第四章
随机变量的数字特征

概率论

离散型随机变量　　分布律　　分布函数

连续型随机变量　　概率密度　分布函数

全面的描述

片面　　某高中的高考成绩：
最高分、平均分、方差

随机变量的数字特征

第一节　数学期望

一、数学期望的概念

二、数学期望的性质

三、随机变量函数的数学期望

四、小结

一、数学期望的概念

引例1　分赌本问题(产生背景)

A, B 两人赌技相同, 各出赌金100元,并约定先胜三局者为胜, 取得全部 200 元.由于出现意外情况 ,在 A 胜 2 局 B 胜1 局时, 不得不终止赌博, 如果要分赌金, 该如何分配才算公平?

分析 假设继续赌,则结果有以下3种情况:

$1.\ A$ ⇩ A胜B负

$2.\ B\ A$ ⇩ A胜B负

$3.\ B\ B$ ⇩ B胜A负

A 应获得赌金的 $\frac{3}{4}$， 而 B 只能获得赌金的 $\frac{1}{4}$.

因此, A 能“期望”得到的数目应为

$$200 \times \frac{3}{4} + 0 \times \frac{1}{4} = 150(\text{元}),$$

而B 能“期望”得到的数目, 则为

$$200 \times \frac{1}{4} + 0 \times \frac{3}{4} = 50(\text{元}).$$

若设随机变量 X 为:在 A 胜2局B 胜1局的前提下, 继续赌下去 A 最终所得的赌金.

则X 所取可能值为: $\quad 200 \quad 0$

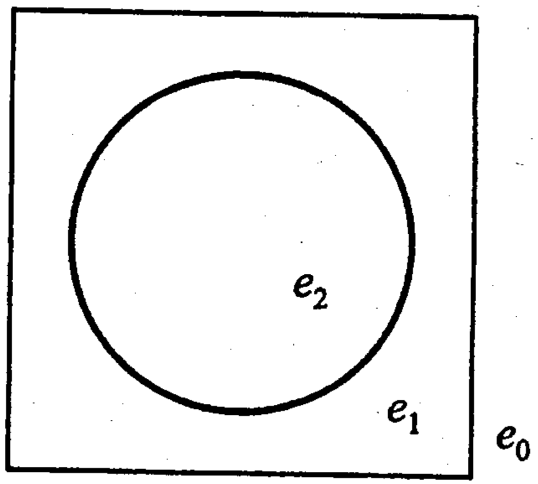
其概率分别为: $\quad \frac{3}{4} \quad \frac{1}{4}$

因而A期望所得的赌金即为X的 “期望” 值,

等于 $$200\times\frac{3}{4}+0\times\frac{1}{4}=150(\text{元}).$$

即为 X 的可能值与其概率之积的累加.

数学期望（随机变量的期望值）
例子：射手练习射击的得分期望



随机变量 X 的分布为：

$$P\{X=k\}=p_k,\quad k=0,1,2$$

- 靶被分为三个区域（如图）：
  - 落入区域 **e_2：得 2 分**
  - 落入区域 **e_1：得 1 分**
  - 落入区域 **e_0：脱靶，得 0 分**
- 定义随机变量 ***X* = 本次射击的得分**

得分	次数
0 分	a_0 次
1 分	a_1 次
2 分	a_2 次

$$\frac{a_0\times 0+a_1\times 1+a_2\times 2}{N}=\sum_{k=0}^{2}k\frac{a_k}{N}$$

当射击次数 N 很大时： $\frac{a_k}{N}\to p_k$

随机变量 X 的数学期望（或均值）定义为：

$$E(X)=\sum_{k=0}^{2}kp_k$$

1. 离散型随机变量的数学期望

定义 设离散型随机变量 X 的分布律为

$$P\{X = x_k\} = p_k, \quad k = 1,2,\cdots.$$

若级数 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$ 绝对收敛，则称级数 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$ 为随机变量 X 的数学期望，记为 $E(X)$. 即

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k .$$

关于定义的几点说明

(1) $E(X)$是一个实数,而非变量,它是一种加权平均,与一般的平均值不同,它从本质上体现了随机变量 X 取可能值的真正的平均值,也称均值.

(2) 级数的绝对收敛性保证了级数的和不随级数各项次序的改变而改变,之所以这样要求是因为数学期望是反映随机变量X取可能值的平均值,它不应随可能值的排列次序而改变.

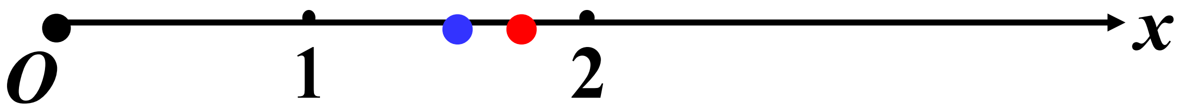
(3) 随机变量的数学期望与一般变量的算术平均值不同.

假设

X	1	2
p	0.02	0.98

随机变量 X 的算术平均值为 $\dfrac{1+2}{2}=1.5,$

$$E(X)=1\times 0.02+2\times 0.98=1.98.$$



它从本质上体现了随机变量X 取**可能值**的平均值.

当随机变量 X 取各个可能值是等概率分布时，X 的期望值与算术平均值相等.

实例1 谁的技术比较好?

甲、乙两个射手,他们射击的分布律分别为

甲射手

击中环数	8	9	10
概率	0.3	0.1	0.6

乙射手

击中环数	8	9	10
概率	0.2	0.5	0.3

试问哪个射手技术较好?

解　设甲、乙射手击中的环数分别为 X_1, X_2 .

$$E(X_1) = 8\times 0.3 + 9\times 0.1 + 10\times 0.6 = 9.3(\text{环}),$$

$$E(X_2) = 8\times 0.2 + 9\times 0.5 + 10\times 0.3 = 9.1(\text{环}),$$

故甲射手的技术比较好.

实例2 发行彩票的创收利润

某一彩票中心发行彩票 10万张, 每张2元. 设头等奖1个, 奖金 1万元, 二等奖2个,奖金各 5 千元;三等奖 10个, 奖金各1千元; 四等奖100个, 奖金各100元; 五等奖1000个, 奖金各10 元.每张彩票的成本费为 0.3 元, 请计算彩票发行单位的创收利润.

解 设每张彩票中奖的数额为随机变量X, 则

X	10000	5000	1000	100	10	0
p	$1/10^5$	$2/10^5$	$10/10^5$	$100/10^5$	$1000/10^5$	p_0

每张彩票平均能得到奖金

$$E(X) = 10000 \times \frac{1}{10^5} + 5000 \times \frac{2}{10^5} + \cdots + 0 \times p_0$$

$$= 0.5(\text{元}),$$

每张彩票平均可赚

$$2 - 0.5 - 0.3 = 1.2(\text{元}),$$

因此彩票发行单位发行 10 万张彩票的创收利润为

$$100000 \times 1.2 = 120000(\text{元}).$$

实例3 如何确定投资决策方向?

某人有10万元现金，想投资于某项目，预估成功的机会为 30%，可得利润8万元，失败的机会为70%，将损失 2 万元．若存入银行，同期间的利率为5%，问是否作此项投资?

解 设 X 为投资利润，则

X	8	-2
p	0.3	0.7

$E(X)=8\times 0.3-2\times 0.7=1$(万元), 存入银行的利息:

$10\times 5\%=0.5$(万元), 故应选择投资.

实例4　商店的销售策略

某商店对某种家用电器的销售采用先使用后付款的方式,记使用寿命为X(以年计),规定：

$X \le 1$,一台付款1500元;$1 < X \le 2$,一台付款2000元;$2 < X \le 3$,一台付款2500元;$X > 3$,一台付款3000元.

设寿命 X 服从指数分布,概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{10} e^{-x/10}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0. \end{cases}$$

试求该商店一台家用电器收费 Y 的数学期望.

解

$$P\{X \le 1\} = \int_0^1 \frac{1}{10} e^{-x/10} \, dx = 1 - e^{-0.1} = 0.0952,$$

$$P\{1 < X \le 2\} = \int_1^2 \frac{1}{10} e^{-x/10} \, dx$$

$$= e^{-0.1} - e^{-0.2} = 0.0861,$$

$$P\{2 < X \le 3\} = \int_2^3 \frac{1}{10} e^{-x/10} \, dx$$

$$= e^{-0.2} - e^{-0.3} = 0.0779,$$

$$P\{X>3\}=\int_3^{+\infty}\frac{1}{10}\mathrm{e}^{-x/10}\,\mathrm{d}x$$

$$=\mathrm{e}^{-0.3}=0.7408.$$

因而一台收费 Y 的分布律为

Y	1500	2000	2500	3000
p_k	0.0952	0.0861	0.0779	0.7408

得 $E(Y)=2732.15,$

即平均一台家用电器收费 2732.15 元.

实例5　分组验血

在一个人数很多的团体中普查某种疾病,为此要抽验 N 个人的血,可以用两种方法进行.

(i) 将每个人的血分别去化验,这就需化验 N 次.

(ii) 按 k 个人一组进行分组,把从 k 个人抽来的血混合在一起进行化验,如果这混合血液呈阴性反应,就说明 k 个人的血都呈阴性反应,这样,这 k 个人的血就只需验一次.若呈阳性,则再对这 k 个人的血液分别进行化验,这样,k 个人的血共最多需化验 $k+1$ 次.

假设每个人化验呈阳性的概率为 p, 且这些人的化验反应是相互独立的.试说明当p较小时,选取适当的k,按第二种方法可以减少化验的次数.并说明 k 取什么值时最适宜.

解　由于血液呈阳性反应的概率为 p,

所以血液呈阴性反应的概率为 $q = 1 - p$,

因而 k 个人的混合血呈阴性反应的概率为 q^k,

k 个人的混合血呈阳性反应的概率为 $1 - q^k$.

设以 k 个人为一组时, 组内每人的血化验的次数为 X,

则 X 为一随机变量, 且其分布律为

X	$\frac{1}{k}$	$\frac{k+1}{k}$
p_k	q^k	$1-q^k$

X 的数学期望为

$$E(X)=\frac{1}{k}q^k+(1+\frac{1}{k})(1-q^k)=1-q^k+\frac{1}{k}.$$

N 个人平均需化验的次数为 $N(1-q^k+\frac{1}{k})$.

因此,只要选择 k 使

$$1-q^k+\frac{1}{k}<1,$$

则 N 个人平均需化验的次数 $< N$.

当 p 固定时,选取 k 使得

$$L=1-q^k+\frac{1}{k}$$ 小于1且取到最小值,

此时可得到最好的分组方法.

实例6　按规定,某车站每天 8 : 00 ~ 9 : 00, 9 : 00 ~ 10 : 00都恰有一辆客车到站,但到站的时刻是随机的,且两者到站的时间相互独立.其规律为

到站时刻	8 : 10 9 : 10	8 : 30 9 : 30	8 : 50 9 : 50
概率	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{6}$

(i) 一旅客8 : 00到车站,求他候车时间的数学期望.

(ii) 一旅客8 : 20到车站,求他候车时间的数学期望.

解　设旅客的候车时间为 X(以分计).

(i) X的分布律为

X	10	30	50
p_k	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{6}$

候车时间的数学期望为

$$E(X)=10\times\frac{1}{6}+30\times\frac{3}{6}+50\times\frac{2}{6}$$

$$=33.33(\text{分}).$$

(ii) X 的分布律为

X	10	30	50	70	90
p_k	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}\times\frac{3}{6}$	$\frac{1}{6}\times\frac{2}{6}$

候车时间的数学期望为

$$E(X)=$$

$$10\times\frac{3}{6}+30\times\frac{2}{6}+50\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}+70\times\frac{1}{6}\times\frac{3}{6}+90\times\frac{1}{6}\times\frac{2}{6}$$

$$=27.22(\text{分}).$$

2.连续型随机变量数学期望的定义

设连续型随机变量 X 的概率密度为 $f(x)$, 若积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) \mathrm{d} x$$

绝对收敛,则称积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) \mathrm{d} x$ 的值为随机变量 X 的数学期望,记为 $E(X)$. 即

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) \mathrm{d} x.$$

实例7　顾客平均等待多长时间?

设顾客在某银行的窗口等待服务的时间 X(以分计)服从指数分布,其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{5}e^{-x/5}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

试求顾客等待服务的平均时间?

解　$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x f(x)\,dx=\int_{0}^{+\infty}x\cdot\frac{1}{5}e^{-x/5}\,dx=5$(分钟).

因此,顾客平均等待5分钟就可得到服务.

二、数学期望的性质

1．设 C 是常数, 则有 $$E(C)=C.$$

证明 $$E(X)=E(C)=1\times C=C.$$

2．设 X 是一个随机变量,C 是常数, 则有

$$E(CX)=CE(X).$$

证明 $$E(CX)=\sum_k Cx_k p_k=C\sum_k x_k p_k=CE(X).$$

例如 $E(X)=5$, 则 $E(3X)=3E(X)=3\times5=15.$

3. 设 X, Y 是两个随机变量, 则有

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y).$$

证明

$$E(X+Y)=\sum_k (x_k+y_k)p_k$$

$$=\sum_k x_k p_k+\sum_k y_k p_k = E(X)+E(Y).$$

4. 设 X, Y 是相互独立的随机变量, 则有

$$E(XY)=E(X)E(Y).$$

说明　连续型随机变量 X 的数学期望与离散型随机变量数学期望的性质类似.

实例8　一机场班车载有 20 位旅客自机场开出，旅客有 10 个车站可以下车. 如到达一个车站没有旅客下车就不停车，以 X 表示停车的次数，求 $E(X)$（设每位旅客在各个车站下车是等可能的，并设各旅客是否下车相互独立）.

解　引入随机变量 X_i，

$$X_i = \begin{cases} 0, & \text{在第 } i \text{ 站没有人下车}, \\ 1, & \text{在第 } i \text{ 站有人下车}, \end{cases} \quad i = 1, 2, \cdots, 10.$$

则　$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_{10}.$

则有 $P\{X_i = 0\} = \left(\frac{9}{10}\right)^{20}$， $P\{X_i = 1\} = 1 - \left(\frac{9}{10}\right)^{20}$，

$i = 1,2,\cdots,10.$

由此 $E(X_i) = 1 - \left(\frac{9}{10}\right)^{20}$， $i = 1,2,\cdots.$

得

$$
\begin{aligned}
E(X) &= E(X_1 + X_2 + \cdots + X_{10}) \\
&= E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_{10}) \\
&= 10\left[1 - \left(\frac{9}{10}\right)^{20}\right] = 8.784(\text{次}).
\end{aligned}
$$

实例9设一电路中电流I (A)与电阻R (Ω)是两个相互独立的随机变量，其概率密度函数分别为

$$g(i)=\begin{cases}2i, & 0\le x\le 1\\ 0, & \text{其他},\end{cases}\qquad h(r)=\begin{cases}\dfrac{r^2}{9}, & 0\le r\le 3\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

试求电压V=IR的均值。

三、随机变量函数的数学期望

1. 离散型随机变量函数的数学期望

设随机变量 X 的分布律为

$X = x_k$	-1	0	1	2
$P\{X = x_k\} = p_k$	p_1	p_2	p_3	p_4

若 $Y = g(X) = X^2$,求 $E(Y)$.

解　先求 $Y = X^2$ 的分布律

$Y = X^2$	0	1	4
p	p_2	$p_1 + p_3$	p_4

则有 $$E(Y)=E(g(X))=E(X^2)$$
$$=0\cdot p_2+1\cdot(p_1+p_2)+4\cdot p_4$$
$$=0\cdot p_2+(-1)^2\cdot p_1+1^2\cdot p_2+2^2\cdot p_4$$
$$=\sum_{k=1}^{4} g(x_k)P\{X=x_k\}.$$

因此离散型随机变量函数的数学期望为

若 $Y=g(X)$, 且 $$P\{X=x_k\}=p_k,\quad k=1,2,\cdots,$$

则有 $$E(g(X))=\sum_{k=1}^{\infty} g(x_k)p_k.$$

2. 连续型随机变量函数的数学期望

若 X 是连续型的,它的概率密度为 $f(x)$,则

$$E(g(X))=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f(x)\mathrm{d}x.$$

3. 二维随机变量函数的数学期望

(1) 设 X,Y 为离散型随机变量, $g(x,y)$ 为二元函数,则 $E[g(X,Y)]=\sum_{i}\sum_{j}g(x_i,y_j)p_{ij}.$

其中 (X,Y) 的联合概率分布为 p_{ij}.

(2) 设 X, Y 为连续型随机变量, $g(x, y)$ 为二元函数,则

$$E[g(X,Y)] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y) f(x,y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y.$$

其中 (X,Y) 的联合概率密度为 $f(x,y)$.

实例10 设 (X, Y) 的分布律为

$Y \backslash X$	1	2	3
-1	0.2	0.1	0
0	0.1	0	0.3
1	0.1	0.1	0.1

求：$E(X)$, $E(Y)$, $E(Y/X)$, $E[(X-Y)^2]$.

解 X 的分布律为

X	1	2	3
p	0.4	0.2	0.4

得 $E(X) = 1\times 0.4 + 2\times 0.2 + 3\times 0.4 = 2.$

Y 的分布律为

Y	-1	0	1
p	0.3	0.4	0.3

得 $E(Y) = -1\times 0.3 + 0\times 0.4 + 1\times 0.3 = 0.$

由于

p	0.2	0.1	0.1	0.1	0.1	0.3	0.1
(X,Y)	(1,–1)	(1,0)	(1,1)	(2,–1)	(2,1)	(3,0)	(3,1)
Y/X	-1	0	1	$-1/2$	$1/2$	0	$1/3$

于是

$$E\left(\frac{Y}{X}\right) = -1\times 0.2 + 0\times 0.1 + 1\times 0.1 - \frac{1}{2}\times 0.1 + \frac{1}{2}\times 0.1 + 0\times 0.3 + \frac{1}{3}\times 0.1$$

$$= -\frac{1}{15}.$$

p	0.2	0.1	0.1	0.1	0.1	0.3	0.1
(X,Y)	(1,−1)	(1,0)	(1,1)	(2,−1)	(2,1)	(3,0)	(3,1)
$(X-Y)^2$	4	1	0	9	1	9	4

得 $E[(X-Y)^2] = 4\times 0.3 + 1\times 0.2 + 0\times 0.1 + 9\times 0.4$

$= 5.$

例11 设风速V在（0，a）上服从均匀分布，又设飞机机翼受到的正压力W是V的函数：

$W=kV^2$(k>0，常数)，求W的数学期望。

例12 设随机变量(X, Y)的概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{3}{2x^3y^2}, & \dfrac{1}{x}<y<x, x>1\\ 0, & 其他,\end{cases}$$

求数学期望E(Y), E($\frac{1}{XY}$)

实例13 某公司计划开发一种新产品市场,并试图确定该产品的产量.他们估计出售一件产品可获利 m 元,而积压一件产品导致 n 元的损失.再者,他们预测销售量 Y(件)服从指数分布其概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}e^{-y/\theta}, & y>0,\\ 0, & y\le 0.\end{cases}\quad \theta>0,$$

问若要获得利润的数学期望最大,应生产多少件产品(m,n,θ 均为已知)?

解　设生产 x 件，则获利 Q 是 x 的函数：

$$Q = Q(x) = \begin{cases} mY - n(x - Y), & \text{若 } Y < x, \\ mx, & \text{若 } Y \geq x. \end{cases}$$

$$E(Q) = \int_0^{+\infty} Q f_Y(y) \,\mathrm{d}\,y$$

$$= \int_0^x [my - n(x - y)] \frac{1}{\theta} \mathrm{e}^{-y/\theta} \,\mathrm{d}\,y + \int_x^{+\infty} mx \frac{1}{\theta} \mathrm{e}^{-y/\theta} \,\mathrm{d}\,y$$

$$= (m + n)\theta - (m + n)\theta \mathrm{e}^{-x/\theta} - nx,$$

令 $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} E(Q) = (m + n)\mathrm{e}^{-x/\theta} - n = 0,$$

得 $x = -\theta \ln(\frac{n}{m+n})$.

又 $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}E(Q) = \frac{-(m+n)}{\theta}\mathrm{e}^{-x/\theta} < 0$,

因此, 当 $x = -\theta \ln(\frac{n}{m+n})$ 时, $E(Q)$ 取得最大值.

四、小结

1. 数学期望是一个实数, 而非变量,它是一种**加权平均**, 与一般的平均值不同,它从本质上体现了随机变量 X 取可能值的**真正的平均值**.

2. 数学期望的性质

1° $E(C)=C;$

2° $E(CX)=CE(X);$

3° $E(X+Y)=E(X)+E(Y);$

4° X,Y 独立 $\Rightarrow E(XY)=E(X)E(Y).$

第二节　方　差

一、随机变量方差的概念及性质

二、重要概率分布的方差

三、例题讲解

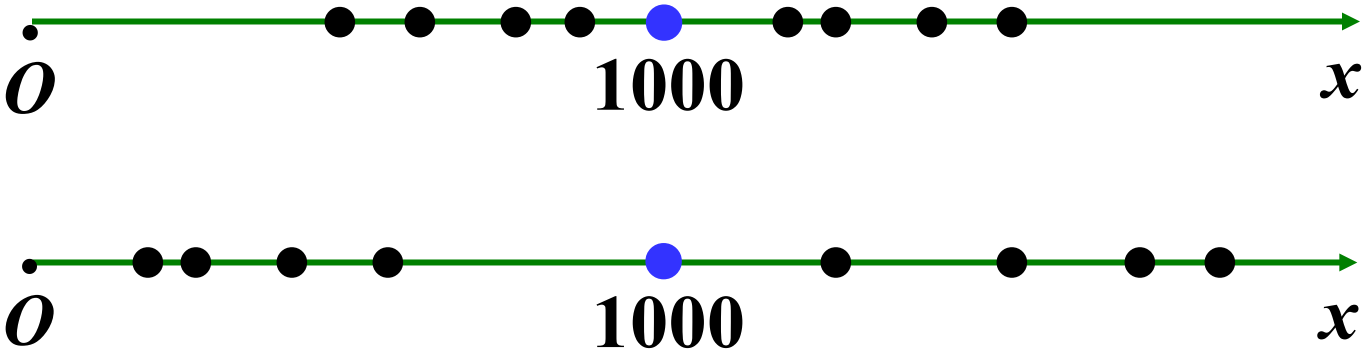
四、小结

一、随机变量方差的概念及性质

1. 概念的引入

方差是一个常用来体现随机变量取值分散程度的量.

实例 有两批灯泡,其平均寿命都是 $E(X)=1000$小时.



2. 方差的定义

设 X 是一个随机变量,若$E\{[X-E(X)]^2\}$存在,则称 $E\{[X-E(X)]^2\}$ 为 X 的方差,记为 $D(X)$ 或 $\mathrm{Var}(X)$,即$\cdots$

$$D(X)=\mathrm{Var}(X)=E\{[X-E(X)]^2\}.$$

称 $\sqrt{D(X)}$ 为标准差或均方差,记为$\sigma(X)$.

3. 方差的意义

方差是一个常用来体现随机变量 X 取值分散程度的量. 如果 $D(X)$ 值大, 表示 X 取值分散程度大, $E(X)$ 的代表性差; 而如果 $D(X)$ 值小, 则表示X 的取值比较集中, 以 $E(X)$ 作为随机变量的代表性好.

4. 随机变量方差的计算

(1) 利用定义计算

离散型随机变量的方差

$$D(X)=\sum_{k=1}^{+\infty}[x_k-E(X)]^2 p_k,$$

其中 $P\{X=x_k\}=p_k, k=1,2,\cdots$是 X 的分布律.

连续型随机变量的方差

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}[x-E(X)]^2 f(x)\mathrm{d}x,$$

其中 $f(x)$ 为X的概率密度.

(2) 利用公式计算

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2.$$

证明 $D(X)=E\{[X-E(X)]^2\}$

$$=E\{X^2-2XE(X)+[E(X)]^2\}$$

$$=E(X^2)-2E(X)E(X)+[E(X)]^2$$

$$=E(X^2)-[E(X)]^2$$

$$=E(X^2)-E^2(X).$$

5. 方差的性质

(1) 设 C 是常数, 则有 $D(C)=0.$

证明 $D(C)=E(C^2)-[E(C)]^2=C^2-C^2=0.$

(2) 设 X 是一个随机变量, C 是常数, 则有

$$D(CX)=C^2D(X).$$

证明 $$D(CX)=E\{[CX-E(CX)]^2\}$$

$$=C^2E\{[X-E(X)]^2\}$$

$$=C^2D(X).$$

(3) 设 *X*, *Y* 相互独立, *D*(*X*), *D*(*Y*) 存在, 则

$$D(X \pm Y) = D(X) + D(Y).$$

证明

$$\begin{aligned} D(X \pm Y) &= E\{[(X \pm Y) - E(X \pm Y)]^2\} \\ &= E\{[X - E(X)] \pm [Y - E(Y)]\}^2 \\ &= E[X - E(X)]^2 + E[Y - E(Y)]^2 \\ &\quad \pm 2E\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\} \\ &= D(X) + D(Y). \end{aligned}$$

推广 若 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立,则有

$$D(X_1 \pm X_2 \pm \cdots \pm X_n) = D(X_1) + D(X_2) + \cdots + D(X_n).$$

(4) $D(X) = 0$ 的充要条件是 X 以概率 1 取常数$E(X)$,即

$$P\{X = E(X)\} = 1.$$

二、重要概率分布的方差

1. 两点分布

已知随机变量 *X* 的分布律为

X	1	0
p	p	$1-p$

则有 $E(X) = 1 \cdot p + 0 \cdot q = p,$

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$= 1^2 \cdot p + 0^2 \cdot (1-p) - p^2 = pq.$$

2. 二项分布

设随机变量 X 服从参数为 n, p 二项分布，其分布律为

$$P\{X=k\}=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}, (k=0,1,2,\cdots,n),$$

$$0<p<1.$$

则有

$$E(X)=\sum_{k=0}^{n}k\cdot P\{X=k\}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{kn!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{np(n-1)!}{(k-1)![(n-1)-(k-1)]!} p^{k-1} (1-p)^{(n-1)-(k-1)}$$

$$= np \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)![(n-1)-(k-1)]!} p^{k-1} (1-p)^{(n-1)-(k-1)}$$

$$= np[p+(1-p)]^{n-1}$$

$$= np.$$

$$E(X^2) = E[X(X-1)+X]$$

$$= E[X(X-1)] + E(X)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{k}{n} p^k (1-p)^{n-k} + np$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{k(k-1)n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} + np$$

$$= n(n-1)p^2\sum_{k=2}^{n}\frac{(n-2)!}{(n-k)!(k-2)!}p^{k-2}(1-p)^{(n-2)-(k-2)}$$

$$+np$$

$$= n(n-1)p^2[p+(1-p)]^{n-2}+np$$

$$= (n^2-n)p^2+np.$$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$$

$$= (n^2-n)p^2+np-(np)^2$$

$$= np(1-p).$$

3. 泊松分布

设 $X \sim \pi(\lambda)$, 且分布律为

$$P\{X = k\} = \frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}, \quad k = 0,1,2,\cdots, \quad \lambda > 0.$$

则有

$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda} = \mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}\cdot\lambda$$

$$= \lambda\mathrm{e}^{-\lambda}\cdot\mathrm{e}^{\lambda} = \lambda.$$

$$E(X^2)=E[X(X-1)+X]$$

$$=E[X(X-1)]+E(X)$$

$$=\sum_{k=0}^{+\infty}k(k-1)\cdot\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}+\lambda$$

$$=\lambda^2\mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k=2}^{+\infty}\cdot\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!}+\lambda=\lambda^2\mathrm{e}^{-\lambda}\mathrm{e}^{\lambda}+\lambda=\lambda^2+\lambda.$$

所以 $D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\lambda^2+\lambda-\lambda^2=\lambda$.

泊松分布的期望和方差都等于参数λ.

4. 均匀分布

设 $X \sim U(a,b)$, 其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

则有 $E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b \dfrac{1}{b-a}x\,\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{2}(a+b).$$

结论 均匀分布的数学期望位于区间的中点.

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$$

$$=\int_a^b x^2\frac{1}{b-a}\mathrm{d}x-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

$$=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

5. 指数分布

设随机变量 X 服从指数分布，其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}e^{-x/\theta}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$ 其中 $\theta>0$.

则有

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\,dx=\int_{0}^{+\infty}x\cdot\frac{1}{\theta}e^{-x/\theta}\,dx$$

$$=-xe^{-x/\theta}\Big|_{0}^{+\infty}+\int_{0}^{+\infty}e^{-x/\theta}\,dx=\theta.$$

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$= \int_0^{+\infty} x^2 \cdot \frac{1}{\theta} \mathrm{e}^{-x/\theta} \, \mathrm{d}x - \theta^2$$

$$= 2\theta^2 - \theta^2$$

$$= \theta^2.$$

指数分布的期望和方差分别为 θ 和 θ^2.

6. 正态分布

设 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$, 其概率密度为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad \sigma>0, \quad -\infty<x<+\infty.$$

则有 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x.$$

令 $\dfrac{x-\mu}{\sigma}=t \Rightarrow x=\mu+\sigma t,$

所以 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(\mu+\sigma t)e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$$

$$=\mu\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t+\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}te^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$$

$$=\mu.$$

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2 f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x.$$

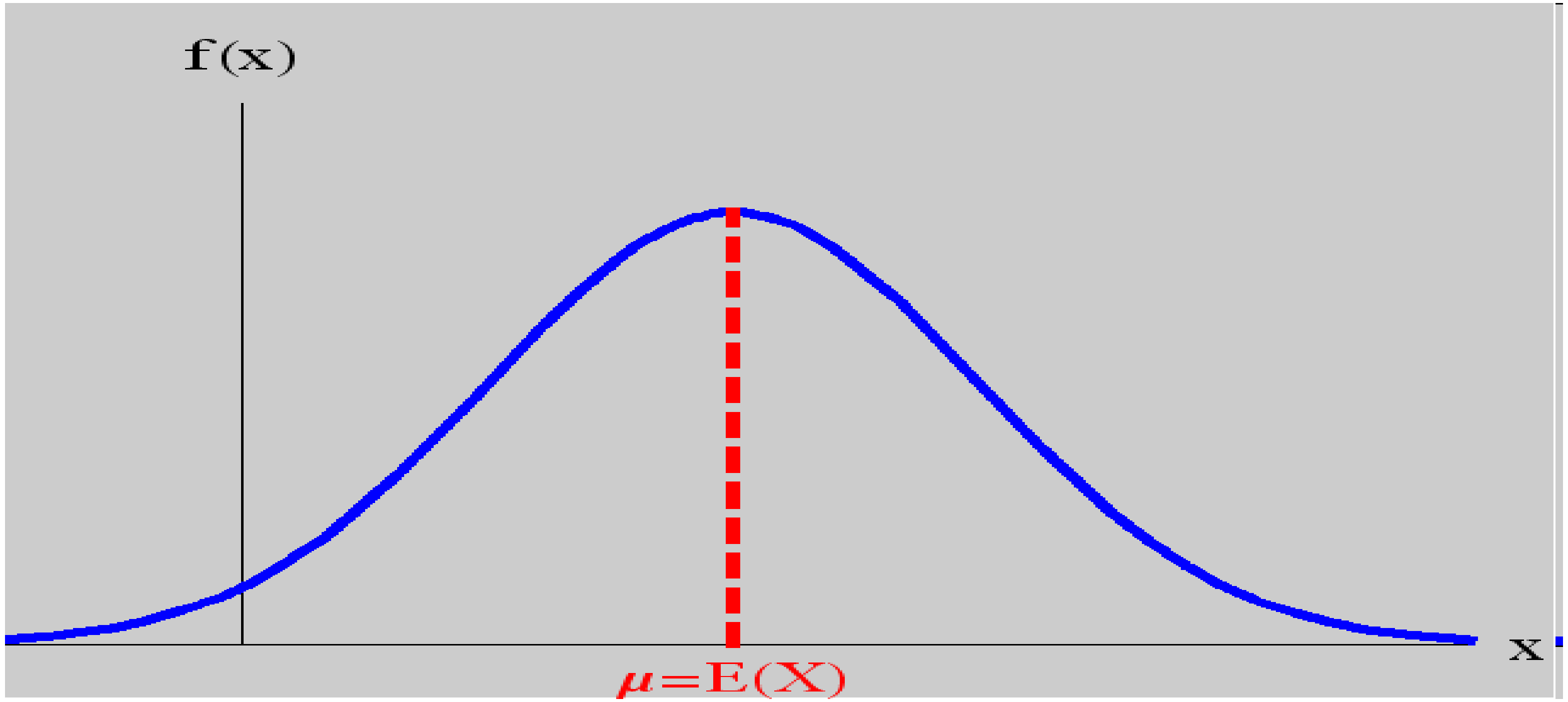
令 $\dfrac{x-\mu}{\sigma}=t$,得

$$D(X)=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}t^2\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\left(-t\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\Big|_{-\infty}^{+\infty}+\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t\right)$$

$$= 0 + \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{2\pi} = \sigma^2.$$

正态分布的期望和方差分别为两个参数 μ 和 σ^2.



几何分布

若随机变量 X 的分布律为

$$\begin{array}{c|cccccc} X & 1 & 2 & \cdots & k & \cdots \\ \hline p_k & p & qp & \cdots & q^{k-1}p & \cdots \end{array}, \; p+q=1,$$

则称 X 服从**几何分布**.

几何分布可作为描述某个试验 “**首次成功**” 的概率模型.

E(X)=1/p

D(X)=(1-p)/p²

分　　布	参数	数学期望	方差
两点分布	$0 < p < 1$	p	$p(1-p)$
二项分布	$n \geq 1,$ $0 < p < 1$	np	$np(1-p)$
泊松分布	$\lambda > 0$	λ	λ
均匀分布	$a < b$	$(a+b)/2$	$(b-a)^2/12$
指数分布	$\theta > 0$	θ	θ^2
正态分布	$\mu,\sigma > 0$	μ	σ^2

几何分布 E(X)=1/p　　D(X)=(1-p)/p^2

三、例题讲解

例1 设随机变量 X 具有概率密度

$$f(x)=\begin{cases}1+x, & -1\le x<0,\\ 1-x, & 0\le x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求 $D(X)$.

解 $E(X)=\int_{-1}^{0}x(1+x)\,\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}x(1-x)\,\mathrm{d}x$

$$=0,$$

$$E(X^2)=\int_{-1}^{0}x^2(1+x)\,\mathrm{d}\,x+\int_{0}^{1}x^2(1-x)\,\mathrm{d}\,x$$

$$=\frac{1}{6},$$

于是

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$$

$$=\frac{1}{6}-0^2=\frac{1}{6}.$$

例2 设活塞的直径 (以cm计) $X \sim N(22.40, 0.03^2)$, 气缸的直径 $Y \sim N(22.50, 0.04^2)$, X, Y 相互独立. 任取一只活塞,任取一只气缸,求活塞能装入气缸的概率.

解 因为 $X \sim N(22.40, 0.03^2)$, $Y \sim N(22.50, 0.04^2)$,

所以 $X - Y \sim N(-0.10, 0.0025)$,

故有 $P\{X < Y\} = P\{X - Y < 0\}$

$$= P\left\{\frac{(X-Y)-(-0.10)}{\sqrt{0.0025}} < \frac{0-(-0.10)}{\sqrt{0.0025}}\right\} = \Phi(2) = 0.9772.$$

例3 设连续型随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\cos x, & 0\le x\le \dfrac{\pi}{2},\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求随机变量 $Y=X^2$ 的方差 $D(Y)$.

解 $E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2 f(x)\,\mathrm{d}x$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\cos x\,\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{4}-2,$$

$$E(X^4)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^4 f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^4\cos x\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\pi^4}{16}-3\pi^2+24,$$

因为 $D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2,$

所以 $D(X^2)=E(X^4)-[E(X^2)]^2$

$$=\frac{\pi^4}{16}-3\pi^2+24-\left(\frac{\pi^2}{4}-2\right)^2$$

$$=20-2\pi^2.$$

切比雪夫不等式

定理 设随机变量 X 具有数学期望 $E(X)=\mu$, 方差 $D(X)=\sigma^2$,则对于任意正数 ε, 不等式

$$P\{|X-\mu|\geq\varepsilon\}\leq\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

成立.

切比雪夫不等式

证明 取连续型随机变量的情况来证明.

设 X 的概率密度为 $f(x)$,则有

$$P\{|X-\mu|\geq\varepsilon\}=\int_{|x-\mu|\geq\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\leq\int_{|x-\mu|\geq\varepsilon}\frac{|x-\mu|^2}{\varepsilon^2} f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\leq\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2 f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\varepsilon^2}\sigma^2.$$

得 $$P\{|X-\mu|\geq\varepsilon\}\leq\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}.$$

$$P\{|X-\mu|\geq\varepsilon\}\leq\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}\Leftrightarrow P\{|X-\mu|<\varepsilon\}\geq 1-\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}.$$

四、小结

1. 方差是一个常用来体现随机变量 X 取值分散程度的量. 如果 $D(X)$ 值大, 表示 X 取值分散程度大, $E(X)$ 的代表性差; 而如果 $D(X)$ 值小, 则表示 X 的取值比较集中, 以 $E(X)$ 作为随机变量的代表性好.

2. 方差的计算公式

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2,$$

$$D(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} [x_k - E(X)]^2 p_k,$$

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - E(X)]^2 f(x) \mathrm{d} x.$$

3. 方差的性质

$$1^{\circ}\ D(C)=0;$$

$$2^{\circ}\ D(CX)=C^2D(X);$$

$$3^{\circ}\ D(X\pm Y)=D(X)+D(Y).$$

4. 契比雪夫不等式

$$P\{|X-\mu|\geq\varepsilon\}\leq\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}\Leftrightarrow P\{|X-\mu|<\varepsilon\}\geq 1-\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}.$$

第三节　　协方差及相关系数

一、协方差与相关系数的概念及性质

二、相关系数的意义

三、小结

一、协方差与相关系数的概念及性质

1. 问题的提出

若随机变量 X 和 Y 相互独立,那么

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y).$$

若随机变量 X 和 Y 不相互独立

$$D(X+Y)=?$$

$$=D(X)+D(Y)+2\boxed{E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}}.$$

协方差

2. 定义

量 $E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$ 称为随机变量 X 与 Y 的协方差. 记为 $\mathrm{Cov}(X,Y)$, 即

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}.$$

而

$$\rho_{XY}=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{D(Y)}}$$

称为随机变量 X 与 Y 的相关系数.

3. 说明

(1) X 和 Y 的相关系数又称为标准协方差,它是一个无量纲的量.

(2) 若随机变量 X 和 Y 相互独立

$$\Rightarrow \mathrm{Cov}(X,Y) = E\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\}$$
$$= 0.$$

(3) 若随机变量 X 和 Y 相互独立

$$\Rightarrow D(X+Y) = D(X) + D(Y)$$
$$+ 2E\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\}$$
$$= D(X) + D(Y) + 2\mathrm{Cov}(X,Y) = D(X) + D(Y).$$

4. 协方差的计算公式

(1) $\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$;

(2) $D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2\mathrm{Cov}(X,Y)$.

证明 (1) $\mathrm{Cov}(X,Y)=E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$

$$=E[XY-YE(X)-XE(Y)+E(X)E(Y)]$$

$$=E(XY)-2E(X)E(Y)+E(X)E(Y)$$

$$=E(XY)-E(X)E(Y).$$

$$
\begin{aligned}
(2)\, D(X+Y) &= E\{[(X+Y)-E(X+Y)]^2\} \\
&= E\{[(X-E(X))+(Y-E(Y)]^2\} \\
&= E\{[X-E(X)]^2\}+E\{[Y-E(Y)]^2\} \\
&\quad +2E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\} \\
&= D(X)+D(Y)+2\,\mathrm{Cov}(X,Y).
\end{aligned}
$$

5. 性质

$$(1)\ \mathrm{Cov}(X,Y)=\mathrm{Cov}(Y,X);$$

$$(2)\ \mathrm{Cov}(aX,bY)=ab\,\mathrm{Cov}(X,Y),\quad a,b\ \text{为常数};$$

$$(3)\ \mathrm{Cov}(X_1+X_2,Y)=\mathrm{Cov}(X_1,Y)+\mathrm{Cov}(X_2,Y).$$

例1 设$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$,试求 X 与 Y 的相关系数.

解 由 $f(x,y)=\dfrac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}$

$$\exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

$$\Rightarrow f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}},-\infty<x<+\infty,$$

$$f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}\mathrm{e}^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}},-\infty<y<+\infty.$$

$$\Rightarrow E(X)=\mu_1,\ E(Y)=\mu_2,\ D(X)=\sigma_1^2,\ D(Y)=\sigma_2^2.$$

而

$$\operatorname{Cov}(X,Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu_1)(y-\mu_2)f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu_1)(y-\mu_2)$$

$$\cdot\,\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right]^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

令 $t=\dfrac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\left(\dfrac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\dfrac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right),\quad u=\dfrac{x-\mu_1}{\sigma_1},$

$$\mathrm{Cov}(X,Y)$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}tu+\rho\sigma_1\sigma_2u^2)\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u$$

$$=\frac{\rho\sigma_1\sigma_2}{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}u^2\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\,\mathrm{d}u\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t\right)$$

$$+\frac{\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}u\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\,\mathrm{d}u\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty}t\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t\right)$$

$$=\frac{\rho\sigma_1\sigma_2}{2\pi}\sqrt{2\pi}\cdot\sqrt{2\pi},$$

故有$\mathrm{Cov}(X,Y)=\rho\sigma_1\sigma_2$.

于是 $$\rho_{XY}=\frac{\operatorname{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\rho.$$

结论

(1) 二维正态分布密度函数中,参数 ρ 代表了 X 与 Y 的相关系数;

(2) 二维正态随机变量 X 与 Y 相关系数为零等价于 X 与 Y 相互独立.

例2 已知随机变量X,Y分别服从$N(1,3^2),N(0,4^2)$, $\rho_{XY}=-1/2$,设 $Z=X/3+Y/2$.

(1) 求 Z 的数学期望和方差.

(2) 求 X 与 Z 的相关系数.

(3) 问 X 与 Z 是否相互独立?为什么?

解 (1)由$E(X)=1,\ D(X)=9,\ E(Y)=0,\ D(Y)=16.$

得
$$E(Z)=E\left(\frac{X}{3}+\frac{Y}{2}\right)=\frac{1}{3}E(X)+\frac{1}{2}E(Y)$$
$$=\frac{1}{3}.$$

$$D(Z) = D(\frac{X}{3}) + D(\frac{Y}{2}) + 2\operatorname{Cov}(\frac{X}{3}, \frac{Y}{2})$$

$$= \frac{1}{9}D(X) + \frac{1}{4}D(Y) + \frac{1}{3}\operatorname{Cov}(X, Y)$$

$$= \frac{1}{9}D(X) + \frac{1}{4}D(Y) + \frac{1}{3}\rho_{XY}\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}$$

$$= 1 + 4 - 2 = 3.$$

$$(2)\ \ \mathrm{Cov}(X,Z)=\mathrm{Cov}(X,\frac{X}{3}+\frac{Y}{2})$$

$$=\frac{1}{3}\mathrm{Cov}(X,X)+\frac{1}{2}\mathrm{Cov}(X,Y)$$

$$=\frac{1}{3}D(X)+\frac{1}{2}\rho_{XY}\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}=3-3=0.$$

故 $\rho_{XY}=\mathrm{Cov}(X,Z)\big/(\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Z)})=0.$

(3)由二维正态随机变量相关系数为零和相互独立两者是等价的结论,可知:X与Z是相互独立的.

二、相关系数的意义

1. 问题的提出

问 a,b 应如何选择,可使 $aX+b$ 最接近 Y?接近的程度又应如何来衡量?

设 $e = E[(Y-(a+bX))^2]$

则 e 可用来衡量 $a+bX$ 近似表达 Y 的好坏程度.

当 e 的值越小,表示 $a+bX$ 与 Y 的近似程度越好.

确定 a,b 的值,使 e 达到最小.

$$e = E[(Y-(a+bX))^2]$$

$$= E(Y^2) + b^2E(X^2) + a^2 - 2bE(XY) + 2abE(X)$$

$$- 2aE(Y).$$

将 e 分别关于 a,b 求偏导数,并令它们等于零,得

$$\begin{cases} \dfrac{\partial e}{\partial a} = 2a + 2bE(X) - 2E(Y) = 0, \\ \dfrac{\partial e}{\partial b} = 2bE(X^2) - 2E(XY) + 2aE(X) = 0. \end{cases}$$

解得 $b_0 = \dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{D(X)}, a_0 = E(Y) - E(X)\dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{D(X)}.$

将 a_0, b_0 代入 $e = E[(Y-(a+bX))^2]$ 中,得

$$\begin{aligned}\min_{a,b} e &= E[(Y-(a+bX))^2] \\ &= E[(Y-(a_0+b_0X))^2] \\ &= (1-\rho_{XY}^2)D(Y).\end{aligned}$$

2. 相关系数的意义

当 $|\rho_{XY}|$ 较大时 e 较小, 表明 X,Y 的线性关系联系较紧密.

当 $|\rho_{XY}|$ 较小时, X,Y 线性相关的程度较差.

当 $\rho_{XY}=0$ 时,称 X 和 Y 不相关.

例3 设 θ 服从 $[0,2\pi]$ 的均匀分布, $\xi=\cos\theta$, $\eta=\cos(\theta+a)$, 这里 a 是常数, 求 ξ 和 η 的相关系数?

解

$$E(\xi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos x\,\mathrm{d}x=0,$$

$$E(\eta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(x+a)\,\mathrm{d}x=0,$$

$$E(\xi^2)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^2 x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2},$$

$$E(\eta^2)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^2(x+a)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2},$$

$$E(\xi\eta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos x\cdot\cos(x+a)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\cos a,$$

由以上数据可得相关系数为 $\rho=\cos a.$

$$\left.\begin{array}{l}\text{当}a=0\text{时},\rho=1,\xi=\eta,\\ \text{当}a=\pi\text{时},\rho=-1,\xi=-\eta,\end{array}\right\}\text{存在线性关系.}$$

当 $a=\dfrac{\pi}{2}$或$a=\dfrac{3\pi}{2}$时,$\rho=0$, ξ与η不相关.

但 $\xi^2+\eta^2=1$, 因此 ξ与η不独立.

3. 注意

(1) 不相关与相互独立的关系

$$\text{相互独立} \underset{\not\leftarrow}{\rightarrow} \text{不相关}$$

(2) 不相关的充要条件

1° X, Y 不相关 $\Leftrightarrow \rho_{XY} = 0$;

2° X, Y 不相关 $\Leftrightarrow \mathrm{Cov}(X, Y) = 0$;

3° X, Y 不相关 $\Leftrightarrow E(XY) = E(X)E(Y)$.

4. 相关系数的性质

(1) $|\rho_{XY}| \le 1.$

(2) $|\rho_{XY}| = 1$ 的充要条件是：存在常数 a, b 使

$$P\{Y = a + bX\} = 1.$$

证明 (1) $\min\limits_{a,b} e = E[(Y-(a+bX))^2]$

$$= (1-\rho_{XY}^2)D(Y) \ge 0$$

$$\Rightarrow 1-\rho_{XY}^2 \ge 0$$

$$\Rightarrow |\rho_{XY}| \le 1.$$

(2) $|\rho_{XY}|=1$的充要条件是,存在常数 a,b 使

$$P\{Y=a+bX\}=1.$$

事实上,$|\rho_{XY}|=1 \Rightarrow E[(Y-(a_0+b_0X))^2]=0$

$$\Rightarrow 0=E[(Y-(a_0+b_0X))^2]$$

$$=D[Y-(a_0+b_0X)]+[E(Y-(a_0+b_0X))]^2$$

$$\Rightarrow D[Y-(a_0+b_0X)]=0,$$

$$E[Y-(a_0+b_0X)]=0.$$

由方差性质知

$$P\{Y-(a_0+b_0X)=0\}=1, \text{或 } P\{Y=a_0+b_0X\}=1.$$

反之,若存在常数 a^*,b^* 使

$$P\{Y=a^*+b^*X\}=1 \Leftrightarrow P\{Y-(a^*+b^*X)=0\}=1,$$

$$\Rightarrow P\{[Y-(a^*+b^*X)]^2=0\}=1,$$

$$\Rightarrow E\{[Y-(a^*+b^*X)]^2\}=0.$$

故有

$$0=E\{[Y-(a^*+b^*X)]^2\} \geq \min_{a,b} E[(Y-(a+bX))^2]$$

$$=E\{[Y-(a_0+b_0X)]^2\}=(1-\rho_{XY}^2)D(Y)$$

$$\Rightarrow |\rho_{XY}|=1.$$

三、小结

相关系数的意义

当 $|\rho_{XY}|$ 较大时 , X, Y 的线性相关程度较高 .

当 $|\rho_{XY}|$ 较小时, X, Y 的线性相关程度较差.

当 $\rho_{XY}=0$ 时, X 和 Y 不相关.

第4节 矩

定义：设X和Y是随机变量，

若 $E(X^k)$, k=1，2，…

存在，称它为X的k阶原点矩，简称k阶矩.

若 $E\{[X-E(X)]^k\}$, k=1，2，…

存在，称它为X的k阶中心矩

课堂练习

甲、乙两人相约于某地在12:00-13:00会面，设X，Y分别是甲、乙到达的时间，且设X和Y相互独立，已知X，Y的概率密度分别为

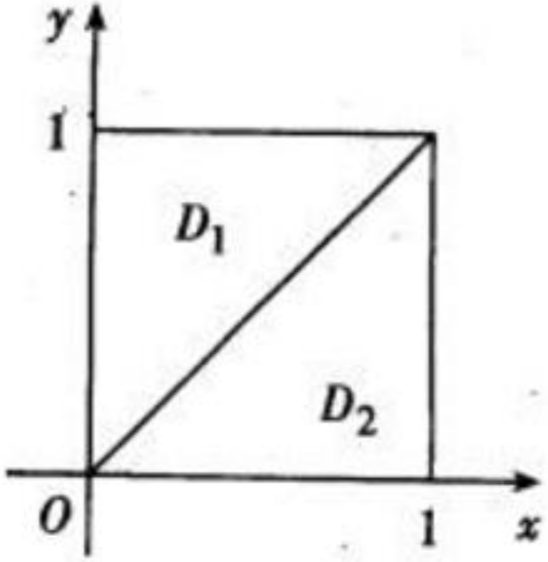
$$f_X(x)=\begin{cases}3x^2, 0<x<1\\ 0,\ 其他\end{cases} \qquad f_Y(y)=\begin{cases}2y, 0<y<1\\ 0,\ 其他\end{cases}$$

求先到达者需要等待的时间（以小时h计）的数学期望。

$$E(|X-Y|)=\int_0^1\int_0^1|x-y|6x^2y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_{D_1}-(x-y)6x^2y\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_2}(x-y)6x^2y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{12}+\frac{1}{6}=\frac{1}{4}(\text{小时}).$$



课堂练习

面包店为了促进销售，增加购买量，开展了一个促销活动。在部分面包包装盒内放了奖券，凭借奖券可以免费获得额外3盒面包。假定每个面包内含奖券的概率为$p=0.05$.求出中奖所需购买面包个数的均值和方差。

解：假设中奖所需购买面包数为随机变量X，则X为中奖首次发生时所需购买的面包数量，因此X服从参数为 $p = 0.05$ 的几何分布，得

$$E(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0.05} = 20$$

$$D(X) = \frac{1-p}{p^2} = \frac{1-0.05}{0.05^2} = 380$$

通过上述生活中的实际例子，让学生更直观的理解均值和方差的求解和应用，即平均购买20个会有一次中奖机会，购买个数和中奖所需平均购买个数的差异程度可以通过380衡量。

子问题1：给你一个骰子，你扔到几，机器将会给你相应的金钱。比如，你扔到6，机器会返回你6块钱，你扔到1，机器会返回你1块钱。请问，你愿意最多花多少钱玩一次?

子问题2：在子问题1里，你只能扔一次，现在呢，可以给你两次机会，但是你自己也可以选择只扔一次。但返回的钱以最后一次为准。比如，第一次你扔了6，你把第二次机会就放弃了，这样机器会返给你6块钱。但是，假设你第一次扔了3，你如果对这一次不满意，打算再扔一次，如果你第二次扔到了2，那么你最后只能得到2块钱，如果第二次扔到5，你最后会得到5块钱。请问，在这种条件下，你愿意最多花多少钱玩一次?

分析：

对于子问题1，非常简单，本质上是求数学期望。因为骰子每一面被扔到的概率是一样的，即 1/6. 所以，最后期望值是 1 * 1/6 + 2 * 1/6 + ... + 6 * 1/6 = 3.5. 也就是说，假设你玩无穷次，平均下来，机器会返回给你的钱是 3.5. 所以，如果你头脑清醒的话，你应该不会花超过3.5去玩一次。

对于子问题2，解答起来是有困难的。因为这题里面有一个选择的问题：你可以只扔一次，或者选择扔两次。所以不容易去获得每个值的概率（因为我们不知道到底扔不扔第二次）。但是，如果有了子问题1的答案，其实对于决定是否扔第二次还是有根据的，原因如下：

如果你第一次扔到了1，或者2，或者3，你一定会扔第二次。为什么（问题的关键）？因为我们在扔第二次的时候，它的期望收益是 3.5。同理，如果你第一次扔到了4,5,6，你不会选择扔第二次，因为你知道下一次的期望收益是 3.5，比你目前的收益会小。有了这样的分析，问题就可以迎刃而解了。

解答：

因为骰子总共6面。第一次扔到4, 5, 6 其中之一的概率是 1/2, 那么选择扔第二次的概率也是1/2。在第一次扔到4,5,6其中之一这个事件里，平均收益是4* 1/3 + 5 * 1/3 + 6* 1/3 = 5. 在第二次扔的时候，平均收益是 3.5(子问题1的答案)。所以最后总的收益是 5 * 1/2 + 3.5 * 1/2 = 4.25。