Дифференциальные уравнения

Основано на лекциях Макарова С.В.
Конспект написан Заблоцким Данилом

Весенний семестр 2024

Эти записи не одобряются лекторами, и я вношу в них изменения (часто существенно) после лекций. Они далеко не точно отражают то, что на самом деле читалось, и, в частности, все ошибки почти наверняка мои.

Оглавление

Глава 1

Системы ДУ 1-го порядка

Лекция 1: Начало

от 20 фев 10:30

Рассмотрим систему 1-го порядка из m уравнений с n неизвестными:

$$(1)\quad \begin{cases} F_1(t, x_1, \ldots, x_n, \ldots, \dot{x_n}) = 0 \\ \vdots \\ F_m(t, x_1, \ldots, x_n, \dot{x_1}, \ldots, \dot{x_n}) = 0 \end{cases}$$

Далее $m = n$.

Определение 1 (Нормальная система ДУ 1-го порядка)**.** Систему ДУ 1-го порядка назовем *нормальной*, если она имеет вид:

$$(2)\quad \begin{cases} \dot{x_1} = f_1(t, x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ \dot{x_n} = f_n(t, x_1, \ldots, x_n) \end{cases} \qquad \text{или} \qquad \begin{aligned} &\dot{\overline{x}} = \overline{f}(t, \overline{x}), \\ &\dot{\overline{x}} = \left(\tfrac{dx_1}{dt} \ldots \tfrac{dx_n}{dt}\right)^T. \end{aligned} \quad (2')$$

Определение 2 (Решение системы ДУ 1-го порядка)**.** *Решением* системы ДУ 1-го порядка $\overline{x}(t) = \phi(t) = \left(\phi_1(t) \ldots \phi_n(t)\right)^T$ называется набор дифференциальных функций, обращающих уравнение системы в верное тождество.

Определение 3 (Задача Коши для системы ДУ 1-го порядка). *Задачей Коши* для системы ДУ 1-го порядка называется задача отыскания решения системы (2) или (2′), удовлетворяющего условиям:

$$(3)\ \begin{cases} x_1(t_0) = x_1^\circ \\ \vdots \\ x_n(t_0) = x_n^\circ \end{cases} \qquad \text{или} \quad \overline{x}(t_0) = \overline{x^\circ}\ (3')$$

Теорема 1 ($\exists$ и ! решения задачи Коши для системы). Пусть $\overline{f}(t, \overline{x})$ определена и непрерывна в области $D \subset R^{n+1}$ и удовлетворяет условию Липшица по переменным $x_1, \ldots, x_n$ (более сильное условие – частные производные $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ непрерыные в области $D,\ i, j = \overline{1, n}$).

Тогда решение задачи $(2), (3)$ или $(2'), (3')$ $\exists$ и ! в интервале $[t_0 - h; t_0 + h)$, где $h = r \setminus \sqrt{M^2 + 1}$, r – радиус шара B_r с центром $(t_0, \overline{x^\circ})$, целиком лежащего в D, $M = \sup\limits_{B_r} \left\| \overline{f}(t, \overline{x}) \right\|$.

Определение 4 (Линейная система). Система ДУ 1-го порядка называется *линейной*, если она имеет вид:

$$(4)\ \begin{cases} \dot{x_1} = a_{11}(t)x_1 + \ldots + a_{1n}(t)x_n + g_1(t) \\ \vdots \\ \dot{x_n} = a_{n1}(t)x_1 + \ldots + a_{nn}(t)x_n + g_n(t) \end{cases}$$

или

$$(4') \quad \begin{array}{l} \dot{\overline{x}} = A(t) \cdot \overline{x} + \overline{g}(t) \\ A(t) = \big(a_{ij}(t)\big),\ \overline{g}(t) = \big(g(t)\big),\ i, j = \overline{1, n} \end{array}$$

Определение 5 (Однородные системы). Система (4) или (4′) называется *однородной*, если $\overline{g}(t) = 0$, то есть

$$(5)\ \overline{x'} = A(t) \cdot \overline{x}.$$

Если матрица $A(t)$ имеет пост. элементы, то $A(t) = A$.

Теорема 2 (О продолжаемости решения системы на интервале)**.** Пусть $a_{ij}(t)$ и $g_j(t)$ непрерывны на $(\alpha;\beta)$, $i,j=\overline{1,n}$. Тогда решение задачи Коши $(4'),(3')$ существует и единственно и продолжено на $(\alpha;\beta)$, $\big[-\infty\leqslant\alpha<\beta\leqslant+\infty\ (\alpha;\beta)\big]$.

Определение 6 (ЛЗ система)**.** Система функций $\overline{x}^1,\dots,\overline{x}^n$ называется *ЛЗ* на $(\alpha;\beta)$, если $\exists$ набор действительных чисел $C_1,\dots,C_n$, не всех равных нулю, такой, что

$$(6)\ C_1\overline{x}^1+\ldots+C_n\overline{x}^n=0 \text{ на } (\alpha;\beta).$$

Определение 7 (ЛНЗ система)**.** Если в равенстве (6) $C_1=C_2=\ldots=C_n=0$, то система функций $\overline{x}^1,\dots,\overline{x}^n$ ЛНЗ.

Определение 8 (Фундаментальная система)**.** Любая ЛНЗ система решений $\overline{x}^1,\dots,\overline{x}^n$ называется *фундаментальной (ФСР)*.

Определение 9 (Фундаментальная матрица)**.** Матрица, столбцы которой являются ФСР, называется *фундаментальной матрицей*,

$$\Phi(t)=\begin{pmatrix} x_1^1 & \cdots & x_1^n\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ x_n^1 & \cdots & x_n^n\end{pmatrix},\quad \dot{\overline{x}}=A(t)\overline{x}.$$

Определение 10 (Определитель Вронского)**.** *Определителем Вронского* называется определитель фундаментальной матрицы,

$$W(t)=\det\Phi(t).$$

Теорема 3. Если система функций $\overline{x}^1,\dots,\overline{x}^n$ ЛЗ, то $W(t)=0$.

Следствие 1. Если $W_{\overline{x}^1,\dots,\overline{x}^n}(t)\neq0$, то $\overline{x}^1,\dots,\overline{x}^n$ ЛНЗ система функций.

Теорема 4. Пусть $\exists t_0\in(\alpha;\beta):\ W(t_0)=0$ и $a_{ij}(t)$ из (5) непрерывна на $(\alpha;\beta)$. Тогда $W(t)=0$ на $(\alpha;\beta)$ и $\overline{x}^1,\dots,\overline{x}^n$ ЛЗ.

Теорема 5 (Формула Лиувиш-Остроградского)**.** Определитель Вронского для матрицы, составленной из решений (5), находятся по формуле Л-О:

$$e^{\int_{t_0}^{t} TrA(s)ds} W(t_0) = W(t),$$

$$TrA(t) = a_{11}(t) + \ldots + a_{nn}(t).$$

Доказательство. Для произвольного x^j:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1^j \\ \vdots \\ \dot{x}_i^j \\ \vdots \\ \dot{x}_n^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1}(t) & \cdots & a_{in}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^j \\ \vdots \\ x_i^j \\ \vdots \\ x_n^j \end{pmatrix},$$

$$\dot{W}(t) = \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} x_1^1 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{i-1}^1 & \cdots & x_{i-1}^n \\ \dot{x}_i^1 & \cdots & \dot{x}_i^n \\ x_{i+1}^1 & \cdots & x_{i+1}^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n^1 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} =$$

$$\dot{x}_i^j = a_{i1}(t)x_1^j + a_{i2}(t)x_2^j + \ldots + a_{in}(t)x_n^j = \\ = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k^j,\ i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,n},$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} x_1^1 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^n a_{ik}x_k^1 & \cdots & \sum_{k=1}^n a_{ik}x_k^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n^1 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{ii}x_j^1 & a_{ii}x_i^2 & \cdots & a_{ii}x_i^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} =$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k^1 - a_{i1}x_1^1 - a_{i2}x_2^1 - \ldots$$

$$\ldots - a_{i1-1}x_{i-1}^1 - a_{ii+1}x_{i+1}^1 - \ldots - a_{in}x_n^1 = a_{ii}x_i^1,$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_{ii}W(t) = W(t)\cdot TrA(t).$$

На $[t_0; t]$:

$$\int_{t_0}^{t} \frac{\dot{W}(s)}{W(s)}ds = \int_{t_0}^{t} TrA(t)dt = \ln\left|W(t)\right| - \ln\left|W(t_0)\right| = \int_{t_0}^{t} Tr(A)(s)ds \implies$$

$$\implies W(t) = W(t_0)\cdot \exp\left(\int_{t_0}^{t} TrA(s)ds\right).$$

□

Следствие 2. Если $\exists t_0 \in (\alpha;\beta)\ :\ W(t_0) = 0 \implies W(t) = 0$ для $\forall t \in (\alpha;\beta)$.

Теорема 6 (О структуре общего решения однородной системы ДУ)**.** Пусть $\overline{x}^1(t), \overline{x}^2(t), \ldots, \overline{x}^n(t)$ – до. е. р., тогда:

$$\overline{x}_{00} = \sum_{k=1}^{n} C_k \overline{x}^k(t),$$

C_k – произвольная постоянная.

Лекция 2: Продолжение

от 5 мар 10:30

1.1 Линейные однородные системы с постоянными коэффициентами

$$\begin{pmatrix} P_{m_1}^1(t) \\ \vdots \\ P_{m_n}^1(t) \end{pmatrix} \cdot e^{\lambda t}.$$

Примечание (Случай 1)**.** Пусть $\lambda_i \in R,\ i = \overline{1,r}$ и $\lambda_i \neq \lambda_j\ (i = j)$. Тогда $\overline{x}_j = \overline{v}_i e^{\lambda_i t}$ является решением однородной системы $\dot{\overline{x}} = A\overline{x}$,

$$\nabla \underbrace{\lambda_i \overline{v}_i e^{\lambda_i t}}_{\dot{\overline{x}}_i} = A\overline{v}_i e^{\lambda_i t} = A\overline{x}_j \implies x_{00} = \sum_{k=1}^{n} C_k \overline{v}_k e^{\lambda_k t}.$$

Замечание. $\lambda_i \in R$ $(i = \overline{1,n})$ и $\lambda_i = \lambda_j$ $(i \neq j)$; λ_i дают n ЛНЗ собств. векторов.

Примечание (Случай 2). Пусть $\lambda_1 = a + bi$, $\overline{v}_1(t) = \overline{v}_1^1(t) + i\overline{v}_1^2(t)$ – собств. вектор, отвечающий λ_1. Тогда $\lambda_2 = a - b_i$ и $\overline{v}_2(t) = \overline{v}_1^1(t) - i\overline{v}_1^2(t)$ – собств. вектор отв. λ_2.

Сравнить $A\overline{v}_1 = \lambda_1\overline{v}_1$ и $A\overline{v}_2 = \lambda_2\overline{v}_2$.

Выберем 2 действ. $(\overline{x}_1(t) = \overline{v}_1(t)e^{\lambda_1 t}$; $\overline{x}_2(t) = \overline{v}_2(t)e^{\lambda_2 t})$,

$$\overline{x}_1^R = \frac{1}{2}\big(\overline{x}_1(t) + \overline{x}_2(t)\big) = \operatorname{Re}\overline{x}_1(t),$$

$$\overline{x}_2^R = \frac{1}{2i}\big(\overline{x}_1(t) - \overline{x}_2(t)\big) = \operatorname{Im}\overline{x}_1(t).$$

Теорема 7. Решение системы $\dot{\overline{x}} = Ax$ имеет вид:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{m_1}^1(t) \\ \vdots \\ P_{m_n}^n(t) \end{pmatrix} e^{\lambda_1 t} + \ldots + \begin{pmatrix} P_{1_1}^1(t) \\ \vdots \\ P_{1_n}^n(t) \end{pmatrix} e^{\lambda_s t} \qquad (*)$$

$\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ – собственные числа A. Степени множеств в i-ом столбце на 1 меньше, чем макс. размернок ШК, соотв. λ_i.

Формула $(*)$ включает n производных постоянных и выражает общее решение системы,

$$e^{\lambda t}\begin{pmatrix} P_{k-m}^1(t) \\ \vdots \\ P_{k-m}^n(t) \end{pmatrix}.$$

1.2 Устойчивость решения систем ДУ

$$(1)\ \begin{cases} \dot{x} = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \qquad f \in C,\ f \in \operatorname{Lip} x \text{ или } f \in C^1.$$

Определение 11 (Устойчивое по Ляпунову решение). Решение $\phi(t)$ задачи (1) называется *устойчивым по Ляпунову*, если $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0$: $\forall x(t)$ – решение (1) : $\big|x(t_0) - \phi(t_0)\big| < \delta$ выполняется неравенство $\big|x(t) - \phi(t)\big| < \varepsilon$ для $\forall t \geqslant t_0$.

Определение 12 (Устойчивое решение). Решение $\phi(t)$ задачи (1) называется *устойчивым*, если $\exists\varepsilon > 0$: $\forall\delta > 0\ \exists\widetilde{x}(t)$ – решение (1): $\big|\widetilde{x}(t_0) - \phi(t_0)\big| < \delta$ и $\exists t_1 > t_0$ выполняется неравенство $\big|\widetilde{x}(t_1) - \phi(t_1)\big| \geqslant \varepsilon$.

Определение 13 (Асимптотическое решение)**.** Решение $\phi(t)$ задачи (1) называется *асимптотическим*, если:

1. Оно устойчиво по Ляпунову.
2. $\exists\delta > 0 : \ \forall x(t)$ решений (1) : $\big|x(t_0) - \phi(t_0)\big| < \delta$ выполняется

$$\lim_{t\to\infty}\big|x(t) - \phi(t)\big| = 0.$$

Замечание. Из неограниченности решений не следует неустойчивость,

$$\begin{cases} \dot{x} + x = t + 1 \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

$$\dot{x} + x = 0, \ -\frac{dx}{x} = dt, \ x_{00} = Ce^{-t}, \ \frac{dx}{x} = -x, \ \ln(x) = -t + \ln C.$$

$$\begin{aligned} &x_{OH} = C(t)e^{-t} \\ &\dot{x}_{OH} = C'(t)e^{-t} - C(t)e^{-t} \\ &C'(t)e^{-t} = t + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &C'(t) = (t+1)e^{-t} \\ &C(t) = \int e^t dt + \int te^t dt = e^t + te^t - \int e^t dt = te^t + C \end{aligned}$$

$$x_{OH} = (te^t + C)e^{-t} = t + Ce^{-t}.$$

Найдем $\phi(t) : \ \phi(0) = o + C \cdot 1 = 0 \implies C = 0 \implies \phi(t) = t.$
Исследуем на устойчивость:

$$\begin{aligned} &x(0) = x_0 \\ &x(t) = t + x_0 e^{-t} \\ &x(0) = \alpha \\ &x(0) = 0 + C \cdot 1 = \alpha \implies C = \alpha \end{aligned}$$

$x(t) = t + \alpha e^{-t}$,

$$\lim_{t\to\infty}\big|x(t) - \phi(t)\big| = \lim_{t\to\infty}|\alpha e^{-t}| = 0 \implies$$

$\implies \phi(t)$ асимптотически устойчива, хотя и неограничена.

Замечание. Из ограниченности решений не следует устойчивость (f – лин., то ограниченность $\equiv$ устойчивость).

$$(2) \begin{cases} \dot{x} = \sin^2 x \\ x(0) = 0 \end{cases} \qquad (\phi(t) \equiv 0 \text{ является решением (2)}, \ \phi(t) - \text{устойчива}).$$

1.3 Устойчивость решений линейных автономных систем

(1) $\dot{\overline{x}} = Ax,\ A$ – постоянная матрица $n \times n$.
(2) $\det(A - \lambda E) = 0$ – хар-ое уравнение.

$$\overline{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ – нулевое решение.}$$

Определение 14 (Устойчивое по Ляпунову нулевое решение)**.** Нулевое решение $\overline{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ называется *устойчивым по Ляпунову*, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0:\ \forall \overline{x}(t):\ \left\|\overline{x}(t_0) - \overline{x}_0\right\| < \delta$ имеем $\left\|\overline{x}(t) - \overline{x}_0\right\| < \varepsilon\ \forall t \geqslant t_0$.

Теорема 8.

1. Если все корни $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ хар-го уравнения (2) имеют отриц. действительные части ($\operatorname{Re} \lambda_k < 0,\ k = \overline{1, n}$), то нулевое решение системы (1) *асимптотически*.

2. Если $\exists$ хотя бы один кореньт хар-го уравнения (2) с положительной действительной частью ($\exists m : \operatorname{Re}(\lambda_m) > 0$), то нулевое решение системы (1) *неустойчиво*.

3. Если $\exists$ корни хар-го уравнения (2) с нулевой, причем размерность соответствующих им клеток в ШФ матрицы A равна 1, то нулевое решение системы (1) устойчиво, но не асимптотически устойчиво (предполагается, что все остальные корни имеют отрицательные действительные части).

4. Если $\exists$ корни хар-го уравнения (2) с нулевой действительной частью, хотя бы одному из j-ых отвечает клетка размерности $\geqslant 2$ в ШФ матрицы A, то решение системы (1) устойчиво.

Доказательство.

1. $\overline{x}(t) = e^{\lambda_k t} \cdot \left(P^1_{k-1}(t) P^2_{k-1} \ldots P^n_{k-1}(t)\right)^T,\ \lambda_k \in R$.

2. $\overline{x}(t) = e^{\lambda_k t}\begin{pmatrix} P_{k-1}^1(t) \\ \vdots \\ P_{k-1}^n(t) \end{pmatrix}\cos\beta t + e^{\lambda_k t}\begin{pmatrix} Q_{k-1}^1 \\ \vdots \\ Q_{k-1}^n(t) \end{pmatrix}\sin\beta t,\ \lambda_k \in \mathbb{C},$

- $t \to \infty,\ e^{\lambda_k t} \to \overline{0}$;
- $\begin{matrix} e^{\lambda_k t} \to \infty & \lambda_k < 0 \\ e^{\lambda_k t} \to +\infty & \lambda_k > 0 \end{matrix}$;
- $\operatorname{Re}\lambda_k = 0 \implies e^{\lambda_k t} = 1 \implies \begin{pmatrix} P_{k-1}^1(t) \\ \vdots \\ P_{k-1}^n(t) \end{pmatrix} - const.$

□

Лекция 3: Продолжение

от 19 мар 10:30

1.4 Устойчивость по первому приближению

Теорема 9 (Ляпунова). (3) $\dot{\overline{x}} = \overline{f}(\overline{x}, t)$. Пусть $\overline{f}(\overline{x}, t) = A\overline{x} + \overline{\phi}(\overline{x}, t)$.
(4) $\left|\overline{\phi}(\overline{x}, t)\right| < j(\overline{x}) \cdot |\overline{x}|,\ j(\overline{x}) \to 0$ при $|\overline{x}| \to 0$.

$$\|\cdot\| \sim |\cdot|,\ |\overline{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}.$$

Тогда:

1. Если все корни $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ уравнения (3) имеют отриц. действ. части ($\operatorname{Re}\lambda_k < 0,\ k = \overline{1, n}$), то нулевое решение системы (3) асимптотически устойчиво.
2. Если $\exists$ хотя бы один корень хар-го уравнения (2) с полож. действ. частью ($\exists m :\ \operatorname{Re}\lambda_m > 0$), то нулевое решение системы (3) неустойчиво.

1.5 Исследование отрицательности действительных частей корней хар-го уравнения

(5) $a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1} + a_n = 0$ – хар. уравнение, $a_k \in R,\ h = \overline{0, n},\ a_0 \neq 0$.

Составим матрицу Гурвица:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \cdots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

Теорема 10 (Необходимое условие отрицательности действительных частей всех корней). $\lambda_i,\ i = \overline{1, n}$ является $a_k > 0,\ k = \overline{0, n}$.

Для $n \leqslant 2$ это условие является и достаточным.

Теорема 11 (Достаточное условие отрицательности всех действительных частей корней характеристического уравнения (5)). Если все главные миноры матрицы Гурвица больше 0, то все действительные части корней хар. ур. (5) отрицательны.

Критерий 1 (Рауса-Гурвица). Пусть:

1. $a_k > 0,\ k = \overline{0, n}$ в уравнении (5).
2. Все главные миноры матрицы Гурвица положительные, то есть $\triangle_1 = a_1 > 0,\ \triangle_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} > 0,\ \triangle_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix} > 0,\ \ldots,\ \triangle_n = a_n \cdot \triangle_{n-1} > 0,$

   $\operatorname{Re} \lambda_k < 0,\ k = \overline{1, n}$.

1.6 Фазовый портрет линейной автономной системы на плоскости

Рассмотрим систему на плоскости:

$$\dot{\overline{x}} = \overline{f}(\overline{x}),\ \overline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

$$(6)\ \begin{cases} \dot{x} = f_1(x, y) \\ \dot{y} = f_2(x, y) \end{cases} \text{– нелинейная,}$$

$$(7)\ \begin{cases} \dot{x} = ax + by \\ \dot{y} = cx + dy \end{cases} \text{ – линейная, } \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

Определение 15 (Траектория на дуговой плоскости)**.** *Траекторией (или дуговой кривой) на дуговой плоскости* (плоскость переменных x, y) называется график решения, состоящий из точек (x, y), где $x = x(t),\ y = y(t)$ в момент времени t.

Определение 16 (Фазовый портрет)**.** *Фазовый портрет* – совокупность всех фазовых кривых.

Свойства траекторий:

1. Не пересекаются.

2. Различным решениям системы может соответствовать одна и та же траектория.

3. *Особой точкой* системы $\begin{cases} \dot{x} = f_1(x, y) \\ \dot{y} = f_2(x, y) \end{cases}$ называется точка, координаты которой удовлетворяют уравнению $\begin{cases} f_1(x, y) = 0 \\ f_2(x, y) = 0 \end{cases}$

   Особая точка – траектория системы (так как является решением).

   Замечание. Траектории могут неограниченно приближаться к особой точке, никогда не входя в нее.

4. Пусть $\big(x_1(t), y_1(t)\big)$ и $\big(x_2(t), y_2(t)\big)$ – две траектории, и $\exists t_1, t_2$:

$$\begin{cases} x_1(t_1) = x_2(t_2) \\ y_1(t_1) = y_2(t_2) \end{cases},$$

   тогда эти траектории совпадают.

5. Если $\exists t_1, t_2$:

$$\begin{cases} x(t_1) = x(t_2) \\ y(t_1) = y(t_2) \end{cases},$$

   то траектория $\big(x(t), y(t)\big)$ – замкнутая кривая или периодическая.

Теорема 12. Траектории автономной системы либо точка, либо период. кривая, либо кривая без самопересечений.

Лекция 4: Продолжение

от 28 мар 10:30

1.7 Фазовый портрет нелинейной системы

Определение 17 (Предельный цикл системы). *Предельным циклом системы* называется замкнутая фазовая кривая, у которой существует окружность, целиком заполненная траекториями, точки на траектории движутся к этой замкнутой привой при $t \to +\infty$ или $t \to -\infty$.

Примечание. Устойчивый предельный цикл содержит неустойчивый фокус. Неустойчивый предельный цикл содержит устойчивый фокус.

1.7.1 Исследование устойчивости с помощью функций Ляпунова

Рассмотрим нелинейную систему:

$$(1)\ \dot{\overline{x}} = \overline{F}(t, \overline{x}),\ F = \begin{pmatrix} f' \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix},\ \overline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} f_i,$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_k} \in C(D),\ t \geqslant t_0,\ v(t, \overline{x}) \in C(R^n).$$

Определение 18. Производная $v(t, \overline{x})$ в силу системы (1) определяется по формуле:

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(1)} = \frac{\partial v}{\partial k} + \frac{\partial v}{\partial x_1} f_1 + \frac{\partial v}{\partial x_2} f_2 + \ldots + \frac{\partial v}{\partial x_k} f_n = \frac{\partial v}{\partial k} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} f_i.$$

Рассмотрим автономную систему:

$$(2)\ \dot{\overline{x}} = F(\overline{x}).$$

Будем предполагать, что $F(\overline{0}) = \overline{0}$, $\overline{0}$ – особая точка (2).

Определение 19 (Функция Ляпунова). Функция $V(x) = V(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, определенная на шаре $\|\overline{x}\| < R$, называется *функцией Ляпунова*, если:

1. $V(\overline{x}) \in C^1$ $(\|\overline{x}\| < R)$.
2. $V(\overline{x}) \geqslant 0$ в $\|\overline{x}\| < R$; $V(\overline{x}) = 0 \iff \overline{x} = \overline{0}$.
3. $\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(1)} = \frac{\partial V}{\partial x_1} f_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} f_2 + \ldots + \frac{\partial V}{\partial x_n} f_n = (\operatorname{grad} V,\ F) \leqslant 0$ в $0 < \|\overline{x}\| < R$.

Теорема 13 (Ляпунова об устойчивости). Если $\exists$ функция Ляпунова для системы (2), то нулевое решение устойчиво по Ляпунову.

Теорема 14 (Ляпунова об асимптотической устойчивости). Если $\exists$ функция $V(\overline{x}) = V(x_1, \ldots, x_n)$, опр. на шаре $\|\overline{x}\| < R$, со свойствами:

1. $V(\overline{x}) \in C^1$ $(\|\overline{x}\| < R)$.
2. $V(\overline{x}) \geqslant 0$ в $\|\overline{x}\| < R$, $V(\overline{x}) = 0 \iff \overline{x} = \overline{0}$.
3. $\frac{dV}{dt}\Big|_{(1)} = (\operatorname{grad} V, F) \leqslant -w(x) < 0$ в $0 < \|\overline{x}\| < R$, $w(x) \in C(\|\overline{x}\| < R)$.

Тогда нулевое решение (2) асимптотически устойчиво.

Теорема 15 (Ляпунова о неустойчивости). Если $\exists$ функция $V(\overline{x}) = V(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ опр. на шаре $\|\overline{x}\| < R$, со свойствами:

1. $V(\overline{x}) \in C^1$ $(\|\overline{x}\| < R)$.
2. $V(\overline{x}) \geqslant 0$ в $\|\overline{x}\| < R$; $V(\overline{x}) = 0 \iff \overline{x} = \overline{0}$.
3. $\frac{dV}{dt}\Big|_{(2)} = (\operatorname{grad} V, F) \geqslant w(x) > 0$ в $0 < \|\overline{x}\| < R$, $t \geqslant t_0$, $w(x) \in C$ $(\|\overline{x}\| < R)$.

Тогда нулевое решение (2) неустойчиво.

Теорема 16 (Четаева о неустойчивости). Если $\exists$ область D, причем $\overline{0} \in \partial D$ и $\exists$ функция $V(\overline{x}) = V(x_1, \ldots, x_n)$ опр. в $\|\overline{x}\| < R$, удовлетворяет условиям:

1. $V(\overline{x}) \in C^1$ $(\|\overline{x}\| < R)$.
2. $V(\overline{x}) \geqslant 0$ в D, $V(\overline{x}) = 0 \iff \overline{x} \in \partial D$.