Теория игр и исследование операций
Диктант 2, определения

Основано на учебно-методическом пособии
Файл создан Заблоцким Данилом

Содержание

4 Задача коммивояжера

Определение (Маршрут коммивояжера). n городов, каждому присвоен номер от 1 до n. Известны расстояния c_{ij} между городами i и j, $i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,n}$. Если между городами i и j, $i \neq j$, нет дороги, то $c_{ij} = \infty$. Вообще говоря, $c_{ij} \neq c_{ji}$. Коммивояжер (бродячий торговец), выезжая из какого-либо города, должен посетить все города, побывав в каждом из них ровно один раз, и вернуться в исходный город. Объезд городов, удовлетворяющий этим требованиям, называется *маршрутом коммивояжера*.

Определение (Гамильтонов цикл). Цикл, в который каждая вершина графа входит ровно один раз, называется *гамильтоновым циклом*.

Определение (Приведенная матрица, приведение матрицы, константы приведения). Матрицу $C^2 = \left(c^2_{ij}\right)$ называют *приведенной матрицей*, операцию ее построения – *приведением* матрицы C, а величины α_i, β_j – *константами приведения*.

5 Динамическое программирование

Определение (Динамическое программирование). *Динамическое программирование (ДП)* – раздел математического программирования, посвященный теории и методам решения многошаговых задач оптимального управления.

Определение (Динамическая система, дискретная ДС). *Динамическая система* – это объект, способный развиваться во времени, переходя из одного состояния в другое. Если смена состояний в динамической системе происходит в отдельные дискретные моменты времени, то она называется *дискретной динамической системой (ДС)*.

Определение (Марковское свойство). Качество $f(u)$ управления u, под воздействием которого система переходит из состояния x в состояние $y = \phi(x, u)$, зависит только от x и y и не зависит от того, каким образом ДС пришла в состояние x, называется *марковским свойством*. Другими словами, $f(u) = f(x, y)$, где $y = \phi(x, u)$.

Определение (Траектория из x_0 в x_k). *Траекторией* из x_0 в x_k называется набор состояний $T = (x_0, x_1, \dots, x_k)$, где $x_i = \phi(x_{i-1}, u^i),\ i = \overline{1,k}$.

Определение (Показатель качества траектории (вес траектории)). В силу марковского свойства мы можем определить *показатель качества траектории* как

$$f(T) = \sum_{i=1}^{k} f(u^i).$$

Поскольку величина $f(T)$ складывается из весов управлений, входящих в траекторию, ее также называют *весом траектории*.

Определение (Принцип оптимальности). Для оптимальности всей последовательности управлений $(u^1, \ldots, u^k)$ необходимо, чтобы завершающая часть этой последовательности $(u^i, \ldots, u^k)$ также была оптимальной $\forall i: \ 1 \leqslant i \leqslant k$.

Системы (процессы), для которых справедливо это свойство, называются *марковскими*.

Определение (Краевые условия). Выражение

$$L(x_k) = a_k, \ \forall x_k \in X_\beta$$

называется *краевыми условиями*, значения констант a_k определяются из условия задачи.

Определение (Разрешимое, неразрешимое УБ). Решить УБ означает определить для любого $x \in X$ величины $L(x)$ и $R(x)$. Если это возможно, то УБ называется *разрешимым*. Если же $\exists x \in X$, такой что $L(X)$ $\big(R(x)\big)$ определить невозможно, то УБ называется *неразрешимым*.

Определение (Контур). *Контуром* в графе переходов называется замкнутый ориентированный маршрут.

Определение (Задача о замене оборудования)**.** При эксплуатации станков, автомобилей, самолетов и дургих устройств возникает задача определения оптимальных сроков обновления их парка, известная как *задача о замене оборудования*.

Предприятие собирается использовать автомобиль в течение n лет с возможной его заменой: в конце каждого года имеющийся автомобиль либо остается в эксплуатации, либо производится замена старого автомобиля на новый. Стоимость нового равна d, и в течение n лет данная величина остается неизменной. Пусть для автомобиля возраста t заданы $a(t)$ – доход от использования автомобиля (в год), $b(t)$ – ежегодные затраты на его эксплуатацию, $c(t)$ – его ликвидная стоимость, $t = \overline{0, n-1}$. Требуется определить оптимальные сроки замены автомобиля с целью максимизации суммарной прибыли от его использования.

6 Задача сетевого планирования и управления

Определение (Задача СПУ). *Задача сетевого планирования и управления (задача СПУ)* возникает в строительстве, проектировании, на производстве и в других областях практической деятельности человека.

Имеется проект, состоящий из взаимосвязанных работ. Для каждой работы известно ее время выполнения. Между работами есть логическая взаимосвязь: для каждой работы определен перечень работ, которые должны быть завершены к началу ее выполнения. Необходимо составить расписание выполнения работ, определяющее время начала каждой работы, следуя которому можно завершить весь проект за минимальное время $T_{\min}$.

Определение (Событие, сетевая модель). *Событием* назовем стадию выполнения проекта, соответствующую началу или окончанию некоторых работ. Тогда всю информацию о проекте, включая заданное отношение частичного порядка на множестве работ, удобно представить в форме ориентированного графа $G = (X, U)$, который называется *сетевой моделью*.

Определение (Свершенное событие). Будем говорить, что событие *свершилось*, если завершены все работы, предшествовавшие этому событию, то есть дуги, входящие в вершину-событие. После того, как событие свершилось, могут начинаться работы-дуги, выходящие из соответствующей вершины.

Определение (Непротиворечивая сетевая модель). В графе G должны присутствовать замкнутые ориентированные последовательности дуг – контуры. Такая сетевая модель называется *непротиворечивой*.

Определение (Расписание, условие допустимости). *Расписание* – это набор чисел $\big\{t(x,y)\big\}$, которые сопоставлены каждой дуге $(x,y) \in U$ и задают время начала работы (x,y), для которых имеет место *условие допустимости*: если работа (x,y) предшествует работе (y,z), то

$$t(y,z) \geqslant t(x,y) + \tau(x,y).$$

Определение (Ранний момент T_x^P). *Ранний момент* T_x^P совершения события x – это минимальный момент времени, в который может свершиться это событие.

Определение (Поздний момент T_x^{Π}). *Поздний момент* T_x^{Π} совершения события x – это максимальный момент времени совершения этого события, не приводящий к увеличению времени выполнения всего проекта сверх $T_{\min}$.

Определение (Критическое событие). Событие называется *критическим*, если $T_x^P = T_x^{\Pi}$. Очевидно, что начало проекта α и окончание проекта β являются критическими событиями:

$$T_\alpha^P = T_\alpha^{\Pi} = 0, \quad T_\beta^P = T_\beta^{\Pi} = T_{\min}.$$

Определение (Полный резерв работы, критическая работа). *Полным резервом работы* (x, y) называется величина

$$R(x,y) = \big(T_y^{\Pi} - \tau(x,y)\big) - T_x^P.$$

Работа называется *критической*, если $R(x,y) = 0$.

Определение (Критический путь). *Критический путь* – это ориентированная последовательность критических работ от начального события α к конечному β.

Определение (Раннее расписание). *Раннее расписание* $\big\{t^P(x,y)\big\}$ – это расписание, в котором каждой работе (x,y) приписан момент ее начала, раньше которого она не может начаться, то есть

$$t^P(x,y) = T_x^P, \ \forall (x,y) \in U.$$

Определение (Позднее расписание). *Позднее расписание* $\big\{t^{\Pi}(x,y)\big\}$ – это расписание, в котором каждой работе (x,y) приписан момент ее начала, позже которого она начаться не должна (так как в противном случае будет нарушен срок окончания проекта $T_{\min}$), то есть

$$t^{\Pi}(x,y) = T_y^{\Pi} - \tau(x,y), \ \forall (x,y) \in U.$$

7 Теоремы

Теорема (УБ "назад").

$$\forall x \in X, \ L(x) = \max_{y \in A(x)} \big\{ f(x,y) + L(y) \big\},$$

$$L(x_k) = a_k, \ \forall x_k \in X_\beta.$$

Теорема (УБ "вперед").

$$\forall x \in X,\ R(x) = \max_{y \in B(x)} \big\{ f(y,x) + R(y) \big\},$$

$$R(x_k) = b_k,\ \forall x_k \in X_\alpha.$$

Теорема. В любой непротиворечивой сетевой модели существует хотя бы один критический путь.