

第3章测试题

《多维随机变量及其分布》

姓名：_____ 学号：_____

1. 设随机变量 (X, Y) 的分布函数

$$F(x, y) = \begin{cases} a(b + \arctan x)(c - e^{-y}), & x \in \mathbb{R}, y > 0, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

求常数 a, b, c 的值。

2. 盒中装有 3 只黑球、2 只红球、2 只白球，共 7 只。任取 4 只，以 X 表示取到黑球的只数，以 Y 表示取到红球的只数，求：

(a) X 与 Y 的联合分布律；

(b) $P\{X > Y\}$, $P\{Y = 2X\}$, $P\{X + Y = 3\}$, $P\{X < 3 - Y\}$ 。

3. 设随机变量 (X, Y) 的联合概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 2e^{-(2x+y)}, & x > 0, y > 0, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

(a) 判断 X 与 Y 是否独立；

(b) 求 $P\{X \leq 2 | Y \leq 1\}$ 。

4. 设 X, Y 都是非负连续型随机变量，且相互独立。

(a) 证明：

$$P\{X < Y\} = \int_0^{\infty} F_X(x) f_Y(x) dx$$

其中， $F_X(x)$ 为 X 的分布函数， $f_Y(y)$ 为 Y 的概率密度。

(b) 设 X, Y 相互独立，其概率密度为

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda_1 e^{-\lambda_1 x}, & x > 0, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases} \quad f_Y(y) = \begin{cases} \lambda_2 e^{-\lambda_2 y}, & y > 0, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

求 $P\{X < Y\}$ 。

第3章测试题参考答案

1. 解:

$$F(+\infty, +\infty) = 1 \Rightarrow \alpha \left(b + \frac{\pi}{2} \right) (c - 0) = 1,$$

$$F(-\infty, y) = 0 \Rightarrow \alpha \left(b - \frac{\pi}{2} \right) (c - e^{-y}) = 0,$$

$$F(x, -\infty) = 0 \Rightarrow \alpha(b + \arctan x)(c - 1) = 0.$$

因此:

$$\alpha = \frac{1}{\pi}, \quad b = \frac{\pi}{2}, \quad c = 1.$$

2. 解: 共有 3 黑球、2 红球、2 白球, 取 4 个。设 X 表示取到黑球的个数, Y 表示取到红球的个数。则

$$P\{X = i, Y = j\} = \frac{\binom{3}{i} \binom{2}{j} \binom{2}{4-i-j}}{\binom{7}{4}}.$$

于是得到联合分布表:

$Y \setminus X$	0	1	2	3
0	0	0	$\frac{3}{35}$	$\frac{3}{35}$
1	0	$\frac{6}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{2}{35}$
2	$\frac{1}{35}$	$\frac{6}{35}$	$\frac{3}{35}$	0

(1) 联合分布律如上表。

(2) 各概率如下:

$$\begin{aligned} P(X > Y) &= P(X = 2, Y = 0) + P(X = 2, Y = 1) + P(X = 3, Y = 0) + P(X = 3, Y = 1) \\ &= \frac{19}{35}, \end{aligned}$$

$$P(Y = 2X) = P(X = 1, Y = 2) = \frac{6}{35},$$

$$P(X + Y = 3) = \frac{20}{35},$$

$$P(X < 3 - Y) = P(X + Y < 3) = \frac{10}{35}.$$

3. 解:

$$f(x, y) = \begin{cases} 2e^{-(2x+y)}, & x > 0, y > 0, \\ 0, & \text{other.} \end{cases}$$

(1) 求边缘密度:

$$f_X(x) = \int_0^{+\infty} 2e^{-(2x+y)} dy = 2e^{-2x}, \quad f_Y(y) = \int_0^{+\infty} 2e^{-(2x+y)} dx = e^{-y}.$$

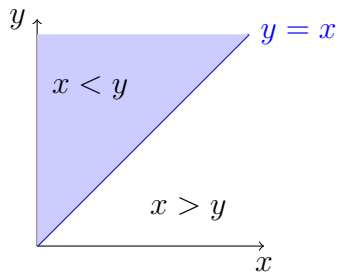
有 $f(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$, 故 X, Y 独立。

(2)

$$P(X \leq 2 | Y \leq 1) = \frac{P(X \leq 2, Y \leq 1)}{P(Y \leq 1)} = \frac{(1 - e^{-4})(1 - e^{-1})}{1 - e^{-1}} = \boxed{1 - e^{-4}}.$$

4. 证明:

积分区域如下:



由于 X, Y 相互独立, 联合密度函数为

$$f(x, y) = \begin{cases} f_X(x)f_Y(y), & x > 0, y > 0, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

因此,

$$P(X < Y) = \iint_{x < y} f_X(x)f_Y(y) dx dy.$$

将积分区域改写为

$$P(X < Y) = \int_0^{+\infty} \int_0^y f_X(x)f_Y(y) dx dy.$$

交换积分次序:

$$P(X < Y) = \int_0^{+\infty} f_Y(y) \left[\int_0^y f_X(x) dx \right] dy.$$

由于

$$F_X(y) = \int_0^y f_X(x) dx,$$

于是

$$P(X < Y) = \int_0^{+\infty} f_Y(y)F_X(y) dy.$$

将积分变量改写为 x , 得

$$P(X < Y) = \int_0^{+\infty} F_X(x)f_Y(x) dx.$$

(2) 若

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda_1 e^{-\lambda_1 x}, & x > 0, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases} \quad f_Y(y) = \begin{cases} \lambda_2 e^{-\lambda_2 y}, & y > 0, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

则

$$\begin{aligned} P(X < Y) &= \int_0^{+\infty} (1 - e^{-\lambda_1 x}) \lambda_2 e^{-\lambda_2 x} dx \\ &= 1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} = \boxed{\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}}. \end{aligned}$$