Wydział MINI	Dzień/godz Środa 14.15 Data 12.03.2025		Nr zespołu 4
Nazwisko i Imię 1. Przeździecka Alicja 2. Skoczylas Katarzyna 3. Zieliński Miłosz	Ocena z przygotowania	Ocena z sprawozdania	Ocena końcowa
Prowadzący		Podpis	

Wstęp

Celem laboratoriów było przeprowadzenie pomiarów i obliczenie odpowiednich niepewności odnoszących się zarówno do pomiarów, jak i wielkości wyliczonych na podstawie zebranych danych. W pierwszej części sprawozdania skupiliśmy się na pomiarach wymiarów prostopadłościennej blaszki i nieregularnego przedmiotu oraz obliczeniu ich objętości, a w drugiej natężenia i napięcia układów z opornikami w celu wyznaczenia charakterystyki prądowo-napięciowej. Do pomiarów wielkości fizycznych użyliśmy śruby mikrometrycznej, suwmiarki, amperomierza cyfrowego i woltomierza analogowego.

Matematyczny opis niepewności

Biorąc pod uwagę obecność niepewności we wszystkich pomiarach, będziemy rozważać dwa typy niepewności: typu A i typu B. Pierwszą z nich będziemy stosować tylko w przypadku pomiarów wielokrotnych. Wyraża się ona wzorem:

$$u_A(\bar{x}) = \sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n \cdot (n-1)}}, \tag{1}$$

gdzie x_i to kolejne pomiary wielkość x, $\bar{x}$ to średnia tych pomairów, a n to ilość pomiarów x.
Natomiast niepewność typu B będzie wyliczana dla każdego pomiaru, ponieważ składa się ona z niepewności wzorcowania Δx (na przykład dla suwmiarki jest to jedna podziałka na noniuszu) oraz niepewności eksperymentatora Δx_E. Wzór niepewności typu B wygląda następująco:

$$u_B(x) = \sqrt{\frac{(\Delta x)^2}{3} + \frac{(\Delta x_E)^2}{3}}, \tag{2}$$

Całkowitą niepewność wyraża się wzorem:

$$u(x) = \sqrt{(u_A(x)^2 + u_B(x)^2} \tag{3}$$

1 Ćwiczenie 1

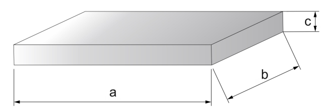
1.1 Cel

Celem pierwszego ćwiczenia jest obliczenie objętości dwóch obiektów: prostapadłościennej blaszki i nieregularnego przedmiotu oraz niepewności wyznaczonych objętości.
W tym celu wykorzystamy wzór na objętość prostopadościanu o wymiarach a, b, c: $V = a \cdot b \cdot c$ oraz skorzystamy z faktu, że objętość nieregularnego przedmiotu z Rysunku 2 można policzyć jako różnicę objętości większego i mniejszego walca: $V = V_d - V_m$. Dodatkowo do wyznaczenia niepewności wyliczonych za pomocą powyższych wzorów objętości będziemy korzystać z metody propagacji niepewności. Wzór ten zależy od ilości zmiennych występujących we wzorze, ale jeśli założymy, że objętość jest funkcją dwóch zmiennych $V = f(a,b)$, to niepewność wyniku będzie następującej postaci:

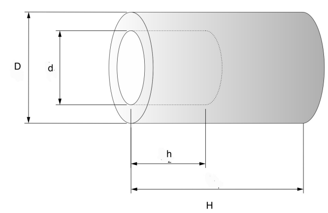
$$u(V) = \sqrt{\left(\frac{\partial f(a,b)}{\partial a} \cdot u(a)\right)^2 + \left(\frac{\partial f(a,b)}{\partial b} \cdot u(b)\right)^2} \tag{4}$$

1.2 Przedmioty i metoda pomiarowa

Pierwszym mierzonym obiektem jest prostopadłościenna blaszka o wymiarach a, b, c zaznaczonych na Rysunku 1. Pomiar wielkości a i b został wykonany pięciokrotnie za pomocą suwmiarki, natomiast wielkość c została zmierzona 10 razy przy pomocy śruby mikrometrycznej. Drugi przedmiot o nieregularnych kształtach składa się z większego walca, który został częściowo wydrążony przez walec o mniejszej średnicy i wysokości. Przedmiot i jego wymiary są zaznaczone na Rysunku 2. Każdy z pomiarów był wykonywany jednokrotnie i przy użyciu suwmiarki.



Rysunek 1: Schemat blaszki.[1]



Rysunek 2: Schemat przedmiotu o nieregularnych kształtach.[1]

Urządzenia wykorzystane do pomiarów były takie same w obu przypadkach i ich niepewności wynosiły kolejno: dla suwmiarki: 0.02 mm i dla śruby mikrometrycznej 0.01 mm.

1.3 Wyniki pomiarów

Tabele 1 i 2 przedstawiają pomiary odpowiednich wielkości zaznaczonych na Rysunku 1 dla blaszki i Rysunku 2 dla nieregularnego przedmiotu.

Nr pomiaru	a [mm]	b [mm]	c [mm]
1	40.00	29.52	3.51
2	39.90	29.38	3.53
3	39.84	29.46	3.57
4	39.82	29.42	3.52
5	39.92	29.40	3.56
6	-	-	3.59
7	-	-	3.58
8	-	-	3.52
9	-	-	3.52
10	-	-	3.53

Tabela 1: Tabela zawierająca pomiary wielkości obiektu pierwszego.

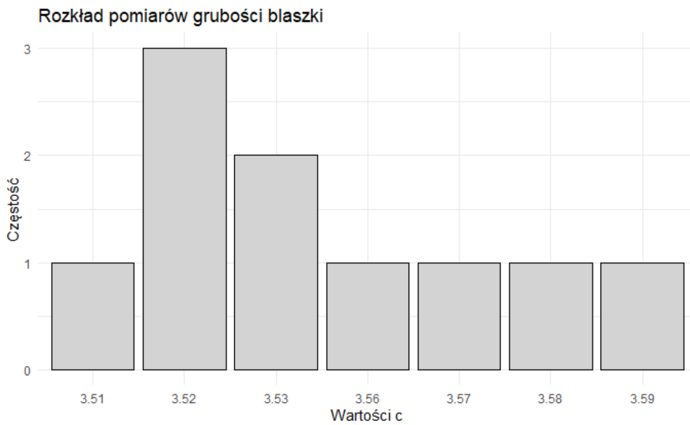
Walec	Średnica [mm]	Wysokość [mm]
Zewnętrzny	30.12	40.00
Wewnętrzny	11.84	20.40

Tabela 2: Tabela zawierająca pomiary wielkości obiektu drugiego.

Ponadto wymiary wielokrotne wymagają wyznaczenia ich średnich.

$$\bar{a} = \frac{\sum_{i=1}^{5} a_i}{5} = 39.896 \text{ mm}, \ \bar{b} = \frac{\sum_{i=1}^{5} b_i}{5} = 29.436 \text{ mm}, \ \bar{c} = \frac{\sum_{i=1}^{10} c_i}{10} = 3.543 \text{ mm} \tag{5}$$

Spójrzmy również na rozkład pomiarów grubości blaszki (czyli wymiaru c z Rysunku 1).



Rysunek 3: Rozkład pomiaru grubości płytki c.

1.4 Opracowanie pomiarów dla blaszki

Szukana objętość blaszki wyraża się wzorem:

$$V = \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c}, \tag{6}$$

gdzie $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ to średnie (5) wyliczone powyżej

Podstawiając średnie do wzoru dostajemy wynik:

$$V = 39.896 \cdot 29.436 \cdot 3.543 = 4160.824 \text{ mm}^3. \tag{7}$$

Pomiary blaszki były wykonywane wielokrotnie z tego powodu wszytkie pomiary są obarczone niepewnościami typu A i B. Niepewności eksperymentatora są rzędu jednej podziałki dla każdego pomiaru. Niepewności typu B są takie same dla wielkości a i b oraz wynoszą:

$$u_B(\bar{a}) = u_B(\bar{b}) = \sqrt{\frac{\Delta a^2}{3} + \frac{\Delta a_E}{3}} = \sqrt{\frac{\Delta b^2}{3} + \frac{\Delta b_E}{3}} = 0.01632993 \text{ mm}, \tag{8}$$

gdzie Δa = Δb = 0.02 mm oraz $\Delta a_e = \Delta b_e = 0.02$ mm

Niepewność typu B dla wielkości c wynosi:

$$u_B(\bar{c}) = \sqrt{\frac{\Delta c^2}{3} + \frac{\Delta c_e}{3}} = 0.008164966 \text{ mm}, \tag{9}$$

gdzie Δc = $\Delta c_e = 0.01$ mm

Niepewności typu A są różne w każdym przpadku, ponieważ zależą od konkretnych pomiarów i wynoszą kolejno:

$$u_A(\bar{a}) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{5} (a_i - \bar{a})^2}{5 \cdot (5-1)}} = 0.03187475 \ mm \tag{10}$$

$$u_A(\bar{b}) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{5} (b_i - \bar{b})^2}{5 \cdot (5-1)}} = 0.02481935 \ mm \tag{11}$$

$$u_A(\bar{c}) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{5}(c_i - \bar{c})^2}{10 \cdot (10-1)}} = 0.009195409\ mm \tag{12}$$

Zestawiając powyższe wartości otrzymujemy niepewności całkowite dla każdej zmierzonej wielkości:

$$u_{cakowite}(\bar{a}) = \sqrt{u_A^2(\bar{a}) + u_B^2(\bar{a})} = 0.03581434\ mm \tag{13}$$

$$u_{cakowite}(\bar{b}) = \sqrt{u_A^2(\bar{b}) + u_B^2(\bar{b})} = 0.02970971\ mm \tag{14}$$

$$u_{cakowite}(\bar{c}) = \sqrt{u_A^2(\bar{c}) + u_B^2(\bar{c})} = 0.01229724\ mm \tag{15}$$

Zatem podsumowując z niepewnościami wymiary wynoszą kolejno:
$a = 39.896(36)mm,\ b = 29.436(30)mm,\ c = 3.543(12)mm.$
Przechodząc do interesującej nas niepewności wartości objętości wyliczonej za pomocą wzoru (7) korzystamy z metody propagacji niepewności, której wzór w tym przypadku jest postaci:

$$u(V) = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial \bar{a}} \cdot u(\bar{a})\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial \bar{b}} \cdot u(\bar{b})\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial \bar{c}} \cdot u(\bar{c})\right)^2}, \tag{16}$$

Po policzeniu pochodnych otrzymujemy postać:

$$u(V) = \sqrt{(\bar{b} \cdot \bar{c} \cdot\ u(\bar{a}))^2 + (\bar{a} \cdot \bar{c} \cdot\ u(\bar{b}))^2 + (\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot\ u(\bar{c}))^2} \tag{17}$$

i stąd po wstawieniu danych otrzymujemy niepewność $u(V) = 15$ mm^3. Ostateczna objętość wynosi zatem$V = 4160(15)\ [mm]^3$.

1.5 Opracowanie pomiarów nieregularnego przedmiotu

Szukana objętość przedmiotu z Rysunku 2 to różnica objętości większego i mniejszego walca, czyli $V = V_d - V_m$, gdzie V_d, V_m to odpowiednie objętości.
Policzmy niepewności pomiarów. Pomiary były wykonywane jednokrotnie za pomocą suwmiarki o niepewności 0.02 mm i z tego powodu każda z wielkości ma tylko niepewność typu B równą niepewności całkowitej. Ponadto jest ona taka sama dla wysokości i średnicy obu obiektów.

$$u_{cakowite}(D) = \dots = \sqrt{\frac{\Delta D^2}{3} + \frac{\Delta D_e}{3}} = \dots\ \text{,gdzie } \Delta D = \Delta D_e = 0.02 \text{ mm} \tag{18}$$

Stąd otrzymujemy, że niepewność całkowita każdej wielkości wynosi 0.01632993 mm.
Policzmy objętości.

$$V_d = \pi \cdot (\frac{D}{2})^2 \cdot H,\ \text{gdzie D to średnica podstawy dużego walca, a H to jego wysokość} \tag{19}$$

$$V_m = \pi \cdot (\frac{d}{2})^2 \cdot h,\ \text{gdzie d to średnica podstawy małego walca, a h to jego wysokość} \tag{20}$$

Korzystając z wartości z Tabeli 2 otrzymujemy: $V_d = 28500.981\ mm^3$, $V_m = 2246.071\ mm^3$ oraz finalnie objętość interesującego nas przedmiotu $V = 26254.910\ mm^3$.
Pozostało wyliczyć niepewności wartości objętości oraz niepewność wynikową. W tym przypadku korzystamy z metody propagacji opisanej wzorem (4), który w tym przypadku jest postaci:

$$u(V_d) = \sqrt{\left(\frac{\partial V_d}{\partial D} \cdot u(D)\right)^2 + \left(\frac{\partial V_d}{\partial H} \cdot u(H)\right)^2} \tag{21}$$

$$u(V_d) = \sqrt{(\frac{\pi \cdot D \cdot H}{2} \cdot u(D))^2 + (\frac{\pi \cdot D^2}{4} \cdot u(H))^2} \tag{22}$$

Po podstawieniu otrzymujemy: $u(V_d) = 31.092$ mm^3.
Analogicznie postępujemy w przypadku objętości mniejszego walca V_m:

$$u(V_m) = \sqrt{(\frac{\pi \cdot d \cdot h}{2} \cdot u(d))^2 + (\frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot u(h))^2} \tag{23}$$

i po podstawieniu otrzymujemy: $u(V_m) = 6.339$mm^3.
Całkowita niepewność objetości V wyliczona za pomocą wzoru $u(V) = \sqrt{u(V_d)^2 + u(V_m)^2}$ wynosi $u(V) = 31.732$mm^3. Ostateczny wynik po zaokrągleniu niedokładności do dwóch miejsc znaczących wynosi: $V = 26254(31)\ mm^3$.

1.6 Wyniki

Na podstawie opracowanych powyżej wyników i niepewności pomiarowych objętości badanych przedmiotów wynoszą odpowiednio:
$V_{blaszki} = 4160(15)\ mm^3$
$V_{wycietego\ walca} = 26254(31)\ mm^3$
Mniejsza niepewność wyniku w przypadku blaszki może wynikać z dwukrotnie większej dokładności pomiaru śruby mikrometrycznej od suwmiarki, którą były wykonane wszystkie pomiary drugiego przedmiotu.

2 Ćwiczenie 2

2.1 Cel

Celem ćwiczenia jest wyznaczenie wartości oporów czterech oporników. Dla oporników R1, R2 i R3 szacujemy złożone niepewności standardowe metodą propagacji niepewności. Wartości ich oporów wyznaczamy ze wzoru

$$R = \frac{U}{I}, \tag{24}$$

który jest konsekwencją prawa Ohma.
W przypadku opornika R4 zastosowaliśmy opisaną poniżej metodę najmniejszych kwadratów (MNK). Wiemy, że punkty pomiarowe są powiązane zależnością funkcyjną:

$$y = ax_i + b \tag{25}$$

Metoda najmniejszych kwadratów znajduje najbardziej prawdopodobne wartości parametrów, dla których suma kwadratów odchyleń będzie najmniejsza[2]:

$$\sum_{i=q}^{N} [y_i - (ax_i + b)]^2 = \min \tag{26}$$

Niezależne pomiary natężenia i napięcia (I_i, U_i) wykonano na tym samym oporniku. Punkty pomiarowe są powiązane zależnością funkcyjną:

$$y = f(x, a) = ax, \quad \text{bo} \quad U = RI \tag{27}$$

Można zatem zastosować MNK. Wartość współczynnika kierunkowego (w naszym przypadku oporu) można wyliczyć ze wzoru[2]:

$$a = \frac{N \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{N} x_i \sum_{i=1}^{N} y_i}{N \sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2}, \tag{28}$$

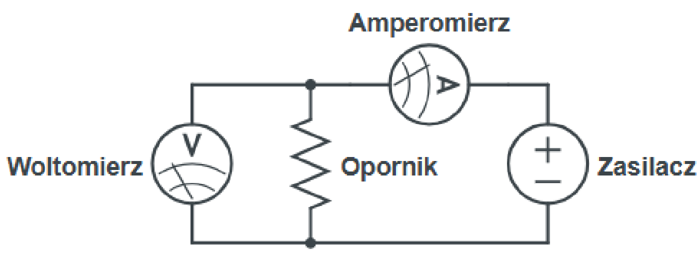
gdzie N to liczba wykonancych pomiarów, x_i i y_i to kolejne zmierzone wartości natężenia i napięcia. Wzór ten stosowany jest do zależności typu $y = ax + b$, jednak zastosowaliśmy go, gdyż dawało to bezpieczniejsze przedziały niepewności. Do wyliczenia wartości współczynnika b użyjemy wzoru[2]:

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^2 \sum_{i=1}^{N} y_i - \sum_{i=1}^{N} x_i \sum_{i=1}^{N} x_i y_i}{N \sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i \right)^2} \tag{29}$$

Będzie on potrzebny przy wyliczaniu niepewności wartości a.

2.2 Układ pomiarowy

Wartości natężenia oraz napięcia na opornikach R1, R2 i R3 były mierzone jednokrotnie. W przypadku obwodu z opornikiem R4 pomiar powtórzyliśmy piętnastokrotnie, zmieniając wartość napięcia na zasilaczu.
Urządzenia wykorzystane do pomiarów były takie same w obu przypadkach - analogowy woltomierz i cyfrowy amperomierz. Błędy pomiarów tych urządzeń zależą od ich klasy, zakresu oraz w przypadku amperomierza także odczytanej wartości. Dokładne informacje podamy w sekcji opracowywania pomiarów.
Schemat układu przedstawiony poniżej na Rysunku 4.



Rysunek 4: Schemat układu pomiarowego.

2.3 Wyniki pomiarów

Poniżej znajdują się tabele pomiarów dla wspomnianych wcześniej oporników R1, R2, R3 - Tabela 3 oraz R4 - Tabela 4.

Nr Opornika	Napięcie [V]	Natężenie [mA]
1	3,8	67,7
2	4,4	45,5
3	4,2	43,2

Tabela 3: Wyniki pomiarów napięcia i natężenia obwodu z opornikami R1, R2 i R3.

Nr pomiaru	Napięcie [V]	Natężenie [mA]
1	2,4	6,48
2	2,6	6,91
3	3,0	7,80
4	3,4	8,90
5	3,6	9,87
6	4,2	11,08
7	4,8	12,58
8	5,0	13,37
9	5,5	14,68
10	5,8	15,46
11	6,2	16,49
12	6,3	16,76
13	6,8	18,13
14	7,0	18,73
15	7,2	19,04

Tabela 4: Wyniki pomiarów napięcia i natężenia obwodu z opornikiem R4.

2.4 Opracowanie pomiarów oraz analiza niepewności pomiarów

Do pomiarów wykorzystaliśmy:

- miernik uniwersalny UM-112B (jako woltomierz) o klasie 1 na zakresie 10V (w każdym pomiarze)
- cyfrowy miernik uniwersalny M-3800 (jako amperomierz) o następujących klasach na wykorzystywanych zakresach:
  - dla R1, R2, R3 zakres 200 mA: ± 1,2 % rdg ± 1 dgt
  - dla R4 zakres 20 mA: ± 0,5% rdg ± 1 dgt

2.4.1 Opracowanie pomiarów dla R1, R2, R3

Pomiary były wykonywane jednokrotnie, dlatego są one obarczone tylko niepewnościami typu B.
W przypadku amperomierza cyfrowego zależy ona zarówno od zakresu jak i od wartości zmierzonej. Wyraża się ona wzorem:

$$u_B(I) = \frac{\Delta x}{\sqrt{3}} = \frac{c_1 x + c_2 z}{\sqrt{3}}, \tag{30}$$

gdzie x i z to wartość zmierzona i zakres pomiarowy, a c_1 i c_2 to parametry zależne od klasy – w naszym przypadku $c_1 = 1,2\%$ oraz $c_2 = 0,1mA$.
W przypadku woltomierza analogowego nie zależy ona od wartości zmierzonej, a jedynie od klasy i zakresu. Niepewność wzorcowania wyraża się wzorem:

$$\Delta U = \frac{\text{klasa} \cdot \text{zakres}}{100} \tag{31}$$

Musimy także pamiętać o niepewności eksperymentatora, która jest rzędu jednej podziałki, czyli 0,2 V. Stąd dla napięcia niepewność typu B dla każdego z oporników wynosi:

$$u_B(U) = \sqrt{\frac{\Delta U^2}{3} + \frac{\Delta U_e^2}{3}} = 0,13 \text{ V}, \tag{32}$$

gdzie ΔU $= 0,058$ V oraz $\Delta U_e = 0,2$ V

Do obliczenia oporów skorzystamy z wzoru (24).
Szacujemy złożone niepewności standardowe metodą propagacji niepewności. Liczona jest ona ze wzoru:

$$u(R) = \sqrt{\left(\frac{\partial R}{\partial U} \cdot u(_U)\right)^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial I} \cdot u(_I)\right)^2} \tag{33}$$

Po rozwiązaniu pochodnych otrzymujemy postać:

$$u(R) = \sqrt{(\frac{1}{I} \cdot u_{(U)})^2 + (\frac{-U}{I^2} \cdot u_{(I)})^2} \tag{34}$$

Podstawiając do wzoru odpowiednie wartości dostajemy następujące wyniki wszystkich opisanych powyżej niepewności przedstawione w Tabeli 5.

Nr Opornika	Napięcie [V] (niepewność)	Natężenie [mA] (niepewność)	Opór [Ω] (niepewność)
1	3,80(13)	67,70(53)	56,13(2,0)
2	4,40(13)	45,50(37)	96,7(2,9)
3	4,20(13)	43,20(36)	97,2(3,1)

Tabela 5: Obliczone wartości oporów R1, R2 i R3 oraz niepewności wszystkich wielkości.

2.4.2 Opracowanie pomiarów dla R4

Częścią tego zadania było porównanie wyników niepewności losowego pojedynczego pomiaru z metodą najmniejszych kwadratów. W pierwszym etapie wyliczyliśmy niepewność dla pomiaru numer 9 w taki sam sposób jak w części 2.4.1, czyli biorąc pod uwagę tylko niepewność typu B. Niepewność w przypadku amperomierza cyfrowego wyraża się wzorem:

$$u_B(I) = \frac{\Delta x}{\sqrt{3}} = \frac{c_1 x + c_2 z}{\sqrt{3}}, \tag{35}$$

gdzie x i z to wartość zmierzona i zakres pomiarowy, a c_1 i c_2 to parametry zależne od klasy – w naszym przypadku $c_1 = 0,5\%$ oraz $c_2 = 0,01\ mA$. Zatem

$$u_B(I_9) = 0,048\ mA \tag{36}$$

W przypadku woltomierza analogowego niepewność typu B wyniesie tyle samo co w obliczeniach 2.4.1, czyli:

$$u_B(U) = 0,13\ V \tag{37}$$

Wartość oporu dla pomiaru 9 można policzyć korzystając ze wzoru (24):

$$R_9 = \frac{U_9}{I_9} = 374,7\ \Omega \tag{38}$$

Wartość niepewności oporu wyliczymy korzystając ze wzoru (33)

$$u(R) = \sqrt{(\frac{1}{I_9} \cdot u_{(U)})^2 + (\frac{-U_9}{I_9^2} \cdot u_{(I)})^2} = 8,9\ \Omega \tag{39}$$

Do obliczenia wartości oporu metodą najmniejszych kwadratów korzystamy ze wzoru (28).

$$R = \frac{15 \sum_{i=1}^{15} I_i U_i - \sum_{i=1}^{15} I_i \sum_{i=1}^{15} U_i}{15 \sum_{i=1}^{15} I_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{15} I_i\right)^2} = 375,1\ \Omega, \tag{40}$$

gdzie I_i oraz U_i to kolejne zmierzone wartości natężenia i napięcia

Aby wyliczyć błąd tego przybliżenia należy policzyć jeszcze współczynnik b. Teoretycznie powinien wynosić on zero, jednak przy naszych obliczeniach tyle on nie wynosi, dlatego go uwzględniamy. Podstawiając do wzoru (29):

$$b = \frac{\sum\limits_{i=1}^{15} I_i^2 \sum\limits_{i=1}^{15} U_i - \sum\limits_{i=1}^{15} I_i \sum\limits_{i=1}^{15} I_i U_i}{15 \sum\limits_{i=1}^{15} I_i^2 - \left(\sum\limits_{i=1}^{15} I_i\right)^2} = 0,01\ \Omega \tag{41}$$

Wzór na niepewność wartości współczynnika a (oporu)5:

$$s_a = \sqrt{\frac{\frac{N}{N-2}\sum_{i=1}^{N}\left(y_i - \bar{a}x_i - \bar{b}\right)^2}{N\sum_{i=1}^{N}x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N}x_i\right)^2}} \tag{42}$$

W naszym przypadku:

$$s_a = u(R) = \sqrt{\frac{\frac{15}{13}\sum_{i=1}^{15}\left(U_i - RI_i - b\right)^2}{15\sum_{i=1}^{15}I_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{15}I_i\right)^2}} = 3,0\ \Omega \tag{43}$$

2.5 Wyniki

Na podstawie opracowanych powyżej wyników i niepewności pomiarowych opory badanych oporników wynoszą odpowiednio:

$$R_1 = 56,13(2,0)\ \Omega$$

$$R_2 = 96,7(2,9)\ \Omega$$

$$R_3 = 97,2(3,1)\ \Omega$$

$$R_4 = 374,7(8,9)\ \Omega$$

Dla pojedyczego pomiaru.

$$R_4 = 375,1(3,0)\ \Omega$$

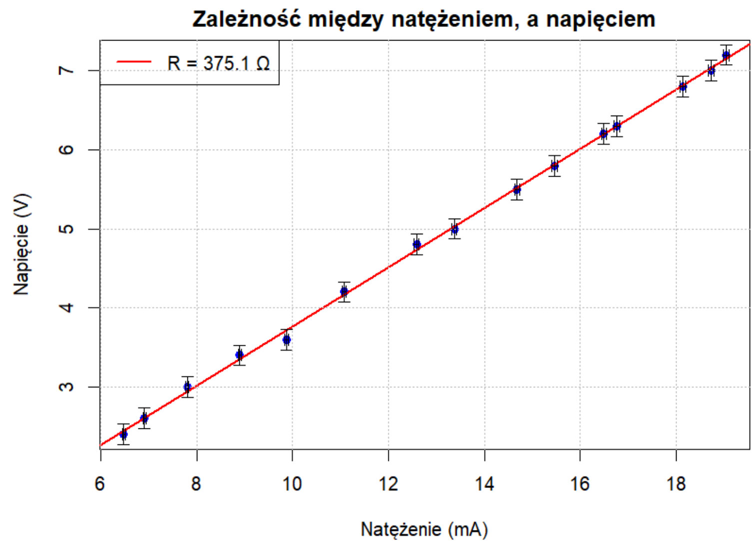
Z wykorzystaniem MNK.

Można zobaczyć, iż w przypadku metody najmniejszych kwadratów błąd jest prawie 3 razy mniejszy niż błąd dla pojedynczego pomiaru numer 9. Poniżej znajduje się tabela zawierająca wyniki wszystkich pomiarów natężenia i napięcia, jednak zawierająca również wyliczone niepewności pomiarowe dla każdego pojedynczego pomiaru.

Nr pomiaru	Napięcie [V] (niepewnosc)	Natężenie [mA] (niepewność)
1	2,40(13)	6,48(7)
2	2,60(13)	6,91(8)
3	3,00(13)	7,80(9)
4	3,40(13)	8,90(11)
5	3,60(13)	9,87(12)
6	4,20(13)	11,08(13)
7	4,80(13)	12,58(15)
8	5,00(13)	13,37(16)
9	5,50(13)	14,68(18)
10	5,80(13)	15,46(19)
11	6,20(13)	16,49(20)
12	6,30(13)	16,76(20)
13	6,80(13)	18,13(22)
14	7,00(13)	18,73(22)
15	7,20(13)	19,04(23)

Tabela 6: Wyniki pomiarów napięcia i natężenia obwodu z opornikiem R4.

Wyniki w formie graficznej, wykonane przy pomocy języka R, możemy zobaczyć na Rysunku 5.



Rysunek 5: Uzyskane pomiary opornika R4 wraz z niepewnościami.

Podsumowanie

Podsumowując, celem tych ćwiczeń było przeprowadzenie pomiarów różnych wielkości fizycznych i wyznaczenie niepewności pomiarowych. Udało nam się obliczyć objętości blaszki i nieregularnego przedmiotu oraz wyznaczyć opory czterech oporników.

Literatura

[1] Autor nieznany. cw 1a pomiar wielkości geometrycznych. *Centralne Laboratorium Fizyki.*

[2] Autor nieznany. Wykład wstępny. *Centralne Laboratorium Fizyki.*

Wkład poszczególnych osób w wykonanie ćwiczenia:

1. Katarzyna Skoczylas: opracowanie wyników dla oporników R1, R2 i R3
2. Alicja Przeździecka: opracowanie wyników dla blaszki i walca
3. Miłosz Zieliński: opracowanie wyników dla opornika R4