\to 0$.

Это означает, что:

$$
\begin{array}{c}
f(x_0+h)-f(x_0) = L(x_0)\cdot h + \underset{h\to 0}{o}(h) \\
\left(\text{где } L(x_0) = \frac{\delta f}{\delta x^1}(x_0)\cdot h^1+\ldots+\frac{\delta f}{\delta x^n}(x_0)\cdot h^n = df(x_0)\right)
\end{array} \Rightarrow
$$

$\Rightarrow$ по определению $f(x)$ дифференцируема в точке x_0. □

Лекция 2: Производные высших порядков

от 06 сен 08:47

5.3 Производные высших порядков

Определение 4 (Вторая производная функции по переменным)**.** Пусть $f: D\to\mathbb{R}$, D – область в $\mathbb{R}^n$. Производная по переменной x^j от производной по переменной x^i называется *второй производной функции f по переменным x^i, x^j* и обозначается

$$\frac{\delta^2 f}{\delta x^i \delta x^j}(x) \text{ или } f''_{x^i,x^j}(x).$$

Теорема 3 (О смешанных производных)**.** Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}$, $x \in D$, f имеет в D непрерывные смешанные производные (второго порядка). Тогда эти производные не зависят от порядка дифференцирования.

Доказательство. Пусть $\frac{\delta^2 f}{\delta x^i \delta x^j}$ и $\frac{\delta^2 f}{\delta x^j \delta x^i}$ – непрерывны в точке $x \in D$.

Так как остальные переменные фиксированы, то можно считать, что f зависит только от двух переменных.

Тогда $D \subset \mathbb{R}^2$, $f : D \to \mathbb{R}$ и $\frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y}$ и $\frac{\delta^2 f}{\delta y \delta x}$ – непрерывны в точке $x_0 = (x, y) \in D$.

Покажем, что $\frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y} = \frac{\delta^2 f}{\delta y \delta x}$.

Рассмотрим функции:

$$\begin{matrix} \phi(t) = f(x + t\cdot\Delta x, y + \Delta y) - f(x + t\cdot\Delta x, y) \\ \psi(t) = f(x + \Delta x, y + t\cdot\Delta y) - f(x, y + t\cdot\Delta y) \end{matrix}, \quad t \in [0; 1].$$

Имеем:

$$\phi(1) - \phi(0) = \\ = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y) - f(x, y + \Delta y) + f(x, y)$$

$$\psi(1) - \psi(0) = \\ = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y) + f(x, y)$$

Тогда:

$$\phi(1) - \phi(0) = \psi(1) - \psi(0) \tag{5.1}$$

$$\begin{aligned} \phi(1) - \phi(0) &= \phi'(\xi)\cdot(1 - 0) = \\ &= \frac{\delta f}{\delta x}(x + \xi\cdot\Delta x, y + \Delta y)\cdot\Delta x + \frac{\delta f}{\delta y}(x + \xi\cdot\Delta x, y + \Delta y) - \\ &\quad - \frac{\delta f}{\delta x}(x + \xi\cdot\Delta x, y)\cdot\Delta x - \frac{\delta f}{\delta y}(x + \xi\cdot\Delta x, y)\cdot 0 = \\ &= \left(\frac{\delta f}{\delta x}(x + \xi\cdot\Delta x, y + \Delta y) - \frac{\delta f}{\delta x}(x + \xi\cdot\Delta x, y)\right) = \\ &= \left| \begin{matrix} \text{по теореме Лагранжа для} \\ \text{функции 1-ой переменной} \end{matrix} \right| = \\ &= \frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y}(x + \xi\cdot\Delta x, y + \eta\cdot\Delta y)\Delta x\Delta y. \end{aligned}$$

Положим $(x + \xi\Delta x, y + \eta\cdot\Delta y) = P \in \Pi$.

Аналогично:

$$\psi(1) - \psi(0) = \psi'(\xi)\cdot(1-0) =$$
$$= \frac{\delta f}{\delta x}(x+\Delta x, y+\xi\cdot\Delta y)\cdot 0 + \frac{\delta f}{\delta y}(x+\Delta x, y+\xi\cdot\Delta y)\cdot\Delta y -$$
$$- \frac{\delta f}{\delta x}(x, y+\xi\cdot\Delta y)\cdot 0 - \frac{\delta f}{\delta y}(x, y+\xi\cdot\Delta y)\cdot\Delta y =$$
$$= \left(\frac{\delta f}{\delta y}(x+\Delta x, y+\xi\cdot\Delta y) - \frac{\delta f}{\delta y}(x, y+\xi\cdot\Delta y)\right)\Delta y =$$
$$= \left| \begin{array}{l}\text{по теореме Лагранжа для}\\ \text{функции 1-ой переменной}\end{array} \right| =$$
$$= \frac{\delta^2 f}{\delta y\delta x}(x+\tau\cdot\Delta x, y+\xi\cdot\Delta y)\Delta y\Delta x$$

Положим, что $(x+\tau\cdot\Delta x, y+\xi\cdot\Delta y) = Q$.
Тогда из 5.1 следует, что:

$$\begin{array}{ccc} \frac{\delta^2 f}{\delta x\delta y}(P)\Delta x\Delta y & = & \frac{\delta^2 f}{\delta y\delta x}(Q)\Delta x\Delta y \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ \frac{\delta^2 f}{\delta x\delta y}(x+\xi\cdot\Delta x, y+\eta\cdot\Delta y) & = & \frac{\delta^2 f}{\delta y\delta x}(x+\tau\cdot\Delta x, y+\xi\cdot\Delta y) \end{array}.$$

Используя непрерывность частных производных при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0 \Rightarrow$

$$x+\xi\cdot\Delta x \to x, \quad y+\eta\cdot\Delta y \to y.$$

Таким образом,

$$\frac{\delta^2 f}{\delta x\delta y} = \frac{\delta^2 f}{\delta y\delta x}.$$

□

5.4 Формула Тейлора

Определение 5 (Гладкая функция класса $C^{(k)}$). Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}$. Будем говорить, что f является *гладкой функцией класса* $C^{(k)}$ (k-го порядка), то есть $f \in C^{(k)}(D,\mathbb{R})$, если f имеет непрерывные частные производные до k-го порядка включительно.

Теорема 4 (Формула Тейлора). Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}$, $f \in C^{(k)}(D,\mathbb{R})$, $x \in D$, $x+h \in D$, $[x; x+h] \subset D$. Тогда:

$$f(x+h) = f(x) + \sum_{i=1}^{k-1}\frac{1}{i!}\left(\frac{\delta}{\delta x^1}\cdot h^1 + \ldots + \frac{\delta}{\delta x^n}\cdot h^n\right)^i \cdot f(x) + R^k,$$

где R^k – остаточный член,

$$R^k = \frac{1}{k!}\left(\frac{\delta}{\delta x^1}\cdot h^1 + \ldots + \frac{\delta}{\delta x^n}\cdot h^n\right)^k \cdot f(x+\xi\cdot h),$$

$$x = (x^1, \ldots, x^n), \quad h = (h^1, \ldots, h^n).$$

Доказательство. Рассмотрим функцию:

$$\phi(t) = f(x+t\cdot h),\ t\in[0;1]$$

Применим формулу Тейлора к $\phi(t)$:

$$\phi(1) = \phi(0) + \frac{1}{1!}\cdot\phi'(0)\cdot(1-0) + \frac{1}{2!}\cdot\phi''(0)\cdot(1-0)^2 + \\ + \frac{1}{3!}\cdot\phi'''(0)\cdot(1-0)^3 + \ldots + \frac{1}{k!}\cdot\phi^{(k)}\cdot(1-0)^k. \quad (5.2)$$

$$\phi(1) = f(x+h), \quad \phi(0) = f(x).$$

$$\phi'(0) = f'(x+th)\cdot(x+t\cdot h)'_k\Big|_{t=0} =$$

$$= \begin{pmatrix}\frac{\delta f(x+t\cdot h)}{\delta x^1} & \frac{\delta f(x+t\cdot h)}{\delta x^2} & \cdots & \frac{\delta f(x+t\cdot h)}{\delta x^n}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}h^1\\ h^2\\ \vdots\\ h^n\end{pmatrix}\Bigg|_{t=0} =$$

$$= \left(\frac{\delta f(x+t\cdot h)}{\delta x^1}\cdot h^1 + \frac{\delta f(x+t\cdot h)}{\delta x^2}\cdot h^2 + \ldots + \frac{\delta f(x+t\cdot h)}{\delta x^n}\cdot h^n\right)\Bigg|_{t=0} =$$

$$= \frac{\delta f}{\delta x^1}(x)\cdot h^1 + \frac{\delta f}{\delta x^2}(x)\cdot h^2 + \ldots + \frac{\delta f}{\delta x^n}(x)\cdot h^n =$$

$$= \left(\frac{\delta}{\delta x^1}\cdot h^1 + \ldots + \frac{\delta}{\delta x^n}\cdot h^n\right)\cdot f(x)$$

$$\phi''(0) = \left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\delta f(x+t\cdot h)}{\delta x^i}\cdot h^i\right)'_t\Bigg|_{t=0} =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\delta^2 f(x+t\cdot h)}{\delta x^i\delta x^j}\cdot h^i h^j\right)\Bigg|_{t=0} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\delta^2 f(x)}{\delta x^i\delta x^j}\cdot h^i h^j =$$

$$= \left(\frac{\delta}{\delta x^1}\cdot h^1 + \ldots + \frac{\delta}{\delta x^n}\cdot h^n\right)^2\cdot f(x)$$

И так далее. Подставим получившиеся выражения в 5.2 и получим искомое. □

Пример. Запишем формулу Тейлора для функции $f(x,y)$:

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{1}{1!}\left(\frac{\delta f}{\delta x}(x_0,y_0)\Delta x + \frac{\delta f}{\delta y}(x_0,y_0)\Delta y\right) +$$
$$+ \frac{1}{2!}\left(\frac{\delta^2 f}{\delta x^2}(x_0,y_0)\cdot(\Delta x)^2 +\right.$$
$$\left. + 2\cdot\frac{\delta^2 f}{\delta x\delta y}(x_0,y_0)\Delta x\Delta y + \frac{\delta^2 f}{\delta y^2}(x_0,y_0)\cdot(\Delta y)^2\right) +$$
$$+ \frac{1}{3!}\cdot\left(\frac{\delta^3 f}{\delta x^3}(x_0,y_0)\cdot(\Delta x)^3 + 3\cdot\frac{\delta^3 f}{\delta x^2\delta y}(x_0,y_0)\cdot(\Delta x)^2\Delta y +\right.$$
$$\left. + 3\cdot\frac{\delta^3 f}{\delta x\delta y^2}(x_0,y_0)\cdot\Delta x(\Delta y)^2 + \frac{\delta^3 f}{\delta y^3}(x_0,y_0)\cdot(\Delta y)^3\right) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{k!}\cdot\left(\frac{\delta}{\delta x}\Delta x + \frac{\delta}{\delta y}\Delta y\right)^k \cdot f(x_0 + \xi\cdot\Delta x, y_0 + \eta\cdot\Delta y),$$
$$\Delta x = x - x_0, \quad \Delta y = y - y_0.$$

5.5 Экстремумы функций многих переменных

Определение 6 (Точка локального максимума (минимума)). Пусть X – метрическое пространство (МП), $f: X \to \mathbb{R}$. Точка x_0 называется *точкой локального максимума (минимума)*, если $\exists U(x_0) \subset X: \ \forall x \in U(x_0)$
$$f(x) \leqslant f(x_0) \quad \big(f(x) \geqslant f(x_0)\big)$$

Теорема 5 (Необходимое условие локального экстремума). Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$, $f: D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$ – точка локального экстремума, тогда в точке x_0 $\forall i = \overline{1,n}$
$$\frac{\delta(x_0)}{\delta x^i} = 0.$$

Доказательство. Фиксируем все переменные за исключением x^i, тогда можно рассматривать функцию $f(x^1,\ldots,x^i,\ldots,x^n)$ как функцию одной переменной, для которой x_0 – точка локального экстремума, следовательно $\frac{\delta f}{\delta x^i}(x_0) = 0$,
$$i \text{ – произвольная } \Rightarrow \forall i \text{ выполняется.}$$
□

Определение 7 (Критическая точка функции). Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$, $f: D \to \mathbb{R}^k$ – дифференцируемо в точке $x_0 \in D$. Точка x_0 называется *критической точкой функции* $f(x)$, если:

$$rank\mathfrak{J}f(x_0) < \min(n, k),$$

где $\mathfrak{J}f(x_0)$ – матрица Якоби функции $f(x_0)$.

Пример. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x \cdot y \\ y - z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow$$

$$\mathfrak{J}f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\delta u}{\delta x} & \frac{\delta u}{\delta y} & \frac{\delta u}{\delta z} \\ \frac{\delta v}{\delta x} & \frac{\delta v}{\delta y} & \frac{\delta v}{\delta z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & x & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (x_0) = \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases} \text{ – критическая точка.}$$

$$n = 3, \quad k = 2$$

Примечание. Множество точек прямой, получаемой пересечением плоскостей $x = 0$ и $y = 0$ – множество критических точек функции $f(x, y, z)$.

Определение 8 (Квадратичная форма на касательном пространстве). Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}$, f имеет производную в точке $x_0 \in D$. На касательном пространстве $T\mathbb{R}^n_{(x_0)}$ определим квадратичную форму

$$Q(h) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\delta^2 f}{\delta x^i \delta x^j}(x_0) \cdot h^i h^j, \quad Q : T\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}.$$

Теорема 6 (Достаточное условие локального экстремума). Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке $x \in D$, x – критическая точка для f, $f \in C^n(D, \mathbb{R})$, $n = 2$. Тогда, если:

1. $Q(h)$ – знакоположительна, то в точке x – локальный минимум.
2. $Q(h)$ – знакоотрицательна, то в точке x – локальный максимум.
3. $Q(h)$ может принимать различные значения $(> 0, < 0)$, тогда в точке x нет экстремума.

Доказательство. По формуле Тейлора:

$$f(x+h)-f(x)=\frac{1}{2}\cdot\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\delta^2 f(x)}{\delta x^i\delta x^j}\cdot h^i h^j+o\big(\|h\|^2\big)=$$
$$=\frac{\|h\|^2}{2}\cdot\left(\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\delta^2 f(x)}{\delta x^i\delta x^j}\cdot\frac{h^i}{\|h\|}\frac{h^j}{\|h\|}+\alpha(h)\right)=\left|\begin{array}{c}\text{где } \alpha(h)\to 0 \text{ при}\\ h\to 0\end{array}\right|=$$
$$=\frac{\|h\|^2}{2}\cdot\left(Q\left(\frac{h}{\|h\|}\right)+\alpha(h)\right).$$

Вектор $\frac{h}{\|h\|} < S^{(n-1)}$ – единичная $(n-1)$-мерная сфера. Сфера $S^{(n-1)}$ – компактное множество $\Rightarrow$ по теореме Больцано - Вейерштраса, $\exists e_1, e_2 \in S^{(n-1)}$:

$$Q_1(e_1)=\max Q(h)=M,\quad Q_2(e_2)=\min Q(h)=m$$

1. Если $Q(h)$ – знакоположительна $\Rightarrow m>0$. Следовательно, $\exists\delta>0:$ $\forall h\ \|h\|<\delta,\ |\alpha(h)|<m$

$$Q\left(\frac{h}{\|h\|}\right)+\alpha(h)>0,$$

   следовательно, $\forall h:\ \|h\|<\delta$

$$f(x+h)-f(x)>0,$$

   по определению, x – точка локального минимума (здесь $\|h\|<\delta$ – аналог понятия окрестности точки x).

2. Если $Q(h)$ – знакоотрицательна, то $M<0$. Тогда $\exists\delta>0:\forall h\ \|h\|<\delta\ |\alpha(h)|<-M$

$$Q\left(\frac{h}{\|h\|}\right)+\alpha(h)<0,$$

   следовательно, $\forall h:\ \|h\|<\delta$

$$f(x+h)-f(x)<0,$$

   тогда x – точка локального максимума.

3. Если $Q(h)$ – знакопеременна, то $m<0<M,\ \forall t>0$

$$Q(t\cdot e_2)<0,\quad Q(t\cdot e_1)>0,$$

   тогда в точке x нет экстремума.

□

Замечание. На практике для определения max и min можно пользоваться критерием Сильвестра из алгебры.

Определение 9 (Наеявно заданная уравнением функция). Пусть D – область в $\mathbb{R}^k$, Ω – область в $\mathbb{R}^k$, $F : D \times \Omega \to \mathbb{R}^k$.

Пусть функция $f : D \to \Omega$:

$$y = f(x) \Leftrightarrow F(x, y) = 0.$$

Говорят, что уравнение $F(x, y) = 0$ *неявно задает* функцию $y = f(x)$.

Пример. $x^2 + y^2 = 1$

$$y = \pm\sqrt{1 - x^2}, \quad y = \begin{cases} \sqrt{1 - x^2}, & x \in Q \\ -\sqrt{1 - x^2}, & x \notin Q \end{cases}$$

Лекция 3: Теорема о неявной функции

от 12 сен 10:30

5.6 Теорема о неявной функции

Теорема 7 (О неявной функции). Пусть $F(x, y)$ отображает окрестность $U(x_0; y_0) \subset \mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}$, $F : U(x_0, y_0) \to \mathbb{R}$.

Пусть F имеет следующие свойства:

1. $F(x_0, y_0) = 0$.
2. $F(x, y) \in C^P(U, \mathbb{R})$, $p \geqslant 1$.
3. $\frac{\delta F}{\delta y}(x_0, y_0) \neq 0$.

Тогда $\exists$ открезки I_x, I_y : $f : I_x \to I_y$:

1. $I_x \times I_y \subset U(x_0, y_0)$.
2. $\forall x \in I_x$ $y = f(x) \Leftrightarrow F(x, y) = 0$.
3. $f \in C^P(I_x, I_y)$.
4. $\forall x \in I_x$ $f'(x) = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}$.

Доказательство. Будем считать, что окрестность $U(x_0, y_0)$ – круг с центром в точке (x_0, y_0). Для определенности будем считать, что $F'_y(x_0, y_0) > 0$.

В силу непрерывности F'_y $\exists$ окрестность $V(x_0, y_0) \subset U(x_0, y_0)$: $\forall (x, y) \in V$ $F'_y(x, y) > 0$. Если посмотрим на функцию $F(x, y)$ при фиксированной x как на функцию по переменной y, то $F(\overline{x}, y)$ будет монотонной (в силу того, что $F'_y(\overline{x}, y) > 0$). Тогда для $\beta = \frac{1}{2}\tau$, где τ – радиус круга $U(x_0, y_0)$.

$$F(x_0, y_0 - \beta) < F(x_0, y_0) < F(x_0, y_0 + \beta).$$

Так как $F(x,y)$ непрерывна, то $\exists\delta>0:\ \forall x\in[x_0-\delta,x_0+\delta]$

$$F(x,y_0-\beta)<0,\quad F(x,y_0+\beta)>0.$$

При фиусированном x функция $f(\overline{x},y)$ непрерывно монотонна, на концах отрезка $[y_0-\beta;y_0+\beta]$ имеет разные знаки, тогда $\exists! y_x\in[y_0-\beta;y_0+\beta]:\ F(\overline{x},y_x)=0$. В силу непрерывности $F(x,y)$ по x, $\exists\delta>0:\ \forall x\in[x_0-\delta;x_0+\delta]\ F(x,y_x=0)$.

Определим функцию $f:[x_0-\delta;x_0+\delta]\to[y_0-\beta;y_0+\beta]$ положив, что $y=f(x)\Leftrightarrow F(x,y)=0$, то есть $y_x=f(x)$.

Положим $f\in C^{(P)}(I_x,I_y)$.

1. Покажем, что f – непрерывна.

   Для начала покажем, что f непрерывна в точке x_0.

   Пусть $\varepsilon>0$ задано. Покажем, что $\exists\delta>0:\ \forall x\in(x_0-\delta;x_0+\delta)\Rightarrow f(x)\in(y_0-\varepsilon;y_0+\varepsilon)$.

   Будем считать, что $\varepsilon<\beta\Rightarrow[y_0-\varepsilon;y_0+\varepsilon]\subset[y_0-\beta;y_0+\beta]\Rightarrow$ найдется отрезок $[x_0-\delta;x_0+\delta]$ и функция

$$\hat{f}(x):[x_0-\delta;x_0+\delta]\to[y_0-\varepsilon;y_0+\varepsilon],$$

$$\hat{f}(x)=y\Leftrightarrow F(x,y)=0.$$

   Но на $[x_0-\delta;x_0+\delta]$ $\hat{f}(x)\equiv f(x)\Rightarrow f\big([x_0-\delta;x_0+\delta]\big)\subset[y_0-\varepsilon;y_0+\varepsilon]\Rightarrow f(x)$ непрерывна в точке x_0.

   Теперь, пусть $x\in I_x=[x_0-\delta;x_0+\delta]$.

   Для точки (x,y_x) выполнены все условия теоремы $\Rightarrow\exists$ отрезок $[x-\alpha;x+\alpha]=\widehat{I}_x$ и $[y_x-\gamma;y_x+\gamma]=\widehat{I}_y$ и функция $g:\widehat{I}_x\to\widehat{I}_y:\ g(\overline{x})=y\Leftrightarrow F(\overline{x},y)=0\ \forall\overline{x}\in\widehat{I}_x$.

   Но на отрезке $[x-\alpha;x+\alpha]$ функция $g(x)\equiv f(x)$.

   По построению $g(x)$ непрерывна в точке x, следовательно и $f(x)$ непрерывна в точке x.

2. Покажем, что $f(x)$ дифференцируема на I_x.

   Пусть $x\in I_x,\ x+\Delta x\in I_x,\ y=f(x),\ y+\Delta y=f(x+\Delta x)$. Тогда

$$0=\underset{\substack{\shortparallel\\0}}{F(x+\Delta x,y+\Delta y)}-\underset{\substack{\shortparallel\\0}}{F(x,y)}=$$

$$=\left|\begin{array}{c}\text{Теорема}\\ \text{о среднем}\end{array}\right|=F'_x(x+\theta\cdot\Delta x,y+\theta\cdot\Delta y)\Delta x+$$
$$+F'_y(x+\theta\cdot\Delta x,y+\theta\cdot\Delta y)\Delta y,\ 0<\theta<1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{-F'_x(x+\theta\cdot\Delta x,y+\theta\cdot\Delta y)}{F'_y(x+\theta\cdot\Delta x,y+\theta\cdot\Delta y)}$$

Поскольку f – непрерывная функция, то при $\Delta x \to 0: \ \Delta y \to 0$ $\big(f(x+\Delta x) - f(x) = \Delta y \to 0\big)$. Тогда:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)} \tag{5.3}$$

Из теоремы о непрерывности композиции непрерывной функции $\Rightarrow f'(x)$ – непрерывна в точке $x \Rightarrow f \in C^{(1)}(I_x, I_y)$.

Если $F \in C^{(p)}(U, \mathbb{R}),\ p > 1$, то:

$$f''(x) = \left(-\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}\right)' = \frac{(-F'_x)' \cdot F'_y + F'_x \cdot (F'_y)'}{(F'_y)^2} = \\ = \frac{-\big(F''_{xx} + F''_{xy} \cdot \underset{y'(x)}{\underset{\|}{f'(x)}}\big) \cdot F'_y + F'_x \cdot \big(F''_{yx} + F''_{yy} \cdot f'(x)\big)}{(F'_y)^2}, \tag{5.4}$$

где $F''_{xx}, F''_{xy}, F''_{yy}$ вычисляются в точке $\big(x, f(x)\big) \Rightarrow f(x) \in C^{(2)}(I_x, I_y)$, если $F(x,y) \in C^{(2)}(U, \mathbb{R})$.

Заметим, что в левой части выражения 5.4 производная функции f имеет порядок на 1 больше, чем производная функции f в правой части. Тогда по индукции можно показать, что $f \in C^{(p)}(I_x, I_y)$, если $F(x,y) \in C^{(p)}(U, \mathbb{R})$.

□

Теорема 8 (О неявной функции вида $F(x^1, \dots, x^m, y) = 0$)**.** Если $F: U \to \mathbb{R}$, где $U \subset \mathbb{R}^{m+1}$ – окрестность точки $(x_0, y_0) = (x_0^1, \dots, x_0^m, y_0) \in \mathbb{R}^{m+1}$:

1. $F(x_0, y_0) = F(x_0^1, \dots, x_0^m, y_0) = 0$.
2. $F \in C^{(p)}(U, \mathbb{R})$.
3. $F'_y(x_0, y_0) = F'_y(x_0^1, \dots, x_0^m, y_0) \neq 0$, тогда $\exists (m+1)$-мерный промежуток $I = I_x^m \times I_y^1$, где:

$$I_x^m = \left\{x = (x^1, \dots, x^m) \in \mathbb{R}^m \ \middle|\ |x^i - x_0^i| < \alpha^i,\ i = \overline{1, m}\right\},$$
$$I_y^1 = \left\{y \in \mathbb{R} \ \middle|\ |y - y_0| < \beta\right\},$$

   $I \subset U$ и $\exists$ функция $f: I_x^m \to I_y^1$:

   (a) $f \in C^{(p)}(I_x^m, I_y^1)$.

   (b) $\forall (x,y) \in I = I_x^m \times I_y^1 \quad y = f(x^1, \dots, x^m) \Leftrightarrow F(x^1, \dots, x^m, y) = 0$.

   (c) $f'(x) = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}$, то есть $\frac{\delta f}{\delta x^i} = -\frac{F'_{x^i}(x,y)}{F'_y(x,y)}$.

Доказательство. Повторить доказательство теоремы 7, понимая под

x набор $(x^1,\dots,x^m)$, под δ – набор $(\alpha^1,\dots,\alpha^m)$.

Если в функциях $f(x^1,\dots,x^m)$ и $F(x^1,\dots,x^m,y)$ фиксировать все переменные, кроме x^i и y, то мы окажемся в условиях теоремы 7, при этом роль x играет переменная x^i $\Rightarrow$ верен пункт 3.

И рассуждая аналогично доказательству теоремы 7, получаем, что

$$f \in C^{(p)}(I_x^m, I_y^1),\text{ если } F \in C^{(p)}(U,\mathbb{R}).$$

$\square$

Примечание (Общий случай). Рассмотрим систему уравнений:

$$\begin{cases} F^1(x^1,\dots,x^m,y^1,\dots,y^n) = 0 \\ F^2(x^1,\dots,x^m,y^1,\dots,y^n) = 0 \\ \vdots \\ F^n(x^1,\dots,x^m,y^1,\dots,y^n) = 0 \end{cases}, \tag{5.5}$$

которую будем решать относительно $y^1,\dots,y^n$, то есть искать *локально* эквивалентную систему функциональных связей,

$$\begin{cases} y^1 = f^1(x^1,\dots,x^m) \\ y^2 = f^1(x^1,\dots,x^m) \\ \vdots \\ y^n = f^1(x^1,\dots,x^m) \end{cases}. \tag{5.6}$$

Для кратности и удобства будем считать, что $x = (x^1,\dots,x^m)$, $y = (y^1,\dots,y^n)$, тогда систему 5.5 будем записывать как $F(x,y) = 0$, а систему 5.6 – как $y = f(x)$. Если

$$\begin{matrix} x_0 = (x_0^1,\dots,x_0^m), & y_0 = (y_0^1,\dots,y_0^n), \\ \alpha = (\alpha^1,\dots,\alpha^m), & \beta = (\beta^1,\dots,\beta^n), \end{matrix}$$

то запись $|x - x_0| < \alpha$ или $|y - y_0| < \beta$ будет означать, что

$$\begin{matrix} |x^i - x_0^i| < \alpha^i, & i = \overline{1,m} \\ |y^i - y_0^i| < \beta^i, & i = \overline{1,n} \end{matrix}.$$

Далее положим, что

$$f'(x) = \begin{pmatrix} \frac{\delta f^1}{\delta x^1} & \cdots & \frac{\delta f^1}{\delta x^m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\delta f^n}{\delta x^1} & \cdots & \frac{\delta f^n}{\delta x^m} \end{pmatrix}(x)$$

$$F'_x(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\delta F^1}{\delta x^1} & \cdots & \frac{\delta F^1}{\delta x^m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\delta F^n}{\delta x^1} & \cdots & \frac{\delta F^n}{\delta x^m} \end{pmatrix}(x,y)$$

$$F'_y(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\delta F^1}{\delta y^1} & \cdots & \frac{\delta F^1}{\delta y^m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\delta F^n}{\delta y^1} & \cdots & \frac{\delta F^n}{\delta y^m} \end{pmatrix}(x,y)$$

Заметим, что матрица $F'_y(x,y)$ – квадратная, следовательно она обратима тогда и только тогда, когда $\left|F'_y(x,y)\right| \neq 0$ (определитель $\neq 0$).

Обозначим матрицу, обратную к $F'_y(x,y)$ как $\left[F'_y(x,y)\right]^{-1}$.

Теорема 9 (О неявной функции, общий случай)**.** Пусть $F : U(x_0,y_0) \to \mathbb{R}^n$, где $U(x_0,y_0) \subset \mathbb{R}^{m+n}$ – окрестность точки (x_0,y_0) такая, что

1. $F \in C^{(p)}(U,\mathbb{R}^n)$, $p \geqslant 1$.
2. $F(x_0,y_0) = 0$.
3. $F'_y(x_0,y_0)$ – обратная матрица.

Тогда $\exists (n+m)$-мерный промежуток $I = I^m_x \times I^n_y \subset U(x_0;y_0)$, где

$$I^m_x = \left\{x \in \mathbb{R}^m \;\middle|\; |x-x_0| < \alpha\right\},$$
$$I^n_x = \left\{y \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; |y-y_0| < \beta\right\},$$

то есть $f : I^m_x \to I^n_y$:

- $\forall (x,y) \in I^m_x \times I^n_y \;\; F(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x)$.
- $f'(x) = -\left[F'_y(x,y)\right]^{-1} \cdot F'_x(x,y)$.

Доказательство. Например, можно посмотреть в Зориче. □

5.7 Приложение теоремы о неявной функции

Определение 10 (Диффиоморфизм класса $C^{(p)}$, гомеоморфизм)**.** Пусть D, G – области в $\mathbb{R}^n$. Отображение $f : D \to G$ называется *диффиоморфизмом класса* $C^{(p)}$, $p \geqslant 0$, если:

1. f – обратимое.
2. $f \in C^{(p)}(D,G)$.
3. $f^{-1} \in C^{(p)}(D,G)$.

При $p = 0$ f называется *гомеоморфизмом*, то есть f – гомеоморфизм, если f – взаимно однозначное отображение и f, f^{-1} – непрерывны.

Пример. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$ – нет.
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $f(x) = e^x$ – да, диффиоморфизм класса C^∞.

Пример. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ – нет.
$f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ – да, диффиоморфизм класса C^∞.

Пример. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^3$ – гомеоморфизм класса C^0, но не диффиоморфизм, так как $f^{-1}=\sqrt[3]{y}$ теряет непрерывность.

Теорема 10 (Об обратной функции)**.** Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$, $f:D\to\mathbb{R}^n$, $x_0\in D$. Кроме того,

- $f\in C^{(p)}(D,\mathbb{R}^n),\ p\geqslant 1$.
- $f(x_0)=y_0$.
- $\underset{\text{(матрица Якоби в } x_0)}{f'(x_0)}$ – обратимая.

Тогда $\exists$ окрестности U,V точек x_0 и y_0 соответственно:

- $f:U\to V$ – диффиоморфизм U на V класса $C^{(p)}(U,V)$.
- $\forall y\in V\ [f^{-1}]'(y)=[f'(x)]^{-1},\ y=f(x)$.

Доказательство. Рассмотрим $F(x,y)=y-f(x)$.

1. $F(x,y)\in C^{(p)}(D\times\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$.
2. $F'_x(x_0,y_0)=-f'(x)$ – обратима.
3. $F(x,y)=0\Leftrightarrow y=f(x)$.

Следовательно, по теореме 7 $\exists n$-мерные промежутки I^n_x и I^n_y и $\exists$ отображение $g(y)$:

1. $g:I^n_y\to I^n_x$.
2. $g(y)=x\Leftrightarrow F(x,y)=0\Leftrightarrow y=f(x)$.
3. $g(y)\in C^{(p)}(I^n_y,I^n_x)$.
4. $\forall y\in I^n_y\ g'(y)=-\Big[F'_x\big(g(y),y\big)\Big]\cdot F'_y\big(g(y),y\big)$, где $g'(y)$, $\Big[F'_x\big(g(y),y\big)\Big]$, $F'_y\big(g(y),y\big)$ – матрицы.

$$f(x) = \begin{pmatrix} f^1(x^1, \dots, x^n) \\ f^2(x^1, \dots, x^n) \\ \vdots \\ f^n(x^1, \dots, x^n) \end{pmatrix}$$

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} y^1 - f^1(x^1, \dots, x^n) \\ y^2 - f^2(x^1, \dots, x^n) \\ \vdots \\ y^n - f^n(x^1, \dots, x^n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F^1(x,y) \\ F^2(x,y) \\ \vdots \\ F^n(x,y) \end{pmatrix}$$

$$F'_x(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\delta F^1}{\delta x^1} & \cdots & \frac{\delta F^1}{\delta x^n} \\ \frac{\delta F^2}{\delta x^1} & \cdots & \frac{\delta F^2}{\delta x^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\delta F^n}{\delta x^1} & \cdots & \frac{\delta F^n}{\delta x^n} \end{pmatrix}(x,y) = \begin{pmatrix} -\frac{\delta f^1}{\delta x^1} & \cdots & -\frac{\delta f^1}{\delta x^n} \\ -\frac{\delta f^2}{\delta x^1} & \cdots & -\frac{\delta f^2}{\delta x^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{\delta f^n}{\delta x^1} & \cdots & -\frac{\delta f^n}{\delta x^n} \end{pmatrix}(x)$$

$$F'_y(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\delta F^1}{\delta y^1} & \cdots & \frac{\delta F^1}{\delta y^n} \\ \frac{\delta F^2}{\delta y^1} & \cdots & \frac{\delta F^2}{\delta y^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\delta F^n}{\delta y^1} & \cdots & \frac{\delta F^n}{\delta y^n} \end{pmatrix}(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Положим $V = I^n_y$, $U = g(V)$.
Тогда из 1. и 2. $\Rightarrow$ $f\big|_U$ и $g\big|_V$ – взаимно обратны.
Из 4. $\Rightarrow \forall y \in V$

$$g'(y) = -\Big[F'_x\big(g(y), y\big)\Big]^{-1} = \big[f'(x)\big]^{-1},$$
$$g'(y) = \big[f^{-1}(y)\big]^{-1} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \big[f'(x)\big]^{-1} = \big[f^{-1}(x)\big]'.$$

Исходя из свойств отображения f и приведенных выше построений, f – диффиоморфизм. □

Лекция 4: Продолжение

от 17 сен 8:44

Определение 11 (k-мерная поверхность)**.** Множество $S \subset \mathbb{R}^n$ называется *k-мерной поверхностью*, если $\forall x \in S$ $\exists U(x) \subset \mathbb{R}^n$ и $\exists$ диффиоморфизм $\phi : U(x) \to I^n$:

$$\phi\big(U(x) \cap S\big) = I^k,$$

где $I^n = \Big\{x \in \mathbb{R}^n \;\Big|\; |x^i| < 1\Big\}$,

$$I^k = \Big\{x \in \mathbb{R}^n \;\Big|\; x^{k+1} = x^{k+2} = \ldots = x^n = 0\Big\}.$$

Пример. $S = \mathbb{R}^n$ – поверхность в $\mathbb{R}^n$,

$$t^i(x^i) = \frac{2}{\pi} \cdot \arctan x^i,$$

$$\mathfrak{J} = \begin{pmatrix} \frac{\delta t^1}{\delta x^1} & \frac{\delta t^1}{\delta x^2} & \cdots & \frac{\delta t^1}{\delta x^n} \\ \frac{\delta t^2}{\delta x^1} & \frac{\delta t^2}{\delta x^2} & \cdots & \frac{\delta t^2}{\delta x^n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\delta t^n}{\delta x^1} & \frac{\delta t^n}{\delta x^2} & \cdots & \frac{\delta t^n}{\delta x^n} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{1+(x^1)^2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{1+(x^2)^2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{1+(x^n)^2} \end{pmatrix}$$

Утверждение. Пусть задана система уравнений:

$$\begin{cases} F^1(x^1, \dots, x^n) = 0 \\ \vdots \\ F^{n-k}(x^1, \dots, x^n) = 0 \end{cases}, \quad F^i(x) \in C^{(1)} \tag{5.7}$$

Кроме того,

$$\begin{vmatrix} \frac{\delta F^1}{\delta x^1} & \cdots & \frac{\delta F^1}{\delta x^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\delta F^{n-k}}{\delta x^1} & \cdots & \frac{\delta F^{n-k}}{\delta x^n} \end{vmatrix}(x) \neq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Тогда решение этой системы является k-мерной поверхностью в $\mathbb{R}^n$.

Доказательство. По теореме о неявной функции, система 5.7 эквивалентна системе

$$\begin{cases} x^{k+1} = f^1(x^1, \dots, x^k) \\ x^{k+2} = f^2(x^1, \dots, x^k) \\ \vdots \\ x^n = f^{n-k}(x^1, \dots, x^k) \end{cases}$$

Положим:

$$\begin{aligned} t^1 &= x^1 \\ t^2 &= x^2 \\ &\vdots \\ t^k &= x^k \\ t^{k+1} &= x^{k+1} - f^1(x^1, \dots, x^k) = 0 \\ t^{k+2} &= x^{k+2} - f^2(x^1, \dots, x^k) = 0 \\ &\vdots \\ t^n &= x^n - f^{n-k}(x^1, \dots, x^k) = 0 \end{aligned}$$

Таким образом построенное отображение является диффиоморфизмом $\Rightarrow$ решение системы 5.7 – k-мерная поверхность в $\mathbb{R}^n$. $\square$

Определение 12 (Локальная карта или параметризация поверхности). Пусть S – k-мерная поверхность в $\mathbb{R}^n$, $x_0 \in S$ и $\phi : U(x_0) \to I^n$ – диффиоморфизм:

$$\phi\big(U(x_0) \cap S\big) = I^k.$$

Ограничение ϕ^{-1} на I^k будем называть *локальной картой* или *параметризацией поверхности* S в окрестности точки x_0.

Определение 13 (Касательное пространство). Пусть S – k-мерная поверхность в $\mathbb{R}^n$, $x_0 \in S$, $x = x(t) : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ – параметризация S в окрестности точки x_0, при этом $x_0 = x(0)$.

Касательным пространством (или плоскостью) к S в точке x_0 называется k-мерная плоскость, заданная уравнением:

$$x = x_0 + x'(0) \cdot t, \tag{5.8}$$

$$x_0 = (x_0^1, x_0^2, \ldots, x_0^n)$$

$$x(t) = \begin{cases} x^1(t^1, \ldots, t^k) \\ x^2(t^1, \ldots, t^k) \\ \vdots \\ x^n(t^1, \ldots, t^k) \end{cases}$$

$$x'(t) = \begin{pmatrix} \frac{\delta x^1}{\delta t^1} & \ldots & \frac{\delta x^1}{\delta t^k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\delta x^n}{\delta t^1} & \ldots & \frac{\delta x^n}{\delta t^k} \end{pmatrix}(t), \quad t = \begin{pmatrix} t^1 \\ t^2 \\ \vdots \\ t^k \end{pmatrix}$$

Таким образом касательное пространство задается системой из 5.8:

$$\begin{cases} x^1 = x_0^1 + \frac{\delta x^1}{\delta t^1}(0) \cdot t^1 + \ldots + \frac{\delta x^1}{\delta t^k}(0) \cdot t^k \\ x^2 = x_0^2 + \frac{\delta x^2}{\delta t^1}(0) \cdot t^1 + \ldots + \frac{\delta x^2}{\delta t^k}(0) \cdot t^k \\ \vdots \\ x^n = x_0^n + \frac{\delta x^n}{\delta t^1}(0) \cdot t^1 + \ldots + \frac{\delta x^n}{\delta t^k}(0) \cdot t^k \end{cases}.$$

Пример. Пусть $\gamma = \gamma(t)$ – гладкая кривая в $\mathbb{R}^3$, $\gamma : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$.

Обозначим $x_0 = x(0)$, $y_0 = y(0)$, $z_0 = z(0)$.

5.8 – касательное пространство к кривой γ в точке x_0.

$$\begin{cases} x = x_0 + x'(0) \cdot t \\ y = y_0 + y'(0) \cdot t \\ z = z_0 + z'(0) \cdot t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - x_0 = x'(0) \cdot t \\ y - y_0 = y'(0) \cdot t \\ z - z_0 = z'(0) \cdot t \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x - x_0}{x'(0)} = \frac{y - y_0}{y'(0)} = \frac{z - z_0}{z'(0)} = t.$$

Пример. $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

Пусть $z_0 > 0$, тогда в окрестности точки (x_0, y_0, z_0) сферу можно параметризировать следующими уравнениями:

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = \sqrt{1 - u^2 - v^2} \end{cases}.$$

Касательное пространство к сфере в точке (x_0, y_0, z_0):

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\delta x}{\delta u} & \frac{\delta x}{\delta v} \\ \frac{\delta y}{\delta u} & \frac{\delta y}{\delta v} \\ \frac{\delta z}{\delta u} & \frac{\delta z}{\delta v} \end{pmatrix} (u_0, v_0) \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + \frac{\delta x}{\delta u}(u_0, v_0) \cdot u + \frac{\delta x}{\delta v}(u_0, v_0) \cdot v \\ y = y_0 + \frac{\delta y}{\delta u}(u_0, v_0) \cdot u + \frac{\delta y}{\delta v}(u_0, v_0) \cdot v \\ z = z_0 + \frac{\delta z}{\delta u}(u_0, v_0) \cdot u + \frac{\delta z}{\delta v}(u_0, v_0) \cdot v \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + u \\ y = y_0 + v \\ z = z_0 - \frac{u_0}{\sqrt{1 - u_0^2 - v_0^2}} \cdot u - \frac{v_0}{\sqrt{1 - u_0^2 - v_0^2}} \cdot v \end{cases}.$$

Утверждение. Пусть S – k-мерная поверхность в $\mathbb{R}^n$ задается системой уравнений:

$$\begin{cases} F^1(x^1,\dots,x^n)=0 \\ \vdots \\ F^{n-k}(x^1,\dots,x^n)=0, \end{cases}, \text{ причем } \begin{vmatrix} \frac{\delta F^1}{\delta x^{k+1}} & \dots & \frac{\delta F^1}{\delta x^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\delta F^{n-1}}{\delta x^{k+1}} & \dots & \frac{\delta F^{n-1}}{\delta x^n} \end{vmatrix}(x_0)\neq 0 \quad (5.9)$$

Тогда касательная плоскость к S в точке x_0 задается системой уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\delta F^1}{\delta x^1}(x_0)\cdot(x^1-x_0^1)+\dots+\frac{\delta F^1}{\delta x^n}(x_0)(x^n-x_0^n)=0 \\ \vdots \\ \frac{\delta F^{n-k}}{\delta x^1}(x_0)\cdot(x^1-x_0^1)+\dots+\frac{\delta F^{n-k}}{\delta x^n}(x_0)(x^n-x_0^n)=0 \end{cases},$$

или кратко:

$$F'(x_0)\cdot(x-x_0)=0.$$

Доказательство. Обозначим $(x^1,\dots,x^k)=u,\ (x^{k+1},\dots,x^n)=v,$

$$F=\begin{pmatrix} F^1 \\ \vdots \\ F^{n-k} \end{pmatrix}.$$

Тогда условия утверждения запишем в виде:

$$F(u,v)=0, \quad \left|F'_v(u_0,v_0)\right|\neq 0.$$

Тогда по теореме о неявной функции система 5.9 эквивалентна системе

$$\begin{cases} u=u \\ v=f(u) \end{cases}.$$

Тогда касательная плоскость задается:

$$\text{роль } t=\begin{pmatrix} t^1 \\ \vdots \\ t^k \end{pmatrix} \text{ играет } u=\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^k \end{pmatrix}.$$

Тогда систему можно записать в виде:

$$\begin{cases} x^1=t^1 \\ \vdots \\ x^k=t^k \\ x^{k+1}=f^1(t^1,\dots,t^k) \\ \vdots \\ x^n=f^{n-k}(t^1,\dots,t^k) \end{cases},$$

$$t_0=(t_0^k,\dots,t_0^k)=(x_0^1,\dots,x_0^k).$$

$$x'(t_0) = \begin{pmatrix} \frac{\delta x^1}{\delta t^1} & \dots & \frac{\delta x^1}{\delta t^k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\delta x^k}{\delta t^1} & \dots & \frac{\delta x^k}{\delta t^k} \\ \frac{\delta f^1}{\delta t^1} & \dots & \frac{\delta f^1}{\delta t^k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\delta f^{n-k}}{\delta t^1} & \dots & \frac{\delta f^{n-k}}{\delta t^k} \end{pmatrix} (t_0),$$

$$x = x_0 + x'(t_0) \cdot t.$$

$$\begin{cases} x^1 = x_0^1 + 1 \cdot t^1 \\ \vdots \\ x^k = x_0^k + 1 \cdot t^k \\ x^{k+1} = x_0^{k+1} + \frac{\delta f^1}{\delta t^1}(t_0) \cdot t^1 + \ldots + \frac{\delta f^1}{\delta t^k}(x_0) \cdot t^k \\ \vdots \\ x^n = x_0^n + \frac{\delta f^{n-k}}{\delta t^1}(t_0) \cdot t^1 + \ldots + \frac{\delta f^{n-k}}{\delta t^k}(t_0) \cdot t^k \end{cases} \tag{5.10}$$

Из 5.10 следует, что:

$$\begin{aligned} t^1 &= x^1 - x_0^1, \\ t^2 &= x^2 - x_0^2, \\ &\vdots \\ t^k &= x^k - x_0^k. \end{aligned}$$

Из теоремы 7:

$$f'(u_0) = -\big[F'_v(u_0, v_0)\big]^{-1} \cdot F'_u(u_0, v_0).$$

Преобразуем 5.10:

$$\begin{cases} \left.\begin{matrix} x^1 - x_0^1 = t^1 \\ \vdots \\ x^k - x_0^k = t^k \end{matrix}\right\} u - u_0 = u - u_0 \\ x^{k+1} - x_0^{k+1} = \frac{\delta f^1}{\delta t^1}(t_0) \cdot (x^1 - x_0^1) + \ldots + \frac{\delta f^1}{\delta t^k}(t_0) \cdot (x^k - x_0^k) \\ \vdots \\ x^n - x_0^n = \frac{\delta f^{n-k}}{\delta t^1}(t_0) \cdot (x^1 - x_0^1) + \ldots + \frac{\delta f^{n-k}}{\delta t^k}(t_0) \cdot (x^k - x_0^k) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u - u_0 = u - u_0 \\ v - v_0 = f'(u_0) \cdot (u - u_0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u - u_0 = u - u_0 \\ v - v_0 = \underbrace{-\big[F'_v(u_0, v_0)\big]^{-1} \cdot F'_u(u_0, v_0) \cdot (u - u_0)}_{f'(u_0)} \quad \Big| \cdot F'_v(u_0, v_0) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \big[F'_v(u_0, v_0)\big](v - v_0) + F'_u(u_0, v_0) \cdot (u - u_0) = 0. \qquad \square$$

Примечание. Итак, мы вывели, что если поверхность задана системой уравнений

$$\begin{cases} F^1(x^1, \dots, x^n) = 0 \\ \vdots \\ F^{n-k}(x^1, \dots, x^n) = 0 \end{cases} \quad \text{или } F(x) = 0,$$

$$F = \begin{pmatrix} F^1(x) \\ \vdots \\ F^{n-k}(x) \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} x = (x^1, \dots, x^n) \\ x_0 = (x_0^1, \dots, x_0^n) \end{matrix} .$$

Тогда уравнение касательной плоскости кратко записывается:

$$F'_x(x_0) \cdot (x - x_0) = 0.$$

Обозначим $x - x_0 = \xi$, то есть:

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \vdots \\ \xi^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' - x'_0 \\ \vdots \\ x^n - x_0^n \end{pmatrix}.$$

Таким образом получаем, что уравнение касательного пространства (плоскости) имеет вид:

$$F'_x(x_0) \cdot \xi = 0.$$

Таким образом касательнаое пространство (плоскость) к поверхности, заданной уравнением $F(x) = 0$, в точке x_0 состоит из векторов ξ, удовлетворяющих уравнению:

$$F'_x(x_0) \cdot \xi = 0 \tag{5.11}$$

Лекция 5: Продолжение

от 22 сен 10:29

Теорема 11 (О структуре касательного пространства). Пусть S – k-мерная поверхность в $\mathbb{R}^n$, $x_0 \in S$. Тогда касательное пространство TS_{x_0} в точке x_0 состоит из направляющих векторов касательных к гладким кривым на поверхности S, проходящих через точку x_0.

Доказательство. Пусть $x = x(t)$ – гладкая кривая в $\mathbb{R}^n$, то есть

$$\begin{cases} x^1 = x^1(t) \\ \vdots \\ x^n = x^n(t) \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

$x_0 = x(t_0)$. Касательный вектор в точке x_0 к кривой имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \frac{dx^1}{dt}(t_0) \\ \vdots \\ \frac{dx^n}{dt}(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^{1'}(t_0) \\ \vdots \\ x^{n'}(t_0) \end{pmatrix}.$$

1. Пусть S – k-мерная поверхность, задана системой уравнений $F(x) = 0$ и пусть $x = x(t)$ – гладкая кривая на S. Покажем, что вектор

$x'(t_0) = \begin{pmatrix} \frac{dx^1}{dt}(t_0) \\ \vdots \\ \frac{dx^n}{dt}(t_0) \end{pmatrix}$: $x'(t_0) \in TS_{x_0}$, $x_0 = x(t_0)$, то есть покажем, что $x'(t_0)$ удовлетворяет уравнению $F'_x(t_0) \cdot \xi = 0$.

Так как кривая $x = x(t)$ лежит на S, то $F\big(x(t)\big) = 0$ – верно. Продифференцируем $F\big(x(t)\big) = 0$ по t в точке x_0:

$$F'_x(x_0) \cdot x'(t_0) = 0,$$

это и есть уравнение касательного пространства, то есть $x'(t_0)$ удовлетворяет уравнению касательного пространства $F'_x(x_0) \cdot \xi = 0$.

2. Пусть $\xi = (\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^n) \in TS_{x_0}$, то есть ξ удовлетворяет уравнению $F'_x(x_0) \cdot \xi = 0$

   Покажем, что $\exists$ гладкая кривая l на поверхности S:

   - $x_0 \in l$
   - ξ является направляющим вектором касательной к l в точке x_0

   Поверхность S задана системой уравнений:

$$\begin{cases} F^1(x) = 0 \\ \vdots \\ F^{n-k}(x) = 0 \end{cases} \tag{5.12}$$

   Пусть

$$\begin{vmatrix} \frac{\delta F^1}{\delta x^{k+1}} & \cdots & \frac{\delta F^1}{\delta x^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\delta F^{n-k}}{\delta x^{k+1}} & \cdots & \frac{\delta F^{n-k}}{\delta x^n} \end{vmatrix}(x_0) \neq 0.$$

   По теореме о неявной функции, система 5.12 эквивалентна системе:

$$\begin{cases} x^{k+1} = f^1(x^1, \ldots, x^k) \\ \vdots \\ x^n = f^{n-k}(x^1, \ldots, x^k) \end{cases} \tag{5.13}$$

   Обозначим $u = (x^1, \ldots, x^k)$, $v = (x^{k+1}, \ldots, x^n)$, тогда 5.13 имеет вид:

$$v = f(u).$$

   Тогда по утверждению касательное пространство задается уравнениями:

$$\begin{cases} x^{k+1} = x_0^{k+1} + \frac{\delta f^1}{\delta x^1}(x_0) \cdot (x^1 - x_0^1) + \ldots + \frac{\delta f^1}{\delta x^k}(x_0) \cdot (x^k - x_0^k) \\ \vdots \\ x^n = x_0^n + \frac{\delta f^{n-k}}{\delta x^1}(x_0) \cdot (x^1 - x_0^1) + \ldots + \frac{\delta f^{n-k}}{\delta x^k}(x_0) \cdot (x^k - x_0^k) \end{cases} \tag{5.14}$$

Пусть

$$\eta = \begin{pmatrix} \eta' \\ \vdots \\ \eta^k \\ \eta^{k+1} \\ \vdots \\ \eta^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 - x_0^1 \\ \vdots \\ x^k - x_0^k \\ x^{k+1} - x_0^{k+1} \\ \vdots \\ x^n - x_0^n \end{pmatrix}.$$

Тогда система 5.14 примет вид:

$$\begin{cases} \eta^{k+1} = \frac{\delta f^1}{\delta x^1}(x_0)\cdot\eta^1 + \ldots + \frac{\delta f^1}{\delta x^k}(x_0)\cdot\eta^k \\ \vdots \\ \eta^n = \frac{\delta f^{n-k}}{\delta x^1}(x_0)\cdot\eta^1 + \ldots + \frac{\delta f^{n-k}}{\delta x^k}(x_0)\cdot\eta^k \end{cases} \tag{5.15}$$

Таким образом, если вектор $\xi \in TS_{x_0}$, то он полностью определяется своими первыми k координатами, а остальные можно волучить с помощью системы 5.15.

Построим кривую в $\mathbb{R}^n$, то есть зададим ее уравнением $x = x(t)$:

$$l: \begin{cases} x^1 = x_0^1 + \xi^1 t \\ \vdots \\ x^k = x_0^k + \xi^k t \\ \left.\begin{array}{l} x^{k+1} = f^1(x_0^1 + \xi^1 t, \ldots, x_0^k + \xi^k t) \\ \vdots \\ x^n = f^{n-k}(x_0^1 + \xi^1 t, \ldots, x_0^k + \xi^k t) \end{array}\right\} v = f(u) \end{cases} \tag{5.16}$$

Пусть точка x_0 соответствует параметру $t = 0$:

$$x(0) = \begin{cases} x^1 = x_0^1 \\ \vdots \\ x^k = x_0^k \\ x^{k+1} = f^1(x_0^1, \ldots, x_0^k) \\ \vdots \\ x^n = f^{n-k}(x_0^1, \ldots, x_0^k) \end{cases},$$

то есть кривая проходит через точку x_0.

Далее, функция f удовлетворяет условию $v = f(u) \Leftrightarrow F(u, v) = 0$. Тогда $F(u, f(u)) = 0 \Rightarrow l$, заданная системой 5.16, $l \subset S$.

$$(5.16)'_t: \; x'_t(0) = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \vdots \\ \xi^k \\ \frac{\delta f^1}{\delta x^1}(x_0)\cdot\xi^1 + \ldots + \frac{\delta f^1}{\delta x^k}(x_0)\cdot\xi^k \\ \vdots \\ \frac{\delta f^{n-k}}{\delta x^1}(x_0)\cdot\xi^1 + \ldots + \frac{\delta f^{n-k}}{\delta x^k}(x_0)\cdot\xi^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \vdots \\ \xi^k \\ \xi^{k+1} \\ \vdots \\ \xi^n \end{pmatrix}.$$

Таким образом построили гладкий путь, лежащий на поверхности S, проходящий через точку $x_0 \in S$, вектор $x'(t_0)$ – его касательный вектор $\in TS_{x_0}$.

$\square$

5.8 Условный экстремум функции многих переменных

Задача. Дана функция $u = f(x^1, \dots, x^n)$ и дана поверхность, заданная уравнениями:

$$\begin{cases} F^1(x^1, \dots, x^n) = 0 \\ \vdots \\ F^m(x^1, \dots, x^n) = 0 \end{cases} \tag{5.17}$$

Нужно найти точку $x_0 = (x_0^1, \dots, x_0^n)$, в которой:

$$f(x_0^1, \dots, x_0^n) = \max_{(\min)} f(x^1, \dots, x^n),$$

где max (min) берется по всем точкам $(x_0^1, \dots, x_0^n)$, удовлетворяющих уравнениям 5.17.

Задача (Геометрическая формулировка)**.** Пусть система 5.17 задает в пространстве $\mathbb{R}^n$ m-мерную поверхность S. Найти точку $x_0 \in S: \ \exists U_x(x_0) = U(x_0) \cap S: \ \forall x \in U_s(x_0)$:

$$\underset{x_0-\max}{f(x) \leqslant f(x_0)} \text{ (или } \underset{x_0-\min}{f(x) \geqslant f(x_0)}\text{)}$$

Определение 14 (Линия уровня (c-уровень))**.** Пусть $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ – область. *Линией уровня (с-уровнем)* функции f называется множество

$$N_c = \left\{x \in D \;\middle|\; f(x) = c\right\}.$$

Лемма 1. Если x_0 – точка условного локального экстремума для функции f и x_0 не является критической для функции f (то есть $df(x_0) \neq 0$), то касательное пространство $TS_{x_0} \subset TN_{x_0}$, где

$$N_{x_0} = \left\{x \in D \;\middle|\; f(x) = f(x_0)\right\},$$

– поверхность уровня, проходящая через x_0.

Доказательство. Пусть $\xi \in TS_{x_0}$. Пусть $x = x(t)$ – гладкая кривая на $S: \ x(0) = x_0, \ x'(0) = \xi$ (по теореме 11).

Так как точка x_0 – условный экстремум для функции f, то точка $t = 0$ есть локальный экстремум для функции $f\big(x(t)\big)$ (по теореме Ферма, потом нужно добавить ссылку),

$$\Big[f\big(x(t)\big)\Big]_t'(0) = 0 \Leftrightarrow f_x'(x_0) \cdot x_t'(0) = 0 \tag{5.18}$$

Касательное пространство к N_{x_0} в точке x_0 имеет уравнение:

$$f_x'(x_0) \cdot \xi = 0 \tag{5.19}$$

Заметим, что 5.18 и 5.19 – одно и то же уравнение, то есть

$$x_t'(0) = \xi \Rightarrow x_t'(0) \in TN_{x_0}.$$

□

Теорема 12 (Необходимое условие условного локального экстремума). Пусть система уровнений

$$\begin{cases} F^1(x^1, \dots, x^n) = 0 \\ \vdots \\ F^{n-k}(x^1, \dots, x^n) = 0 \end{cases} \tag{5.20}$$

задает $(n-k)$-мерную гладкую поверхность S в $D \subset \mathbb{R}^n$, D – область. Функция $f : D \to \mathbb{R}$ – гладкая. Если $x_0 \in S$ является точкой условного локального экстремума для функции f, то существует такой набор чисел $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-k} \in \mathbb{R}$:

$$gradf(x_0) = \sum_{i=1}^{n-k} \lambda_i \cdot gradF^i(x_0).$$

Доказательство. Касательное пространство TS_{x_0} задается системой уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\delta F^1}{\delta x^1}(x_0) \cdot \xi^1 + \dots + \frac{\delta F^1}{\delta x^n}(x_0) \cdot \xi^n = 0 \\ \vdots \\ \frac{\delta F^{n-k}}{\delta x^1}(x_0) \cdot \xi^1 + \dots + \frac{\delta F^{n-k}}{\delta x^n}(x_0) \cdot \xi^n = 0 \end{cases}, \tag{5.21}$$

но $\forall i = \overline{1, n-k}$:

$$\left\{\frac{\delta F^i}{\delta x^1} \cdot (x_0), \dots, \frac{\delta F^i}{\delta x^n} \cdot (x_0)\right\} = gradF^i(x_0).$$

Перепишем 5.21 в виде:

$$\begin{cases} \big(gradF^1(x_0), \xi\big) = 0 \\ \vdots \\ \big(gradF^{n-k}(x_0,), \xi\big) = 0 \end{cases} \tag{5.22}$$

Касательное пространство TN_{x_0} к $N_{x_0} = \big\{x \in D \bigm| f(x) = f(x_0)\big\}$

задается уравнением: $f'(x_0) \cdot \xi = 0$. Заметим, что:

$$f'(x_0) = gradf(x_0) = \left\{ \frac{\delta f(x_0)}{\delta x^1}, \dots, \frac{\delta f(x_0)}{\delta x^n} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x_0) \cdot \xi = 0 \Leftrightarrow \big(gradf(x_0), \xi\big) = 0 \tag{5.23}$$

Таким образом из леммы 1 следует, что $\forall \xi$, удовлетворяющего системе уравнений 5.22, так же удовлетворяет уравнению 5.23, то есть из того, что $\forall i \in \overline{1, n-k}$

$$\xi \perp gradF^i(x_0) \Rightarrow \xi \perp gradf(x_0) \Rightarrow$$

$\Rightarrow \exists \lambda_1, \dots, \lambda_{n-k} \in \mathbb{R}$:

$$gradf(x_0) = \sum_{i=1}^{n-k} \lambda_i \cdot gradF^i(x_0).$$

□

Метод Лагранжа

Задача. Пусть требуется найти условный экстремум функции $f : D \to \mathbb{R}$, D – область в $\mathbb{R}^n$, на поверхности S, заданной системой уравнений:

$$\begin{cases} F^1(x^1, \dots, x^n) = 0 \\ \vdots \\ F^k(x^1, \dots, x^n) = 0 \end{cases}.$$

Составим функцию Лагранжа:

$$L(x, \lambda) = L(x^1, \dots, x^n, \lambda^1, \dots, \lambda^k) = \\ = f(x^1, \dots, x^n) + \sum_{i=1}^{k} \lambda^i \cdot F^i(x^1, \dots, x^n),$$

$\lambda = (\lambda^1, \dots, \lambda^k)$, $\lambda^i \in \mathbb{R}$ – коэффициент, в общем случае пока неизвестен.

Необходимое условие локального экстремума для функции L:

$$\begin{cases} \left.\begin{array}{l} \frac{\delta L}{\delta x^1} = \frac{\delta f}{\delta x^1} + \sum_{i=1}^k \lambda^i \cdot \frac{\delta F^i}{\delta x^1} = 0 \\ \vdots \\ \frac{\delta L}{\delta x^n} = \frac{\delta f}{\delta x^n} + \sum_{i=1}^k \lambda^i \cdot \frac{\delta F^i}{\delta x^n} = 0 \end{array}\right\} \text{необходимое условие условного экстремума функции } f \\ \left.\begin{array}{l} \frac{\delta L}{\delta \lambda^1} = F^1(x^1, \dots, x^n) = 0 \\ \vdots \\ \frac{\delta L}{\delta \lambda^k} = F^k(x^1, \dots, x^n) = 0 \end{array}\right\} \text{поверхность } S \end{cases} \tag{5.24}$$

Определение 15 (Условный экстремум)**.** Пусть $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ – область, S – поверхность в D, *условным экстремумом* функции f называется экстремум функции $f\big|_S$.

Лекция 6: Продолжение

от 28 сен 8:48

Достаточное условие условного локального экстремума

Примечание. Пусть $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ – область, $f \in C^{(2)}(D, \mathbb{R})$, S – $(n-k)$-мерная поверхность в D, заданная системой уравнений:

$$\begin{cases} F^1(x^1, \dots, x^n) = 0 \\ \vdots \\ F^k(x^1, \dots, x^n) = 0 \end{cases}.$$

Функция Лагранжа:

$$L(x,\lambda) = f(x^1,\dots,x^n) + \sum_{i=0}^{k} \lambda_i \cdot F^i(x^1,\dots,x^n).$$

Здесь $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ выбираются таким образом, чтобы было выполнено необходимое условие условного экстремума в точке x_0 (5.24).

$$\begin{cases} \frac{\delta L}{\delta x^i} = 0 \\ \vdots \\ \frac{\delta L}{\delta \lambda_j} = 0 \end{cases} \Rightarrow x_0, \quad \lambda_1,\dots,\lambda_k.$$

Теорема 13 (Достаточное условие условного экстремума)**.** Если при введенных выше условиях квадратичная форма

$$Q(\xi) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\delta^2 L}{\delta x^i \delta x^j}(x_0)\cdot \xi^i \xi^j, \ \big(\xi = (\xi^1,\dots,\xi^n)\big)$$

1. Знакоопределена на TS_{x_0}:
   - если Q знакоположительна, то точка x_0 – точка условного локального min
   - если Q знакоотрицательна, то точка x_0 – точка условного локального max
2. Если Q может принимать значения разных знаков, то в точке x_0 условного экстремума не наблюдается.

Доказательство. Заметим, что $f\big|_S$ и $L\big|_S$ совпадают. В самом деле, если $x \in S$, то:

$$L(x,\lambda) = f(\underset{(x^1,\dots,x^n)}{\underset{\parallel}{x}}) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \cdot \underset{0}{\underset{\parallel}{F^i(x)}} = f(x).$$

Поэтому покажем, что условие знакопостоянства Q является достаточным для экстремума функции $L\big|_s$.

Имеем, что

$$\begin{cases} \frac{\delta L}{\delta x^1}(x_0) = 0 \\ \vdots \\ \frac{\delta L}{\delta x^n}(x_0) = 0 \end{cases}.$$

По формуле Тейлора:

$$L\big|_S(x) - L(x_0) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\delta^2 L(x_0)}{\delta x^i \delta x^j}\cdot (x^i - x_0^i)(x^j - x_0^j) + o\big(\|x - x_0\|^2\big) \quad (5.25)$$

Так как S – $m = (n-k)$-мерная поверхность, то существует гладкое отображение $x(t) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n : \ x = x(t) \subset S \ \forall t \in \mathbb{R}^m, \ x(0) = x_0$. Отображение $x(t)$ биективно отображает $\mathbb{R}^m$ на $U_S(x_0) = U(x_0) \cap S$.

Если $x \in S$, то условие дифференцируемости $x(t)$:

$$x - x_0 = x(\underset{\in \mathbb{R}^m}{t}) - x(0) = x'(0) \cdot t + o\big(\|t\|\big)$$

или

$$\begin{cases} x^1 - x_0^1 = \frac{\delta x^1}{\delta t^1}(0) \cdot t^1 + \ldots + \frac{\delta x^1}{\delta t^m}(0) \cdot t^m + o\big(\|t\|\big) \\ \vdots \\ x^n - x_0^n = \frac{\delta x^n}{\delta t^1}(0) \cdot t^1 + \ldots + \frac{\delta x^n}{\delta t^m}(0) \cdot t^m + o\big(\|t\|\big) \end{cases}$$

или кратко

$$\begin{cases} x^1 - x_0^1 = \sum_{i=1}^m \frac{\delta x^1}{\delta t^i}(0) \cdot t^i + o\big(\|t\|\big) \\ \vdots \\ x^n - x_0^n = \sum_{i=1}^m \frac{\delta x^n}{\delta t^i}(0) \cdot t^i + o\big(\|t\|\big) \end{cases} \tag{5.26}$$

Подставим 5.26 в 5.25:

$$L\big|_S(x) - L(x_0) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i,j=1}^n \frac{\delta^2 L(x_0)}{\delta x^i \delta x^j} \cdot \underbrace{\left(\sum_{\alpha=1}^m \frac{\delta x^i}{\delta t^\alpha}(0) \cdot t^\alpha + o\big(\|t\|\big)\right)}_{x^i - x_0^i} \cdot$$

$$\cdot \underbrace{\left(\sum_{\beta=1}^m \frac{\delta x^j}{\delta t^\beta}(0) \cdot t^\beta + o\big(\|t\|\big)\right)}_{x^j - x_0^j} + o\big(\|x - x_0\|^2\big) =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\delta^2 L(x_0)}{\delta x^i \delta x^j} \cdot \left[\left(\sum_{\alpha=1}^m \frac{\delta x^i}{\delta t^\alpha}(0) \cdot t^\alpha\right) \cdot \left(\sum_{\beta=1}^m \frac{\delta x^i}{\delta t^\beta}(0) \cdot t^\beta\right) + \right.$$

$$+ \left(\sum_{\alpha=1}^m \frac{\delta x^i}{\delta t^\alpha}(0) \cdot t^\alpha\right) \cdot o\big(\|t\|\big) + \left(\sum_{\beta=1}^m \frac{\delta x^i}{\delta t^\beta}(0) \cdot t^\beta\right) \cdot$$

$$\left. \cdot\, o\big(\|t\|\big) + o\big(\|t\|\big)\right] + o\big(\|x - x_0\|^2\big) \overset{(\heartsuit)}{=} \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\delta^2 L(x_0)}{\delta x^i \delta x^j} \cdot$$

$$\cdot \sum_{\alpha,\beta=1}^m \frac{\delta x^i}{\delta t^\alpha} \cdot \frac{x^i}{\delta t^\beta} \cdot t^\alpha \cdot t^\beta + o\big(\|t\|^2\big) = \frac{\|t\|^2}{2} \cdot \sum_{i,j=1}^n \frac{\delta^2 L(x_0)}{\delta x^i \delta x^j} \cdot$$

$$\cdot \underbrace{\sum_{\alpha,\beta=1}^m \frac{\delta x^i}{\delta t^\alpha} \cdot \frac{\delta x^j}{\delta t^\beta} \cdot \frac{t^\alpha}{\|t\|} \cdot \frac{t^\beta}{\|t\|}}_{\xi^i, \xi^j \text{ – координаты вектора } \xi \in TS_{x_0}} + o\big(\|t\|^2\big) = \frac{\|t\|^2}{2} Q(\xi) + o\big(\|t\|^2\big).$$

Таким образом получаем, что

$$L\big|_S(x) - L(x_0) = \frac{\|t\|^2}{2} \cdot Q(\xi) + o\big(\|t\|^2\big),\ \xi \in TS_{x_0}.$$

Тогда, если $Q > 0$, то

$$L\big|_S(x) - L(x_0) > 0 \Rightarrow x_0 \text{ – min для } L\big|_S(x) \Rightarrow x_0 \text{ – min для } f\big|_S.$$

Если $Q < 0$, то

$$L\big|_S(x) - L(x_0) < 0 \Rightarrow x_0 \text{ – локальный } \max \text{ для } L\big|_S(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_0 \text{ – локальный } \max \text{ для } f\big|_S \ (\forall x \in U_S(x_0))$$

Если Q – знакопеременна, то не для всех $x \in U_S(x_0)$ разность $L\big|_S(x) - L(x_0)$ имеет постоянный знак $\Rightarrow$ в этом случае в точке x_0 нет экстремума.

Докажем (♡), то есть покажем, что

$$o\big(\|t\|\big) \cdot \sum_{\alpha=1}^{m} \frac{\delta x^i}{\delta t^\alpha} \cdot t^\alpha = o\big(\|t\|^2\big)$$

и

$$o\big(\|x - x_0\|^2\big) = o\big(\|t\|^2\big),\ x \in S.$$

В самом деле,

$$\left|\sum_{\alpha=1}^{m} \frac{\delta x^i}{\delta t^\alpha}(0) \cdot t^\alpha\right| \leqslant \sum_{\alpha=1}^{m} \left|\frac{\delta x^i}{\delta t^\alpha}(0)\right| \cdot \left|t^\alpha\right| \leqslant \|t\| \cdot \underbrace{\sum_{\alpha=1}^{m} \left|\frac{\delta x^i}{\delta t^\alpha}(0)\right|}_{\substack{\shortparallel \\ const>0}} = \underbrace{\overset{>0}{A} \cdot \|t\|}_{\substack{\shortparallel \\ O(\|t\|)}}.$$

Таким образом,

$$o\big(\|t\|\big) \cdot \left|\sum_{\alpha=1}^{m} \frac{\delta x^i(0)}{\delta t^\alpha} \cdot t^\alpha\right| \leqslant o\big(\|t\|\big) \cdot O\big(\|t\|\big) =$$

$$= \omega(t) \cdot \|t\| \cdot \gamma(t) \cdot \|t\| = \left| \begin{array}{c} \text{где } \omega(t) \to 0 \text{ при } t \to 0, \\ \gamma(t) \text{ – ограниченная функция} \end{array} \right| =$$

$$= \underset{\substack{\shortparallel \\ \omega(t)\gamma(t)}}{\alpha(t)} \cdot \|t\|^2 = o\big(\|t\|^2\big),\ \begin{array}{l} \alpha(t) \to 0, \\ t \to 0 \end{array}.$$

Далее, если $x \in S$, то

$$\|x - x_0\|^2 = \left\| \begin{pmatrix} x^1 - x_0^1 \\ \vdots \\ x^n - x_0^n \end{pmatrix} \right\|^2 \overset{5.26}{=} \left\| \begin{pmatrix} \sum_{\alpha=1}^m \frac{\delta x^1}{\delta t^\alpha} \cdot t^\alpha + o\big(\|t\|\big) \\ \vdots \\ \sum_{\alpha=1}^m \frac{\delta x^n}{\delta t^\alpha} \cdot t^\alpha + o\big(\|t\|\big) \end{pmatrix} \right\|^2 =$$

$$= \left(\sum_{\alpha=1}^m \frac{\delta x^1}{\delta t^\alpha} \cdot t^\alpha + o\big(\|t\|\big) \right)^2 + \ldots + \left(\sum_{\alpha=1}^m \frac{\delta x^n}{\delta t^\alpha} + o\big(\|t\|\big) \right)^2 =$$

$$= \left(\sum_{\alpha=1}^m \frac{\delta x^1}{\delta t^\alpha} \cdot t^\alpha \right)^2 + \ldots + \left(\sum_{\alpha=1}^m \frac{\delta x^n}{\delta t^\alpha} \right)^2 + o\big(\|t\|^2\big) \leqslant$$

$$\leqslant \left(\max_\alpha \frac{\delta x^1}{\delta t^\alpha} \right)^2 \cdot \left(\sum_{\alpha=1}^m t^\alpha \right)^2 + \ldots + \left(\max_\alpha \frac{\delta x^n}{\delta t^\alpha} \right)^2 \cdot \left(\sum_{\alpha=1}^m t^\alpha \right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant \|t\|^2 \cdot \left(\left(\max_\alpha \frac{\delta x^1}{\delta t^\alpha} \right)^2 + \left(\max \frac{\delta x^n}{\delta t^\alpha} \right)^2 \right) \leqslant$$

$$\leqslant \|t\|^2 \cdot \underbrace{\left(\max_i \left(\max_\alpha \frac{\delta x^i}{\delta t^\alpha} (0) \right) \right)^2 \cdot n}_{\substack{\parallel \\ const>0}} = B\|t\|^2 = o\big(\|t\|^2\big).$$

Поэтому

$$o\big(\|x - x_0\|^2\big) =$$
$$= \beta(x - x_0) \cdot \|x - x_0\|^2 = \beta(t) \cdot \|x - x_0\|^2 \leqslant \beta(t) \cdot B \cdot \|t\|^2 =$$
$$= o\big(\|t\|^2\big)$$

$$\big(\beta(x - x_0) \to 0 \text{ при } x \to x_0 \Leftrightarrow t \to 0\big)$$

$\square$

Глава 6

Теория рядов

6.1 Введение

Определение 16 (Ряд). *Рядом* называется выражение:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots, \quad a_i \in \mathbb{R}.$$

Числа a_i называются *членами ряда*, a_n – *n-ым членом ряда*.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{6.1}$$

Рассмотрим числа:

$$\begin{aligned} &A_1 = a_1, \\ &A_2 = a_1 + a_2, \\ &\vdots \\ &A_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n. \end{aligned}$$

Числа $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называются *частичными суммами ряда* 6.1.

Определение 17 (Сходящийся ряд). Говорят, что ряд 6.1 *сходится*, если существует конечный предел частичных сумм, то есть

$$\exists \lim_{n\to\infty} A_n = A.$$

Тогда сумма бесконечного ряда 6.1 полагается равной

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Пример.

$$10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \ldots + \frac{1}{10^n} + \ldots = 10 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{10^k}$$

$$A_n = \frac{1}{10^0} + \frac{1}{10^1} + \ldots + \frac{1}{10^n} = \frac{1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1} =$$

$$= \frac{\frac{1}{10^n} - 1}{\frac{1}{10} - 1} = \frac{1 - \frac{1}{10^n}}{\frac{9}{10}} = \frac{10}{9} \cdot \left(1 - \frac{1}{10^n}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} \frac{10}{9}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right) = \frac{10}{9}$$

6.1.1 Гармонический ряд

Определение 18 (Среднее гармоническое)**.** Число c называется *средним гармоническим* чисел a и b $(a, b \neq 0)$, если

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right).$$

Определение 19 (Гармонический ряд)**.** Ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \tag{6.2}$$

называется *гармоническим.*

Примечание. Докажем, что ряд 6.2 расходится.

Если $\exists \varepsilon > 0 \ \forall N \ \exists n > N \ \exists p > 0$

$$|a_{n+1} + \ldots + a_{n+p}| \geqslant \varepsilon$$

$$\left|\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+p}\right| \geqslant \left|\frac{1}{n+p} + \frac{1}{n+p} + \ldots + \frac{1}{n+p}\right| =$$

$$= \frac{p}{n+p} \underset{n=p}{=} \frac{1}{2},$$

то есть для $\forall N: \ \varepsilon = \frac{1}{2}, \ p = n, \ n = N + 1 \Rightarrow$ по критерию Коши, гармонический ряд 6.2 расходится.

6.1.2 Основные свойства сходящихся рядов

Теорема 14 (Критерий Коши)**.** Ряд 6.1 сходится тогда и только тогда, когда $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}:\ \forall n > N,\ \forall p > 0$

$$|a_{n+1} + \ldots + a_{n+p}| < \varepsilon.$$

Доказательство. Ряд 6.1 сходится $\underset{\text{по определению}}{\Leftrightarrow} \exists \lim\limits_{n\to\infty} A_n \Leftrightarrow A_n$ – фундаментальная последовательность: $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}:\ \forall n > N$ и $\forall p > 0$

$$|A_n - A_{n+p}| < \varepsilon, \quad \left(\begin{array}{c}\text{критерий Коши сходимости}\\ \text{последовательности}\end{array}\right).$$

Имеем

$$\begin{aligned}
&|A_n - A_{n+p}| = \\
&\quad = \left|a_1 + a_2 + \ldots + a_n - (a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots + a_{n+p})\right| = \\
&\qquad\qquad = |a_{n+1} + \ldots + a_{n+p}| < \varepsilon.
\end{aligned}$$

□

Замечание. Со всякой последовательностью x_n можно связать ряд, частичными суммами которого являются члены этой последовательности. Пусть:

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots.$$

Тогда ряд

$$\underbrace{x_1}_{a_1} + \underbrace{(x_2 - x_1)}_{a_2} + \underbrace{(x_3 - x_2)}_{a_3} + \ldots + \underbrace{(x_n - x_{n-1})}_{a_n} + \ldots,$$

$$A_n = a_1 + \ldots + a_n = x_1 + (x_2 - x_1) + \ldots + (x_n - x_{n-1}) = x_n.$$

Теорема 15 (Необходимое условие сходимости ряда)**.** Если ряд 6.1 сходится, тогда:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Доказательство. Пусть ряд 6.1 сходится, тогда $\exists \lim\limits_{n\to\infty} A_n$:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} (A_n - A_{n-1}) = \\
= \lim_{n\to\infty} A_n - \lim_{n\to\infty} A_{n-1} &= 0
\end{aligned}$$

□

Лекция 7: Продолжение

от 2 окт 10:32

Определение 20 (m-ый остатный ряд)**.** Пусть дан ряд 6.1. Ряд вида

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} a_n \tag{6.3}$$

называется m*-ым остатным ряда* 6.1.

Теорема 16 (Об остатке ряда)**.** Следующие условия эквивалентны:

1. Ряд 6.1 сходится.
2. Любой его остаток сходится.
3. Некоторый его остаток 6.3 сходится.

Доказательство.

- Докажем, что из 1. ⇒ 2.

  Пусть ряд 6.1 сходится и его сумма равна A.

  Пусть $A_k^* = \sum_{n=m+1}^{m+k} a_n$ – k-тая частичная сумма ряда 6.3.

  Ряд 6.3 сходится, если $\exists \lim\limits_{k\to\infty} A_k^*$.

$$A_k^* = \underbrace{A_{m+k}}_{\text{частичная сумма ряда 6.1}} - A_m.$$

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} A_k^* &= \lim_{k\to\infty} (A_{m+k} - A_m) = \\ = \lim_{k\to\infty} A_{m+k} - \underbrace{\lim_{k\to\infty} A_m}_{const=A_m} &= A - A_m. \end{aligned}$$

- Доказательство того, что из 2. ⇒ 3. – очевидно.

- Докажем, что из 3. ⇒ 1.

  Пусть ряд 6.3 – сходится.

  Тогда при $n > m$:

$$A_n = A_m + \overbrace{\underbrace{A_{n-m}^*}_{\sum_{k=m+1}^{m+(n-m)} a_k}}^{m\text{-тая частичная сумма ряда 6.3}}$$

$$A_n = \underbrace{a_1 + a_2 + \ldots + a_m}_{A_m} + \overbrace{\underbrace{a_{m+1} + \ldots + a_n}_{A^*_{n-m}}}^{k \text{ штук, } k=n-m}.$$

Ряд 6.1 сходится $\underset{\text{по опр.}}{\Leftrightarrow} \exists \lim\limits_{n\to\infty} A_n$.

Рассмотрим:

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} (\underset{\substack{\shortparallel \\ const}}{A_m} + A^*_{n-m}) = \underset{\substack{\shortparallel \\ A_m = const}}{\lim_{n\to\infty} A_m} + \underbrace{\lim_{n\to\infty} A^*_{n-m}}_{\substack{\exists \text{, так как ряд} \\ 6.3 \text{ сходится}}} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} A_n \Rightarrow$ 6.1 сходится.

□

Примечание. Обозначим α_m – сумма m-того остатка ряда = сумме ряда 6.3:

$$\alpha_m = \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n$$

(6.3 сходится в этом случае)

Следствие. Ряд 6.1 сходится $\Leftrightarrow \lim\limits_{m\to\infty} \alpha_m = 0$.

Доказательство. Самостоятельно. □

Определение 21 (Сумма рядов)**.** Пусть даны ряды

$$(A) \ \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad (B) \ \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Суммой рядов A, B называется ряд:

$$(A+B) \ \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n).$$

Теорема 17. Если ряды $(A), (B)$ сходятся, то:

1. $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n$ – сходится и его сумма равна $\alpha \cdot A$, где $A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
2. Ряд $(A+B)$ сходится и его сумма равна $A^* + B^*$, где $A^* = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $B^* = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Доказательство. 1. Пусть ряд (A) сходится.

Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha \cdot a_n$:

$$A'_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha \cdot a_k,$$

$$\lim_{n\to\infty} A'_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \alpha \cdot a_k = \alpha \cdot \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \alpha \cdot A$$

2. Самостоятельно.

□

6.2 Сходимость положительных рядов

Определение 22 (Положительный ряд)**.** Ряд (A) называется *положительным*, если $\forall n\ a_n > 0$.

Теорема 18. Положительный ряд (A) сходится $\Leftrightarrow$ его частичные суммы ограничены, то есть $\exists M > 0 : \ \forall n\ A_n < M$.

Доказательство. Заметим, что последовательность частичных сумм A_n возрастает, то есть $\forall n\ A_{n+1} > A_n$.

По теореме Вейерштрасса, возрастающая последовательность A_n имеет предел $\Leftrightarrow$ она ограничена, то есть $\exists M > 0 : \ \forall n\ A_n < M$. □

Теорема 19 (1-ый признак сравнения)**.** Пусть даны ряды $(A), (B)$, причем $a_n > 0,\ b_n > 0\ \forall n$.

Если $\exists N \in \mathbb{N} : \ \forall n > N\ a_n \leqslant b_n$, то:

1. Из сходимости ряда $(B) \Rightarrow$ сходимость ряда (A).
2. Из расходимости ряда $(A) \Rightarrow$ расходимость ряда (B).

Доказательство.

1. Пусть ряд (B) – сходится $\Rightarrow$ по теореме 18 его частичные суммы ограничены $\Rightarrow$ по неравенству $a_n \leqslant b_n$ частичные суммы ряда (A) также ограничены $\Rightarrow$ по 18 ряд (A) сходится.
2. Аналогично.

□

Теорема 20 (2-ой признак сравнения)**.** Пусть даны ряды $(A), (B)$, причем $a_n > 0,\ b_n > 0\ \forall n$.

Если $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k,\ \ k \in [0; \infty]$, то:

1. При $k = \infty$ из сходимости $(A) \Rightarrow$ сходимость ряда (B).
2. При $k = 0$ из сходимости ряда $(B) \Rightarrow$ сходимость ряда (A).

3. При $0 < \underset{const \neq 0}{\overset{k}{\shortparallel}} < \infty$ ряды (A) и (B) ведут себя одинаково.

Доказательство. Переписать доказательство для несобственных интегралов, заменив слово "интеграл"на слово "ряд". □

Теорема 21 (3-й признак сравнения)**.** Пусть даны ряды $(A),(B)$, причем $a_n > 0,\ b_n > 0\ \forall n$.

Если $\exists N \in \mathbb{N} \cup \{0\}:\ \forall n > N\ \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n}$, то:

1. Из сходимости ряда $(B) \Rightarrow$ сходимость ряда (A).
2. Из расходимости ряда $(A) \Rightarrow$ расходимость ряда (B).

Доказательство. Можно считать, что $N = 0$. Тогда $\forall n > N$ имеем:

$$\frac{a_2}{a_1} \leqslant \frac{b_2}{b_1}; \quad \frac{a_3}{a_2} \leqslant \frac{b_3}{b_2}; \quad \frac{a_4}{a_3} \leqslant \frac{b_4}{b_3}; \quad \ldots; \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n}.$$

Перемножим левые и правые части:

$$\frac{a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot \ldots \cdot a_{n+1}}{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n} \leqslant \frac{b_2 \cdot b_3 \cdot b_4 \cdot \ldots \cdot b_{n+1}}{b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot \ldots \cdot b_n},$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_1} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n} \Rightarrow a_{n+1} \leqslant \frac{a_1}{b_1} \cdot b_{n+1} \text{ (по теореме 19).}$$

1. Если ряд (B) сходится $\Rightarrow$ сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_1}{b_1} \cdot b_{n+1} \Rightarrow$ сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1} \Rightarrow$ сходится (A).
2. Аналогично.

□

Теорема 22 (Интегральный признак Коши-Маклорена)**.** Пусть дан положительный ряд (A).

Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет следующим условиям:

1. $f(x):\ [1; +\infty) \to \mathbb{R}$.
2. $f(x)$ – непрерывна.
3. $f(x)$ – монотонна.
4. $f(x) = a_n,\ \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Тогда ряд (A) и интеграл $\int_1^{\infty} f(x)dx$ ведут себя одинаково.

Доказательство. Ограничимся случаем, когда $f(x)$ монотонно убывает.

Рассмотрим функцию $\phi(x) = a_n$ при $n \leqslant x < n+1$ и $\psi(x) = a_{n+1}$ при

$n \leqslant x < n+1$. Тогда $\forall x \in [1;+\infty)$:

$$\psi(x) \leqslant f(x) \leqslant \phi(x).$$

Отсюда

$$\int_1^N \psi(x)dx \leqslant \int_1^N f(x)dx \leqslant \int_1^N \phi(x)dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{\sum_{n=1}^N a_{n+1}}_{\text{частичная сумма ряда } (A)} \leqslant \int_1^N f(x)dx \leqslant \underbrace{\sum_{n=1}^N a_n}_{\text{частичная сумма ряда } (A)}$$

- Если интеграл сходится, то частичная сумма $\sum_{n=1}^N a_{n+1}$ ограничена $\Rightarrow$ ряд (A) сходится.
- Если интеграл расходится, то частичная сумма $\sum_{n=1}^N a_n$ непрерывна $\Rightarrow$ ряд (A) – расходится.
- Если ряд (A) сходится, то $\sum_{n=1}^N a_n$ – ограничена $\Rightarrow \int_1^N f(x)dx$ – ограничен $\Rightarrow \int_1^\infty f(x)dx$ – сходится.
- Если ряд (A) расходится $\Rightarrow$ частичная сумма $\sum_{n=1}^N a_{n+1}$ неограничена $\Rightarrow$ интеграл расходится.

$\square$

Пример. $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p}$.

Рассмотрим $f(x) = \frac{1}{x^p}$ на $[1;+\infty)$ – неограниченно монотонно $\searrow$,

$$f(n) = \frac{1}{n^p}.$$

$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p}$ ведет себя одинаково с интегралом $\int_1^\infty \frac{dx}{x^p}$ – сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leqslant 1 \Rightarrow$ ряд $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p}$ сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leqslant 1$.

Пример. $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n \cdot \ln n}$.

$f(x) = \frac{1}{x \ln x}$, $x \in [e;+\infty)$, $\nearrow$, непрерывна.

$$\int_e^\infty \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{b\to\infty} \int_e^b \frac{d(\ln x)}{\ln x} =$$

$$= \lim_{b\to\infty} \Big(\ln(\ln x) \Big)\Big|_e^b = \lim_{b\to\infty} \ln(\ln b) = \infty \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ ряд $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n \ln n}$ расходится (по интегралу Коши-Маклорена).

Теорема 23 (Радикальный признак Коши)**.** Пусть ряд (A) положительный и $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n} = q$. Тогда:

1. При $q < 1$ ряд (A) сходится.
2. При $q > 1$ ряд (A) расходится.
3. При $q = 1$ может как сходиться, так и расходиться.

Доказательство.

1. Пусть $q < 1$. Возьмем число $r: \ q < r < 1$. Тогда $\exists N: \ \forall n > N$

$$\sqrt[n]{a_n} < r \Rightarrow a_n < r^n.$$

   $0 < r < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} r^n$ – сходится $\Rightarrow$ по 1-му признаку сравнения сходится ряд (A).

2. Пусть $q > 1$, тогда существует подпоследовательность $\sqrt[n_i]{a_{n_i}} \to q$ при $i \to \infty \Rightarrow a_{n_i} \to q^{n_i} > 1 \Rightarrow a_n \nrightarrow 0 \Rightarrow$ необходимое условие сходимости не выполняется $\Rightarrow$ ряд (A) расходится.

3. Рассмотрим ряды $\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}}_{\text{расходится}}$ и $\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}}_{\text{сходится}}$:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = 1.$$

□

Теорема 24 (Признак Даламбера)**.** Пусть ряд (A) положительный и $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = d$. Тогда:

1. При $d < 1$ ряд (A) сходится.
2. При $d > 1$ ряд (A) расходится.
3. При $d = 1$ может как сходиться, так и расходиться.

Доказательство.

1. Пусть $d < 1$. Возьмем $d < r < 1 \Rightarrow \exists N: \ \forall n > N \ \frac{a_{n+1}}{a_n} < r$,

$$b_1 = \frac{a_2}{a_1}; \quad b_2 = \frac{a_3}{a_2}; \quad b_3 = \frac{a_4}{a_3}; \quad \ldots; \quad b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}; \quad \ldots.$$

Можно считать, что $N = 0$, тогда $\forall n > N$:

$$\begin{aligned} & a_2 < r \cdot a_1 \\ & a_3 < r \cdot a_2 < r^2 \cdot a_1 \\ & a_4 < r \cdot a_3 < r^3 \cdot a_1 \\ & \vdots \\ & a_{n+1} < r^n \cdot a_1 \end{aligned}.$$

Так как $0 < r < 1$, то $\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cdot a_1$ сходится $\Rightarrow$ сходится ряд (A) по 1 признаку сравнения.

2. Самостоятельно.
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1.$$

□

Лекция 8: Продолжение

от 5 окт 8:50

Теорема 25 (Признак Раббе). Пусть ряд (A) – положительный. Если $\lim\limits_{n\to\infty} n \cdot \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = r$, то:

1. При $r > 1$ ряд (A) сходится.
2. При $r < 1$ ряд (A) расходится.
3. При $r = 1$ ряд (A) может как сходиться, так и расходиться.

Доказательство.

1. Пусть $r > 1$. Возьмем p и q: $1 < p < q < r$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} n \cdot \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = r$, то $\exists N_1 : \ \forall n > N_1 \ n \cdot \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) > q$, то есть:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} > 1 + \frac{q}{n}. \tag{6.4}$$

Далее, рассмотрим:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(1+\frac{1}{n})^p - 1}{\frac{1}{n}} \overset{\substack{\text{формула} \\ \text{Тейлора}}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{p}{n} + o(\frac{1}{n}) - 1}{\frac{1}{n}} = p < q \Rightarrow$$

$\Rightarrow \exists N_2: \ \forall n > N_2$:

$$\frac{(1+\frac{1}{n})^p - 1}{\frac{1}{n}} < q \Rightarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^p < 1 + \frac{q}{n}. \tag{6.5}$$

Сравниваем неравенства 6.4 и 6.5, получим, что при $n > \max(N_1, N_2)$:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^p < 1 + \frac{q}{n} < \frac{a_n}{a_{n+1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a_n}{a_{n+1}} > \left(1 + \frac{1}{n}^p\right) = \frac{(n+1)^p}{n^p} = \frac{\frac{1}{n^p}}{\frac{1}{(n+1)^p}}.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ сходится при $p > 1$:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} > \frac{\frac{1}{n^p}}{\frac{1}{(n+1)^p}} \Rightarrow a_n \cdot \frac{1}{(n+1)^p} > \frac{1}{n^p} \cdot a_{n+1} \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{\frac{1}{(n+1)^p}}{\frac{1}{n^p}}.$$

По 3-му признаку сравнения, ряд (A) сходится при $p > 1 \Rightarrow$ при $r > 1$.

2. Пусть $r < 1$. Тогда $\exists N: \ \forall n > N$:

$$n \cdot \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) < 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a_n}{a_{n+1}} < 1 + \frac{1}{n} = \frac{n+1}{n} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} > \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ – гармонический, расходящийся $\Rightarrow$ по 3-му признаку сравнения ряд (A) расходится.

3. Упражнение: привести 2 примера рядов (сходящийся, расходящийся), но $r = 1$ в обоих случаях.

$\square$

Теорема 26 (Признак Кумера). Пусть дан ряд (A) – положительный. Пусть числа $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots: \ \forall n > N \ c_n > 0$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ – расходится. Если

$$\lim_{n\to\infty} \left(c_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1}\right) = k,$$

то

1. При $k > 0$ ряд (A) сходится.

2. При $k < 0$ ряд (A) расходится.
3. При $k = 0$ может как сходиться, так и расходиться.

Доказательство.

1. Пусть $k > 0$. Возьмем $0 < p < k$. Тогда $\exists N: \ \forall n > N$:

$$c_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1} > p \Rightarrow$$
$$\Rightarrow c_n \cdot a_n - c_{n+1} \cdot a_{n+1} > p \cdot a_{n+1} > 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow c_n \cdot a_n > c_{n+1} \cdot a_{n+1}, \quad \forall n > N$$

Тогда последовательность $\{c_n \cdot a_n\}$ убывает и ограничена снизу $\Rightarrow$ последовательность сходится.

Пусть $c = \lim\limits_{n\to\infty} c_n \cdot a_n$. Рассмотрим ряд:

$$\sum_{m=1}^{n} (c_m \cdot a_m - c_{m+1} \cdot a_{m+1}) =$$
$$= (c_1 \cdot a_1 - c_2 \cdot a_2) + (c_2 \cdot a_2 - c_3 \cdot a_3) + \ldots + (c_n \cdot a_n - c_{n+1} \cdot a_{n+1}) =$$
$$= c_1 \cdot a_1 - c_{n+1} \cdot a_{n+1},$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{n} (c_m \cdot a_m - c_{m+1} \cdot a_{n+1}) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} (c_1 \cdot a_1 - c_{n+1} \cdot a_{n+1}) = c_1 \cdot a_1 - c \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (c_n \cdot a_n - c_{n+1} \cdot a_{n+1}) \Rightarrow$ из того, что $c_n \cdot a_n - c_{n+1} \cdot a_{n+1} > p \cdot a_{n+1} > 0$ и 1-го признака сравнения $\Rightarrow$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} p \cdot a_{n+1}$ сходится $\Rightarrow$ ряд (A) сходится.

2. Пусть $k < 0 \Rightarrow \exists N: \ \forall n > N$

$$c_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1} < 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{a_n}{a_{n+1}} < \frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{\frac{1}{c_n}}{\frac{1}{c+n+1}} \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} > \frac{\frac{1}{c_{n+1}}}{\frac{1}{c_n}}.$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c_n}$ расходится $\Rightarrow$ по 3-му признаку сравнения ряд (A) расходится.

3. Придумать 2 примера когда $k = 0$ и ряды сходятся/расходятся.

$\square$

Теорема 27 (Признак Бертрана)**.** Пусть ряд (A) – положительный. Если

$$\lim_{n\to\infty} \ln n \cdot \left[n \cdot (\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1)\right] = B,$$

то

1. При $B > 1$ ряд (A) сходится.
2. При $B < 1$ ряд (A) расходится.
3. При $B = 1$ ряд (A) может как сходиться, так и расходиться.

Доказательство. Рассмотрим ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n}$ – расходится. Составим последовательность Кумера:

$$\begin{aligned}
k_n = \underbrace{n \cdot \ln n}_{c_n} \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - \underbrace{(n+1) \cdot \ln(n+1)}_{c_{n+1}} = \\
= \left| \ln(n+1) = \ln\left(n \cdot \frac{n+1}{n}\right) = \ln n + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \right| = \\
= n \cdot \ln n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - (n+1) \cdot \left(\ln n + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) = \\
= n \cdot \ln n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - n \cdot \ln n - \ln n - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \\
= \ln n \left(n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - n - 1\right) - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \\
= \ln n \cdot \left(n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) - 1\right) - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} k_n = \\
= \lim_{n\to\infty} \left[\underbrace{\ln n \cdot \left(n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) - 1\right)}_{B} - \ln \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}^{n}\right)}_{e} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right] = \\
= B - 1,
\end{aligned}$$

по признаку Кумера, при $B - 1 > 0$ ряд (A) сходится, при $B - 1 < 0$ ряд (A) расходится, при $B = 1$ ряд (A) может как сходиться, так и расходиться. □

Теорема 28 (Признак Гаусса)**.** Ряд (A), $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Если

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \left(\lambda + \frac{\mu}{n}\right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

то

1. При $\lambda > 1$, ряд (A) сходится.
2. При $\lambda < 1$, ряд (A) расходится.
3. При $\lambda = 1$ и
   (a) $\mu > 1 \Rightarrow$ ряд (A) сходится.
   (b) $\mu \leqslant 1 \Rightarrow$ ряд (A) расходится.

Доказательство.

1. Если $\lambda < 1$, то

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \left[\lim_{n\to\infty}\left(\lambda + \frac{\mu}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right]^{-1} =$$

$$= \left[\lim_{n\to\infty}\left(\lambda + \underbrace{\frac{\mu}{n}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{1}{n^2}}_{\to 0} \cdot \Omega\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right]^{-1} = \frac{1}{\lambda},$$

по признаку Даламбера, если $\frac{1}{\lambda} < 1$, то есть $\lambda > 1$, ряд (A) сходится.

2. $\Rightarrow$ из 1.

3. Если $\lambda = 1$, то

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{\mu}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \mu + n \cdot O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\mu + \underbrace{n \cdot \frac{1}{n^2} \cdot \Omega(\frac{1}{n^2})}_{\to 0}\right) = \mu \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{по признаку Раббе} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \mu > 1 \Rightarrow (A) \text{ сходится.} \\ \mu < 1 \Rightarrow (A) \text{ расходится.} \end{array}\right.$$

Пусть $\mu = 1$, тогда

$$\lim_{n\to\infty} \ln n \cdot \left(n \cdot \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) - 1\right) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \ln n \cdot \left(n \cdot \left(1 + \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) - 1\right) - 1\right) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \ln n \cdot \left(1 + n \cdot O\left(\frac{1}{n^2}\right) - 1\right) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \ln n \cdot n \cdot O\left(\frac{1}{n^2}\right) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left(\ln n \cdot n \cdot \frac{1}{n^2} \cdot \Omega\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} \cdot \Omega\left(\frac{1}{n^2}\right) = 0.$$

В самом деле,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \ln n = \lim_{n\to\infty} \ln n^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \ln \sqrt[n]{n} = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ по прихнаку Бертрана ряд (A) расходится.

$\square$

6.3 Сходимость знакопеременных рядов

Примечание. Пусть дан ряд (A). Если $\exists N : \forall n > N$ a_n не меняет знак, то исследование сходимости такого ряда сводится к исследованию сходимости положительных рядов. Будем считать, что "+"и "−"бесконечно много. Такие ряды будем называть *знакопеременными*.

Определение 23 (Абсолютно сходящийся ряд)**.** Ряд (A) называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд

$$(A^*) \ \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

Утверждение. Если ряд (A) абсолютно сходящийся, то он сходящийся.

Доказательство. Пусть ряд (A) абсолютно сходящийся, то есть сходится ряд $(A^*) \Rightarrow$ по критерию Коши $\forall \varepsilon > 0\ \exists N :\ \forall n > N\ \forall p > 0$

$$|a_{n+1}| + |a_{n+1}| + \ldots + |a_{n+1}| < \varepsilon.$$

Пусть $\varepsilon > 0$ задано. Рассмотрим:

$$|A_{n+p} - A_n| = |a_{n+1} + \ldots + a_{n+p}| \leqslant |a_{n+1}| + \ldots + |a_{n+p}| < \varepsilon \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ ряд (A) сходится. $\square$

Определение 24 (Условно сходящийся ряд). Если ряд (A) сходится, а ряд (A^*) расходится, то ряд (A) называется *условно сходящимся*.

Определение 25 (Знакочередующийся ряд). Ряд (A) называется *знакочередующимся*, если $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \cdot a_{n+1} < 0$. Обозначим знакочередующийся ряд:

$$(\overline{A}) \ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot a_n, \quad a_n > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Теорема 29 (признак Лейбница). Пусть ряд $(\overline{A})$, $a_n > 0 \ \forall n$ удовлетворяет условиям:

1. $a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant \ldots \geqslant a_n \geqslant \ldots$.
2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Тогда ряд $(\overline{A})$ сходится и его сумма $S: \ 0 < S \leqslant a_1$.

Доказательство. Рассмотрим:

$$S_{2n} = a_1 - a_2 + a_3 - \ldots + a_{2n-1} - a_{2n} = \\ = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots + (a_{2n-1} - a_{2n}),$$

тогда $\forall i: \ a_i - a_{i+1} \geqslant 0 \Rightarrow S_{2n} \geqslant 0 \ \forall n \Rightarrow$ последовательность $S_{2n} \nearrow$.

С другой стороны,

$$S_{2n} = a_1 - \underbrace{(a_2 - a_3)}_{\geqslant 0} - \underbrace{(a_4 - a_5)}_{\geqslant 0} - \ldots - \underbrace{(a_{2n-2} - a_{2n-1})}_{\geqslant 0} - a_{2n} \Rightarrow$$

$\Rightarrow S_{2n} \leqslant a_1 \ \forall n$.

Таким образом, S_{2n} не убывает и ограничена сверху $\Rightarrow$ по теореме Вейерштрасса $\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = S$.

Далее,

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} (S_{2n} + a_{2n+1}) = \lim_{n\to\infty} S_{2n} + \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = S + 0 = S.$$

Таким образом, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$.

Так как $0 < S_n \leqslant a_1$ (если $S_n = 0$, то a_1 может быть $= 0$, что невозможно, так как $a_n > 0$) $\Rightarrow$ (берем пределы от неравенства) $0 < S \leqslant a_1$. $\square$

Следствие. Если знакочередующийся ряд $(\overline{A})$ сходящийся, то сумма его n-го остатка имеет знак $(n+1)$-го члена ряда и не больше его по модулю.

Пример. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \ldots, \tag{6.6}$$

по признаку Лейбница:

1. $1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \ldots > \frac{1}{n}$;
2. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$

$\Rightarrow$ 6.6 сходится, $0 < S \leqslant 1$;

Пример. Рассмотрим

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} - \text{расходящийся} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ ряд 6.6 – условно сходящийся.

Лемма 2. Если

1. Числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ либо не возрастают, либо не убывают.
2. Суммы $B_1 = b_1,\ B_2 = b_1 + b_2,\ \ldots,\ B_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n :\ \forall k = 1, \ldots, n\quad |B_k| \leqslant L$.

Тогда

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k \cdot b_k\right| \leqslant L \cdot (|a_1| + |a_n|) \tag{6.7}$$

Доказательство. Рассмотрим

$$\begin{aligned}
&a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \ldots + a_n \cdot b_n = \\
&= a_1 \cdot B_1 + a_2 \cdot (B_2 - B_1) + a_3 \cdot (B_3 - B_2) + \ldots + a_n \cdot (B_n - B_{n-1}) = \\
&= a_1 \cdot B_1 + a_2 \cdot B_2 - a_2 \cdot B_1 + a_3 \cdot B_3 - a_3 \cdot B_2 + \ldots + a_n \cdot B_n - a_n \cdot B_{n-1} = \\
&= B_1 \cdot (a_1 - a_2) + B_2 \cdot (a_2 - a_3) + B_3 \cdot (a_3 - a_4) + \ldots + B_{n-1} \cdot (a_{n-1} - a_n) + a_n \cdot B_n = \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} B_k \cdot (a_k - a_{k-1}) + a_n \cdot B_n.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{k=1}^{n} a_k \cdot b_k\right| = \left|\sum_{k=1}^{n-1} B_k \cdot (a_k - a_{k+1}) + a_n \cdot B_n\right| \leqslant \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{n-1} |B_k| \cdot |a_k - a_{k+1} + |a_n| \cdot |B_n| \leqslant L \cdot \left(\sum_{k=1}^{n-1} |a_k - a_{k+1}| + |a_n|\right) = \\
&= L \cdot (|a_1| + |a_n| + |a_n|) = L \cdot (|a_1| + 2 \cdot |a_n|).
\end{aligned}$$

□

Теорема 30 (Признак Абеля и Дирихле).

1. **Абеля.** Если

   - последовательность $\{a_n\}$ монотонна и ограничена,
   - ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится,

   то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$ сходится.

2. **Дирихле.** Если

   - последовательность $\{a_n\}$ монотонна и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$,
   - частичные суммы ряда (B) ограничены, то есть $\exists k > 0 :$ $\forall n \ |\sum_{m=1}^{n} b_m| < k$,

   то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$ сходится.

Доказательство.

1. Пусть выполнены условия признака Абеля. Тогда $\exists M > 0 : \ |a_n| \leqslant M$. Пусть $\varepsilon > 0$ задано. Возьмем номер $N : \ \forall n > N, \ \forall p > 0$

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} b_k\right| < \varepsilon^* = \frac{\varepsilon}{3 \cdot M}.$$

   Частичные суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$ имеют вид $S_n = a_1 \cdot b_1 + \ldots + a_n \cdot b_n$. По критерию Коши найдем $N_1 : \ \forall n > N_1, \forall p > 0$

$$|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon,$$

$$|a_{n+1} \cdot b_{n+1} + a_{n+2} \cdot b_{n+2} + \ldots + a_{n+p} \cdot b_{n+p}| \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon^* \cdot (|a_{n+1}| + 2 \cdot |a_{n+p}|) \leqslant \varepsilon^* \cdot 3 \cdot M = \frac{\varepsilon}{3 \cdot M} = \varepsilon \Rightarrow$$

   $\Rightarrow$ по критерию Коши ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$ сходится.

2. Пусть выполнены условия признака Дирихле. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то $\exists N : \ \forall n > N \quad (\varepsilon > 0$ задано):

$$|a_n| < \frac{\varepsilon}{3 \cdot k}, \qquad \left|\sum_{k=1}^{n} b_k\right| \leqslant k.$$

   По критерию Коши:

$$|S_{n+p} - S_n| = |a_{n+1} \cdot b_{n+1} + \ldots + a_{n+p} \cdot b_{n+p}| \overset{\text{по лемме}}{\leqslant}$$
$$\leqslant k \cdot (|a_{n+1}| + 2 \cdot |a_{n+p}|) < k \cdot \frac{3 \cdot \varepsilon}{3 \cdot k} = \varepsilon.$$

$\square$

Пример. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\cdot x)}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\cdot\sin(n\cdot x)$

$a_n = \frac{1}{n} \to 0$ при $n\to\infty$. Оценим частичную сумму $\sum_{n=1}^{\infty}\sin(n\cdot x)$:

$$\begin{aligned}
&\sin x + \sin(2\cdot x) + \sin(3\cdot x) + \ldots + \sin(n\cdot x) = \\
&= \frac{1}{\sin\frac{x}{2}}\cdot\left(\sin x\cdot\sin\frac{x}{2} + \sin(2\cdot x)\cdot\sin\frac{x}{2}\right) = \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}\cdot\left(\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{3\cdot x}{2} + \cdot\frac{3\cdot x}{2} - \cos\frac{5\cdot x}{2} + \ldots\right. \\
&\left.\ldots + \cos\frac{(2\cdot n-1)\cdot x}{2} - \cos\frac{(2\cdot n+1)\cdot x}{2}\right) = \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}\cdot\left(\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{(2\cdot n+1)\cdot x}{2}\right) = \\
&= \frac{2\cdot\sin\frac{(n+1)\cdot x}{2}\cdot\sin\frac{n\cdot x}{2}}{2\cdot\sin\frac{x}{2}}.
\end{aligned}$$

Тогда

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\sin(k\cdot x)\right| = \left|\frac{\sin\frac{(n+1)\cdot x}{2}\cdot\sin\frac{n\cdot x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right| \leqslant \frac{1}{\sin\frac{x}{2}},$$

$\frac{x}{2} \neq \pi\cdot k,\ k\in\mathbb{Z} \Rightarrow x\neq 2\cdot\pi\cdot k,\ k\in\mathbb{Z}$.

По признаку Дирихле ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n\cdot x)}{n}$ сходится.

Лекция 9: Продолжение

от 9 окт 10:25

6.4 Свойства сходящихся рядов

Примечание. Рассмотрим ряд:

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots.$$

Если

$$(1-1) + (1-1) + \ldots + (1-1) + \ldots,$$

то

$$1 + (-1+1) + (-1+1) + \ldots.$$

Пусть дан ряд (A). Составим из ряда (A) ряд $(\widetilde{A})$:

$$\underbrace{(a_1 + a_2 + \ldots + a_{n_1})}_{\widetilde{a}_1} + \underbrace{(a_{n_1+1} + a_{n_1+2} + \ldots + a_{n_2})}_{\widetilde{a}_2} + \ldots$$

$$\ldots + \underbrace{(a_{n_k+1} + \ldots + a_{n_k+1})}_{\widetilde{a}_{k+1}} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=n_{k-1}+1}^{n_k} a_l = \widetilde{A}, \quad a_{n_0} = a_1.$$

Теорема 31 (Сочетательное свойство сходящихся рядов)**.**

1. Если ряд (A) сходится, то для любой возрастающей последовательности n_k ряд $(\widetilde{A})$ сходится и их суммы совпадают $(A = \widetilde{A})$.

2. Если ряд $(\widetilde{A})$ сходится и внутри каждой скобки знак не меняется, то ряд (A) сходится и их суммы совпадают, то есть $\widetilde{A} = A$.

Доказательство.

1. Пусть ряд (A) сходится, $\widetilde{A}_k$ – частичные суммы ряда $(\widetilde{A})$:

$$\begin{array}{l} \widetilde{A}_1 = \widetilde{a}_1 = \sum_{k=1}^{n_1} a_k = A_{n_1} \\ \widetilde{A}_2 = \widetilde{a}_1 + \widetilde{a}_2 = \sum_{k=n_1+1}^{n_2} a_k = A_{n_1} \\ \vdots \\ \widetilde{A}_k = A_{n_k} \end{array}.$$

Так как ряд (A) сходится, то $\exists \lim\limits_{k\to\infty} A_{n_k} = A$, следовательно:

$$\begin{aligned} A &= \lim_{k\to\infty} A_{n_k} = \\ = \lim_{n\to\infty} \widetilde{A}_k &= \widetilde{A} \end{aligned}$$

2. Пусть ряд $(\widetilde{A})$ сходится. Имеем:

$$\text{при:} \begin{array}{ll} a_1 > 0: & A_1 < A_2 < \ldots < A_{n_1} \\ a_1 < 0: & A_1 > A_2 > \ldots > A_{n_1} \end{array}.$$

- Далее, если $a_{n_1+1} > 0$, тогда:
  при $a_1 > 0: \; A_{n_1+1} < A_{n_1+2} < \ldots < A_{n_2}$

  $$A_{n_1} = \widetilde{A}_1 < A_{n_2} = \widetilde{A}_2,$$

  при $a_1 < 0: \; A_{n_1} < 0$ и $A_{n_1} < A_{n_2}$

  $$\widetilde{A}_1 < \widetilde{A}_2.$$

- Если же $a_{n_1+1} < 0$, тогда:

  $$\text{при:} \begin{array}{ll} a_1 < 0: & A_{n_1} = \widetilde{A}_1 > A_{n_2} = \widetilde{A}_2 \\ a_1 > 0: & A_{n_1} = \widetilde{A}_1 > \widetilde{A}_2 \end{array}.$$

Аналогично, пока n меняется от n_k до n_{k+1}, то будем иметь либо $A_{n_k} < A_n < A_{n_{k+1}}$, либо $A_{n_k} > A_n > A_{n_{k+1}}$.

Ряд $(\widetilde{A})$ – сходится $\Rightarrow \exists \lim\limits_{k\to\infty} \widetilde{A}_k = \lim\limits_{k\to\infty} \widetilde{A}_{k+1} = \widetilde{A} \Rightarrow$ по теореме о 2-х миллиционерах:

$$\lim_{k\to\infty} A_n = \widetilde{A}.$$

$\square$

Лемма 3. Если ряд (A) абсолютно сходящийся, то ряды (P) и (Q) сходятся и $A = P - Q$.

Доказательство. Пусть (A^*) – сходится $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = A^*$.

A_n^* – частичные суммы ряда (A^*).

Имеем $P_{n_k} = a_{n_1} + a_{n_2} + \ldots + a_{n_k}$, где $n_1 < n_2 < \ldots < n_k \leqslant n$,

Пример.

$$(A) \; \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6,$$

$$(P) \; \sum_{n=1}^{\infty} p_n = \underbrace{a_1 + a_3 + a_4 + a_6}_{P_3},$$

$$(A^*) \; \underbrace{|a_1| + |a_2| + |a_3| + |a_4| + |a_5|}_{A_5^*} + \ldots.$$

$$\begin{array}{c} P_{n_k} \leqslant A_n^* \\ Q_{n_m} \leqslant A_n^* \end{array} \overset{\substack{\text{т.к. } (A^*) \\ \text{сходится}}}{\Longrightarrow} \begin{array}{c} A_n^* \leqslant A^* \\ P_{n_k} \leqslant A^* \\ Q_{n_m} \leqslant A^* \end{array}$$

Далее,

$$A_n = P_{n_k} - Q_{n_m}, \text{ где } \begin{array}{c} n_k \leqslant n \\ n_m \leqslant n \end{array}$$

$$\left(\text{при } n \to \infty \Rightarrow \begin{array}{c} k \to \infty \\ m \to \infty \end{array}\right)$$

Далее, так как (A) сходится абсолютно $\Rightarrow$ (A) сходится $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \exists A = \lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{k,m\to\infty} (P_{n_k} - Q_{n_m}) =$$

$$= \lim_{k\to\infty} P_{n_k} - \lim_{m\to\infty} Q_{n_m} = P - Q.$$

□

Теорема 32 (Переместительное свойство сходящихся рядов). Если ряд (A) абсолютно сходится, то его сумма не зависит от перестановки членов ряда.

Доказательство. Пусть ряд (A) сходится абсолютно $\Rightarrow$ ряд (A^*) сходится. Пусть ряд

$$(A') \ \sum_{n=1}^{\infty} a'_n$$

получен из ряда (A) путем перестановки его членов. Покажем, что ряд (A') сходится и $A = A'$ (их суммы совпадают).

1. Пусть (A) – знакоположительный, то есть $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n > 0$. Рассмотрим частичные суммы ряда (A'):

   $$A'_k = a'_1 + a'_2 + \ldots + a'_k = a_{n_1} + a_{n_2} + \ldots + a_{n_k}.$$

   Пусть $n' = \max\{n_1, n_2, \ldots, n_k\}$. Тогда:

   $$A'_k \leqslant a_1 + a_2 + \ldots + a_{n_j} + \ldots + a_{n'} = A_{n'},$$

   где $A_{n'}$ – n'-я частичная сумма ряда (A). Так как (A) сходится и знакоположительный $\Rightarrow A_{n'} \leqslant A$.

   Таким образом получаем, что $\forall k \ A'_k \leqslant A \Rightarrow$ последовательность $A'_k \nearrow$ и ограничена, тогда:

   $$\exists \lim_{k\to\infty} A'_k = A' \leqslant A.$$

С другой стороны, ряд (A') получен перестановкой членов ряда $(A) \Rightarrow A' \geqslant A \Rightarrow A' \leqslant A \leqslant A' \Rightarrow A = A'$.

2. Пусть ряд (A) сходится абсолютно, то есть (A^*) сходится. С рядом (A) свяжем два ряда:

$$(P)\ \sum_{n=1}^{\infty} p_n, \quad (Q)\ \sum_{n=1}^{\infty} q_n,$$

где p_n – положительные члены ряда (A), q_n – отрицательные члены ряда (A), взятые по модулю, причем все члены рядов (P) и (Q) взяты в том же порядке, как они стояли в ряде (A).

Если ряд (A) сходится абсолютно, то сходится ряд (A^*), (A^*) – положительный ряд $\Rightarrow$ $(A^{*'})$ сходится (получен путем перестановки членов ряда (A^*)) $\Rightarrow$ по лемме сходятся ряды (P') и (Q') и $A' = P' - Q'$.

$$\begin{tikzcd}
 & (P) & & & (A^*) \arrow[r] & \underbrace{(A^{*'})}_{\text{сх.}} \arrow[d] & \\
(A) \arrow[ur] \arrow[dr] & & \Longrightarrow & & & (A') \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
 & (Q) & & & (P') & & (Q')
\end{tikzcd}$$

- (P') – положительный ряд $\Rightarrow$ по пункту 1, (P) – сходится,
- (Q') – положительный ряд $\Rightarrow$ по пункту 1, (Q) – сходится

и $P' = P,\ Q' = Q \Rightarrow A' = P - Q = A$. □

Лемма 4. Если ряд (A) сходится условно, то ряды (P) и (Q) расходятся.

Доказательство. Рассмотрим

$$A_n = P_k - Q_m,$$

где $k \leqslant n,\ m \leqslant n\ (k + m = n)$.

$$A_n^* = P_k^* + Q_m^*,$$

$$\lim_{n\to\infty} A_n = A; \quad \lim_{n\to\infty} A_n^* = \infty.$$

Допустим, что ряд (P) сходится $\Rightarrow$ (P^*) сходится, а так же $\exists \lim\limits_{k\to\infty} P_k = P \Rightarrow \exists \lim\limits_{m\to\infty} Q_m = A - P \Rightarrow Q^*$ – сходится $\Rightarrow$ (A^*) имеет предел. Противоречие $\Rightarrow$ (P) расходится.

Для (Q) – аналогично. □

Теорема 33 (Римана о перестановке членов условно сходящегося ряда)**.** Если ряд (A) условно сходится, то $\forall B \in \mathbb{R}$ (в том числе $B = \pm\infty$) $\exists$ перестановка ряда (A) такая, что полученный ряд сходится и имеет сумму B. Более того, $\exists$ перестановка ряда (A) такая, что частичные суммы полученного ряда не стремятся ни к конечному, ни к бесконечному пределу.

Доказательство. Пусть $B \in \mathbb{R}$. Возьмем номера:

$$\begin{aligned} &n_1: \; p_1 + p_2 + \ldots + p_{n_1} \geqslant B, \\ &n_2: \; p_1 + p_2 + \ldots + p_{n_1} - q_1 - q_2 - \ldots - q_{n_2} \leqslant B. \end{aligned}$$

Более того, элементы p и q будем брать столько, сколько это необходимо для выполнения этого условия.

Возьмем:

$$n_3: \; p_1 + p_2 + \ldots + p_{n_1} - q_1 - q_2 - \ldots - q_{n_2} + p_{n_1+1} + p_{n_1+2} + \ldots + p_{n_3} \geqslant B$$

и так далее.

Таким образом получим ряд

$$(p_1 + \ldots + p_{n_1}) + (-q_1 - \ldots - q_{n_2}) + \\ + (p_{n_1+1} + \ldots + p_{n_3}) + (-q_{n_2+1} - \ldots - q_{n_4}) + \ldots$$

– этот ряд сходится к B.

Действительно, так как ряд (A) сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Так как количество членов p_i и q_i бралось лишь столько, сколько необходимо, то соответствующие частичные суммы отличаются от B разве что на последнее слогаемое в этой частичной сумме, которое стремится к нулю $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} A'_n = B$. $\square$

6.5 Умножение рядов

Примечание. Пусть даны ряды $(A), (B)$. Составим таблицу:

	a_1	a_2	$\cdots$	a_n	$\cdots$
b_1	$a_1 b_1$	$a_2 b_1$	$\cdots$	$a_n b_1$	$\cdots$
b_2	$a_1 b_2$	$a_2 b_2$	$\cdots$	$a_n b_2$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$
b_n	$a_1 b_n$	$a_2 b_n$	$\cdots$	$a_n b_n$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$

Определение 26 (Произведение рядов, форма Коши)**.** *Произведением рядов* (A) и (B) назовем ряд, членами которого являются элементы на строке таблицы $a_i b_j$, взятые в произвольном порядке.

Если числа выбираются по диагоналям, то произведение называется *формой Коши*:

$$a_1b_1 + (a_1b_2 + a_2b_1) + \dots$$

Теорема 34 (Коши о произведении рядов). Если ряды $(A), (B)$ абсолютно сходятся, A и B – их суммы, то $\forall$ их произведение абсолютно сходится и равно $A \cdot B$.

Доказательство. Рассмотрим r-тую частичную сумму ряда

$$(A \cdot B)^* \quad \sum_{r=1}^{\infty} |a_{n_r} \cdot b_{k_r}|,$$

$$\begin{aligned} S_r = |a_{n_1} \cdot b_{k_1}| + |a_{n_2} \cdot b_{k_2}| + \dots + |a_{n_r} \cdot b_{k_r}| \leqslant \\ \leqslant (|a_{n_1}| + |a_{n_2}| + \dots + |a_{n_r}|) \cdot (|b_{k_1}| + |b_{k_2}| + \dots + |b_{k_r}|) \leqslant \\ \leqslant (|a_1| + |a_2| + \dots + |a_m|) \cdot (|b_1| + |b_2| + \dots + |b_m|), \end{aligned}$$

где $m = \max\{n_1, n_2, \dots, n_r, k_1, k_2, \dots, k_r\}$.

Так как ряды (A) и (B) сходятся абсолютно, то есть сходятся ряды (A^*) и (B^*), то $S_r \leqslant A^* \cdot B^* \Rightarrow$ последовательность $S_r \nearrow$ и ограничена $\Rightarrow \exists \lim\limits_{r\to\infty} S_r \Rightarrow$ ряд $(A \cdot B)^*$ сходится $\Rightarrow$ ряд $(A \cdot B)$ – сходится, причем его сумма не зависит от порядка суммирования.

Будем суммировать ряд $A \cdot B$ по квадратам:

$$\underbrace{a_1b_1}_{c_1} + \underbrace{(a_1b_2 + a_2b_2 + a_2b_1)}_{c_2} + \underbrace{(a_1b_3 + a_2b_3 + a_3b_3 + a_3b_2 + b_3b_1)}_{c_3} + \dots$$

$S_1 = a_1b_1 = A_1 \cdot B_1$
$S_2 = c_1 + c_2 = a_1b_1 + (a_1b_2 + a_2b_2 + a_2b_1) = (a_1 + a_2) \cdot (b_1 + b_2) = A_2 \cdot B_2$
$S_3 = c_1 + c_2 + c_3 = (a_1 + a_2 + a_3) \cdot (b_1 + b_2 + b_3) = A_3 \cdot b_3$
$\vdots$
$S_n = A_n \cdot B_n$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} (A_n \cdot B_n) = \lim_{n\to\infty} A_n \cdot \lim_{n\to\infty} B_n = A \cdot B$$

$\square$

Лекция 10: Продолжение

от 13 окт 8:46

6.6 Двойные и повторные ряды

Примечание. Рассмотрим таблицу:

$$(\star)\quad \begin{array}{c|c|c|c|c|c}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1k} & \cdots \\ \hline
a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2k} & \cdots \\ \hline
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \\ \hline
a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nk} & \cdots \\ \hline
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

Определение 27 (Повторный ряд). *Повторным рядом* называются выражения

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}, \tag{6.8}$$

и

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{nk}. \tag{6.9}$$

Говорят, что ряд 6.8 сходится, если сходятся все ряды (A_n) по строкам $(\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k} = A_n)$ и сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$.

Определение 28 (Двойной ряд). *Двойным рядом* называется выражение:

$$\sum_{n,k=1}^{\infty} a_{nk} \tag{6.10}$$

Говорят, что ряд 6.10 сходится, если:

$$\exists A = \lim_{\substack{K\to\infty\\ N\to\infty}} A_{NK} = \lim_{\substack{K\to\infty\\ N\to\infty}} \sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{K} a_{nk}.$$

То есть $\forall\varepsilon > 0\ \exists N_0$ и $K_0 :\ \forall N > N_0$ и $\forall k > K_0$

$$\left|\underbrace{\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{K} a_{nk}}_{A_{NK}} - A\right| < \varepsilon.$$

Определение 29 (Простой ряд). Пусть ряд

$$\sum_{r=1}^{\infty} U_r \tag{6.11}$$

построен из элементов таблицы, взятых в произвольном порядке. Такой ряд будем называть *простым*, связанным с данной таблицей.

Теорема 35 (О связи сходимости простого и повторного рядов).

1. Если ряд 6.11 абсолютно сходится, то ряд 6.8 сходится и его сумма равна U.
2. Если после замены элементов таблицы $(\star)$ их модулями ряд 6.8* ходится, то ряд 6.11 сходится абсолютно и суммы рядов 6.8 (без модулей) и 6.11 совпадают.

Доказательство.

1. Пусть 6.8* сходится. Покажем, что все ряды по строкам сходятся:
$$(A_n)\ \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$
и сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$.
Рассмотрим
$$|a_{n1}| + |a_{n2}| + \ldots + |a_{nk}| \leqslant |u_1| + |u_2| + \ldots + |u_r|,$$
где r выбран таким образом, чтобы среди $|u_i|$ были все слагаемые $|a_{n1}, \ldots, a_{nk}|$.
Таким образом,
$$\underbrace{|a_{n1}| + \ldots + |a_{nk}|}_{A^*_{nk}} \leqslant U^* \Rightarrow \exists \lim_{k\to\infty} A^*_{nk} = A^*_n \Rightarrow$$
$\Rightarrow$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ сходится абсолютно $\Rightarrow$ он сходится.
Далее, пусть $\varepsilon > 0$ задано. Выберем номер $r_0 :\ \forall r > r_0$
$$\sum_{i=1}^{\infty} |u_{r+i}| < \frac{\varepsilon}{3}.$$
Тогда
$$\left|\sum_{i=1}^{r} u_i - U\right| = \left|\sum_{i=1}^{\infty} u_{r+i}\right| \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} |u_{r+i}| < \frac{\varepsilon}{3}$$
Так как ряды по строкам сходятся, то $\forall n$ выберем $m(n)$:
$$\left|\sum_{k=1}^{m(n)} a_{n_k} - A_n\right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$
Наконец, выберем номер N_0 такой, что все числа $u_1, u_2, \ldots, u_{r_0}$

содержались бы в первых N_0 строках:

$$\left|\sum_{n=1}^{N_0} A_n - U\right| =$$

$$= \left|\sum_{n=1}^{N_0} A_n - \sum_{n=1}^{N_0}\sum_{k=1}^{m(n)} a_{n_k} + \sum_{n=1}^{N_0}\sum_{k=1}^{m(n)} a_{n_k} - \sum_{i=1}^{r_0} u_i + \sum_{i=1}^{r_0} u_i - U\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{N_0}\left|A_n - \sum_{k=1}^{m(n)} a_{n_k}\right| + \left|\sum_{n=1}^{N_0}\sum_{k=1}^{m(n)} a_{n_k} - \sum_{i=1}^{r_0} u_i\right| + \underbrace{\left|\sum_{i=1}^{r_0} u_i - U\right|}_{<\frac{\varepsilon}{3}} <$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \sum_{i=r_0+1}^{\infty} (u_i) + \frac{\varepsilon}{3} < \frac{\varepsilon}{3}\cdot 3 = \varepsilon.$$

2. Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} |a_{n_k}| = A^*$ сходится.

   Тогда $\forall r\ \exists N, K$ такие, что числа $u_1, \ldots, u_r$ содержатся в N первых строчках и K первых столбцах таблицы:

$$\sum_{i=1}^{r} |u_i| \leqslant \sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{K} |a_{n_k}| \leqslant A^* \Rightarrow$$

   $\Rightarrow |u_r| \nearrow$ и ограничен $\Rightarrow$ ряд 6.11 сходится абсолютно $\Rightarrow$ по пункту 1. суммы рядов 6.11 и 6.8 равны.

□

Теорема 36 (Свойства двойных рядов)**.**

1. Если ряд 6.10 сходится, то

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ k\to\infty}} a_{nk} = 0.$$

2. (Критерий Коши) Ряд 6.10 сходится $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N_0, K_0 :\ \ \forall n > N_0,\ \forall k > K_0,\ \forall p > 0,\ \forall q > 0$

$$\left|\sum_{n=1}^{p}\sum_{k=1}^{q} a_{(N_0+n)(K_0+k)}\right| < \varepsilon.$$

3. Если ряд 6.10 сходится, то $\forall c \in \mathbb{R}$ ряд

$$\sum_{n,k=1}^{\infty} (c\cdot a_{nk})$$

   сходится, и его сумма равна $c\cdot A$ (где $A = \sum_{n,k=1}^{\infty} a_{nk}$).

4. Если ряд 6.10 сходится и ряд
$$\sum_{n,k=1}^{\infty} b_{nk}$$
сходится, то
$$\sum_{n,k=1}^{\infty} (a_{nk} + b_{nk}) = A + B,$$
а к тому же – сходится.

5. Если $\forall n,\ \forall k\ a_{nk} \geqslant 0$, то ряд 6.10 сходится $\Leftrightarrow$ его частичные суммы ограничены в совокупности.

Доказательство.

1. Пусть ряд 6.10 сходится. Заметим, что
$$A_{nk} = \sum_{i,j=1}^{n,k},$$
$$a_{nk} = A_{nk} - A_{n(k-1)} - A_{(n-k)k} + A_{(n-1)(k-1)}$$
$\Rightarrow a_{nk} \to 0.$

2. (Критерий Коши) На декартовом произведении $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ введем базу:
$$B_{nk} = \left\{(n,k):\ n > N_0,\ k > K_0\right\}.$$
Тогда критерий Коши сходимости ряда – это есть критерий Коши существования предела функции A_{nk} по данной базе.

3. Самостоятельно.

4. Самостоятельно.

5.
   - $|\Rightarrow|$ Очевидно.
   - $|\Leftarrow|$ Пусть множество $\{A_{nk}\}$ – ограничено.
     Пусть $A = \sup\{A_{nk}\}$. Покажем, что A – сумма ряда 6.10.
     Пусть $\varepsilon > 0$ задано. Выберем N_0 и K_0:
     $$A - A_{N_0K_0} < \varepsilon$$
     (по опр. sup)

     Тогда $\forall n > N_0$ и $\forall k > K_0$ $A_{nk} \geqslant A_{N_0K_0} \Rightarrow 0 < A - A_{nk} \leqslant A - A_{N_0K_0} < \varepsilon \Rightarrow |A - A_{nk}| < \varepsilon$.

   $\Rightarrow$ ряд 6.10 сходится.

$\square$

Теорема 37 (О связи сходимости двойного ряда и повторного)**.** Если

- ряд 6.10 сходится (двойной),
- все ряды по строкам сходятся,

тогда повторный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}$ сходится и

$$A = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} = \sum_{n,k=1}^{\infty} a_{nk}.$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ задано. Выберем $N_0, K_0 : \ \forall n > N_0$ и $k > K_0$

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} a_{ij} - A\right| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{6.12}$$

$$\sum_{i,j=1}^{n,k} a_{ij} = A_{nk} \text{ двойного ряда.}$$

В неравенстве 6.12 переходим к пределу при $k \to \infty$.
Тогда $\forall n > N_0$

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} - A\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} A_n - A\right| < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

$\Rightarrow$ повторный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} = A.$ □

Теорема 38 (О связи сходимости двойного и простого рядов)**.** Если ряд 6.10* сходится, то сходится ряд 6.11.
И наоборот, если сходится ряд 6.11*, то сходится ряд 6.10.
И в обоих случаях суммы рядов равны:

$$\sum_{n,k=1}^{\infty} a_{nk} = \sum_{r=1}^{\infty} u_r$$

Доказательство.

- $|\Rightarrow|$ Пусть двойной ряд сходится абсолютно, то есть сходится ряд $\sum_{n,k=1}^{\infty} |a_{nk}|$.

  Тогда для любого номера S $\exists N, K$ такие, что все числа $u_1, \ldots, u_S$ содержатся в первых N строках и первых K столбцах, тогда:

  $$|u_1| + |u_2| + \ldots + |u_S| \leqslant \sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{K} |a_{nk}| \leqslant A^* = \sum_{n,k=1}^{\infty} |a_{nk}| \Rightarrow$$

  $\Rightarrow$ последовательность $U_i^* \nearrow$ и ограничена $\Rightarrow$ ряд $\sum_{r=1}^{\infty} u_r$ сходится абсолютно $\Rightarrow$ сходится.

- $|\Leftarrow|$ Пусть ряд $\sum_{r=1}^{\infty} |u_r|$ сходится $\Rightarrow \forall N, K \ \exists S :$ все числа $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1K}, a_{21}, \ldots, a_{2K}, \ldots, a_{N1}, \ldots$

содержатся среди чисел $u_1, \ldots, u_S$. Тогда

$$A^*_{NK} = \sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{K}|a_{nk}| \leqslant \sum_{r=1}^{S}|u_r| \leqslant U^* = \sum_{r=1}^{\infty}|u_r| \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ ряд $\sum_{n,k=1}^{\infty} a_{nk}$ сходится.

Покажем, что $\sum_{n,k=1}^{\infty} a_{nk} = \sum_{r=1}^{\infty} u_r$.

Так как ряд $\sum_{r=1}^{\infty} u_r$ сходится абсолютно, то расположим элементы по квадратам:

$$\begin{aligned}
&a_{11} = u_{r_1}\\
&a_{12} + a_{22} + a_{21} = u_{r_2} + u_{r_3} + u_{r_4}\\
&\vdots\\
&A_{nn} = a_{11} + \ldots + a_{nn} = U_n = u_{r_1} + \ldots + u_{r_n}
\end{aligned},$$

$$A = \lim_{n\to\infty} A_{nn} = \lim_{n\to\infty} U_n = U.$$

□

Теорема 39 («Главная»). Пусть дана таблица $(\star)(a_{ij})$ и по ней построены ряды 6.8, 6.9, 6.10, 6.11.

Если после замены элементов таблицы их модулями хотя бы один из 4-х рядов становится сходящимся, то сходятся остальные и их суммы равны.

Доказательство. Из четырех предыдущих теорем $\Rightarrow$ «Главная» теорема. □

Лекция 11: Продолжение

от 17 окт 10:28

6.7 Поточечная и равномерная сходимость семейства функций

Определение 30 (Семейство функций, параметры). *Семейство функций* – это произвольное множество функций.

Пусть $f : X \times T \to Y$. Если по каким-либо соображениям элементам множества T уделяется особое внимание, то будем их называть *параметрами*.

То есть $\forall t \in T$ можно рассмотреть функцию

$$f_t(x) = f(x, t).$$

В этом случае будем говорить, что задано семейство функций, зависящих от параметра t.

Пример. $T = \mathbb{N}$, тогда $f_n(x) = x^n$.

Примечание. Пусть задано семейство отображений $f_t :\ X \to Y_\rho,\ Y$ – метрическое пространство с заданной метрикой $\rho,\ t \in T$.

Пусть $\mathfrak{B}$ – база на T.

Определение 31 (Сходимость в точке)**.** Будем говорить, что *семейство* $\{f_t\}$ *сходится в точке* $x \in X$, если $f_t(x)$ как функция аргумента t имеет предел по базе $\mathfrak{B}$, то есть $\exists y_x \in Y_\rho :\ \forall \varepsilon > 0\ \exists B \in \mathfrak{B} :\ \forall t \in B$

$$\rho\big(f_t(x), y_x\big) < \varepsilon.$$

Определение 32 (Область сходимости, предельная функция)**.** Множество $E = \big\{x \in X :\ \{f_t\} \text{ сходится в точке } x\big\}$ называется *областью сходимости* семейства $\{f_t\}$ по базе $\mathfrak{B}$.

Далее, на E введем функцию, положив

$$f(x) = \lim_{\mathfrak{B}} f_t(x).$$

Функция $f(x)$ называется *предельной*.

Определение 33 (Поточечная сходимость по базе)**.** Пусть дано семейство $f_t : X \to Y_u$ и $f : X \to Y$. Будем говорить, что f_t сходится по базе $\mathfrak{B}$ *поточечно* к f на X, если $\forall x \in X\ \forall \varepsilon > 0\ \exists B_x \in \mathfrak{B} :\ \forall t \in B_x$

$$\rho\big(f_t(x), f(x)\big) < \varepsilon.$$

Обозначение:

$$f_t \underset{\mathfrak{B}}{\longrightarrow} f \text{ (на } X)$$

Определение 34 (Равномерная сходимость по базе)**.** Семейство $\{f_t\}$ сходится *равномерно* по базе $\mathfrak{B}$ к f на X, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists B \in \mathfrak{B} :\ \forall t \in B$ и $\forall x \in X$

$$\rho\big(f_t(x), f(x)\big) < \varepsilon.$$

Обозначение:

$$f_t \underset{\mathfrak{B}}{\rightrightarrows} f \text{ (на } X)$$

Определение 35 (Поточечная сходимость)**.** Пусть $f_n : X \to \mathbb{R}$ – последовательность функций и $f : X \to \mathbb{R}$. Семейство $\{f_n\}$ *сходится поточечно* к f на X, если $\forall x \in X\ \exists f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x),\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N :\ \forall n > N$

$$\big|f_n(x) - f(x)\big| < \varepsilon.$$

Обозначение:

$$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f \text{ (на } X)$$

Определение 36 (Равномерная сходимость)**.** Последовательность $\{f_n\}$ *равномерно сходится* к f на X при $n \to \infty$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}:\ \forall n > N\ \forall x \in X$

$$\left|f_n(x) - f(x)\right| < \varepsilon.$$

Обозначение:

$$f_n \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f \text{ (на } X)$$

Пример. $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = x^n$

Имеем при фиксирвоанном x:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & -1 < x < 1 \\ 1, & x = 1 \\ +\infty, & x > 1 \\ \nexists, & x \leqslant -1 \end{cases}$$

Таким образом область сходимости этой последовательности $E = (-1; 1]$. На множестве E определим предельую функцию

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0, & x \in (-1; 1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

Покажем, что f_n сходится к f на E неравномерно, то есть $\exists \varepsilon > 0\ \forall N \in \mathbb{N}:\ \exists n > N\ \exists x \in X:$

$$\left|f_n(x) - f(x)\right| \geqslant \varepsilon.$$

Возьмем $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Пусть N задано произвольно. Возьмем $n = N + 1$ и $x:\ x^n = \frac{3}{4}$, то есть $x = \sqrt[n]{\frac{3}{4}}$. Тогда:

$$\left|f_n(x) - f(x)\right| = \left|\left(\sqrt[n]{\frac{3}{4}}\right)^n - 0\right| = \frac{3}{4} > \frac{1}{2}$$

Пример. $f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}$

$\forall x \in X$:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{1+n^2x^2} = 0.$$

Таким образом, $f(x) = 0\ \forall x \in \mathbb{R}$. Покажем, что $f_n \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f$ на $\mathbb{R}$.

Имеем:

$$\left|f_n(x) - 0\right| = \left|\frac{x}{1+n^2x^2}\right| = \frac{1}{2n} \cdot \left|\frac{2nx}{1+n^2x^2}\right| \leqslant$$
$$\leqslant \left| \begin{matrix} 0 \leqslant (1-nx)^2 = 1 + n^2x^2 - 2nx \Rightarrow \\ \Rightarrow 2nx \leqslant 1 + n^2x^2 \end{matrix} \right| \leqslant \frac{1}{2n} \cdot 1 = \frac{1}{2n}.$$

Пусть $\varepsilon > 0$ задано. Возьмем $N:\ \forall n > N\ \frac{1}{2n} < \varepsilon,\ N = \left[\frac{1}{2\varepsilon}\right]$. Таким образом, $\forall n > N \ \forall x \in \mathbb{R}$

$$\left|f_n(x)\right| \leqslant \frac{1}{2n} < \frac{1}{2N} = \varepsilon \Rightarrow$$

$\Rightarrow f_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f(x)$ на $\mathbb{R}^\infty$

Пример. $f_n(x) = \frac{n\cdot x}{1+n^2x^2}$
$\forall x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n\cdot x}{1+n^2x^2} = 0 \Rightarrow$$

$\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x) = 0$ (имеется поточечная сходимость).

Покажем, что данное семейство не имеет равномерной сходимости к f. Рассмотрим $f_n(x) - f(x) = f_n(x) = \frac{n\cdot x}{1+n^2x^2}$:

$$f_n'(x) = \frac{n\cdot(1+n^2x^2) - n\cdot x\cdot(2xn^2)}{(1+n^2x^2)^2} = \frac{n - n^3x^2}{(1+n^2x^2)^2} = 0, \quad x = \pm\frac{1}{n}$$

Далее, $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$. Возьмем $\varepsilon = \frac{1}{4}$.
Тогда если N задано, то выберем $n = N+1$ и $x = \frac{1}{n}$.
Тогда

$$\left|f_n(x) - f(x)\right|\Big|_{x=\frac{1}{n}} = \frac{1}{2} > \frac{1}{4} \Rightarrow$$

$\Rightarrow f_n(x) \underset{n\to\infty}{\not\rightrightarrows} f(x)$ (пока что придется обозначать как $\underset{n\to\infty}{\not\rightrightarrows}$, так как нормально я не научился).

Теорема 40 (Критерий Коши сходимости семейства функций)**.** Пусть Y – полное метрическое пространство, $f_t : X \to Y$, $t \in T$ – семейство $\{f_t\}$ равномерно сходится на X по базе $\mathfrak{B} \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \ \exists B \in \mathfrak{B} : \ \forall t_1, t_2 \in B$ и $\forall x \in X$

$$\rho\big(f_{t_1}(x); f_{t_2}(x)\big) < \varepsilon.$$

Определение 37 (Равномерная сходимость семейства функций по базе)**.** Будем говорить, что семейство функций $f_t : X \to Y$ *равномерно сходится на* X *по базе* $\mathfrak{B}$, если:

1. $\exists f : X \to Y$:

$$\lim_{\mathfrak{B}} f_t(x) = f(x), \quad \forall x \in X.$$

2. f_t сходится равномерно к f на X по базе $\mathfrak{B}$.

Теорема 41 (Формулировка критерия Коши для послед. $f_n(x)$)**.** Последовательность $f_n(x)$ равномерно сходится на $X \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} : \ \forall n > N \ \forall p > 0 \ \forall x \in X$

$$\left|f_n(x) - f_{n+p}(x)\right| < \varepsilon.$$

Доказательство.

- $|\Rightarrow|$ Проведем доказательство для $Y = \mathbb{R}$.

  Пусть семейство f_t сходится равномерно на X по базе $\mathfrak{B}$, то есть $\exists f(x) : X \to \mathbb{R}$:
  $$f_t(x) \underset{\mathfrak{B}}{\rightrightarrows} f(x).$$

  Покажем, что выполнено условие Коши.

  Пусть $\varepsilon > 0$ задано. Выберем $B \in \mathfrak{B} : \forall t \in B \ \forall x \in X$
  $$\left|f_t(x) - f(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

  Тогда $\forall t_1, t_2 \in B \ \forall x \in X$
  $$\left|f_{t_1}(x) - f_{t_2}(x)\right| = \left|f_{t_1}(x) - f(x) + f(x) - f_{t_2}(x)\right| \leqslant$$
  $$\leqslant \left|f_{t_1}(x) - f(x)\right| + \left|f_{t_2}(x) - f(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

- $|\Leftarrow|$ Пусть $\forall \varepsilon > 0 \ \exists B \in \mathfrak{B}$:
  $$\forall t_1, t_2 \in B \text{ и } \forall x \in X \quad \left|f_{t_1}(x) - f_{t_2}(x)\right| < \varepsilon \tag{6.13}$$

  Зафиксируем $x \in X$. Тогда выражение 6.13 есть точная формулировка критерия Коши существования предела функции $f_t(x)$ по базе $\mathfrak{B} \Rightarrow \forall x \in X \ \exists \lim\limits_{\mathfrak{B}} f_t(x) = f(x)$.

  Покажем, что $f_t(x) \underset{\mathfrak{B}}{\rightrightarrows} f(x)$ на X.

  В 6.13 перейдем к пределу по базе $\mathfrak{B}$ по переменной t_1. Получим, что
  $$\left|f(x) - f_{t_2}(x)\right| < \varepsilon.$$

  Таким образом получаем равномерную сходимость семейства $f_{t_2}(x)$ к f на X по базе $\mathfrak{B}$, то есть $\forall \varepsilon > 0 \ \exists B \in \mathfrak{B} \ \forall t_2 \in B$ и $\forall x \in X$
  $$\left|f_{t_2}(x) - f(x)\right| < \varepsilon.$$

□

Следствие. Пусть X, Y – метрические пространства, $E \subset X$, $x_0 \in E$ – предельная точка для E. Семейство $f_t : X \to Y$:

1. f_t сходится на E по базе $\mathfrak{B}$.
2. f_t расходится в точке x_0 по базе $\mathfrak{B}$.
3. $\forall t \ f_t$ непрерывно в точке x_0.

Тогда на E семейство f_t сходится неравномерно.

Доказательство. Применим критерий Коши, покажем, что $\exists \varepsilon > 0$: $\forall B \in \mathfrak{B}$ $\exists t_1, t_2 \in B$ и $\exists x \in E$:

$$\rho_Y\big(f_{t_1}(x), f_{t_2}(x)\big) \geqslant \varepsilon.$$

Таким образом f_t расходится в точке x_0, тогда $\exists \varepsilon > 0 : \forall B \in \mathfrak{B}$ $\exists t_1, t_2 \in B$:

$$\rho_Y\big(f_{t_1}(x_0), f_{t_2}(x_0)\big) \geqslant \varepsilon.$$

Так как f_{t_1} и f_{t_2} непрерывны, тогда $\exists U(x_0) \subset X :\ \forall x \in U(x_0)$

$$\rho_Y\big(f_{t_1}(x), f_{t_2}(x)\big) \geqslant \varepsilon.$$

Возьмем $\forall x \in U(x_0) \cap E \Rightarrow$ тогда в x будет выполняться неравенство

$$\rho_Y\big(f_{t_1}(x), f_{t_2}(x)\big) \geqslant \varepsilon \Rightarrow$$

$\Rightarrow f_t$ на E сходится неравномерно. □

Следствие (Из следствия выше)**.** Если $f_t : (a; b] \to D,\ D$ – область в Y:

1. $\forall t$ f_t непрерывно в точке b.
2. f_t сходится на $(a; b)$ по $\mathfrak{B}$.
3. f_t расходится в точке b.

Тогда на $(a; b)$ f_t сходится неравномерно.

6.8 Равномерная сходимость функциональных рядов

Определение 38 (Функциональный ряд)**.** Пусть $f_n : X \to \mathbb{R},\ X$ – произвольное множество.

Функциональным рядом называется выражение вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \tag{6.14}$$

Говорят, что ряд 6.14 сходится на X поточечно, если на X сходится поточечно последовательность его частичных сумм. Ряд 6.14 равномерно сходится на X, если на X равномерно сходится последовательность его частичных сумм.

Теорема 42 (Критерий Коши равномерной сходимости функциональных рядов)**.** Ряд 6.14 равномерно сходится на $X \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N :\ \forall n > N\ \forall p > 0\ \forall x \in X$

$$\big|f_{n+1}(x) + \ldots + f_{n+p}(x)\big| < \varepsilon.$$

Доказательство. Самостоятельно. □

Следствие. Если:

1. Ряд 6.14 сходится на $(a;b)$.
2. Расходится в точке b.
3. $\forall n\ f_n(x)$ непрерывно в точке b.

Тогда ряд 6.14 сходится на $(a;b)$ неравномерно.

Доказательство. Следует из предыдущих следствий. □

Лекция 12: Продолжение

от 20 окт 10:31

Определение 39 (Абсолютная сходимость)**.** Ряд 6.14 сходится абсолютно на X, если на X сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|f_n(x)\right|.$$

Теорема 43. Пусть ряды $(A), (B)$ такие, что:

1. $\forall n$ функции $a_n(x)$ и $b_n(x)$ определены на X.
2. $\exists N: \ \forall n > N$
$$\left|a_n(x)\right| \leqslant b_n(x) \quad \forall x \in X.$$
3. Ряд (B) сходится на X равномерно.

Тогда ряд (A) сходится на X равномерно.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ задано. Выберем $N: \ \forall n > N, \ \forall p > 0\ \forall x \in X$

$$b_{n+1}(x) + \ldots + b_{n+p}(x) < \varepsilon.$$

Тогда $\forall n > N, \ \forall p > 0, \ \forall x \in X$

$$\left|a_{n+1}(x) + \ldots + a_{n+p}(x)\right| \leqslant$$
$$\leqslant \left|a_{n+1}(x)\right| + \ldots + \left|a_{n+p}(x)\right| \leqslant b_{n+1}(x) + \ldots + b_{n+p}(x) < \varepsilon \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ по критерию Коши ряд (A) сходится равномерно на X. □

Следствие (Мажорантный признак Вейерштрасса)**.** Пусть

1. $\forall n\ \exists M_n$:
$$\left|a_n(x)\right| \leqslant M_n \quad \forall x \in X.$$

2. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ сходится.

Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ сходится на X абсолютно и равномерно.

Определение 40 (Неубывающая (невозрастающая) последовательность). Последовательность $f_n : X \to \mathbb{R}$ называется *неубывающей (невозрастающей)* на X, если $\forall x \in X$ последовательность f_n не убывает (не возрастает).

Теорема 44 (Признаки Абеля и Дирихле).

1. **Абеля**

   Пусть функции $a_n(x)$ и $b_n(x)$ удовлетворяют условиям:

   - ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ сходится равномерно на X,
   - последовательность $\{b_n(x)\}$ равномерно ограничена на X и монотонна (то есть $\exists L > 0 : \ \forall n \in \mathbb{N}$ и $\forall x \in X \quad |b_n(x)| \leqslant L$),

   тогда ряд
   $$\sum_{n=1}^{\infty} \big(a_n(x) \cdot b_n(x)\big)$$
   сходится на X равномерно.

2. **Дирихле**

   - частичные суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ равномерно ограничены на X (то есть $\exists M > 0 : \ \forall n$ и $\forall x \in X \quad \left|\sum_{k=1}^{n} a_k(x)\right| \leqslant M$),
   - последовательность $\{b_n(x)\}$ монотонна и равномерно на X стремится к 0,

   тогда ряд
   $$\sum_{n=1}^{\infty} \big(a_n(x) \cdot b_n(x)\big)$$
   сходится на X равномерно.

Доказательство. Рассмотрим

$$\left|a_{n+1}(x)\cdot b_{n+1}(x)+a_{n+2}(x)\cdot b_{n+2}(x)+\ldots+a_{n+p}(x)\cdot b_{n+p}(x)\right| =$$
$$=\Big|(A_{n+1}-A_n)\cdot b_{n+1}(x)+\big((A_{n+2}-A_n)-(A_{n+1}-A_n)\big)\cdot b_{n+2}(x)+\ldots$$
$$\ldots+\big((A_{n+p}-A_n)-(A_{n+p-1}-A_n)\big)\cdot b_{n+p}(x)\Big| =$$
$$=\left|(A_{n+1}-A_n)\cdot b_{n+1}(x)+(A_{n+2}-A_n)\cdot b_{n+2}(x)-(A_{n+1}-A_n)\cdot b_{n+2}(x)+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+(A_{n+p}-A_n)\cdot b_{n+p}(x)-(A_{n+p-1}-A_n)\cdot b_{n+p}(x)\right| =$$
$$=\Big|(A_{n+1}-A_n)\cdot\big(b_{n+1}(x)-b_{n+2}(x)\big)+(A_{n+2}-A_n)\cdot\big(b_{n+2}(x)-b_{n+3}(x)\big)+\ldots$$
$$\ldots+(A_{n+p-1}-A_n)\cdot\big(b_{n+p-1}(x)-b_{n+p}(x)\big)+(A_{n+p}-A_n)\cdot b_{n+p}(x)\Big| =$$
$$=\left|\sum_{k=1}^{p-1}\Big((A_{n+k}-A_n)\cdot\big(b_{n+k}(x)-b_{n+k-1}(x)\big)\Big)+(A_{n+p}-A_n)\cdot b_{n+p}(x)\right| \leqslant$$
$$\leqslant\sum_{k=1}^{p-1}\Big(|A_{n+k}-A_n|\cdot\big|b_{n+k}(x)-b_{n+k+1}(x)\big|\Big)+|A_{n+p}-A_n|\cdot|b_{n+p}(x)|.$$

Если выполнены условия Абеля, то $\forall\varepsilon>0$ выберем $N:\ \forall n>N,\ \forall p>0\ \forall x\in X$
$$\left|a_{n+1}(x)+a_{n+2}(x)+\ldots+a_{n+p}(x)\right|<\frac{\varepsilon}{3\cdot L}.$$

Тогда

$$\sum_{k=1}^{p-1}\Big(|A_{n+k}-A_n|\cdot\big|b_{n+k}(x)-b_{n+k+1}(x)\big|\Big)+|A_{n+p}-A_n|\cdot|b_{n+p}(x)|<$$
$$<\frac{\varepsilon}{3\cdot L}\left(\sum_{k=1}^{p-1}\big|b_{n+k}(x)-b_{n+k+1}(x)\big|+\big|b_{n+p}(x)\big|\right)\leqslant$$
$$\leqslant\frac{\varepsilon}{3\cdot L}\Big(\big|b_{n+1}(x)\big|+2\big|b_{n+p}(x)\big|\Big)<\frac{\varepsilon}{3\cdot L}\cdot 3\cdot L=\varepsilon\Rightarrow$$

$\Rightarrow$ по критерию Коши, $\sum_{n=1}^{\infty}\big(a_n(x)\cdot b_n(x)\big)$ сходится равномерно на X.

Пусть выполнены условия Дирихле. Тогда $\forall\varepsilon>0$ выберем $N:\ \forall n>N\ \forall x>X$
$$\big|b_n(x)\big|<\frac{\varepsilon}{3\cdot M}.$$

$$\sum_{k=1}^{p-1}\Big(|A_{n+k}-A_n|\cdot\big|b_{n+k}(x)-b_{n+k+1}(x)\big|\Big)+|A_{n+p}-A_n|\cdot|b_{n+p}(x)|\leqslant$$
$$\leqslant\frac{\varepsilon}{p\cdot M}\left(\sum_{k=1}^{p-1}|A_{n+k}-A_n|+|A_{n+p}-A_n|\right)=$$
$$=\frac{\varepsilon}{p\cdot M}\Big(\big|a_{n+1}(x)\big|+\big|a_{n+1}(x)+a_{n+2}(x)\big|+\ldots+\big|a_{n+1}(x)+\ldots+a_{n+p}(x)\big|\Big)\leqslant$$
$$\leqslant\frac{\varepsilon}{p\cdot M}\cdot(p\cdot M)=\varepsilon.$$

$\square$

6.9 Свойства предельной функции

Теорема 45 (Условия коммутирования двупредельных переходов)**.** Пусть X, T – множества, $\mathfrak{B}_x$ – база на X, $\mathfrak{B}_T$ – база на T, Y – полное МП, $f_t : X \to Y$, $f : X \to Y$:

- $f_t \underset{\mathfrak{B}_T}{\rightrightarrows} f$ на X,
- $\forall t \in T\ \exists \lim\limits_{\mathfrak{B}_X} = A_t$,

тогда существуют и равны два повторных предела:

$$\lim_{\mathfrak{B}_T}\lim_{\mathfrak{B}_X} f_t(x) = \lim_{\mathfrak{B}_X}\lim_{\mathfrak{B}_T} f_t(x).$$

Запишем условия и утверждение теоремы в форме диаграмы:

$$\begin{tikzcd}
f_t(x) \arrow[r, Rightarrow, "\mathfrak{B}_T"'] \arrow[d, "{\forall t,\ \mathfrak{B}_X}"'] & f(x) \arrow[d, dashed, "\mathfrak{B}_X"] \\
A_t \arrow[r, dashed, "\mathfrak{B}_T"'] & A
\end{tikzcd}$$

$\to$ – дано, $\dashrightarrow$ – утверждение

Доказательство. Докажем наличие нижней стрелки, то есть покажем, что

$$\exists \lim_{\mathfrak{B}_T} = A.$$

Пусть $\varepsilon > 0$ задано. Выберем элемент $B_t \in \mathfrak{B}_T$ $\forall t_1, t_2 \in B_t$ и $\forall x \in X$

$$\rho\big(f_{t_1}(x), f_{t_2}(x)\big) < \frac{\varepsilon}{2},$$

это можно сделать, так как $\exists$ равномерная сходимость f_t к f по $\mathfrak{B}_T$ на X.

Зафиксируем t_1 и t_2 и перейдем к пределу по базе $\mathfrak{B}_X$ в неравенстве

$$\rho(A_{t_1}, A_{t_2}) < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Таким образом для функции $A_t : T \to Y$ выполняются условия критерия Коши $\exists$-ия предела функции по базе $\mathfrak{B}_T \Rightarrow \exists \lim\limits_{\mathfrak{B}_T} A_t = A$.

Покажем, что $\lim\limits_{\mathfrak{B}_X} f(x) = A$. Рассмотрим

$$\rho\big(f(x), A\big) \leqslant \rho\big(f(x), f_t(x)\big) + \rho\big(f_{t_2}(x), A_t\big) + \rho_t(A_t, A).$$

Пусть $\varepsilon > 0$ задано. Выберем $B_t' \in \mathfrak{B}_T :\ \forall t \in B_t'$ и $\forall x \in X$

$$\rho\big(f(x), f_t(x)\big) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Затем выберем $B_t'' \in \mathfrak{B}_T: \ \forall t \in B_t''$

$$\rho(A_t, A) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Зафиксируем $t \in B_t' \cap B_t''$.
Выберем $B_x \in \mathfrak{B}_X: \ \forall x \in B_x$

$$\rho\big(f_t(x), A_t\big) < \frac{\varepsilon}{3} \quad (f_t \to A_t).$$

Тогда $\forall x \in B_x$

$$\rho\big(f(x), A\big) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

□

Теорема 46 (Непрерывность предельной функции)**.** Пусть X, Y – метрические пространства, $\mathfrak{B}$ – база на T, $f_t : X \to Y$, $f : X \to Y$:

- $\forall t \in T$ функция f_t непрерывна в точке $x_0 \in X$,
- семейство $f_t \underset{\mathfrak{B}}{\rightrightarrows} f$ на X,

тогда функция f непрерывна в точке x_0.

Доказательство. Имеем

$$\begin{tikzcd}
f_t(x) \arrow[rr, Rightarrow, "\mathfrak{B}"'] \arrow[d, "{\substack{\forall t \text{ при} \\ x \to x_0}}"'] & & f(x) \arrow[d, dashed] & \\
f_t(x_0) \arrow[rr, dashed, "\mathfrak{B}"'] & & A & = f(x_0)
\end{tikzcd}$$

□

Следствие. Если $\forall n \ f_n(x)$ непрерывна в точке x_0 и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ равномерно сходится в точке x_0, тогда сумма функционального ряда непрерывна в точке x_0.

Доказательство. Очевидно. □

Теорема 47 (Интегрируемость предельной функции)**.** Пусть $f_t : [a;b] \to \mathbb{R}$, $f : [a;b] \to \mathbb{R}$:

- $\forall t \in T \ f_t$ интегрируема по Риману на $[a;b]$,
- $f_t \underset{\mathfrak{B}}{\rightrightarrows} f$ на $[a;b]$ ($\mathfrak{B}$ – база на T),

тогда:

1. f интегрируема по Риману на $[a;b]$.

2.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\mathfrak{B}} \int_a^b f_t(x)dx \Leftrightarrow \lim_{\mathfrak{B}} \int_a^b f_t(x)dx = \int_a^b \lim_{\mathfrak{B}} f_t(x)dx.$$

Доказательство.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda(P)\to 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i =$$

$$= \lim_{\lambda(P)\to 0} \sigma\big(f(P,\xi)\big) = \lim_{\lambda(P)\to 0} \lim_{\mathfrak{B}} \sigma\big(f_t,(P,\xi)\big) = \lim_{\mathfrak{B}} \lim_{\lambda(P)\to 0} \sigma\big(f_t,(P,\xi)\big) =$$

$$= \lim_{\mathfrak{B}} \int_a^b f_t(x)dx.$$

$$\begin{tikzcd}
\sigma_t = \sigma\big(f_t,(P,\xi)\big) \arrow[r, dashed, shift left, "\mathfrak{B}"'] \arrow[r, dashed, shift right] \arrow[d, "\forall t"', "\lambda(P)\to 0"'] & \sigma\big(f,(P,\xi)\big) \arrow[d, dashed, "\lambda(P)\to 0"] \\
\int_a^b f_t(x)dx \arrow[r, dashed, "\mathfrak{B}"'] & \int_a^b f(x)dx
\end{tikzcd} \tag{6.15}$$

(я не научился делать утверждение для равномерной сходимости)

Пусть $\mathcal{P}$ – множество разбиений с отмеченными точками отрезка $[a;b]$. Тогда функции $\sigma\big(f_t,(P,\xi)\big)$ и $\sigma\big(f,(P,\xi)\big)$ функции на $\mathcal{P}$.

Покажем, что семейство $\sigma_t = \sigma\big(f_t,(P,\xi)\big)$ сходится равномерно к функции $\sigma\big(f,(P,\xi)\big)$:

$$\Big|\sigma\big(f_t,(P,\xi)\big) - \sigma\big(f,(P,\xi)\big)\Big| =$$

$$= \left|\sum_{i=1}^n f_t(\xi_i)\Delta x_i - \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i\right| \leqslant \sum_{i=1}^n \big|f_t(\xi_i) - f(\xi_i)\big|\Delta x_i.$$

Пусть $\varepsilon > 0$ задано. Выберем элемент $B \in \mathfrak{B}: \ \forall t \in B, \ \forall x \in [a;b]$

$$\big|f_t(x) - f(x)\big| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Тогда

$$\sum_{i=1}^n \big|f_t(\xi_i) - f(\xi_i)\big|\Delta x_i < \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{i=1}^n \Delta x_i = \frac{\varepsilon}{b-a}\cdot(b-a) = \varepsilon.$$

Таким образом $|\sigma_t - \sigma| < \varepsilon \Rightarrow \sigma_t \underset{\mathfrak{B}}{\rightrightarrows} \sigma \Rightarrow$ по теореме 45 все стрелки в диаграмме 6.15 доказаны $\Rightarrow$ все переходы в равенстве законны. $\square$

Теорема 48 (Дини)**.** Пусть X – компактное метрическое пространство. Последовательность $f_n : X \to \mathbb{R}$ монотонна на X и $\forall x$ f_n непрерывна на X.

Если $f : X \to \mathbb{R}$ непрерывна на X, то эта сходимость равномерная.

Доказательство. Для $\forall x \in X$ выберем номер $N_x: \ \forall n > N_x$

$$\left|f_n(x) - f(x)\right| < \varepsilon, \quad \text{где } \varepsilon > 0 \text{ задано.}$$

Так как f_{N_x} и f непрерывны, то $\exists U_x \subset X \ \forall y \in U_x$

$$\left|f_{N_x}(y) - f(y)\right| < \varepsilon, \quad \text{(используя непрерывность).}$$

Таким образом для каждого $x \in X$ построим такую окружность U_x.

Семейство таких окрестностей является открытым покрытием пространства X.

Пусть $\{U_{X_1}, U_{X_2}, \ldots, U_{X_k}\}$ – конечное подпокрытие X.

Положим $N = \max\{N_{X_1}, N_{X_2}, \ldots, N_{X_1 = k}\}$. Тогда $\forall n > N, \ \forall x \in X$

$$\left|f_n(x) - f(x)\right| < \varepsilon.$$

Это и есть равномерная сходимость. □

Лекция 13: Продолжение

от 27 окт 10:34

Теорема 49 (Дифференцируемость предельной функции). Пусть $-\infty < a < b < +\infty$ (a, b – конечны), $f_t : (a; b) \to \mathbb{R}, \ f : (a; b) \to \mathbb{R}$:

- $\forall t \in T \ f_t$ дифференцируема на $(a; b)$,
- $\exists \phi : (a; b) \to \mathbb{R} : \ f'_t \underset{\mathfrak{B}}{\rightrightarrows} \phi$ на $(a; b)$,
- $\exists x_0 \in (a; b) : \ f_t(x_0) \to f(x_0)$,

тогда:

1. $f_t \underset{\mathfrak{B}}{\rightrightarrows} f$ на $(a; b)$.
2. f дифференцируема на $(a; b)$.
3. $\forall x \in (a; b) \ f'(x) = \phi(x)$.

Доказательство. Докажем, что семейство функций f_t сходится к f равномерно на $(a; b)$:

$$\begin{aligned}
&\left|f_{t_1}(x) - f_{t_2}(x)\right| = \\
&\quad = \left|f_{t_1}(x) - f_{t_2}(x) + f_{t_1}(x_0) - f_{t_1}(x_0) + f_{t_2}(x_0) - f_{t_2}(x_0)\right| \leqslant \\
&\quad \leqslant \left|(f_{t_1}(x) - f_{t_1}(x_0)) - (f_{t_2}(x) - f_{t_2}(x_0))\right| + \left|f_{t_1}(x_0) - f_{t_2}(x_0)\right| = \\
&\quad = \left|f'_{t_1}(\xi) - f'_{t_2}(\xi)\right| \cdot \left|x - x_0\right| + \left|f_{t_1}(x_0) - f_{t_2}(x_0)\right|.
\end{aligned}$$

Пусть $\varepsilon > 0$ задано. Выберем $B \in \mathfrak{B}$ ($\mathfrak{B}$ – база на T) $\forall t_1, t_2 \in B$

$$\left|f_{t_1}(x_0) - f_{t_2}(x_0)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

и $\forall x \in (a;b)$ и $\forall t'_1, t'_2 \in B$:

$$\left|f'_{t'_2}(x) - f'_{t'_2}(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

Тогда $\forall t_1, t_2 \in B$ и $\forall x \in (a;b)$

$$\left|f_{t_1}(x) - f_{t_2}(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \cdot (b-a) + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Итак, $f_t \underset{\mathfrak{B}}{\rightrightarrows} f$ на $(a;b)$. Покажем, что предельная функция f дифференцируема на $(a;b)$ и $\forall x \in (a;b)$

$$f'(x) = \phi(x):$$

$$\begin{aligned} f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \\ = \lim_{h\to 0}\frac{\lim\limits_{\mathfrak{B}} f_t(x+h) - \lim\limits_{\mathfrak{B}} f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\lim_{\mathfrak{B}}\frac{f_t(x+h)-f_t(x)}{h} \overset{(\star)}{=} \\ \overset{(\star)}{=} \lim_{\mathfrak{B}}\lim_{h\to 0}\frac{f_t(x+h)-f_t(x)}{h} = \lim_{\mathfrak{B}} f'_t(x) = \phi(x). \end{aligned}$$

Покажем законность перехода $(\star)$. Пусть $x \in (a;b)$, $x+h \in (a;b)$. Рассмотрим

$$\begin{tikzcd} F_t(h) = \frac{f_t(x+h)-f_t(x)}{h} \arrow[r, dashed, "\rightrightarrows"', "\mathfrak{B}"'] \arrow[d] & \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = F(h) \arrow[d, dashed] \\ f'_t(x) \arrow[r, "\rightrightarrows", "\mathfrak{B}"'] & \phi(x) \arrow[r, dashed, "\rightrightarrows"] & f'(x) \end{tikzcd}$$

Докажем существование двойной верхней стрелки. Имеем:

$$\left.\begin{aligned} f_t(x) \underset{\mathfrak{B}}{\longrightarrow} f(x) \\ f_t(x+h) \underset{\mathfrak{B}}{\longrightarrow} f(x+h) \end{aligned}\right\} \Rightarrow F_t(h) \underset{\mathfrak{B}}{\longrightarrow} F(h),$$

$$\begin{aligned} \left|F_{t_1}(h) - F_{t_2}(h)\right| = \\ = \left|\overbrace{\frac{f_{t_1}(x+h)-f_{t_1}(x)}{h}}^{=f'_{t_1}(\xi)\cdot|h|} - \frac{f_{t_2}(x+h)-f_{t_2}(x)}{h}\right| = \\ = \frac{1}{|h|}\left|f'_{t_1}(\xi)\cdot|h| - f'_{t_2}(\xi)\cdot|h|\right| = \\ = \left|f'_{t_1}(\xi) - f'_{t_2}(\xi)\right|,\ \xi \in (x; x+h). \end{aligned}$$

Пусть $\varepsilon > 0$ задано. Тогда $\exists B \in \mathfrak{B}: \ \forall t_1, t_2 \in B$

$$\left|f'_{t_1}(\xi) - f'_{t_2}(\xi)\right| < \varepsilon.$$

Таким образом семейство $\left\{F_t(h)\right\}$ сходится равномерно на $(a;b)$.
Правая вертикальная стрелка следует из теоремы 45. □

Следствие. Если

- $\forall n \ f_n(x)$ непрерывна на $(a;b)$,
- ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ равномерно сходится на $(a;b)$,

то его сумма $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ непрерывна на $(a;b)$, то есть $\forall x_0 \in (a;b)$

$$\lim_{x\to x_0} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to x_0} f_n(x).$$

Следствие. Если

- $\forall n \ f_n(x) \in R[a;b]$ (интегрируема на $[a;b]$),
- ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ равномерно сходится на $[a;b]$,

то его сумма интегрируема на $[a;b]$ и

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)dx.$$

Следствие. Если

- $\forall n \ f_n(x)$ дифференцируема на $(a;b)$,
- $\exists x_0 \in [a;b]$: ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ сходится,
- ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$ сходится равномерно на $(a;b)$,

то

1. Ряд сходится на $(a;b)$ равномерно.
2. Его сумма дифференцируема на $(a;b)$.
3. $\forall x \in (a;b)$
$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x).$$

6.10 Степенные ряды

Определение 41 (Степенной ряд)**.** *Степенным рядом* называется выражение вида

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n\cdot(x-x_0)^n\right)$$

или

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\cdot x^n). \tag{6.16}$$

Теорема 50 (О сходимости степенного ряда)**.**

1. Областью сходимости степенного ряда 6.16 является промежуток $(-R;R)$, где $R\geqslant 0$ $(+\infty)$.
2. $\forall[\alpha;\beta]\subset(-R;R)$ ряд 6.16 сходится равномерно на $[\alpha;\beta]$.
3. Число R, называемое *радиусом сходимости степенного ряда* 6.16, может быть вычислено:

$$R=\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Доказательство. Воспользуемся признаком Коши:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|\cdot|x|^n}=|x|\cdot\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=k.$$

При $k<1$ ряд $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n\cdot x^n|$ сходится $\Rightarrow$ ряд 6.16 сходится абсолютно.

Покажем, что при $k>1$ ряд 6.16 расходится. Для этого покажем, что при $k>1$ $a_n\cdot x^n\nrightarrow 0$.

В самом деле, $\exists$ подпоследовательность номеров n_k и $\exists k:\ \forall k>K$

$$|a_{n_k}\cdot x^{n_k}|>\left(\frac{1+k}{2}\right)^{n_k}>1\Rightarrow a_n\cdot x^n\underset{n\to\infty}{\nrightarrow}0.$$

Таким образом, $|x|\cdot\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}<1$,

$$|x|<\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}}=R\Rightarrow x\in(-R;R)\text{ – область сходимости 6.16.}$$

При $k=1$ ряд 6.16 может как сходиться, так и расходиться.

Таким образом, доказали пункты 1. и 3..

Докажем пункт 2.:

Пусть $[\alpha;\beta]\subset(-R;R)$. Возьмем x_0:

$$-R<-x_0<\alpha<\beta<x_0<R.$$

Тогда $\forall x \in [\alpha;\beta]$
$$|a_n \cdot x^n| < |a_n \cdot x_0^n|.$$

Заметим, что так как $x_0 \in (-R;R)$, то ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n \cdot x_0^n|$ сходится $\Rightarrow$ по признаку Вейерштрасса ряд 6.16 сходится равномерно на $[\alpha;\beta]$. □

Теорема 51 (Абеля, о сумме степенного ряда)**.** Если R – радиус сходимости ряда 6.16 и ряд $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n \cdot R^n)$ сходится, то

$$\lim_{x\to R} \sum_{n=0}^{\infty}(a_n \cdot x^n) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n \cdot R^n).$$

Доказательство. Заметим, что сумма ряда является непрерывной на интервале сходимости.

В самом деле, если $x_0 \in (-R;R)$, то $\exists x_0 \in [\alpha;\beta]$: по теореме 50 на $[\alpha;\beta]$ ряд 6.16 сходится равномерно $\Rightarrow$ его сумма является непрерывной функцией на $[\alpha;\beta]$, то есть она непрерывна в точке x_0.

Так как $x_0 \in (-R;R)$ произвольная $\Rightarrow$ сумма ряда 6.16 непрерывна на $(-R;R)$.

Покажем, что ряд 6.16 равномерно сходится на промежутке $[\alpha;R]$, где $\alpha > -R$.

В самом деле, $\forall x \in [\alpha;R]$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n \cdot x^n| = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n \cdot R^n \cdot \left|\left(\frac{x}{R}\right)^n\right|\right).$$

Здесь ряд $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n \cdot R^n)$ – сходится, а последовательность $\left\{\left(\frac{|x|}{R}\right)^n\right\}$ монотонна и равномерно ограничена $\Rightarrow$ по теореме Абеля ряд 6.16 сходится на $[\alpha;R]$ равномерно $\Rightarrow$ сумма его непрерывна на $[\alpha;R] \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim_{x\to R} \sum_{n=0}^{\infty}(a_n \cdot x^n) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n \cdot R^n).$$

□

Теорема 52 (Об интегрировании степенного ряда)**.** Пусть дан ряд 6.16. Пусть $S(x)$ – его сумма, R – радиус сходимости ряда 6.16. Тогда $\forall \overline{x} \in (-R;R)$ функция $S(x)$ интегрируема на $[0;\overline{x}]$ (или на $[\overline{x};0]$) и

$$\int_0^{\overline{x}} S(x)dx = \int_0^{\overline{x}} \left(\sum_{n=0}^{\infty}(a_n \cdot x^n)\right)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\overline{x}} (a_n \cdot x^n)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a_n}{n+1} \cdot \overline{x}^{n+1}\right).$$

Если ряд 6.16 сходится при $x = R$, то утверждение остается верным и для $\overline{x} = R$.

Теорема 53 (О дифференцировании степенного ряда)**.** Пусть дан ряд 6.16. Пусть $S(x)$ – его сумма, R – радиус сходимости ряда 6.16. Тогда

$\forall x \in (-R; R)$ функция $S(x)$ дифференцируема в точке x и

$$S'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty}(a_n \cdot x^n)\right)' = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n \cdot x^n)' = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n \cdot n \cdot x^{n-1}).$$

Если ряд $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n \cdot n \cdot x^{n-1})$ сходится при $x = R$ $(-R)$, то утверждение теоремы остается верно и при $x = R$.

Доказательство. Имеем,

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Пусть R' и R'' – радиусы сходимости рядов $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n_1} \cdot x^{n+1}\right)$ и $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n \cdot n \cdot x^{n-1})$, соответственно:

$$\begin{aligned} R' &= \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{|a_n|}{n+1}}} = \left| \begin{array}{l} \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1 \\ \text{смотреть Демидович} \end{array} \right| = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}} = R, \\ R'' &= \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n| \cdot n}} = R. \end{aligned}$$

Таким образом для ряда 6.16 выполняется условия теорем об интегрировании и дифференцировании предельной функции.

Условия равномерной сходимости следуют из теоремы 50. □

Теорема 54 (Об единственности)**.** Если существует окрестность U точки $x = 0$ суммы рядов $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n \cdot x^n)$ и $\sum_{n=0}^{\infty}(b_n \cdot x^n)$ совпадают для всех $x \in U$, то $\forall n$

$$a_n = b_n.$$

Доказательство. Положим $x = 0 \Rightarrow a_0 = b_0$. Далее рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left((a_n - b_n) \cdot x^n\right)$. Он сходится на U, так как сходятся исходные ряды.

Пусть $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n \cdot x^n) = S_a(x)$, $\sum_{n=0}^{\infty}(b_n \cdot x^n) = S_b(x)$. По условию теоремы, $\forall x \in U(0)$

$$S_a(x) \equiv S_b(x),$$

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{n=0}^{\infty}(a_n \cdot x^n) - \sum_{n=0}^{\infty}(b_n \cdot x^n) = S_a(x) - S_b(x) &\equiv 0 \\ &\parallel \\ \textstyle\sum_{n=1}^{\infty}\left((a_n - b_n) \cdot x^{n-1}\right) &\equiv 0 \end{aligned}$$

Поделим $\sum_{n=1}^{\infty}\left((a_n - b_n) \cdot x^{n-1}\right) \equiv 0$ на $x \neq 0$, получится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left((a_n - b_n) \cdot x^{n-1}\right) \equiv 0.$$

Перейдем к пределу в $\sum_{n=1}^{\infty}\left((a_n-b_n)\cdot x^{n-1}\right)\equiv 0$ при $x\to 0$:

$$0\equiv\lim_{x\to 0}\sum_{n=1}^{\infty}\left((a_n-b_n)\cdot x^{n-1}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to 0}\left((a_n-b_n)\cdot x^{n-1}\right)=a_1-b_1\Rightarrow$$

$\Rightarrow a_1=b_1$. И так далее $\Rightarrow \forall n\ a_n=b_n$. □

Лекция 14: Продолжение

от 2 нояб 10:34

6.11 Ряд Тейлора

Определение 42 (Ряд Тейлора)**.** Пусть $f(x)$ бесконечно дифференцируема в окрестности точки x_0. *Рядом Тейлора* функции $f(x)$ в этой окрестности называется ряд:

$$f(x)\approx f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}\cdot(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}\cdot(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot(x-x_0)^n+\ldots$$

Утверждение. Если функция $f(x)$ в окрестности точки x_0 является суммой степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n\cdot(x-x_0)^n\right)$, то этот ряд является ее рядом Тейлора.

Доказательство. Имеем, $\forall x\in U(x_0)=(x_0-\varepsilon;x_0+\varepsilon)$:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n\cdot(x-x_0)^n\right). \tag{6.17}$$

Положим, что $x=x_0$, тогда $f(x_0)=a_0$. Продифференцируем выражение 6.17 и вычислим производную в точке $x=x_0$ (и далее по аналогии):

$$\begin{aligned}
f'(x_0) &= 1\cdot a_1;\\
f''(x_0) &= 2\cdot 1\cdot a_2\Rightarrow a_2=\frac{f''(x_0)}{1\cdot 2}=\frac{f''(x_0)}{2!};\\
f'''(x_0) &= 3\cdot 2\cdot 1\cdot a_3\Rightarrow a_3=\frac{f'''(x_0)}{1\cdot 2\cdot 3}=\frac{f'''(x_0)}{3!};\\
&\vdots\\
f^{(n)}(x_0) &= n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 1\cdot a_n\Rightarrow a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.
\end{aligned}$$

□

6.12 Разложение элементарных функций в степенной ряд

Лемма 5. Если $f(x)$ – ∞-но дифференцируемая функция на $[0;H]$ и $\exists L > 0: \ \forall n \in \mathbb{N}$ и $\forall x \in [0;H]$

$$\left|f^{(n)}(x)\right| \leqslant L,$$

то на $[0;H]$ функция f может быть разложена в степенной ряд (ряд Тейлора).

Доказательство. Имеем:

$$\left|f(x) - F_n(x)\right| = \left|f(x) - \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k\right)\right| = \left|R_n(x)\right|,$$

где $F_n(x)$ – частичная сумма ряда Тейлора (степенной ряд), $R_n(x)$ – остаточный член в формуле Тейлора.

Так как $f(x)$ есть сумма ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n \Leftrightarrow R_n(x)$ должен $\to$ к 0 при $n \to \infty$.

Рассмотрим

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot x^{n+1}, \quad 0 < \xi < x.$$

Если выполнены условия леммы, то

$$\left|R_n(x)\right| = \left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot x^{n+1}\right| = \frac{\left|f^{(n+1)}(\xi)\right|}{(n+1)!} \cdot \left|x^{n+1}\right| \leqslant \frac{L \cdot H^{n+1}}{(n+1)!},$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{L \cdot H^{n+1}}{(n+1)!} = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ (упражнение: доказать) $\Rightarrow R_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$. $\square$

Примечание.

1. $f(x) = e^x$

   Тогда $\forall n \ f^{(n)}(x) = e^x, \ f^{(n)}(0) = 1$. Так как $\forall x \in [0;H], \ \forall n \in \mathbb{N}$

   $$0 < f^{(n)}(x) \leqslant e^H = L.$$

   В силу произвольности H ряд Тейлора для функции $f(x) = e^x$ сходится на $(-\infty;+\infty)$

   $$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

2. $f(x) = \sin x$, $f(x) = \cos x$

$$f^{(n)}(x) = (\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left|f^{(n)}(x)\right| = \left|\sin\left(x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right| \leqslant 1 = L \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ ряд Тейлора для $\sin x$ сходится на $(-\infty; +\infty)$ и имеет своей суммой $\sin x$,

$$\begin{array}{ll} \sin x & = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^{n-1}\cdot\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots \\ {\scriptstyle (\sin x)'} & \\ \Downarrow & \\ \cos x & = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^{n-1}\cdot\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots \end{array}$$

3. $f(x) = \ln(1+x)$

$$\ln(1+x) \sim x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\cdot\frac{x^n}{n} + \ldots$$
$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\frac{1}{n}}} = 1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ интервал сходимости $x \in (-1;1)$. Проверим границы точки $x = -1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot(-1)^n}{n} = (-1)\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ – расходится.

$x = -1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ – сходится по признаку Лейбница $\Rightarrow$ для данного степенного ряда интервал сходимости: $x \in (-1;1]$.

$f^{(n)}(x):$

$$\begin{array}{l} f'(x) = (\ln(1+x))' = \frac{1}{1+x} \\ f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} \\ f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3} \\ \vdots \\ f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!}{(1+x)^n} \end{array}.$$

Рассмотрим остаточный член ряда в форме Коши:

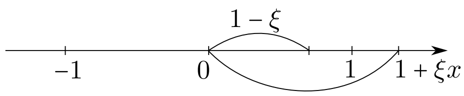
$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi x)}{n!}\cdot\big((1-\xi)\cdot x\big)^n\cdot x, \quad 0 < \xi < 1.$$

Тогда

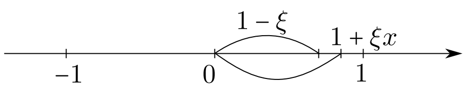
$$\left|R_n(x)\right| = \left|\frac{(-1)^n\cdot n!}{(1+\xi x)^{n+1}\cdot n!}\cdot((1-\xi)\cdot x)^n\cdot x\right| = \frac{(1-\xi)^n}{(1+\xi x)^n}\cdot\frac{|x|^{n+1}}{(1+\xi x)}.$$

Что бы показать, что $R_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$, нужно доказать, что $\frac{1-\xi}{1+\xi x} < 1$.

(a) $0 < x < 1$



(b) $-1 < x < 0$



Из рисунков видно, что $\forall \xi \in (0;1)$ и $\forall x \in (-1;1]$ $\frac{1-\xi}{1+\xi x} < 1$. Таким образом, $R_n(x) \to 0$ при $n \to \infty \Rightarrow$

$$\Rightarrow ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \quad x \in (-1;1]$$

4. Биномиальный ряд

$$(1+x)^m \sim$$
$$\sim 1 + m\cdot x + \frac{m\cdot(m-1)}{2!}\cdot x^2 + \dots + \frac{m\cdot(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)\cdot x^n}{n!} + \dots$$

$$f^{(n)}(x) = \left[(1+x)^m\right]^{(n)} = m\cdot(m-1)\cdot\ldots\cdot\big(m-(n-1)\big)\cdot(1+x)^{m-n},$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi x)}{n!}\cdot\big((1-\xi)\cdot x\big)^n\cdot x =$$
$$= \frac{m\cdot(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n)\cdot(1+\xi x)^{m-n+1}}{n!}\cdot((1-\xi)\cdot x)^n\cdot x,\ \xi \in (0;1),$$

$$|R_n(x)| = \underbrace{\frac{m\cdot(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n)}{n!}}_{\to 0}\cdot\underbrace{\left|\frac{1-\xi}{1+\xi x}\right|^n}_{\to 0}\cdot(1+\xi x)^{m-1}\cdot\underbrace{|x|^{n+1}}_{\to 0} \to 0$$

при $n \to \infty$.

Тогда

$$(1+x)^m =$$
$$= 1 + m\cdot x + \frac{m(m-1)x^2}{2!} + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n + \dots,\ x \in (-1;1).$$

Примечание (Упражнение). Доказать, что область сходимости степенного ряда: $x \in (-1;1)$.

Глава 7

Интегралы, зависящие от параметра

Определение 43 (Интеграл, зависящий от параметра). *Интегралом, зависящим от параметра* называется функция

$$F(y) = \int_{E_y} f(x,y)dx = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)dx.$$

7.1 Собственные интегралы, зависящие от параметра

Теорема 55. Если функция $f(x,y)$ непрерывна на $P = [a;b] \times [c;d]$, то функция $F(y) = \int_a^b f(x,y)dx$ непрерывна на $[c;d]$.

Доказательство. Пусть $y_0 \in [c;d]$. Покажем, что $F(y)$ непрерывна в точке y_0.

$$\begin{aligned}&\left|F(y) - F(y_0)\right| = \\ &\quad = \left|\int_a^b f(x,y)dx - \int_a^b f(x,y_0)dx\right| = \left|\int_a^b \big(f(x,y) - f(x,y_0)\big)dx\right| \leqslant \\ &\qquad\qquad \leqslant \int_a^b \left|f(x,y) - f(x,y_0)\right|dx.\end{aligned}$$

Так как $f(x,y)$ непрерывна на P и P – компактное, то $f(x,y)$ – равномерно непрерывна на $P \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ \forall \underset{(x_1,y_1)}{\underset{\shortparallel}{M_1}}, \underset{(x_2,y_2)}{\underset{\shortparallel}{M_2}} \in P$:

$$\begin{aligned}&\rho\big((x_1,y_1),(x_2,y_2)\big) = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2} < \delta \Rightarrow \\ &\qquad \Rightarrow \left|f(x_1,y_1) - f(x_2;y_2)\right| < \varepsilon.\end{aligned}$$

Пусть $\varepsilon > 0$ задано. Выберем $\delta > 0 : \forall M_1, M_2 \in P$:

$$\rho(M_1, M_2) < \delta \Rightarrow \left|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)\right| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Тогда

$$\left|F(y) - F(y_0)\right| \leqslant$$
$$\leqslant \int_a^b \left|f(x,y) - f(x,y_0)\right| dx < \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a} dx =$$
$$= \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot \int_a^b dx = \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot (b-a) = \varepsilon$$

$\Rightarrow F(y)$ непрерывна в точке y_0, где точка y_0 – прозвольная. □

Замечание. Заметим, что равномерная непрерывность $f(x,y)$ на P влечет за собой то, что $f(x,y)$ равномерно сходится к $f(x,y_0)$ при $y \to y_0$, то есть $f(x,y) \underset{y \to y_0}{\rightrightarrows} f(x,y_0)$. Следовательно,

$$\lim_{y \to y_0} F(y) =$$
$$= \lim_{y \to y_0} \int_a^b f(x,y) dx = \int_a^b \lim_{y \to y_0} f(x,y) dx = \int_a^b f(x,y_0) dx =$$
$$= F(y_0).$$

Лемма 6. Если:

- $f(x,y)$ непрерывна на P,
- $\frac{\delta f}{\delta y}(x,y)$ непрерывна на P,

то $F(y) = \int_a^b f(x,y)dx$ дифференцируема на $[c;d]$ и

$$F'(y) = \int_a^b \frac{\delta f}{\delta y}(x,y) dx.$$

Доказательство.

$$
\begin{aligned}
&F'(y) = \\
&= \lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{h}\cdot\big(F(y+h)-F(y)\big)\right) = \lim_{h\to 0}\left(\int_a^b f(x,y+h)dx - \int_a^b f(x,y)dx\right) = \\
&= \lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{h}\cdot\left(\int_a^b \big(f(x,y+h)-f(x,y)\big)dx\right)\right) = \left|\begin{array}{c}\text{по теореме}\\ \text{Лагранжа}\end{array}\right| = \\
&= \lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{h}\cdot\int_a^b \frac{\delta f}{\delta y}(x,y+\theta h)\cdot h\right)dx = \lim_{h\to 0}\int_a^b \frac{\delta f}{\delta y}(x,y+\theta\cdot h)dx = \\
&= \left|\begin{array}{c}\text{используя непрерывность}\\ \text{производной } \frac{\delta f}{\delta y}\end{array}\right| = \int_a^b \lim_{h\to 0}\frac{\delta f}{\delta y}(x,y+\theta\cdot h)dx = \\
&= \int_a^b \frac{\delta f}{\delta y}(x,y)dx.
\end{aligned}
$$

□

Теорема 56 (О дифференцировании собственного интеграла, зависящего от параметра)**.** Пусть:

- $\alpha(y), \beta(y)$ – дифференцируемые на $[c;d]$,
- $\forall y\in[c;d]\ a\leqslant\alpha(y)\leqslant b$ и $a\leqslant\beta(y)\leqslant b$,
- $f(x,y)$ – непрерывна на $P=[a;b]\times[c;d]$,
- $\frac{\delta f}{\delta y}$ – непрерывна на P,

тогда $F(y)=\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)dx$ дифференцируема на $[c;d]$ и

$$
F'(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} \frac{\delta f}{\delta y}(x,y)dx + f\big(\beta(y),y\big)\cdot\beta'(y) - f\big(\alpha(y),y\big)\cdot\alpha'(y)
$$

(формула Лейбница)

Доказательство. Используя лемму 6, рассмотрим функцию

$$
\Phi\big(y,\alpha(y),\beta(y)\big) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)dx:
$$

$$
\begin{array}{ccl}
\Phi'_y & = & \Phi'_y\cdot y'_y + \Phi'_\alpha\cdot\alpha'_y + \Phi'_\beta\cdot\beta'_y \\
\shortparallel & & \\
F'_y & = & \displaystyle\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} \frac{\delta f}{\delta y}(x,y)dx + f(\beta,y)\cdot\beta'_y - f(\alpha,y)\cdot\alpha'_y
\end{array}
$$

□

Теорема 57 (Об интегрировании собственного интеграла по параметру). Если $f(x,y)$ непрерывна на $P = [a;b] \times [c;d]$, то функция $F(y) = \int_a^b f(x,y)dx$ интегрируема на $[c;d]$ и

$$\int_c^d F(y)dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx.$$

Обычно пишут:

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy.$$

Доказательство. Рассмотрим функции

$$\begin{aligned} \phi(u) &= \int_c^u \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy, \\ \psi(u) &= \int_a^u \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx. \end{aligned}$$

$\phi(u)$ и $\psi(u)$ непрерывны и дифференцируемы на $[a;b]$.

В самом деле, $F(y) = \int_a^b f(x,y)dx$ непрерывна на $[c;d]$ (так как $f(x,y)$ непрерывна на P и по теореме 55).

А функция $\phi(u) = \int_c^u F(y)dy$ – непрерывна и дифференцируема на $[c;d]$ (по теореме 55).

При этом

$$\phi'(y) = F(u) = \int_a^b f(x,u)fx.$$

Далее, функция $\Phi(x,u) = \int_c^u f(x,y)dy$. $\Phi(x,u)$ – дифференцируема по u и $\Phi'_u(x,u) = f(x,u)$.

$$\psi'(u) = \int_a^b \Phi'_u(x,u)dx = \int_a^b f(x,u)fx.$$

Имеем, что $\phi'(u) = \psi'(u)\ \forall u \in [c;d] \Rightarrow$

$$\Rightarrow \phi(u) - \psi(u) = const\ \forall u \in [c;d].$$

Заметим, что $\phi(c) - \psi(c) = 0 - 0 = 0 \Rightarrow \forall u \in [c;d]\ \phi(u) - \psi(u) = 0 \Rightarrow \phi(u) = \psi(u) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx.$$

□

Лекция 15: Продолжение

от 7 нояб 8:43

7.2 Несобственные интегралы, зависящие от параметра

Определение 44 (Несобственный интеграл, зависящий от параметра)**.** Пусть $\forall y \in Y \ \exists \int_a^\omega f(x,y)dx$.

Несобственным интегралом, зависящим от параметра y называется функция

$$F(y) = \int_a^\omega f(x,y)dx. \tag{7.1}$$

Пример.

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b f(x)dx.$$

Определение 45 (Равномерно сходящийся интеграл)**.** Говорят, что интеграл 7.1 сходится на Y *равномерно*, если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists B \in [a;\omega): \ \forall b \in (B;\omega)$

$$\left| \int_b^\omega f(x,y)dx \right| < \varepsilon.$$

Примечание. Далее, рассмотрим семейство функций

$$F_b(y) = \int_a^b f(x,y)dx, \ b \in [a;\omega). \tag{7.2}$$

Утверждение. Интеграл 7.1 сходится на Y равномерно $\Rightarrow$ семейство функций 7.2 сходится на Y равномерно при $b \to \omega$.

Доказательство.

1. Интеграл 7.1 сходится на Y равномерно $\overset{\text{по опр.}}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \ \exists B \in [a;\omega):$ $\forall b \in (B;\omega)$
$$\left| \int_b^\omega f(x,y)dx \right| < \varepsilon.$$
2. Семейство функций 7.2 равномерно сходится на Y при $b \to \omega \overset{\text{по опр.}}{\Leftrightarrow}$ $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \widetilde{B} \in [a;\omega): \ \forall b \in (\widetilde{B};\omega)$
$$\left| F_b(y) - F(y) \right| < \varepsilon, \ \forall y \in Y.$$

Но

$$\left|F_b(y) - F(y)\right| = \left|\int_a^b f(x,y)dx - \int_a^\omega f(x,y)dx\right| =$$
$$= \left|-\left(\int_a^b f(x,y)dx + \int_a^\omega f(x,y)dx\right)\right| = \left|\int_a^\omega f(x,y)dx\right|.$$

□

Пример. $\int_0^{+\infty} e^{-xy}dx$

1. Если $y \leqslant 0$, то интеграл расходится.
2. $y > 0$.

Пусть $y_0 > 0$, тогда $\forall y \geqslant y_0$

$$\int_b^{+\infty} e^{-xy}dx = -\frac{1}{y}e^{-xy}\Big|_b^{+\infty} = \frac{1}{y}\cdot e^{-by} \leqslant \frac{1}{y^2}\cdot e^{-by_0}.$$

В самом деле,

$$\left(\frac{1}{y}\cdot e^{-by}\right) = -\frac{1}{y^2}\cdot e^{-by} + \frac{1}{y}(-b)\cdot e^{-by} = -\frac{1}{y}\cdot e^{-by}\left(\frac{1}{y}+b\right) < 0.$$

Отсюда $\forall y \geqslant y_0$ имеем, если $\varepsilon > 0$ задано, то взяв $B > 0 :\ \frac{1}{y_0}\cdot e^{-By_0} < \varepsilon$ получим $\forall b > B\ \forall y \geqslant y_0$

$$\left|\int_b^{+\infty} e^{-xy}dx\right| < \varepsilon \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ на множестве $y \geqslant y_0$ $\int_0^{+\infty} e^{-xy}dx$ сходится равномерно.

Если $y_0 > y > 0$ интеграл расходится.

В самом деле, если $\varepsilon = 1$ и по заданному B выберем $b = B+1$ и для $y > 0 :\ \frac{1}{y}\cdot e^{-xy} > 1$. Получим:

$$\left|\int_0^{\infty} e^{-xy}dx\right| > 1.$$

Теорема 58 (Критерий Коши равномерной сходимости несобственного интеграла зависящего от параметра)**.** Интеграл $F(y) = \int_a^\omega f(x,y)dx$ равномерно сходится $\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists B \in [a;\omega) :\ \forall b_1, b_2 \in (B;\omega)\ \forall y \in Y$

$$\left|\int_{b_1}^{b_2} f(x,y)dx\right| < \varepsilon.$$

Доказательство. Для семейства функций $F_b(y) = \int_a^b f(x,y)dx$ равномерная сходимость на Y при $b \to \infty$ равносильна утверждению $\forall\varepsilon >$

$0\ \exists B \in [a;\omega):\ \forall b_1, b_2 \in (B;\omega)$ и $\forall y \in Y$

$$|F_{b_1}(y) - F_{b_2}(y)| < \varepsilon,$$

$$|F_{b_1}(y) - F_{b_2}(y)| =$$
$$= \left|\int_a^{b_1} f(x,y)dx - \int_a^{b_2} f(x,y)dx\right| = \left|-\left(\int_a^{b_1} f(x,y)dx + \int_a^{b_2} f(x,y)dx\right)\right| =$$
$$= \left|\int_{b_1}^{b_2} f(x,y)dx\right| < \varepsilon.$$

□

Следствие. Пусть $f(x,y)$ непрерывна на множестве $[a;\omega)\times[c;d]$, $\int_a^\omega f(x,y)dx$ сходится на $[c;d)$ и расходится в точке $y = d$.

Отсюда следует, что $\int_a^\omega f(x,y)dx$ на $[c;d)$ сходится неравномерно.

Доказательство. Так как при $y = d$ $\int_a^\omega f(x,y)dx$ расходится $\Rightarrow \exists\varepsilon > 0\ \forall B \in [a;\omega)\ \exists b_1, b_2 \in (B;\omega):$

$$\left|\int_{b_1}^{b_2} f(x,d)dx\right| \geqslant \varepsilon.$$

Далее, в силу непрерывности функции $f(x,y)$ на $[a;\omega)\times[c;d]$ следует, что $F(y) = \int_{b_1}^{b_2} f(x,y)dx$ непрерывна на $[c;d]$ (смотреть теорему 55).

Следовательно, $\exists$ окрестность $(d-\delta;d]:\ \forall y \in (d-\delta;d]$

$$\left|\int_{b_1}^{b_2} f(x,y)dx\right| \geqslant \varepsilon.$$

Таким образом, $\exists\varepsilon > 0:\ \forall B \in [a;\omega)\ \exists b_1, b_2 \in (B;\omega):$

$$\left|\int_{b_1}^{b_2} f(x,y)dx\right| \geqslant \varepsilon$$

$\Rightarrow$ по критерию Коши $\int_a^\omega f(x,y)dx$ сходится на $[c;d)$ неравномерно. □

Пример. $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^y}dx$, если $y > 0$, то интеграл сходится по признаку Дирихле.

При $y = 0$ интеграл расходится $\Rightarrow$ на интервале $y > 0$ интеграл сходится неравномерно.

Теорема 59 (Признак Вейерштраса)**.** Пусть

1. $\forall y \in Y$ и $\forall x \in [a;\omega)$
$$|f(x,y)| \leqslant g(x,y).$$

2. $\int_a^\omega g(x,y)dx$ – равномерно сходится на Y.

Тогда $\int_a^\omega f(x,y)dx$ – равномерно сходится на Y.

Доказательство. Имеем

$$\left|\int_{b_1}^{b_2} f(x,y)dx\right| \leqslant \int_{b_1}^{b_2} |f(x,y)|\,dx \leqslant \int_{b_1}^{b_2} g(x,y)dx.$$

Так как $\int_a^\omega g(x,y)dx$ сходится равномерно на Y, то по признаку Коши

$$\left|\int_{b_1}^{b_2} g(x,y)dx\right| < \varepsilon$$

$\Rightarrow \int_a^\omega f(x,y)dx$ сходится равномерно на Y. □

Следствие. Если $\forall y \in Y,\ \forall x \in [a;\omega)$

$$|f(x,y)| \geqslant g(x),$$

то из сходимости $\int_a^\omega g(x)dx \Rightarrow$ равномерна сходимость

$$\int_a^\omega f(x,y)dx \text{ на } Y.$$

Теорема 60 (Признаки Абеля и Дирихле).

1. **Признак Абеля**:

   Если

   (a) $\int_a^\omega g(x,y)dx$ равномерно сходится на Y.

   (b) $\forall y \in Y$ функция $f(x,y)$ монотонна по x и равномерно ограничена, то есть $\exists M > 0:\ \forall x \in [a;\omega)$ и $\forall y \in Y$

   $$|f(x,y)| \leqslant M.$$

   Тогда

   $$\int_a^\omega \big(f(x,y)\cdot g(x,y)\big)dx \text{ – сходится равномерно на } Y.$$

2. **Признак Дирихле**:

   Если

   (a) $\int_a^b g(x,y)dx$ ограничена в совокупности, то есть $\exists L > 0:\ \forall y \in Y$ и $\forall b \in [a;\omega)$

   $$\left|\int_a^b g(x,y)dx\right| \leqslant L.$$

(b) $\forall y \in Y$ $f(x,y)$ монотонна по x и $f(x,y) \to 0$ равномерно при $x \to \omega$.

Тогда

$$\int_a^\omega \big(f(x,y)\cdot g(x,y)\big)dx \text{ – сходится равномерно на } Y.$$

Доказательство.

$$\left|\int_{b_1}^{b_2} \big(f(x,y)\cdot g(x,y)\big)dx\right| \overset{\substack{\text{2-я теорема}\\ \text{о среднем}}}{=}$$

$$= \left|f(b_1,y)\cdot\int_{b_1}^{\xi} g(x,y)dx + f(b_2,y)\cdot\int_{\xi}^{b_2} g(x,y)dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant |f(b_1,y)|\cdot\left|\int_{b_1}^{\xi} g(x,y)dx\right| + |f(b_2,y)|\cdot\left|\int_{\xi}^{b_2} g(x,y)dx\right|.$$

1. Пусть выполнены (a) и (b) для признака Абеля. Пусть $\varepsilon > 0$ задано, тогда

$$\left|\int_{b_1}^{\xi} g(x,y)dx\right| < \frac{\varepsilon}{2\cdot M} \quad \text{и} \quad \left|\int_{\xi}^{b_2} g(x,y)dx\right| < \frac{\varepsilon}{2\cdot M} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|\int_{b_1}^{b_2} \big(f(x,y)\cdot g(x,y)\big)dx\right| < M\cdot\frac{\varepsilon}{2\cdot M} + M\cdot\frac{\varepsilon}{2\cdot M} = \varepsilon \Rightarrow$$

$\Rightarrow \int_a^\omega \big(f(x,y)\cdot g(x,y)\big)dx$ сходится равномерно на Y по критерию Коши.

2. Пусть выполнены (a) и (b) для признака Дирихле. Пусть $\varepsilon > 0$ задано, тогда:

$$|f(x,y)| < \frac{\varepsilon}{2\cdot L} \Rightarrow \left|\int_{b_1}^{b_2} \big(f(x,y)\cdot g(x,y)\big)dx\right| < \frac{\varepsilon}{2\cdot L}\cdot L + \frac{\varepsilon}{2\cdot L}\cdot L = \varepsilon \Rightarrow$$

$\Rightarrow \int_a^\omega \big(f(x,y)\cdot g(x,y)\big)dx$ сходится равномерно на Y.

□

7.3 Функциональные свойства несобственного интеграла, зависящего от параметра

Теорема 61 (О предельном переходе под знаком несобственного интеграла). Если

1. $\forall b \in [a;\omega)$
$$f(x,y) \underset{\mathfrak{B}_y}{\rightrightarrows} \phi(x)$$
на $[a;b]$, где $\mathfrak{B}_y$ – база на Y.

2. $\int_a^\omega f(x,y)dx$ сходится равномерно на Y.

Тогда
$$\lim_{\mathfrak{B}_y} F(y) = \lim_{\mathfrak{B}_y} \int_a^\omega f(x,y)dx = \int_a^\omega \lim_{\mathfrak{B}_y} f(x,y)dx = \int_a^\omega \phi(x)dx.$$

Доказательство. Имеем $F_b(y) = \int_a^b f(x,y)dx$

$$\begin{tikzcd}
F_b(y) = \int_a^b f(x,y)dx \arrow[r, Rightarrow, "b\to\omega"'] \arrow[d, dashed, "\forall b\ \mathfrak{B}_y"'] & \int_a^\omega f(x,y)dx = F(y) \arrow[d, dashed, "\mathfrak{B}_y"] \\
\int_a^b \phi(x)dx \arrow[r, dashed, "b\to\omega"'] & \int_a^\omega \phi(x)dx
\end{tikzcd}$$

Докажем левую вертикальную стрелку. Вспомним теорему 47.

1. $\forall y \in Y$ $f(x,y)$ интегрируется на $[a;b]$ (из условия 2 $\Rightarrow$)

2. $f(x,y) \underset{\mathfrak{B}_y}{\rightrightarrows} \phi(x)$ на $[a;b] \Rightarrow$
$$\int_a^b \phi(x)dx = \lim_{\mathfrak{B}_y} \int_a^b f(x,y)dx$$

$\Rightarrow$ используя теорему 44, доказывается утверждение этой теоремы. $\square$

Следствие (Непрерывность несобственного интеграла, зависящего от параметров)**.** Если

1. $f(x,y)$ непрерывна на $[a;\omega) \times [c;d]$.

2. $\int_a^\omega f(x,y)dx$ равномерно сходится на $[c;d]$.

Тогда $F(y) = \int_a^\omega f(x,y)dx$ непрерывна на $[c;d]$.

Доказательство. $y_0 \in [c;d]$. Докажем, что $F(y)$ непрерывна в точке y_0, то есть докажем, что $\lim\limits_{y\to y_0} F(y) = F(y_0)$.

Имеем:

$$\lim_{y\to y_0} F(y) = \lim_{y\to y_0} \int_a^\omega f(x,y)dx \overset{?}{=}$$
$$\overset{?}{=} \int_a^\omega \lim_{y\to y_0} f(x,y)dx \overset{\text{непр. } f(x,y)}{=} \int_a^\omega f(x,y_0)dx = F(y_0).$$

Проверим, выполняются ли условия теоремы 61.
База: $y \to y_0$. Надо показать, что

1. $f(x,y) \underset{y\to y_0}{\rightrightarrows} \underset{\phi(x)}{\underset{\shortparallel}{f(x,y_0)}}$ на $[a;b]$ $\forall b \in [a;\omega)$.

2. Дано.

Покажем 1.
Так как $f(x,y)$ непрерывна на $[a;\omega)\times[c;d] \Rightarrow f(x,y)$ равномерно непрерывна на $[a;b]\times[c;d]$ (по теореме Кантора) $\Rightarrow \forall (x,y_0)\ \exists U \subset [a;b]\times[c;d]:\ \forall (x,y)\in U$

$$\left|f(x,y)-f(x,y_0)\right| < \varepsilon \Rightarrow$$

$\Rightarrow$? обоснован. □

Лекция 16: Продолжение

от 15 нояб 10:32

Теорема 62 (О дифференцировании несобственного интеграла по параметру)**.** Если

1. $f(x,y)$ непрерывна на $[a;\omega)\times[c;d]$ и имеет непрерывную производную по y.
2. $\int_a^\omega f'_y(x,y)dx$ равномерно сходится на $[c;d]$.
3. $\int_a^\omega f(x,y)dx$ сходится хотя бы в одной точке $y_0 \in (c;d)$.

Тогда

1. $\int_a^\omega f(x,y)dx$ сходится равномерно на $[c';d'] \subset (c;d)$.
2. $F(y) = \int_a^\omega f(x,y)dx$ дифференцируема на $(c;d)$.
3. $F'(y) = \left(\int_a^\omega f(x,y)dx\right)'_y = \int_a^\omega f'_y(x,y)dx$.

Доказательство. Рассмотрим семейство функций $F_b(y) = \int_a^b f(x,y)dx$.
Имеем $\forall b$ $F_b(y)$ дифференцируема на $(c;d)$ и

$$F'_b(y) = \int_a^b f'_y(x,y)dx \text{ (теорема 56).}$$

Далее, $F'_b(y)$ сходится равномерно на $(c;d)$ при $f\to\omega$ и $F_b(y)$ сходится хотя бы в одной точке $y=y_0\in(c;d)$ при $b\to\omega$.

Следовательно, по теореме 49, семейство $F_b(y)$ сходится равномерно на $[c';d']$ при $b\to\omega$. Предельная функция $F(y)$ дифференцируема и

$$F'(y) = \lim_{b\to\omega} F'_b(y) = \lim_{b\to\omega}\int_a^\omega f'_y(x,y)dx = \int_a^\omega f'_y(x,y)dx.$$

□

Теорема 63 (Об интегрировании несобственного интеграла по параметру). Если

1. $f(x,y)$ непрерывна на $[a;\omega) \times [c;d]$.
2. $\int_a^\omega f(x,y)dx$ равномерно сходится на $[c;d]$.

Тогда функция $F(y) = \int_a^\omega f(x,y)dx$ интегрируема по Риману на $[c;d]$ и

$$\int_c^d dy \int_a^\omega f(x,y)dx = \int_a^\omega dx \int_c^d f(x,y)dy.$$

Доказательство. Имеем $\forall b \in [a;\omega)$

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy \text{ (теорема 57).}$$

$$\lim_{b\to\omega} \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx =$$
$$= \lim_{b\to\omega} \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy \overset{\text{опр.}}{=} \int_a^\omega dx \int_c^d f(x,y)dy,$$

$$\lim_{b\to\omega} \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx =$$
$$= \int_c^d \left(\lim_{b\to\omega} \int_a^b f(x,y)dy \right) \overset{\text{опр.}}{=} \int_c^d dy \int_a^\omega f(x,y)dx.$$

Покажем правомерность предельного перехода.

Рассмотрим семейство функций $F_b'(y) = \int_a^b f(x,y)dx$. Покажем, что для этого семейства выполняются условия теоремы 47.

В самом деле,

1. $\forall b \in [a;\omega)$ $F_b(y)$ непрерывна на $[c;d]$ (теорема 61) $\Rightarrow \forall b \in [a;\omega)$ $F_b(y)$ интегрируема по Риману на $[c;d]$.
2. Так как $\int_a^\omega f(x,y)dx$ равномерно сходится на $[c;d]$, то множество $F_b(y)$ сходится равномерно на $[c;d]$ к $F(y)$ при $b \to \omega$.

□

Теорема 64 (О перестановке несобственного интерграла, зависящего от параметра). Пусть

1. $f(x,y)$ непрерывна на $[a;\omega) \times [c;\widetilde{\omega})$.
2. $\forall d \in [c;\widetilde{\omega})$ $\int_a^\omega f(x,y)dx$ сходится равномерно на $[c;d]$.
3. $\forall b \in [a;\omega)$ $\int_c^{\widetilde{\omega}} f(x,y)dx$ сходится равномерно на $[a;b]$.

4. Существует хотя бы одни из интегралов:

$$\int_a^\omega dx \int_c^{\widetilde{\omega}} \left|f(x,y)\right| dy \quad \text{или} \quad \int_c^{\widetilde{\omega}} dy \int_a^\omega \left|f(x,y)\right| dx.$$

Тогда существует

$$\int_a^\omega dx \int_c^{\widetilde{\omega}} f(x,y)dy = \int_c^{\widetilde{\omega}} dy \int_a^\omega f(x,y)dx.$$

Доказательство. $\forall d \in [c;\widetilde{\omega})$ верно равенство

$$\int_c^d dy \int_a^\omega f(x,y)dx = \int_a^\omega dx \int_c^d f(x,y)dy \text{ (теорема 63)}.$$

$$\int_c^{\widetilde{\omega}} dy \int_a^\omega f(x,y)dx \overset{\text{опр.}}{=} \lim_{d\to\widetilde{\omega}} \int_c^d dy \int_a^\omega f(x,y)dx =$$
$$= \lim_{d\to\widetilde{\omega}} \int_a^\omega dx \int_c^d f(x,y)dy \overset{?}{=} \int_a^\omega \left(\lim_{d\to\widetilde{\omega}} \int_c^d f(x,y)dy\right) dx =$$
$$= \int_a^\omega dx \int_c^{\widetilde{\omega}} f(x,y)dy.$$

Докажем возможность предельного перехода.
Рассмотрим семейство $\Phi_d(x) = \int_c^d f(x,y)dy$. Имеем:

1. $\forall b \in [a;\omega)$ $\Phi_d(x) \underset{d\to\widetilde{\omega}}{\rightrightarrows} \Phi(x) = \int_c^{\widetilde{\omega}} f(x,y)dy$ на $[c;d]$ (условие 3.).
2. $\int_a^\omega \Phi_d(x)dx$ равномерно сходится на $[c;\widetilde{\omega})$.

Покажем пункт 2.
$\forall d \in [c;\widetilde{\omega})$ и $\forall x \in [a;\omega)$

$$\left|\Phi_d(x)\right| = \left|\int_c^d f(x,y)dy\right| \leqslant \int_c^d \left|f(x,y)\right|dy \leqslant \int_c^{\widetilde{\omega}} \left|f(x,y)\right|dy \underset{d\to\widetilde{\omega}}{\rightrightarrows} \phi(x).$$

Допустим, что $\exists \int_a^\omega dx \int_c^{\widetilde{\omega}} \left|f(x,y)\right|dy$.

Тогда получаем, что $\int_a^\omega \phi(x)dx$ сходится и не зависит от $d \Rightarrow$ по признаку Вейерштрасса $\int_a^{\widetilde{\omega}} \Phi_d(x)dx$ сходится равмномерно на $[c;\widetilde{\omega}) \Rightarrow$ выполняется условие теоремы 61 $\Rightarrow$ вопрос о предельном переходе снят.

□

7.4 Эйлеровы интегралы

7.4.1 β-функция

$$\boxed{B(\alpha,\beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}\cdot(1-x)^{\beta-1}dx}$$

1. **ООФ**

Утверждение. $B(\alpha,\beta)$ определенная при всех $\alpha > 0,\ \beta > 0$.

Доказательство.

$$\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx = \int_0^{\frac{1}{2}} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx.$$

Рассмотрим

$$x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} = \frac{(1-x)^{\beta-1}}{x^{1-\alpha}} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{x^{1-\alpha}},$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1-x)^{\beta-1}}{x^{1-\alpha}} : \frac{1}{x^{1-\alpha}} = \lim_{x\to 0}(1-x)^{\beta-1} = 1.$$

$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x^{1-\alpha}}$ сходится при $1-\alpha < 1 \Rightarrow \alpha > 0$.

Аналогично можно показать, что $\int_{\frac{1}{2}}^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx$ сходится при $\beta > 0$. □

2. **Симметричность**

Утверждение.

$$B(\alpha,\beta) = B(\beta,\alpha).$$

Доказательство. Замена $t = 1-x \Rightarrow x = 1-t,\ dx = -dt$,

$$\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx =$$
$$= \int_1^0 (1-t)^{\alpha-1}\cdot t^{\beta-1}(-dt) = \int_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\alpha-1}dt =$$
$$= B(\beta,\alpha).$$

□

3. **Формула понижения**

Примечание (Формула понижения для β-функции).

$$B(\alpha,\beta) = \int_0^1 \underbrace{x^{\alpha-1}}_{u}\underbrace{(x-1)^{\beta-1}dx}_{v} =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} u = x^{\alpha-1} & du = (\alpha-1)x^{\alpha-2}dx \\ v = -\frac{1}{\beta}(1-x)^{\beta} & dv = (x-1)^{\beta-1}dx \end{array} \right| =$$

$$= -x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta}\cdot\frac{1}{\beta}\bigg|_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{\beta}(1-x)^{\beta}(\alpha-1)x^{\alpha-2}dx =$$

$$= \frac{\alpha-1}{\beta}\int_0^1 x^{\alpha-2}(1-x)^{\beta}dx = \frac{\alpha-1}{\beta}\int_0^1 \frac{1-x}{1-x}x^{\alpha-2}(1-x)^{\beta}dx =$$

$$= \frac{\alpha-1}{\beta}\int_0^1 (1-x)x^{\alpha-2}(1-x)^{\beta-1}dx =$$

$$= \frac{\alpha-1}{\beta}\int_0^1 \big(x^{\alpha-2}(1-x)^{\beta-1} - x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\big)dx =$$

$$= \frac{\alpha-1}{\beta}\left(\int_0^1 (1-x)^{\beta-1}dx - \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx\right) =$$

$$= \frac{\alpha-1}{\beta}\big(B(\alpha-1,\beta) - B(\alpha,\beta)\big).$$

$$B(\alpha,\beta) = \frac{\alpha-1}{\beta}\big(B(\alpha-1,\beta) - B(\alpha,\beta)\big) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B(\alpha,\beta)\left(1 + \frac{\alpha-1}{\beta}\right) = \frac{\alpha-1}{\beta}B(\alpha-1,\beta).$$

$$\boxed{B(\alpha,\beta) = \frac{\alpha-1}{\beta+\alpha-1} - B(\alpha-1,\beta)}, \quad \alpha > 1,\ \beta > 0.$$

Пусть $\beta = 1$:

$$B(\alpha,1) = \int_0^1 x^{\alpha-1}dx = \frac{x^{\alpha}}{\alpha}\bigg|_0^1 = \frac{1}{\alpha}.$$

Далее, если $\beta = n \in \mathbb{N}$, то

$$B(\alpha,n) = B(n,\alpha) =$$

$$= \frac{n-1}{\alpha+n-1}\cdot B(n-1,\alpha) = \frac{n-1}{\alpha+n-1}\cdot\frac{n-2}{\alpha+n-2}\cdot B(n-2,\alpha) =$$

$$= \frac{(n-1)!}{(\alpha+n-1)(\alpha+n-2)\dots(\alpha+1)}\cdot B(\alpha,1) =$$

$$= \frac{(n-1)!}{(\alpha+n-1)\dots(\alpha+1)\alpha}.$$

Отсюда:

$$\boxed{B(m,n) = \frac{(n-1)!}{(m+n-1)\dots(m+1)m} = \frac{(n-1)!\cdot(m-1)!}{(m+n-1)!}}$$

7.4.2 γ-функция

$$\boxed{\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}\cdot e^{-x}dx}$$

1. **ООФ**

Утверждение. $\Gamma(\alpha)$ определенная при $\alpha > 0$.

Доказательство.

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}\cdot e^{-x}dx = \int_0^1 x^{\alpha-1}e^{-x}dx + \int_1^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx.$$

Заметим, что

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x^{\alpha-1}e^{-x})}{x^{\alpha-1}} = 1 \Rightarrow x^{\alpha-1}e^{-x} \sim \frac{1}{x^{1-\alpha}} = x^{\alpha-1}.$$

$\int_0^1 \frac{1}{x^{1-\alpha}}dx$ сходится при $1-\alpha < 1 \Rightarrow \alpha > 0$.

Далее, $e^{-x} \to 0$ при $x \to +\infty \Rightarrow \forall\beta \in \mathbb{R}\ e^{-x} = o(x^\beta)$ при $x \to +\infty$.

$e^{-x} = \alpha(x)\cdot x^\beta$, где $\alpha(x) \to 0$ при $x \to +\infty$.

$x^\beta \to 0$ при $x \to +\infty$, если $\beta < 0$.

$x^\beta \to +\infty$ при $x \to +\infty$, если $\beta > 0$.

Но $\infty = \frac{1}{0} \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{-x}}{x^\beta} = 0$.

Таким образом, сходимость интеграла $\int_1^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx$ та же, что и сходимость интеграла $\int_1^{-\infty} x^{\alpha-1}x^\beta dx$.

Можно подобрать такую β, что $\forall\alpha \in \mathbb{R}$

$$\int_1^{+\infty} x^{\alpha-1}x^\beta dx \text{ – сходится} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_1^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx \text{ сходится при } \forall\alpha\in\mathbb{R} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \Gamma(\alpha)$ определена при $\alpha > 0$. □

2. **Правило дифференцирования** $\Gamma(\alpha)$

Утверждение. $\forall\alpha > 0\ \Gamma(\alpha)$ дифференцируема в точке α и

$$\Gamma'(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}\ln x dx.$$

Более того, $\Gamma(\alpha)$ бесконечно дифференцируема в точке α и n-ная производная
$$\Gamma^{(n)}(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}\ln^n x dx.$$

Доказательство. Теорема 62.

$$\Gamma'(\alpha) = \left(\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx\right)'_\alpha \overset{?}{=}$$
$$\overset{?}{=} \int_0^{+\infty} (x^{\alpha-1}e^{-x})'_\alpha dx = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}\ln x dx.$$

$$\boxed{(a^x)'_x = a^x \cdot \ln a}$$

Покажем, что условия теоремы 62 выполняются:

(a) $f(x,\alpha) = x^{\alpha-1}e^{-x}$ дифференцируема по α на $[\alpha-\varepsilon;\alpha+\varepsilon]$.

(b) $\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}\ln x dx$ равномерно сходится на $[\alpha-\varepsilon;\alpha+\varepsilon]$.

(c) $\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx$ сходится хотя бы в одной точке отрезка $[\alpha-\varepsilon;\alpha+\varepsilon]$.

Докажем пункт 2.

$$\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}\ln x dx = \int_0^{1} x^{\alpha-1}e^{-x}\ln x dx + \int_1^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}\ln x dx.$$

Пусть $\alpha_0 > 0$.

Выберем $\varepsilon < \frac{\alpha_0}{2}$. Рассмотрим $\alpha \in [\alpha_0-\varepsilon;\alpha_0+\varepsilon]$.

Если $\alpha_0 > 1$

Можно выбрать $\varepsilon:\ \alpha_0-\varepsilon > 1$. Тогда

$$\lim_{x\to 0} x^{\alpha-1}\ln x =$$
$$= \left|0\cdot\infty = \frac{1}{\infty}\cdot\infty = \frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{x^{1-\alpha}} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{(1-\alpha)x^{-\alpha}} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{(1-\alpha)x^{-\alpha}} =$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{1-\alpha}\cdot x^{\alpha-1} = 0.$$

Таким образом при $\alpha_0 > 1$ точка 0 не является особенной.

Если $\alpha_0 < 1$ $\forall\alpha \in [\alpha_0-\varepsilon;\alpha_0+\varepsilon]$

$$|x^{\alpha-1}\ln x| \leqslant x^{\alpha_0-\varepsilon-1}|\ln x|.$$

Покажем, что

$$x^{\alpha_0-\varepsilon-1}|\ln x| = 0\left(x^{\alpha_0-\varepsilon-1}\cdot x^{\frac{\alpha_0-\varepsilon-1}{2}}\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^{\alpha_0-\varepsilon-1}|\ln x| = \alpha(x)\cdot x^{\alpha_0-\varepsilon-1}\cdot x^{\frac{\alpha_0-\varepsilon-1}{2}} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow |\ln x| = \alpha(x)\cdot x^{\frac{\alpha_0-\varepsilon-1}{2}} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{\alpha_0-\varepsilon-1}{2}\cdot x^{\frac{\alpha_0-\varepsilon-1}{2}}} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot x^{-\left(\frac{\alpha_0-\varepsilon-1}{2}-1\right)} = \lim_{x\to 0} x^{-\left(\frac{\alpha_0-\varepsilon-1}{2}\right)} = 0.$$

Таким образом, по признаку Вейерштрасса, $\int_0^1 x^{\alpha-1}e^{-x}\ln x dx$ будет сходиться при сходимости интеграла

$$\int_0^1 x^{\alpha_0-\varepsilon-1}\cdot x^{\frac{\alpha_0-\varepsilon-1}{2}}dx = \int_0^1 x^{\frac{3}{2}(\alpha_0-\varepsilon-1)}dx = \int_0^1 \frac{dx}{x^{-\frac{3}{2}(\alpha_0-\varepsilon-1)}}$$

сходится при $-\frac{3}{2}\overbrace{(\alpha_0-\varepsilon-1)}^{<0} < 1$.

Так как $\int_0^{+\infty} x^{\alpha_0-\varepsilon-1}\cdot x^{\frac{\alpha_0-\varepsilon-1}{x}}dx$ сходится по признаку Вейерштрасса, то $\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}\ln x dx$ сходится равномерно на $[\alpha_0-\varepsilon;\alpha_0+\varepsilon]$.

Далее, $\forall\alpha\in[\alpha_0-\varepsilon;\alpha_0+\varepsilon]$

$$e^{-x}x^{\alpha-1}\ln x \leqslant e^{-x}x^{\alpha_0+\varepsilon-1}\ln x.$$

Так как $\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{\alpha_0+\varepsilon-1}\ln x dx$ сходится, то и сходится равномерно на $[\alpha_0-\varepsilon;\alpha_0+\varepsilon]$ и $\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{\alpha-1}\ln x dx$.

Аналогичное доказательство имеет место быть и для $\Gamma^{(n)}(\alpha)$. $\square$

3. **Формула понижения**

Примечание (Формула понижения для γ-функции).

$$\Gamma(\alpha+1) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha}e^{-x}dx =$$
$$= \left|\begin{matrix} u = x^{\alpha} & du = \alpha x^{\alpha-1}dx \\ v = -e^{-x} & dv = e^{-x}dx\end{matrix}\right| = x^{\alpha}(-e^{-x})\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty}\alpha x^{\alpha-1}e^{-x}dx =$$
$$= \alpha\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx = \alpha\Gamma(\alpha).$$

$$\boxed{\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)}$$

Пусть $\alpha = n \Rightarrow$

$$\Rightarrow \Gamma(n+1) =$$
$$= n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = n(n-1)(n-2)\Gamma(n-2) =$$
$$= n(n-1)\dots\Gamma(1),$$

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} x^0 e^{-x} dx = -e^{-x}\Big|_0^{+\infty} = 1.$$

$$\boxed{\Gamma(n+1) = n!}$$

Лекция 17: Продолжение

от 19 нояб 8:47

Глава 8

Кратные интегралы

8.1 Мера Жордана в $\mathbb{R}^n$

Определение 46 (Непересекающиеся и попарно непересекающиеся множества)**.** Множества A и B называются *непересекающимися*, если $A \cap B = \varnothing$.

Множества $A_1, \ldots, A_n$ называются *попарно непересекающимися*, если $\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}$ A_i и A_j – непересекающиеся.

Определение 47 (Разбиение множества)**.** *Разбиением* множества A называется совокупность попарно непересекающихся множеств $A_1, \ldots, A_n$.

Определение 48 (Клетка)**.** Множество

$$\Pi = \left\{ (x_1, \ldots, x_n) : \; a_i \leqslant x_i < b_i, \; i = \overline{1, n} \right\} \tag{8.1}$$

называется *клеткой* в $\mathbb{R}^n$.

Пустое множество также считается клеткой.

клетки:	в $\mathbb{R}$	–	$[a; b)$ полуинтервалы
	в $\mathbb{R}^2$	–	прямоугольники, у которых удалены соответствующиеся стороны
	в $\mathbb{R}^3$	–	параллелепипеды, у которых удалены соответствующиеся грани

Определение 49 (Клеточное множество)**.** Множество $A \subset \mathbb{R}^n$ называется *клеточным*, если оно является объединением конечного числа попарно непересекающихся клеток.

8.1.1 Свойства клеточных множеств

- Свойсто ①

Утверждение. Пересечение двух клеток есть клетка.

Доказательство. Достаточно заметить, что $[a;b) \cap [c;d)$ есть либо тоже полуинтервал, либо $\varnothing$ (того же вида). $\square$

- Свойсто ②

Утверждение. Объединение конечного числа непересекающихся клеточных множеств является клеточным множеством.

- Свойсто ③

Утверждение. Пересечение двух клеточных множеств есть клеточное множество.

Доказательство. Пусть A и B – клеточные множества, $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_n$ – разбиение A, $\Pi'_1, \Pi'_2, \ldots, \Pi'_k$ – разбиение множества B.

Пересечение $A \cap B$ состоит из клеток $\Pi_{ij} = \Pi_i \cap \Pi'_j$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,k}$, причем клетки Π_{ij} попарно не пересекаются. $\square$

- Свойсто ④

Утверждение. Разность двух клеток есть клеточное множество.

Доказательство. Если клетка R является пересечением клеток Π и Q, то:

$$\Pi \setminus Q = \Pi \setminus R,$$

и существует разбиение клетки Π такая, что клитка R является одной из клеток разбиения. $\square$

- Свойсто ⑤

Утверждение. Разность двух клеточных множеств есть клеточное множество.

Доказательство. Пусть множество A разбито на клетки $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_n$ и Q – некоторая клетка.

Множества $K_i = \Pi_i \setminus Q$ есть попарно непересекающиеся клеточные множества (в силу ④-го свойства). Множество $A \setminus Q$ есть $\bigcup\limits_i K_i$, тогда в силу ②-го свойства $\bigcup\limits_i K_i$ – клеточное множество.

Пусть B – клеточное множество, имеет разбиение $\Pi'_1, \Pi'_2, \ldots, \Pi'_k$. Множество $A \setminus B$ можно получить, последовательно вычитая из A клетки $\Pi'_1, \Pi'_2, \ldots, \Pi'_k$, каждый раз получая клеточное множество за конечное число шагов. $\square$

- Свойсто 6

Утверждение. Объединение конечного числа клеточных множеств есть клеточное множество.

Доказательство. Если A и B – клеточные множества, то в силу 3-го и 5-го свойств, множества $A \setminus B$, $B \setminus A$ и $A \cap B$ являются конечными. Тогда:

$$A \cup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)$$

– клеточное множество по свойству 2. □

8.1.2 Мера клеточного множества

Определение 50 (Мера клетки). *Мерой* $m(\Pi)$ *клетки* Π, определенной 8.1, называется число:

$$m(\Pi) = (b_1 - a_1) \cdot \ldots \cdot (b_n - a_n) \tag{8.2}$$

Мера пустого множества равна нулю по определению.

Определение 51 (Мера клеточного множества). *Мерой* $m(A)$ *клеточного множества* A, разбитого на клетки $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_n$ называется число:

$$m(A) = \sum_{i=1}^{n} m(\Pi_i) \tag{8.3}$$

Лемма 7. Мера клеточного множества не зависит от способа разбиения множества на клетки.

Доказательство. Можно показать, что при $\forall$ разбиении $\Pi_1, \ldots, \Pi_k$ клетки Π мера Π как клеточного множества всегда равна $m(\Pi)$, определяемой 8.2.

Для $\mathbb{R}^1$ очевидна верна формула 8.3,

$$m(\Pi) = \sum_i m(\Pi_i).$$

В общем случае для клетки Π можно провести аналогичные рассуждения. □

8.1.3 Свойства меры клеточных множеств

- Свойсто 1

Утверждение. Если клеточные множества $A_1, \ldots, A_n$ попарно не пересекаются, то

$$m(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} m(A_i) \tag{8.4}$$

- Свойство ②

Утверждение. Если A и B – клеточные множества и $A \subset B$, то

$$m(B) = m(A) + m(B \setminus A) \tag{8.5}$$

и $m(A) \leqslant m(B)$.

Доказательство. A и $B \setminus A$ – не пересекающиеся множества, $A \cup (B \setminus A) = B \Rightarrow$ по свойству ①

$$m(B) = m(A) + m(B \setminus A) \Rightarrow m(A) \leqslant m(B).$$

□

- Свойство ③

Утверждение. Если $A_1, \ldots, A_n$ – клеточные множества, то

$$m(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n} m(A_i) \tag{8.6}$$

Доказательство. Докажем для $n = 2$, по индукции можно доказать $\forall n$.

Имеем A_1 и A_2, заметим, что $A_1 \subset A_1 \cup A_2 = B,\ B \setminus A_1 \subset A_2$

$$m(A_1 \cup A_2) = m(B) \overset{5}{=} m(A_1) + m(B \setminus A_1) \leqslant m(A_1) + m(A_2).$$

□

- Свойство ④

Утверждение. Для $\forall$ клеточного множества A и $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ клеточное множество

$$A_\varepsilon : \ A_\varepsilon \subset \overline{A_\varepsilon} \subset A^\circ \subset A,$$

где $\overline{A_\varepsilon}$ – замыкание множества A_ε, A° – совокупность все внутренних точке множества A.

Доказательство. Достаточно доказать для клетки 8.1.

Из определения клетки $\Rightarrow$ точка $(x_1, \ldots, x_n) \in G\Pi$ ($G\Pi$ – граница клетки), если $\exists i : \ x_i = a_i$ или $x_i = b_i$.

Сдвигаем левые концы полуинтервалов $[a_i; b_i)$ вправо, а правые – влево $\Rightarrow$ построена клетка Π_ε, которая не содержит граничных точек клетки $\Rightarrow \Pi_i \subset \overline{\Pi_\varepsilon} \subset \Pi^\circ \subset \Pi$. □

8.1.4 Множества, измеримые по Жордану

Определение 52 (Измеримое по Жордану множество). Множество $Q \subset \mathbb{R}$ называется *измеримым по Жордану*, если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ клеточные множества A и B:

$$A \subset \Omega \subset B \quad \text{и} \quad m(B) - m(A) < \varepsilon.$$

Определение 53 (Мера для измеримого по Жордану множества). Если Ω – измеримое по Жордану множество, то его *мерой* $m(\Omega)$ называется число для $\forall A$ и B – клеточных множеств: $A \subset \Omega \subset B$ выполнено

$$m(A) \leqslant m(i) \leqslant m(B).$$

Лемма 8. Определение меры измеримого по Жордану множества корректно, число $m(\Omega)$ $\exists$ и !, причем

$$m(\Omega) = \sup_{A \subset \Omega} m(A) = \inf_{B \supset \Omega} m(B).$$

Доказательство. Пусть A и B – некоторые клеточные множества, $A \subset \Omega \subset B \Rightarrow A \subset B \Rightarrow m(A) \leqslant m(B)$.

$\exists$ число γ, разделяющее числовые множества $\{m(A)\}$ и $\{m(B)\}$, порожденные клеточными множествами $A \subset \Omega$ и клеточными множествами $B \supset \Omega$, то есть

$$m(A) \leqslant \sup_{A \subset \Omega} m(A) \leqslant \gamma \leqslant \inf_{B \supset \Omega} m(B) \leqslant m(B).$$

В качестве $m(\Omega)$ можно взять γ. Таким образом существование числа $m(\Omega)$ доказано.

Теперь докажем, что γ – единственное.

Пусть есть два числа α и $\beta:$ $\forall A$ и B – клеточных множеств: $A \subset \Omega \subset B$

$$\boxed{m(A) \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant m(B)} \tag{8.7}$$

Так как Ω измеримо по Жордану, то $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ клеточные множества A_ε и B_ε:

$$\boxed{m(B_\varepsilon) - m(A_\varepsilon) < \varepsilon, \quad A_\varepsilon \subset \Omega \subset B_\varepsilon} \quad \text{по свойству } 4 \tag{8.8}$$

Из 8.7 и 8.7 $\Rightarrow m(B) - m(a) \geqslant m(B_\varepsilon) - m(A_\varepsilon) \geqslant \beta - \alpha \Rightarrow 0 \leqslant \beta - \alpha \leqslant m(B_\varepsilon) - m(A_\varepsilon) < \varepsilon \Rightarrow 0 \leqslant \beta - \alpha < \varepsilon$.

В силу производности $\varepsilon \Rightarrow \alpha = \beta$. □

8.1.5 Свойства множеств меры нуль

- Свойство 1

Утверждение. Если $E \subset \mathbb{R}^n$ и $\forall \varepsilon > 0\ \exists B = B_\varepsilon :\ E \subset B$ и $m(B) < \varepsilon \Rightarrow m(E) = 0$.

Доказательство. Пусть $A = \varnothing \Rightarrow A \subset E \subset B \Rightarrow m(B) - m(A) = m(B) - 0$, $m(B) < \varepsilon \Rightarrow E$ – измеримое по Жордану множество и $m(E) \leqslant m(B) < \varepsilon$.

В силу произвольности $\varepsilon \Rightarrow m(E) = 0$. □

Определение 54 (Множество меры нуль)**.** Множество, удовлетворяющее условию свойства 1, называется *множеством меры нуль*.

- Свойство 2

Утверждение. Объединение конечного числа множеств меры нуль есть множество меры нуль.

Доказательство. Пусть E_1 и E_2 – множества меры нуль.

$m(E_1) = m(E_2) = 0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists B_1$ и $B_2 :\ E_1 \subset B_1$ и $E_2 \subset B_2$ и $m(B_1) < \frac{\varepsilon}{2}$, $m(B_2) < \frac{\varepsilon}{2}$.

$$(E_1 \cup E_2) \subset (B_1 \cup B_2).$$

$$m(B_1 \cup B_2) \leqslant m(B_1) + m(B_2) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m(E_1 \cup E_2) \leqslant m(B_1 \cup B_2) < \varepsilon.$$

В силу произвольности $\varepsilon \Rightarrow m(E_1 \cup E_2) = 0$. □

- Свойство 3

Утверждение. Подмножество множества меры нуль есть множество меры нуль.

Доказательство. Пусть $E_1 \subset E$, где $m(E) = 0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists B :\ E \subset B$ и $m(B) < \varepsilon$.

Тогда $E_1 \subset E \subset B \Rightarrow m(E_1) \leqslant m(E) \leqslant m(B) \leqslant \varepsilon \Rightarrow m(E_1) < \varepsilon$ и в силу произвольности $\varepsilon \Rightarrow m(E_1) = 0$. □

Лемма 9. Если связное множество $A \subset \mathbb{R}^n$ не имеет общих точек с границей множества $B \subset \mathbb{R}^n$, то A лежит либо внутри B, либо в дополнении к B.

Теорема 65 (Критерий измеримости множества в $\mathbb{R}^n$). Множество $\Omega \subset \mathbb{R}$ измеримо по Жордану $\Leftrightarrow$ Ω – ограничено и $m(G\Omega) = 0$ (его граница меры нуль).

Доказательство.

- $\boxed{\Rightarrow}$ Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ измеримо по Жордану $\Rightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists A$ и B – клеточные множества: $A \subset \Omega \subset B$ и $m(B) - m(A) < \varepsilon$.

  Из свойства 4 (из 8.1.3) $\Rightarrow$ множество A не содержит все граничные точки Ω, а множество B – содержит. Тогда клеточное множество $B \setminus A \supset G\Omega$.

  $$m(B \setminus A) = m(B) - m(A) < \varepsilon \quad \text{и} \quad m(G\Omega) \leqslant m(B \setminus A) < \varepsilon \Rightarrow$$

  $\Rightarrow$ в силу произвольности $\varepsilon \Rightarrow m(G\Omega) = 0$.

- $\boxed{\Leftarrow}$ Пусть $m(G\Omega) = 0$ и Ω – ограниченное множество в $\mathbb{R}^n$.

  Пусть $\varepsilon > 0$ задано. Построим множество $C:$ $C\Omega \subset C$ и $m(C) < \varepsilon$ (8.1.5, 1) $\Rightarrow \Pi \setminus C$ – клеточное множество, не содержащее граничных точек Ω.

  Пусть $\Pi \setminus C = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \Pi_i$.

  Так как Π_i не содержат граничных точек, то либо $\Pi_i \cap \Omega = \varnothing$, либо $\Pi_i \subset \Omega$ (лемма 9). Перенумеруем Π_i таким образом, чтобы $\Pi_1, \ldots, \Pi_k \subset \Omega$, $\Pi_{k+1}, \ldots, \Pi_n \cap \Omega = \varnothing$.

  Обозначим $A = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \Pi_i$, $B = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \Pi_i$,

  $$D = A \cup C = \Pi \setminus B \Rightarrow A \subset \Omega \subset D,$$

  $$\begin{aligned} &m(D) - m(A) = \\ &\quad = m(A \cup C) - m(A) = m(\Pi \setminus B) - m(A) = m(C) < \varepsilon \Rightarrow \\ &\qquad\qquad \Rightarrow m(D) - m(A) < \varepsilon, \end{aligned}$$

  где $A \subset \Omega \subset D \Rightarrow \Omega$ – измеримое по Жордану множество.

$\square$

8.1.6 Свойства множеств, измеримых по Жордану

- Свойство 1

Утверждение. Если множества Ω_1 и Ω_2 измеримы по Жордану, то множества $\Omega_1 \cup \Omega_2$, $\Omega_1 \cap \Omega_2$, $\Omega_1 \setminus \Omega_2$ также измеримы по Жордану.

- Свойство ②

Утверждение. Если множества $\Omega_i,\ i = \overline{1,n}$ измеримы по Жордану, то множество $\bigcup\limits_{i=1}^{n}\Omega_i$ измеримо по Жордану и

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{n}\Omega_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} m(\Omega_i)$$

и более того, если Ω_i попарно не пересекаются, то

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{n}\Omega_i\right) = \sum_{i=1}^{n} m(\Omega_i).$$

Лекция 18: Продолжение

от 24 нояб 10:32

8.2 Кратный интеграл Римана

Определение 55 (Разбиение совокупности измеримых по Жордану множеств)**.** Пусть множество $G \subset \mathbb{R}^n$ измеримо по Жордану.

Совокупность измеримых по Жордану множеств $G_i \subset \mathbb{R}^n,\ i = \overline{1,N}$, попарно пересекающихся $G = \bigcup\limits_{i=1}^{n} G_i$ называются *разбиением* множества G.

Обозначение: $T = \{G_i\}$

Определение 56 (Мелкость разбиения)**.** Число $l(T) = \max d(G_i)$ называется *мелкостью разбиения* T.

Определение 57 (Интегральная сумма Римана от функции на множестве)**.** Пусть функция $f(x) = f(x_1, \dots, x_n) :\ G \to \mathbb{R}$ определена на измеримом по Жордану множестве $G \subset \mathbb{R}^n$, $T = \{G_{ij}\}$ – разбиение множества G.

Возьмем $\xi_i \in G_i,\ i = \overline{1,N}$.

Выражение

$$\sigma_T = \sigma_T(f, \xi, G) = \sum_{i=1}^{N} f(\xi_i) m(G_i)$$

называется *интегральной суммой Римана* от функции $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ на множестве, соответствующей разбиению T и выборке $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_N)$.

Определение 58 (Предел интегральной суммы)**.** Число I называется *пределом интегральной суммы* σ_T при мелкости разбиения $l(T) \to 0$, если $\forall T:\ l(T) < \delta$ и $\forall \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ верно неравенство

$$\left| I - \sigma_T(f, \xi, G) \right| < \varepsilon.$$

$$\text{Обозначение:} \qquad I = \lim_{l(T)\to 0} \sigma_T.$$

Примечание. Число I будем называть *кратным интегралом Римана* от функции $f(x)$ по множеству G, а функцию $f(x)$ – *интегрируемой* на множестве G.

Обозн.
инт. Римана

$\swarrow$ $\searrow$

кратное

$$\int\limits_G f(x)dx$$

развернутое

$$\underbrace{\int \dots \int\limits_G}_{n \text{ раз}} f(x_1, \dots, x_n)dx_1, \dots, dx_n$$

При $n = 2$ кратный интеграл Римана называется *двойным* и обозначается

$$\iint\limits_G f(x,y)dxdy.$$

При $n = 3$ – *тройным* и обозначается

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz.$$

Теорема 66 (Критерий интегрируемости)**.** Ограниченная формула $f(x)$ интегрируема на измеримом по Нордану множестве $G \subset \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0:\ \forall T\ l(T) < \delta$

$$\overline{S_T} - S_T < \varepsilon$$

$$(\text{то есть } \overline{S_T} - S_T \to 0 \text{ при } l(T) \to 0)$$

Доказательство. Смотреть доказательство соответствующей теоремы для $\int_a^b f(x)dx$. $\square$

Теорема 67 (Критерий интегрируемости, более сильная)**.** Ограниченная функция $f(x)$ интегрируема на измеримом по Жордану множестве $G \subset \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists T$ множества G:

$$\overline{S_T} - S_T < \varepsilon.$$

Доказательство. Без доказательства. $\square$

8.2.1 Классы интегрируемых функций

Теорема 68. Непрерывная на измеримом по Жордану компактном множестве G, функция $f(x)$ интегрируема на этом множестве.

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству соответствующей теореме для $\int_a^b f(x)dx$. □

Теорема 69. Пусть функция $f(x)$ ограничена на измеримом компакте $G \subset \mathbb{R}^n$ и множество разрыва $f(x)$ имеет Жорданову меру нуль.

Тогда $f(x)$ интегрируема на G.

Доказательство. Без доказательства. □

8.2.2 Свойства кратного интеграла Римана

- Свойство 1

Утверждение. Справедливо равенство

$$\int\limits_G 1dx = m(G).$$

- Свойство 2

Утверждение. Если $f(x) > 0$ и $f(x)$ – интегрируемая на измеримом по Жордану множестве G функция, то

$$\int\limits_G f(x)dx \geqslant 0.$$

- Свойство 3

Утверждение. Если $f_1(x)$ и $f_2(x) = f_2(x_1, \dots, x_n)$ – интегрируемые на измеримом по Жордану множестве G функции, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то и функция $\alpha \cdot f_1(x) + \beta \cdot f_2(x)$ интегрируема на G и

$$\int\limits_G \big(\alpha \cdot f_1(x) + \beta \cdot f_2(x)\big)dx = \alpha \int\limits_G f_1(x)dx + \beta \int\limits_G f_2(x)dx.$$

- Свойство 4

Утверждение. Если $f_1(x)$ и $f_2(x)$ – интегралы на измеримом по Жордану множестве G и $\forall x \in G$ $f_1(x) \leqslant f_2(x)$, то

$$\int\limits_G f_1(x)dx \leqslant \int\limits_G f_2(x)dx.$$

- Свойство ⑤

Утверждение. Если функция $f(x)$ непрерывна на измеримом связном компакте G, то $\exists \xi \in G$:

$$\int\limits_G f(x)dx = f(\xi)m(G).$$

- Свойство ⑥

Утверждение. Если $G_k,\ k = \overline{1,m}$ если разбиение множества G, то функция $f(x)$ интегрируема на $G \Leftrightarrow f(x)$ интегрируема на $G_k,\ k = \overline{1,m}$, при этом

$$\int\limits_G f(x)dx = \sum_{k=1}^{m} \int\limits_{G_k} f(x)dx.$$

- Свойство ⑦

Утверждение. Произведение интегрируемых на измеримом множестве G функцией является интегрируемой на G функцией.

- Свойство ⑧

Утверждение. Если $f(x)$ интегрируема на множестве G функция, то функция $|f(x)|$ также интегрируема

$$\left|\int\limits_G f(x)dx\right| \leqslant \int\limits_G |f(x)|dx.$$

Лемма 10. Пусть функция $f(x)$ ограничена на измеримом по Жордану множестве G, а E есть множество меры нуль.

Если $\forall T = \{G_k\},\ k = \overline{1,m}$ отбрасывать в интегральной сумме σ_T слагаемые, соответствующие тем множествам G_i, которые имеют непустое пересечение с E, то это не повлияет ни на существование предела интегральной суммы при $l(T) \to 0$, ни на величину этого предела.

Теорема 70. Пусть G – измеримое множество в $\mathbb{R}^n$ и функция $f(x)$ интегрируема на G. Тогда график функции $f(x)$ имеет в $\mathbb{R}^{n+1}$ Жорданову меру нуль.

8.3 Сведение кратных интегралов к повторам

Теорема 71 (Формула сведения двойного интеграла по прямоугольнику к повторному). Пусть

1. Функция $f(x,y)$ интегрируема на прямоугольнике
$$\Pi = \{(x,y): \ a \leqslant x \leqslant b, \ c \leqslant y \leqslant d\}.$$
2. $\int_c^d f(x,y)dy \ \exists \ \forall x \in [a;b]$.

Тогда функция $F(x) = \int_c^d f(x,y)dy$ интегрируема на отрезке $[a;b]$ и справедлива формула:

$$\boxed{\iint\limits_{\Pi} f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_c^d f(x)dy}$$

Доказательство. Возьмем произвольное разбиение отрезков $[a;b]$ и $[c;d]$ точками
$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$
$$c = y_0 < y_1 < \ldots < y_m = d$$
и обозначим $\Pi_1, \ldots, \Pi_n$ и $\Pi_1', \ldots, \Pi_m'$ соответсвующие промежутки разбиения.

Тогда
$$\Pi = \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{j=1}^{m} \Pi_{ij},$$
где $\Pi_{ij} = \{(x,y): \ x \in \Pi_i, \ y \in \Pi_j'\}$.

Положим
$$M_{ij} = \sup_{(x,y)\in\Pi_{ij}} f(x,y), \quad m_{ij} = \inf_{(x,y)\in\Pi_{ij}} f(x,y).$$

Так как $\int_c^d f(x,y)dy \ \exists \ \forall x \in [a;b]$, то $\forall x \in \Pi_i$ справедливо неравенство
$$m_{ij} \cdot \Delta y_i \leqslant \int_{y_{i-1}}^{y_i} f(x,y)dy \leqslant M_{ij} \cdot \Delta y_i,$$
где $\Delta y_i = y_i - y_{j-1}$.

Суммируем эти неравенства по индексу j:
$$\sum_{j=1}^{m} m_{ij}\Delta y_i \leqslant \int_c^d f(x,y)dy \leqslant \sum_{j=1}^{m} M_{ij}\Delta y_j \tag{8.9}$$

Введем обозначения:
$$F(x) = \int_c^d f(x,y)dy, \quad M_i = \sup_{x\in\Pi_i} F(x), \quad m_i = \inf_{x\in\Pi_i} F(x).$$

Тогда из 8.9 $\Rightarrow$

$$\sum_{j=1}^{m} m_{ij}\Delta y_j \leqslant m_i \leqslant M_i \leqslant \sum_{j=1}^{m} M_{ij}\Delta y_j \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 \leqslant M_i - m_i \leqslant \sum_{j=1}^{m}(M_{ij} - m_{ij})\Delta y_j \tag{8.10}$$

Домножим на Δx_i неравенство 8.10 и просуммируем по i:

$$0 \leqslant \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)\Delta x_i \leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(M_{ij} - m_{ij})m(\Pi_{ij}) =$$
$$= \overline{S}(f,\Pi) - \underline{S}(f,\Pi) \to 0 \text{ при } l(T) \to 0,$$

так как $f(x,y)$ интегрируема на прямоугольнике $\Rightarrow \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)\Delta x_i \to 0$ при $\max|\Delta x_i| \to 0 \Rightarrow F(x)$ интегрируема на $[a;b] \Rightarrow \exists$

$$\int_a^b F(x)dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy.$$

Покажем, что он равен двойному.
Интегрируем неравенство 8.9

$$\sum_{j=1}^{m} m_{ij}\Delta y_j \Delta x_i \leqslant \int_{x_{i-1}}^{x_i} dx \int_c^d f(x,y)dy \leqslant \sum_{j=1}^{m} M_{ij}\Delta y_j \Delta x_i.$$

Суммируем по i:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} m_{ij}m(\Pi_{ij}) \leqslant \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy \leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} M_{ij}m(\Pi_{ij}).$$

$$\underline{S}(f,\Pi) \leqslant \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy \leqslant \overline{S}(f,\Pi).$$

С другой стороны, из условий следует, что

$$\underline{S} \leqslant \iint\limits_{\Pi} f(x,y)dxdy \leqslant \overline{S}.$$

Разность $\overline{S} - \underline{S}$ может быть сколь угодно малой $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \iint\limits_{\Pi} f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy.$$

$\square$

Следствие. Пусть $\exists \iint\limits_{\Pi} f(x,y)dxdy$ и $\forall x \in [a;b]$ $\exists \int_c^d f(x,y)dy$ и $\forall y \in [c;d]$ $\exists \int_a^b f(x,y)dx$.

Тогда

$$\iint\limits_{\Pi} f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx.$$

Определение 59 (Элементарная область относительно оси Oy). Пусть $\phi(x)$ и $\psi(x)$ непрерывные на отрезке $[a;b]$ функции и $\phi(x) < \psi(x)$ $\forall x \in [a;b]$.

Область $\Omega = \big\{(x,y): \ \phi(x) < y < \psi(x), \ a < x < b\big\}$ называется *элементарной областью относительно оси Oy*.

Теорема 72 (Сведение двойного интеграла по элементарной области к повторному). Пусть Ω – элементарная относительно оси Oy область, функция $f(x,y)$ интегрируема на $\overline{\Omega} = \Omega \cup G\Omega$ и $\forall x \in [a;b] \ \exists \int f(x,y)dx$.

Тогда справедлива следующая формула:

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy. \tag{8.11}$$

Доказательство. Есть на фотографиях. □

Следствие. Для функции, непрерывной на $\overline{\Omega}$, справедлива формула 8.11.

Лекция 19: Продолжение

от 1 дек 10:32

8.4 Замена переменной в кратном интеграле

Примечание. Пусть G – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $F: G \to \mathbb{R}^n$ – взаимнооднозначное и непрерывно дифференцируемое отображение, которое аналитически задается при помощи непрерывно дифференцируемых функций:

$$x_1 = \phi_1(u_1, \dots, u_n), \dots, x_n = \phi_n(u_1, \dots, u_n).$$

Будем считать, что для функций ϕ_i, $i = \overline{1,n}$ выполнены следующие условия:

1. Производные $\frac{\delta \phi_i}{\delta u_j}$ ограничены в G.
2. Производные $\frac{\delta \phi_i}{\delta u_j}$ равномерно непрерывны в G.
3. Якобиан отображения удовлетворяет при $u = (u_1, \dots, u_n) \in G$ условно:

$$\big|\mathfrak{I}(u)\big| \geqslant \alpha > 0$$

(якобиан – определитель матрицы Якоби $\|\frac{\delta\phi_i}{\delta u_j}\|$)

Теорема 73 (Формула замены переменных в кратном интеграле)**.** Пусть отображение $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – открытое множество) является взаимнооднозначным и удовлетворяет условиям 1.-3.

Пусть G – измеримый компат: $G \subset \Omega$. Тогда, если функция $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ непрерывна на множестве $G' = F(G)$, то справедлива следующая формула замены переменных в кратном интеграле:

$$\int\limits_{G'} f(x)dx = \int \ldots \int\limits_{G'} f(x_1, \ldots, x_n)dx_1 dx_2 \ldots dx_n =$$

$$= \int\limits_{G} f\big(\phi_1(u), \ldots, \phi_n(u)\big)\big|\mathfrak{I}(u)\big|du,$$

$$u = (u_1, \ldots, u_n), \quad du = du_1 du_2 \ldots du_n.$$

Глава 9

Криволинейные интегралы

Примечание. Пусть на некотором множестве, содержащем кривую Γ задано непрерывная функция $R(x, y, z)$.

Если гладкая кривая Γ задана уравнением

$$\overline{r} = \overline{r}(A) \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}, \ \alpha \leqslant t \leqslant \beta,$$

то определенный интеграл

$$\int_\alpha^\beta R\big(x(t), y(t), z(t)\big) \cdot \left|\overline{r}'(t)\right| dt = \\ = \int_\alpha^\beta R\big(x(t), y(t), z(t)\big) \cdot \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\, dt.$$

Будем называть *криволинейным интегралом I-го рода* от функции $R(x, y, z)$ по кривой Γ и обозначать:

$$\boxed{\int\limits_\Gamma R(x, y, z) ds}$$

То есть

$$\int\limits_\Gamma R(x, y, z) ds = \int_\alpha^\beta R\big(x(t), y(t), z(t)\big)\left|\overline{r}'(t)\right| dt.$$

9.0.1 Свойства криволинейного интеграла I-го рода

- Свойство 1

Утверждение. Криволинейный интеграл I-го рода не зависит от параметризации кривой.

- Свойство ②

Утверждение. Криволинейный интеграл I-го рода не зависит от ориентации кривой, то есть

$$\int\limits_{\Gamma} R(x,y,z)ds = \int\limits_{\overline{\Gamma}} \overline{R}(x,y,z)ds.$$

- Свойство ③

Утверждение. Криволинейный интеграл I-го рода аддитивен относительно кривой, если $\Gamma = \bigcup\limits_{i=1}^{N} \Gamma_i$, то

$$\int\limits_{\Gamma} R(x,y,z)ds = \sum_{i=1}^{N} \int\limits_{\Gamma_i} R(x,y,z)ds.$$

Примечание. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ – область, в каждой точке которой задан вектор. Тогда говорят, что в области Ω *задано векторное поле*.

Если фиксирована декартова прямоугольная система координат, то векторное поле можно задать при помощи трех скалярных функций:

$$\overline{F}(x,y,z) = \big\{P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)\big\}.$$

Если функции P, Q, R непрерывны в области Ω, то и поле $\overline{F}(x,y,z)$ называется *непрерывным* в области Ω.

Если P, Q, R непрерывно дифференцируемы в Ω, то и векторное поле $\overline{F}$ называется непрерывно дифференцируемым в Ω.

Если можно так подобрать ДСК, что $R \equiv 0$, а P и Q не зависят от z, то векторное поле $\overline{F}$ называется *плоским*:

$$\overline{F}(x,y) = \big\{P(x,y), Q(x,y)\big\}.$$

Пусть в области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ определено непрерывное векторное поле $\overline{F}(x,y,z) = \big\{P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)\big\}$, $\overline{r} = \overline{r}(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, уравнение гладкой (кусочно гладкой) кривой $\Gamma \subset \Omega$.

Тогда

$$\int_{\alpha}^{\beta} \overline{F}\big(x(t),y(t),z(t)\big)\cdot\overline{r}'(t)dt = \int_{\alpha}^{\beta} \Big(P\big(x(t),y(t),z(t)\big)\cdot x'(t) + \\ + Q\big(x(t),y(t),z(t)\big)\cdot y'(t) + R\big(x(t),y(t),z(t)\big)\cdot z'(t)\Big)dt$$

называется *криволинейным интегралом II-го рода* от векторного поля $\overline{F}$ на кривой $\Gamma \subset \Omega$.

Тогда по определению

$$\int\limits_{\Gamma} (\overline{F}, d\overline{r}) = \int_{\alpha}^{\beta} F\big(x(t), y(t), z(t)\big)\overline{r}'(t)dt.$$