第 6 章测试题

《样本及抽样分布》

姓名：__________ 学号：__________

1. $X \sim N(0,1)$，对给定的 $\alpha(0<\alpha<1)$，数 U_α 满足 $P\{X>U_\alpha\}=\alpha$，若 $P\{|X|<x\}=\alpha$，则 x 等于（ ）。

(A) $U_\alpha/2$ (B) $U_{1-\alpha}/2$ (C) $U_{(1-\alpha)/2}$ (D) $U_{1-\alpha}$

【答案】 **答案：** (C)

解： 由 $P(|X|<x)=\alpha$，则 $1-\alpha=P(|X|>x)=P(X>x)+P(X<-x)=2P(X>x)$，故 $P(X>x)=\frac{1-\alpha}{2}$，于是 $x=U_{(1-\alpha)/2}$。

2. 设 $X_1,X_2,\ldots,X_n(n\geq 2)$ 为总体 $N(0,1)$ 的简单随机样本，$\bar{X},S^2$ 分别为样本均值与样本方差，则（ ）。

(A) $n\bar{X}\sim N(0,1)$

(B) $nS^2\sim\chi^2(n)$

(C) $\dfrac{\bar{X}-0}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$

(D) $\dfrac{(n-1)X_2^2}{\sum_{i=2}^n X_i^2/(n-1)}\sim F(1,n-1)$

【答案】 **答案：** (D)

解： 由抽样分布知 $\bar{X}\sim N(0,1/n)$，$(n-1)S^2\sim\chi^2(n-1)$ 且 $\bar{X}$ 与 S^2 相互独立。又

$$\frac{(n-1)X_2^2}{\sum_{i=2}^n X_i^2/(n-1)}=\frac{X_2^2/1}{\sum_{i=2}^n X_i^2/(n-1)}\sim F(1,n-1).$$

3. 设总体 X 和 Y 相互独立且都服从 $N(0,\sigma^2)$，$X_1,\ldots,X_n$ 和 $Y_1,\ldots,Y_n$ 为容量为 n 的两个简单随机样本，样本均值与方差分别为 $\bar{X},S_X^2$；$\bar{Y},S_Y^2$，则（ ）。

(A) $\bar{X}-\bar{Y}\sim N(0,\sigma^2)$

(B) $S_X^2+S_Y^2\sim\chi^2(2n-2)$

(C) $\dfrac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{S_X^2+S_Y^2}}\sim t(2n-2)$

(D) $\dfrac{S_X^2}{S_Y^2}\sim F(n-1,n-1)$

【答案】 答案：(D)

解：

$$\bar{X}-\bar{Y}\sim N\left(0,\frac{2\sigma^2}{n}\right),\qquad \frac{(n-1)(S_X^2+S_Y^2)}{\sigma^2}\sim\chi^2(2n-2),$$

并且

$$\frac{S_X^2}{S_Y^2}\sim F(n-1,n-1).$$

4. 设 X_1,X_2,X_3 是来自总体 $X\sim N(0,\sigma^2)$ 的简单随机样本，则统计量 $T=\dfrac{X_1-X_2}{\sqrt{2}\,|X_3|}$ 服从的分布为（ ）。

(A) $F(1,1)$ (B) $F(2,1)$ (C) $t(1)$ (D) $t(2)$

【答案】 答案：(C)

解： $X_1-X_2\sim N(0,2\sigma^2)$，$X_3/\sigma\sim N(0,1)$，且相互独立。故

$$T=\frac{(X_1-X_2)/(\sqrt{2}\sigma)}{\sqrt{(X_3/\sigma)^2}}\sim t(1).$$

5. 设 $X_1,\dots,X_n$ 为 $N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本，$\bar{X}$ 为样本均值，定义

$$S_1^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n(X_i-\bar{X})^2,\ S_2^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n(X_i-\bar{X})^2,$$

$$S_3^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n(X_i-\mu)^2,\ S_4^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n(X_i-\mu)^2,$$

则服从自由度为 $n-1$ 的 t 分布的是（ ）。

(A) $\dfrac{\bar{X}-\mu}{S_1/\sqrt{n}}$ (B) $\dfrac{\bar{X}-\mu}{S_2/\sqrt{n}}$ (C) $\dfrac{\bar{X}-\mu}{S_3/\sqrt{n}}$ (D) $\dfrac{\bar{X}-\mu}{S_4/\sqrt{n}}$

【答案】 答案：(B)

解：由 $(n-1)S_2^2/\sigma^2=nS_2^2/\sigma^2\sim\chi^2(n-1)$ 且与 $\bar{X}$ 独立，由 t 分布定义

$$\frac{\bar{X}-\mu}{S_2/\sqrt{n}}\sim t(n-1).$$

6. 设 X_1, X_2, X_3, X_4 是来自 $N(0, 2\sigma^2)$ 的样本，令

$$T = a(X_1 - 2X_2)^2 + b(3X_3 - 4X_4)^2,$$

求 a, b 使 $T \sim \chi^2$ 分布，并写出自由度（填空）。

【答案】 **答案：** $a = \dfrac{1}{20}$，$b = \dfrac{1}{100}$，自由度为 2。

解： $(X_1 - 2X_2)/\sqrt{20\sigma^2} \sim N(0,1)$，$(3X_3 - 4X_4)/\sqrt{100\sigma^2} \sim N(0,1)$，故上式为两项 $\chi^2(1)$ 之和，共 $\chi^2(2)$。

7. 标准正态 $X \sim N(0,1)$，$X_1, \ldots, X_n$ 为简单随机样本，判断下列统计量的分布：

A. $\dfrac{X_1 - X_2}{X_3^2 + X_4^2}$　　B. $\dfrac{X_1}{\sqrt{X_2^2 + \cdots + X_n^2}}$　　C. $\dfrac{(n-3)(X_1^2 + X_2^2 + X_3^2)}{3(X_4^2 + \cdots + X_n^2)}$

【答案】 **解：**

(1) $\dfrac{X_1 - X_2}{X_3^2 + X_4^2} = \dfrac{(X_1 - X_2)/\sqrt{2}}{\sqrt{(X_3^2 + X_4^2)/2}} \sim t(2)$。

(2) $\dfrac{X_1}{\sqrt{X_2^2 + \cdots + X_n^2}/\sqrt{n-1}} \sim t(n-1)$。

(3) $\dfrac{(n-3)(X_1^2 + X_2^2 + X_3^2)}{3(X_4^2 + \cdots + X_n^2)} \sim F(3, n-3)$。

8. 设 $X_1, \ldots, X_n$ 来自泊松分布参数 λ，$\bar{X}$ 为样本均值，令 $Y_i = X_i - \bar{X}$，求 $E(\sum_{i=1}^n Y_i^2)$。

【答案】 **答案：** $(n-1)\lambda$

解： $E(S^2) = \lambda$，而 $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum Y_i^2$，故

$$E\left(\sum_{i=1}^n Y_i^2\right) = (n-1)\lambda.$$

9. 设 $X \sim B(m, \theta)$，样本 $X_1, \ldots, X_n$，样本均值 $\bar{X}$，求 $E\big(\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2\big)$。

【答案】 **答案：** $(n-1)m\theta(1-\theta)$

解： 因为 $E(S^2) = m\theta(1-\theta)$，$S^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum (X_i - \bar{X})^2$，故

$$E\left[\sum (X_i - \bar{X})^2\right] = (n-1)m\theta(1-\theta).$$

10. 设总体 X 的概率密度为 $f(x) = \dfrac{1}{2}e^{-|x|}$，样本方差为 S^2，求 $E(S^2)$。

【答案】 **答案：** 2

解： $E(S^2) = D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$，其中 $E(X) = 0$，

$$E(X^2) = \int_0^\infty x^2 e^{-x} dx = 2.$$

因此 $E(S^2) = 2$。