《概率论与数理统计》第十三周要点

第七章参数估计（§1 点估计）——复习要点

一、参数估计与点估计的基本概念

- 统计推断的基本问题分为两类：参数估计与假设检验。
- 当总体分布的形式已知，但其中一个或多个参数未知时，利用样本对未知参数进行推断的问题称为参数估计问题。

点估计的定义 设总体 X 的分布函数（或分布律、密度）形式已知，但参数 θ 未知，$X_1, X_2, \ldots, X_n$ 为来自总体的一个样本。若构造一个不含未知参数的统计量

$$\hat{\theta} = T(X_1, X_2, \ldots, X_n),$$

并用其观测值作为 θ 的近似值，则称 $\hat{\theta}$ 为参数 θ 的点估计量，其数值称为点估计值。

- 估计量是随机变量；
- 估计值是具体样本下的数值；
- 不同样本通常给出不同估计值。

—

二、矩估计法

基本思想

- 总体分布中的参数可由总体矩表示；
- 样本矩依概率收敛于相应的总体矩；
- 用样本矩代替总体矩，解方程得到参数的估计。

一般步骤 设总体含 k 个未知参数 $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$，总体的前 k 阶矩为

$$\mu_r = E(X^r), \quad r = 1, 2, \ldots, k,$$

且

$$\mu_r = \mu_r(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k).$$

用样本矩

$$A_r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^r$$

代替 μ_r，建立方程组

$$\mu_r(\theta_1, \ldots, \theta_k) = A_r, \quad r = 1, 2, \ldots, k,$$

解得参数的矩估计量。

—

常见结论

- 总体均值的矩估计量：

$$\hat{\mu} = \bar{X}.$$

- 总体方差的矩估计量：

$$\hat{\sigma}^2 = A_2 - A_1^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2.$$

- 该结果与总体的具体分布形式无关（只要矩存在）。

—

三、最大似然估计法

基本思想

- 已经观测到一组样本值；
- 认为使“该样本出现概率最大”的参数值最为合理；
- 通过极值方法确定参数的估计。

—

似然函数

- 离散型总体：

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i; \theta).$$

- 连续型总体：

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i; \theta).$$

- $L(\theta)$ 是关于参数 θ 的函数；
- 样本值 $x_1, \ldots, x_n$ 视为已知常数。

—

最大似然估计量的定义　若

$$L(\hat{\theta}) = \max_{\theta \in \Theta} L(\theta),$$

则称 $\hat{\theta}$ 为参数 θ 的最大似然估计值，对应的统计量称为最大似然估计量。

—

对数似然方程　由于 $L(\theta)$ 与 $\ln L(\theta)$ 在同一点取极值，通常解

$$\frac{d}{d\theta} \ln L(\theta) = 0$$

来求最大似然估计。当含多个参数时，需解方程组

$$\frac{\partial}{\partial \theta_i} \ln L(\theta) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, k.$$

—

四、典型结果与比较

- 二项分布 $B(n,p)$：
$$\hat{p}_{\mathrm{MLE}} = \bar{X}.$$
- 正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$：
$$\hat{\mu} = \bar{X}, \qquad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2.$$
- 均匀分布 $U(a,b)$：
$$\hat{a} = \min X_i, \qquad \hat{b} = \max X_i.$$
- 在许多常见分布中，矩估计量与最大似然估计量形式一致；
- 最大似然估计往往具有更好的统计性质（在后续章节讨论）。

—

五、最大似然估计的不变性

若 $\hat{\theta}$ 是 θ 的最大似然估计量，且函数 $u = u(\theta)$ 为单值可逆函数，则

$$\hat{u} = u(\hat{\theta})$$

是 $u(\theta)$ 的最大似然估计量。

—

六、小结

- 点估计是用一个统计量对未知参数给出单一数值近似；
- 矩估计法基于“样本矩近似总体矩”，计算简便；
- 最大似然估计法基于“使样本出现概率最大”，应用最广；
- 对数似然方程是求解最大似然估计的核心工具；
- 不变性是最大似然估计的重要理论性质。