Вопросы к экзамену по Теории Графов и Комбинаторным Алгоритмам
3 семестр

Данил Заблоцкий

16 января 2024 г.

Содержание

1 Определение графа. Примеры графов. Степени вершин графа. Лемма о рукопожатиях.

Определение 1 (Неориентированный граф, вершины и ребра графа). *Неориентированный граф* – пара множеств $G = (V, E)$, где

V – непустое конечное множество,
E – множество, состоящее из неупорядоченных пар элементов из V.

Элементы множества V называются *вершинами*, а элементы E – *ребрами* графа.

Примечание. Если $u, v \in V$, $\{u, v\} \in E$, то будем записывать

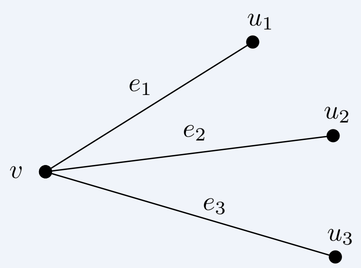
$$e = uv \ (= vu)$$

и говорить, что вершины u и v *смежны*, вершина u и ребро v – *инцидентны*.

Определение 2 (Степень вершины). *Степенью вершины* v называется число инцидентных ей ребер.

Обозначение: $d(v)$ $\big(deg(v)\big)$

Пример. $deg(v) = 3$



Пример. *Пустой граф* – граф без ребер: O_n.

Пример. *Полный граф* – граф, любая пара которого смежна: K_n.

Примечание.

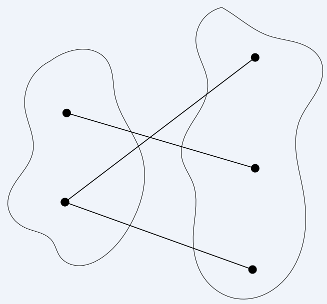
$$|E| = C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2} \text{ – число ребер.}$$

Пример. *Двудольный граф* – граф, вершины которого разбиты на 2 непересекающиеся части (доли) так, что любое ребро ведет из одной доли в другую.

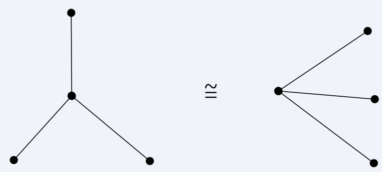
Если любая вершина одной доли смежна с любой вершиной другой доли, то такой граф называется *полным двудольным.*

Полный двудольный граф с долями размера p и q обозначают: $K_{p,q}$,

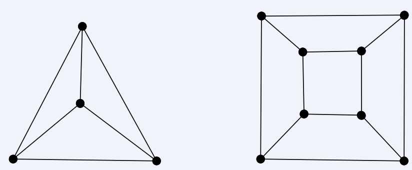
$$|E| = p \cdot q.$$



Пример. *Звезда* – полный двудольный граф $K_{1,q}$: одна доля состоит из одной вершины, а из нее веером расходятся лучи.



Пример. Графы многогранников



тетраэдр   куб

Лемма 1 (О рукопожатиях)**.** Пусть $G = (V, E)$ – произвольный граф. Сумма степеней всех вершин графа G – четное число, равное удвоенному количеству его ребер:

$$\sum_{v \in V} deg_G(v) = 2|E| \tag{1}$$

Доказательство. Индукция по числу ребер графа G.

1. Если $|E| = 0$, то формула 1 верно.
2. Предположим, что формула 1 верна для любого графа, в котором число ребер $\leqslant m$, где $m \geqslant 0$.
3. Пусть $|E| = m+1$. Выберем произвольное ребро $e = uv$ и удалим его из графа G. Получим граф $G' = (V, E')$, где $|E'| = m$.

   По предположению индукции для графа G' формула 1 верна:

$$\sum_{v \in V} deg_{G'}(v) = 2|E'| = 2m.$$

   Вернем ребро $e = uv$:

$$\sum_{v \in V} deg_G(v) = \sum_{v \in V} deg_{G'}(v) + 2 = 2m + 2 = 2(m+1) = 2|E|.$$

□

2 Маршруты, цепи, циклы. Лемма о выделении простой цепи. Лемма об объединении простых цепей.

Определение 3 (Маршрут). *Маршрутом*, соединяющим вершины u и v ((u,v)-маршрут), называется чередующаяся последовательность вершин и ребер вида

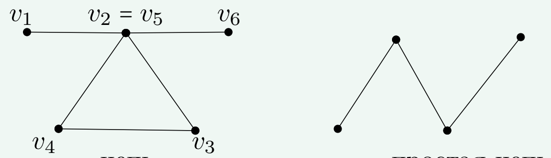
$$(u = v_1, e_1, v_2, \ldots, v_k, e_k, v_{k+1} = v)$$

такая, что $e_i = v_i v_{i+1},\ i = \overline{1,k}$.

Определение 4 (Замкнутый маршрут). Маршрут называется *замкнутым*, если первая вершина совпадает с последней, то есть

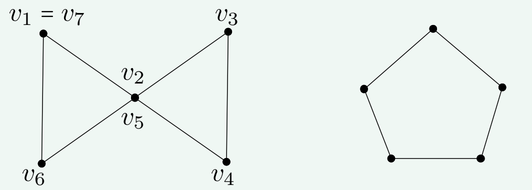
$$v_1 = v_{k+1}.$$

Определение 5 (Цепь, простая цепь)**.** Маршрут называется *цепью*, если в нем все ребра различны и *простой цепью*, если в нем все вершины различны (за исключением, быть может, первой и последней).



цепь простая цепь

Определение 6 (Цикл, простой цикл)**.** Замкнутая цепь называется *циклом*, а замкнутая простая цепь – *простым циклом*.



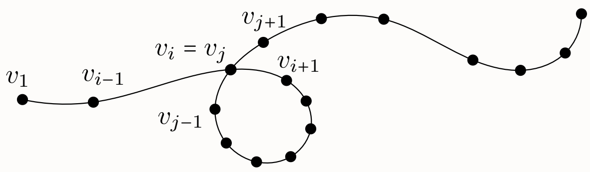
цикл простой цикл

Лемма 2 (О выделении простой цепи)**.** Всякий незамкнутый (u, v)-маршрут содержит простую (u, v)-цепь.

Доказательство.

1. Если все вершины (u, v)-маршрута различны, то (u, v) – простая цепь.

2. Пусть v_i – первая из вершин, имеющая в нем повторение, а v_j – последнее повторение.



$(v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}, v_i, v_{j+1}, \ldots)$ – заменим на более короткий, исключив цикл. Если в более коротком маршруте еще есть повторяющиеся вершины, то поступаем также.

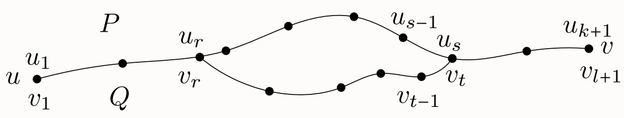
В конце концов получим незамкнутый (u, v)-маршрут, в котором все вершины различны, то есть простой цикл.

□

Лемма 3 (Об объединении простых цепей)**.** Объединение двух несовпадающих простых (u, v)-цепей содержит простой цикл.

Доказательство. Предположим, что $P = (u_1, \ldots, u_{k+1})$, $Q = (v_1, \ldots, v_{l+1})$ – две несовпадающие простые цепи:

$$u = u_1 = v_1, \quad v = u_{k+1} = v_{l+1},$$



Предположим, что u_{r+1} и v_{r+1} – первые несовпадающие вершины этих цепей, а $u_s = v_t$ – первые совпадающие за v_{r+1} и u_{r+1}. Тогда

$$\left.\begin{array}{l}(u_r, u_s) \text{ – фрагмент } P\\(v_r, v_s) \text{ – фрагмент } Q\end{array}\right\} \text{ – образуют простой цикл.}$$

□

3 Эйлеровы циклы. Критерий существования эйлерова цикла (теорема Эйлера).

Определение 7 (Эйлеров цикл)**.** Пусть $G = (V, E)$ – произвольный граф (мультиграф). Цикл в графе G называется *эйлеровым*, если он содержит все ребра графа.

Определение 8 (Эйлеров граф)**.** Граф называется *эйлеровым*, если в нем есть эйлеров цикл.

Теорема 1 (Эйлер, 1736)**.** В связном графе $G = (V, E)$ существует эйлеров цикл $\Leftrightarrow$ все вершины графа G четны (то есть имеют четную степень).

Доказательство.

- $\boxed{\Rightarrow}$ (необходимость)

  Пусть граф G – эйлеров. Эйлеров цикл, проходя через каждую вершину графа, входит в нее по одному ребру и выходт по другому. Значит каждая вершина должна быть инцидентна четному числу ребер.

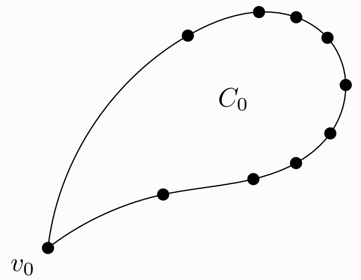
- $\boxed{\Leftarrow}$ (достаточность)

Пусть G – связен, все его вершины имеют четную степень.

Рассмотрим следующий алгоритм и докажем, что он обязательно построит эйлеров цикл.

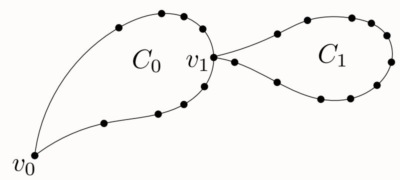
Примечание (Алгоритм построения эйлерова цикла)**.** Рассмотрим произвольную вершину v_0 и построим из нее маршрут C_0.

Пройденные вершины запоминаем, а ребра удаляем. Действуем так до тех пор, пока не получим граф G_1, в котором нет ребер инцидентных очередной вершине маршрута C_0.



Если C_0 содержит все ребра графа G, то он и есть эйлеров цикл и все доказано.

В противном случае, в силу связности графа G в цикле C_0 найдется вершина v_1, инцидентная некоторому ребру графа G_1. Начинаем стоить из нее (v_1) цикл C_1 в графе G_1.



Если все циклы C_0 и C_1 содержат все ребра графа G_1, то алгоритм завершает работу.

В противном случае, в одном из циклов C_0, C_1 найдется вершина v_2, инцидентная какому-то ребру графа G_2. Строим из нее цикл C_2 в графе G_2 и так далее.

В конце концов, получим, что после построения цикла C_k, оставшийся граф G_{k+1} пуст $\Rightarrow$ в построенных циклах все ребра G. Тогда контруируем в графе G эйлеров цикл из ребер построенных циклов.

$\square$

4 Гамильтоновы циклы. Достаточные условия существования гамильтонова цикла (теоремы Оре и Дирака).

Определение 9 (Гамильтонов цикл, граф)**.** Пусть $G = (V, E)$ – обыкновенный граф, $|V| = n$. Простой цикл в графе G называется *гамильтоновым*, если он проходит по всем вершинам графа.

Граф называется *гамильтоновым*, если он содержит гамильтонов цикл.

Определение 10 (Гамильтонова цепь)**.** Цепь в графе G называется *гамильтоновой*, если она проходит по всем вершинам графа.

Теорема 2 (Оре, 1960)**.** Пусть $n \geqslant 3$. Если в n-вершинном графе G для любой пары несмежных вершин u, v выполнено условие

$$deg(u) + deg(v) \geqslant n,$$

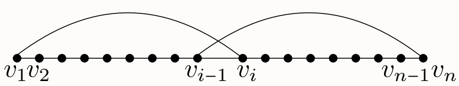
то граф – гамильтонов.

Доказательство. От противного. Предположим, что граф G удовлетворяет условию теоремы, но G – негамильтонов.

Соединив любые две несмежные вершины графа ребром, мы вновь получим граф, удовлетворяющий условию теоремы. Поскольку полный граф гамильтонов, то существует мауксимальный негамильтонов граф G^*, удовлетворяющий условию теоремы.

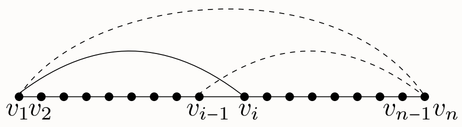
Это значит, что соединив две несмежные вершины графа G^* ребром, мы получим гамильтонов цикл. Поэтому любые две вершины графа G^* соединены гамильтоновой цепью.

Выберем в G^* пару несмежных вершин v_1, v_n и пусть $(v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}, v_n)$ – гамильтонова цепь в G^*.



Если в графе G^* вершины v_1 и v_i – смежные, то вершины v_{i-1} и v_n не могут быть смежными, иначе в G^* существовал бы гамильтонов цикл

$$(v_1, v_i, v_n, v_{i-1}, v_1),$$



Отсюда следует, что

$$deg(v_n) \leqslant n - 1 - deg(v_1).$$

Следовательно, $deg(v_1) + deg(v_n) \leqslant n - 1$ – противоречие с условием. □

Теорема 3 (Дирак, 1953). Пусть $n \geqslant 3$. Если в n-вершинном графе G для любой вершины выполнено условие

$$deg(v) \geqslant \frac{n}{2},$$

то граф – гамильтонов.

Доказательство. Теорема Дирака следует из теоремы Оре. □

5 Изоморфизм графов. Помеченные и непомеченные графы. Теорема о числе помеченных n-вершинных графов.

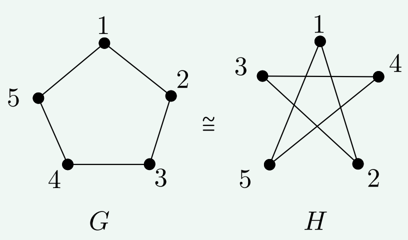
Определение 11 (Изоморфные графы). Графы $G = (V_G, E_G)$, $H = (V_H, E_H)$ называются *изоморфными*, если между множествами из вершин существует взаимооднозначное соответствие

$$\phi : V_G \to V_H,$$

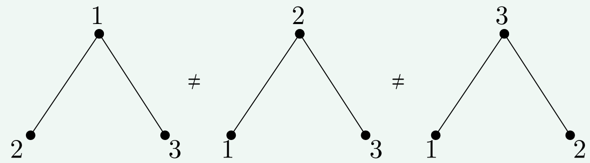
сохраняющее смежность, то есть $\forall u, v \in V_G$

$$uv \in E_G \Leftrightarrow \phi(u)\phi(v) \in E_H.$$

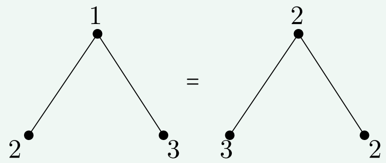
Обозначение: $G \cong H$



Определение 12 (Помеченный граф)**.** Граф называется *помеченным*, если его вершины отличаются одна от другой какими-то метками.



3 разных помеченных графа



2 одинаковых помеченных графа

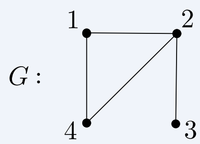
Теорема 4 (О числе помеченных n-вершинных графах)**.** Число p_n различных помеченных n-вершинных графов с фиксированным множеством вершин равно

$$2^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

Доказательство. В помеченном n-вершинном графе G можно перенумеровать все пары вершин (таких пар всего $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$) и поставить графу G взаимно однозначное соответствие его характеристический вектор длины $k = \frac{n(n-1)}{2}$, i-ая компонента которого равна

$$e_i = \begin{cases} 1, & \text{если пара вершин с номером } i \text{ сменна} \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Пример. $e = (\underset{e_1}{1}, \underset{e_2}{0}, \underset{e_3}{1}, \underset{e_4}{1}, \underset{e_5}{1}, \underset{e_6}{0})$



$$\underset{①}{\{1,2\}}, \underset{②}{\{1,3\}}, \underset{③}{\{1,4\}}, \underset{④}{\{2,3\}}, \underset{⑤}{\{2,4\}}, \underset{⑥}{\{3,4\}}$$

Тогда p_n равно числу булевых векторов длины $k = \frac{n(n-1)}{2}$, то есть

$$p_n = 2^k = 2^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

$\square$

6 Проблема изоморфизма. Инварианты графа. Примеры.

Определение 13 (Инвариант графа). *Инвариант графа* $G = (V, E)$ – это число, набор чисел, функция или свойство связанные с графом и принимающие одно и то же значение на любом графе, изоморфном G, то есть

$$G \cong H \Rightarrow i(G) = i(G).$$

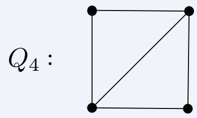
Инвариант i называется *полным*, если

$$i(G) = i(H) \Rightarrow G \cong H.$$

Обозначение: $i(G)$

Пример.

1. $n(G)$ – число вершин.
2. $m(G)$ – число ребер.
3. $\delta(G)$ – min степень.
4. $\Delta(G)$ – max степень.
5. $\phi(G)$ – плотность графа G – наибольшее число попарно сменных вершин.
6. $\varepsilon(G)$ – неплотность – наибольшее число попарно несменных вершин.
7. $ds(G)$ – вектор степеней (или степенная последовательность) – последовательность степеней всех вершин, выписанная в порядке неубывания.
8. $\chi(G)$ – хроматическое число – наименьшее число χ, для которого граф имеет правильную χ-раскраску множества вершин (правильная раскраска – раскраска, при которой смежные вершины имеют разный цвет).



$$
\begin{array}{ll}
n(Q_4) = 4 & \phi(Q_4) = 3 \\
m(Q_4) = 5 & \varepsilon(Q_4) = 2 \\
\delta(Q_4) = 2 & ds(Q_4) = (2,2,3,3) \\
\Delta(Q_4) = 3 & \chi(Q_4) = 3
\end{array}
$$

7 Связные и несвязные графы. Лемма об удалении ребра. Оценки числа ребер связного графа.

Определение 14 (Соединимые вершины, связный граф)**.** Две вершины u, v графа G называются *соединимыми*, если в G $\exists$ (u, v)-маршрут.

Граф называется *связным*, если в нем любые две вершины соединимы.

Замечание. Тривиальный граф считается связным.

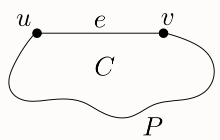
Определение 15 (Циклическое, ациклическое ребро)**.** Ребро e называется *циклическим*, если оно принадлежит некоторому циклу, и *ациклическим* – в противном случае.

Лемма 4 (Об удалении ребра)**.** Пусть $G = (V, E)$ – связный граф, $e \in E$.

1. Если e – циклическое ребро, то граф $G - e$ – связен.
2. Если e – ациклическое, то граф $G - e$ имеет ровно две компоненты связности.

Доказательство.

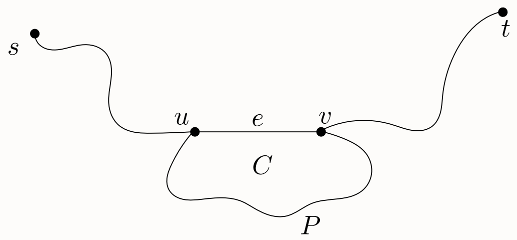
1. Пусть $e = (u, v)$ – циклическое, входит в цикл C, который можно рассмотреть как объединение ребра e и (u, v)-цепи P.



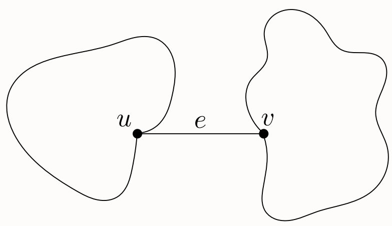
Чтобы доказать, что $G - e$ – связен, нужно доказать, что любые его две вершины соединимы.

Рассмотрим две произвольные вершины, назовем их s и t. Так как по условию G – связный, то $\exists$ (s,t)-маршрут.

Если этот (s,t)-маршрут проходит по ребру e, то заменим в нем ребро e на (u,v)-цепь P, получили новый (s,t)-маршрут, не проходящий по $e \Rightarrow G - e$ – связен.

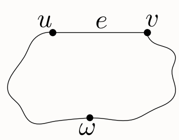


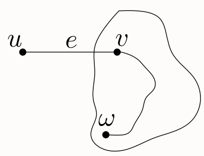
2. Пусть $e = uv$ ацикличен, очевидно, что $G - e$ – несвязный.



Чтобы доказать, что в $G - e$ ровно 2 компоненты связности, нужно доказать, что любая вершина ω содержится в одной компоненте с в u или v.

По условию G – связен, значит в нем $\exists$ простая (u,ω)-цепь и простая (v,ω)-цепь. Заметим, что ребро e может входить в одну, и только в одну, из этих цепей, иначе e было бы циклическим.





Предположим, что ребро e входит в (u,ω)-цепь. Тогда вершины v и ω находятся в одной компоненте связности.

$\square$

Теорема 5 (Оценки числа ребер связного графа)**.** Если G – связный (n, m)-граф, то

$$n - 1 \leqslant m \leqslant \frac{n(n-1)}{2}.$$

Доказательство. Доказательство требует только нижняя оценка.

Пусть $G = (V, E)$ – связный.

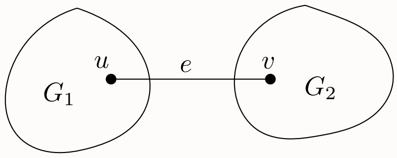
Доказывать будем индукцией по числу $|E|$ ребер. Если $|E| = m = 0$, то G – тривиальный граф, то есть $|V| = n = 1 \Rightarrow m = n - 1 = 0$. Предположим, что для графа, где $|E| < m$, неравенство верно. Пусть $|E| = m \geqslant 1$.

1. Если в G есть циклы, то рассмотрим какое-нибудь циклическое ребро e и удалим его из G. Тогда по лемме об удалении ребра, $G - e$ связен, а количество ребер $m - 1$.

   По предположению индукции, $m - 1 \geqslant n - 1 \Rightarrow m \geqslant n > n - 1$.

2. Пусть в G нет циклов, рассмотрим произвольное ребро e, оно ациклическое, удалим его, тогда в $G - e$ ровно две компоненты связности.

   Обозначим их G_1 и G_2.

   Пусть G_1 – (n_1, m_1)-граф, а G_2 – (n_2, m_2)-граф. Тогда

   $$\begin{aligned} m_1 &\geqslant n_1 - 1 \\ m_2 &\geqslant n_2 - 1 \end{aligned}$$

   (по предположению индукции, так как $m_1 < m, \ m_2 < m$)

   Следовательно,

   $$m - 1 = m_1 + m_2 \geqslant n_1 - 1 + n_2 - 1 = n_1 + n_2 - 2 = n - 2,$$

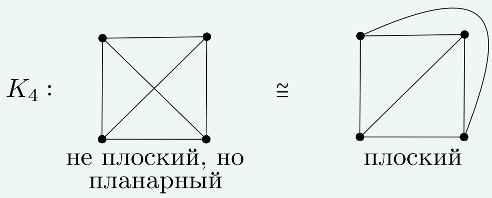
   то есть $m - 1 \geqslant n - 2 \Rightarrow m \geqslant n - 1$.

□

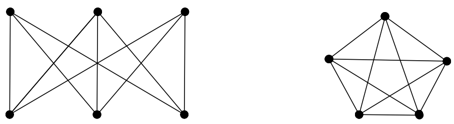
8 Плоские и планарные графы. Графы Куратовского. Формула Эйлера для плоских графов.

Определение 16 (Плоский, планарный граф). *Плоский граф* – это такой граф, вершины которого являются точками плоскости, а ребра – непрерывными плоскими линиями без самопересечений, соединяющими вершины так, что никакие два ребра не имеют общих точек вне вершин.

Планарный граф – это граф, изоморфный некоторому плоскому графу.



Замечание. Несложно доказать, что графы $K_{3,3}$ и K_5 – непланарны.



$K_{3,3}$ K_5

Определение 17 (Гомеоморфные графы). Два графа называются *гомеоморфными*, если их можно получить из одного и того же графа с помощью разбиения ребер, то есть замены некоторых ребер простыми цепями.

Теорема 6 (Понтрягин-Куратовский). Граф планарен $\Leftrightarrow$ он не содержит подграфов, гомеоморфных $K_{3,3}$ или K_5.

Теорема 7 (Формула Эйлера). Для всякого связного плоского графа верна формула

$$n - m + l = 2, \tag{2}$$

где n – число вершин, m – число ребер, l – число граней графа.

Доказательство. Рассмотрим две операции перехода от связного плоского графа G к его связному плоскому подграфу, не изменяющие величины $n - m + l$.

1. Удаление ребра, принадлежащего сразу двум граням (одно из которых может быть внешней), при этом m и l уменьшаются на 1.

2. Удаление висячей вершины вместе с инцидентным ребром. При этом n и m уменьшаются на 1.

Очевидно, что любой связный плоский граф, выполняя эти две операции, можно превратить в тривиальный граф, не меняя величины $n - m + l$, а для тривиального графа:

$$n - m + l = 2.$$

Значит формула 2 верна для любого связного плоского графа. $\square$