Zadanie 1

Oto kilka początkowych potęg macierzy A policzonych w programie Mathematica:

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} A^2 = \begin{bmatrix} \lambda^2 & 2\lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda^2 & 2\lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^2 \end{bmatrix} A^3 = \begin{bmatrix} \lambda^3 & 3\lambda^2 & \lambda & 1 \\ 0 & \lambda^3 & 3\lambda^2 & \lambda \\ 0 & 0 & \lambda^3 & 3\lambda^2 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^3 \end{bmatrix} A^4 = \begin{bmatrix} \lambda^4 & 4\lambda^3 & 6\lambda^2 & 4\lambda \\ 0 & \lambda^4 & 4\lambda^3 & 6\lambda^2 \\ 0 & 0 & \lambda^4 & 4\lambda^3 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^4 \end{bmatrix}$$

Macierz A można zapisać w postaci $A = \lambda I + U$ gdzie I to macierz jednostkowa, a U to macierz zawierająca tylko 1 nad główną przekątną. Wtedy można zauważyć, że:

$$A^n = (\lambda I + U)^n = \binom{n}{0}\lambda I + \binom{n}{1}\lambda IU + \binom{n}{2}\lambda IU^2 + ... + \binom{n}{n-1}\lambda IU^{n-1} + \binom{n}{n}U^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\lambda I)^{n-k}U^k$$

Sprawdźmy kolejne potęgi macierzy U:

$$U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} U^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} U^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} U^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Macierze tego typu podniesione do potęgi m, gdzie m to liczba kolumn stają się macierzami zerowymi, więc w powyższym zbiorze pod uwagę można brać tylko m pierwszych wyrazów, ponieważ pozostałe to będą macierze zerowe i takie będziemy dodawać. Tutaj trzeba zwrócić uwagę, że nie zajdzie wzór:

$$(A + B)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(A)^{n-k}B^k$$

Wynika to z tego, że aby ten wzór zachodził to obie macierze musiałyby być przemienne, ponieważ korzystamy z tego, że $UI = IU$.

Zadanie 2

(a) Wykorzystaliśmy w tym celu funkcję Eigenvalues i dla wszystkich macierzy otrzymaliśmy {-1,-1,-1,-1,-1}, co oznacza, że wszystkie wielomiany charakterystyczne są takie same i $\lambda = -1$.

(b) Kolejne macierz będą podobne do następujących macierzy blokowych:

$$\mathrm{J}_A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} J_B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} J_C = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{J}_D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} J_E = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} J_F = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} J_G = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Liczba klatek Jordana w każdej z tych macierzy wynosi: J_A- 1, J_B- 2, J_C- 2, J_D- 3, J_E- 3, J_F- 4, J_G- 5

(c) Wymiar jądra przekształcenia kolejnych macierzy wynosi: J_A- 1, J_B- 2, J_C- 2, J_D- 3, J_E- 3, J_F- 4, J_G- 5

(d) Hipoteza: liczba klatek Jordana dla macierzy $X \in M(C)$ o jednej wartości własnej λ jest równa wartości dim(ker(X-λI)).Wiadomo, że dim(ker A) + dim(im A) = dim V, zatem do policzenia klatek Jordana można wykorzystać funkcję

$$5 - MatrixRank[X - \lambda IdentityMatrix[Length[X]]]$$

5 to dim V i jest to wartość dla każdej z rozpatrywanych macierzy. Od wymiaru przestrzeni odejmujemy wymiar obrazu i otrzymujemy wymiar jądra przekształcenia.

(e) Lemat: Macierze A i B są podobne $\Rightarrow A - \lambda I$ oraz $B - \lambda$I są podobne.
Dowód lematu: Załóżmy, że zachodzi $\exists_N A = NBN^{-1}$, tzn, że A i B są podobne.
Wystarczy pokazać, że

$$\exists_N A = NBN^{-1} \Rightarrow \exists_M (A - \lambda I) = M(B - \lambda I)M^{-1}$$

$$\exists_M (A - \lambda I) = M(B - \lambda I)M^{-1} \Leftrightarrow \exists_M (A - \lambda I) = (MB - \lambda M)M^{-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \exists_M (A - \lambda I) = MBM^{-1} - \lambda MM^{-1} \Leftrightarrow \exists_M (A - \lambda I) = MBM^{-1} - \lambda I$$

Z założenia możemy za M pdstawić N, co kończy dowód.

Dowód hipotezy e): Niech J to macierz w postaci Jordana podobna do X. Jeżeli od macierzy J odejmiemy na diagonali jej wartość własną (J - λI) otrzymamy dla każdej klatki jedną macierz zerową.

(np. dla J_3^3 mamy $K \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \lambda I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$).

Rozwiązując układ równań [J - $\lambda I|0$] dostajemy bazę o wymiarze równym liczbie kolumn zerowych w J-λI.

Z lematu oraz faktu, że każda macierz zespolona X jest podobna do pewnej macierzy w postaci Jordana wiemy, że X, J podobne $\Rightarrow X-\lambda$I, J - λI podobne.
Stąd wartości własne λ X i J są równe, tak samo jak wymiary odpowiadających tym wartościom wymiary podprzestrzeni własnych dimker(J-λI) = dimker(X-λI).

(f) Hipoteza z podpunktu (d) działa także dla macierzy $X \in M_n(C)$, ponieważ odejmowanie od macierzy Jordana J podobnej do X danej wartości własnej na diagonali spowoduje wyzerowanie się tylko pierwszych kolumn w klatkach z tą wartością własną. Dowód przebiega zatem analogicznie.

(g) Wymiary jąder przekształcenia przy kolejnych potęgach będą wyglądały następująco:

A: 1,2,3,4,5...
B: 2,3,4,5,5...
C: 2,4,5,5,5...
D: 3,4,5,5,5...
E: 3,5,5,5,5...
F: 4,5,5,5,5...
G: 5,5,5,5,5...
Wymiar jadra przekształcenia będzie taki jak liczba kolumn zerowych w macierzyb $(J - \lambda I)^n$, gdzie J jest macierzą w postaci Jordana podobną do macierzy początkowej. Po przekształceniu w pierwszej potędze będziemy mieć tyle kolumn zerowych ile było klatek Jordana. Z każdą kolejną potęgą każdy z "kwadratów" umiejscowionych tak jak początkowe klatki Jordana będzie zmniejszał liczbę kolumn niezerowych o 1, aż do potęgi równej rozmiarowi danej klatki. Tym samym dimker będzie zwiększał się z każdą potęgą o liczbę nowych kolumn zerowych. Zapisując o ile zmienia się dimker można wywnioskować ile było i jaki był rozmiar klatek Jordana na początku.
Dla przykładu: n = 1 dimker = 3, n = 2 dimker = 5, n = 3 dimker = 6, n = 4 dimker = 6. Można stąd wywnioskować, że to macierz 6x6 i początkowo były 3 klatki Jordana. Z pierwszej potęgi odczytujemy ile było klatek, a następnie obserwując zmianę dimker przekształcenia odczytujemy rozmiary klatek.

(h) Wartości własne macierzy H oraz K są jednakowe i wynoszą $\lambda = 2$
dimker(H-λI) = 2, dimker(H-$\lambda I)^2 = 4$, dimker(H-$\lambda I)^3 = 6$. Wynika z tego, że w przypadku macierzy H będą 2 klatki Jordana, każda o wielkości 3x3.
dimker(K-λI) = 3, dimker(K-$\lambda I)^2 = 4$, dimker(K-$\lambda I)^3 = 5$, dimker(K-$\lambda I)^4 = 6$ Wynika z tego, że w przypadku macierzy K będą 3 klatki Jordana, dwie o rozmiarze 1x1 oraz jedna o rozmiarze 4x4.

(i) Wartości własne macierzy M to $\lambda = 2$ oraz $\lambda = 5$. Takie same wartości własne są dla macierzy N. Otrzymujemy:

$dim(ker(J(M) - 5I)) = 2$, mamy więc 2 klatki Jordana dla wartości własnej $\lambda = 5$
$dim(ker(J(M) - 5I)^3) = 3$, ...

$dim(ker(J(M) - 2I)) = 1$, dostajemy 1 klatkę...
$dim(ker(J(M) - 2I)^2) = 2$,
$dim(ker(J(M) - 2I)^3) = 3$, ...o rozmiarze 3x3
$dim(ker(J(M) - 2I)^4) = 3$, ...

Podsumowując: z faktu, że $dim(ker(J(N) - 5I)$ wynosi 3 otrzymujemy, że J(N) ma trzy klatki Jordana dla $\lambda = 5$, oraz z tego, że $dim(ker(J(M) - 5I)$ stabilizuje się przy n = 2, największa klatka ma rozmiar 2x2 i jest taka jedna. Podobnie dla $\lambda = 2$: $dim(ker(J(N) - 5I)$ wynosi 1, dostajemy więc jedną klatkę; wymiar jądra stabilizuje się dla n = 2, więc ta klatka ma rozmiar 2x2. Będziemy więc mieć 4 klatki, dwie o wymiarach 1x1 oraz dwie o wymiarach 2x2.

Poniżej widać, że rzeczywiście tak to wyglada.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 9/2 & 4 & -5 \\ 0 & -1 & 2 & 3/2 & 4 & 13 \\ 1 & 1 & -3 & 3/2 & 4 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 6 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 6 & 8 & 12 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & 2 & -4 & 3 \\ -13 & -19 & -2 & 4 & -3 & 18 \\ 1/6 & 5/6 & 0 & -2/3 & 2/3 & -5/6 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ -1/4 & -1/4 & 0 & 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}$$

$dim(ker(J(N) - 5I)) = 3$, dostajemy 3 klatki
$dim(ker(J(N) - 5I)^2) = 4$, największa o rozmiarze 2x2
$dim(ker(J(N) - 5I)^3) = 4$, ...

$dim(ker(J(N) - 2I)) = 1$, dostajemy 1 klatkę, ...
$dim(ker(J(N) - 2I)^2) = 2$, ... o rozmiarze 2x2.
$dim(ker(J(N) - 2I)^3) = 2$, ...

Podsumowując: z faktu, że $dim(ker(J(N) - 5I)$ wynosi 3 otrzymujemy, że J(N) ma trzy klatki Jordana dla $\lambda = 5$, oraz z tego, że $dim(ker(J(M) - 5I)$ stabilizuje się przy n = 2, największa klatka ma rozmiar 2x2 i jest taka jedna. Podobnie dla $\lambda = 2$: $dim(ker(J(N) - 5I)$ wynosi 1, dostajemy więc jedną klatkę; wymiar jądra stabilizuje się dla n = 2, więc ta klatka ma rozmiar 2x2. Będziemy więc mieć 4 klatki, dwie o wymiarach 1x1 oraz dwie o wymiarach 2x2.
Poniżej widać, że się zgadza:)

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -148/3 & 37 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 148/3 & 74 & 1 & 33 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 37 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -148/3 & 37 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 111 & 2 & 37 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & 2 & -4 & 3 \\ -13 & -19 & -2 & 4 & -3 & 18 \\ 4/37 & 3/37 & 0 & 1/37 & -1/37 & -3/37 \\ 28/111 & 7/37 & -1/37 & 4/111 & -4/111 & -7/37 \\ -4 & -3 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Zadanie 3

Oznaczmy macierz przekształcenia jako N:

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & -3 & -4 \\ 1 & 1 & -3 & 2 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Oraz macierz H w postaci blokowej Jordana jako J(H)

$$J(H) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Aby otrzymać z powrotem macierz H wykonujemy mnożenie

$$N \cdot J(H) \cdot N^{-}1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & -3 & -4 \\ 1 & 1 & -3 & 2 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -15 & -19 & -2 & 4 & -1 & 18 \\ -7 & -10 & -1 & 2 & -2 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -17 & -26 & -3 & 6 & -3 & 25 \\ 4 & 9 & 1 & -2, & 2 & -7 \\ -19 & -28 & -1 & 6 & -5 & 27 \\ -1 & -2 & 0 & 2 & -1 & 2 \\ -20 & -27 & -3 & 6 & -1 & 2 \\ -15 & -19 & -2 & 4 & -1 & 20 \end{bmatrix} = H$$

Zadanie 4

1°

$$(\forall A \in M_n())(tr(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n$$

Dowód: Z tw. Jordana wiemy, że każdą macierz $A \in M_n()$ możemy sprowadzić do postaci Jordana - każda macierz A jast podobna do macierzy w postaci Jordana, która na swojej diagonali swoje wartości własne, tzn.

$$(\exists N)(A = NJN^-1),$$

gdzie J jest macierzą w postaci Jordana.
Ślady macierzy podobnych są sobie równe.
(Ponieważ trA = tr((NJ)N$^-$1.) $= tr((N^-1N)J) = trJ$)
Std

$$trJ = \sum_{i=1}^{n} a_i^i = \lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n = trA.$$

2°

$$(\forall A \in M_n())(det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot ... \cdot \lambda_n$$

Dowód:

$$\chi_A(x) = det(xI - A)$$
$$\chi_A(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2)...(x - \lambda_n)$$
$$\chi_A(0) = det(-A) = (-\lambda_1)(-\lambda_2)...(-\lambda_n) = (-1)^n \lambda^1 \cdot \lambda_2 \cdot ... \cdot \lambda_n$$

$$|-A| =$$
$$(-1)^n detA = (-1)^n \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot ... \cdot \lambda_n$$
$$detA = \cdot\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot ... \cdot \lambda_n$$

Zadanie 5

W zadaniu tym można wykorzystać wzór z zadania 1. Najpierw trzeba jednak macierz C przedstawić w postaci:

$$C = (NJN^{-1})^{2024} = NJ^{2024}N^{-1}$$

Korzystając z funkcji JordanDecomposition otrzymaliśmy:

$$C^{2024} = \begin{bmatrix} -9 & 1 & 2 & -5 & 6 \\ -2 & -1 & 0 & -2 & 2 \\ -5 & 1 & 1 & -4 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -8 & 1 & 2 & -5 & 5 \end{bmatrix}^{2024} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 7 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^{2024} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -8 & 1 & 2 & -5 & 6 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^{2024} =$$

$$\left(\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right)^{2024} = \sum_{k=0}^{2024} \binom{n}{k} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^{2024-k} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{k}$$

W tym przypadku wystarczy wziąć 5 pierwszych wyrazów tej sumy, ponieważ wymiar macierzy to 5x5. Ta suma wyniesie:

$$J^{2024} = \begin{bmatrix} 1 & -2024 & 2047276 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2024 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2024 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Zatem:

$$C^{2024} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 7 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2024 & 2047276 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2024 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2024 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -8 & 1 & 2 & -5 & 6 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 2 & -4 & 3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -2031083 & -2024 & -4048 & 10120 & 2035132 \\ -4090504 & 1 & 0 & 4048 & 4090504 \\ 10120 & -2024 & -4047 & 8096 & -6072 \\ -2024 & 0 & 0 & 1 & 2024 \\ -2031084 & -2024 & -4048 & 10120 & 2035133 \end{bmatrix}$$

Zadanie 6

a)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

c) - Nie ma takiej macierzy, ponieważ dim ker A^k stabilizuje się przy k=4. To znaczy, że macierz jest o wymiarach 4x4, a zatem najpóźniej przy k=4 wymiar się ustabilizuje. Widzimy natomiast, że staje się to dopiero, przy k=5. Nie istnieje więc taki przykład.

d)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e) Nie ma takiej macierzy, ponieważ jedynka w układzie powstaje tylko, gdy w układzie o potędze niżej na "ukośnej" dwie jedynki sąsiadują ze sobą. W naszym przypadku przy potędze 2 musimy mieć 3 jedynki, a w potędze 3 chcemy dwie jedynki, co implikuje, że 3 jedynki w układzie potęgi 2 musiały być obok siebie na skos, tym samym wygenerowały one 2 jedynki będące obok siebie na skos, a te przy potędze 4 wygenerują 1 jedynkę, a oczekiwane jest, aby nie było już jedynek. Zatem taki układ nie istnieje.