第 4 章测试题

《随机变量的数字特征》

姓名：________　　学号：________

1. 设 $P\{\xi = n\} = \frac{1}{2n(n+1)}\ (n = 1, 2, \ldots)$，则 $E(\xi) =$ (　)。

   (A) 0　　(B) 1
   (C) 0.5　(D) 不存在

2. 设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x^3, & 0 \le x \le 1, \\ 1, & x > 1, \end{cases}$$

   则 $E(X) =$ (　)。

   (A) $\int_0^{+\infty} x^4\,dx$　　(B) $3\int_0^1 x^3\,dx$
   (C) $\int_0^1 x^4\,dx + \int_1^{+\infty} x\,dx$　(D) $3\int_0^{+\infty} x^3\,dx$

3. 设随机变量 X 的期望和方差都存在，则对任意常数 C，有 (　)。

   (A) $E[(X-C)^2] < D(X) + E^2(X-C)$　(B) $E[(X-C)^2] > D(X) + E^2(X-C)$
   (C) $E[(X-C)^2] = D(X) + E^2(X-C)$　(D) $E[(X-C)^2] = D(X) - E^2(X-C)$

4. 设随机变量 X, Y 的概率密度分别为

$$f_X(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & x \ge 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \qquad f_Y(y) = \begin{cases} 4e^{-4y}, & y \ge 0, \\ 0, & y < 0, \end{cases}$$

   且 X, Y 相互独立，则

$$E(2X - 3Y) = \_\_\_\_\_\_\_\_, \qquad D(2X - 3Y) = \_\_\_\_\_\_\_\_.$$

5. 已知随机变量 X 服从二项分布，且 $E(X) = 2.4,\ D(X) = 1.44$，求二项分布参数 n, p。

6. 设 $X \sim N(0, 4)$，$Y \sim U(0, 4)$，且 X, Y 独立，求

$$E(XY), \qquad D(X+Y), \qquad D(2X - 3Y).$$

7. 某流水生产线上产品不合格概率为 p（$0 < p < 1$），各产品相互独立。出现第一个不合格产品即停机检修。设开机后第一次停机时已生产的产品数为 X，求 $E(X)$ 和 $D(X)$。

8. 设 (X, Y) 的联合密度为

$$f(x,y) = \begin{cases} 2, & 0 < x < 1,\ 2x < y < 3x, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

求协方差 $\operatorname{cov}(X, Y)$ 及相关系数 ρ_{XY}。

9. 随机变量的密度为

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

已知 $E(X) = 0.5,\ D(X) = 0.15$，求 a, b, c。

10. 某设备寿命 X（年）服从指数分布

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} e^{-\frac{1}{4}x}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0, \end{cases}$$

工厂规定售出一年内损坏可调换。售出一台盈利 100 元，调换成本 300 元。求厂方出售一台设备盈利的数学期望。

第 4 章测试题参考答案

第 1 题答案

答案： (D)

分析： 离散型随机变量的数学期望。

解：

$$E(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} nP(\xi = n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2(n+1)}.$$

该级数发散，因此 $E(\xi)$ 不存在。

第 2 题答案

答案： (B)

分析： 先求密度函数，再求期望。

解：

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 3x^2, & 0 \le x \le 1, \\ 0, & 其他, \end{cases}$$

$$E(X) = \int_0^1 x \cdot 3x^2 \, dx = 3\int_0^1 x^3 \, dx.$$

第 3 题答案

答案： (C)

分析： 考察方差的定义与性质。

解：

$$D(X) = D(X - C) = E\big[(X-C)^2\big] - \big(E(X-C)\big)^2,$$

因此

$$E\big[(X-C)^2\big] = D(X) + \big(E(X-C)\big)^2.$$

故选项 (C) 正确。

第 4 题答案

分析： 运用积分公式求期望与方差：

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-ax}\, dx = \frac{n!}{a^{n+1}}.$$

解： 因为 X, Y 相互独立，由期望与方差性质可知：

$$E(2X-3Y) = 2E(X) - 3E(Y), \qquad D(2X-3Y) = 4D(X) + 9D(Y).$$

$$E(X) = \int_0^{\infty} x \cdot 2e^{-2x}\, dx = 2\int_0^{\infty} xe^{-2x}\, dx = 2 \cdot \frac{1}{2^2} = \frac{1}{2},$$
$$E(X^2) = \int_0^{\infty} x^2 \cdot 2e^{-2x}\, dx = 2 \cdot \frac{2!}{2^3} = \frac{1}{2},$$
$$D(X) = E(X^2) - E^2(X) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

同理，

$$E(Y) = \int_0^{\infty} 4y\, e^{-4y}\, dy = 4 \cdot \frac{1}{4^2} = \frac{1}{4},$$
$$E(Y^2) = 4\int_0^{\infty} y^2 e^{-4y}\, dy = 4 \cdot \frac{2!}{4^3} = \frac{1}{8},$$
$$D(Y) = E(Y^2) - E^2(Y) = \frac{1}{8} - \frac{1}{16} = \frac{1}{16}.$$

因此：

$$E(2X-3Y) = 2 \cdot \frac{1}{2} - 3 \cdot \frac{1}{4} = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4},$$
$$D(2X-3Y) = 4D(X) + 9D(Y) = 4 \cdot \frac{1}{4} + 9 \cdot \frac{1}{16} = 1 + \frac{9}{16} = \frac{25}{16}.$$

第 5 题答案

分析： 由二项分布的期望与方差公式可直接解方程。

解： 由

$$E(X) = np = 2.4, \qquad D(X) = np(1-p) = 1.44,$$

得方程组

$$np = 2.4, \qquad np(1-p) = 1.44.$$

解得

$$n = 6, \qquad p = 0.4.$$

第 6 题答案

分析： 由正态分布与均匀分布的期望方差及随机变量期望方差的性质可得。若 X, Y 独立，则

$$E(XY) = E(X)E(Y), \qquad D(aX + bY) = a^2D(X) + b^2D(Y).$$

解：
因为 $X \sim N(0, 4)$，故 $E(X) = 0$, $D(X) = 4$。
因为 $Y \sim U(0, 4)$，故

$$E(Y) = \frac{0+4}{2} = 2, \qquad D(Y) = \frac{(4-0)^2}{12} = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}.$$

又因为 X, Y 独立，因此

$$E(XY) = E(X)E(Y) = 0.$$

$$D(X + Y) = D(X) + D(Y) = 4 + \frac{4}{3} = \frac{16}{3}.$$

$$D(2X - 3Y) = 4D(X) + 9D(Y) = 4 \cdot 4 + 9 \cdot \frac{4}{3} = 16 + 12 = 28.$$

第 7 题答案

解： 记 $q = 1 - p$，则几何分布（记为 $X \sim G(p)$）的概率分布为

$$P(X = i) = q^{i-1}p, \qquad i = 1, 2, \ldots$$

数学期望：

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} iq^{i-1}p = p\sum_{i=1}^{\infty} iq^{i-1} = p \cdot \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}.$$

计算 $E(X^2)$：

$$E(X^2) = E[X(X+1) - X] = E[X(X+1)] - E(X),$$

$$E[X(X+1)] = \sum_{k=1}^{\infty} k(k+1)q^{k-1}p = \frac{p}{q}\sum_{k=1}^{\infty} k(k+1)q^k.$$

利用级数公式推得：

$$E(X^2) = p\left[\frac{(1-p)^2}{p^2} + \frac{1}{p}\right] = \frac{2-p}{p^2}.$$

因此，方差为

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{2-p}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2} = \frac{q}{p^2}.$$

第 8 题答案

解：

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)\,dy\,dx=\int_0^1 dx\int_{2x}^{3x}2x\,dy=\int_0^1 2x(3x-2x)\,dx=\int_0^1 2x^2\,dx=\frac{2}{3}.$$

$$E(X^2)=\int_0^1\int_{2x}^{3x}x^2\cdot 2x\,dy\,dx=\int_0^1 2x^3(3x-2x)\,dx=\int_0^1 2x^4\,dx=\frac{1}{2}.$$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{1}{2}-\frac{4}{9}=\frac{1}{18}.$$

同理可得：

$$E(Y)=\int_0^1 dx\int_{2x}^{3x}2y\,dy=\frac{5}{3},$$

$$E(Y^2)=\int_0^1 dx\int_{2x}^{3x}2y^2\,dy=\frac{19}{6},$$

$$D(Y)=E(Y^2)-[E(Y)]^2=\frac{19}{6}-\frac{25}{9}=\frac{7}{18}.$$

计算协方差：

$$E(XY)=\int_0^1 dx\int_{2x}^{3x}2xy\,dy=\frac{5}{4}.$$

$$\operatorname{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{5}{4}-\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{3}=\frac{5}{36}.$$

相关系数：

$$\rho_{XY}=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\frac{5/36}{\sqrt{1/18}\sqrt{7/18}}=\frac{5}{2\sqrt{7}}.$$

第 9 题答案

分析： 根据连续型随机变量概率密度的规范性及期望方差条件求系数。

解：

规范性条件：

$$\int_0^1(ax^2+bx+c)\,dx=1\quad\Rightarrow\quad\frac{a}{3}+\frac{b}{2}+c=1.$$

期望条件：

$$E(X)=\int_0^1 x(ax^2+bx+c)\,dx=\frac{a}{4}+\frac{b}{3}+\frac{c}{2}=0.5.$$

方差条件：

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 0.15 \Rightarrow E(X^2) = D(X) + [E(X)]^2 = 0.15 + 0.25 = 0.4.$$

$$E(X^2) = \int_0^1 x^2(ax^2 + bx + c)\,dx = \frac{a}{5} + \frac{b}{4} + \frac{c}{3} = 0.4.$$

解方程组得：

$$a = 12, \qquad b = -12, \qquad c = 3.$$

第 10 题答案

解：

设设备寿命为 X，利润函数为

$$\varphi(X) = \begin{cases} 100, & X > 1, \\ -200, & 0 < X \le 1. \end{cases}$$

已知寿命服从指数分布，密度为

$$f(x) = \frac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}x}, \quad x > 0.$$

首先：

$$P(X > 1) = \int_1^\infty e^{-\frac{1}{4}x}\,dx = e^{-\frac{1}{4}},$$

$$P(0 < X \le 1) = 1 - e^{-\frac{1}{4}}.$$

因此期望利润：

$$E[\varphi(X)] = 100e^{-\frac{1}{4}} + (-200)(1 - e^{-\frac{1}{4}}) = 100e^{-\frac{1}{4}} - 200 + 200e^{-\frac{1}{4}} = 300e^{-\frac{1}{4}} - 200.$$

数值为：

$$300e^{-\frac{1}{4}} - 200 \approx 33.64 \text{ 元}.$$