第 3 章测试题

《多维随机变量及其分布》

姓名：________　　学号：________

1. 设随机变量 (X,Y) 的分布函数

$$F(x,y)=\begin{cases} a\left(b+\arctan x\right)\left(c-e^{-y}\right), & x\in\mathbb{R},\ y>0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

   求常数 a,b,c 的值。

2. 盒中装有 3 只黑球、2 只红球、2 只白球，共 7 只。任取 4 只，以 X 表示取到黑球的只数，以 Y 表示取到红球的只数，求：

   (a) X 与 Y 的联合分布律；

   (b) $P\{X>Y\},\ P\{Y=2X\},\ P\{X+Y=3\},\ P\{X<3-Y\}$。

3. 设随机变量 (X,Y) 的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} 2e^{-(2x+y)}, & x>0,\ y>0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

   (a) 判断 X 与 Y 是否独立；

   (b) 求 $P\{X\le 2\,|\,Y\le 1\}$。

4. 设 X,Y 都是非负的连续型随机变量，且相互独立。

   (a) 证明：

$$P\{X<Y\}=\int_0^{\infty}F_X(x)\,f_Y(x)\,dx$$

   其中，$F_X(x)$ 为 X 的分布函数，$f_Y(y)$ 为 Y 的概率密度。

   (b) 设 X,Y 相互独立，其概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases} \lambda_1 e^{-\lambda_1 x}, & x>0, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases} \lambda_2 e^{-\lambda_2 y}, & y>0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

   求 $P\{X<Y\}$。

第 3 章测试题参考答案

1. **解:**

$$F(+\infty,+\infty)=1\Rightarrow \alpha\Big(b+\frac{\pi}{2}\Big)(c-0)=1,$$
$$F(-\infty,y)=0\Rightarrow \alpha\Big(b-\frac{\pi}{2}\Big)(c-e^{-y})=0,$$
$$F(x,-\infty)=0\Rightarrow \alpha(b+\arctan x)(c-1)=0.$$

因此:

$$\boxed{\alpha=\frac{1}{\pi},\quad b=\frac{\pi}{2},\quad c=1.}$$

2. **解:** 共有 3 黑球、2 红球、2 白球，取 4 个。设 X 表示取到黑球的个数，Y 表示取到红球的个数。则

$$P\{X=i,Y=j\}=\frac{\binom{3}{i}\binom{2}{j}\binom{2}{4-i-j}}{\binom{7}{4}}.$$

于是得到联合分布表:

$Y\backslash X$	0	1	2	3
0	0	0	$\frac{3}{35}$	$\frac{2}{35}$
1	0	$\frac{6}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{2}{35}$
2	$\frac{1}{35}$	$\frac{6}{35}$	$\frac{3}{35}$	0

(1) 联合分布律如上表。

(2) 各概率如下:

$$\begin{aligned}P(X>Y)&=P(X=2,Y=0)+P(X=2,Y=1)+P(X=3,Y=0)+P(X=3,Y=1)\\&=\tfrac{19}{35},\end{aligned}$$

$$P(Y=2X)=P(X=1,Y=2)=\tfrac{6}{35},$$

$$P(X+Y=3)=\tfrac{20}{35},$$

$$P(X<3-Y)=P(X+Y<3)=\tfrac{10}{35}.$$

3. **解:**

$$f(x,y)=\begin{cases}2e^{-(2x+y)}, & x>0,y>0,\\ 0, & \text{other.}\end{cases}$$

(1) 求边缘密度:

$$f_X(x)=\int_0^{+\infty}2e^{-(2x+y)}dy=2e^{-2x},\quad f_Y(y)=\int_0^{+\infty}2e^{-(2x+y)}dx=e^{-y}.$$

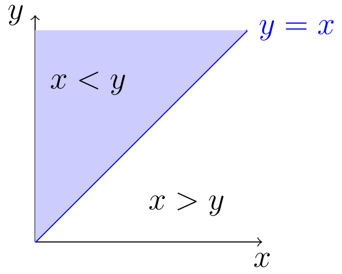
有 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$，故 X,Y 独立。

(2)

$$P(X\le 2\,|\,Y\le 1)=\frac{P(X\le 2,Y\le 1)}{P(Y\le 1)}=\frac{(1-e^{-4})(1-e^{-1})}{1-e^{-1}}=\boxed{1-e^{-4}}.$$

4. **证明：**

积分区域如下：



由于 X, Y 相互独立，联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases} f_X(x)f_Y(y), & x>0,\ y>0,\\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

因此，

$$P(X<Y)=\iint_{x<y} f_X(x)f_Y(y)\,dx\,dy.$$

将积分区域改写为

$$P(X<Y)=\int_0^{+\infty}\int_0^{y} f_X(x)f_Y(y)\,dx\,dy.$$

交换积分次序：

$$P(X<Y)=\int_0^{+\infty} f_Y(y)\left[\int_0^{y} f_X(x)\,dx\right]dy.$$

由于

$$F_X(y)=\int_0^{y} f_X(x)\,dx,$$

于是

$$P(X<Y)=\int_0^{+\infty} f_Y(y)F_X(y)\,dy.$$

将积分变量改写为 x，得

$$\boxed{P(X<Y)=\int_0^{+\infty} F_X(x)f_Y(x)\,dx.}$$

(2) 若

$$f_X(x)=\begin{cases} \lambda_1 e^{-\lambda_1 x}, & x>0,\\ 0, & \text{其他}, \end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases} \lambda_2 e^{-\lambda_2 y}, & y>0,\\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

则

$$\begin{aligned} P(X<Y)&=\int_0^{+\infty}(1-e^{-\lambda_1 x})\,\lambda_2 e^{-\lambda_2 x}\,dx\\ &=1-\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}=\boxed{\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}}. \end{aligned}$$