Вопросы к экзамену по ДММЛ
3 семестр

Данил Заблоцкий

15 января 2024 г.

Содержание

1 Теория булевых функций

1.1 Определение булевой функции (БФ). Количество БФ от n переменных. Таблица истинности БФ.

Определение 1 (Булева функция от n переменных)**.** *Булева функция от n переменных* – это отображение вида:

$$\{0,1\}^n \to \{0,1\}.$$

Замечание. Количество БФ от n переменных – 2^{2^n}

x_1	x_2	$\cdots$	x_n	$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$
0	0	$\cdots$	0	$f(0,0,\ldots,0)$
0	0	$\cdots$	1	$f(0,0,\ldots,1)$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
1	1	$\cdots$	1	$f(1,1,\ldots,1)$

Таблица 1: Таблица истинности БФ.

1.2 Булевы функции одной и двух переменных (их таблицы, названия). Логические связки и их таблицы истинности.

Примечание. Булевы функции одной переменной:

f_1 – тождественный 0,
f_2 – тождественная формула,
f_3 – отрицание $(\neg 1)$,
f_4 – тождественная 1.

x	f_1	f_2	f_3	f_4
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Таблица 2: Булевы функции одной переменной.

Булевы функции двух переменных:

$\wedge$ – конъюнкция,
$\leftarrow$ – антиимпликация,
$\rightarrow$ – импликация,
$\vee$ – дизъюнкция,
$|$ – штрих Шеффера $(\neg\wedge)$,
$\downarrow$ – стрелка Пирса $(\neg\vee)$,
$\oplus$ – взаимоисключающее или.

x	y	0	$\wedge$	x	y	$\oplus$	$\vee$	$\downarrow$	$\leftrightarrow$	$\neg y$	$\leftarrow$	$\neg x$	$\rightarrow$	$\mid$	1
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Таблица 3: Булевы функции одной переменной.

1.3 Формулы логики высказываний. Представление БФ формулами.

Определение 2 (Формула логики высказывания). *Формула логики высказывания* – это слово алфавита $A_{\text{ЛВ}}$, построенное по правилам:

1. Символ переменной – формула.
2. Символы $0, 1$ – формулы.
3. Если Φ_1, Φ_2 – формулы, то слова

$$(\Phi_1 \wedge \Phi_2),\ (\Phi_1 \leftrightarrow \Phi_2),\ (\Phi_1 \rightarrow \Phi_2),\ \ldots,\ \neg\Phi_1 \text{ – тоже формулы.}$$

Замечание. *Алфавит* – произвольное множество, элементы этого множества – *символы алфавита*.

Слова алфавита A – это конечная последовательность символов алфавита A. *Алфавит логики высказываний*:

$$A_{\text{ЛВ}} = \{x, y, z, \ldots, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \oplus, |, \downarrow, \neg, (,), 0, 1\}$$

Замечание. Очевидно, что каждой формуле логики высказываний можно поставить в соответствие булеву функцию, причем если формуле Φ_1 соответствует функция f_1, а формуле Φ_2 – функция f_2 и $\Phi_1 \equiv \Phi_2$, то $f_1 \equiv f_2$.

Каждая формула $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ логики высказываний однозначно определяет некоторую булеву функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$. Это булева функция, определенная таблицей истинности формулы Φ.

1.4 Тождественно истинные (ложные) и выполнимые БФ.

Определение 3 (Тождественно истинная (ложная) формула). Формула $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ называется *тождественно истинной (ложной)*, если для любого набора значений

$$\Phi(x_1, \ldots, x_n) = 1\ (0).$$

Определение 4 (Выполнимая формула). Формула $\Phi(x_1,\dots,x_n)$ называется *выполнимой*, если существует набор значений, для которого

$$\Phi(x_1,\dots,x_n)=1.$$

1.5 Эквивалентные формулы. Основные эквивалентности теории булевых функций.

Определение 5 (Эквивалентные формулы). Формулы $\Phi(x_1,\dots,x_n)$ и $U(x_1,\dots,x_n)$ – *эквивалентные*, если:

$$\forall a_1,\dots,a_n\in\{0,1\}:\ \Phi(a_1,\dots,a_n)=1\Leftrightarrow U(a_1,\dots,a_n)=1.$$

Основные эквивалентности теории булевых функций:

- $x\vee y\sim y\vee x,\quad xy\sim yx;$
- $x\vee(y\vee z)\sim(x\vee y)\vee z,\quad x(yz)\sim(xy)z;$
- $x\vee(yz)\sim xy\vee xz,\quad (x\vee y)(x\vee z)\sim x\vee yz;$
- $x\vee x\sim x,\quad xx\sim x;$
- $\neg(x\vee y)\sim\neg x\neg y,\quad \neg(xy)\sim\neg x\vee\neg y;$
- $\neg\neg x\sim x;$
- $x\vee xy\sim x,\quad x(x\vee y)\sim x;$
- $\neg x\vee xy\sim\neg x\vee y,\quad \neg x(x\vee y)\sim\neg xy;$
- $x\vee 0\sim x,\quad x\wedge 0\sim 0;$
- $x\vee 1\sim 1,\quad x\wedge 1\sim x;$
- $x\vee\neg x\sim 1,\quad x\neg x\sim 0;$
- $x\to y\sim\neg x\vee y,\quad x|y\sim\neg(xy),\quad x\downarrow y\sim\neg(x\vee y);$
- $x\leftrightarrow y\sim xy\vee\neg x\neg y\sim(x\to y)(y\to x);$
- $x\oplus y\sim\neg(x\leftrightarrow y)\sim\neg xy\vee x\neg y.$

1.6 Двойственные булевы функции. Двойственные формулы. Принцип двойственности.

Определение 6 (Двойственная булева функция). *Двойственной функцией* к булевой функции $f(x_1,\dots,x_n)$ называется функция:

$$f^{\times}(x_1,\dots,x_n)=\neg f(\neg x_1,\dots,\neg x_n).$$

Определение 7 (Двойственная формула). Пусть Φ – формула, не содержащая импликаций. *Двойственной формулой* к формуле Φ называется формула $\Phi^{\times}$, полученная из Φ заменой каждой связки на двойственную связку.

Теорема 1 (Принцип двойственности).

1. Пусть $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ – формула. Тогда формула $\Phi^{\times}$ определяет булеву функцию, двойственную к функции, которую определяет $\Phi:\ (f_{\Phi})^{\times} = f_{\Phi^{\times}}$.

2. $\Phi \sim \Psi \Leftrightarrow \Phi^{\times} \sim \Psi^{\times}$.

1.7 ДНФ и КНФ, алгоритмы приведения.

Определение 8 (Литера, конъюнкт, ДНФ, дизъюнкт, КНФ). *Литера* – переменная или отрицание переменной.

Конъюнкт – литера или конъюнкция литер:

$$x, \neg x, xy, \neg xyz, \ldots.$$

ДНФ – конъюнкт или дизъюнкция конъюнктов:

$$x \vee \neg y \vee xy \vee x\neg yz.$$

Дизъюнкт – литера или дизъюнкция литер:

$$x, \neg x, x \vee y, \neg x \vee y \vee z, \ldots.$$

КНФ – дизъюнкт или конъюнкция дизъюнктов:

$$(\neg x \vee z)(y \vee \neg z)x\neg y.$$

Примечание (Алгоритм построения ДНФ (КНФ) по заданной таблице истинности).

1. Выбрать в таблице все строки со значением функции $f = 1$ ($f = 0$).

2. Для каждой такой строки $(x, y, z) = (a_1, a_2, a_3)$ выписать конъюнкт (дизъюнкт) по принципу: пишем переменную с отрицанием если ее значение 0 (1), иначе пишем переменную без отрицания.

3. Берем дизъюнкцию (конъюнкцию) построенных конъюнктов (дизъюнктов).

Примечание (Алгоритм построения ДНФ (КНФ) методом эквивалентностей).

1. Выразить все связки в формуле через конъюнкцию, дизъюнкцию и отрицание.
2. Внести все отрицания внутрь скобок.
3. Устранить двойные операции.
4. Применять свойство дистрибутивности, пока это возможно.

1.8 СДНФ и СКНФ, теоремы существования и единственности, алгоритмы приведения.

Определение 9 (Совершенный конъюнкт (дизъюнкт)). *Совершенный конъюнкт (дизъюнкт)* от переменных $x_1, \dots, x_n$ – это формула вида:

$$x_1^{a_1} \dots x_n^{a_n} \quad (x_1^{a_1} \vee \dots \vee x_n^{a_n}),$$

где $a_1, \dots, a_n \in \{0, 1\}$.

Определение 10 (СКНФ (СДНФ)). *СКНФ (СДНФ)* – это конъюнкция совершеных дизъюнктов без повторящихся множителей (дизъюнкция совершенных конъюнктов без повторяющихся слагаемых).

Пример.

- $xy \vee z$ – ДНФ, но не СКНФ,
- $xy\neg z \vee xyz \vee \neg xyz \vee x\neg yz \vee \neg x\neg yz$ – СДНФ,
- $(x \vee y \vee z)(x \vee \neg y \vee z)$ – СКНФ,
- $\neg x \vee y$ – ДНФ, но не СДНФ и при этом СКНФ.

Теорема 2 (О существовании и единственности СДНФ (СКНФ)). Любая булева функция $f \neq 0$ $(f \neq 1)$ может быть представлена в виде СДНФ (СКНФ) единственным способом с точностью до перестановок.

Примечание (Алгоритм приведения формулы к СДНФ (СКНФ)).

1. Строим ДНФ (КНФ) формулы.
2. Вычеркиваем тождественно ложные (истинные) слагаемые (множители).
3. В каждое слагаемое (множитель) добавляем переменные по правилам:

$$\text{СДНФ: } \Phi(x_1, \dots, x_n) \equiv \Phi(y \vee \neg y) \equiv \Phi \wedge y \vee \Phi \wedge \neg y$$
$$\text{СКНФ: } \Phi(x_1, \dots, x_n) \equiv \Phi \vee y \wedge \neg y \equiv (\Phi \vee y) \wedge (\Phi \vee \neg y)$$

4. Вычеркиваем повторяющиеся слагаемые (множители).

1.9 Минимальная ДНФ. Алгоритмы минимизации (карты Карно).

Определение 11 (Минимальная ДНФ). ДНФ Φ булевой функции называется *минимальной*, если в любой ДНФ этой функции количество литер не меньше, чем в Φ.

Определение 12 (Карта Карно). Карта Карно функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ – это двумерная таблица, построенная следующим образом:

1. Разделим набор переменных $x_1, \ldots, x_n$ на две части:

$$x_1, \ldots, x_k \text{ и } x_{k+1}, \ldots, x_n$$

2. Строкам таблицы соответствуют всевозможные наборы значений переменных $x_1, \ldots, x_k$, колонкам – $x_{k+1}, \ldots, x_n$. При этом наборы в двух соседних строках/колонках должны отличаться не более, чем одним значением. Крайние строки/колонки считаются соседними.

3. В ячейки заносятся значения функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ на соответствующих наборах.

Примечание (Алгоритм минимизации (карты Карно)).

1. Строим карту Карно функции f.

2. В карте находим покрытие всех ячеек со значением 1 прямоугольникам со свойствами:
   - длины сторон прямоугольника – 2^k, $k \leqslant 0$;
   - каждый прямоугольник содержит только 1;
   - каждая ячейка с 1 покрыта прямоугольником максимальной площади;
   - количество прямоугольников минимально.

3. По каждому прямоугольнику выписываем конъюнкт. Конъюнкты образуют литеры, значения которых в прямоугольнике не меняются.

1.10 Полином Жегалкина, его существование и единственность. Алгоритм построения.

Определение 13 (Моном). *Моном* от переменных $x_1, \ldots, x_n$ – это либо 1, либо конъюнкт вида $x_{i_1} \dots x_{i_k}$, где x_{i_j} – переменная из списка $x_1, \dots, x_n$, без повторяющихся множителей.

Определение 14 (Полином Жегалкина). *Полином Жегалкина* от переменных $x_1, \dots, x_n$ – это либо 0, либо сумма мономов от переменных $x_1, \dots, x_n$ без эквивалентных слагаемых.

Теорема 3 (О существовании и единственности полинома Жегалкина). Любая функция может быть определена полиномом Жегалкина единственным образом с точностью до перестановок слагаемых и множителей.

1.11 Суперпозиция булевых функций. Замкнутые классы булевых функций.

Определение 15 (Суперпозиция булевых функций). *Суперпозицией* функции $f(x_1, \dots, x_n)$ и функций $f_1(x_1, \dots, x_k), \dots, f_n(x_1, \dots, x_k)$ называется функция

$$g(x_1, \dots, x_k) = f(f_1, \dots, f_n)$$

Пример. $f(x, y, z, t) = (xy \vee z) \to \neg t$:

- $f_1(x, y) = x \to y$;
- $f_2(x, y) = x \vee y$;
- $f_3(x, y) = xy$;
- $f_4(x) = \neg x$.

$$f(x, y, z, y) = f_1(f_2(f_3(x, y), z), f_4(t))$$

Определение 16 (Замкнутый класс булевых функций). Класс K называется *замкнутым*, если для любого набора $f, f_1, \dots, f_n \in K$ суперпозиция $f(f_1, \dots, f_n)$ – снова функция класса K и *разомкнутым*, если подстановки любой переменной – тоже функция класса K.

Пример.

- $\varnothing, B$ – замкнутые;
- $\{0, 1\}$ – замкнут;
- $\{x, y\}$ – не является замкнутым (не выдерживает подстановок переменных);
- $\{x, x\}$ – не замкнут.

1.12 Полные системы булевых функций, базисы.

Определение 17 (Замыкание класса). *Замыкание класса* K – это наименьшее замкнутое множество, содержащее K как подмножество.

$$\text{Обозначение: } [K]$$

Если A – замкнуто, то $[A] = A$.

Пример.

- $[\{0,1\}] = \{0,1\}$;
- $[\{x,y\}] = \{x_{i_1},\dots,x_{i_k} \mid i > k\}$

Определение 18 (Полная система БФ). Система булевых функций Σ называется *полной* (в классе K), если:

$$[\Sigma] = B \ ([\Sigma] = K)$$

Пример.

- $\{\wedge,\vee,\neg\}$ – полная система (так как каждая булева функция имеет ДНФ);
- $\{\wedge,\neg\},\{\vee,\neg\}$ – полные;
- $\{|\},\{\downarrow\}$ – полные.

Определение 19 (Базис). Система булевых функций Σ называется *базисом* (в классе K), если она полна и любая ее подсистема $\widetilde{\Sigma} \subsetneq \Sigma$ не является полной (в классе K).

Пример.

- $\{\wedge,\vee,\neg\}$ – не базис;
- $\{\wedge,\neg\},\{\vee,\neg\}$ – базисы.

1.13 Классы T_0, T_1 (функции, сохраняющие 0 и 1).

Определение 20 (Классы T_0, T_1).

$$T_0 = \{f(x_1,\dots,x_n) \mid f(0,\dots,0) = 0\}$$
$$T_1 = \{f(x_1,\dots,x_n) \mid f(1,\dots,1) = 1\}$$

	T_0	T_1
0	$+$	$-$
1	$-$	$+$
x	$+$	$+$
$\neg x$	$-$	$-$
xy	$+$	$+$
$x \vee y$	$+$	$+$
$x \oplus y$	$+$	$-$
$x \leftrightarrow y$	$-$	$+$
$x \to y$	$-$	$+$
$x \vert y$	$-$	$-$
$x \downarrow y$	$-$	$-$

Таблица 4: Примеры T_0, T_1.

1.14 Класс S самодвойственных функций, определение двойственной БФ.

Определение 21 (Двойственная булева функция)**.** *Двойственной функцией* к булевой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется функция:

$$f^{\times}(x_1, \ldots, x_n) = \neg f(\neg x_1, \ldots, \neg x_n)$$

Определение 22 (Самодвойственная функция)**.** Булева функция f называется *самодвойственной*, если $f = f^{\times}$.

$$S = \{f(x_1, \ldots, x_n) \mid f = f^{\times}\}$$

	S
0	$-$
1	$-$
x	$+$
$\neg x$	$+$
xy	$-$
$x \vee y$	$-$
$x \oplus y$	$-$
$x \leftrightarrow y$	$-$
$x \to y$	$-$
$x \vert y$	$-$
$x \downarrow y$	$-$

Таблица 5: Примеры S.

1.15 Класс монотонных функций.

Определение 23 (Монотонная функция)**.** Булева функция $f(x_1, \ldots, x_n)$

называется *монотонной*, если $\forall \alpha, \beta \in \{0,1\}^n$:

$$\alpha \leqslant \beta \Rightarrow f(\alpha) \leqslant f(\beta)$$

$$M = \{f(x_1, \dots, x_n) \mid f - \text{монотонна}\}$$

	M
0	$+$
1	$+$
x	$+$
$\neg x$	$-$
xy	$+$
$x \vee y$	$+$
$x \oplus y$	$-$
$x \leftrightarrow y$	$-$
$x \rightarrow y$	$-$
$x \vert y$	$-$
$x \downarrow y$	$-$

Таблица 6: Примеры M.

1.16 Класс линейных функций.

Определение 24 (Линейная функция). Булева функция называется *линейной*, если ее полином Жегалкина линеен, то есть не содержит конъюнкции, то есть его степень не выше 1.

$$L = \{f(x_1, \dots, x_n) \mid f - \text{линейная}\}$$

	L
0	$+$
1	$+$
x	$+$
$\neg x$	$+$
xy	$-$
$x \vee y$	$-$
$x \oplus y$	$+$
$x \leftrightarrow y$	$+$
$x \rightarrow y$	$-$
$x \vert y$	$-$
$x \downarrow y$	$-$

Таблица 7: Примеры L.

	T_0	T_1	S	M	L
0	+	−	−	+	+
1	−	+	−	+	+
x	+	+	+	+	+
$\neg x$	−	−	+	−	+
xy	+	+	−	+	−
$x \vee y$	+	+	−	+	−
$x \oplus y$	+	−	−	−	+
$x \leftrightarrow y$	−	+	−	−	+
$x \to y$	−	+	−	−	−
$x \vert y$	−	−	−	−	−
$x \downarrow y$	−	−	−	−	−

Таблица 8: Классы Поста.

1.17 Леммы о несамодвойственной, немонотонной, нелинейной функциях.

Лемма 1 (О несамодвойственной функции). Из несамодвойственной функции подставновками $\neg x$ и переменных можно получить 0 и 1.

$$f \notin S \Rightarrow 0, 1 \in [\{f, \neg x\}]$$

Лемма 2 (О немонотонной функции). Из немонотонной функции с помощью подстановок $0, 1$ и переменных можно получить $\neg x$.

$$f \notin M \Rightarrow \neg x \in [\{f, 0, 1\}]$$

Лемма 3 (О нелинейной функции).

$$f \notin L \Rightarrow xy \in [\{f, 0, 1, \neg x\}]$$

1.18 Теорема Поста о полноте системы булевых функций.

Теорема 4 (Поста о полноте системы булевых функций). Система БФ является полной тогда и только тогда, когда она не лежит целиком ни в одном из классов Поста.

1.19 Релейно-контактные схемы: определение, примеры, функция проводимости. Анализ и синтез РКС (умение решать задачи).

Определение 25 (Реле). *Реле* – это некоторое устройство, которое может находиться в одном из двух возможных состояний: включенном и выключенном.

Пример. Различные выключатели, термодатчики, датчик движения и тому подобное.

Примечание. Реле используется в построении различных электрических схем. Включение или выключение реле приводит к появлению или исчезновению тока на определенных участках электрической схемы.

Пусть S – некоторая электрическая схема, содержащая реле $x_1, \dots, x_n$. Со схемой S можно связать функцию проводимости f_S, которая равна 1, если схема проводит ток при заданном состоянии реле (и $f_S = 0$ в противном случае). Возникает вопрос: а какие аргументы имеет функция f_S? Для определения аргументов f_S мы будем рассматривать каждое реле x_i как переменную, принимающую значения из множества $\{0, 1\}$ с очевидной интерпретацией: $x_i = 0$, если реле выключено и $x_i = 1$, если реле включено.

Таким образом функция проводимости $f_S(x_1, \dots, x_n)$ становится булевой функцией, зависящей от текущего состояния своих реле.

1. Цепь замкнута: $f_S = 1$.
2. Цепь не замкнута: $f_S = 0$.
3. Последовательное соединение: $f_S(x, y) = xy$.
4. Параллельное соединение: $f_S(x, y) = x \vee y$.

Задачи, связанные с релейно-контактными схемами можно подразделить на две большие группы:

1. Дана схема, нужно построить более простую схему с такой же функцией проводимости.
2. Нужно построить схему по описанию ее функции проводимости.

2 Логика высказываний

2.1 Парадоксы в математике. Парадоксы Г. Кантора и Б. Рассела.

Утверждение (Рассел). Множество M будем называть *нормальным*, если оно не принадлежит самому себе как элемент.

Например, множество кошек нормально, поскольку множество кошек не является кошкой. А вот каталог каталогов по-прежнему остается каталогом, поэтому множество каталогов не является нормальным.

Рассмотрим теперь множество B, составленное из всевозможных нормальных множеств. Формально множество B определяется так:

$$x \in B \Leftrightarrow x \notin x$$

Возникает вопрос: будет ли B принадлежать самому себе как элемент?

И тут возникает парадокс: дело в том, что если вместо x подставить B, то возникнет явное противоречие:

$$B \in B \Leftrightarrow B \notin B$$

Утверждение (Кантор). Предположим, что множество всех множеств $V = \{x \mid x = x\}$ – существует. В этом случае справедливо

$$\forall x, T \quad x \in T \Rightarrow x \in V,$$

то есть всякое множество T является подмножеством V. Но из этого следует, что $\forall T \ |T| \leqslant |V|$ – мощность любого множества не превосходит мощности V.

Но в силу аксиомы множества всех подмножеств, для V, как и любого множества, существует множество всех подмножеств $\mathcal{P}(V)$, и по теореме Кантора:

$$|\mathcal{P}| = 2^{|V|} > |V|,$$

что противоречит предыдущему утверждению.

Следовательно, V не может существовать, что вступает в противоречие с «наивной» гипотезой о том, что любое синтаксически корректное логическое условие определяет множество, то есть что

$$\exists y \forall z \quad z \in y \Leftrightarrow A$$

для любой формулы A, не содержащей y – свободно.

2.2 Логическое следование в логике высказываний. Проверка логического следования с помощью таблиц истинности и эквивалентных преобразований.

Определение 26 (Интерпретация переменных). *Интерпретация переменных* – это отображение вида:

$$\alpha : \{x_1, \dots, x_n\} \to \{0, 1\}$$

Задать интерпретацию – приписать j-ой переменной значение $0, 1$.

Примечание. Если Φ – формула, а α – интерпретация, то Φ^α – значение формулы, когда вместо x_i подставили $\alpha(x_i)$.

Первый способ определить математическое понятие доказательства – логическое следование.

Определение 27 (Логическое следование). Пусть Γ – множество формул, Φ – формула логики высказываний. Формула Φ *логически следует* из Γ, если для любой интерпретации α_k верно, что если истинны все формулы из Γ при этой интерпретации, то истинна и Φ:

$$\forall \alpha \quad (\forall \psi \in \Gamma \ \psi^\alpha = 1) \Rightarrow \Phi^\alpha = 1$$

$$\text{Обозначение: } \Gamma \vDash \Phi$$

Замечание. Проверять логическое следование можно при помощи таблиц истинности и эквавалентных преобразований, пользуясь свойством:

$$\text{Если } \Gamma = \{\Phi_1, \dots, \Phi_n\} \text{ – конечное, то } \Gamma \vDash \Phi \Leftrightarrow \Phi_1 \wedge \dots \wedge \Phi_n \to \Phi \equiv 1$$

(проверить, является ли импликация тождественно истинной функцией или нет).

2.3 Понятия прямой теоремы, а также противоположной, обратной и обратной к противоположной теорем.

Определение 28. Многие математические теоремы имеют структуру, выражаемую формулой $X \to Y$. Утверждение X называется *условием* теоремы, а утверждение Y – ее *заключением.*

Если некоторая теорема имеет форму $X \to Y$, утверждение $Y \to X$ называется *обратным* для данной теоремы. Это утверждение может быть справедливым, и тогда оно называется теоремой, *обратной* для теоремы $X \to Y$, которая, в свою очередь, называется *прямой* теоремой.

Для теоремы, сформулированной в виде импликации $X \to Y$, кроме обратного утверждения $Y \to X$ можно сформулировать *противоположное* утверждение. Им называется утверждение вида $\neg X \to \neg Y$. Утверждение, противоположное данной теореме, может быть также теоремой, то есть быть истинным высказыванием, но может таковым и не быть.

Теорема, *обратная противоположной*: $\neg Y \to \neg X$ (*контрпозиция*).

2.4 Понятия необходимых и достаточных условий.

Определение 29 (Необходимое и достаточное условия). Если некоторая математическая теорема имеет структуру, выражаемую формулой $X \to Y$, то высказывание Y называется *необходимым* условием для высказывания X (другими словами, если X – истинно, то Y с необходимостью также должно быть истинным), а высказывание X называется *достаточным* условием для высказывания Y (другими словами, для того, чтобы Y было истинным, достаточно, чтобы истинным было высказывание X).

2.5 Формальные системы. Выводы в формальных системах. Свойства выводов.

Определение 30 (Формальная система). *Формальная система* состоит из четырех элементов:

1. Алфавит (некоторое множество).
2. Набор формул (множество слов, отобранных с помощью некоторых правил).
3. Набор аксиом (множество формул, отобранных по некоторым правилам).
4. Набор правил вывода вида $\frac{\phi_1,\ldots,\phi_n}{\psi}$ (из формул $\phi_1, \ldots, \phi_n$ следует формула ψ).

Определение 31 (Вывод). *Вывод* формулы ϕ из множества формул Γ в формальной системе – это конечная последовательность формул $\phi_1, \ldots, \phi_n = \phi$, в которой каждая ϕ_i:

- либо аксиома формальной системы;
- либо принадлежит множеству Γ (является гипотезой);
- либо получена из предыдущих формул по одному из правил вывода.

Определение 32 (Выводимость). Формула ϕ выводится из множества формул Γ, если существует вывод ϕ из Γ.

Обозначение: $\Gamma \vdash \phi$

Утверждение (Свойства выводов).

1. Если $\Gamma \vdash \phi$, то существует конечное подмножество $\Gamma_0 \subset \Gamma$ такое, что $\Gamma_0 \vdash \phi$ (выделение конечного подмножества).
2. Если $\Gamma \vdash \phi$ и $\Gamma \subset \Delta$, то $\Delta \vdash \phi$ (увеличение множества гипотез).
3. Если $\Gamma \vdash \Delta$, то есть все формулы из Δ выводятся из Γ, и $\Delta \vdash \phi$, то и $\Gamma \vdash \phi$ (транзитивность выводимости).

2.6 Исчисление высказываний (ИВ) Гильберта. Примеры выводов.

Определение 33 (Исчисление высказываний (ИВ)). *Исчисление высказываний* – конкретная формальная система на базе логики высказываний.

1. Алфавит = символы переменных, отрицание, импликация, скобки.
2. Формулы ИВ – формулы языка ЛВ, использующие только отрицание и импликацию.
3. Аксиомы ИВ (схемы аксиом):

$$\begin{array}{ll} A_1 & A \to (B \to A), \\ A_2 & \big(A \to (B \to C)\big) \to \big((A \to B) \to (A \to C)\big), \\ A_3 & (\neg B \to \neg A) \to \big((\neg B \to A) \to B\big). \end{array}$$

4. Силлогизм (modus ponens):

$$\frac{A,\ A \to B}{B}.$$

Пример. $A,\ A \to B \vdash B$

1. A.
2. $A \to B$.
3. B (MP 1,2).

Пример. $A \vdash B \to A$

1. (A_1) $A \to (B \to A)$.
2. A.
3. $B \to A$ (MP 1,2).

Замечание. Если $\Gamma = \varnothing$, то пишем $\vdash \phi$ (ϕ доказуема).

2.7 Теорема о дедукции для ИВ.

Теорема 5. Γ – множество формул, A, B – формулы ИВ. Тогда:

$$\Gamma, A \vdash B \Leftrightarrow \Gamma \vdash A \to B.$$

2.8 Теорема о полноте и непротиворечивости ИВ.

Теорема 6 (О полноте ИВ)**.** $\vdash A \Leftrightarrow A$ – тавтология.

Теорема 7 (О непротиворечивости ИВ)**.** ИВ Гильберта непротиворечиво.

2.9 Метод резолюций для логики высказываний.

Примечание. Правило резолюции:

$$\frac{x \vee \phi,\ \neg x \vee \phi}{\phi \vee \psi}, \quad (x, \neg x) \text{ – контарная пара.}$$

Частный случай:

$$\frac{x,\ \neg x}{\square} \text{ – пустой дизъюнкт.}$$

Теорема 8. $\Gamma \vdash \phi \Leftrightarrow \Gamma \cup \{\neg\phi\}$ – противоречиво.

Замечание (Метод резолюций)**.**

1. Формируем множество Γ:
$$\Gamma = \{A_1, \dots, A_m, \neg B\}.$$
2. Все ФЛВ из Γ приводим к КНФ. Получится набор дизъюнктов:
$$D_1, \dots, D_k.$$
3. Все дизъюнкты $D_1, \dots, D_k$ выписываем в столбик.
4. Будем получать новые дизъюнкты по следующему правилу.

Пусть имеются два дизъюнкта вида:

$$x_i \vee P,$$
$$\neg x_i \vee Q,$$

где x_i – переменная P, Q – некоторые выражения. Тогда выписываем дизъюнкт:

$$P \vee Q$$

(то есть пара $x_i, \neg x_i$ уничтожается, а оставшиеся части склеиваются в новом дизъюнкте).

Дизъюнкт $P \vee Q$ называется *резольвентой дизъюнктов* $x_i \vee P$, $\neg x_i \vee Q$. В частности, если имеется пара дизъюнктов x_i, $\neg x_i$, то получается так называемый *пустой дизъюнкт*.

5. Предыдущий шаг алгоритма повторяется до тех пор, пока:
   - появляются новые дизъюнкты,
   - пока не появился пустой дизъюнкт.
6. Если появился пустой дизъюнкт, то логическое следование есть. Если же новые дизъюнкты не появляются, а пустой дизъюнкт так и не был получен, то логического следования – нет.

Замечание. Правило резолюции помогает убрать только одну контрарную пару.

Замечание. Тождественно истинные формулы в выводе $\square$ не используются.

3 Логика предикатов

3.1 Понятие предиката и операции, их представления, примеры.

Определение 34 (n-мерный предикат)**.** *n-мерный предикат* на множестве A – это отображение вида:

$$P : A^n \to \{0, 1\}.$$

При этом n-местный P.

Неформально, *предикат* – это высказывание, зависящее от параметров.

Пример. $A = \mathbb{Z}$

$$\begin{array}{lll} P(x) = 1 & \Leftrightarrow & x \text{ простое число} \\ Q(x,y) = 1 & \Leftrightarrow & x + y = 4 \\ R(x,y) = 1 & \Leftrightarrow & x < y \\ T(x,y,z) = 1 & \Leftrightarrow & z = \text{НОД}(x,y) \end{array}$$

Пример. A – множество людей.

Примеры предикатов на A:

$$\begin{array}{lll} P(x) = 1 & \Leftrightarrow & x \text{ – женщина} \\ Q(x,y) = 1 & \Leftrightarrow & x \text{ родитель } y \\ R(x,y) = 1 & \Leftrightarrow & x, y \text{ – братья} \end{array}$$

Определение 35 (n-местная операция)**.** *n-местная операция* на множестве A – это отображение вида:

$$f : A^n \to A.$$

Пример. $A = \mathbb{Z}$

$$\begin{array}{ll} f_1(x) = x + 1 & g_1(x,y) = \begin{cases} x^y, & y > 0 \\ 0 & \text{иначе} \end{cases} \\ f_2(x) = 2x & g_2(x,y) = x + y \\ f_3(x) = 0 & g_3(x,y) = \text{сумма последних цифр } x \text{ и } y \\ f_4(x) = x^2 & \end{array}$$

$$\forall x \left(P(x) \land Q(x) \to R\big(f(x)\big)\right).$$

Замечание. Чтобы писать формулы, достаточно иметь только обозначения предикатов и операций и знать их местности.

3.2 Сигнатура, интерпретация сигнатуры на множестве, алгебраические системы.

Примечание. *Сигнатура* – это набор предикатных, функциональных и константных символов с указанием их местностей.

Определение 36 (Сигнатура)**.** *Сигнатура* – набор трех непересекающихся множеств:

$$\mathcal{P} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{C},$$

где элементы множества $\mathcal{P}$ назовем *предикатные символы*, элементы $\mathcal{F}$ – *функциональные символы*, элементы $\mathcal{C}$ – *константные* символы.

Так же должна быть определена функция:

$$\mu : \mathcal{P} \cup \mathcal{F} \to \mathbb{N} \text{ – местность символов.}$$

Пример.

$$\sigma = \{\underbrace{P^{(1)}, Q^{(2)}}_{\text{предикат.}}, \underbrace{f^{(1)}, g^{(2)}}_{\text{функц.}}, \underbrace{c}_{\text{конст.}}\}$$

Определение 37 (Интерпретация сигнатуры на множестве)**.** *Интерпретация сигнатуры σ на множестве A* – это отображение I, которое

- каждый предикатный символ $P^{(n)} \in \sigma$ отображает в n-местный предикат на множестве A,
- каждый функциональный символ $f^{(n)} \in \sigma$ отображает в n-местную операцию на A,
- каждый константный символ отображает в элемент множества A.

Определение 38 (Алгебраическая система)**.** *Алгебраическая система* – это набор, состоящий из множества A, сигнатуры σ и интерпретации сигнатуры σ на множестве A.

Множество A – основное множество системы.

$$\mathfrak{A} =< A, \sigma, \underbrace{I}_{\substack{\text{часто не} \\ \text{пишут}}} > .$$

Пример. $\sigma = \{P^{(1)}, Q^{(2)}, f^{(1)}, g^{(2)}, a, b\}$

$A = \mathbb{Z}$, интерпретация:

$$\begin{aligned}
&P(x) = 1 \Leftrightarrow x > 0\\
&Q(x,y) = 1 \Leftrightarrow x, y - \text{взаимно простые}\\
&f(x) = x + 1\\
&g(x,y) = xy + 1\\
&a = 0,\ b = 1
\end{aligned}$$

$$\mathfrak{A} =< A, \sigma > .$$

3.3 Язык логики предикатов, термы, формулы логики предикатов.

Примечание. Пусть σ – сигнатура.

Алфавит языка логики предикатов сигнатуры σ – это:

$$\mathfrak{A}_\sigma = \sigma \cup \{x_1, x_2, \ldots, \wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow, (,), \forall, \exists, ,\}.$$

Определение 39 (Терм)**.** *Терм* сигнатуры σ – это слово, построенное по правилам:

1. Символ переменной – терм.
2. Константный символ сигнатуры σ – это терм.
3. Если $f^{(n)} \in \sigma$ – функциональный символ, $t_1, \ldots, t_n$ – термы, то слово $f(t_1, \ldots, t_n)$ – тоже терм.

Определение 40 (Атомарная формула)**.** *Атомарная формула* сигнатуры σ – это слово одного из двух видов:

1. $t_1 = t_2$, где t_1, t_2 – термы.
2. $P(t_1, \ldots, t_n)$, где $P^{(n)} \in \sigma$ – предикатный символ, $t_1, \ldots, t_n$ – термы.

Определение 41 (Формула языка логики предикатов)**.** *Формула языка логики предикатов* сигнатуры σ – это слово, построенное по правилам:

1. Атомарная формула – это формула.
2. Если ϕ_1 и ϕ_2 – формулы, то слова $(\phi_1 \wedge \phi_2), (\phi_1 \vee \phi_2), (\phi_1 \rightarrow \phi_2), (\phi_1 \leftrightarrow \phi_2), \neg\phi_1$ – тоже формулы.
3. Если ϕ – формула, x – переменная, то слова $(\forall x \phi)$ и $(\exists x \phi)$ – тоже формулы.

3.4 Свободные и связанные переменные. Замкнутые формулы.

Определение 42 (Связанные, свободные переменные). Вхождение переменной x в формулы вида

$$(\forall x\ \phi) \text{ и } (\exists x\ \phi)$$

назовем *связанным*.

В противном случае, вхождение переменной *свободное*.

$$P(\underbrace{x}_{\substack{\text{своб.}\\ \text{вх.}}}) \cup \forall x\ Q(\underbrace{x}_{\substack{\text{связ.}\\ \text{вх.}}}, \underbrace{y}_{\substack{\text{своб.}\\ \text{вх.}}}).$$

Примечание. Переменная x *свободная* в формуле ϕ, если есть хотя бы одно ее свободное вхождение в ϕ. В противном случае – переменная *связная*.

Определение 43 (Замкнутая формула). *Замкнутая формула (предложение)* – это формула без свободных переменных.

3.5 Истинность формул на алгебраической системе.

Определение 44 (Истинность формулы на алгебраической системе). Пусть $\phi(x_1, \dots, x_n)$ – формула, $\mathfrak{A} =< A, \sigma >$ – алгебраическая система, $a_1, \dots, a_n \in A$.

Истинность формулы ϕ на алгебраической системе $\mathfrak{A}$ на элементах $a_1, \dots, a_n$ $\big(\mathfrak{A} \vDash \phi(a_1, \dots, a_n)\big)$ определяется по следующим правилам:

1. Пусть ϕ имеет вид $t_1(x_1, \dots, x_n) = t_2(x_1, \dots, x_n)$, где t_1, t_2 – термы. Тогда:

$$\mathfrak{A} \vDash \phi(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow t_{1_{\mathfrak{A}}}(a_1, \dots, a_n) = t_{2_{\mathfrak{A}}}(a_1, \dots, a_n).$$

2. Пусть ϕ имеет вид $P(t_1, \dots, t_k)$, где $P^{(k)} \in \sigma$ – предикатный символ, $t_1(x_1, \dots, x_n), \dots, t_k(x_1, \dots, x_n)$ – термы. Тогда:

$$\mathfrak{A} \vDash \phi(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow P_{\mathfrak{A}}\Big(\underbrace{t_{1_{\mathfrak{A}}}(a_1, \dots, a_n)}_{b_1}, \dots, \underbrace{t_{k_{\mathfrak{A}}}(a_1, \dots, a_n)}_{b_k}\Big) = 1.$$

3. Пусть $\phi = (\phi_1 \land \phi_2)$ $\big((\phi_1 \lor \phi_2), (\phi_1 \to \phi_2), (\phi_1 \leftrightarrow \phi_2), \neg\phi_2\big)$. Истинность формулы ϕ определяется из значений формул $\phi_1(a_1, \dots, a_n)$ и $\phi_2(a_1, \dots, a_n)$ по таблицам истинности для логических связок.

4. Пусть $\phi(x_1, \dots, x_n)$ имеет вид $\exists x\ \psi(x, x_1, \dots, x_n)$.

   Тогда $\mathfrak{A} \vDash \phi(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow$ для некоторого $b \in A$ $\mathfrak{A} \vDash \psi(b, a_1, \dots, a_n)$.

5. Пусть ϕ имеет вид $\forall x\ \psi(x, x_1, \ldots, x_n)$.

   Тогда $\mathfrak{A} \vDash \phi(a_1, \ldots, a_n) \Leftrightarrow$ для всех $b \in A$ $\mathfrak{A} \vDash \psi(b, a_1, \ldots, a_n)$.

3.6 Выразимость свойств в логике предикатов. Умение записать формулой различные свойства систем и элементов систем.

Примечание. Пусть $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ – формула сигнатуры σ, $\mathfrak{A} =< A, \sigma >$ – алгебраическая система.

Множество истинности формулы ϕ в алгебраической системе $\mathfrak{A}$ – это:

$$A_\phi = \left\{(a_1, \ldots, a_n) \;\middle|\; a_i \in A,\ \mathfrak{A} \vDash \phi(a_1, \ldots, a_n)\right\}.$$

Определение 45 (Выразимое множество в алгебраической системе)**.** Множество $B \subseteq A^n$ *выразимо в алгебраической системе* $\mathfrak{A}$, если существует формула $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ сигнатуры σ, для которой $B = A_\phi$ (B выразимо в $\mathfrak{A} \Leftrightarrow \exists\phi(x_1, \ldots, x_n):\ \forall a_1, \ldots, a_n\ (a_1, \ldots, a_n) \in B \Leftrightarrow \mathfrak{A} \vDash \phi(a_1, \ldots, a_n)$)

Определение 46 (Выразимая функция в алгебраической системе)**.** Функция $f : A^n \to A$ *выразима* в $\mathfrak{A}$, если существует формула $\phi(x_1, \ldots, x_n, y)$ такая, что $\forall a_1, \ldots, a_n, b \in A$ $b = f(a_1, \ldots, a_n) \Leftrightarrow \mathfrak{A} \vDash (a_1, \ldots, a_n, b)$.

3.7 Тождественно истинные (ложные) и выполнимые формулы.

Определение 47 (Тождественно истинная (ложная), выполнимая формула в системе)**.** Формула $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ *тождественно истинна (ложна) в системе* $\mathfrak{A}$, если $\forall a_1, \ldots, a_n \in A$

$$\mathfrak{A} \vDash \phi(a_1, \ldots, a_n) \quad \big(\mathfrak{A} \nvDash \phi(a_1, \ldots, a_n)\big).$$

Формула ϕ *выполнима в системе* $\mathfrak{A}$, если $\exists a_1, \ldots, a_n$

$$\mathfrak{A} \vDash \phi(a_1, \ldots, a_n).$$

Определение 48 (Тождественно истинная (ложная), выполнимая формула)**.** Формула ϕ *тождественно истинная (ложная)*, если ϕ тождественно истинная (ложная) в любой системе сигнатуры σ.

Формула ϕ *выполнимая*, если она выполнимая хотя бы в одной алгебраческой системе сигнатуры σ.

3.8 Эквивалентность формул логики предикатов.

Определение 49 (Эквивалентные формулы в алгебраической системе). Формулы $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ и $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ сигнатуры σ *эквивалентны в алгебраической системе* $\mathfrak{A} =< A, \sigma >$, если $\forall a_1, \ldots, a_n \in A$

$$\mathfrak{A} \vDash \phi(a_1, \ldots, a_n) \Leftrightarrow \mathfrak{A} \vDash \psi(a_1, \ldots, a_n).$$

Обозначение: $\phi \sim_{\mathfrak{A}} \psi$.

Определение 50 (Эквивалентные формулы). Формулы ϕ и ψ сигнатуры σ *эквивалентны*, если они эквивалентны в любой алгебраической системе сигнатуры σ.

Обозначение: $\phi \sim \psi$.

3.9 Основные эквивалентности логики предикатов.

Теорема 9 (Основные эквивалентности логики предикатов). Справедливы следующие эквивалентности:

$$\begin{gathered}
\forall x \forall y\ \phi(x,y) \sim \forall y \forall x\ \phi(x,y) \\
\exists x \exists y\ \phi(x,y) \sim \exists y \exists x\ \phi(x,y)
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
\forall x\ \phi(x) \sim \forall y\ \phi(y), \quad y \text{ не входит свободно в } \phi(x) \\
\exists x\ \phi(x) \sim \exists y\ \phi(y), \quad x \text{ не входит свободно в } \phi(y)
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
\neg \forall x\ \phi(x) \sim \exists x\ \neg \phi(x) \\
\neg \exists x\ \phi(x) \sim \forall x\ \neg \phi(x)
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
\big(\forall x\ \phi(x)\big) \wedge \big(\forall x\ \psi(x)\big) \sim \forall x\ \big(\phi(x) \wedge \psi(x)\big) \\
\big(\exists x\ \phi(x)\big) \vee \big(\exists x\ \psi(x)\big) \sim \exists x\ \big(\phi(x) \vee \psi(x)\big)
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
\big(\forall x\ \phi(x)\big) \vee \big(\forall y\ \psi(y)\big) \sim \forall x \forall y\ \big(\phi(x) \vee \psi(y)\big) \\
\big(\exists x\ \phi(x)\big) \wedge \big(\exists y\ \psi(y)\big) \sim \exists x \exists y\ \big(\phi(x) \wedge \psi(y)\big)
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
\big(\forall x\ \phi(x)\big) \wedge \big(\exists y\ \psi(y)\big) \sim \forall x \exists y\ \big(\phi(x) \wedge \psi(y)\big) \sim \exists y \forall x\ \big(\phi(x) \wedge \psi(y)\big) \\
\big(\forall x\ \phi(x)\big) \vee \big(\exists y\ \psi(y)\big) \sim \forall x \exists y\ \big(\phi(x) \vee \psi(y)\big) \sim \exists y \forall x\ \big(\phi(x) \vee \psi(y)\big)
\end{gathered}$$

$$\left.\begin{gathered}
\big(\forall x\ \phi(x)\big) \wedge \psi \sim \forall x\ \big(\phi(x) \wedge \psi\big) \\
\big(\forall x\ \phi(x)\big) \vee \psi \sim \forall x\ \big(\phi(x) \vee \psi\big) \\
\big(\exists x\ \phi(x)\big) \wedge \psi \sim \exists x\ \big(\phi(x) \wedge \psi\big) \\
\big(\exists x\ \phi(x)\big) \vee \psi \sim \exists x\ \big(\phi(x) \vee \psi\big)
\end{gathered}\right\} \quad x \text{ не входит свободно в } \psi$$

3.10 Пренексный вид формулы.

Определение 51 (Пренексный вид формулы). Формула ϕ находится в *пренексном виде* (предваренная нормальная форма), если

- либо ϕ кванторов не содержит (ϕ бескванторная),

- либо ϕ имеет вид $(Q_1 x_1) \dots (Q_n x_n)\ \psi(x_1, \dots, x_n)$,

где Q_i – кванторы $\forall$ или $\exists$, ψ – бескванторная.

Теорема 10 (О пренексном виде формулы). Любую формулу логики предикатов можно преобразовать в эквивалентную формулу в пренексном виде.

Примечание (Алгоритм приведения).

1. Выразить все логические связки через $\wedge, \vee, \neg$.
2. Переименовать все связанные переменные так, чтобы они отличались от свободных и друг от друга.
3. Двигаясь от самых внутренних подформул наружу, применяя стандартные эквивалентности, выносим все кванторы влево.

3.11 Классы формул Σ_n, Π_n, Δ_n. Теорема о связях между этими классами.

Определение 52 (Классы формул Σ_n, Π_n, Δ_n). Для $n > 0$:

- класс Σ_n состоит из всех формул в пренексном виде, у которых кванторный префикс начинается с квантора $\exists$ и содержит $n - 1$ перемену кванторов,
- класс Π_n состоит из всех формул в пренексном виде, у которых кванторный префикс начинается с квантора $\forall$ и содержит $n - 1$ перемену кванторов,
- класс Δ_n состоит из всех формул, которые можно привести и к виду Σ_n, и к виду Π_n.

Для $n = 0$:

$$\Sigma_0 = \Pi_0 = \Delta_0 \text{ – все бескванторные формулы.}$$

Примечание. Стрелка $K_1 \to K_2$ означает, что все формулы класса K_1 могут быть приведены к виду K_2.

Теорема 11 (О вложениях классов Σ, Π, Δ друг в друга). Между классами Σ_n, Π_n и Δ_n есть следующие соотношения:

$$\begin{tikzcd}
\Sigma_0 \arrow[d, equal] \arrow[dr] & & \Sigma_1 \arrow[dr] & & & & & \Sigma_n \arrow[dr] & & \\
\Delta_0 \arrow[d, equal] & \Delta_1 \arrow[ur] \arrow[dr] & & \Delta_2 \arrow[ur] \arrow[dr] & & \cdots & \Delta_n \arrow[ur] \arrow[dr] & & \Delta_{n+1} & \cdots \\
\Pi_0 \arrow[ur] & & \Pi_1 \arrow[ur] & & & & & \Pi_n \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

3.12 Нормальная форма Сколема, ее построение (на примерах).

Определение 53 (Нормальная форма Сколема). *Нормальная форма Сколема* – если это ПНФ, но только с универсальными кванторами первого порядка.

Примечание (Сколемизация). Пусть формула Φ находима в ПНФ $(Q_1 x_1)(Q_2 x_2)\dots(Q_n x_n)\ \phi$, где ϕ – бескванторная формула $Q_i \in \{\forall, \exists\}$ и пусть $\exists x_i$ – самый левый квантор $\exists$ в префиксе.

Необходимо произвести следующие операции:

1. Если левее $\exists x_i$ ничего нет, то все вхождения x_i заменяются на новый константный символ c, не принадлежащий сигнатуре. При этом константный символ c добавляется в сигнатуру.

2. Если левее $\exists x_i$ стоят кванторы $\forall x_1, \forall x_2, \dots, \forall x_k$, то все вхождения x_i в ϕ заменяются на новый k-местный функциональный символ $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, не принадлежащий сигнатуре. При этом функциональный символ f добавляется в сигнатуру.

3. После выполнения указанных выше замен, выражение $\exists x_i$ удаляется из кванторного префикса.

3.13 Изоморфизм алгебраических систем. Теорема о сохранении значений термов и формул в изоморфных системах. Автоморфизм.

Примечание. Неформально, две системы *изоморфны*, если у них все свойства совпадают.

Пример. $\sigma = \{f^{(1)}, c\}$

$$\begin{array}{ll}
\mathfrak{A} =< \mathbb{N}, \sigma > & C_{\mathfrak{A}} = 1,\ f_{\mathfrak{A}}(x) = x + 1 \\
\mathfrak{B} =< \underbrace{\{b_1, b_2, \dots\}}_{B}, \sigma > & C_{\mathfrak{B}} = b_1,\ f_{\mathfrak{B}}(b_k) = b_{k+1}
\end{array}$$

$$\mathfrak{A} \neq \mathfrak{B}$$

Определение 54 (Изоморфизм системы на систему). Пусть $\mathfrak{A} =< A, \sigma >$, $\mathfrak{B} =< B, \sigma >$ – алгебраические системы сигнатуры σ. *Изоморфизм системы* $\mathfrak{A}$ *на систему* $\mathfrak{B}$ – это биекция $\alpha : A \to B$ со свойствами:

- для любого константного символа $c \in \sigma$ $\alpha(c_{\mathfrak{A}}) = c_{\mathfrak{B}}$,
- для любого предикатного символа $P^{(n)} \in \sigma$ $\forall a_1, \ldots, a_n \in A$

$$P_{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n) = 1 \Leftrightarrow P_{\mathfrak{B}}\big(\alpha(a_1), \ldots, \alpha(a_n)\big) = 1,$$

- для любого функционального символа $f^{(n)} \in \sigma$ $\forall a_1, \ldots, a_n, b \in A$

$$b = f_{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n) \Leftrightarrow \alpha(b) = f_{\mathfrak{B}}\big(\alpha(a_1), \ldots, \alpha(a_n)\big).$$

Системы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ изоморфны ($\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$), если существует изоморфизм $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{B}$.

Замечание. Пункт 3. определения можно изложить так: $\forall a_1, \ldots, a_n \in A$

$$\alpha\big(f_{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n)\big) = f_{\mathfrak{B}}\big(\alpha(a_1), \ldots, \alpha(a_n)\big).$$

3.14 Элементарная теория алгебраической системы. Элементарная эквивалентность систем. Связь понятий изоморфизма и элементарной эквивалентности.

Примечание. Изоморфизм является отношением эквивалентности.
Отношение эквивалентности:

- рефлексивность: $x \sim x$,
- симметричность: $x \sim y \Leftrightarrow y \sim x$,
- транзитивность: $x \sim y,\ y \sim z \Rightarrow x \sim z$.

Определение 55 (Замкнутая формула). Формула ϕ *замкнутая*, если все ее переменные связанные.

$\phi(x)$ – утверждение про x,	$\phi_1(x)$ студент x – отличник,
ϕ – утверждение про всю систему,	ϕ_2 всех студентов отчислят.

Определение 56 (Элементарно эквивалентные системы). Системы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ сигнатуры σ *элементарно эквивалентны* ($\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$), если для любой замкнутой формулы ϕ сигнатуры σ

$$\mathfrak{A} \vDash \phi \Leftrightarrow \mathfrak{B} \vDash \phi.$$

Теорема 12 (О связи изоморфизма и элементарной эквивалентности). Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ – алгебраичесские системы сигнатуры σ. Тогда:

$$\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B} \Rightarrow \mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B},$$

$$\mathfrak{A} \not\equiv \mathfrak{B} \Rightarrow \mathfrak{A} \ncong \mathfrak{B}.$$

3.15 Логическое следование в логике предикатов.

Определение 57 (Логическое следование в логике предикатов). Пусть Γ – множество формул логики предикатов, ϕ – формула. Формула ϕ *логически следует* из Γ ($\Gamma \vDash \phi$), если в любой алгебраической системе $\mathfrak{A}$ и $\forall a_1, \ldots, a_n \in \mathfrak{A}$ $\big(\forall \psi \in \Gamma\ \mathfrak{A} \vDash \psi(a_1, \ldots, a_n)\big) \Rightarrow \mathfrak{A} \vDash \phi(a_1, \ldots, a_n)$.

3.16 Теория. Модель теории.

Определение 58 (Элементарная теория алгебраической системы). *Элементарная теория алгебраической системы* $\mathfrak{A}$ – это множество теорий

$$\mathfrak{A} = \big\{\phi \mid \phi - \text{замкнутая},\ \mathfrak{A} \vDash \phi\big\}.$$

Замечание.

$$\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B} \Leftrightarrow Th\mathfrak{A} = Th\mathfrak{B}.$$

Определение 59 (Теория). *Теория* – это множество замкнутых формул одной сигнатуры.

Определение 60 (Модель теории). *Модель теории* T – это алгебраическая система $\mathfrak{A}$, в которой истинны все формулы из T ($\mathfrak{A} \vDash T$).

Примечание. $\mathfrak{A} \vDash Th\mathfrak{B}$, то $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$.

3.17 Исчисление предикатов (ИП) Гильберта. Свойства выводов.

Определение 61 (Корректная подстановка терма в формулу). Подстановка терма t в формулу ϕ вместо переменной x *корректна*, если никакая переменная терма t после подстановки не попадает в облать действия квантора по этой переменной.

Определение 62 (Исчисление предикатов Гильберта). Зафиксируем сигнатуру σ. Исчисление предикатов сигнатуры σ состоит из следующих элементов:

1. Алфавит:

$$\mathfrak{A}_\sigma = \sigma \cup \{x_1, x_2, \ldots, \wedge, \vee, \neg, \to, \leftrightarrow, (,), \forall, \exists, ,\}.$$

2. Формулы исчисления предикатов (формулы логики предикатов, использующие только $\to, \neg$).

3. Аксиомы ИП:

   - A_1 $\phi \to (\psi \to \phi)$ (аксиомы ИВ)

   - A_2 $\big(\phi \to (\psi \to \theta)\big) \to \big((\phi \to \psi) \to (\phi \to \theta)\big)$

   - A_3 $(\neg\psi \to \neg\phi) \to \big((\neg\psi \to \phi) \to \psi\big)$

   - B_1 $\big(\forall x\ \phi(x)\big) \to \phi(t)$ (аксиомы кванторов)

   - B_2 $\phi(t) \to \big(\exists x\ \phi(x)\big)$ (здесь t – терм, подстановка которого в формулу ϕ вместо переменной x – корректна)

   - $\forall x\ x = x$ (аксиомы равенства)

   - $\forall x \forall y\ (x = y \to y = x)$

   - $\forall x \forall y \forall z\ (x = y \wedge y = z \to x = z)$

   - Для предикатного символа $P^{(n)} \in \sigma :$
     $\forall x_1, \ldots, \forall x_n, \forall y_1, \ldots, \forall y_n$

     $$x_1 = y_1 \wedge \ldots \wedge x_n = y_n \wedge P(x_1, \ldots, x_n) \Leftrightarrow P(y_1, \ldots, y_n).$$

   - Для функционального символа $f^{(n)} \in \sigma :$
     $\forall x_1, \ldots, \forall x_n, \forall y_1, \ldots, \forall y_n$

     $$x_1 = y_1 \wedge \ldots \wedge x_n = y_n \to f(x_1, \ldots, x_n) = f(y_1, \ldots, y_n).$$

4. Правило вывода ИП:

$$\frac{\phi,\ \phi \to \psi}{\psi} \quad \text{(modus ponens)},$$

$$\frac{\phi \to \psi(x)}{\phi \to \big(\forall x\ \psi(x)\big)}, \quad \frac{\psi(x) \to \phi}{\big(\exists x\ \psi(x)\big) \to \phi} \quad \text{(правила П. Бернайса)}$$

(x не входит свободно в ϕ).

Утверждение (Свойства выводов). В любой формальной системе выполнены следующие утверждения:

1. Если $\Gamma \vdash \phi$, то существует конечное подмножество $\Gamma_0 \subset \Gamma$ такое, что $\Gamma_0 \vdash \phi$.
2. Если $\Gamma \vdash \phi$ и $\Gamma \subset \Delta$, то $\Delta \vdash \phi$.
3. Если для каждой формулы $\phi \in \Delta$ выполнено $\Gamma \vdash \phi$ и $\Delta \vdash \psi$, то и $\Gamma \vdash \psi$.

3.18 Непротиворечивая теория.

Определение 63 (Противоречивая, непротиворечивая теория). Теория T *противоречивая*, если существует формула ϕ такая, что одновременно $T \vDash \phi$ и $T \vDash \neg\phi$. В противном случае, теория T – *непротиворечивая*.

3.19 О существовании модели (без доказательства).

Теорема 13 (Теорема о существовании модели). Каждая непротиворечивая теория имеет модель.

3.20 Теорема о связи выводимости и противоречивости.

Теорема 14 (О связи выводимости и противоречивости). Пусть T – теория, ϕ – замкнутая формула.

Тогда $T \vdash \phi \Leftrightarrow$ теория $T \cup \{\neg\phi\}$ противоречива.

3.21 Теоремы о корректности и полноте ИП.

Теорема 15 (Корректность ИП). T – множетсво замкнутых формул сигнатуры σ, ϕ – формула сигнатуры σ. Тогда:

$$T \vdash \phi \Rightarrow T \vDash \phi.$$

Теорема 16 (Полнота ИП). T – множетсво замкнутых формул сигнатуры σ, ϕ – формула сигнатуры σ. Тогда:

$$T \vdash \phi \Leftarrow T \vDash \phi.$$

3.22 Теорема компактности.

Теорема 17 (Теорема компактности). Теория имеет модель тогда и только тогда, когда ее конечная подтеория имеет модель.

3.23 Обоснование нестандартного анализа (построение алгебраической системы, элементарно эквивалентной полю вещественных чисел, содержащей бесконечно малые элементы).

Теорема 18 (А. Робинсон)**.** Существует алгебраическая система $\mathbb{R}^*$ с бесконечно малыми элементами, элементарно эквивалентная системе

$$R =< \mathbb{R}, +, \cdot, -, \neg x, x, 0, 1, <> \ - \text{гипервещественные числа.}$$

3.24 Метод резолюций для логики предикатов (без доказательства корректности).

НУЖНО НАЙТИ