Определения к экзамену по Математическому Анализу 3 семестр

Данил Заблоцкий

22 января 2024 г.

Содержание

1 Функции многих переменных

1.1 Производная функции по вектору

Примечание. Пусть $x = (x_1, x_2, x_3) = x(t)$, $f\big(x(t)\big) = f(x_1, x_2, x_3)$, тогда:

$$\frac{df\big(x(t)\big)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \frac{dx_2}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_3} \cdot \frac{dx_3}{dt} = \\ = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot v_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot v_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} \cdot v_3,$$

где $\vec{v} = \{v_1, v_2, v_3\}$ – скорость частицы, перемещающейся по γ-ну $x(t)$.

Определение 1 (Производная функции по вектору)**.** Пусть D в $\mathbb{R}^n$ – область, $f : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$, вектор $v \in T\mathbb{R}^n_{x_0}$ – касательное пространство к R^n в точке x_0 (совокупность всех векторов, исходящих из точки x_0).

Производной функции f по вектору v называется величина

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = D\vec{v} f(x_0) \coloneqq \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t}, \text{ если } \lim \exists.$$

1.2 Теорема о существовании производной функции по вектору

Утверждение. Пусть $f : D \to \mathbb{R}$ – дифференцируемо в точке $x_0 \in D$. Тогда $\forall \vec{v} \in T\mathbb{R}^n_{x_0} \exists \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) \cdot v_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0) \cdot v_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \cdot v_n = df(x_0) \cdot \vec{v},$$

где $df(x_0) \cdot \vec{v}$ – скалярное произведение,

$$df(x_0) = \left\{\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)\right\}, \\ \vec{v} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$$

1.3 Градиент функции

Определение 2 (Градиент функции в точке)**.** Пусть $f : D \to \mathbb{R}$, D – область в $\mathbb{R}^n$, f – дифференцируема в точке $x \in D$. Вектор $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$:

$$df(x) \cdot h = \vec{a} \cdot h, \quad h \in \mathbb{R}$$

называется *градиентом функции f в точке $x \in \mathbb{R}^n$* и обозначается

$$grad f(x)$$

Если в $\mathbb{R}^n$ зафиксировать ортонормированный базис, то

$$grad f(x) = \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right\}$$

1.4 Производная по направлению вектора

Определение 3 (Производная по направлению вектора)**.** Если $\vec{v} \in T\mathbb{R}^n_{x_0}$, $|\vec{v}| = 1$, то $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x)$ называется *производной по направлению вектора $\vec{v}$*.

2 Основные теоремы дифференциального исчисления функций многих переменных

2.5 Теорема о среднем (аналог теоремы Лагранжа)

Теорема 1 (О среднем)**.** Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$, $x \in D$, $x+h \in D$, $[x, x+h] \subset D$, $f : D \to \mathbb{R}$ – дифференцируемо на $(x, x+h)$ и непрерывно на $[x, x+h]$. Тогда $\exists \xi \in (x, x+h)$:

$$f(x+h) - f(x) = f'(\xi) \cdot h = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi) \cdot h^1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\xi) \cdot h^2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\xi) \cdot h^n,$$

где $\{1, 2, \ldots, n\}$ над h – индексы.

2.6 Следствие теоремы о среднем

Следствие. Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}$ – дифференцируема на D и $\forall x \in D$ $d(fx) = 0$ (то есть $\forall i$ $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$). Тогда $f(x) = const$.

2.7 Достаточное условие дифференцируемости функции

Теорема 2 (Достаточное условие дифференцируемости функции)**.** Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}$, f имеет непрерывные частные производные в каждой окрестности точки $x \in D$. Тогда f – дифференцируема в точке x.

2.8 Производные высших порядков

Определение 4 (Вторая производная функции по переменным)**.** Пусть

$f: D \to \mathbb{R}$, D – область в $\mathbb{R}^n$. Производная по переменной x^j от производной по переменной x^i называется *второй производной функции f по переменным x^i, x^j* и обозначается

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(x) \text{ или } f''_{x^i, x^j}(x).$$

2.9 Теорема о смешанных производных

Теорема 3 (О смешанных производных)**.** Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$, $f: D \to \mathbb{R}$, $x \in D$, f имеет в D непрерывные смешанные производные (второго порядка). Тогда эти производные не зависят от порядка дифференцирования.

2.10 Формула Тейлора

Теорема 4 (Формула Тейлора)**.** Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$, $f: D \to \mathbb{R}$, $f \in C^{(k)}(D, \mathbb{R})$, $x \in D$, $x + h \in D$, $[x; x+h] \subset D$. Тогда:

$$f(x+h) = f(x) + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{i!} \left(\frac{\partial}{\partial x^1} \cdot h^1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x^n} \cdot h^n \right)^i \cdot f(x) + R^k,$$

где R^k – остаточный член,

$$R^k = \frac{1}{k!} \left(\frac{\partial}{\partial x^1} \cdot h^1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x^n} \cdot h^n \right)^k \cdot f(x + \xi \cdot h),$$

$$x = (x^1, \ldots, x^n), \quad h = (h^1, \ldots, h^n).$$

2.11 Локальный экстремум функции многих переменных

Определение 5 (Точка локального максимума (минимума))**.** Пусть X – метрическое пространство (МП), $f: X \to \mathbb{R}$. Точка x_0 называется *точкой локального максимума (минимума)*, если $\exists U(x_0) \subset X: \ \forall x \in U(x_0)$

$$f(x) \leqslant f(x_0) \quad \big(f(x) \geqslant f(x_0)\big)$$

2.12 Необходимое условие локального экстремума

Теорема 5 (Необходимое условие локального экстремума)**.** Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$, $f: D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$ – точка локального экстремума, тогда в точке x_0 $\forall i = \overline{1, n}$

$$\frac{\partial(x_0)}{\partial x^i} = 0.$$

2.13 Критическая точка функции

Определение 6 (Критическая точка функции). Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}^k$ – дифференцируемо в точке $x_0 \in D$. Точка x_0 называется *критической точкой функции* $f(x)$, если:

$$rank \Im f(x_0) < \min(n, k),$$

где $\Im f(x_0)$ – матрица Якоби функции $f(x_0)$.

2.14 Достаточное условие локального экстремума

Теорема 6 (Достаточное условие локального экстремума). Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке $x \in D$, x – критическая точка для f, $f \in C^n(D, \mathbb{R})$, $n = 2$. Тогда, если:

1. $Q(h)$ – знакоположительна, то в точке x – локальный минимум.
2. $Q(h)$ – знакоотрицательна, то в точке x – локальный максимум.
3. $Q(h)$ может принимать различные значения $(> 0, < 0)$, тогда в точке x нет экстремума.

2.15 Неявная функция

Определение 7 (Наеявно заданная уравнением функция). Пусть D – область в $\mathbb{R}^k$, Ω – область в $\mathbb{R}^k$, $F : D \times \Omega \to \mathbb{R}^k$.

Пусть функция $f : D \to \Omega :$

$$y = f(x) \Leftrightarrow F(x, y) = 0.$$

Говорят, что уравнение $F(x, y) = 0$ *неявно задает* функцию $y = f(x)$.

2.16 Теорема о неявной функции

Теорема 7 (О неявной функции). Пусть $F(x, y)$ отображает окрестность $U(x_0; y_0) \subset \mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}$, $F : U(x_0, y_0) \to \mathbb{R}$.

Пусть F имеет следующие свойства:

1. $F(x_0, y_0) = 0$.
2. $F(x, y) \in C^P(U, \mathbb{R})$, $p \geqslant 1$.
3. $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$.

Тогда $\exists$ открезки $I_x, I_y :$ $f : I_x \to I_y$:

1. $I_x \times I_y \subset U(x_0, y_0)$.

2. $\forall x \in I_x \; y = f(x) \Leftrightarrow F(x,y) = 0$.

3. $f \in C^P(I_x, I_y)$.

4. $\forall x \in I_x \; f'(x) = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}$.

3 Приложение теоремы о неявной функции

3.17 Диффиоморфизм, гомеоморфизм

Определение 8 (Диффиоморвизм класса $C^{(p)}$, гомеоморфизм). Пусть D, G – области в $\mathbb{R}^n$. Отображение $f : D \to G$ называтеся *диффиоморфизмом класса* $C^{(p)}$, $p \geqslant 0$, если:

1. f – обратимое.

2. $f \in C^{(p)}(D, G)$.

3. $f^{-1} \in C^{(p)}(D, G)$.

При $p = 0$ f называется *гомеоморфизмом*, то есть f – гомеоморфизм, если f – взаимно однозначное отображение и f, f^{-1} – непрерывны.

3.18 Теорема о неявной функции

Теорема 8 (О неявной функции, общий случай). Пусть $F : U(x_0, y_0) \to \mathbb{R}^n$, где $U(x_0, y_0) \subset \mathbb{R}^{m+n}$ – окрестность точки (x_0, y_0) такая, что

1. $F \in C^{(p)}(U, \mathbb{R}^n), \; p \geqslant 1$.

2. $F(x_0, y_0) = 0$.

3. $F'_y(x_0, y_0)$ – обратная матрица.

Тогда $\exists (n+m)$-мерный промежуток $I = I_x^m \times I_y^n \subset U(x_0; y_0)$, где

$$I_x^m = \left\{ x \in \mathbb{R}^m \;\middle|\; |x - x_0| < \alpha \right\},$$
$$I_x^n = \left\{ y \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; |y - y_0| < \beta \right\},$$

то есть $f : I_x^m \to I_y^n$:

- $\forall (x,y) \in I_x^m \times I_y^n \; F(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x)$.
- $f'(x) = -\left[F'_y(x,y)\right]^{-1} \cdot F'_x(x,y)$.

3.19 K-мерная поверхность

Определение 9 (k-мерная поверхность). Множество $S \subset \mathbb{R}^n$ называется *k-мерной поверхностью*, если $\forall x \in S \; \exists U(x) \subset \mathbb{R}^n$ и $\exists$ диффиоморфизм

$\phi : U(x) \to I^n$:
$$\phi\big(U(x) \cap S\big) = I^k,$$
где $I^n = \big\{x \in \mathbb{R}^n \ \big|\ |x^i| < 1\big\}$,
$$I^k = \big\{x \in \mathbb{R}^n \ \big|\ x^{k+1} = x^{k+2} = \ldots = x^n = 0\big\}.$$

3.20 Параметризация K-мерной поверхности

Определение 10 (Локальная карта или параметризация поверхности). Пусть S – k-мерная поверхность в $\mathbb{R}^n$, $x_0 \in S$ и $\phi : U(x_0) \to I^n$ – диффиоморфизм:
$$\phi\big(U(x_0) \cap S\big) = I^k.$$

Ограничение ϕ^{-1} на I^k будем называть *локальной картой* или *параметризацией поверхности* S в окрестности точки x_0.

3.21 Касательная плоскость (касательное пространство) к K-мерной поверхности в $\mathbb{R}^n$

Определение 11 (Касательное пространство). Пусть S – k-мерная поверхность в $\mathbb{R}^n$, $x_0 \in S$, $x = x(t) : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ – параметризация S в окрестности точки x_0, при этом $x_0 = x(0)$.

Касательным пространством (или плоскостью) к S в точке x_0 называется k-мерная плоскость, заданная уравнением:
$$x = x_0 + x'(0) \cdot t, \tag{1}$$

$$x_0 = (x_0^1, x_0^2, \ldots, x_0^n)$$
$$x(t) = \begin{cases} x^1(t^1, \ldots, t^k) \\ x^2(t^1, \ldots, t^k) \\ \vdots \\ x^n(t^1, \ldots, t^k) \end{cases}$$
$$x'(t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial t^1} & \cdots & \frac{\partial x^1}{\partial t^k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x^n}{\partial t^1} & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial t^k} \end{pmatrix}(t), \quad t = \begin{pmatrix} t^1 \\ t^2 \\ \vdots \\ t^k \end{pmatrix}$$

Таким образом касательное пространство задается системой из 1:
$$\begin{cases} x^1 = x_0^1 + \frac{\partial x^1}{\partial t^1}(0) \cdot t^1 + \ldots + \frac{\partial x^1}{\partial t^k}(0) \cdot t^k \\ x^2 = x_0^2 + \frac{\partial x^2}{\partial t^1}(0) \cdot t^1 + \ldots + \frac{\partial x^2}{\partial t^k}(0) \cdot t^k \\ \vdots \\ x^n = x_0^n + \frac{\partial x^n}{\partial t^1}(0) \cdot t^1 + \ldots + \frac{\partial x^n}{\partial t^k}(0) \cdot t^k \end{cases}.$$

3.22 Теорема о структуре касательного пространства

Теорема 9 (О структуре касательного пространства)**.** Пусть S – k-мерная поверхность в $\mathbb{R}^n$, $x_0 \in S$. Тогда касательное пространство TS_{x_0} в точке x_0 состоит из направляющих векторов касательных к гладким кривым на поверхности S, проходящих через точку x_0.

3.23 Задача на условный экстремум, условный экстремум

Задача. Пусть требуется найти условный экстремум функции $f : D \to \mathbb{R}$, D – область в $\mathbb{R}^n$, на поверхности S, заданной системой уравнений:

$$\begin{cases} F^1(x^1, \ldots, x^n) = 0 \\ \vdots \\ F^k(x^1, \ldots, x^n) = 0 \end{cases}.$$

Составим функцию Лагранжа:

$$L(x, \lambda) = L(x^1, \ldots, x^n, \lambda^1, \ldots, \lambda^k) =$$
$$= f(x^1, \ldots, x^n) + \sum_{i=1}^{k} \lambda^i \cdot F^i(x^1, \ldots, x^n),$$

$\lambda = (\lambda^1, \ldots, \lambda^k)$, $\lambda^i \in \mathbb{R}$ – коэффициент, в общем случае пока неизвестен.

Необходимое условие локального экстремума для функции L:

$$\begin{cases} \left.\begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial x^1} = \frac{\partial f}{\partial x^1} + \sum_{i=1}^k \lambda^i \cdot \frac{\partial F^i}{\partial x^1} = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial L}{\partial x^n} = \frac{\partial f}{\partial x^n} + \sum_{i=1}^k \lambda^i \cdot \frac{\partial F^i}{\partial x^n} = 0 \end{array}\right\} \text{необходимое условие условного экстремума функции } f \\ \left.\begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial \lambda^1} = F^1(x^1, \ldots, x^n) = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda^k} = F^k(x^1, \ldots, x^n) = 0 \end{array}\right\} \text{поверхность } S \end{cases} \tag{2}$$

Определение 12 (Условный экстремум)**.** Пусть $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ – область, S – поверхность в D, *условным экстремумом* функции f называется экстремум функции $f\big|_S$.

3.24 Линия уровня

Определение 13 (Линия уровня (c-уровень))**.** Пусть $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ – область. *Линией уровня (c-уровнем)* функции f называется множество

$$N_c = \left\{x \in D \mid f(x) = c\right\}.$$

3.25 Необходимое условие условного локального экстремума

Теорема 10 (Необходимое условие условного локального экстремума)**.** Пусть система уровнений

$$\begin{cases} F^1(x^1,\dots,x^n) = 0 \\ \vdots \\ F^{n-k}(x^1,\dots,x^n) = 0 \end{cases} \tag{3}$$

задает $(n-k)$-мерную гладкую поверхность S в $D \subset \mathbb{R}^n$, D – область. Функция $f : D \to \mathbb{R}$ – гладкая. Если $x_0 \in S$ является точкой условного локального экстремума для функции f, то существует такой набор чисел $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-k} \in \mathbb{R}$:

$$gradf(x_0) = \sum_{i=1}^{n-k} \lambda_i \cdot gradF^i(x_0).$$

3.26 Функция Лагранжа

Примечание. Пусть $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ – область, $f \in C^{(2)}(D, \mathbb{R})$, S – $(n-k)$-мерная поверхность в D, заданная системой уравнений:

$$\begin{cases} F^1(x^1,\dots,x^n) = 0 \\ \vdots \\ F^{k}(x^1,\dots,x^n) = 0 \end{cases}.$$

Функция Лагранжа:

$$L(x,\lambda) = f(x^1,\dots,x^n) + \sum_{i=0}^{k} \lambda_i \cdot F^i(x^1,\dots,x^n).$$

Здесь $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ выбираются таким образом, чтобы было выполнено необходимое условие условного экстремума в точке x_0 (2).

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x^i} = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_j} = 0 \end{cases} \Rightarrow x_0, \quad \lambda_1, \dots, \lambda_k.$$

3.27 Метод Лагранжа

Я запутался.

3.28 Достаточное условие условного локального экстремума

Теорема 11 (Достаточное условие условного экстремума)**.** Если при введенных выше условиях квадратичная форма

$$Q(\xi) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 L}{\partial x^i \partial x^j}(x_0) \cdot \xi^i \xi^j, \ \left(\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^n)\right)$$

1. Знакоопределена на TS_{x_0}:
   - если Q знакоположительна, то точка x_0 – точка условного локального min
   - если Q знакоотрицательна, то точка x_0 – точка условного локального max
2. Если Q может принимать значения разных знаков, то в точке x_0 условного экстремума не наблюдается.

4 Теория рядов

4.29 Числовой ряд

Определение 14 (Ряд). *Рядом* называется выражение:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots, \quad a_i \in \mathbb{R}.$$

Числа a_i называются *членами ряда*, a_n – *n-ым членом ряда*.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{4}$$

Рассмотрим числа:

$$\begin{aligned} A_1 &= a_1, \\ A_2 &= a_1 + a_2, \\ &\vdots \\ A_n &= a_1 + a_2 + \ldots + a_n. \end{aligned}$$

Числа $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называются *частичными суммами ряда* 4.

4.30 Сходимость числового ряда

Определение 15 (Сходящийся ряд). Говорят, что ряд 4 *сходится*, если существует конечный предел частичных сумм, то есть

$$\exists \lim_{n \to \infty} A_n = A.$$

Тогда сумма бесконечного ряда 4 полагается равной

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

4.31 Критерий Коши сходимости числовых рядов

Теорема 12 (Критерий Коши). Ряд 4 сходится тогда и только тогда, когда $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}:\ \forall n > N,\ \forall p > 0$

$$|a_{n+1} + \ldots + a_{n+p}| < \varepsilon.$$

4.32 Необходимое условие сходимости числового ряда

Теорема 13 (Необходимое условие сходимости ряда). Если ряд 4 сходится, тогда:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

4.33 Теорема об остатке ряда

Определение 16 (m-ый остатный ряд). Пусть дан ряд 4. Ряд вида

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} a_n \tag{5}$$

называется *m-ым остатным ряда* 4.

Теорема 14 (Об остатке ряда). Следующие условия эквивалентны:

1. Ряд 4 сходится.
2. Любой его остаток сходится.
3. Некоторый его остаток 5 сходится.

4.34 Теорема о сумме рядов и умножении ряда на число

Теорема 15. Если ряды $(A), (B)$ сходятся, то:

1. $\forall a \in \mathbb{R}$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n$ – сходится и его сумма равна $\alpha \cdot A$, где $A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
2. Ряд $(A+B)$ сходится и его сумма равна $A^* + B^*$, где $A^* = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $B^* = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

4.35 Положительный числовой ряд

Определение 17 (Положительный ряд). Ряд (A) называется *положительным*, если $\forall n\ a_n > 0$.

4.36 Основная теорема о сходимости положительных рядов

Теорема 16. Положительный ряд (A) сходится $\Leftrightarrow$ его частичные суммы ограничены, то есть $\exists M > 0: \ \forall n \ A_n < M$.

4.37 Первый признак сравнения

Теорема 17 (1-ый признак сравнения)**.** Пусть даны ряды $(A), (B)$, причем $a_n > 0, \ b_n > 0 \ \forall n$.

Если $\exists N \in \mathbb{N}: \ \forall n > N \ a_n \leqslant b_n$, то:

1. Из сходимости ряда $(B) \Rightarrow$ сходимость ряда (A).

2. Из расходимости ряда $(A) \Rightarrow$ расходимость ряда (B).

4.38 Второй признак сравнения

Теорема 18 (2-ой признак сравнения)**.** Пусть даны ряды $(A), (B)$, причем $a_n > 0, \ b_n > 0 \ \forall n$.

Если $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k, \ k \in [0; \infty]$, то:

1. При $k = \infty$ из сходимости $(A) \Rightarrow$ сходимость ряда (B).

2. При $k = 0$ из сходимости ряда $(B) \Rightarrow$ сходимость ряда (A).

3. При $0 < \underset{const \neq 0}{\underset{\shortparallel}{k}} < \infty$ ряды (A) и (B) ведут себя одинаково.

4.39 Третий признак сравнения

Теорема 19 (3-й признак сравнения)**.** Пусть даны ряды $(A), (B)$, причем $a_n > 0, \ b_n > 0 \ \forall n$.

Если $\exists N \in \mathbb{N} \cup \{0\}: \ \forall n > N \ \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n}$, то:

1. Из сходимости ряда $(B) \Rightarrow$ сходимость ряда (A).

2. Из расходимости ряда $(A) \Rightarrow$ расходимость ряда (B).

4.40 Интегральный признак сходимости Коши-Маклорена

Теорема 20 (Интегральный признак Коши-Маклорена)**.** Пусть дан положительный ряд (A).

Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет следующим условиям:

1. $f(x): \ [1; +\infty) \to \mathbb{R}$.

2. $f(x)$ – непрерывна.
3. $f(x)$ – монотонна.
4. $f(x) = a_n, \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Тогда ряд (A) и интеграл $\int_1^\infty f(x)dx$ ведут себя одинаково.

4.41 Радикальный признак Коши

Теорема 21 (Радикальный признак Коши)**.** Пусть ряд (A) положительный и $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} = q$. Тогда:

1. При $q < 1$ ряд (A) сходится.
2. При $q > 1$ ряд (A) расходится.
3. При $q = 1$ может как сходиться, так и расходиться.

4.42 Признак Даламбера

Теорема 22 (Признак Даламбера)**.** Пусть ряд (A) положительный и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = d$. Тогда:

1. При $d < 1$ ряд (A) сходится.
2. При $d > 1$ ряд (A) расходится.
3. При $d = 1$ может как сходиться, так и расходиться.

4.43 Признак Раббе

Теорема 23 (Признак Раббе)**.** Пусть ряд (A) – положительный. Если $\lim\limits_{n\to\infty} n \cdot \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = r$, то:

1. При $r > 1$ ряд (A) сходится.
2. При $r < 1$ ряд (A) расходится.
3. При $r = 1$ ряд (A) может как сходиться, так и расходиться.

4.44 Признак Кумера

Теорема 24 (Признак Кумера)**.** Пусть дан ряд (A) – положительный. Пусть числа $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots : \ \forall n > N \ c_n > 0$ и ряд $\sum_{n=1}^\infty c_n$ – расходится. Если

$$\lim_{n\to\infty} \left(c_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1}\right) = k,$$

то

1. При $k > 0$ ряд (A) сходится.
2. При $k < 0$ ряд (A) расходится.
3. При $k = 0$ может как сходиться, так и расходиться.

4.45 Признак Бертрана

Теорема 25 (Признак Бертрана). Пусть ряд (A) – положительный. Если

$$\lim_{n\to\infty} \ln n \cdot \left[n \cdot \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)\right] = B,$$

то

1. При $B > 1$ ряд (A) сходится.
2. При $B < 1$ ряд (A) расходится.
3. При $B = 1$ ряд (A) может как сходиться, так и расходиться.

4.46 Признак Гаусса

Теорема 26 (Признак Гаусса). Ряд (A), $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Если

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \left(\lambda + \frac{\mu}{n}\right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

то

1. При $\lambda > 1$, ряд (A) сходится.
2. При $\lambda < 1$, ряд (A) расходится.
3. При $\lambda = 1$ и
   (a) $\mu > 1 \Rightarrow$ ряд (A) сходится.
   (b) $\mu \leqslant 1 \Rightarrow$ ряд (A) расходится.

4.47 Знакопеременные ряды

Примечание. Пусть дан ряд (A). Если $\exists N : \ \forall n > N \ a_n$ не меняет знак, то исследование сходимости такого ряда сводится к исследованию сходимости положительных рядов. Будем считать, что "+"и "−"бесконечно много. Такие ряды будем называть *знакопеременными*.

4.48 Абсолютно сходящийся ряд

Определение 18 (Абсолютно сходящийся ряд). Ряд (A) называется *аб-*

солютно сходящимся, если сходится ряд

$$(A^*)\ \sum_{n=1}^{\infty}|a_n|.$$

4.49 Условно сходящийся ряд

Определение 19 (Условно сходящийся ряд)**.** Если ряд (A) сходится, а ряд (A^*) расходится, то ряд (A) называется *условно сходящимся*.

4.50 Следствие абсолютной сходимости ряда

Утверждение. Если ряд (A) абсолютно сходящийся, то он сходящийся.

4.51 Знакочередующиеся ряды

Определение 20 (Знакочередующийся ряд)**.** Ряд (A) называется *знакочередующимся*, если $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \cdot a_{n+1} < 0$. Обозначим знакочередующийся ряд:

$$(\overline{A})\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot a_n, \quad a_n > 0\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

4.52 Признак Лейбница

Теорема 27 (признак Лейбница)**.** Пусть ряд $(\overline{A})$, $a_n > 0\ \forall n$ удовлетворяет условиям:

1. $a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant \ldots \geqslant a_n \geqslant \ldots$.
2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Тогда ряд $(\overline{A})$ сходится и его сумма $S:\ 0 < S \leqslant a_1$.

4.53 Признак Абеля

Теорема 28 (Признак Абеля)**.** Если

- последовательность $\{a_n\}$ монотонна и ограничена,
- ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится,

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$ сходится.

4.54 Признак Дирихле

Теорема 29 (Признак Дирихле). Если

- последовательность $\{a_n\}$ монотонна и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$,
- частичные суммы ряда (B) ограничены, то есть $\exists k > 0:$ $\forall n\ \left|\sum_{m=1}^{n} b_m\right| < k$,

то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$ сходится.

4.55 Сочетательное свойство сходящихся рядов

Теорема 30 (Сочетательное свойство сходящихся рядов).

1. Если ряд (A) сходится, то для любой возрастающей последовательности n_k ряд $(\widetilde{A})$ сходится и их суммы совпадают $(A = \widetilde{A})$.
2. Если ряд $(\widetilde{A})$ сходится и внутри каждой скобки знак не меняется, то ряд (A) сходится и их суммы совпадают, то есть $\widetilde{A} = A$.

4.56 Переместительное свойство сходящихся рядов

Теорема 31 (Переместительное свойство сходящихся рядов). Если ряд (A) абсолютно сходится, то его сумма не зависит от перестановки членов ряда.

4.57 Теорема Римана о перестановке членов условно сходящегося ряда

Теорема 32 (Римана о перестановке членов условно сходящегося ряда). Если ряд (A) условно сходится, то $\forall B \in \mathbb{R}$ (в том числе $B = \pm\infty$) $\exists$ перестановка ряда (A) такая, что полученный ряд сходится и имеет сумму B. Более того, $\exists$ перестановка ряда (A) такая, что частичные суммы полученного ряда не стремятся ни к конечному, ни к бесконечному пределу.

4.58 Произведение рядов

Определение 21 (Произведение рядов, форма Коши). *Произведением рядов* (A) и (B) назовем ряд, членами которого являются элементы на строке таблицы $a_i b_j$, взятые в произвольном порядке.

Если числа выбираются по диагоналям, то произведение называется *формой Коши*:

$$a_1 b_1 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) + \dots$$

4.59 Теорема Коши о произведении рядов

Теорема 33 (Коши о произведении рядов). Если ряды $(A), (B)$ абсолютно сходятся, A и B – их суммы, то $\forall$ их произведение абсолютно сходится и равно $A \cdot B$.

4.60 Повторный ряд

Определение 22 (Повторный ряд). *Повторным рядом* называются выражения

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}, \tag{6}$$

и

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{nk}. \tag{7}$$

Говорят, что ряд 6 сходится, если сходятся все ряды (A_n) по строкам $(\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k} = A_n)$ и сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$.

4.61 Двойной ряд

Определение 23 (Двойной ряд). *Двойным рядом* называется выражение:

$$\sum_{n,k=1}^{\infty} a_{nk} \tag{8}$$

Говорят, что ряд 8 сходится, если:

$$\exists A = \lim_{\substack{K\to\infty \\ N\to\infty}} A_{NK} = \lim_{\substack{K\to\infty \\ N\to\infty}} \sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{K} a_{nk}.$$

То есть $\forall \varepsilon > 0\ \exists N_0$ и $K_0:\ \forall N > N_0$ и $\forall k > K_0$

$$\Bigg|\underbrace{\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{K} a_{nk}}_{A_{NK}} - A\Bigg| < \varepsilon.$$

4.62 Простой ряд

Определение 24 (Простой ряд). Пусть ряд

$$\sum_{r=1}^{\infty} U_r \tag{9}$$

построен из элементов таблицы, взятых в произвольном порядке. Такой ряд будем называть *простым*, связанным с данной таблицей.

4.63 Теорема о связи сходимости простого и повторного рядов

Теорема 34 (О связи сходимости простого и повторного рядов)**.**

1. Если ряд 9 абсолютно сходится, то ряд 6 сходится и его сумма равна U.

2. Если после замены элементов таблицы ($\star$) их модулями ряд 6* ходится, то ряд 9 сходится абсолютно и суммы рядов 6 (без модулей) и 9 совпадают.

4.64 Свойства двойного ряда

Теорема 35 (Свойства двойных рядов)**.**

1. Если ряд 8 сходится, то
$$\lim_{\substack{n\to\infty\\k\to\infty}} a_{nk} = 0.$$

2. (Критерий Коши) Ряд 8 сходится $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists N_0, K_0 :\quad \forall n > N_0,\ \forall k > K_0,\ \forall p > 0,\ \forall q > 0$
$$\left|\sum_{n=1}^{p}\sum_{k=1}^{q} a_{(N_0+n)(K_0+k)}\right| < \varepsilon.$$

3. Если ряд 8 сходится, то $\forall c \in \mathbb{R}$ ряд
$$\sum_{n,k=1}^{\infty} (c \cdot a_{nk})$$
сходится, и его сумма равна $c \cdot A$ (где $A = \sum_{n,k=1}^{\infty} a_{nk}$).

4. Если ряд 8 сходится и ряд
$$\sum_{n,k=1}^{\infty} b_{nk}$$
сходится, то
$$\sum_{n,k=1}^{\infty} (a_{nk} + b_{nk}) = A + B,$$
а к тому же – сходится.

5. Если $\forall n,\ \forall k\ a_{nk} \geqslant 0$, то ряд 8 сходится $\Leftrightarrow$ его частичные суммы ограничены в совокупности.

4.65 Теорема о связи сходимости двойного и повторного рядов

Теорема 36 (О связи сходимости двойного ряда и повторного)**.** Если

- ряд 8 сходится (двойной),
- все ряды по строкам сходятся,

тогда повторный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}$ сходится и

$$A = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} = \sum_{n,k=1}^{\infty} a_{nk}.$$

4.66 Теорема о связи сходимости двойного и простого рядов

Теорема 37 (О связи сходимости двойного и простого рядов)**.** Если ряд 8* сходится, то сходится ряд 9.

И наоборот, если сходится ряд 9*, то сходится ряд 8.

И в обоих случаях суммы рядов равны:

$$\sum_{n,k=1}^{\infty} a_{nk} = \sum_{r=1}^{\infty} u_r$$

5 Поточечная и равномерная сходимость семейства функций

5.67 Семейство функций, зависящих от параметров

Определение 25 (Семейство функций, параметры)**.** *Семейство функций* – это произвольное множество функций.

Пусть $f : X \times T \to Y$. Если по каким-либо соображениям элементам множества T уделяется особое внимание, то будем их называть *параметрами.*

То есть $\forall t \in T$ можно рассмотреть функцию

$$f_t(x) = f(x, t).$$

В этом случае будем говорить, что задано семейство функций, зависящих от параметра t.

5.68 Сходимость семейства функций по базе

Определение 26 (Сходимость в точке)**.** Будем говорить, что *семейство $\{f_t\}$ сходится в точке $x \in X$*, если $f_t(x)$ как функция аргумента t имеет предел по базе $\mathfrak{B}$, то есть $\exists y_x \in Y_\rho : \ \forall \varepsilon > 0\ \exists B \in \mathfrak{B} : \ \forall t \in B$

$$\rho\big(f_t(x), y_x\big) < \varepsilon.$$

5.69 Область сходимости семейства функций по базе

Определение 27 (Область сходимости). Множество $E = \Big\{x \in X : \ \{f_t\}$ сходится в точке $x\Big\}$ называется *областью сходимости* семейства $\{f_t\}$ по базе $\mathfrak{B}$.

5.70 Предельная функция

Определение 28 (Предельная функция). На E введем функцию, положив

$$f(x) = \lim_{\mathfrak{B}} f_t(x).$$

Функция $f(x)$ называется *предельной*.

5.71 Поточечная сходимость семейства функций по базе

Определение 29 (Поточечная сходимость по базе). Пусть дано семейство $f_t : X \to Y_u$ и $f : X \to Y$. Будем говорить, что f_t сходится по базе $\mathfrak{B}$ *поточечно* к f на X, если $\forall x \in X \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists B_x \in \mathfrak{B} : \ \forall t \in B_x$

$$\rho\big(f_t(x), f(x)\big) < \varepsilon.$$

Обозначение:

$$f_t \underset{\mathfrak{B}}{\longrightarrow} f \ (\text{на } X)$$

5.72 Равномерная сходимость семейства функций по базе

Определение 30 (Равномерная сходимость по базе). Семейство $\{f_t\}$ сходится *равномерно* по базе $\mathfrak{B}$ к f на X, если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists B \in \mathfrak{B} : \ \forall t \in B$ и $\forall x \in X$

$$\rho\big(f_t(x), f(x)\big) < \varepsilon.$$

Обозначение:

$$f_t \underset{\mathfrak{B}}{\rightrightarrows} f \ (\text{на } X)$$

5.73 Поточечная сходимость последовательности функций

Определение 31 (Поточечная сходимость). Пусть $f_n : X \to \mathbb{R}$ – последовательность функций и $f : X \to \mathbb{R}$. Семейство $\{f_n\}$ *сходится поточечно* к f на X, если $\forall x \in X\ \exists f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x),\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N:\ \forall n > N$

$$\left|f_n(x) - f(x)\right| < \varepsilon.$$

Обозначение:

$$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f \text{ (на } X\text{)}$$

5.74 Равномерная сходимость последовательности функций

Определение 32 (Равномерная сходимость)**.** Последовательность $\{f_n\}$ *равномерно сходится* к f на X при $n \to \infty$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}:\ \forall n > N\ \forall x \in X$

$$\left|f_n(x) - f(x)\right| < \varepsilon.$$

Обозначение:

$$f_n \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f \text{ (на } X\text{)}$$

5.75 Критерий Коши сходимости семейства функций

Теорема 38 (Критерий Коши сходимости семейства функций)**.** Пусть Y – полное метрическое пространство, $f_t : X \to Y$, $t \in T$ – семейство $\{f_t\}$ равномерно сходится на X по базе $\mathfrak{B} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists B \in \mathfrak{B}:\ \forall t_1, t_2 \in B$ и $\forall x \in X$

$$\rho\big(f_{t_1}(x); f_{t_2}(x)\big) < \varepsilon.$$

5.76 Следствие из критерия Коши сходимости семейства функций

Следствие. Пусть X, Y – метрические пространства, $E \subset X$, $x_0 \in E$ – предельная точка для E. Семейство $f_t : X \to Y$:

1. f_t сходится на E по базе $\mathfrak{B}$.
2. f_t расходится в точке x_0 по базе $\mathfrak{B}$.
3. $\forall t$ f_t непрерывно в точке x_0.

Тогда на E семейство f_t сходится неравномерно.

6 Функциональный ряд

6.77 Функциональный ряд

Определение 33 (Функциональный ряд)**.** Пусть $f_n : X \to \mathbb{R}$, X – произвольное множество.

Функциональным рядом называется выражение вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \tag{10}$$

6.78 Поточечная сходимость функциональных рядов

Примечание. Говорят, что ряд 10 сходится на X *поточечно*, если на X сходится поточечно последовательность его частичных сумм.

Ряд 10 равномерно сходится на X, если на X равномерно сходится последовательность его частичных сумм.

6.79 Равномерная сходимость функциональных рядов

Теорема 39. Пусть ряды $(A), (B)$ такие, что:

1. $\forall n$ функции $a_n(x)$ и $b_n(x)$ определены на X.
2. $\exists N: \ \forall n > N$
$$\left|a_n(x)\right| \leqslant b_n(x) \quad \forall x \in X.$$
3. Ряд (B) сходится на X равномерно.

Тогда ряд (A) сходится на X равномерно.

6.80 Критерий Коши равномерной сходимости ряда

Теорема 40 (Критерий Коши равномерной сходимости функциональных рядов)**.** Ряд 10 равномерно сходится на $X \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N: \ \forall n > N \ \forall p > 0 \ \forall x \in X$
$$\left|f_{n+1}(x) + \ldots + f_{n+p}(x)\right| < \varepsilon.$$

6.81 Следствие из критерия Коши равномерной сходимости ряда

Следствие. Если:

1. Ряд 10 сходится на $(a; b)$.
2. Расходится в точке b.
3. $\forall n \ f_n(x)$ непрерывно в точке b.

Тогда ряд 10 сходится на $(a; b)$ неравномерно.

6.82 Признак сравнения

Я не нашел.

6.83 Признак Вейерштрасса

Следствие (Мажорантный признак Вейерштрасса)**.** Пусть

1. $\forall n\ \exists M_n$:
$$\left|a_n(x)\right| \leqslant M_n \quad \forall x \in X.$$
2. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ сходится.

Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ сходится на X абсолютно и равномерно.

6.84 Признак Абеля

Теорема 41 (Признак Абеля)**.** Пусть функции $a_n(x)$ и $b_n(x)$ удовлетворяют условиям:

- ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ сходится равномерно на X,
- последовательность $\{b_n(x)\}$ равномерно ограничена на X и монотонна (то есть $\exists L > 0 :\ \forall n \in \mathbb{N}$ и $\forall x \in X \quad \left|b_n(x)\right| \leqslant L$),

тогда ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n(x) \cdot b_n(x)\right)$$
сходится на X равномерно.

6.85 Признак Дирихле

Теорема 42 (Признак Дирихле)**.**

- частичные суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ равномерно ограничены на X (то есть $\exists M > 0 :\ \forall n$ и $\forall x \in X \quad \left|\sum_{k=1}^{n} a_k(x)\right| \leqslant M$),
- последовательность $\{b_n(x)\}$ монотонна и равномерно на X стремится к 0,

тогда ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n(x) \cdot b_n(x)\right)$$
сходится на X равномерно.

7 Свойства предельной функции

7.86 Условия коммутирования двух предельных переходов

Теорема 43 (Условия коммутирования двупредельных переходов)**.** Пусть X, T – множества, $\mathfrak{B}_x$ – база на X, $\mathfrak{B}_T$ – база на T, Y – полное МП, $f_t : X \to Y$, $f : X \to Y$:

- $f_t \underset{\mathfrak{B}_T}{\rightrightarrows} f$ на X,
- $\forall t \in T\ \exists \lim\limits_{\mathfrak{B}_X} = A_t$,

тогда существуют и равны два повторных предела:

$$\lim\limits_{\mathfrak{B}_T}\lim\limits_{\mathfrak{B}_X} f_t(x) = \lim\limits_{\mathfrak{B}_X}\lim\limits_{\mathfrak{B}_T} f_t(x).$$

Запишем условия и утверждение теоремы в форме диаграмы:

$$\begin{tikzcd}
f_t(x) \arrow[r, phantom, "\underset{\mathfrak{B}_T}{\rightrightarrows}"] \arrow[d, "{\forall t,\ \mathfrak{B}_X}"'] & f(x) \arrow[d, dashed, "\mathfrak{B}_X"] \\
A_t \arrow[r, dashed, "\mathfrak{B}_T"'] & A
\end{tikzcd}$$

$\to$ – дано, $\dashrightarrow$ – утверждение

7.87 Непрерывность предельной функции

Теорема 44 (Непрерывность предельной функции)**.** Пусть X, Y – метрические пространства, $\mathfrak{B}$ – база на T, $f_t : X \to Y$, $f : X \to Y$:

- $\forall t \in T$ функция f_t непрерывна в точке $x_0 \in X$,
- семейство $f_t \underset{\mathfrak{B}}{\rightrightarrows} f$ на X,

тогда функция f непрерывна в точке x_0.

7.88 Интегрируемость предельной функции

Теорема 45 (Интегрируемость предельной функции)**.** Пусть $f_t : [a;b] \to \mathbb{R}$, $f : [a;b] \to \mathbb{R}$:

- $\forall t \in T$ f_t интегрируема по Риману на $[a;b]$,
- $f_t \underset{\mathfrak{B}}{\rightrightarrows} f$ на $[a;b]$ ($\mathfrak{B}$ – база на T),

тогда:

1. f интегрируема по Риману на $[a;b]$.

2.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\mathfrak{B}} \int_a^b f_t(x)dx \Leftrightarrow \lim_{\mathfrak{B}} \int_a^b f_t(x)dx = \int_a^b \lim_{\mathfrak{B}} f_t(x)dx.$$

7.89 Теорема Дини

Теорема 46 (Дини)**.** Пусть X – компактное метрическое пространство. Последовательность $f_n : X \to \mathbb{R}$ монотонна на X и $\forall x$ f_n непрерывна на X.

Если $f : X \to \mathbb{R}$ непрерывна на X, то эта сходимость равномерная.

7.90 Дифференцируемость предельной функции

Теорема 47 (Дифференцируемость предельной функции)**.** Пусть $-\infty < a < b < +\infty$ (a, b – конечны), $f_t : (a;b) \to \mathbb{R}$, $f : (a;b) \to \mathbb{R}$:

- $\forall t \in T$ f_t дифференцируема на $(a;b)$,
- $\exists \phi : (a;b) \to \mathbb{R} :$ $f_t' \underset{\mathfrak{B}}{\rightrightarrows} \phi$ на $(a;b)$,
- $\exists x_0 \in (a;b) :$ $f_t(x_0) \to f(x_0)$,

тогда:

1. $f_t \underset{\mathfrak{B}}{\rightrightarrows} f$ на $(a;b)$.
2. f дифференцируема на $(a;b)$.
3. $\forall x \in (a;b)$ $f'(x) = \phi(x)$.

7.91 Следствие из теоремы о непрерывности предельной функции

Следствие. Если

- $\forall n$ $f_n(x)$ непрерывна на $(a;b)$,
- ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ равномерно сходится на $(a;b)$,

то его сумма $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ непрерывна на $(a;b)$, то есть $\forall x_0 \in (a;b)$

$$\lim_{x\to x_0} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to x_0} f_n(x).$$

7.92 Следствие из теоремы об интегрируемости предельной функции

Следствие. Если

- $\forall n \ f_n(x) \in R[a;b]$ (интегрируема на $[a;b]$),
- ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ равномерно сходится на $[a;b]$,

то его сумма интегрируема на $[a;b]$ и

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)dx.$$

7.93 Следствие из теоремы о дифференцируемости предельной функции

Следствие. Если

- $\forall n \ f_n(x)$ дифференцируема на $(a;b)$,
- $\exists x_0 \in [a;b]$: ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ сходится,
- ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ сходится равномерно на $(a;b)$,

то

1. Ряд сходится на $(a;b)$ равномерно.
2. Его сумма дифференцируема на $(a;b)$.
3. $\forall x \in (a;b)$
$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x).$$

8 Свойства предельной функции

8.94 Степенной ряд

Определение 34 (Степенной ряд)**.** *Степенным рядом* называется выражение вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n \cdot (x - x_0)^n\right)$$

или

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cdot x^n). \tag{11}$$

8.95 Теорема о сходимости степенного ряда

Теорема 48 (О сходимости степенного ряда)**.**

1. Областью сходимости степенного ряда 11 является промежуток $(-R; R)$, где $R \geqslant 0$ $(+\infty)$.

2. $\forall [\alpha; \beta] \subset (-R; R)$ ряд 11 сходится равномерно на $[\alpha; \beta]$.

3. Число R, называемое *радиусом сходимости степенного ряда* 11, может быть вычислено:

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

8.96 Радиус сходимости степенного ряда (определение)

Определение 35 (Радиус сходимости степенного ряда). Число R, называемое *радиусом сходимости степенного ряда* 11, может быть вычислено:

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

8.97 Теорема Абеля о сумме степенного ряда

Теорема 49 (Абеля, о сумме степенного ряда). Если R – радиус сходимости ряда 11 и ряд $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n \cdot R^n)$ сходится, то

$$\lim_{x\to R} \sum_{n=0}^{\infty}(a_n \cdot x^n) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n \cdot R^n).$$

8.98 Теорема об интегрировании степенного ряда

Теорема 50 (Об интегрировании степенного ряда). Пусть дан ряд 11. Пусть $S(x)$ – его сумма, R – радиус сходимости ряда 11. Тогда $\forall \overline{x} \in (-R; R)$ функция $S(x)$ интегрируема на $[0; \overline{x}]$ (или на $[\overline{x}; 0]$) и

$$\int_0^{\overline{x}} S(x)dx = \int_0^{\overline{x}} \left(\sum_{n=0}^{\infty}(a_n \cdot x^n)\right)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\overline{x}} (a_n \cdot x^n)dx = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n+1} \cdot \overline{x}^{n+1}\right).$$

Если ряд 11 сходится при $x = R$, то утверждение остается верным и для $\overline{x} = R$.

8.99 Теорема о дифференцировании степенного ряда

Теорема 51 (О дифференцировании степенного ряда). Пусть дан ряд 11. Пусть $S(x)$ – его сумма, R – радиус сходимости ряда 11. Тогда

$\forall x \in (-R; R)$ функция $S(x)$ дифференцируема в точке x и

$$S'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty}(a_n \cdot x^n)\right)' = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n \cdot x^n)' = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n \cdot n \cdot x^{n-1}).$$

Если ряд $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n \cdot n \cdot x^{n-1})$ сходится при $x = R$ $(-R)$, то утверждение теоремы остается верно и при $x = R$.

8.100 Теорема о единственности степенного ряда

Теорема 52 (Об единственности)**.** Если существует окрестность U точки $x = 0$ суммы рядов $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n \cdot x^n)$ и $\sum_{n=0}^{\infty}(b_n \cdot x^n)$ совпадают для всех $x \in U$, то $\forall n$

$$a_n = b_n.$$

8.101 Ряд Тейлора

Определение 36 (Ряд Тейлора)**.** Пусть $f(x)$ бесконечно дифференцируема в окрестности точки x_0. *Рядом Тейлора* функции $f(x)$ в этой окрестности называется ряд:

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}\cdot(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}\cdot(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot(x-x_0)^n + \ldots$$

8.102 Утверждение о связи степенного ряда и ряда Тейлора

Утверждение. Если функция $f(x)$ в окрестности точки x_0 является суммой степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n \cdot (x-x_0)^n\right)$, то этот ряд является ее рядом Тейлора.

8.103 Разложение элементарных функций в степенной ряд

Лемма 1. Если $f(x)$ – ∞-но дифференцируемая функция на $[0; H]$ и $\exists L > 0 : \ \forall n \in \mathbb{N}$ и $\forall x \in [0; H]$

$$\left|f^{(n)}(x)\right| \leqslant L,$$

то на $[0; H]$ функция f может быть разложена в степенной ряд (ряд Тейлора).

9 Интегралы, зависящие от параметра

9.104 Собственный интеграл, зависящий от параметра

Определение 37 (Интеграл, зависящий от параметра). *Интегралом, зависящим от параметра* называется функция

$$F(y) = \int_{E_y} f(x,y)dx = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)dx.$$

9.105 Теорема о непрерывности собственного интеграла, зависящего от параметра

Тут не уверен, оно или нет.

Теорема 53. Если функция $f(x,y)$ непрерывна на $P = [a;b] \times [c;d]$, то функция $F(y) = \int_a^b f(x,y)dx$ непрерывна на $[c;d]$.

9.106 Теорема о дифференцировании собственного интеграла, зависящего от параметра

Теорема 54 (О дифференцировании собственного интеграла, зависящего от параметра). Пусть:

- $\alpha(y), \beta(y)$ – дифференцируемые на $[c;d]$,
- $\forall y \in [c;d]$ $a \leqslant \alpha(y) \leqslant b$ и $a \leqslant \beta(y) \leqslant b$,
- $f(x,y)$ – непрерывна на $P = [a;b] \times [c;d]$,
- $\frac{\partial f}{\partial y}$ – непрерывна на P,

тогда $F(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)dx$ дифференцируема на $[c;d]$ и

$$F'(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx + f\big(\beta(y),y\big) \cdot \beta'(y) - f\big(\alpha(y),y\big) \cdot \alpha'(y)$$

(формула Лейбница)

9.107 Теорема об интегрировании собственного интеграла, зависящего от параметра

Теорема 55 (Об интегрировании собственного интеграла по параметру). Если $f(x,y)$ непрерывна на $P = [a;b] \times [c;d]$, то функция $F(y) = \int_a^b f(x,y)dx$ интегрируема на $[c;d]$ и

$$\int_c^d F(y)dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx.$$

Обычно пишут:

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy.$$

9.108 Несобственный интеграл, зависящий от параметра

Определение 38 (Несобственный интеграл, зависящий от параметра)**.** Пусть $\forall y \in Y\ \exists \int_a^\omega f(x,y)dx$.

Несобственным интегралом, зависящим от параметра y называется функция

$$F(y) = \int_a^\omega f(x,y)dx. \tag{12}$$

9.109 Равномерная сходимость несобственного интеграла, зависящего от параметра

Определение 39 (Равномерно сходящийся интеграл)**.** Говорят, что интеграл 12 сходится на Y *равномерно*, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists B \in [a;\omega) :\ \forall b \in (B;\omega)$

$$\left| \int_b^\omega f(x,y)dx \right| < \varepsilon.$$

9.110 Утверждение об эквивалентности сходимости несобственного интгерала, зависящего от параметра и семейства функций – интегралов по верхнему пределу, зависящих от параметра

Примечание. Далее, рассмотрим семейство функций

$$F_b(y) = \int_a^b f(x,y)dx,\ b \in [a;\omega). \tag{13}$$

Утверждение. Интеграл 12 сходится на Y равномерно $\Rightarrow$ семейство функций 13 сходится на Y равномерно при $b \to \omega$.

9.111 Критерий Коши равномерной сходимости несобственных интегралов, зависящих от параметра

Теорема 56 (Критерий Коши равномерной сходимости несобственного интеграла зависящего от параметра)**.** Интеграл $F(y) = \int_a^\omega f(x,y)dx$ равномерно сходится $\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists B\in[a;\omega):\ \forall b_1,b_2\in(B;\omega)\ \forall y\in Y$

$$\left|\int_{b_1}^{b_2} f(x,y)dx\right|<\varepsilon.$$

9.112 Следствие критерия Коши равномерной сходимости несобственных интегралов, зависящих от параметра

Следствие. Пусть $f(x,y)$ непрерывна на множестве $[a;\omega)\times[c;d]$, $\int_a^\omega f(x,y)dx$ сходится на $[c;d)$ и расходится в точке $y=d$.

Отсюда следует, что $\int_a^\omega f(x,y)dx$ на $[c;d)$ сходится неравномерно.

9.113 Признак Вейерштрасса и его следствие

Теорема 57 (Признак Вейерштраса)**.** Пусть

1. $\forall y\in Y$ и $\forall x\in[a;\omega)$
$$\left|f(x,y)\right|\leqslant g(x,y).$$
2. $\int_a^\omega g(x,y)dx$ – равномерно сходится на Y.

Тогда $\int_a^\omega f(x,y)dx$ – равномерно сходится на Y.

Следствие. Если $\forall y\in Y,\ \forall x\in[a;\omega)$

$$\left|f(x,y)\right|\geqslant g(x),$$

то из сходимости $\int_a^\omega g(x)dx \Rightarrow$ равномерна сходимость

$$\int_a^\omega f(x,y)dx \text{ на } Y.$$

9.114 Признак Абеля

Теорема 58 (Признак Абеля)**.** Если

1. $\int_a^\omega g(x,y)dx$ равномерно сходится на Y.
2. $\forall y\in Y$ функция $f(x,y)$ монотонна по x и равномерно ограничена, то есть $\exists M>0:\ \forall x\in[a;\omega)$ и $\forall y\in Y$
$$|f(x,y)|\leqslant M.$$

Тогда

$$\int_a^\omega \big(f(x,y)\cdot g(x,y)\big)dx \text{ – сходится равномерно на } Y.$$

9.115 Признак Дирихле

Теорема 59 (Признак Дирихле). Если

1. $\int_a^b g(x,y)dx$ ограничена в совокупности, то есть $\exists L > 0: \ \forall y \in Y$ и $\forall b \in [a;\omega)$
$$\left|\int_a^b g(x,y)dx\right| \leqslant L.$$
2. $\forall y \in Y$ $f(x,y)$ монотонна по x и $f(x,y) \to 0$ равномерно при $x \to \omega$.

Тогда
$$\int_a^\omega \big(f(x,y)\cdot g(x,y)\big)dx \text{ -- сходится равномерно на } Y.$$

10 Функциональные свойства несобственного интеграла, зависящего от параметра

10.116 Теорема о предельном переходе под знаком несобственного интеграла, зависящего от параметра

Теорема 60 (О предельном переходе под знаком несобственного интеграла). Если

1. $\forall b \in [a;\omega)$
$$f(x,y) \underset{\mathfrak{B}_y}{\rightrightarrows} \phi(x)$$
на $[a;b]$, где $\mathfrak{B}_y$ – база на Y.
2. $\int_a^\omega f(x,y)dx$ сходится равномерно на Y.

Тогда
$$\lim_{\mathfrak{B}_y} F(y) = \lim_{\mathfrak{B}_y}\int_a^\omega f(x,y)dx = \int_a^\omega \lim_{\mathfrak{B}_y} f(x,y)dx = \int_a^\omega \phi(x)dx.$$

10.117 Теорема о непрерывности несобственного интеграла, зависящего от параметра

Следствие (Непрерывность несобственного интеграла, зависящего от параметров). Если

1. $f(x,y)$ непрерывна на $[a;\omega)\times[c;d]$.
2. $\int_a^\omega f(x,y)dx$ равномерно сходится на $[c;d]$.

Тогда $F(y) = \int_a^\omega f(x,y)dx$ непрерывна на $[c;d]$.

10.118 Теорема о дифференцировании несобственного интеграла, зависящего от параметра

Теорема 61 (О дифференцировании несобственного интеграла по параметру)**.** Если

1. $f(x, y)$ непрерывна на $[a; \omega) \times [c; d]$ и имеет непрерывную производную по y.
2. $\int_a^\omega f'_y(x, y)dx$ равномерно сходится на $[c; d]$.
3. $\int_a^\omega f(x, y)dx$ сходится хотя бы в одной точке $y_0 \in (c; d)$.

Тогда

1. $\int_a^\omega f(x, y)dx$ сходится равномерно на $[c'; d'] \subset (c; d)$.
2. $F(y) = \int_a^\omega f(x, y)dx$ дифференцируема на $(c; d)$.
3. $F'(y) = \left(\int_a^\omega f(x, y)dx\right)'_y = \int_a^\omega f'_y(x, y)dx$.

10.119 Теорема об интегрировании несобственного интеграла, зависящего от параметра

Теорема 62 (Об интегрировании несобственного интеграла по параметру)**.** Если

1. $f(x, y)$ непрерывна на $[a; \omega) \times [c; d]$.
2. $\int_a^\omega f(x, y)dx$ равномерно сходится на $[c; d]$.

Тогда функция $F(y) = \int_a^\omega f(x, y)dx$ интегрируема по Риману на $[c; d]$ и

$$\int_c^d dy \int_a^\omega f(x, y)dx = \int_a^\omega dx \int_c^d f(x, y)dy.$$

10.120 Теорема о перестановке двух несобственных интегралов, зависящих от параметра

Теорема 63 (О перестановке несобственного интерграла, зависящего от параметра)**.** Пусть

1. $f(x, y)$ непрерывна на $[a; \omega) \times [c; \widetilde{\omega})$.
2. $\forall d \in [c; \widetilde{\omega})$ $\int_a^\omega f(x, y)dx$ сходится равномерно на $[c; d]$.
3. $\forall b \in [a; \omega)$ $\int_c^{\widetilde{\omega}} f(x, y)dx$ сходится равномерно на $[a; b]$.

4. Существует хотя бы одни из интегралов:

$$\int_a^{\omega} dx \int_c^{\widetilde{\omega}} \left|f(x,y)\right| dy \quad \text{или} \quad \int_c^{\widetilde{\omega}} dy \int_a^{\omega} \left|f(x,y)\right| dx.$$

Тогда существует

$$\int_a^{\omega} dx \int_c^{\widetilde{\omega}} f(x,y) dy = \int_c^{\widetilde{\omega}} dy \int_a^{\omega} f(x,y) dx.$$

11 Эйлеровы интегралы

11.121 Бетта-функция

$$\boxed{B(\alpha,\beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1} \cdot (1-x)^{\beta-1} dx}$$

11.122 Гамма-функция

$$\boxed{\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} \cdot e^{-x} dx}$$

11.123 Свойства бетта-функции

1. **ООФ**

   Утверждение. $B(\alpha,\beta)$ определенная при всех $\alpha > 0,\ \beta > 0$.

2. **Симметричность**

   Утверждение.
   $$B(\alpha,\beta) = B(\beta,\alpha).$$

3. **Формула понижения**

Примечание (Формула понижения для β-функции).

$$B(\alpha,\beta) = \int_0^1 \underbrace{x^{\alpha-1}}_{u} \underbrace{(x-1)^{\beta-1}dx}_{v} =$$

$$= \begin{vmatrix} u = x^{\alpha-1} & du = (\alpha-1)x^{\alpha-2}dx \\ v = -\frac{1}{\beta}(1-x)^{\beta} & dv = (x-1)^{\beta-1}dx \end{vmatrix} =$$

$$= -x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta}\cdot\frac{1}{\beta}\Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{\beta}(1-x)^{\beta}(\alpha-1)x^{\alpha-2}dx =$$

$$= \frac{\alpha-1}{\beta}\int_0^1 x^{\alpha-2}(1-x)^{\beta}dx = \frac{\alpha-1}{\beta}\int_0^1 \frac{1-x}{1-x}x^{\alpha-2}(1-x)^{\beta}dx =$$

$$= \frac{\alpha-1}{\beta}\int_0^1 (1-x)x^{\alpha-2}(1-x)^{\beta-1}dx =$$

$$= \frac{\alpha-1}{\beta}\int_0^1 \big(x^{\alpha-2}(1-x)^{\beta-1} - x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\big)dx =$$

$$= \frac{\alpha-1}{\beta}\left(\int_0^1 (1-x)^{\beta-1}dx - \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx\right) =$$

$$= \frac{\alpha-1}{\beta}\big(B(\alpha-1,\beta) - B(\alpha,\beta)\big).$$

$$B(\alpha,\beta) = \frac{\alpha-1}{\beta}\big(B(\alpha-1,\beta) - B(\alpha,\beta)\big) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B(\alpha,\beta)\left(1+\frac{\alpha-1}{\beta}\right) = \frac{\alpha-1}{\beta}B(\alpha-1,\beta).$$

$$\boxed{B(\alpha,\beta) = \frac{\alpha-1}{\beta+\alpha-1} - B(\alpha-1,\beta)}, \quad \alpha > 1,\ \beta > 0.$$

Пусть $\beta = 1$:

$$B(\alpha,1) = \int_0^1 x^{\alpha-1}dx = \frac{x^{\alpha}}{\alpha}\Big|_0^1 = \frac{1}{\alpha}.$$

Далее, если $\beta = n \in \mathbb{N}$, то

$$B(\alpha,n) = B(n,\alpha) =$$

$$= \frac{n-1}{\alpha+n-1}\cdot B(n-1,\alpha) = \frac{n-1}{\alpha+n-1}\cdot\frac{n-2}{\alpha+n-2}\cdot B(n-2,\alpha) =$$

$$= \frac{(n-1)!}{(\alpha+n-1)(\alpha+n-2)\dots(\alpha+1)}\cdot B(\alpha,1) =$$

$$= \frac{(n-1)!}{(\alpha+n-1)\dots(\alpha+1)\alpha}.$$

Отсюда:

$$\boxed{B(m,n) = \frac{(n-1)!}{(m+n-1)\dots(m+1)m} = \frac{(n-1)!\cdot(m-1)!}{(m+n-1)!}}$$

11.124 Свойства гамма-функции

1. **ООФ**

Утверждение. $\Gamma(\alpha)$ определенная при $\alpha > 0$.

2. **Правило дифференцирования** $\Gamma(\alpha)$

Утверждение. $\forall \alpha > 0$ $\Gamma(\alpha)$ дифференцируема в точке α и

$$\Gamma'(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}\ln x dx.$$

Более того, $\Gamma(\alpha)$ бесконечно дифференцируема в точке α и n-ная производная

$$\Gamma^{(n)}(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}\ln^n x dx.$$

3. **Формула понижения**

Примечание (Формула понижения для γ-функции).

$$\Gamma(\alpha+1) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha}e^{-x}dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} u = x^\alpha & du = \alpha x^{\alpha-1}dx \\ v = -e^{-x} & dv = e^{-x}dx \end{matrix} \right| = x^\alpha(-e^{-x})\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \alpha x^{\alpha-1}e^{-x}dx =$$

$$= \alpha\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx = \alpha\Gamma(\alpha).$$

$$\boxed{\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)}$$

Пусть $\alpha = n \Rightarrow$

$$\Rightarrow \Gamma(n+1) =$$
$$= n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = n(n-1)(n-2)\Gamma(n-2) =$$
$$= n(n-1)\dots\Gamma(1),$$

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} x^0e^{-x}dx = -e^{-x}\Big|_0^{+\infty} = 1.$$

$$\boxed{\Gamma(n+1) = n!}$$

12 Кратные интегралы. Мера Жордана в $\mathbb{R}^n$

12.125 Клетка в $\mathbb{R}^n$

Определение 40 (Клетка). Множество

$$\Pi = \left\{(x_1, \ldots, x_n) : \ a_i \leqslant x_i < b_i, \ i = \overline{1, n}\right\} \tag{14}$$

называется *клеткой* в $\mathbb{R}^n$.

Пустое множество также считается клеткой.

клетки:	в $\mathbb{R}$	–	$[a; b)$ полуинтервалы
	в $\mathbb{R}^2$	–	прямоугольники, у которых удалены соответствующиеся стороны
	в $\mathbb{R}^3$	–	параллелепипеды, у которых удалены соответствующиеся грани

12.126 Клеточное множество в $\mathbb{R}^n$

Определение 41 (Клеточное множество). Множество $A \subset \mathbb{R}^n$ называется *клеточным*, если оно является объединением конечного числа попарно непересекающихся клеток.

12.127 Свойства клеточных множеств (1-6)

- Свойсто (1)

  Утверждение. Пересечение двух клеток есть клетка.

- Свойсто (2)

  Утверждение. Объединение конечного числа непересекающихся клеточных множеств является клеточным множеством.

- Свойсто (3)

  Утверждение. Пересечение двух клеточных множеств есть клеточное множество.

- Свойсто (4)

  Утверждение. Разность двух клеток есть клеточное множество.

- Свойсто (5)

  Утверждение. Разность двух клеточных множеств есть клеточное множество.

- Свойсто (6)

Утверждение. Объединение конечного числа клеточных множеств есть клеточное множество.

12.128 Мера клеточного множества

Определение 42 (Мера клеточного множества). *Мерой* $m(A)$ *клеточного множества* A, разбитого на клетки $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_n$ называется число:

$$m(A) = \sum_{i=1}^{n} m(\Pi_i) \tag{15}$$

12.129 Лемма о корректности определения меры клеточного множества

Лемма 2. Мера клеточного множества не зависит от способа разбиения множества на клетки.

12.130 Свойства меры клеточных множеств (1-4)

- Свойсто 1

Утверждение. Если клеточные множества $A_1, \ldots, A_n$ попарно не пересекаются, то

$$m(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} m(A_i) \tag{16}$$

- Свойство 2

Утверждение. Если A и B – клеточные множества и $A \subset B$, то

$$m(B) = m(A) + m(B \setminus A) \tag{17}$$

и $m(A) \leqslant m(B)$.

- Свойство 3

Утверждение. Если $A_1, \ldots, A_n$ – клеточные множества, то

$$m(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n} m(A_i) \tag{18}$$

- Свойство 4

Утверждение. Для $\forall$ клеточного множества A и $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ клеточное множество

$$A_\varepsilon : \; A_\varepsilon \subset \overline{A_\varepsilon} \subset A^\circ \subset A,$$

где $\overline{A_\varepsilon}$ – замыкание множества A_ε, A° – совокупность все внутренних точке множества A.

12.131 Множество, измеримое по Жордану

Определение 43 (Измеримое по Жордану множество). Множество $Q \subset \mathbb{R}$ называется *измеримым по Жордану*, если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ клеточные множества A и B:

$$A \subset \Omega \subset B \quad \text{и} \quad m(B) - m(A) < \varepsilon.$$

12.132 Мера измеримого по Жордану множества

Определение 44 (Мера для измеримого по Жордану множества). Если Ω – измеримое по Жордану множество, то его *мерой* $m(\Omega)$ называется число для $\forall A$ и B – клеточных множеств: $A \subset \Omega \subset B$ выполнено

$$m(A) \leqslant m(i) \leqslant m(B).$$

12.133 Лемма о корректности определения меры измеримого по Жордану множества

Лемма 3. Определение меры измеримого по Жордану множества корректно, число $m(\Omega)$ $\exists$ и !, причем

$$m(\Omega) = \sup_{A \subset \Omega} m(A) = \inf_{B \supset \Omega} m(B).$$

12.134 Множество меры нуль

Утверждение. Если $E \subset \mathbb{R}^n$ и $\forall \varepsilon > 0$ $\exists B = B_\varepsilon :$ $E \subset B$ и $m(B) < \varepsilon \Rightarrow m(E) = 0$.

Определение 45 (Множество меры нуль). Множество, удовлетворяющее условию утверждения, называется *множеством меры нуль*.

12.135 Свойства множества меры нуль (1-3)

- Свойство 1

  Утверждение. Если $E \subset \mathbb{R}^n$ и $\forall \varepsilon > 0$ $\exists B = B_\varepsilon :$ $E \subset B$ и $m(B) < \varepsilon \Rightarrow m(E) = 0$.

- Свойство 2

Утверждение. Объединение конечного числа множеств меры нуль есть множество меры нуль.

- Свойство (3)

Утверждение. Подмножество множества меры нуль есть множество меры нуль.

12.136 Критерий измеримости множества в $\mathbb{R}^n$

Теорема 64 (Критерий измеримости множества в $\mathbb{R}^n$). Множество $\Omega \subset \mathbb{R}$ измеримо по Жордану $\Leftrightarrow$ Ω – ограничено и $m(G\Omega) = 0$ (его граница меры нуль).

12.137 Свойства множеств, измеримых по Жордану (1-2, без доказательств)

- Свойство (1)

Утверждение. Если множества Ω_1 и Ω_2 измеримы по Жордану, то множества $\Omega_1 \cup \Omega_2$, $\Omega_1 \cap \Omega_2$, $\Omega_1 \setminus \Omega_2$ также измеримы по Жордану.

- Свойство (2)

Утверждение. Если множества Ω_i, $i = \overline{1, n}$ измеримы по Жордану, то множество $\bigcup\limits_{i=1}^{n} \Omega_i$ измеримо по Жордану и

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{n} \Omega_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} m(\Omega_i)$$

и более того, если Ω_i попарно не пересекаются, то

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{n} \Omega_i\right) = \sum_{i=1}^{n} m(\Omega_i).$$

13 Определение и свойства кратного интеграла Римана

13.138 Разбиение множества

Определение 46 (Разбиение совокупности измеримых по Жордану множеств). Пусть множество $G \subset \mathbb{R}^n$ измеримо по Жордану.

Совокупность измеримых по Жордану множеств $G_i \subset \mathbb{R}^n$, $i = \overline{1, N}$, попарно пересекающихся $G = \bigcup\limits_{i=1}^{n} G_i$ называются *разбиением* множества G.

Обозначение: $T = \{G_i\}$

13.139 Мелкость разбиения

Определение 47 (Мелкость разбиения). Число $l(T) = \max d(G_i)$ называется *мелкостью разбиения* T.

13.140 Продолжение разбиения

Не нашел.

13.141 Интегральная сумма Римана

Определение 48 (Интегральная сумма Римана от функции на множестве). Пусть функция $f(x) = f(x_1, \dots, x_n) : G \to \mathbb{R}$ определена на измеримом по Жордану множестве $G \subset \mathbb{R}^n$, $T = \{G_{ij}\}$ – разбиение множества G.

Возьмем $\xi_i \in G_i$, $i = \overline{1, N}$.

Выражение

$$\sigma_T = \sigma_T(f, \xi, G) = \sum_{i=1}^{N} f(\xi_i) m(G_i)$$

называется *интегральной суммой Римана* от функции $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ на множестве, соответствующей разбиению T и выборке $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_N)$.

13.142 Суммы Дарбу

Не нашел.

13.143 Кратный интеграл Римана

Примечание. Число I будем называть *кратным интегралом Римана* от функции $f(x)$ по множеству G, а функцию $f(x)$ – *интегрируемой* на множестве G.

Обозн.
инт. Римана

$\swarrow$ $\searrow$

кратное $\int\limits_G f(x)dx$

развернутое $\underbrace{\int \dots \int\limits_G}_{n \text{ раз}} f(x_1, \dots, x_n) dx_1, \dots, dx_n$

При $n = 2$ кратный интеграл Римана называется *двойным* и обозна-

чается
$$\iint\limits_G f(x,y)dxdy.$$

При $n = 3$ – *тройным* и обозначается
$$\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz.$$

13.144 Критерий интегрируемости (без доказательства)

Теорема 65 (Критерий интегрируемости)**.** Ограниченная формула $f(x)$ интегрируема на измеримом по Нордану множестве $G \subset \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ \forall T\ l(T) < \delta$
$$\overline{S_T} - S_T < \varepsilon$$
(то есть $\overline{S_T} - S_T \to 0$ при $l(T) \to 0$)

13.145 Критерий интегрируемости более сильный (без доказательства)

Теорема 66 (Критерий интегрируемости, более сильная)**.** Ограниченная функция $f(x)$ интегрируема на измеримом по Жордану множестве $G \subset \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists T$ множества G:
$$\overline{S_T} - S_T < \varepsilon.$$

13.146 Классы интегрируемых функций (2 теоремы, без доказательств)

Теорема 67. Непрерывная на измеримом по Жордану компактном множестве G, функция $f(x)$ интегрируема на этом множестве.

Теорема 68. Пусть функция $f(x)$ ограничена на измеримом компакте $G \subset \mathbb{R}^n$ и множество разрыва $f(x)$ имеет Жорданову меру нуль.

Тогда $f(x)$ интегрируема на G.

13.147 Свойства кратного интеграла (1-8, без доказательств)

- Свойство 1

Утверждение. Справедливо равенство
$$\int\limits_G 1dx = m(G).$$

- Свойство ②

Утверждение. Если $f(x) > 0$ и $f(x)$ – интегрируемая на измеримом по Жордану множестве G функция, то

$$\int\limits_G f(x)dx \geqslant 0.$$

- Свойство ③

Утверждение. Если $f_1(x)$ и $f_2(x) = f_2(x_1, \ldots, x_n)$ – интегрируемые на измеримом по Жордану множестве G функции, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то и функция $\alpha \cdot f_1(x) + \beta \cdot f_2(x)$ интегрируема на G и

$$\int\limits_G \big(\alpha \cdot f_1(x) + \beta \cdot f_2(x)\big)dx = \alpha \int\limits_G f_1(x)dx + \beta \int\limits_G f_2(x)dx.$$

- Свойство ④

Утверждение. Если $f_1(x)$ и $f_2(x)$ – интегралы на измеримом по Жордану множестве G и $\forall x \in G$ $f_1(x) \leqslant f_2(x)$, то

$$\int\limits_G f_1(x)dx \leqslant \int\limits_G f_2(x)dx.$$

- Свойство ⑤

Утверждение. Если функция $f(x)$ непрерывна на измеримом связном компакте G, то $\exists \xi \in G$:

$$\int\limits_G f(x)dx = f(\xi)m(G).$$

- Свойство ⑥

Утверждение. Если G_k, $k = \overline{1, m}$ если разбиение множества G, то функция $f(x)$ интегрируема на $G \Leftrightarrow f(x)$ интегрируема на G_k, $k = \overline{1, m}$, при этом

$$\int\limits_G f(x)dx = \sum_{k=1}^{m} \int\limits_{G_k} f(x)dx.$$

- Свойство ⑦

Утверждение. Произведение интегрируемых на измеримом множестве G функцией является интегрируемой на G функцией.

- Свойство ⑧

Утверждение. Если $f(x)$ интегрируема на множестве G функция, то функция $|f(x)|$ также интегрируема

$$\left|\int\limits_G f(x)dx\right| \leqslant \int\limits_G |f(x)|dx.$$

13.148 Теорема о сведении двойного интеграла по прямоугольнику к повторному интегралу

Теорема 69 (Формула сведения двойного интеграла по прямоугольнику к повторному)**.** Пусть

1. Функция $f(x,y)$ интегрируема на прямоугольнике
$$\Pi = \{(x,y): \ a \leqslant x \leqslant b, \ c \leqslant y \leqslant d\}.$$
2. $\int_c^d f(x,y)dy \ \exists \ \forall x \in [a;b]$.

Тогда функция $F(x) = \int_c^d f(x,y)dy$ интегрируема на отрезке $[a;b]$ и справедлива формула:

$$\boxed{\iint\limits_{\Pi} f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_c^d f(x)dy}$$

13.149 Теорема о сведении двойного интеграла по элементарной области к повторному интегралу

Теорема 70 (Сведение двойного интеграла по элементарной области к повторному)**.** Пусть Ω – элементарная относительно оси Oy область, функция $f(x,y)$ интегрируема на $\overline{\Omega} = \Omega \cup G\Omega$ и $\forall x \in [a;b] \ \exists \ \int f(x,y)dx$.

Тогда справедлива следующая формула:

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy. \tag{19}$$

13.150 Теорема Фубини (без доказательства)

КТО ЭТО

13.151 Формула замены переменной в кратном интеграле (без доказательства)

Теорема 71 (Формула замены переменных в кратном интеграле)**.** Пусть отображение $F: \Omega \to \mathbb{R}^n$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – открытое множество) является взаимнооднозначным и удовлетворяет условиям 1.-3.

Пусть G – измеримый компат: $G \subset \Omega$. Тогда, если функция $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ непрерывна на множестве $G' = F(G)$, то справедлива следующая формула замены переменных в кратном интеграле:

$$\int\limits_{G'} f(x)dx = \int \dots \int\limits_{G'} f(x_1, \dots, x_n)dx_1 dx_2 \dots dx_n =$$

$$= \int\limits_{G} f\big(\phi_1(u), \dots, \phi_n(u)\big)\big|\mathfrak{I}(u)\big|du,$$

$$u = (u_1, \dots, u_n), \quad du = du_1 du_2 \dots du_n.$$

14 Криволинейные и поверхностные интегралы

14.152 Криволинейный интеграл первого рода

Примечание. Пусть на некотором множестве, содержащем кривую Γ задано непрерывная функция $R(x, y, z)$.

Если гладкая кривая Γ задана уравнением

$$\overline{r} = \overline{r}(A) \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}, \ \alpha \leqslant t \leqslant \beta,$$

то определенный интеграл

$$\int_\alpha^\beta R\big(x(t), y(t), z(t)\big) \cdot \big|\overline{r}'(t)\big|dt =$$

$$= \int_\alpha^\beta R\big(x(t), y(t), z(t)\big) \cdot \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}dt.$$

Будем называть *криволинейным интегралом I-го рода* от функции $R(x, y, z)$ по кривой Γ и обозначать:

$$\boxed{\int\limits_\Gamma R(x, y, z)ds}$$

То есть

$$\int\limits_\Gamma R(x, y, z)ds = \int_\alpha^\beta R\big(x(t), y(t), z(t)\big)\big|\overline{r}'(t)\big|dt.$$

14.153 Свойства криволинейного интеграла первого рода (1-3, без доказательств)

- Свойство 1

Утверждение. Криволинейный интеграл I-го рода не зависит от параметризации кривой.

- Свойство ②

Утверждение. Криволинейный интеграл I-го рода не зависит от ориентации кривой, то есть

$$\int\limits_{\Gamma} R(x,y,z)ds = \int\limits_{\overline{\Gamma}} \overline{R}(x,y,z)ds.$$

- Свойство ③

Утверждение. Криволинейный интеграл I-го рода аддитивен относительно кривой, если $\Gamma = \bigcup\limits_{i=1}^{N} \Gamma_i$, то

$$\int\limits_{\Gamma} R(x,y,z)ds = \sum_{i=1}^{N} \int\limits_{\Gamma_i} R(x,y,z)ds.$$

14.154 Криволинейные интегралы второго рода

Примечание. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ – область, в каждой точке которой задан вектор. Тогда говорят, что в области Ω *задано векторное поле.*

Если фиксирована декартова прямоугольная система координат, то векторное поле можно задать при помощи трех скалярных функций:

$$\overline{F}(x,y,z) = \{P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)\}.$$

Если функции P, Q, R непрерывны в области Ω, то и поле $\overline{F}(x,y,z)$ называется *непрерывным* в области Ω.

Если P, Q, R непрерывно дифференцируемы в Ω, то и векторное поле $\overline{F}$ называется непрерывно дифференцируемым в Ω.

Если можно так подобрать ДСК, что $R \equiv 0$, а P и Q не зависят от z, то векторное поле $\overline{F}$ называется *плоским*:

$$\overline{F}(x,y) = \{P(x,y), Q(x,y)\}.$$

Пусть в области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ определено непрерывное векторное поле $\overline{F}(x,y,z) = \{P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)\}$, $\overline{r} = \overline{r}(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, уравнение гладкой (кусочно гладкой) кривой $\Gamma \subset \Omega$.

Тогда

$$\int_{\alpha}^{\beta} \overline{F}\big(x(t),y(t),z(t)\big) \cdot \overline{r}'(t)dt = \int_{\alpha}^{\beta} \Big(P\big(x(t),y(t),z(t)\big) \cdot x'(t) + \\ + Q\big(x(t),y(t),z(t)\big) \cdot y'(t) + R\big(x(t),y(t),z(t)\big) \cdot z'(t)\Big)dt$$

называется *криволинейным интегралом II-го рода* от векторного поля $\overline{F}$ на кривой $\Gamma \subset \Omega$.

Тогда по определению

$$\int\limits_{\Gamma} (\overline{F}, d\overline{r}) = \int_{\alpha}^{\beta} F\big(x(t), y(t), z(t)\big)\overline{r}'(t)dt.$$

14.155 Свойства криволинейного интеграла второго рода (1-3, без доказательств)

ОТКУДА

14.156 Формула Грина на плоскости (без доказательства)

ОТКУДА

14.157 Простая поверхность

ОТКУДА

14.158 Почти простая поверхность

ОТКУДА

14.159 Площадь простой поверхности

ОТКУДА

14.160 Площадь почти простой поверхности

ОТКУДА

14.161 Поверхностный интеграл первого рода

ОТКУДА

14.162 Поверхностный интеграл второго рода

ОТКУДА