上海交通大學

SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

科学思想背后的小故事论文

标题：“时距”的定义与探究

作　　者：钟宇亮 刘哲源 孙雪晖

史益栋 卞欣然 柳星雯

指导老师：王维克

学院（系）：致远学院

2016 年 12 月 7 日

“时距”的定义与探究

摘　要

在本篇论文中，我们小组定义了一种新的“距离”，并将它定义为“时距”。顾名思义，“时距”就是指在给定的两点及其两点间给定的条件 P 的作用下，一个质点能从一个点到达另一个点所需要的最短时间。我们对二维平面中均匀速度场条件下，时距与速率、速度场边界方程条件的关系做了探究，并应用“代数求极值法”“几何直观转化法”“等时线逼近法”成功地予以解决。

然后，我们提出了解决时距问题的一般方法和思路，并对探究思想方法做了回顾，从课题的研究中得到一些新的感悟。

关键词：距离；最短时间原理；轨迹 时距 探究思想方法

目　录

一、 引言：通向问题之路

在聆听了王维克老师的课程之后，我们对于“距离”这个概念产生了兴趣，也对“距离”的多样性做出了思考，展开了讨论。我们知道，在追求效率的今天，最快即最好，无论是抽象的信息，还是具体的事物，在传递的过程中，我们都希望能采用耗时最短的路径。我们将这样的问题暂且归结为两点之间的“最短时间”问题。

在空间中给定两点 A、B 的位置和两点之间的速度条件，如何选择 A 到 B 的路线使得耗时最短？是否一定是走直线最短呢？

通过资料的检索，“最速降线”问题给出了明确的回答：往往，在两点之间的速度条件改变后，耗时最短的路线并非连线段，而是某条特殊的曲线段。

那该如何寻找“耗时最短的线段”并求出“最短时间”？

我们试图从最速降线问题的解决上得到启发。这个问题在历史上有许多解答，其中伯努利兄弟的解法吸引了我们：他利用了费马原理，将质点的运动类比成光线的运动。那么，“最速降线”就是在光速随高度下降而增加（加速度恒为重力加速度 g）的介质里光线传播的路径。从而找到了这条轨迹。

光线在传播时总会选择光程为极值的那条路径。光并没有意识，不能计算路径消耗时间，它找到最短时间路径的方法，仅是将每种可能路径都“走”一遍，并与自己发生干涉，于是最短时间路径就在路径积分中留了下来，也就形成了“走”最短时间路线的光线。

而在实际应用中，我们是不可能去遍历每一条路的，这时，找到一个寻找最短时间路径的方法，便成了一个重要的问题。经过思考与讨论，本小组对两点间“耗时最短”给出了明确的定义，并对二维平面中均匀速度场条件下，“最短时间”与速率、速度场边界方程条件的关系做了探究，且应用几种方法成功地解决了问题，最终提出了一般性的解决思路。

二、 定义

为方便后续讨论，做出如下定义：

时距：用时间定义的“距离”，即用所需时间体现空间上的相隔。

定义：在确定的条件A下，从a到b所需的最短时间即为a到b的时距，记为$t_x(a,b)$。

定义：

(x,y)：表示从x出发到y；

S(x,y)：表示从x到y的任一一条路径或者说是运动轨迹；

T(x,y)：表示经过S(x,y)从x到达y所需时间；

$t_x(a,b)$：表示从a到b的最短时间，即(x,y)的时距。

这个定义的理解可类比函数$y=f(x)$：S(x,y)相当于自变量x，而对应的T(x,y)相当于y，确定的条件A的作用为确定定义域和相应的函数关系，即确定S(x,y)的选取范围和相应的速率与位置的关系，从而可以计算出时间。速度可能会随位置的改变而变化，因此有：$T(x,y)=\int\frac{ds}{v}$

（ds代表S(x,y)上的一段极小的距离，v代表这一段的速度）

根据以上定义有以下关系：

$t_x(a,b)\geq 0$

$t_x(a,b)=0\Leftrightarrow a=b$

$t_x(a,b)\leq T(a,c)+T(c,b)$ （c为可经过的一点）

$t_x(a,b)=t_x(b,a)$

三、 问题的提出、探究与解决

（一） 问题提出：

给定二维平面上的任意点 A,B，对于 A,B 间均匀速度场$v(x,y)$，试求$t_0(A,B)$以及$S_0(A,B)$。

（二） 问题探究与解决：

1 确定边界情况

1.1 直线边界速度场

如 Fig 1，在平面上有界面 l，l 上方有给定点A，下方有给定点B，有一物体，在 l 上方运动的速率为 v1，在 l 下方的速率为 v2=kv1（假设经过 l 时速率可突变，经过 l 的时间忽略不计）求 t0（A，B）以及 S0（A,B）。

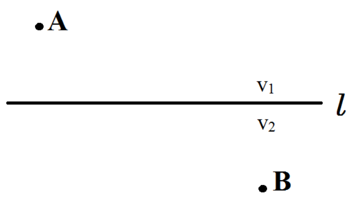

Fig 1

1.2 代数求极值法

对路径距离函数求导得出其极值。此情况可类比物理中几何光学折射定律。折射率分布$n(x,y)=\dfrac{c}{v(x,y)}$，其中c为光速，光程$L=\sum n\Delta L$。

如 Fig 2 所示：

$$(QMP)=n_1\sqrt{{h_1}^2+x^2}+n_2\sqrt{{h_2}^2+(p-x)^2}$$

求导

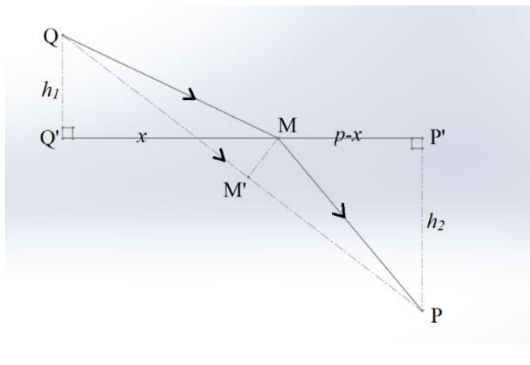

Fig 2

$$\frac{d}{dt}(QMP)=\frac{n_1 x}{\sqrt{{h_1}^2+x^2}}-\frac{n_2(p-x)}{\sqrt{{h_2}^2+(p-x)^2}}$$

再由 $\frac{d}{dt}(QMP)=0$，

得 $n_1\sin(i_1)=n_2\sin(i_2)$，即可确定其时间最短的轨迹。

而一般情况下，可由费马原理：$\delta\int_L ndl=0$ 求解该轨迹。

1.3 几何直观转化法

代数运算虽然简明易懂，但是略显繁琐且缺乏直观性。有没有一种方法能把时距转化到距离，便于理解和寻找最短时距的路径呢？

1.3.1 先考虑特殊的情况。

当上下界面速度比为 2 时，我们用一个等效替代的方法直观地将时距问题转化为平面上的距离问题。

如 Fig 3，当该质点到达 C 点后，它在 l 下方运动 2S 的时间相当于在 l 上方运动 S 的时间，因此将 B 向上作镜像点 B”，并联结 CB，CB’。

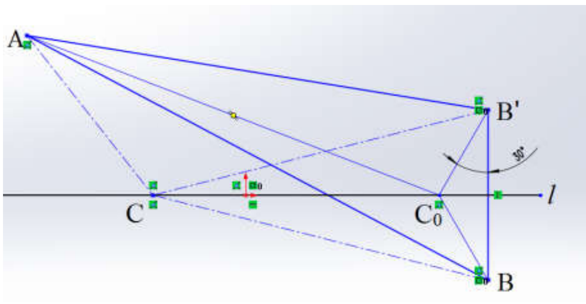

Fig 3

可以预料，当 $L_0=\overline{CA}+\overline{CB}+\overline{CB'}$ 最短时，有 $t=\frac{L_0}{v_1}=t_0(A,B)$，而由平面几何的知识可以断定，当 C 为△ABB’的费马点 C_0 时，L_0 最短。因此，我们就找到了 $S_0(A,B)=AC_0B$。

1.3.2 下面考虑对一般的 k，从几何意义上直观地理解时距。

为解决上述的问题，我们引入“点点-点线坐标系变换”。

“点点-点线坐标系变换”：由于速度场分布，空间中的起点 A 到达终点 B 的时间 $T(A,B)$ 是 $S(A,B)$ 的函数。对每一个 S，得到一个对应的 T。现用一种对应法则

将T与时距坐标系内两点间距等效，则终点 B 将构成一条曲线，得一个起点和一条目标曲线。称该变换为(A,B)的点点-点线坐标系变换。

如 Fig 4 所示，已知点$A(x_1,y_1)$与点$B(x_2,y_2)$，以x轴为界面，上方（$y>0$）速度场$v=1$，下方（$y<0$）速度场$v=k$。

a） 我们取点$C(x_0,0)$为界面上动点，连接 AC,BC，即为一任意轨迹（已保证在各自速度场中时距最短）延长 CB 至 CB’，使得$CB^{'}=kCB$，仿照上述分析，两直线轨迹在时间意义上有相同单位。

b） 旋转 CB’（以 C 为圆心）至 CB”，使得 A,C,B”三点共线，这时，B”即为 B 在时距坐标系下的一一对应，即$B(x_2,y_2)\to B^{''}(x_2^{''},y_2^{''})$。直观地，$\left|AB^{''}\right|$即为时距。

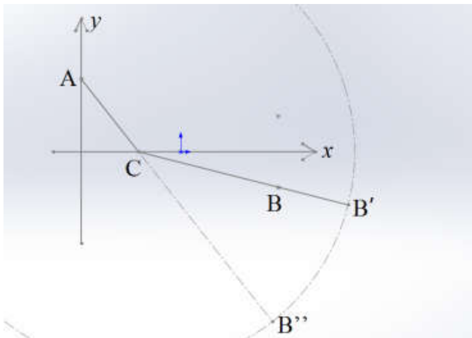

Fig 4

c） 由 C 的坐标$(x_0,0)$确定，故可以消去 C 得到关于x_0的参数方程。现在在该方程上寻找到 A 点最近的点 P，联结 AP 与 x 的交点为 C0，那么不难发现AC_0B为所用时间最短的条件下的运动轨迹，$t_0(A,B)=\dfrac{L_0}{v_1}=\dfrac{C_0A+C_0B}{v_1}$

以下推导该一一对应关系：

$$AC: y=\frac{y_1}{x_1-x_0}(x-x_0),\quad CB: y=\frac{y_2}{x_2-x_0}(x_2-x_0)$$

$$d_2=|CB|=\sqrt{(x_2-x_0)^2+y_2^{\ 2}},\quad d_2^{'}=kd_2=k\sqrt{(x_2-x_0)^2+y_2^{\ 2}}$$

联立$\begin{cases}(x-x_0)^2+y^2=d_2^{'2}\\ y=\dfrac{y_1}{x_1-x_0}(x-x_0)\end{cases}$，得$B^{''}$坐标$(x(x_0),y(x_0))$

$$x(x_0)=x_0+\sqrt{\frac{(x_2-x_0)^2+{y_2}^2}{(x_1-x_0)^2+{y_1}^2}}kx_0$$

其中

$$y(x_0)=-\sqrt{\frac{(x_2-x_0)^2+{y_2}^2}{(x_1-x_0)^2+{y_1}^2}}ky_1$$

则时距 $S(x_0)=\sqrt{(x_1-x(x_0))^2+(y_1-y(x_0))^2}$

即可求得最短时距 $S(x_0)_{\min}$ 与此时 x_0 的值即折线轨迹

虽然上述方程是一个较为繁杂的代数方程，但我们利用 excel 工作表，用逼近的方法来求解 AP 间的最近距离。

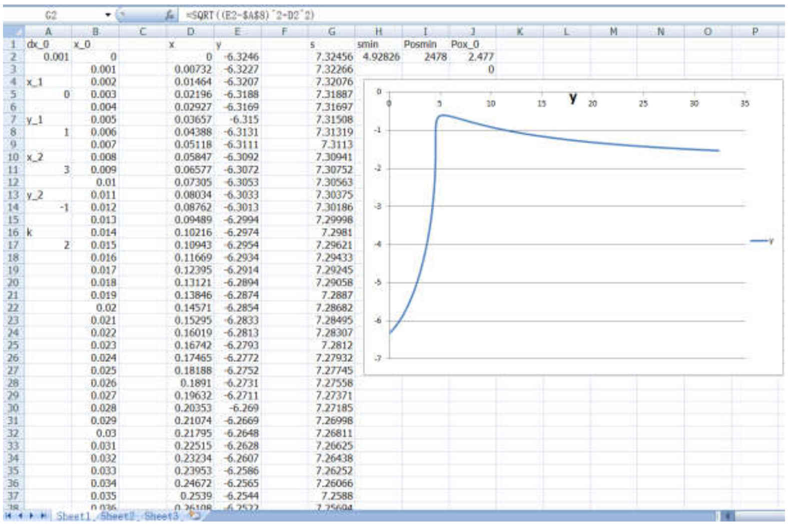

Fig 5

如 Fig 5，给定 $(x_1,y_1)=(0,1),(x_2,y_2)=(3,-1),k=2$ 令 x_0 由 0 变化到 3，精度为 0.001，对每一个 x_0 计算得到 P(x)与 P(y)并在坐标轴上绘制出来。用一条曲线拟合后得到方程曲线的一部分。再对每一个 x_0 计算 AP 距离 s，找到最小值 s min 并找到 P 点的近似位置。

2 任意曲线边界速度场情况

2.1 等时线逼近法

2.1.1 t 度等时线与等时线图的定义

受空间中等高线，电场中等势面的启发，我们定义 t 度等时线的概念，并绘制 A 点的等时线图，那么只要给定 B 的位置，即可在图中读得 A、B 的时距。

t 度等时线：在某平面某速度条件下，给定时间 t，由定点 A 出发能到达的最远位置的曲线 T 是时间 t 的函数 T（t），则将曲线 T（t）称为 t 度等时线。

A 点的等时线图：当 t 从 0 取向∞时，t 度等时线构成的集合。

2.1.2 等时线的绘制

类比惠更斯原理，我们想到可以用惠更斯原理绘制波面的方式绘制等时线。并依此来观察在两个速度场的分界面两侧运动的情况。

a） 散点图的绘制

借助 C++中的图形库，如 Fig 6

可以看到，最下方的红色点是时间为 0 的点，也就是起点，每次向上扩展出一个半圆。将半圆打散为若干点，每个点继续以相同时间向上扩展。按照时间从短到长的顺序，点的颜色分别是红、绿、蓝、橙、浅蓝、紫，其中紫色的点并没有完全画出。圆弧为速度改变的分界面，圆弧下方和上方的速度之比为 3:5。我们发现，经过分界面后的点的边界似乎被压扁成了一个椭圆。

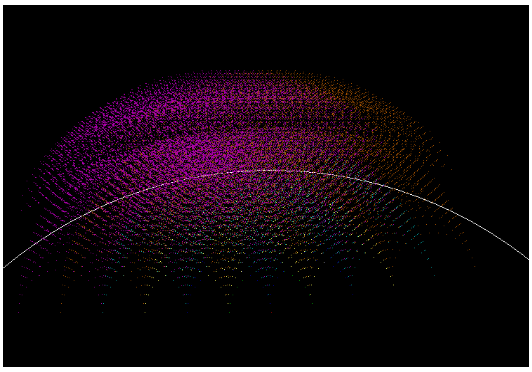

Fig 6

b） 包络面的绘制

显然，上述图形还不够直观。所以我们考虑把同一层（同种颜色）点用一个凸多边形包围起来，类似于一个包络面，也就是这些点的凸包。

如 Fig 7 把原点移到圆弧边界上方，改变速度比例，扩展出的半圆变为整个圆，用 Graham 扫描法作出每层的凸包。因为把所有点都进行扩展是指数级别的时间复杂度，所以我们只把最外层凸包上的点加进队列继续扩展。我们调整到每个点扩展出 2000 个新点，但是由于扩展过程损失精度的原因，曲线还是有些不太光滑。但是圆下方的点几乎接近直线，这可能是因为速度过快，使包络面不再是一个凸多边形，所以凸包并不能准确代表包络面的形状。但我们大致可以看出等时线上点的大概位置。

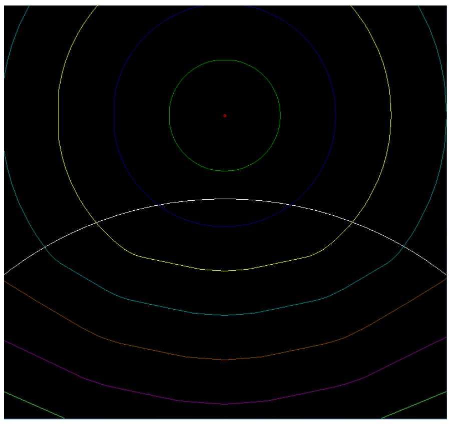

Fig 7

2.2 等时线的探究

若把速度边界改为正方形，把原点放在正方形内但不是中心的位置，我们又会得到如 Fig 8 所示的形状。在正方形外偏上方的点受速度改变影响相差无几，所以轨迹依然保持类似于一个圆形。但是偏下方的点由于边框的原因，轨迹发生扭曲。最后得到了类似于贝壳的一个形状。

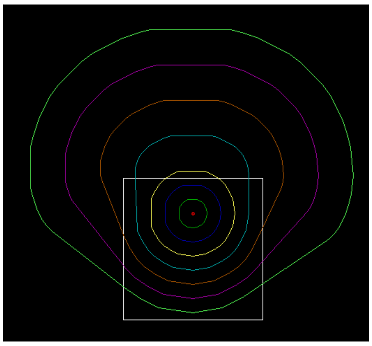

Fig 8

3　变速场情况

该情况可将变化的速度场视为一层层速度不同的匀速场，从而解决问题。可类比几何光学中变折射率问题。

四、　一般方法与思路

在本篇论文中，我们仅仅对均匀速度场下，两点之间的时距问题做出了初步的探讨，但实际问题一定更加复杂和多变。

我们将时距问题抽象为如下表述：

若给定空间上 2 个定点 A, B 以及质点在空间里运动条件 P，求解 $t_0(A,B)$ 以及 $S_0(A,B)$。

那么一般的，我们有如下解决思路：

1. 用代数的方法表示出某路程耗时时间随路程自变量的函数，用代数求解的方法得出结果
2. 用几何转化的方法，建立“点点-点线坐标系变换”，转化到时距坐标系下两点间距离问题。
3. 用等时线逼近法，绘制 A 点的等时线图，读出 $t_0(A,B)$
4. 用去曲线系逼近法，即确定最佳轨迹的范围，再逐步缩小范围，则边界

条件的极限位置就是最佳轨迹位置。

五、 探究思想方法回顾

在本篇论文中，我们对新事物的探究历程蕴含着我们在处理这个“时距”问题时所采用的思想方法。

1. 类比推理法：开始我们对 “时距”的概念缺少一个准确的定义。为了解决这个问题，我们仿照空间中距离的定义，给出了较为严谨定义。当我们研究曲线边界的时距问题时，借用惠更斯原理解释波的传递的方法，建立了“等时距线法”来研究 AB 间的时距问题。在探究最短轨迹的问题中，我们受洛伦兹变换的启发，采用了一种 “点点-点线坐标系变换”。而当我们研究在加速场中的时距问题时，我们将条件 P 与物理中光的变折射率传播的方式相类比，并做了深刻的讨论。
2. 转化化归法：将复杂的转化为简单的，将陌生的转化为熟知的，这是我们研究未知的常用手段。采用“点点-点线坐标系变换”，将较为抽象的时距问题转化到较为直观的距离问题，从而用几何方法给出了答案。
3. 从特殊到一般：当我们对于一般性的问题感到棘手，较难以解决时，我们往往会考虑特殊性的情形。这类思想方法，使得在包括所有一般性的特征的同时大大减小思维量和运算量。如当我们对“几何直观转化法”还不太明确时，我们先考虑 k=2，再考虑一般的 k，从而创立了该变换思想。
4. 近似逼近法：有时我们难以或者无法求得一些问题的精确解，但我们可以使用逼近法求得近似解，并保证一定的精度。用 excel 处理最小值问题，用 C++程序绘制等时距面，用曲线系逼近最佳曲线等。

六、 科学的哲思

海市蜃楼的如梦似幻，记录的，是光在不同折射率的空气中，找到抵达我们

瞳孔的最快的路的故事。

救人于湍急的河流中，争分夺秒间，若能迅速地找到这条最快的路，或许能挽救鲜活的生命。

科学的发现常常映射出一些哲理，在接触最速降线时，我们发现，两点之间最快到达的路线并不是笔直的一条，而是一条曲线。若是引申到人生路上的轨迹，也许总是横冲直撞，虽头破血流，但欲速不达，也许顺势发挥，借力而行，才能让自己更快向前。有时，失败了，害怕再一次出发，但是，从“最速降线”上不同位置出发，却总能在同一时间到达，生活不是慢半拍便无药可救，选对了路，便能自然抵达。

我们寻找的，便是寻找这样一条路的方法。与模型里的相比，生活的参量自然是复杂万变，但愿以这样的思想，时时刻刻修正自己的轨迹。这便是这个课题带来的一点小小启迪。

七、 参考文献

[1] 赵凯华，罗蔚茵.《新概念物理教程》 （光学）[M].高等教育出版社.2004,11.