

Комплексный анализ

Данил Заблоцкий

2 марта 2024 г.

Оглавление

1	Голоморфные функции	2
1.1	Комплексная плоскость	2
1.1.1	Комплексные числа	2
1.1.2	Топология комплексной плоскости	5
1.1.3	Пути, кривые и области	8
1.2	Функции комплексного переменного	10
1.2.1	Структура функции комплексного переменного	10
	Список используемой литературы	12

Глава 1

Голоморфные функции

Лекция 1: Начало

от 15 фев 12:45

1.1 Комплексная плоскость

1.1.1 Комплексные числа

Примечание. $\mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}(x_1, y_1) + (x_2, y_2) &:= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\ (x_1, y_1)(x_2, y_2) &:= (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)\end{aligned}$$

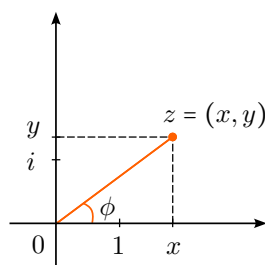


Рис. 1.1: $x = r \cos \phi$, $y = r \sin \phi$

$$\begin{aligned}z = (x, y) &= x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R} \\ \bar{z} &= x - iy\end{aligned}$$

$$(1, 0) = 1, \quad (0, 1) = i, \quad (0, 0) = 0$$

$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$$

$$\phi = \arg z, \quad \underbrace{0 \leq \arg z < 2\pi}_{\text{главное значение аргумента}}$$

$$\operatorname{Arg} z := \arg z + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$e^{i\phi} = \cos \phi + i \cdot \sin \phi, \quad \forall \phi \in \mathbb{R} \quad - \text{формула Эйлера}$$

$$z = |z|(\cos \arg z + i \cdot \sin \arg z) \quad - \text{тригонометрическая форма записи}$$

$$z = |z|e^{i\arg z} \quad - \text{показательная форма записи}$$

$$e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy}, \quad e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$$

$$z^n = |z|^n e^{in\arg z}, \quad z = re^{ir}$$

$$z^n = r^n (\cos n\phi + i \sin n\phi) \quad - \text{формула Муавра}$$

$$z^n = z_0, \quad \sqrt[n]{z_0} = \sqrt[n]{|z_0|} \cdot e^{i \frac{\arg z_0 + 2\pi k}{n}}, \quad 0 \leq k \leq n-1$$

Теорема 1 (Свойства комплексных чисел). $\forall z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ справедливы равенства:

$$1. \quad z \cdot \bar{z} = |z|^2.$$

$$7. \quad |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

$$2. \quad \overline{(z_1 + z_2)} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2.$$

$$8. \quad ||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|.$$

$$3. \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2.$$

$$9. \quad \arg(z_1 \cdot z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 \pmod{2\pi}$$

$$4. \quad \overline{\bar{z}} = z.$$

$$10. \quad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2 \pmod{2\pi}$$

$$5. \quad \bar{\bar{z}} = z \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}.$$

$$6. \quad |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|.$$

Примечание.

$$\xi = \frac{x}{1+|z|^2}, \quad \eta = \frac{y}{1+|z|^2}, \quad \zeta = \frac{|z|^2}{1+|z|^2},$$

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - \zeta = 0.$$

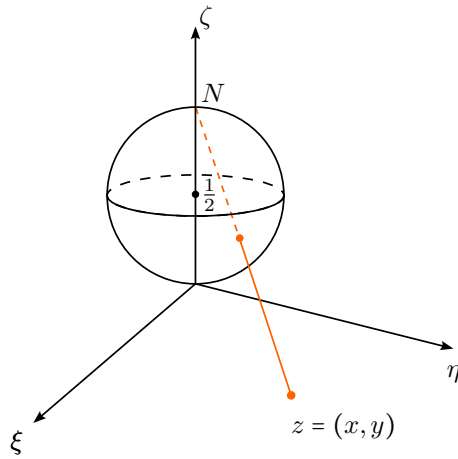


Рис. 1.2: Сфера Римана S

$$P: \mathbb{C} \xrightarrow{\text{на}} S \setminus \{N\}, \quad P(z) = (\xi, \eta, \zeta)$$

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0, \quad A, B, C, D \in \mathbb{R},$$

γ – окружность на \mathbb{C} , $P(\Upsilon)$ – окружность на S .

$$|z|^2 = x^2 + y^2 = \frac{\zeta}{1-\zeta}, \quad \begin{cases} x = \frac{\xi}{1-\zeta} \\ y = \frac{\eta}{1-\zeta} \end{cases}$$

$$A\zeta + B\xi + C\eta + D(1-\zeta) = 0,$$

$$\overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}, \quad P(\infty) := N.$$

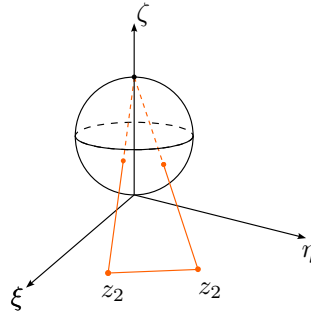
1.1.2 Топология комплексной плоскости

Примечание. $M_1, M_2 \in \mathbb{R}^3$,

$$\text{dist}(M_1, M_2) := \sqrt{(\xi_1 - \xi_2)^2 + (\eta_1 - \eta_2)^2 + (\zeta_1 - \zeta_2)^2},$$

$d(z_1, z_2) := |z_1 - z_2|$, $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ – расстояние на комплексной плоскости,

$$\rho(z_1, z_2) := \text{dist}(P(z_1), P(z_2)).$$



$$B_\varepsilon(z_0) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \varepsilon\}$$

Определение 1 (Окрестность). Множество называется *окрестностью* точки, если оно содержит шар с центром в этой точке.

Обозначение: O_z , $z \in \overline{\mathbb{C}}$.

Примечание.

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad d(z, \infty) := +\infty,$$

$$d : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{R},$$

$$d : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \overline{\mathbb{R}},$$

$$\rho : \overline{\mathbb{C}^2} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \rho(z, \infty) \in \mathbb{R}.$$

Лекция 2: Продолжение

от 22 фев 12:45

Примечание (Свойства окрестностей).

1. $\forall z \in \overline{\mathbb{C}}, \forall V \in O_z \quad z \in V$.
2. $\forall z \in \overline{\mathbb{C}}, \forall U, V \in O_z \quad U \cap V \in O_z$.
3. $\forall z \in \overline{\mathbb{C}}, \forall U \in O_z, \forall V \supset U \quad V \in O_z$.
4. $\forall z \in \overline{\mathbb{C}}, \forall V \in O_z, \exists U \in O_z : U \subset V \ \& \ \forall w \in U \quad U \in O_w$.

Определение 2 (Открытое множество). Множество называется *открытым*, если оно является окрестностью каждой своей точки.

Определение 3 (Окрестность множества). *Окрестностью множества* называется множество, являющееся окрестностью каждой точки исходного множества.

Примечание. $D \subset \overline{\mathbb{C}}, z \in \mathbb{C}$

$$\text{dist}(z, D) := \inf_{w \in D} d(z, w).$$

$$D_1, D_2 \subset \overline{\mathbb{C}}$$

$$\text{dist}(D_1, D_2) := \inf_{\substack{z \in D_1 \\ w \in D_2}} d(z, w).$$

Определение 4 (Внутренняя точка). $D \subset \overline{\mathbb{C}}, z \in D$ называется *внутренней точкой* множества D , если $D \in O_z$.

Определение 5 (Внутренность). Множество всех внутренних точек называется *внутренностью* и обозначается:

$$\text{int}D.$$

Определение 6 (Предельная точка множества). Точка называется *предельной точкой множества*, если в любой ее окрестности есть точки множества, отличные от данной.

Замечание. Точка является предельной точкой множества на расширенной комплексной плоскости \Leftrightarrow любая ее окрестность содержит бесконечное число точек данного множества.

Определение 7 (Окрестность бесконечности). $V \subset \overline{\mathbb{C}}$ является *окрестностью бесконечности*, если $\exists \varepsilon > 0 : \{z \in \overline{\mathbb{C}} : |z| > \varepsilon\} \subset V$.

Определение 8 (Точка прикосновения, замыкание). Точка $z \in \overline{\mathbb{C}}$ называется *точкой прикосновения множества* D , если $\forall V \in O_z \quad V \cap D \neq \emptyset$.

Множество всех точек прикосновения называется *замыканием* и обозначается:

$$\text{cl}D.$$

Определение 9 (Замкнутое множество). Множество называется *замкнутым*, если его дополнение открыто.

Определение 10 (Граничная точка). Точка называется *граничной точкой множества*, если в любой ее окрестности есть как точки множества, так и точки его дополнения.

Обозначение: ∂D .

Примечание. Множество всех замкнутых подмножеств расширенной комплексной плоскости:

$$C\bar{\mathbb{C}}.$$

Определение 11 (Компактное множество). Множество $\bar{\mathbb{C}}$ называется *компактным*, если любое его открытое покрытие имеет конечное подпокрытие.

Примечание. v – покрытие множества D , если $D \subset \bigcup_{V \in v} V$, $v \subset \underbrace{\mathcal{P}(\bar{\mathbb{C}})}_{2^{\bar{\mathbb{C}}}}$

Теорема 2 (Критерий компактности (первый)). Подмножество \mathbb{C} компактно \Leftrightarrow оно замкнуто и ограничено.

Примечание. Множество ограничено, если оно содержится в некотором шаре.

Замечание. $\bar{\mathbb{C}}$ – компактно.

Определение 12. $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ сходится к $z \in \mathbb{C}$, если $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \quad |z_n - z| < \varepsilon$.

$$d(z_n, z) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

$z_n \rightarrow \infty$, если $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = \pm \infty$,

$$z = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n, \quad z_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} z.$$

Замечание. $z_n \rightarrow z$ в $\mathbb{C} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Re} z_n \rightarrow \operatorname{Re} z \\ \operatorname{Im} z_n \rightarrow \operatorname{Im} z \end{cases}$ в \mathbb{R} .

$$|z_n - z| = \sqrt{(\operatorname{Re} z_n - \operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z_n - \operatorname{Im} z)^2} \geq |\operatorname{Re} z_n - \operatorname{Re} z|,$$

$$\operatorname{Re}(z_1 \pm z_2) = \operatorname{Re} z_1 \pm \operatorname{Re} z_2.$$

Теорема 3 (Критерий Коши). Последовательность $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ сходится $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq n_0$

$$|z_n - z_m| < \varepsilon.$$

Теорема 4 (Критерий Коши (в $\overline{\mathbb{C}}$)). Последовательность $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ сходится $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq n_0$

$$\rho(z_n, z_m) < \varepsilon.$$

Примечание. $z_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} z \Leftrightarrow \rho(z_n, z) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$

Теорема 5 (Критерий компактности (второй)). $D \subset \overline{\mathbb{C}}, \forall \{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset D$
 $\exists \{z_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} :$

$$z_{n_k} \rightarrow z \in D.$$

Примечание. $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$

$$S_n := \sum_{k=1}^n z_k, \quad \sum_{n=1}^{\infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n.$$

Определение 13 (Числовой ряд). Числовым рядом называется формальная сумма членов

Определение 14 (Абсолютно сходящийся числовой ряд). Числовой ряд называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$.

Теорема 6 (Критерий Коши сходимости ряда). Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ сходится $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists m \in \mathbb{N} : \forall n \geq m \forall k \in \mathbb{N}$

$$\underbrace{|z_{n+1} + z_{n+2} + \dots + z_{n+k}|}_{|S_{n+k} - S_n|} < \varepsilon.$$

Следствие. Если ряд сходится, то его общий член стремится к нулю.

Следствие. Каждый абсолютно сходящийся числовой ряд – сходится.

1.1.3 Пути, кривые и области

Определение 15 (Путь). $\gamma : [a; b] \rightarrow \mathbb{C}$, γ – непрерывное отображение $[a; b]$ в \mathbb{C} – это *путь*.

Пример. $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Определение 16 (Эквивалентные пути).

$$\begin{aligned}\gamma_1 : [a_1; b_1] &\longrightarrow \mathbb{C}, \\ \gamma_2 : [a_2; b_2] &\longrightarrow \mathbb{C}.\end{aligned}$$

$\gamma_1 \sim \gamma_2$, если \exists возрастающая непрерывная функция $\phi : [a_1; b_1] \longrightarrow [a_2; b_2]$:

$$\gamma_1(t) = \gamma_2(\phi(t)), \quad \forall t \in [a_1, b_1].$$

Пример.

$$\begin{aligned}\gamma_1(t) &= t, & 0 \leq t \leq 1 \\ \gamma_2(t) &= \sin t, & 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \\ \gamma_3(t) &= \sin t, & 0 \leq t \leq \pi \\ \gamma_4(t) &= \cos t, & 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}\end{aligned},$$

$$\phi(t) = \arcsin t, \quad \gamma_1(t) = \gamma_2(\phi(t)).$$

Определение 17 (Жорданов путь). Путь называется *жордановым*, если он является взаимно однозначной функцией.

Лемма 1. Для каждого жорданова пути $\exists \delta > 0$: для любой не кольцевой точки пути окружность с центром в этой точке с радиусом δ пересекает путь не более чем в двух точках (δ – стандартный радиус жорданова пути).

Определение 18 (Кривая). *Кривой* называется класс эквивалентных между собой путей.

Лекция 3: Продолжение

от 29 фев 12:45

Определение 19 (Связное множество). $A \subset \overline{\mathbb{C}}$ называется *связным*, если $\nexists U, V \in \mathcal{O}_P \overline{\mathbb{C}} : U \cap A \neq \emptyset, U \cap V = \emptyset$.

$$\mathcal{O}_P \overline{\mathbb{C}} - \text{совокупность всех открытых множеств}$$

Пример. $A = \{(0, y) : -1 \leq y \leq 1\} \cup \{(x, \sin \frac{1}{x}) : 0 < x \leq 1\}$ – связное.

Определение 20 (Линейно связное множество). Множество называется *линейно связным*, если любые его точки можно соединить путем, значения которого лежат в этом множестве.

Замечание. В пространстве \mathbb{R}^n , и в частности $\overline{\mathbb{C}}$, любое открытое множество связно \Leftrightarrow оно линейно связно.

Определение 21 (Область). Областью в $\overline{\mathbb{C}}$ называется любое непустое открытое связное множество.

Определение 22 (Замкнутая область). Замкнутой областью будем называть замыкание области.

1.2 Функции комплексного переменного

1.2.1 Структура функции комплексного переменного

Примечание. $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$

$dom f$ – область определения функции
 $im f$ – область значения функции

Определение 23 (Предел отображения). $D \subset dom f$, $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ – предельная точка D . Тогда $w_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ называется *пределом отображения* f ,

$$w_0 := \lim_{D \ni z \rightarrow z_0} f(z), \text{ если } \forall V \in O_{w_0} \exists U \in O_{z_0} : f(\dot{U} \cap D) \subset V,$$

$$U \in O_{z_0}, \quad \dot{U} = U \setminus \{z_0\}.$$

Примечание. В случае, когда $z_0, w_0 \in \mathbb{C}$ следует, что $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall z \in D$

$$0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - w_0| < \varepsilon.$$

Определение 24 (Непрерывная функция в точке). Функция f называется *непрерывной в точке* $z_0 \in \mathbb{C}$, если:

1. $z_0 \in dom f$.
2. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall z \in D$

$$0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - w_0| < \varepsilon.$$

Определение 25 (Непрерывная функция на множестве). Функция $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ непрерывна на $D \subset \mathbb{C}$, если

1. $D \subset \text{dom} f$.
2. $\forall z_0 \in D \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall z \in D$

$$|z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon.$$

Примечание (Функция Дирихле). $D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$, непрерывна на \mathbb{Q} , непрерывна на $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Замечание. Если множество является открытым или совпадает с областью определения функции, то непрерывность функции на этом множестве равносильно ее непрерывности в каждой точке.

$$f_n : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} (n \in \mathbb{N}), \quad D := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \text{dom} f_n.$$

Определение 26. $A \subset D$, $f : A \rightarrow \mathbb{C}$, $f_n \rightrightarrows f$ на A , если $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall z \in A \forall n \geq n_0$

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon.$$

$$(\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \sup_{z \in A} |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon, |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon).$$

Теорема 7 (Вейерштрасса). Если $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset C(A)$, $f_n \rightrightarrows f$, то $f \in C(A)$.

Определение 27 (Функциональный ряд). Функциональным рядом называется формальная сумма членов последовательности функции.

$$\text{Обозначение: } \sum_{n=1}^{\infty} f_n.$$

Определение 28 (Числовой ряд). $\forall z \in D \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ называется *числовым рядом* $\{f_n(z)\}_{n \in \mathbb{N}}$.

$$S_n := \sum_{k=1}^n f_k - \text{частичная сумма.}$$

Теорема 8 (Признак Вейерштрасса). $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ таков, что $\forall n \in \mathbb{N} \forall z \in A |f_n| \leq c_n$, причем $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ равномерно абсолютно сходится на A .

Теорема 9 (Критерий Коши (равномерная сходимость)). $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ равномерно сходится на $A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq n_0$

$$\sup_{z \in A} |f_n(z) - f_m(z)| < \varepsilon.$$

Определение 29 (Линейная функция). Функция $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ называется *линейной*, если $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C} \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

$$f(\alpha z_1 + \beta z_2) = \alpha f(z_1) + \beta f(z_2).$$

Замечание. Функция $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ является линейной $\Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{C} : \forall z \in \mathbb{C}$

$$f(z) = az$$

Литература

- [1] Шабат – «Введение в комплексный анализ, 1976» (том 1)
- [2] Привалов – «Введение в ТФКП, 1967»
- [3] Бицадзе – «Основы теории аналитических функций комплексного переменного, 1984»
- [4] Волковыский, Лунц, Араманович – «Сборник задач по ТФКП», 1975»
- [5] Гилев В.М. – «Основы комплексного анализа. Ч.1», 2000»
- [6] Исапенко К.А. – «Комплексный анализ в примерах и упражнениях (Ч.1, 2017, Ч.2, 2018)»
- [7] Мещеряков Е.А., Чемеркин А.А. – «Комплексный анализ. Практикум»
- [8] Боярчук А.К. – «Справочное пособие по высшей математике» (том 4)