

Wydział MINI	Dzień/godz Data	Środa 14.15 9.04.2025r.	Nr zespołu 4
Nazwisko i Imię 1. Przeździecka Alicja 2. Skoczyła Katarzyna 3. Zieliński Miłosz	Ocena z przygotowania	Ocena z sprawozdania	Ocena końcowa
Prowadzący		Podpis	

Wyznaczenie $\frac{C_p}{C_v}$ dla powietrza metodą rezonansu akustycznego

1 Cel ćwiczenia

Celem tego ćwiczenia było wyznaczenie współczynnika κ wykorzystując zjawisko rezonansu fali akustycznej w powietrzu. Pomiary miały być wykonane dla kilku różnych częstotliwości fali, a następnie wyznaczone wartości κ uśrednione i porównane z danymi tablicowymi.

2 Wstęp matematyczny

Fala akustyczna przemieszcza się w powietrzu w postaci lokalnych zagęszczeń i rozrzedzeń ośrodka (powodując lokalne zmiany ciśnienia) tak szybko, że nie dochodzi do wymiany ciepła pomiędzy zaburzonym otoczeniem a zmieniającymi się cząsteczkami. Z tego powodu zmiany ciśnienia zachodzą w sposób adiabatyczny. Równanie adiabaty jest postaci

$$pV^\kappa = \text{const.} \quad (1)$$

Wartość κ opisuje zależność:

$$\kappa = \frac{C_p}{C_v}, \quad (2)$$

gdzie C_p oraz C_v to ciepło właściwe przy odpowiednio stałym ciśnieniu i objętości [1].

Ponadto można wykazać, że:

$$\kappa = \frac{\lambda^2 f^2 M}{k T_{\text{temp}}} = \frac{\lambda^2 M}{T_o^2 k T_{\text{temp}}}, \quad (3)$$

gdzie λ - długość fali, $M = 4,81 \cdot 10^{-26}$ kg - masa jednej cząsteczki powietrza, $k = 1,3806 \cdot 10^{-23}$ J/K - stała Boltzmanna, T_{temp} - temperatura powietrza w Kelwinach, T_o - okres drgań.

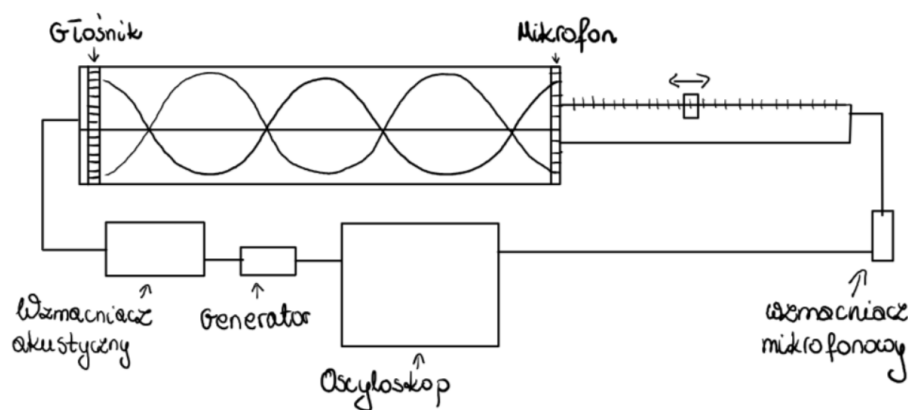
W dalszych obliczeniach wykorzystaliśmy właśnie ten wzór do wyznaczenia współczynnika adiabaty κ . Aby wyznaczyć długość fali stojącej λ dla każdej z serii pomiarów, zastosowaliśmy metodę najmniejszych kwadratów (MNK). Równanie prostej regresji ma postać

$$n = ax, \quad (4)$$

gdzie n - numer serii pomiarów, x - położenie mikrofonu od punktu zerowego, a współczynnik kierunkowy a jest równy $\frac{1}{\lambda}$. Stąd szukaną wartość długości fali λ można obliczyć jako

$$\lambda = \frac{1}{a}. \quad (5)$$

3 Układ pomiarowy



Rysunek 1: Schemat układu pomiarowego

Układ pomiarowy przedstawiony na rysunku składał się z następujących elementów:

- głośnika,
- mikrofonu,
- generatora,
- wzmacniacza akustycznego,
- oscyloskopu GOS-620FG,
- wzmacniacza mikrofonowego.

Na jednym końcu rury plexiglasowej umieszczony był głośnik, natomiast na drugim znajdował się ruchomy tłok z mikrofonem. Pomiary przeprowadzane były dla częstotliwości mieszczących się w zakresie od 4000 Hz do 8000 Hz, z krokiem co 500 Hz. W celu uzyskania żądanej częstotliwości, na oscyloskopie ustawialiśmy odpowiedni okres sygnału, zgodnie ze wzorem:

$$T_o = \frac{1}{f}, \quad (6)$$

gdzie T_o to okres drgań, a f — częstotliwość sygnału.

Do pomiarów wykorzystywane były dwa zakresy podstawy czasu: $50 \mu s$ oraz $20 \mu s$. Następnie przełącznik trybu pracy oscyloskopu (TIME/DIV) ustawiany był w pozycji X-Y. Odsuwając mikrofon wzdłuż rury, obserwowaliśmy sygnał na ekranie oscyloskopu i rejestrowaliśmy zmiany położenia odpowiadające kolejnym długościom fali λ .

4 Opracowanie pomiarów oraz analiza niepewności pomiarów

4.1 Pomiary

Nr serii	f [Hz]	T_o [ms]	Zakres [μs]	x [cm]
1	4000	0,25	50	3,7
1	4000	0,25	50	12,1
1	4000	0,25	50	20,5
1	4000	0,25	50	28,9
1	4000	0,25	50	37,3
1	4000	0,25	50	45,7
2	4500	0,22	50	3,7
2	4500	0,22	50	11,3
2	4500	0,22	50	19,0
2	4500	0,22	50	26,6
2	4500	0,22	50	34,3
2	4500	0,22	50	41,9
2	4500	0,22	50	49,5
3	5000	0,20	20	1,5
3	5000	0,20	20	8,1
3	5000	0,20	20	14,7
3	5000	0,20	20	21,4
3	5000	0,20	20	28,0
3	5000	0,20	20	34,7
3	5000	0,20	20	41,3
3	5000	0,20	20	47,9
4	5500	0,182	20	2,1
4	5500	0,182	20	8,3
4	5500	0,182	20	14,6
4	5500	0,182	20	20,8
4	5500	0,182	20	27,1
4	5500	0,182	20	33,3
4	5500	0,182	20	39,6
4	5500	0,182	20	45,8
5	6000	0,167	20	2,2
5	6000	0,167	20	8,1
5	6000	0,167	20	13,9
5	6000	0,167	20	19,8
5	6000	0,167	20	25,6
5	6000	0,167	20	31,4
5	6000	0,167	20	37,3
5	6000	0,167	20	43,1
5	6000	0,167	20	49,0
6	6500	0,154	20	2,3
6	6500	0,154	20	7,5
6	6500	0,154	20	12,7
6	6500	0,154	20	17,9
6	6500	0,154	20	23,0
6	6500	0,154	20	28,2
6	6500	0,154	20	33,4
6	6500	0,154	20	38,6
6	6500	0,154	20	43,8
6	6500	0,154	20	48,9

Tabela 1: Wyniki pomiarów dla serii 1-6.

Nr serii	f [Hz]	T_o [ms]	Zakres [μ s]	x [cm]
7	7000	0,143	20	2,2
7	7000	0,143	20	7,2
7	7000	0,143	20	12,1
7	7000	0,143	20	17,1
7	7000	0,143	20	22,0
7	7000	0,143	20	26,9
7	7000	0,143	20	31,9
7	7000	0,143	20	36,9
7	7000	0,143	20	41,8
7	7000	0,143	20	46,7
8	7500	0,133	20	1,0
8	7500	0,133	20	5,6
8	7500	0,133	20	10,1
8	7500	0,133	20	14,7
8	7500	0,133	20	19,3
8	7500	0,133	20	24,0
8	7500	0,133	20	28,6
8	7500	0,133	20	33,1
8	7500	0,133	20	37,7
8	7500	0,133	20	42,3
8	7500	0,133	20	46,9
9	8000	0,125	20	2,2
9	8000	0,125	20	6,6
9	8000	0,125	20	11,0
9	8000	0,125	20	15,2
9	8000	0,125	20	19,6
9	8000	0,125	20	24,0
9	8000	0,125	20	28,3
9	8000	0,125	20	32,7
9	8000	0,125	20	37,0
9	8000	0,125	20	41,4
9	8000	0,125	20	45,7
9	8000	0,125	20	50,0

Tabela 2: Wyniki pomiarów dla serii 7-9.

Temperatura $T_{temp} = 293,15$ K.

4.2 Położenie mikrofonu, a długość fali λ

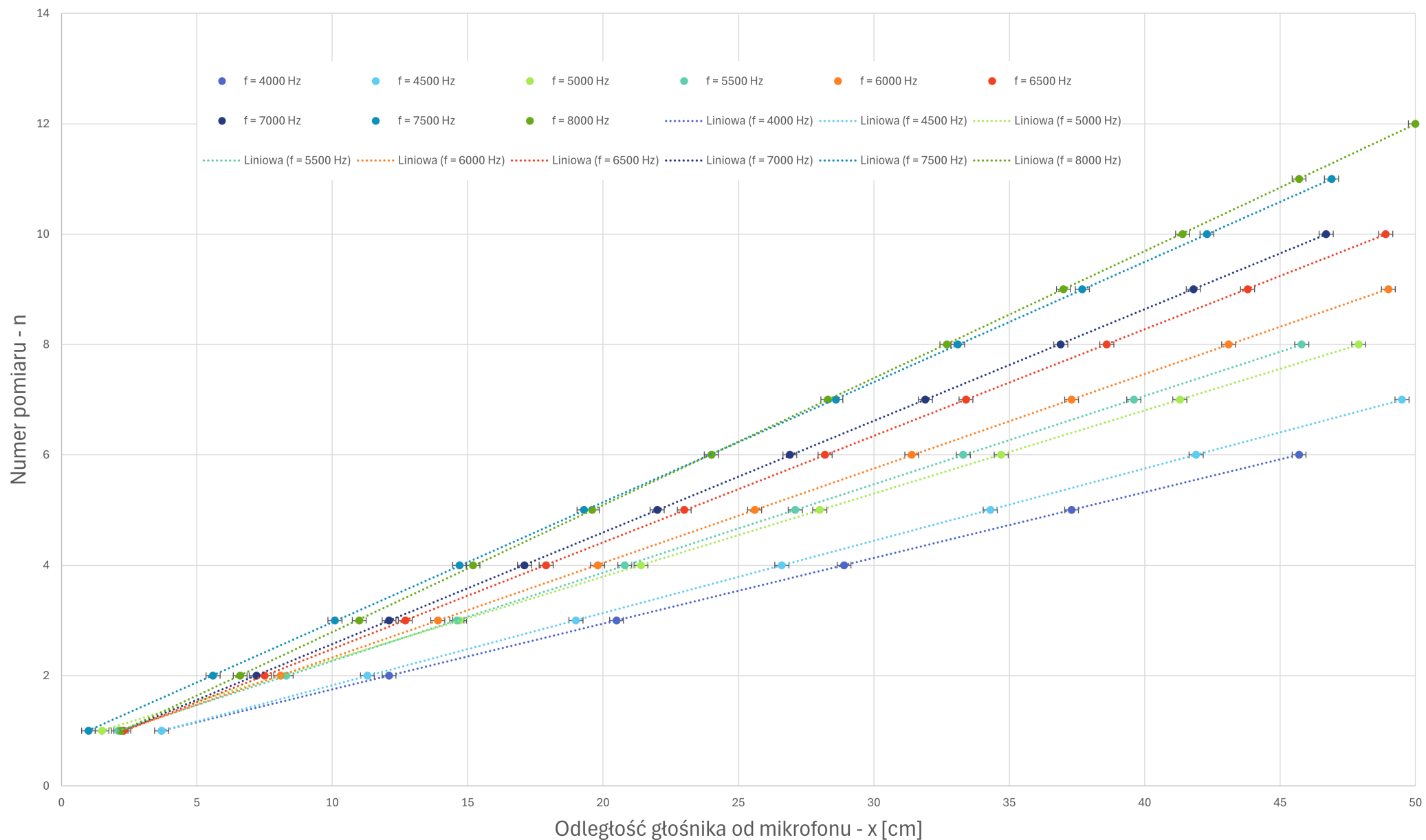
Poniżej znajduje się wykres przedstawiający wyniki pomiarów. Serie symbolizują różne ustawienia częstotliwości, a kolejne pomiary, to odczyty z linijki po przesuwaniu głośnika. Możemy zauważyć, że kąt nachylenia prostej do osi x rośnie wraz ze wzrostem częstotliwości. Wzór (4) omówiony we wstępie matematycznym przedstawia zależność obrazowaną przez poniższy wykres. Współczynnik kierunkowy widocznych prostych jest odpowiednio odwrotnością długości fali dla danej częstotliwości zgodnie ze wzorem (5). Na potrzeby dalszych obliczeń współczynniki kierunkowe prostych wyznaczono w programie Excel, stosując metodę najmniejszych kwadratów (MNK).

Dodatkowo zaznaczone niepewności osi x zostały wyliczone ze wzoru:

$$u(x) = \sqrt{\frac{(\Delta x)^2}{3} + \frac{(\Delta x_E)^2}{3}} \approx 0,3 \text{ [cm]},$$

gdzie $\Delta x = \Delta x_E = 0,1$ cm odpowiadają jednej podziałce na linijce.

Położenie mikrofonu mierzone dla zmian długości fali o λ w kolejnych seriach pomiarowych



Rysunek 2: Wykres przedstawiający położenie mikrofonu mierzone dla zmian długości fali o λ w kolejnych seriach pomiarowych odpowiadających różnym częstotliwościom

4.3 Obliczenie wartości κ i niepewności

W celu wyznaczenia wartości κ musieliśmy skorzystać ze wzoru (3). Wykorzystaliśmy wariant z okresem, aby uwzględnić niepewność związaną z ustawieniem odpowiedniego okresu na oscyloskopie. Okresy te zostały wyliczone przy użyciu wzoru (6). Należało również wyliczyć długość fali λ dla każdej serii pomiarów. Korzystając z MNK wyznaczyliśmy współczynniki nachylenia dla poszczególnych serii widocznych na rysunku 2, następnie na podstawie wzoru (5) wyznaczyliśmy odpowiednie λ . Wszystkie wartości tych obliczeń wraz z niepewnościami znajdują się w tabeli 3. Po wyznaczeniu wartości κ dla każdej z dziewięciu serii, wyliczyliśmy κ_0 .

$$\kappa_0 = \frac{1}{9} \sum_{i=1}^9 \kappa_i = 1,393, \quad (7)$$

gdzie κ_i - wartości κ dla kolejnych serii. Niepewność pomiarową wartości κ dla każdej serii pomiarowej obliczyliśmy poprzez propagację błędu. Wzór prezentuje się następująco:

$$u(\kappa) = \sqrt{\left(\frac{\partial \kappa}{\partial \lambda}\right)^2 u(\lambda)^2 + \left(\frac{\partial \kappa}{\partial T_{temp}}\right)^2 u(T_{temp})^2 + \left(\frac{\partial \kappa}{\partial T_o}\right)^2 u(T_o)^2}$$

$$u(\kappa) = \sqrt{\left(\frac{2M\lambda}{kT_o^2 T_{temp}}\right)^2 u(\lambda)^2 + \left(-\frac{M\lambda^2}{kT_o^2 T_{temp}^2}\right)^2 u(T_{temp})^2 + \left(-\frac{M\lambda^2}{2kT_{temp} T_o^3}\right)^2 u(T_o)^2}, \quad (8)$$

gdzie $u(\lambda)$ to niepewność długości fali, $u(T_{temp})$ to niepewność pomiaru temperatury, $u(T_o)$ to niepewność ustawienia okresu na oscyloskopie. Poniżej znajdują się wzory z których wyznaczyliśmy te niepewności.

$$u(\lambda) = \sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2 u^2(a)} = \sqrt{\left(-\frac{1}{a^2}\right)^2 u^2(a)} [m] \quad (9)$$

W powyższym wzorze wartości błędu nie wyznaczamy bezpośrednio z λ , lecz poprzez propagację błędu na wzorze na λ z wykorzystaniem wzoru 5. Wynika to z tego, iż współczynnik kierunkowy dla każdej serii został policzony z MNK, tak samo jak jego błąd $u(a)$, który również wynika z metody.

$$u(T_{temp}) = \sqrt{\left(\frac{(\Delta T_{temp})^2}{3}\right) + \left(\frac{(\Delta T_{tempE})^2}{3}\right)} = \sqrt{\frac{2}{3}} [K] \quad (10)$$

Jako błąd termometru, tak samo jak błąd eksperymentatora przyjęliśmy po $1^\circ K$.

$$u(T_o) = \sqrt{\left(\frac{(\Delta T_o)^2}{3}\right) + \left(\frac{(\Delta T_{oE})^2}{3}\right)} [s] \quad (11)$$

Błąd wyznaczenia okresu zależał od wybranej przez nas na oscyloskopie skali. W przypadku pierwszych trzech serii było to $10\mu s$, co podziałkę, w przypadku kolejnych pomiarów było to $4\mu s$. Takie przyjęliśmy też błędy urządzenia i eksperymentatora dla pomiarów kolejnych serii.

Do policzenia błędu wartości κ skorzystaliśmy z poniższego wzoru [1]:

$$\Delta \kappa = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\kappa - \kappa_i)^2}{n(n-1)}} = 0,017 \quad (12)$$

Nr serii	a	$u(a)$	λ [m]	$u(\lambda)$ [m]	$u(T_o)$ [s]	κ	$u(\kappa)$
1	11,90	0,56	0,0840	0,0039	0,0000082	1,342	0,128
2	13,09	0,52	0,0764	0,0030	0,0000082	1,404	0,114
3	15,07	0,78	0,0664	0,0034	0,0000082	1,308	0,138
4	16,01	0,67	0,0625	0,0026	0,0000033	1,403	0,118
5	17,11	0,62	0,0584	0,0021	0,0000033	1,461	0,107
6	19,30	0,55	0,0518	0,0015	0,0000033	1,347	0,078
7	20,22	0,55	0,0495	0,0013	0,0000033	1,424	0,079
8	21,77	0,79	0,0459	0,0017	0,0000033	1,410	0,104
9	23,01	0,49	0,04347	0,00092	0,0000033	1,437	0,064

Tabela 3: Oszacowane wartości długości fali λ , współczynnika κ oraz odpowiadających im niepewności.

5 Wyniki

Wyznaczone współczynniki kappa κ wraz z niepewnościami dla poszczególnych serii wynoszą:

$$\begin{aligned}
\kappa_1 &= 1,342 & u(\kappa_1) &= 0,128 \\
\kappa_2 &= 1,404 & u(\kappa_2) &= 0,114 \\
\kappa_3 &= 1,308 & u(\kappa_3) &= 0,138 \\
\kappa_4 &= 1,403 & u(\kappa_4) &= 0,118 \\
\kappa_5 &= 1,461 & u(\kappa_5) &= 0,107 \\
\kappa_6 &= 1,347 & u(\kappa_6) &= 0,078 \\
\kappa_7 &= 1,424 & u(\kappa_7) &= 0,079 \\
\kappa_8 &= 1,410 & u(\kappa_8) &= 0,104 \\
\kappa_9 &= 1,437 & u(\kappa_9) &= 0,064
\end{aligned}$$

co ostatecznie daje nam średnią wartość

$$\kappa_0 = 1,393 \quad u(\kappa_0) = 0,017$$

Wynik porównano z wartością tablicową [2], która wynosi $\kappa = 1,400$. Wyznaczona wartość kappa jest bardzo zbliżona do odczytanej wartości, a niepewność pomiaru mieści się w granicach błędu.

6 Podsumowanie

W ramach ćwiczenia przeprowadziliśmy pomiary, które umożliwiły wyznaczenie długości fal akustycznych wytworzonych w rurze plexiglasowej. Na podstawie tych pomiarów obliczyliśmy współczynniki kappa dla każdej serii pomiarowej. Uzyskany uśredniony wynik był zgodny z wartością tablicową, co potwierdza słuszność zastosowania metody wyznaczania współczynnika kappa za pomocą rezonansu fali akustycznej.

Literatura

- [1] Autor nieznany. Wyznaczenie c_p/c_v dla powietrza metodą rezonansu akustycznego. *Centralne Laboratorium Fizyki*.
- [2] Wikipedia. Wykładnik adiabaty, 2025.

7 Wkład poszczególnych osób w wykonanie ćwiczenia:

1. Katarzyna Skoczylas: Cel, wstęp matematyczny, układ pomiarowy, podsumowanie
2. Alicja Przeździecka: Położenie mikrofonu, a długość fali λ
3. Miłosz Zieliński: Pomiary, obliczenie wartości κ i niepewności