

# 《概率论与数理统计》第一周要点

## 学习要点：随机试验、样本空间与事件、概率

### 1. 确定性现象与随机现象

- 确定性现象：在一定条件下必然发生，例如石子下落、水往低处流。
- 随机现象：在相同条件下结果不唯一，但大量重复试验呈现统计规律性。

### 2. 随机试验的定义

一个试验称为 **随机试验**，若满足以下条件：

1. 可以在相同条件下重复进行；
2. 每次试验的可能结果不止一个，并且能事先列出所有可能结果；
3. 试验前不能确定哪一个结果会出现。

### 3. 样本空间与随机事件

- 样本空间  $S$ ：随机试验所有可能结果的集合。
- 基本事件：由单个样本点组成的事件。
- 必然事件： $S$  本身。
- 不可能事件：空集  $\emptyset$ 。
- 对立事件： $\bar{A} = S - A$ 。

### 4. 事件的运算与关系

$A \subseteq B \implies$  事件  $B$  包含事件  $A$

$A \cup B$ ：和事件，当  $A$  或  $B$  发生时

$A \cap B$ ：积事件，当  $A$  与  $B$  同时发生时

$A - B$ ：差事件，当  $A$  发生且  $B$  不发生时

$A \cap B = \emptyset \implies A, B$  互不相容

## 5. 频率与概率

- 频率:  $f_n(A) = \frac{n(A)}{n}$ , 其中  $n(A)$  为事件  $A$  在  $n$  次试验中发生的次数。
- 频率具有稳定性: 当  $n \rightarrow \infty$  时,  $f_n(A)$  趋于某常数。
- 概率公理:
  1. 非负性:  $P(A) \geq 0$ ;
  2. 规范性:  $P(S) = 1$ ;
  3. 可列可加性: 若  $A_i \cap A_j = \emptyset$ , 则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

## 6. 概率的重要性质

$$P(\emptyset) = 0$$

$$A \subseteq B \implies P(A) \leq P(B)$$

$$P(A^c) = 1 - P(A)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = \sum P(A_i) - \sum P(A_i A_j) + \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \cdots A_n)$$