

Методы оптимизации

Заблоцкий Данил

19 марта 2024 г.

Оглавление

1	Линейное программирование	4
1.1	Постановка задачи, теорема эквивалентности	4
1.1.1	Примеры моделей ЛП	5
1.1.2	Теорема эквивалентности задач ЛП	6
1.2	Базисные решения КЗЛП	8

Введение

Лекция 1: Начало

от 9 фев 8:45

Определение 0.1 (Методы оптимизации). *Методы оптимизации* – раздел прикладной математики, предметом изучения которого является теория и методы оптимизационных задач.

Определение 0.2 (Оптимизационная задача). *Оптимизационная задача* – задача выбора из множества возможных вариантов наилучших в некотором смысле.

Примечание.

$$\begin{cases} f(x) \rightarrow \min(\max) \\ x \in D \end{cases},$$

где

D – множество допустимых решений,
 $x \in D$ – допустимое решение,
 $f(x)$ – целевая функция (критерий оптимизации)

Задачи математического программирования (МП) и их классификация

Примечание. Немного истории:

1939г. Л.В. Канторович
1947г. Д. Данциг

С 50-х годов – бурное развитие

1975г. Нобелевская премия по экономике Канторовичу и Купмаксу

Примечание (Задача математического программирования).

1. $f(x) \rightarrow \max(\min)$.
2. $g(x) \# 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad \# \in \{\leq, \geq, =\}$.
3. $x_j \in R, \quad j = \overline{1, n}.$
 $(x \in R^n)$

$$x = (x_1, \dots, x_n)$$

Определение 0.3 (Оптимальное решение, глобальный экстремум). $x^* \in D$ называется *оптимальным решением* задачи 1–3, если $\forall x \in D$

$$f(x^*) \geq f(x)$$

для задачи на \max и $\forall x \in D$

$$f(x^*) \leq f(x)$$

для задачи на \min .

x^* является *глобальным экстремумом*.

Определение 0.4 (Разделимая, неразделимая задача). Задача 1–3, которая обладает оптимальным решением, называется *разделимой*, и *неразделимой* в противном случае.

$D = R^n$ – задача *безусловной оптимизации*, в противном случае – задача *условной оптимизации*.

Примечание (Классификация).

1. Если f, g_i являются линейными, то задача является задачей *линейного программирования* (ЛП).
 2. Если хотя бы одна из функций f, g_i нелинейная, то задача *нелинейного программирования*.
- f, g_i – выпуклые, то *выпуклого программирования*.

Глава 1

Линейное программирование

1.1 Постановка задачи, теорема эквивалентности

Определение 1.1 (Общая задача ЛП (ЗЛП)).

$$f(x) = c_0 + \sum_{j=1}^n c_j x_j \longrightarrow \max(\min),$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \# b_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad \# \in \{\leq, \geq, =\}$$

$$x_j \geq 0, \quad j \in \mathfrak{I} \subseteq \{1, \dots, n\}$$

$$A_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} - \begin{matrix} \text{переменные} \\ \text{задачи} \end{matrix}$$

Примечание (Матричная задача).

$$f(x) = (c, x) \longrightarrow \max(\min)$$

$$Ax \# b$$

$$x_i \geq 0, \quad j \in \mathfrak{I} \subseteq \{1, \dots, n\}$$

Примечание (Каноническая ЗЛП (КЗЛП)).

$$f(x) = (c, x) \longrightarrow \max$$

$$Ax = b$$

$$x \geq \vec{0}, \quad \vec{0} = (0, \dots, 0)$$

Примечание (Симметричная ЗЛП).

$$\begin{array}{ccc} f(x) = (c, x) \longrightarrow \max & & f(x) = (c, x) \longrightarrow \min \\ Ax \leq b & \text{или} & Ax \geq b \\ x \geq \vec{0}, \quad \vec{0} = (0, \dots, 0) & & x \geq \vec{0} \end{array}$$

Замечание. Без ограничения общности далее положим $c_0 = 0$, так как добавление константы не влияет на процесс нахождения оптимального решения.

1.1.1 Примеры моделей ЛП

Пример. Задача о составлении оптимального плана производства.

$$\begin{array}{ll} m \text{ ресурсов,} & i = \overline{1, m} \\ n \text{ видов продукции,} & j = \overline{1, n} \end{array}$$

Известно:

$$\begin{array}{ll} b_i - \text{запас } i\text{-го ресурса, } i = \overline{1, m} \\ a_{ij} - \text{количество ресурса } i, \text{ требуемое для производства} \\ \quad \quad \quad 1 \text{ единицы продукции вида } j \\ c_j - \text{прибыль от продажи 1 единицы } j\text{-го продукта} \end{array}$$

Необходимо составить план производства, максимизирующий суммарную прибыль.

Переменные: x_j единицы продукции вида j производства, $j = \overline{1, n}$,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n c_j x_j &\longrightarrow \max, \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &\leq b_i, \quad i = \overline{1, m}, \\ x_j &\geq 0, \quad j = \overline{1, n}. \end{aligned}$$

Пример. О максимальном потоке в сети.

$$\begin{array}{ll} G = (V, E) & - \text{ориентированный взвешенный граф} \\ c : E \rightarrow R & - \text{веса дуг - пропускная способность} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} s & - \text{источник} \\ t & - \text{сток} \end{array}$$

Пусть x_{ij} – поток по дуге $(i, j) \in E$

$$\begin{aligned} f &= \sum_{j: (s, j) \in E} x_{sj} \longrightarrow \max, \\ \sum_{j: (j, i) \in E} x_{ji} &= \sum_{k: (i, k) \in E} x_{ik}, \quad i \in V \setminus \{s, t\}, \\ 0 &\leq x_{ij} \leq c_{ij}, \quad (i, j) \in E. \end{aligned}$$

Лекция 2: Продолжение

от 16 фев 8:45

Пример. Задача Канторовича

Производятся различные виды шпона с помощью станков разной производительности в единицу времени.

Как распределить задание между станками, чтобы получить шпон в нужном ассортименте в наибольшем количестве?

$$\begin{array}{ll} n & \text{видов шпона} \quad j = 1 \dots n \\ m & \text{станков} \quad i = 1 \dots m \end{array}$$

a_{ij} ед. шпона j -го вида, производимое i -м станком в ед. времени

t_i лимит времени работы i -го станка

b_j количество ед. шпона j -го вида в комплекте

Максимизировать число комплектов.

Пусть z – число комплектов, x_{ij} – количество единиц шпона j -го вида, производимого на i -м станке (x_{ij} – время i -го станка на пространство j -го продукта).

$$\begin{aligned} z &\rightarrow \max, \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} &\geq b_j z, \quad j = 1 \dots n \\ \sum_{j=1}^n \frac{x_{ij}}{a_{ij}} &\leq t_i, \quad i = 1 \dots m \\ x_{ij} &\geq 0, \quad z \geq 0, \quad i = 1 \dots m, \quad j = 1 \dots n, \quad z \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

1.1.2 Теорема эквивалентности задач ЛП

Определение 1.2 (Эквивалентные задачи МП). Две задачи МП

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) \xrightarrow{(I)} \text{opt} \\ x \in D \end{array} \right\}, \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{f}(\bar{x}) \xrightarrow{(\bar{I})} \overline{\text{opt}} \\ \bar{x} \in \bar{D} \end{array} \right\}, \quad \begin{array}{l} D \xrightarrow{\phi} \bar{D} \\ \bar{D} \xrightarrow{\bar{\phi}} D \end{array}$$

называются *эквивалентными*, если любому допустимому решению каждой из них по некоторому правилу соответствует допустимое решение другой задачи, причем оптимальному решению соответствует оптимальное.

Теорема 1.3 (Первая теорема эквивалентности). Для любой задачи ЛП \exists эквивалентная ей каноническая ЗЛП.

Примечание (Идея доказательства). $n = 2$, $m = 3$

$$\begin{array}{ll}
 f = c_1x_1 + c_2x_2 \rightarrow \min & \bar{f} = -c_1x_1 - c_2x_2 \rightarrow \max \\
 a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\
 a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2 & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + x_3 = b_2 \\
 a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \geq b_3 & a_{31}x_1 + a_{32}x_2 - x_4 = b_3 \\
 x_1 \leq 0 & x_1 \geq 0, \ x_3 \geq 0, \ x_4 \geq 0 \\
 x_2 \in \mathbb{R} & x_2 = x'_2 - x''_2, \ x'_2 \geq 0, \ x''_2 \geq 0
 \end{array}$$

КЗЛП

$$\begin{array}{l}
 \bar{f} = -c_1x_1 - c_2x'_2 + c_2x''_2 \rightarrow \max \\
 a_{11}x_1 + a_{12}x'_2 - a_{12}x''_2 = b_1 \\
 a_{21}x_1 + a_{22}x'_2 - a_{22}x''_2 + x_3 = b_2 \\
 a_{31}x_1 + a_{32}x'_2 - a_{32}x''_2 - x_4 = b_3 \\
 x_1 \geq 0, \ x'_2, x''_2, x_3, x_4 \geq 0
 \end{array}$$

Неоднозначность-разность: $\forall x \in D \ f(x) = -f(\bar{x}), \ \bar{x} \in \bar{D}$

$$\bar{x} = \phi(x).$$

Очевидно, что оптимальность также сохраняется при таких преобразованиях.

Теорема 1.4 (Вторая теорема эквивалентности). Для любой задачи ЛП \exists эквивалентная ей симметричная задача ЛП.

Примечание (Идея).

$$\alpha = \beta \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha \leq \beta \\ \alpha \geq \beta \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (c, x) \rightarrow \max \\ Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} (c, x) \rightarrow \min \\ Ax \geq b \\ x \geq 0 \end{array}$$

Замечание. Смысл теоремы 1.4 в том, чтобы свести решение ЗЛП к КЗЛП.

Примечание (Геометрическая интерпретация). $n = 2$

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 \rightarrow \max, \quad a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \leq b_i, \ i = 1 \dots m$$

Линии уровня целевой функции

$$c_1x_1 + c_2x_2 = \text{const}, \quad \perp \nabla f = (c_1, c_2).$$



1.2 Базисные решения КЗЛП

Примечание.

1. $f = (c, x) \rightarrow \max$.
2. $Ax = b$.
3. $x \geq \bar{0}$.

$$A_{m \times n} = (A^1, A^2, \dots, A^n), \quad A^j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} - j\text{-ый столбец матрицы } A.$$

Определение 1.5 (Базисное решение системы 2). Пусть \bar{x} – решение системы 2. Вектор \bar{x} называется *базисным решением системы 2*, если система векторных столбцов матрицы A , соответствующая ненулевым компонентам вектора \bar{x} , линейно независима.

Замечание. В случае однородной системы ($b = 0$), решение $x = 0$ является базисным.

Определение 1.6 (Базисное решение КЗЛП). Неотрицательное базисное решение системы 2 называется *базисным (опорным) решением КЗЛП*.

Пример. $3x_1 - 4x_2 + x_3 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_4 + 2x_5 = 2 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$x^1 = (0, 0, 1, 2, 0)$ – базисное решение системы, так как $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ соответствует базису $\{A^3, A^4\}$.

x^1 БР КЗЛП

$x^2 = (1, 0, -\frac{1}{3}, 0, 0)$ БР СЛАУ, но не КЗЛП

$x^3 = (0, 0, 0, 0, 1)$ БР КЗЛП

Определение 1.7 (Вырожденное базисное решение). x – базисное решение КЗЛП называется *вырожденным*, если число ненулевых компонент вектора x меньше ранга матрицы A .

Замечание. x^3 – вырожденное. Недостаток: соответствует разным наборам базисных столбцов матрицы.

x^3 соответствует $\{A_1, A_5\}, \{A_3, A_5\}, \{A_4, A_5\}$.

Лекция 3: Продложение

от 1 мар 8:45