第七章　　参数估计

第一节　　点估计

一、点估计问题的提法

二、估计量的求法

三、小结

一、点估计问题的提法

设总体 X 的分布函数形式已知, 但它的一个或多个参数为未知, 借助于总体 X 的一个样本来估计总体未知参数的值的问题称为**点估计问题**.

例1 在某炸药制造厂, 一天中发生着火现象的次数 X 是一个随机变量,假设它服从以 $\lambda > 0$ 为参数的泊松分布,参数 λ 为未知, 设有以下的样本值, 试估计参数 λ.

着火次数 k	0	1	2	3	4	5	6	
发生 k 次着火的天数 n_k	75	90	54	22	6	2	1	$\Sigma = 250$

解 因为 $X \sim \pi(\lambda)$, 所以 $\lambda = E(X)$.

用样本均值来估计总体的均值 $E(X)$.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{k=0}^{6} k n_k}{\sum_{k=0}^{6} n_k} = \frac{1}{250}(0 \times 75 + 1 \times 90 + 2 \times 54 + 3 \times 22 + 4 \times 6 + 5 \times 2 + 6 \times 1) = 1.22.$$

故 $E(X) = \lambda$ 的估计为1.22 .

点估计问题的一般提法（定义）

设总体 X 的分布函数 $F(x;\theta)$ 的形式为已知, θ 是待估参数. $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是 X 的一个样本, $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为相应的一个样本值.

点估计问题就是要构造一个适当的统计量 $\hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$, 用它的观察值 $\hat{\theta}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 来估计未知参数 θ.

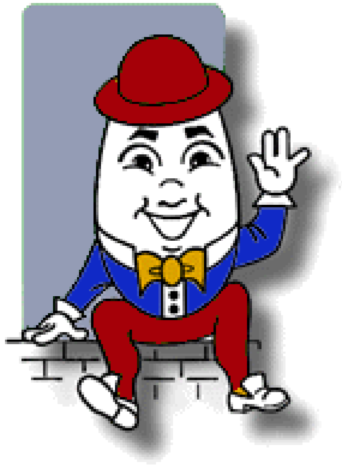
$\left.\begin{array}{l}\hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)\text{称为}\theta\text{的估计量.}\\ \hat{\theta}(x_1, x_2, \cdots, x_n)\text{称为}\theta\text{的估计值.}\end{array}\right\}$ 通称估计, 简记为 $\hat{\theta}$.

二、估计量的求法

由于估计量是样本的函数，是随机变量，故对不同的样本值，得到的参数值往往不同，如何求估计量是关键问题.

常用构造估计量的方法：(两种)

矩估计法和最大似然估计法.



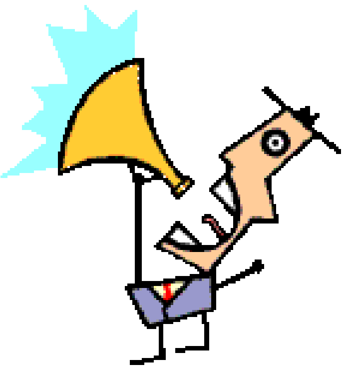
1. 矩估计法

设 X 为连续型随机变量,其概率密度为 $f(x;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)$, 或 X 为离散型随机变量, 其分布律为 $P\{X=x\}=p(x;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)$, 其中 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k$ 为待估参数,

若 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自 X 的样本,

假设总体 X 的前 k 阶矩存在,

且均为 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k$ 的函数, 即



$$\mu_l = E(X^l) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^l f(x;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)\mathrm{d}x$$ (*X*为连续型)

或 $$\mu_l = E(X^l) = \sum_{x\in R_X} x^l p(x;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k),$$ (*X*为离散型)

其中R_X是x可能取值的范围, $l=1,2,\cdots,k$

因为样本矩 $A_l = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^l$ 依概率收敛于相应的

总体矩 $\mu_l\ (l=1,2,\cdots,k)$,

样本矩的连续函数依概率收敛于相应的总体矩

的连续函数.

矩估计法的定义

用样本矩来估计总体矩,用样本矩的连续函数来估计总体矩的连续函数,这种估计法称为**矩估计法**.

矩估计法的具体做法: 令 $\mu_l = A_l, \quad l = 1, 2, \cdots, k.$

这是一个包含 k 个未知参数 $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k$ 的方程组,

解出其中 $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k$.

用方程组的解 $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \cdots, \hat{\theta}_k$ 分别作为 $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k$ 的估计量,这个估计量称为矩估计量.

矩估计量的观察值称为矩估计值.

例3　设总体 X 在 $[0,\theta]$ 上服从均匀分布,其中 θ $(\theta > 0)$ 未知, $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是来自总体 X 的样本,求 θ 的估计量.

解　因为 $\mu_1 = E(X) = \dfrac{\theta}{2}$,

根据矩估计法，令 $\dfrac{\hat{\theta}}{2} = A_1 = \overline{X}$,

所以 $\hat{\theta} = 2\overline{X}$ 为所求 θ 的估计量.

例4 设总体 X 在$[a,b]$上服从均匀分布,其中a, b未知,$(X_1, X_2,\cdots, X_n)$是来自总体X的样本,求a, b的估计量.

解 $\mu_1 = E(X)=\dfrac{a+b}{2}$,

$$\mu_2 = E(X^2) = D(X) + [E(X)]^2 = \frac{(a-b)^2}{12} + \frac{(a+b)^2}{4},$$

令 $\dfrac{a+b}{2} = A_1 = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$,

$$\frac{(a-b)^2}{12} + \frac{(a+b)^2}{4} = A_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2,$$

即 $\begin{cases} a+b=2A_1, \\ b-a=\sqrt{12(A_2-A_1^2)}. \end{cases}$

解方程组得到***a*, *b***的矩估计量分别为

$$\hat{a}=A_1-\sqrt{3(A_2-A_1^2)} \quad =\bar{X}-\sqrt{\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2},$$

$$\hat{b}=A_1+\sqrt{3(A_2-A_1^2)}=\bar{X}+\sqrt{\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}.$$

例5 设总体 X 服从几何分布,即有分布律

$$P\{X=k\}=p(1-p)^{k-1}\quad(k=1,2,\cdots),$$

其中 $p\ (0<p<1)$ 未知, $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是来自总体 X 的样本,求 p 的估计量.

解 $$\mu_1=E(X)=\sum_{k=1}^{\infty}kp(1-p)^{k-1}=\frac{1}{p},$$

令 $\dfrac{1}{\hat{p}}=A_1=\overline{X},$

所以 $\hat{p}=\dfrac{1}{\overline{X}}$ 为所求 p 的估计量.

例6 设总体 X 的均值 μ 和方差 σ^2 都存在,且有 $\sigma^2 > 0$, 但 μ 和 σ^2 均为未知, 又设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是一个样本, 求 μ 和 σ^2 的矩估计量.

解 $\mu_1 = E(X) = \mu,$

$\mu_2 = E(X^2) = D(X) + [E(X)]^2 = \sigma^2 + \mu^2,$

令 $\begin{cases} \hat{\mu} = A_1, \\ \hat{\sigma}^2 + \hat{\mu}^2 = A_2. \end{cases}$

解方程组得到矩估计量分别为 $\hat{\mu} = A_1 = \overline{X},$

$$\hat{\sigma}^2 = A_2 - A_1^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \overline{X}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2.$$

上例表明:

总体均值与方差的矩估计量的表达式不因不同的总体分布而异.

例 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$, μ,σ^2 未知, 即得 μ,σ^2 的矩估计量

$$\hat{\mu} = \overline{X}, \qquad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2.$$

一般地,

用样本均值 $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ 作为总体 X 的均值的矩估计,

用样本二阶中心矩 $B_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$ 作为总体

X 的方差的矩估计.

2. 最大似然估计法

(1) 设总体 X 属离散型

似然函数的定义

设分布律 $P\{X=k\}=p(x;\theta)$, θ 为待估参数, $\theta \in \Theta$,

(其中 Θ 是 θ 可能的取值范围)

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 X 的样本,

则 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的联合分布律为 $\prod_{i=1}^{n} p(x_i;\theta)$.

又设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为相应于样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的一个样本值.

则样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 取到观察值 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的概率,

即事件 $X_1 = x_1, X_2 = x_2, \cdots, X_n = x_n$ 发生的概率为

$$L(\theta) = L(x_1, x_2, \cdots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i; \theta), \quad \theta \in \Theta,$$

$L(\theta)$称为样本似然函数.

最大似然估计法

得到样本值$x_1,x_2,\cdots,x_n$时，选取使似然函数$L(\theta)$

取得最大值的$\hat{\theta}$作为未知参数θ的估计值，

即 $$L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\hat{\theta})=\max_{\theta\in\Theta}L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta).$$

(其中Θ是θ可能的取值范围)

这样得到的$\hat{\theta}$与样本值$x_1,x_2,\cdots,x_n$有关，记为

$\boxed{\hat{\theta}(x_1,x_2,\cdots,x_n)}$，参数$\theta$的最大似然估计值，

$\boxed{\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)}$ 参数θ的最大似然估计量.

(2) 设总体 X 属连续型

似然函数的定义

设概率密度为 $f(x;\theta)$, θ 为待估参数, $\theta \in \Theta$,

(其中 Θ 是 θ 可能的取值范围)

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 X 的样本,

则 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的联合密度为 $\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)$.

又设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为相应于样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的一个样本值.

则随机点 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 落在点 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的邻域(边长分别为 $\mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2, \cdots, \mathrm{d}x_n$ 的 n 维立方体)内的概率近似地为 $\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)\mathrm{d}x_i$,

$$L(\theta) = L(x_1, x_2, \cdots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta),$$

$L(\theta)$ 称为样本的似然函数.

若 $L(x_1, x_2, \cdots, x_n; \hat{\theta}) = \max\limits_{\theta \in \Theta} L(x_1, x_2, \cdots, x_n; \theta).$

$\boxed{\hat{\theta}(x_1, x_2, \cdots, x_n)}$ 参数 θ 的最大似然估计值,

$\boxed{\hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)}$ 参数 θ 的最大似然估计量.

最大似然估计法是由费舍尔引进的.

求最大似然估计量的步骤:

(一) 写出似然函数

$$L(\theta)=L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta)=\prod_{i=1}^{n}p(x_i;\theta)$$

或 $$L(\theta)=L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta);$$

(二) 取对数

$$\ln L(\theta)=\sum_{i=1}^{n}\ln p(x_i;\theta)$$ 或 $$\ln L(\theta)=\sum_{i=1}^{n}\ln f(x_i;\theta);$$

(三) 对 θ 求导 $\dfrac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}$， 并令 $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}} = 0$, 对数似然方程

解方程即得未知参数 θ 的最大似然估计值 $\hat{\theta}$.

最大似然估计法也适用于分布中含有多个未知参数的情况. 此时只需令

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial \theta_i} \ln L = 0, \qquad i = 1,2,\cdots,k.}$$ 对数似然方程组

解出由 k 个方程组成的方程组, 即可得各未知参数 $\theta_i\ (i = 1,2,\cdots,k)$ 的最大似然估计值 $\hat{\theta}_i$.

例7　设$X \sim B(1,p)$, $X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自X的一个样本,求p的最大似然估计量.

解　设$x_1,x_2,\cdots,x_n$为相应于样本$X_1,X_2,\cdots,X_n$的一个样本值,

X的分布律为　$P\{X=x\}=p^x(1-p)^{1-x}, x=0,1,$

似然函数 $L(p)=\prod_{i=1}^{n} p^{x_i}(1-p)^{1-x_i}$

$$=p^{\sum_{i=1}^{n} x_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i},$$

$$\ln L(p)=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\ln p+\left(n-\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\ln(1-p),$$

令 $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\ln L(p)=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{p}-\frac{n-\sum_{i=1}^{n}x_i}{1-p}=0,$$

解得 p 的最大似然估计值 $$p=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\bar{x}.$$

p 的最大似然估计量为 $$\hat{p}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=\bar{X}.$$

这一估计量与矩估计量是相同的.

例8 设 X 服从参数为 $\lambda\ (\lambda>0)$ 的泊松分布, $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自 X 的一个样本, 求 λ 的最大似然估计量.

解 因为X的分布律为

$$P\{X=x\}=\frac{\lambda^x}{x!}\mathrm{e}^{-\lambda},\quad (x=0,1,2,\cdots,n)$$

所以λ的似然函数为

$$L(\lambda)=\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}\mathrm{e}^{-\lambda}\right)=\mathrm{e}^{-n\lambda}\frac{\lambda^{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}}{\prod\limits_{i=1}^{n}(x_i!)},$$

$$\ln L(\lambda) = -n\lambda + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\ln\lambda - \sum_{i=1}^{n} \mathrm{In}(x_i!),$$

令 $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\ln L(\lambda) = -n + \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\lambda} = 0,$$

解得λ的最大似然估计值 $\lambda = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x}$,

λ的最大似然估计量为 $\hat{\lambda} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \bar{X}$.

这一估计量与矩估计量是相同的.

例9 设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$, μ,σ^2为未知参数, $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是来自X的一个样本值, 求μ和σ^2的最大似然估计量.

解 X的概率密度为

$$f(x;\mu,\sigma^2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

X 的似然函数为

$$L(\mu,\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

$$\ln L(\mu,\sigma^2) = -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{n}{2}\ln\sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 ,$$

令 $$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial\mu}\ln L(\mu,\sigma^2) = 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial\sigma^2}\ln L(\mu,\sigma^2) = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\sigma^2}\left[\sum_{i=1}^{n}x_i - n\mu\right] = 0 , \\ -\dfrac{n}{2\sigma^2} + \dfrac{1}{2(\sigma^2)^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 = 0 , \end{cases}$$

由 $\frac{1}{\sigma^2}\left[\sum_{i=1}^{n} x_i - n\mu\right] = 0$ 解得 $\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x},$

由 $-\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2(\sigma^2)^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2 = 0$ 解得

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2,$$

故 μ 和 σ^2 的最大似然估计量分别为

$\hat{\mu} = \bar{X},\ \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2.$ 它们与相应的矩估计量相同.

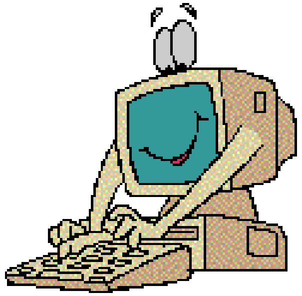
例10 设总体 X 在 $[a,b]$ 上服从均匀分布,其中 a, b 未知, $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是来自总体 X 的一个样本值, 求 a,b 的最大似然估计量.

解 记 $x_{(l)}=\min(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,

$$x_{(h)}=\max(x_1,x_2,\cdots,x_n),$$

X 的概率密度为

$$f(x;a,b)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a\le x\le b,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$



因为$a \le x_1, x_2, \cdots, x_n \le b$等价于$a \le x_{(l)}, x_{(h)} \le b$,

作为a, b的函数的似然函数为

$$L(a, b) = \begin{cases} \dfrac{1}{(b-a)^n}, & a \le x_{(l)},\ b \ge x_{(h)}, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

于是对于满足条件 $a \le x_{(l)},\ b \ge x_{(h)}$的任意$a,b$有

$$L(a, b) = \frac{1}{(b-a)^n} \le \frac{1}{(x_{(h)} - x_{(l)})^n},$$

即似然函数$L(a,b)$在$a = x_{(l)}$, $b = x_{(h)}$时

取到最大值$(x_{(h)} - x_{(l)})^{-n}$,

a, b的最大似然估计值

$$\hat{a} = x_{(l)} = \min_{1 \le i \le n} x_i, \qquad \hat{b} = x_{(h)} = \max_{1 \le i \le n} x_i,$$

a, b的最大似然估计量

$$\hat{a} = \min_{1 \le i \le n} X_i, \qquad \hat{b} = \max_{1 \le i \le n} X_i .$$

最大似然估计的性质　　　　不变性

设 θ 的函数 $u = u(\theta), \theta \in \Theta$ 具有单值反函数 $\theta = \theta(u), u \in \mathrm{U}$. 又设 $\hat{\theta}$ 是 X 的概率密度函数 $f(x;\theta)$ (f 形式已知) 中的参数 θ 的最大似然估计, 则 $\hat{u} = u(\hat{\theta})$ 是 $u(\theta)$ 的最大似然估计.

证明　因为$\hat{\theta}$是θ的最大似然估计值,

所以 $L(x_1, x_2, \cdots, x_n; \hat{\theta}) = \max\limits_{\theta \in \Theta} L(x_1, x_2, \cdots, x_n; \theta)$,

其中$x_1, x_2, \cdots, x_n$是来自总体 X的一个样本值,

由于　$\hat{u} = u(\hat{\theta})$,　$\hat{\theta} = \theta(\hat{u})$,

故 $L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta(\hat{u}))=\max\limits_{u\in U} L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta(u))$,

于是 $\hat{u}=u(\hat{\theta})$是$u(\theta)$的最大似然估计.

此性质可以推广到总体分布中含有多个未知参数的情况.

如例9中σ^2 的最大似然估计值为 $\hat{\sigma}^2=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$,

函数 $u=u(\sigma^2)=\sqrt{\sigma^2}$ 有单值反函数 $\sigma^2=u^2(u\geq 0)$,

故标准差 σ 的最大似然估计值为

$$\hat{\sigma}=\sqrt{\hat{\sigma}^2}=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}.$$

三、小结

两种求点估计的方法: $\begin{cases} \text{矩估计法} \\ \text{最大似然估计法} \end{cases}$

在统计问题中往往先使用最大似然估计法，
在最大似然估计法使用不方便时，再用矩估计法.

似然函数 $L(\theta)=L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta)=\prod_{i=1}^{n} p(x_i;\theta)$

或 $L(\theta)=L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)$;

随堂练习

9. 设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-\theta}, & \theta\le x\le 1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

其中 $0<\theta<1$ 为未知参数，$X_1,X_2,\dots,X_n$ 为来自该总体的简单随机样本。

(1) 求 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}_1$；

(2) 求 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}_2$。

随堂练习

10. 设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{\theta^2}{x^3}e^{-\theta/x}, & x>0,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

其中 $\theta>0$ 为未知参数，$X_1,X_2,\ldots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本。

(1) 求 θ 的矩估计量；

(2) 求 θ 的最大似然估计量。

随堂练习

11. 设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{\theta}{2}, & 0<x<2,\\ \dfrac{1}{2}-\dfrac{\theta}{2}, & 2\le x\le 4,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

其中 $0<\theta<2$ 为未知参数。$X_1,X_2,\ldots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本，记 k 为样本值 $x_1,x_2,\ldots,x_n$ 中小于 2 的个数。

(1) 求 θ 的矩估计量；

(2) 求 θ 的最大似然估计量。

9.解 (Ⅰ) 因为 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x;\theta)\mathrm{d}x=\int_{\theta}^{1}\frac{x}{1-\theta}\mathrm{d}x=\frac{1+\theta}{2}$，

令 $E(X)=\overline{X}$，即 $\frac{1+\theta}{2}=\overline{X}$，$\theta=2\overline{X}-1$，故 θ 的矩估计量为 $\hat{\theta}_1=2\overline{X}-1$。

(Ⅱ) 样本的似然函数为

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)=\frac{1}{(1-\theta)^n},\theta\leqslant x_i\leqslant 1,i=1,2,\cdots,n，$$

取对数，得
$$\ln L(\theta)=-n\ln(1-\theta)，$$

因为 $\frac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=\frac{n}{1-\theta}>0(\theta<1)$，所以 $\ln L(\theta)$ 单调递增，从而 $L(\theta)$ 单调递增，故当 $\theta=\min\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 时，$L(\theta)$ 取得最大值，因此 θ 的最大似然估计量为 $\hat{\theta}_2=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$。

10. 解 （Ⅰ）因为 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x;\theta)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}x\cdot\frac{\theta^2}{x^3}\mathrm{e}^{-\frac{\theta}{x}}\mathrm{d}x=\theta\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{\theta}{x}}\mathrm{d}\left(-\frac{\theta}{x}\right)$

$$=\theta\mathrm{e}^{-\frac{\theta}{x}}\Big|_0^{+\infty}=\theta(\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{\theta}{x}}-\lim_{x\to0^+}\mathrm{e}^{-\frac{\theta}{x}})=\theta.$$

令 $E(X)=\overline{X}$，即 $\theta=\overline{X}$，故 θ 的矩估计量为 $\hat{\theta}_1=\overline{X}$.

（Ⅱ）样本的似然函数为

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)=\frac{\theta^{2n}}{(x_1x_2\cdots x_n)^3}\mathrm{e}^{-\theta\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}},x_i>0,i=1,2,\cdots,n.$$

取对数，得 $\ln L(\theta)=2n\ln\theta-3\sum_{i=1}^{n}\ln x_i-\theta\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}$，令

$$\frac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=\frac{2n}{\theta}-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}=0,$$

得 $\theta=\frac{2n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}}$，故 θ 的最大似然估计量为 $\hat{\theta}_2=\frac{2n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_i}}$.

11. 解 （Ⅰ）因为 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x;\theta)\mathrm{d}x=\int_0^{1}\frac{\theta}{2}x\mathrm{d}x+\int_2^{4}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\theta\right)x\mathrm{d}x=3-2\theta$

令 $E(X)=\overline{X}$，即 $3-2\theta=\overline{X}$，$\theta=\frac{3-\overline{X}}{2}$，故 θ 的矩估计量为 $\hat{\theta}_1=\frac{3-\overline{X}}{2}$.

（Ⅱ）样本的似然函数为 $L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)=\left(\frac{\theta}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\theta\right)^{n-k}$，取对数，得

$$\ln L(\theta)=k(\ln\theta-\ln 2)+(n-k)[\ln(1-\theta)-\ln 2],$$

令 $\frac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=\frac{k}{\theta}-\frac{n-k}{1-\theta}=0$，得 $\theta=\frac{k}{n}$，显然当 $\theta=\frac{k}{n}$ 时，$L(\theta)$ 取得最大值，

故 θ 的最大似然估计量为 $\hat{\theta}_2=\frac{k}{n}$.

第三节　　估计量的评选标准

一、问题的提出

二、无偏性

三、有效性

四、相合性

五、小结

一、问题的提出

从前一节可以看到，对于同一个参数，用不同的估计方法求出的估计量可能不相同，如第一节的例4和例10. 而且，很明显，原则上任何统计量都可以作为未知参数的估计量.

问题

(1)对于同一个参数究竟采用哪一个估计量好?

(2)评价估计量的标准是什么?

下面介绍几个常用标准.

二、无偏性

若 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为总体 X 的一个样本，

$\theta \in \Theta$ 是包含在总体 X 的分布中的待估参数，

(Θ 是 θ 的取值范围)

若估计量 $\hat{\theta} = \theta(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的数学期望 $E(\hat{\theta})$ 存在，且对于任意 $\theta \in \Theta$ 有 $E(\hat{\theta}) = \theta$，则称 $\hat{\theta}$ 是 θ 的无偏估计量.

无偏估计的实际意义：无系统误差.

例1 设总体 X 的 k 阶矩 $\mu_k = E(X^k)\ (k \geq 1)$ 存在，又设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是 X 的一个样本，试证明不论总体服从什么分布，k 阶样本矩 $A_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$ 是 k 阶总体矩 μ_k 的无偏估计.

证 因为 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 与 X 同分布，

故有 $E(X_i^k) = E(X^k) = \mu_k, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$

即 $E(A_k) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i^k) = \mu_k.$

故 k 阶样本矩 A_k 是 k 阶总体矩 μ_k 的无偏估计.

特别的:

不论总体 X 服从什么分布,

只要它的数学期望存在,

$\overline{X}$ 总是总体 X 的数学期望 $\mu_1 = E(X)$ 的无偏估计量.

例2 对于均值 μ，方差 $\sigma^2>0$ 都存在的总体，若 μ, σ^2 均为未知，则 σ^2 的估计量 $\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 是有偏的(即不是无偏估计).

证 $\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\overline{X}^2=A_2-\overline{X}^2$,

因为 $E(A_2)=\mu_2=\sigma^2+\mu^2$,

又因为 $E(\overline{X}^2)=D(\overline{X})+[E(\overline{X})]^2=\frac{\sigma^2}{n}+\mu^2$,

所以 $E(\hat{\sigma}^2)=E(A_2-\overline{X}^2)=E(A_2)-E(\overline{X}^2)$

$$=\frac{n-1}{n}\sigma^2 \neq \sigma^2,$$ 所以$\hat{\sigma}^2$是有偏的.

若以$\dfrac{n}{n-1}$乘$\hat{\sigma}^2$,所得到的估计量就是无偏的.

(这种方法称为**无偏化**).

$$E\left(\frac{n}{n-1}\hat{\sigma}^2\right)=\frac{n}{n-1}E(\hat{\sigma}^2)=\sigma^2.$$

因为 $$\frac{n}{n-1}\hat{\sigma}^2=S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X}^2),$$

即S^2是σ^2的无偏估计,故通常取S^2作σ^2的估计量.

例3 设总体X在 $[0,\theta]$上服从均匀分布，参数$\theta > 0$，$X_1, X_2, \cdots, X_n$是来自总体X的样本，试证明$2\bar{X}$和$\dfrac{n+1}{n}\max(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 都是θ的无偏估计.

证 因为 $E(2\overline{X}) = 2E(\overline{X}) = 2E(X) = 2 \times \dfrac{\theta}{2} = \theta,$

所以$2\overline{X}$是θ的无偏估计量.

因为$X_h = \max(X_1, X_2, \cdots, X_n)$的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{nx^{n-1}}{\theta^n}, & 0 \le x \le \theta, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

所以 $E(X_h)=\int_0^\theta x\cdot\frac{nx^{n-1}}{\theta^n}\mathrm{d}x$

$$=\frac{n}{n+1}\theta,$$

故有 $E\left(\frac{n+1}{n}X_h\right)=\theta,$

故$\frac{n+1}{n}\max(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 也是θ的无偏估计量.

例4 设总体 X 服从参数为 θ 的指数分布, 概率密度

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{x}{\theta}}, & x>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

其中参数 $\theta>0$, 又设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 X 的样本, 试证 $\overline{X}$ 和 $nZ=n[\min(X_1, X_2, \cdots, X_n)]$ 都是 θ 的无偏估计.

证明 因为 $E(\overline{X})=E(X)=\theta$,

所以 $\overline{X}$ 是 θ 的无偏估计量.

而 $Z=\min(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 服从参数为$\dfrac{\theta}{n}$的指数分布,

概率密度 $f_{\min}(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{n}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{nx}{\theta}}, & x>0,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

故知 $E(Z)=\dfrac{\theta}{n}$, $E(nZ)=\theta$,

所以 nZ 也是 θ 的无偏估计量.

由以上两例可知,一个参数可以有不同的无偏估计量.

三、有效性

比较参数θ的两个无偏估计量$\hat{\theta}_1$和$\hat{\theta}_2$，如果在样本容量n相同的情况下，$\hat{\theta}_1$的观察值在真值θ的附近较$\hat{\theta}_2$更密集，则认为$\hat{\theta}_1$较$\hat{\theta}_2$有效.

由于方差是随机变量取值与其数学期望的偏离程度，所以无偏估计以方差小者为好.

设$\hat{\theta}_1=\hat{\theta}_1(X_1,X_2,\cdots,X_n)$与$\hat{\theta}_2=\hat{\theta}_2(X_1,X_2,\cdots,X_n)$都是$\theta$的无偏估计量，若有$D(\hat{\theta}_1)\le D(\hat{\theta}_2)$，则称$\hat{\theta}_1$较$\hat{\theta}_2$有效.

例5 (续例4)

试证当$n>1$时,θ的无偏估计量$\overline{X}$较nZ有效.

证明 由于 $D(X)=\theta^2$, 故有 $D(\overline{X})=\dfrac{\theta^2}{n}$,

又因为 $D(Z)=\dfrac{\theta^2}{n^2}$, 故有 $D(nZ)=\theta^2$,

当$n>1$时, $D(nZ)>D(\overline{X})$,

故θ的无偏估计量$\overline{X}$较nZ有效.

例6　(续例3) 在例3中已证明 $\hat{\theta}_1 = 2\overline{X}$和

$\hat{\theta}_2 = \dfrac{n+1}{n}\max\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$ 都是 θ 的无偏估

计量, 现证当 $n \geq 2$ 时, $\hat{\theta}_2$ 较 $\hat{\theta}_1$ 有效.

证明 由于 $D(\hat{\theta}_1) = 4D(\overline{X}) = \dfrac{4}{n}D(X) = \dfrac{\theta^2}{3n}$,

$$D(\hat{\theta}_2) = D\left(\frac{n+1}{n}X_h\right) = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 D(X_h),$$

又因为 $E(X_h) = \dfrac{n+1}{n}\theta$,

$$E({X_h}^2) = \int_0^\theta \frac{n}{\theta^n} x^{n+1} \mathrm{d}x = \frac{n}{n+2}\theta^2,$$

$$D(X_h) = E({X_h}^2) - [E(X_h)]^2$$

$$= \frac{n}{(n+1)^2(n+2)}\theta^2,$$

故 $D(\hat{\theta}_2) = \dfrac{1}{n(n+2)}\theta^2,$

又$n \geq 2$, 所以$D(\hat{\theta}_2) < D(\hat{\theta}_1)$, $\hat{\theta}_2$ 较 $\hat{\theta}_1$ 有效.

四、相合性

若$\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$为参数$\theta$的估计量,

若对于任意$\theta\in\Theta$,当$n\to\infty$时,$\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$

依概率收敛于θ,则称$\hat{\theta}$为θ的相合估计量.

例如 由第六章第三节知,样本$k(k\geq 1)$阶矩是总体X的k阶矩 $\mu_k=E(X^k)$的相合估计量,

进而若待估参数$\theta=g(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n)$,其中$g$为连续函数,则$\theta$的矩估计量$\hat{\theta}=g(\hat{\mu}_1,\hat{\mu}_2,\cdots,\hat{\mu}_n)=g(A_1,A_2,\cdots,A_n)$是$\theta$的相合估计量.

例7 试证：样本均值 $\overline{X}$ 是总体均值 μ 的相合估计量，样本方差 $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2$ 及样本的二阶中心矩 $B_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2$ 都是总体方差 σ^2 的相合估计量.

证明 由大数定律知，

$$\forall\varepsilon>0,\ \text{有}\ \lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\mu\right|<\varepsilon\right\}=1,$$

所以 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ 是 μ 的相合估计量.

又 $B_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i{}^2 - 2X_i\overline{X} + \overline{X}^2)$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i{}^2 - \overline{X}^2 = A_2 - \overline{X}^2,$$

(A_2是样本二阶原点矩)

由大数定律知,

$$A_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2 \text{依概率收敛于} E(X^2),$$

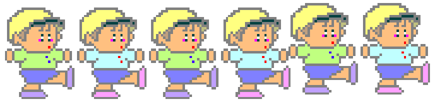
$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i \text{依概率收敛于} E(X),$$

故 $B_2 = A_2 - \overline{X}^2$

依概率收敛于 $E(X^2) - [E(X)]^2 = \sigma^2$,

所以 B_2 是 σ^2 的相合估计量.

又 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n-1} = 1$,



所以 $S^2 = \dfrac{n}{n-1} B_2$ 也是 σ^2 的相合估计量.

五、小结

估计量的评选的三个标准 $\begin{cases} \text{无偏性} \\ \text{有效性} \\ \text{相合性} \end{cases}$

相合性是对估计量的一个基本要求，不具备相合性的估计量是不予以考虑的.

由最大似然估计法得到的估计量，在一定条件下也具有相合性.估计量的相合性只有当样本容量相当大时,才能显示出优越性，这在实际中往往难以做到,因此,在工程中往往使用无偏性和有效性这两个标准.

课后作业第10题

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的一个样本，$\overline{X},S^2$ 分别为样本均值和样本方差，$E(X)=\mu,D(X)=\sigma^2$。

(1)确定常数 c，使 $c\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2$ 为 σ^2 的无偏估计；

(2)确定常数 c，使 $\left(\overline{X}\right)^2-cS^2$ 为 μ^2 的无偏估计。

解： (1) $$E\left[c\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2\right]=c\sum_{i=1}^{n-1}\left[E\left(X_{i+1}^2\right)-2E\left(X_{i+1}\right)E\left(X_i\right)+E\left(X_i^2\right)\right]$$

$$=c\sum_{i=1}^{n-1}\left[\left(\sigma^2+\mu^2\right)-2\mu^2+\left(\sigma^2+\mu^2\right)\right]=2c(n-1)\sigma^2=\sigma^2$$，得 $c=\dfrac{1}{2(n-1)}$。

(2) $$E\left[\left(\overline{X}\right)^2-cS^2\right]=E\left(\overline{X}\right)^2-cE\left(S^2\right)=D\left(\overline{X}\right)+E^2\left(\overline{X}\right)-cE\left(S^2\right)$$

$$=\frac{\sigma^2}{n}+\mu^2-c\sigma^2=\mu^2$$，得 $c=\dfrac{1}{n}$。

5、设总体 X 的概率密度为$f(x;\ \theta) = \begin{cases} \frac{1}{2\theta}, 0 < x < \theta \\ \frac{1}{2(1-\theta)}, \theta < x < 1 \\ 0, 其他 \end{cases}$

$X_1, X_2 \ldots, X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本，$\overline{X}$ 是样本均值

(1) 求参数 θ 的矩估计量$\hat{\theta}$

(2) 判断$4\bar{X}^2$是否为 θ^2 的无偏估计量，并说明理由

（1）$EX=\int_0^{\theta}\frac{1}{2\theta}xdx+\int_{\theta}^{1}\frac{x}{2(1-\theta)}dx=\frac{1+2\theta}{4}$

令 $EX=\overline{X}$ 即 $\frac{1+2\theta}{4}=\overline{X}$，于是可得参数 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}=\frac{4\overline{X}-1}{2}=2\overline{X}-\frac{1}{2}$ ---------------- 5分

（2）判断 $4\overline{X}^2$ 是否为 θ^2 的无偏估计量，就是要计算 $4\overline{X}^2$ 的数学期望，并判断其是否等于被

估计量 θ^2

$EX^2=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx=\int_0^{\theta}\frac{x^2}{2\theta}dx+\int_{\theta}^{1}\frac{x^2}{2(1-\theta)}dx=\frac{\theta^2}{6}+\frac{1-\theta^3}{6(1-\theta)}=\frac{2\theta^2+\theta+1}{6}$ ---------------- 2分

$DX=EX^2-(EX)^2=\frac{2\theta^2+\theta+1}{6}-\frac{4\theta^2+4\theta+1}{16}=\frac{4\theta^2-4\theta+5}{48}$ -------------- 3分

$E\overline{X}^2=D\overline{X}+(E\overline{X})^2=\frac{DX}{n}+(EX)^2=\frac{4\theta^2-4\theta+5}{48n}+\frac{4\theta^2+4\theta+1}{16}\neq\frac{\theta^2}{4}$ ------------- 1分

即 $E(4\overline{X}^2)\neq\theta^2$，故 $4\overline{X}^2$ 不是 θ^2 的无偏估计量 ------------- 1分