《概率论与数理统计》第十四周要点

第三节估计量的评选标准——复习要点

一、问题的提出

- 对同一个未知参数 θ，可以构造出不同的估计量；
- 原则上，任何统计量都可以作为参数的估计量；
- 因此自然提出两个问题：

  1. 对同一个参数，应当选用哪一个估计量更好？
  2. 评价估计量优劣的标准是什么？

  为回答上述问题，引入估计量的评选标准。

  —

二、无偏性

1. 定义 设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是来自总体 X 的样本，θ 为待估参数。若估计量 $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, \ldots, X_n)$ 满足

$$E(\hat{\theta}) = \theta, \quad \forall \theta \in \Theta,$$

则称 $\hat{\theta}$ 为 θ 的无偏估计量。

2. 实际意义

- 无偏估计意味着估计量在平均意义下等于真值；
- 不存在系统性偏差；
- 但无偏性并不保证估计量的波动小。

  —

3. 重要结论与例子

- 任意总体，只要数学期望存在，则

  $$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

  是总体均值 $\mu = E(X)$ 的无偏估计量。

样本方差的无偏化

- 统计量
$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$
是 σ^2 的有偏估计；

- 修正后
$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$
是 σ^2 的无偏估计量；

- 这种通过调整系数得到无偏估计的方法称为无偏化。

—

4. 同一参数可有多个无偏估计量

- 若 $X \sim U(0, \theta)$，则
$$2\bar{X}, \qquad \frac{n+1}{n}\max(X_1, \dots, X_n)$$
均为 θ 的无偏估计量；

- 若 $X \sim \mathrm{Exp}(\theta)$，则
$$\bar{X}, \qquad n\min(X_1, \dots, X_n)$$
也都是 θ 的无偏估计量。

说明：无偏性并不能唯一确定“最好”的估计量。
—

三、有效性

1. 引入动机 在多个无偏估计量中，应选择波动较小、取值更集中的估计量。

2. 定义 设 $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$ 都是 θ 的无偏估计量。若
$$D(\hat{\theta}_1) \le D(\hat{\theta}_2),$$
则称 $\hat{\theta}_1$ 比 $\hat{\theta}_2$ 更有效。

3. 理解

- 方差越小，估计量在真值附近越集中；
- 有效性是在无偏性的前提下进行比较；
- 有效性是相对概念。

—

4. 典型比较结论

- 在指数分布 $X \sim \mathrm{Exp}(\theta)$ 中，当 $n > 1$ 时，

$$\bar{X}$$

比

$$n \min(X_1, \ldots, X_n)$$

更有效；

- 在均匀分布 $U(0, \theta)$ 中，当 $n \geq 2$ 时，

$$\frac{n+1}{n} \max(X_1, \ldots, X_n)$$

比 $2\bar{X}$ 更有效。

—

四、相合性

1. 定义 若估计量 $\hat{\theta}_n$ 满足

$$\hat{\theta}_n \xrightarrow{P} \theta \quad (n \to \infty),$$

则称 $\hat{\theta}_n$ 是 θ 的相合估计量。

2. 含义

- 随样本容量增大，估计量越来越接近真值；
- 相合性是估计量的基本要求；
- 不相合的估计量通常不予考虑。

—

3. 常见相合估计量

- 样本均值 $\bar{X}$ 是总体均值 μ 的相合估计量；
- 样本 k 阶原点矩 A_k 是总体 k 阶矩的相合估计量；
- 样本方差 S^2 及二阶中心矩 B_2 都是 σ^2 的相合估计量。

—

4. 与大数定律的关系

- 相合性通常依赖大数定律；
- 当样本容量较大时，相合性的优越性才逐渐体现；
- 在工程实践中，由于样本量有限，常更重视无偏性与有效性。

—

五、小结

- 估计量的三大评选标准：
$$\text{无偏性}\quad\text{有效性}\quad\text{相合性}.$$
- 相合性是估计量的基本要求；
- 在多个无偏估计量中，以方差小者为优；
- 最大似然估计在一定条件下具有相合性；
- 实际应用中常综合无偏性与有效性进行选择。