《概率论与数理统计》第九周要点

第四章随机变量的数字特征: 期望、方差——复习要点

§0 随机变量数字特征的意义

- 随机变量的分布函数或密度函数能完整描述其概率规律，但在实际问题中，人们往往只关心某些能够反映随机变量特征的**代表性数值**。
- 这些由分布确定的常数称为**随机变量的数字特征**（Numerical Characteristics）。
- 它们反映：
  1. 随机变量取值的**平均水平**——用数学期望（均值）衡量；
  2. 取值的**波动程度**——用方差和标准差刻画；
  3. 变量之间的**相关关系**——用协方差与相关系数度量；
- 本周重点介绍数学期望、方差及其性质。

—

§1 数学期望（Mathematical Expectation）

1. 定义与含义

- 数学期望表示随机变量取值的“加权平均”，是其集中趋势的量度。
- 若 X 为离散型随机变量，分布律为 $P\{X = x_k\} = p_k$，则

$$E(X) = \sum_k x_k p_k.$$

- 若 X 为连续型随机变量，密度为 $f(x)$，则

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx.$$

- 期望的直观意义：当试验次数趋于无穷时，样本均值趋近于 $E(X)$。

—

2. 性质 设 C 为常数，X,Y 为随机变量，且期望存在，则：

$$E(C)=C,\quad E(CX)=CE(X),\quad E(X+Y)=E(X)+E(Y).$$

若 X,Y 独立，则 $E(XY)=E(X)E(Y)$。这些性质可推广到有限个随机变量的和与积。

—

3. 典型例题 例 1：离散型随机变量

医院新生儿评分 X 的分布律如下：

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(X)$	0.002	0.001	0.002	0.005	0.020	0.040	0.180	0.370	0.250	0.120	0.010

表 1: 随机变量 X 的分布律

求 $E(X)$。

$$E(X)=\sum x_k p_k = 7.15.$$

解释：平均每个新生儿的综合得分为 7.15 分。

—

例 2：连续型随机变量（指数分布） 若 X 的概率密度为 $f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$，$x>0$，则

$$E(X)=\int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x}\,dx=\frac{1}{\lambda}.$$

说明：λ 越大，变量集中在较小值处，均值越小。

—

4. 函数的数学期望 若 $Y=g(X)$，则：

$$E[g(X)]=\sum g(x_k)p_k \quad (\text{离散型}),\qquad E[g(X)]=\int g(x)f(x)\,dx \quad (\text{连续型}).$$

推广到二维情形，若 $Z=g(X,Y)$ 且联合密度为 $f(x,y)$，

$$E(Z)=\iint g(x,y)f(x,y)\,dx\,dy.$$

此公式常用于求功率、能量、收益等随机量的平均值。

—

§2 方差（Variance）

1. 定义与意义

- 方差度量随机变量取值对其平均值的偏离程度。
- 定义：
$$D(X) = E\big[(X - E(X))^2\big].$$
- 标准差：
$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$
- 含义：
  - $D(X)$ 越小，X 越集中于均值附近；
  - $D(X)$ 越大，说明波动越剧烈。

—

2. 计算公式

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2.$$

适用于所有随机变量。

—

3. 方差的性质 设常数 C，随机变量 X,Y：

$$D(C) = 0, \quad D(CX) = C^2D(X), \quad D(X + C) = D(X).$$

若 X,Y 独立，则

$$D(X + Y) = D(X) + D(Y).$$

—

小结

- 数学期望：描述随机变量的平均水平；
- 方差与标准差：衡量离散程度；
- $E[g(X)]$ 与 $D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$ 是计算核心；
- 理解期望与方差的**物理意义**比机械计算更重要；
- 本章为后续“协方差”“相关系数”“矩”的学习奠定基础。