第 7 章测试题

《参数估计》

姓名：________ 学号：________

1. 设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-\theta}, & \theta\le x\le 1,\\ 0, & 其他,\end{cases}$$

其中 $0<\theta<1$ 为未知参数，$X_1,\ldots,X_n$ 为简单随机样本。

(1) 求 θ 的矩估计量；

(2) 求 θ 的最大似然估计量。

【答案】

解：

(1) 计算矩估计量：

$$E(X)=\int_\theta^1 x\frac{1}{1-\theta}\,dx=\frac{1-\theta^2}{2(1-\theta)}=\frac{1+\theta}{2}.$$

令 $E(X)=\bar{X}$，得

$$\hat{\theta}_1=2\bar{X}-1.$$

(2) 最大似然估计量：

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^n f(x_i;\theta)=\left(\frac{1}{1-\theta}\right)^n\mathbf{1}\{\theta\le x_{(1)}\},$$

其中 $x_{(1)}=\min\{X_1,\ldots,X_n\}$。

在 $\theta\le x_{(1)}$ 上，

$$\ln L(\theta)=-n\ln(1-\theta),\qquad \frac{d}{d\theta}\ln L(\theta)=\frac{n}{1-\theta}>0,$$

故 $\ln L(\theta)$ 随 θ 单调递增，在可行区间右端取得最大值：

$$\hat{\theta}_2=x_{(1)}.$$

2. 设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{\theta^2}{x^3}e^{-\theta/x}, & x>0,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

其中 $\theta>0$ 为未知参数，样本为 $X_1,\dots,X_n$。

(1) 求 θ 的矩估计量；

(2) 求 θ 的最大似然估计量。

【答案】

解：

(1) 计算矩估计量：

$$E(X)=\int_0^\infty x\frac{\theta^2}{x^3}e^{-\theta/x}\,dx=\theta.$$

因而

$$\hat\theta_1=\bar X.$$

(2) 最大似然估计量：

似然函数为

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^n\frac{\theta^2}{x_i^3}e^{-\theta/x_i}=\frac{\theta^{2n}}{\prod_{i=1}^n x_i^3}\exp\left(-\theta\sum_{i=1}^n\frac{1}{x_i}\right).$$

对数似然

$$\ln L(\theta)=2n\ln\theta-3\sum_{i=1}^n\ln x_i-\theta\sum_{i=1}^n\frac{1}{x_i}.$$

求导并令其为零：

$$\frac{d}{d\theta}\ln L(\theta)=\frac{2n}{\theta}-\sum_{i=1}^n\frac{1}{x_i}=0$$

解得

$$\hat\theta_2=\frac{2n}{\displaystyle\sum_{i=1}^n\frac{1}{x_i}}.$$

3. 设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{\theta}{2}, & 0<x<2,\\ \dfrac12-\dfrac{\theta}{2}, & 2\le x\le 4,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

其中 $0<\theta<2$ 为未知参数。记样本中落在 $0<x<2$ 的个数为 k。

(1) 求 θ 的矩估计量；

(2) 求 θ 的最大似然估计量。

【答案】

解：

(1) 计算矩估计量：

$$E(X) = \int_0^2 x\frac{\theta}{2}\,dx + \int_2^4 x\left(\frac{1}{2}-\frac{\theta}{2}\right)\,dx$$
$$= \frac{\theta}{2}\cdot\frac{2^2}{2} + \left(\frac{1}{2}-\frac{\theta}{2}\right)\cdot\frac{4^2-2^2}{2}$$
$$= 3-2\theta.$$

令 $E(X)=\bar{X}$，得

$$\hat{\theta}_1 = \frac{3-\bar{X}}{2}.$$

(2) 最大似然估计量：

若有 k 个样本落在 $(0,2)$ 内，其余 $n-k$ 个落在 $[2,4]$ 内，则

$$L(\theta) = \left(\frac{\theta}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}-\frac{\theta}{2}\right)^{n-k} = \left(\frac{\theta}{2}\right)^k\left(\frac{1-\theta}{2}\right)^{n-k}.$$

对数似然

$$\ln L(\theta) = k\ln\theta + (n-k)\ln(1-\theta) + \text{常数}.$$

求导并令其为零：

$$\frac{k}{\theta} - \frac{n-k}{1-\theta} = 0 \quad\Rightarrow\quad \hat{\theta}_2 = \frac{k}{n}.$$

由 $0\le k\le n$ 可知 $0\le\hat{\theta}_2\le 1<2$，满足参数空间 $0<\theta<2$。

4. 设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\theta}, & 0<x<\theta, \\ \dfrac{1}{2(1-\theta)}, & \theta<x<1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

其中 $0<\theta<1$。

设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本，$\bar{X}$ 为样本均值。

(1) 求参数 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}$；

(2) 判断 $4\bar{X}^2$ 是否为 θ^2 的无偏估计量，并说明理由。

【答案】

解：

(1) 矩估计量：

先求数学期望

$$\begin{aligned}E(X) &= \int_0^\theta x\cdot\frac{1}{2\theta}\,dx + \int_\theta^1 x\cdot\frac{1}{2(1-\theta)}\,dx\\ &= \frac{1}{2\theta}\cdot\frac{\theta^2}{2} + \frac{1}{2(1-\theta)}\cdot\frac{1-\theta^2}{2}\\ &= \frac{\theta}{4} + \frac{1-\theta^2}{4(1-\theta)} = \frac{1+2\theta}{4}.\end{aligned}$$

令 $E(X)=\bar{X}$，得

$$\frac{1+2\theta}{4} = \bar{X} \quad \Rightarrow \quad \hat{\theta} = \frac{4\bar{X}-1}{2} = 2\bar{X} - \frac{1}{2}.$$

(2) 判断 $4\bar{X}^2$ 是否为 θ^2 的无偏估计量：

计算

$$\begin{aligned}E(X^2) &= \int_0^\theta x^2\cdot\frac{1}{2\theta}\,dx + \int_\theta^1 x^2\cdot\frac{1}{2(1-\theta)}\,dx\\ &= \frac{1}{2\theta}\cdot\frac{\theta^3}{3} + \frac{1}{2(1-\theta)}\cdot\frac{1-\theta^3}{3}\\ &= \frac{2\theta^2+\theta+1}{6}.\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}D(X) &= E(X^2) - \big(E(X)\big)^2\\ &= \frac{2\theta^2+\theta+1}{6} - \left(\frac{1+2\theta}{4}\right)^2 = \frac{4\theta^2-4\theta+5}{48}.\end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned}E(\bar{X}^2) &= D(\bar{X}) + \big(E(\bar{X})\big)^2\\ &= \frac{D(X)}{n} + \left(\frac{1+2\theta}{4}\right)^2\\ &= \frac{4\theta^2-4\theta+5}{48n} + \frac{(1+2\theta)^2}{16}.\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}E\big(4\bar{X}^2\big) &= 4E(\bar{X}^2)\\ &= \frac{4\theta^2-4\theta+5}{12n} + \frac{(1+2\theta)^2}{4} \neq \theta^2.\end{aligned}$$

因此，$4\bar{X}^2$ 不是 θ^2 的无偏估计量。

5. 设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 为来自总体 X 的一个样本，$\bar{X}, S^2$ 分别为样本均值和样本方差，且

$$E(X)=\mu, \qquad D(X)=\sigma^2.$$

(1) 确定常数 c，使 $c\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2$ 为 σ^2 的无偏估计；

(2) 确定常数 c，使 $(\bar{X})^2 - cS^2$ 为 μ^2 的无偏估计。

【答案】

解：

(1) 由于样本相互独立同分布，

$$
\begin{aligned}
E\left[c\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2\right] &= c\sum_{i=1}^{n-1}E\big[(X_{i+1}-X_i)^2\big] \\
&= c\sum_{i=1}^{n-1}\Big(E(X_{i+1}^2)-2E(X_{i+1})E(X_i)+E(X_i^2)\Big) \\
&= c\sum_{i=1}^{n-1}\Big[(\sigma^2+\mu^2)-2\mu^2+(\sigma^2+\mu^2)\Big] \\
&= 2c(n-1)\sigma^2.
\end{aligned}
$$

要使其成为 σ^2 的无偏估计量，应有

$$2c(n-1)\sigma^2=\sigma^2,$$

因而

$$c=\frac{1}{2(n-1)}.$$

(2) 计算

$$
\begin{aligned}
E\big[(\bar{X})^2-cS^2\big] &= E(\bar{X})^2-cE(S^2) \\
&= D(\bar{X})+\big(E(\bar{X})\big)^2-c\sigma^2 \\
&= \frac{\sigma^2}{n}+\mu^2-c\sigma^2.
\end{aligned}
$$

要使其等于 μ^2，需满足

$$\frac{\sigma^2}{n}-c\sigma^2=0,$$

从而

$$c=\frac{1}{n}.$$