Комплексный анализ

Данил Заблоцкий

2 марта 2024 г.

Оглавление

Глава 1

Голоморфные функции

Лекция 1: Начало

от 15 фев 12:45

1.1 Комплексная плоскость

1.1.1 Комплексные числа

Примечание. $\mathbb{R}^2 \coloneqq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) \coloneqq (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$
$$(x_1, y_1)(x_2, y_2) \coloneqq (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 - x_2 y_1)$$

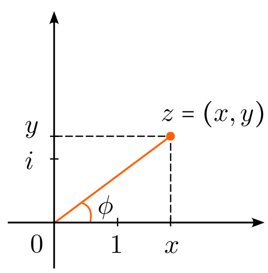


Рис. 1.1: $x = r\cos\phi,\ y = r\sin\phi$

$$\begin{matrix} z = (x, y) = x + iy \\ \overline{z} = x - iy \end{matrix}, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

$$(1, 0) \eqqcolon 1, \quad (0, 1) \eqqcolon i, \quad (0, 0) \eqqcolon 0$$

$$x \eqqcolon Rez, \quad y \eqqcolon Imz$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \eqqcolon |z|$$

$$\phi = argz, \qquad \underbrace{0 \leqslant argz < 2\pi}_{\text{главное значение аргумента}}$$

$$Argz \coloneqq argz + 2\pi k, \ \ k \in \mathbb{Z}$$

$$\boxed{e^{i\phi} = \cos\phi + i \cdot \sin\phi, \ \ \forall \phi \in \mathbb{R}} \text{ – формула Эйлера}$$

$$\boxed{z = |z|(\cos argz + i \cdot \sin argz)} \text{ – тригонометрическая форма записи}$$

$$\boxed{z = |z| e^{iargz}} \text{ – показательная форма записи}$$

$$e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy}, \qquad e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$$

$$z^n = |z|^n e^{inargz}, \qquad z = re^{ir}$$

$$\boxed{z^n = r^n(\cos n\phi + i \sin n\phi)} \text{ – формула Муавра}$$

$$z^n = z_0, \qquad \sqrt[n]{z_0} = \sqrt[n]{|z_0|} \cdot e^{i\frac{argz_0 + 2\pi k}{n}}, \ \ 0 \leqslant k \leqslant n-1$$

Теорема 1 (Свойства комплексных чисел). $\forall z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ справедливы равенства:

1. $z \cdot \overline{z} = |z|^2$.
2. $\overline{(z_1 + z_2)} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$.
3. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.
4. $\overline{\overline{z}} = z$.
5. $\overline{z} = z \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$.
6. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.
7. $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$.
8. $\big||z_1| - |z_2|\big| \leqslant |z_1 - z_2|$.
9. $arg(z_1 \cdot z_2) \underset{(mod\ 2\pi)}{=} argz_1 + argz_2$.
10. $arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) \underset{(mod\ 2\pi)}{=} argz_1 - argz_2$.

Примечание.

$$\xi = \frac{x}{1+|z|^2}, \quad \eta = \frac{y}{1+|z|^2}, \quad \zeta = \frac{|z|^2}{1+|z|^2},$$

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - \zeta = 0.$$

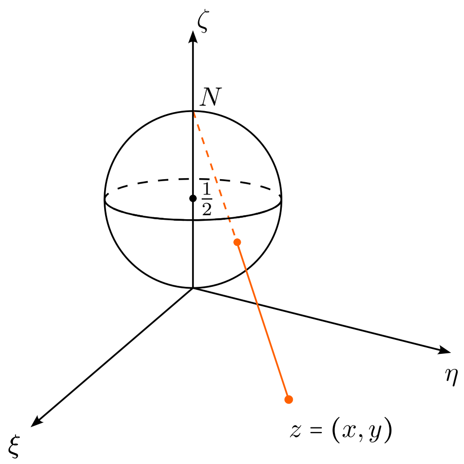


Рис. 1.2: Сфера Римана S

$$P : \mathbb{C} \xrightarrow{\text{на}} S \setminus \{N\}, \quad P(z) = (\xi, \eta, \zeta)$$

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0, \quad A, B, C, D \in \mathbb{R},$$

$$\gamma \text{ – окружность на } \mathbb{C}, \quad P(\Upsilon) \text{ – окружность на } S.$$

$$|z|^2 = x^2 + y^2 = \frac{\zeta}{1-\zeta}, \quad \begin{cases} x = \frac{\xi}{1-\zeta} \\ y = \frac{\eta}{1-\zeta} \end{cases}$$

$$A\zeta + B\xi + C\eta + D(1-\zeta) = 0,$$

$$\overline{\mathbb{C}} \coloneqq \mathbb{C} \cup \{\infty\}, \quad P(\infty) \coloneqq N.$$

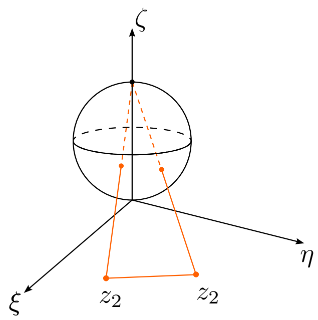
1.1.2 Топология комплексной плоскости

Примечание. $M_1, M_2 \in \mathbb{R}^3$,

$$dist(M_1, M_2) \coloneqq \sqrt{(\xi_1 - \xi_2)^2 + (\eta_1 - \eta_2)^2 + (\zeta_1 - \zeta_2)^2},$$

$d(z_1, z_2) \coloneqq |z_1 - z_2|,\ z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ – расстояние на комплексной плоскости,

$$\rho(z_1, z_2) \coloneqq dist\big(P(z_1), P(z_2)\big).$$



$$B_\varepsilon(z_0) \coloneqq \{z \in \mathbb{C} :\ |z - z_0| < \varepsilon\}$$

Определение 1 (Окрестность)**.** Множество называется *окрестностью* точки, если оно содержит шар с центром в этой точке.

$$\text{Обозначение:} \quad O_z,\ z \in \overline{\mathbb{C}}.$$

Примечание.

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad d(z, \infty) \coloneqq +\infty,$$
$$d :\ \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{R},$$
$$d :\ \mathbb{C}^2 \longrightarrow \overline{\mathbb{R}},$$
$$\rho : \overline{\mathbb{C}^2} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \rho(z, \infty) \in \mathbb{R}.$$

Лекция 2: Продолжение

от 22 фев 12:45

Примечание (Свойства окрестностей)**.**

1. $\forall z \in \overline{\mathbb{C}},\ \forall V \in O_z \quad z \in V.$
2. $\forall z \in \overline{\mathbb{C}},\ \forall U, V \in O_z \quad U \cap V \in O_z.$
3. $\forall z \in \overline{\mathbb{C}},\ \forall U \in O_z,\ \forall V \supset U \quad V \in O_z.$
4. $\forall z \in \overline{\mathbb{C}},\ \forall V \in O_z,\ \exists U \in O_z :\ U \subset V \ \&\ \forall w \in U \quad U \in O_w.$

Определение 2 (Открытое множество)**.** Множество называется *открытым*, если оно является окрестностью каждой своей точки.

Определение 3 (Окрестность множества)**.** *Окрестностью множества* называется множество, являющееся окрестностью каждой точки исходного множества.

Примечание. $D \subset \overline{\mathbb{C}}$, $z \in \mathbb{C}$

$$dist(z, D) \coloneqq \inf_{w \in D} d(z, w).$$

$D_1, D_2 \subset \overline{\mathbb{C}}$

$$dist(D_1, D_2) \coloneqq \inf_{\substack{z \in D_1 \\ w \in D_2}} d(z, w).$$

Определение 4 (Внутренняя точка)**.** $D \subset \overline{\mathbb{C}}$, $z \in D$ называется *внутренней точкой* множества D, если $D \in O_z$.

Определение 5 (Внутренность)**.** Множество всех внутренних точек называется *внутренностью* и обозначается:

$$intD.$$

Определение 6 (Предельная точка множества)**.** Точка называется *предельной точкой множества*, если в любой ее окрестности есть точки множества, отличные от данной.

Замечание. Точка является предельной точкой множества на расширенной комплексной плоскости $\Leftrightarrow$ любая ее окрестность содержит бесконечное число точек данного множества.

Определение 7 (Окрестность бесконечности)**.** $V \subset \overline{\mathbb{C}}$ является *окрестностью бесконечности*, если $\exists \varepsilon > 0 : \{z \in \overline{\mathbb{C}} : |z| > \varepsilon\} \subset V$.

Определение 8 (Точка прикосновения, замыкание)**.** Точка $z \in \overline{\mathbb{C}}$ называется *точкой прикосновения множества* D, если $\forall V \in O_z \quad V \cap D \neq \varnothing$.

Множество всех точек прикосновения называется *замыканием* и обозначается:

$$clD.$$

Определение 9 (Замкнутое множество)**.** Множество называется *замкнутым*, если его дополнение открыто.

Определение 10 (Граничная точка)**.** Точка называется *граничной точкой множества*, если в любой ее окрестности есть как точки множества, так и точки его дополнения.

Обозначение: ∂D.

Примечание. *Множество всех замкнутых подмножеств расширенной комплексной плоскости*:

$$Cl\overline{\mathbb{C}}.$$

Определение 11 (Компактное множество)**.** Множество $\overline{\mathbb{C}}$ называется *компактным*, если любое его открытое покрытие имеет конечное подпокрытие.

Примечание. v – покрытие множества D, если $D \subset \bigcup_{V \in v} V$, $v \subset \underbrace{\mathcal{P}(\overline{\mathbb{C}})}_{2^{\overline{\mathbb{C}}}}$

Теорема 2 (Критерий компактности (первый))**.** Подмножество $\mathbb{C}$ компактно $\Leftrightarrow$ оно замкнуто и ограниченно.

Примечание. Множество ограниченно, если оно содержится в некотором шаре.

Замечание. $\overline{\mathbb{C}}$ – компактно.

Определение 12. $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ сходится к $z \in \mathbb{C}$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} :$ $\forall n \geqslant n_0 \quad |z_n - z| < \varepsilon$.

$$d(z_n, z) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0,$$

$z_n \longrightarrow \infty$, если $\lim\limits_{n \to \infty} |z_n| = \pm\infty$,

$$z = \lim_{n \to \infty} z_n, \quad z_n \xrightarrow[n \to \infty]{} z.$$

Замечание. $z_n \longrightarrow z$ в $\mathbb{C} \Leftrightarrow \begin{cases} Rez_n \longrightarrow Rez \\ Imz_n \longrightarrow Inz \end{cases}$ в $\mathbb{R}$.

$$|z_n - z| = \sqrt{(Rez_n - Rez)^2 + (Imz_n - Imz)^2} \geqslant |Rez_n - Rez|,$$

$$Re(z_1 \pm z_2) = Rez_1 \pm Rez_2.$$

Теорема 3 (Критерий Коши). Последовательность $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ сходится $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}: \ \forall n, m \geqslant n_0$

$$|z_n - z_m| < \varepsilon.$$

Теорема 4 (Критерий Коши (в $\overline{\mathbb{C}}$)). Последовательность $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ сходится $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n, m \geqslant n_0$

$$\rho(z_n, z_m) < \varepsilon.$$

Примечание. $z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} z \Leftrightarrow \rho(z_n, z) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$

Теорема 5 (Критерий компактности (второй)). $D \subset \overline{\mathbb{C}}$, $\forall \{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset D$ $\exists \{z_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}:$

$$z_{n_k} \longrightarrow z \in D.$$

Примечание. $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$

$$S_n \coloneqq \sum_{k=1}^{\infty} z_k, \quad \sum_{n=1}^{\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} S_n.$$

Определение 13 (Числовой ряд). *Числовым рядом* называется формальная сумма членов

Определение 14 (Абсолютно сходящийся числовой ряд). Числовой ряд называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$.

Теорема 6 (Критерий Коши сходимости ряда). Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ сходится $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists m \in \mathbb{N}: \ \forall n \geqslant m\ \forall k \in \mathbb{N}$

$$\underbrace{|z_{n+1} + z_{n+2} + \ldots + z_{n+k}|}_{|S_{n+k} - S_n|} < \varepsilon.$$

Следствие. Если ряд сходится, то его общий член стремится к нулю.

Следствие. Каждый абсолютно сходящийся числовой ряд – сходится.

1.1.3 Пути, кривые и области

Определение 15 (Путь). $\gamma: \ [a; b] \longrightarrow \mathbb{C}$, γ – непрерывное отображение $[a; b]$ в $\mathbb{C}$ – это *путь*.

Пример. $\gamma(t) = e^{it}, \quad o \leqslant t \leqslant 2\pi.$

Определение 16 (Эквивалентные пути).

$$\gamma_1 : [a_1; b_1] \longrightarrow \mathbb{C},$$
$$\gamma_2 : [a_2; b_2] \longrightarrow \mathbb{C}.$$

$\gamma_1 \sim \gamma_2$, если $\exists$ возрастающая непрерывная функция $\phi : [a_1; b_1] \longrightarrow [a_2; b_2]$:

$$\gamma_1(t) = \gamma_2\big(\phi(t)\big), \quad \forall t \in [a_1, b_1].$$

Пример.

$$\begin{array}{ll} \gamma_1(t) = t, & 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ \gamma_2(t) = \sin t, & 0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2} \\ \gamma_3(t) = \sin t, & 0 \leqslant t \leqslant \pi \\ \gamma_4(t) = \cos t, & 0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2} \end{array},$$

$$\phi(t) = \arcsin t, \quad \gamma_1(t) = \gamma_2\big(\phi(t)\big).$$

Определение 17 (Жорданов путь). Путь называется *жордановым*, если он является взаимно однозначной функцией.

Лемма 1. Для каждого жорданова пути $\exists \delta > 0$: для любой не кольцевой точки пути окружность с центром в этой точке с радиусом δ пересекает путь не более чем в двух точках (δ – стандартный радиус жорданова пути).

Определение 18 (Кривая). *Кривой* называется класс эквивалентных между собой путей.

Лекция 3: Продолжение

от 29 фев 12:45

Определение 19 (Связное множество). $A \subset \overline{\mathbb{C}}$ называется *связным*, если $\nexists U, V \in O_P\overline{\mathbb{C}} : \ U \cap A \neq \varnothing, \ U \cap V = \varnothing.$

$O_P\overline{\mathbb{C}}$ – совокупность всех открытых множеств

Пример. $A = \big\{(0, y) : \ -1 \leqslant y \leqslant 1\big\} \cup \big\{\big(x, \sin\frac{1}{x}\big) : \ 0 < x \leqslant 1\big\}$ – связное.

Определение 20 (Линейно связное множество). Множество называется *линейно связным*, если любые его точки можно соединить путем, значения которого лежат в этом множестве.

Замечание. В пространстве $\mathbb{R}^n$, и в частности $\overline{\mathbb{C}}$, любое открытое множество связно $\Leftrightarrow$ оно линейно связно.

Определение 21 (Область)**.** *Областью* в $\overline{\mathbb{C}}$ называется любое непустое открытое связное множество.

Определение 22 (Замкнутая область)**.** *Замкнутой областью* будем называть замыкание области.

1.2 Функции комплексного переменного

1.2.1 Структура функции комплексного переменного

Примечание. $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$

$dom f$ – область определения функции
$im f$ – область значения функции

Определение 23 (Предел отображения)**.** $D \subset dom f$, $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ – предельная точка D. Тогда $w_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ называется *пределом отображения* f,

$$w_0 \coloneqq \lim_{D \ni z \to z_0} f(z), \text{ если } \forall V \in O_{w_0}\ \exists U \in O_{z_0} :\ f(\mathring{U} \cap D) \subset V,$$

$$U \in O_{z_0}, \quad \mathring{U} = U \setminus \{z_0\}.$$

Примечание. В случае, когда $z_0, w_0 \in \mathbb{C}$ следует, что $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :$ $\forall z \in D$

$$0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow \left|f(z) - w_0\right| < \varepsilon.$$

Определение 24 (Непрерывная функция в точке)**.** Функция f называется *непрерывной в точке* $z_0 \in \mathbb{C}$, если:

1. $z_0 \in dom f$.
2. $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ \forall z \in D$

$$0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - w_0| < \varepsilon.$$

Определение 25 (Непрерывная функция на множестве)**.** Функция $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ непрерывна на $D \subset \mathbb{C}$, если

1. $D \subset dom f$.
2. $\forall z_0 \in D\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall z \in D$

$$|z - z_0| < \delta \Rightarrow \left|f(z) - f(z_0)\right| < \varepsilon.$$

Примечание (Функция Дирихле)**.** $D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$, непрерывна на $\mathbb{Q}$, непрерывна на $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Замечание. Если множество является открытым или совпадает с областью определения функции, то непрерывность функции на этом множестве равносильно ее непрерывности в каждой точке.

$$f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}(n \in \mathbb{N}), \quad D \coloneqq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} dom f_n.$$

Определение 26. $A \subset D,\ f : A \to \mathbb{C},\ f_n \rightrightarrows f$ на A, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall z \in A\ \forall n \geqslant n_0$

$$\left|f_n(z) - f(z)\right| < \varepsilon.$$

$(\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant n_0\ \sup\limits_{z \in A}\left|f_n(z) - f(z)\right| < \varepsilon,\ |z - z_0| < \delta \Rightarrow \left|f(z) - f(z_0)\right| < \varepsilon)$.

Теорема 7 (Вейерштрасса)**.** Если $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset C(A),\ f_n \rightrightarrows f$, то $f \in C(A)$.

Определение 27 (Функциональный ряд)**.** *Функциональным рядом* называется формальная сумма членов последовательности функции.

$$\text{Обозначение: } \sum_{n=1}^{\infty} f_n.$$

Определение 28 (Числовой ряд)**.** $\forall z \in D\ \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ называется *числовым рядом* $\{f_n(z)\}_{n \in \mathbb{N}}$.

$$S_n \coloneqq \sum_{k=1}^{n} f_k \text{ – частичная сумма.}$$

Теорема 8 (Признак Вейерштрасса)**.** $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ таков, что $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall z \in A\ |f_n| \leqslant c_n$, причем $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ равномерно абсолютно сходится на A.

Теорема 9 (Критерий Коши (равномерная сходимость)). $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ равномерно сходится на $A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n, m \geqslant n_0$

$$\sup_{z\in A}\left|f_n(z) - f_n(z_0)\right| < \varepsilon.$$

Определение 29 (Линейная функция). Функция $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ называется *линейной*, если $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}\ \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

$$f(\alpha z_1 + \beta z_2) = \alpha f(z_1) + \beta f(z_2).$$

Замечание. Функция $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ является линейной $\Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{C} : \forall z \in \mathbb{C}$

$$f(z) = az$$

1.2.2 Степенные ряды

Примечание. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$, где $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C},\ z, z_0 \in \mathbb{C}$.

Теорема 10 (1-я теорема Абеля). Если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ сходится в точке $\underset{\neq z_0}{z_1} \in \mathbb{C}$, то он абсолютно сходится при $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$. А если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ расходится в точке $\underset{\neq z_0}{z_1} \in \mathbb{C}$, то он расходится и при $|z - z_0| > |z_1 - z_0|$.

Доказательство.

1. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z_1 - z_0)^n$ сходится $\Rightarrow \left|a_n(z_1 - z_0)^n\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

$$c \coloneqq \sup_{n\in\mathbb{N}}\left|a_n(z_1 - z_0)^n\right| < +\infty, \quad |z - z_0| < |z_1 - z_0|.$$

   Рассмотрим

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|a_n(z - z_0)^n\right| = \sum_{n=0}^{\infty}\left|a_n(z_1 - z_0)^n\right| \cdot \left|\frac{z - z_0}{z_1 - z_0}\right|^n \leqslant c \cdot \sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{z - z_0}{z_1 - z_0}\right|^n < +\infty.$$

2. **добавить**

□

Определение 30 (Радиус сходимости). Элемент $R \in [0; +\infty]$ называется *радиусом сходимости* ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$, если при $|z - z_0| < R$ исходный ряд абсолютно сходится, а при $|z - z_0| > R$ исходный ряд расходится.

Теорема 11 (Коши-Адамара). Для степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ положим $l \coloneqq \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$. Тогда:

1. Если $l = 0$, то исходный ряд сходится $\forall z \in \mathbb{C}$.
2. Если $l = \infty$, то исходный ряд сходится только в точке z_0.
3. Если $l \in (0; +\infty)$, то при $|z - z_0| < \frac{1}{l}$, а при $|z - z_0| > \frac{1}{l}$ исходный ряд расходится.

Доказательство.

1. $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$,

$$z \in \mathbb{C}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left|a_n(z-z_0)^n\right|.$$

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|a_n(z-z_0)^n\right|} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \cdot |z - z_0| = 0 \Rightarrow$ ряд сходится.

2. $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$,

$$\exists \{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \qquad \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} \to +\infty.$$

$\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} \cdot |z - z_0| \to +\infty \Rightarrow |a_{n_k}|.$

3. $|z - z_0| < \frac{1}{l} \Rightarrow l|z - z_0| < 1.$

$\square$

Литература

[1] Шабат – «Введение в комплексный анализ, 1976» (том 1)

[2] Привалов – «Введение в ТФКП, 1967»

[3] Бицадзе – «Основы теории аналитических функций комплексного переменного, 1984»

[4] Волковыский, Лунц, Араманович – «Сборник задач по ТФКП», 1975»

[5] Гилев В.М. – «Основы комплексного анализа. Ч.1», 2000»

[6] Исапенко К.А. – «Комплексный анализ в примерах и упражнениях (Ч.1, 2017, Ч.2, 2018)»

[7] Мещеряков Е.А., Чемеркин А.А. – «Комплексный анализ. Практикум»

[8] Боярчук А.К. – «Справочное пособие по высшей математике» (том 4)