

| | | | |
|---|-----------------------|--------------------------|-----------------|
| Wydział MINI | Dzień/godz Data | Środa 14.15 7.05.2025 | Nr zespołu 4 |
| Nazwisko i Imię 1. Przeździecka Alicja 2. Skoczyła Katarzyna 3. Zieliński Miłosz | Ocena z przygotowania | Ocena z sprawozdania | Ocena końcowa |
| Prowadzący | | Podpis | |

Wyznaczenie współczynnika rozszerzalności cieplnej ciał stałych

1 Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest eksperymentalne wyznaczenie liniowych współczynników rozszerzalności termicznej dwóch metalowych prętów oraz identyfikacja materiałów z jakich są stworzone na podstawie wartości tablicowych.

2 Wstęp

Zjawisko rozszerzalności cieplnej jest bardzo powszechnym zjawiskiem. Rozszerzalność to fundamentalna właściwość fizyczna polegająca na zwiększaniu objętości wraz ze wzrostem temperatury [1]. Z mikroskopowego punktu widzenia przy wzroście temperatury rośnie energia kinetyczna atomów, skutkując zwiększeniem średnich odległości pomiędzy atomami. Prawo rozszerzalności jest prawem przybliżonym, ale uzyskane za jego pomocą wyniki są bliskie dokładnym dla pewnego zakresu temperatur. Dodatkowo ważnym aspektem jest izotropowość materiału, która opisuje czy ciało jednakowo rozszerza się w każdym kierunku. Rozszerzalność termiczna może być charakteryzowana przez dwa współczynniki: liniowy i objętościowy. Współczynnik objętościowy można wyznaczyć dla każdego stanu skupienia ciała w przeciwieństwie do liniowego, który wymaga przypisania długości. Do analizy rozszerzalności liniowej pomocne mogą być poniższe wzory stosowane dla ciał stałych. Zależność liniowych wymiarów ciała od temperatury można przedstawić za pomocą wzoru:

$$L = L_0(1 + \alpha\Delta T), \quad (1)$$

gdzie:

- L - długość ciała po zmianie temperatury,
- L_0 - długość początkowa ciała,
- α - współczynnik rozszerzalności liniowej [$^{\circ}C^{-1}$ lub $^{\circ}K^{-1}$]
- ΔT - przyrost temperatury.

Dysponując pomiarami długości początkowej L_0 oraz przyrostem długości pręta ΔL powyższy wzór możemy przekształcić do postaci:

$$\begin{aligned} \Delta L + L_0 &= L_0(1 + \alpha\Delta T), \\ \Delta L &= L_0\alpha\Delta T, \\ \frac{\Delta L}{L_0} &= \alpha\Delta T, \end{aligned} \quad (2)$$

wykorzystując zależność $L_0 + \Delta L = L$. Poza wartościami L_0 i ΔL do wyznaczenia współczynnika niezbędna jest różnica temperatur. W przypadku, gdy do ogrzewania ciała używany jest układ analogiczny jak opisany poniżej (Rysunek 1), do wyznaczenia interesującej nas wielkości można wykorzystać zależność pomiędzy temperaturą a rezystancją w platynowych termorezystorach przedstawiającą się poniższym wzorem dla zakresu temperatur ($0^{\circ}C$, $800^{\circ}C$):

$$R = R_0(1 + At + Bt^2), \quad (3)$$

gdzie współczynniki wynoszą:

- $A = 3,9083 \cdot 10^{-3} \text{ } ^\circ C^{-1}$,
- $B = -5,775 \cdot 10^{-7} \text{ } ^\circ C^{-1}$,

oraz :

- R - rezystancja w platynowym termorezystorze,
- R_0 - rezystancja nominalna (wynosząca $100 \text{ } \Omega$ dla czujnika Pt100 w temperaturze $0^\circ C$),
- t - temperatura $[^\circ C]$.

Przekształcając powyższy wzór do postaci funkcji $T(R)$ otrzymujemy:

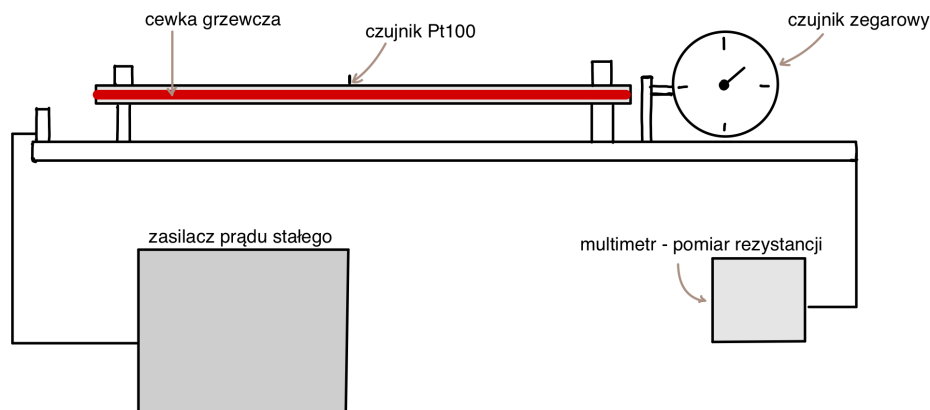
$$t = \frac{-A - \sqrt{A^2 - 4B \left(1 - \frac{R}{R_0}\right)}}{2B} \quad (4)$$

Licząc różnicę temperatur pomiędzy wyliczoną T oraz zmierzoną w warunkach początkowych T_p uzyskujemy szukaną wartość ΔT . Ze względu na charakter zjawisk termodynamicznych, który wymaga dłuższego okresu czasu do ustabilizowania się jednokrotny pomiar nie pozwoliłby uzyskać poprawnych wyników. W tym celu można posłużyć się pomiarami wielokrotnymi wielkości ΔL , R . Wzór (2) oraz wielokrotne pomiary pozwolą przy użyciu metody najmniejszych kwadratów (MNK) dla tego wzoru wyznaczyć liniowy współczynnik rozszerzalności α wraz z jego niepewnością. Wartość współczynnik nachylenia prostej regresji liniowej równa jest współczynnikowi α . W ten sposób znacznie zmniejszamy rozbieżność możliwych do uzyskania wyników. Wykorzystując fakt, że α jest wartością stałą dla danego materiału (zależy w pewnym stopniu od temperatury, ale na pewnym zakresie możemy to zaniedbać) możemy dodatkowo zidentyfikować materiał użyty w eksperymencie, odszukując uzyskany współczynnik w tablicach.

3 Układ pomiarowy

Stanowisko pomiarowe do wyznaczania liniowego współczynnika rozszerzalności cieplnej ciał stałych składa się z następujących elementów:

- Dwóch metalowych prętów o początkowej długości 1m. Posiadają one wewnętrzne nawiercenie na całej długości umożliwiające umieszczenie elementu grzewczego oraz czujnika, a także zadbanie o równomierne ogrzanie się pręta.
- Wspomniana wcześniej cewka grzewcza zasilana prądem stałym umożliwiającą kontrolowane podgrzewanie i zbadanie przyrostu temperatury na podstawie zależności oporu od temperatury oraz wzoru $P = \frac{U^2}{R}$.
- Czujnik zegarowy umożliwiający pomiar zmiany długości pręta podczas ogrzewania. Wydłużenie jest mierzone tylko na jednym końcu ze względu na to, że pręt jest unieruchomiony na drugim końcu.
- Platynowy czujnik rezystencyjny Pt100 umieszczony w połowie długości prętów umożliwiający dokładny pomiar temperatury wykorzystując zjawisko zmiany rezystancji platyny. Nominalna rezystancja (przy temperaturze $0^\circ C$) wynosi $100 \text{ } \Omega$.
- Miernik rezystancji dla czujnika Pt100.
- Zasilacz prądu stałego do regulacji napięcia na cewce umożliwiający ustawienie mocy grzania, a dzięki temu tempa wzrostu temperatury.



Rysunek 1: Schemat układu pomiarowego do wyznaczania współczynnika rozszerzalności cieplnej.

4 Dane eksperymentalne

| Nr pomiaru | U [V] | R [Ω] | ΔL [mm] | T [$^{\circ}\text{C}$] | ΔT [$^{\circ}\text{C}$] |
|------------|------------|------------------|-----------------|----------------------------|-----------------------------------|
| 0 | 0 | 110,30(49) | 0 | 26,5(1,3) | 0 |
| 1 | 10,000(58) | 111,00(49) | 0,0200(58) | 28,3(1,3) | 1,8(1,8) |
| 2 | 14,100(58) | 112,20(50) | 0,0700(58) | 31,4(1,3) | 4,9(1,8) |
| 3 | 17,300(58) | 113,90(50) | 0,1500(58) | 35,8(1,3) | 9,3(1,8) |
| 4 | 20,000(58) | 116,00(51) | 0,2400(58) | 41,2(1,3) | 14,7(1,8) |
| 5 | 22,400(58) | 118,10(51) | 0,3400(58) | 46,6(1,3) | 20,2(1,8) |
| 6 | 24,500(58) | 120,70(52) | 0,4600(58) | 53,4(1,4) | 26,9(1,9) |
| 7 | 26,500(58) | 124,40(53) | 0,6300(58) | 63,0(1,4) | 36,6(1,9) |
| 8 | 28,300(58) | 127,00(54) | 0,7600(58) | 69,8(1,4) | 43,4(1,9) |
| 9 | 29,400(58) | 130,00(55) | 0,9200(58) | 77,7(1,4) | 51,2(1,9) |

Tabela 1: Wyniki pomiarów dla pierwszego pręta.

| Nr pomiaru | U [V] | R [Ω] | ΔL [mm] | T [$^{\circ}\text{C}$] | ΔT [$^{\circ}\text{C}$] |
|------------|------------|------------------|-----------------|----------------------------|-----------------------------------|
| 0 | 0 | 110,3(49) | 0 | 26,5(1,3) | 0 |
| 1 | 10,000(58) | 111,10(49) | 0,0100(58) | 28,5(1,3) | 2,1(1,8) |
| 2 | 14,100(58) | 112,30(50) | 0,0700(58) | 31,6(1,3) | 5,2(1,8) |
| 3 | 17,300(58) | 114,10(50) | 0,1500(58) | 36,3(1,3) | 9,8(1,8) |
| 4 | 20,000(58) | 116,40(51) | 0,2500(58) | 42,3(1,3) | 15,8(1,8) |
| 5 | 22,400(58) | 118,60(52) | 0,3400(58) | 47,9(1,3) | 21,5(1,8) |
| 6 | 24,500(58) | 121,10(52) | 0,4600(58) | 54,4(1,4) | 28,0(1,9) |
| 7 | 26,500(58) | 123,40(53) | 0,5700(58) | 60,4(1,4) | 33,0(1,9) |
| 8 | 28,300(58) | 125,80(54) | 0,6700(58) | 66,7(1,4) | 40,2(1,9) |
| 9 | 29,400(58) | 127,60(54) | 0,7600(58) | 71,4(1,4) | 44,9(1,9) |

Tabela 2: Wyniki pomiarów dla drugiego pręta.

W tabelach dane podano z odpowiednimi błędami, których sposób wyliczenia opisany jest w kolejnej sekcji. Również sposób wyznaczenia wartości z kolumn zawierających temperatury prętów i różnicę temperatury od temperatury początkowej (pomiar nr 0) znajdują się w kolejnej sekcji.

5 Opracowanie pomiarów oraz analiza niepewności pomiarów

5.1 Niepewności pomiarowe

Opór mierzony był miernikiem cyfrowym, dlatego niepewność wzorcowania zależy zarówno od zakresu jak i wartości zmierzonej. Wszystkie pomiary były wykonane na tym samym zakresie, więc korzystaliśmy ze wzoru

$$u(R) = \frac{\Delta R}{\sqrt{3}} = \frac{0,5\%rdg + 3dgt}{\sqrt{3}}, \quad (5)$$

gdzie rdg to wartość zmierzona, dgt rozdzielczość równa $0,1 \Omega$.

Niepewność pomiaru napięcia na zasilaczu:

$$u(U) = \frac{1dgt}{\sqrt{3}} = \frac{0,1V}{\sqrt{3}} \approx 0,058V, \quad (6)$$

Niepewność zmiany długości pręta policzyliśmy z następującego wzoru:

$$u(\Delta L) = \frac{0,01mm}{\sqrt{3}} = 0,0058mm. \quad (7)$$

Temperaturę prętów policzyliśmy przy użyciu wzoru (4), korzystając z gotowego kalkulatora internetowego [2]. Aby wyznaczyć niepewność pojedynczego pomiaru temperatury wykorzystaliśmy metodę propagacji niepewności:

$$u(T) = \sqrt{\left(\frac{\partial T}{\partial R} u(R)\right)^2}, \quad (8)$$

gdzie pochodna cząstkowa wynosi:

$$\frac{\partial T}{\partial R} = \frac{-\left(A^2 - 4B\left(1 - \frac{R}{R_o}\right)\right)^{-1/2}}{R_o}. \quad (9)$$

Różnicę temperatur policzyliśmy wykorzystując wzór na wartość temperatury (4) i uzyskaliśmy:

$$\Delta T = t_i - t_p = \frac{1}{2B} \left(\sqrt{A^2 - 4B\left(1 - \frac{R_p}{R_o}\right)} - \sqrt{A^2 - 4B\left(1 - \frac{R_i}{R_o}\right)} \right), \quad (10)$$

gdzie R_p to wartość oporu pręta, przez który nie płynie prąd, a R_i to wartość oporu dla konkretnego pomiaru. Niepewność ΔT można wyznaczyć poprzez propagację wzoru (10). Wynosi ona:

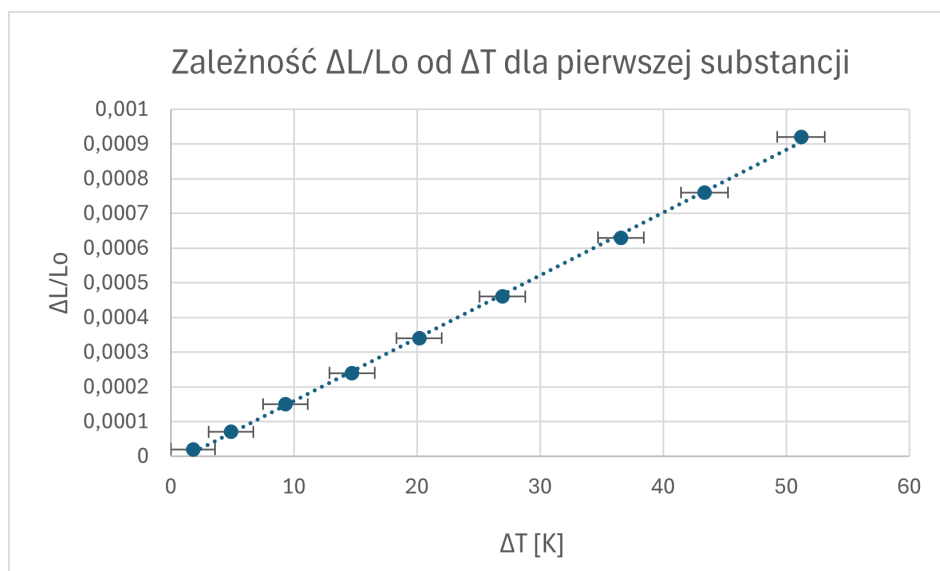
$$\begin{aligned} u(\Delta T) &= \sqrt{\left(\frac{\partial \Delta T}{\partial R_p} u(R_p)\right)^2 + \left(\frac{\partial \Delta T}{\partial R_i} u(R_i)\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{u(R_p)}{\sqrt{A^2 - 4B\left(1 - \frac{R_p}{R_o}\right)} R_o}\right)^2 + \left(\frac{u(R_i)}{\sqrt{A^2 - 4B\left(1 - \frac{R_i}{R_o}\right)} R_o}\right)^2} \end{aligned} \quad (11)$$

5.2 Wyznaczenie wartości współczynników rozszerzalności α

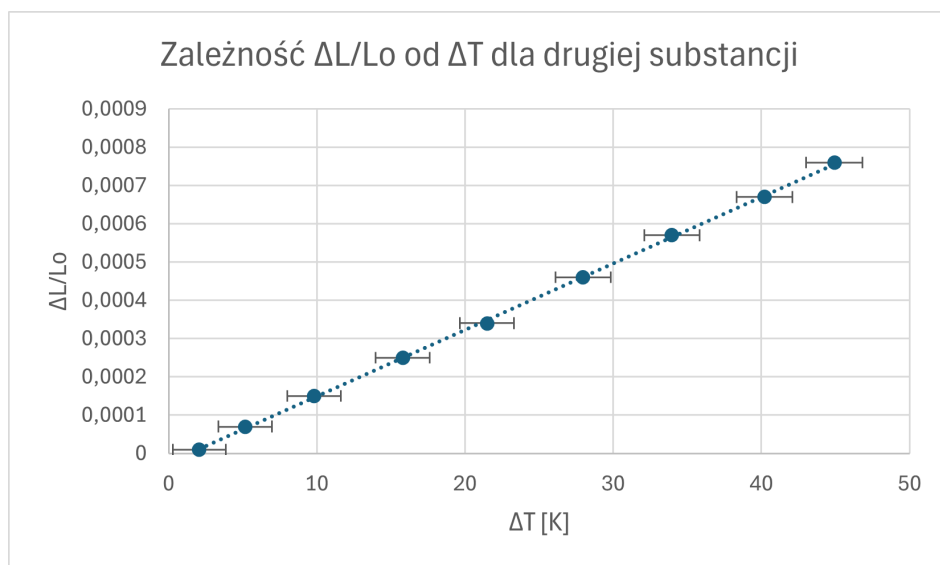
Na poniższych wykresach przedstawiamy wyniki oraz niepewności pomiarów. Zaznaczone przerywane linie są liniami regresji wyznaczonymi z MNK. Aby zaznaczyć na wykresach niepewność wartości na osi y czyli $\frac{\Delta L}{L_o}$ posłużyliśmy się metodą propagacji niepewności:

$$u\left(\frac{\Delta L}{L_o}\right) = \frac{u(\Delta L)}{L_o} = 0,0000058mm. \quad (12)$$

Są one jednak bardzo małe i niewidoczne na wykresie. Niepewności dla ΔT , również przedstawione na grafikach, zostały wyznaczone w poprzedniej sekcji.



Rysunek 2: Wykres przedstawiający zależność $\frac{\Delta L}{L_0}$ od ΔT dla pierwszej substancji.



Rysunek 3: Wykres przedstawiający zależność $\frac{\Delta L}{L_0}$ od ΔT dla drugiej substancji.

Korzystając z MNK dla wzoru (2) otrzymaliśmy następujące wartości dla współczynników α :

- $\alpha_1 = 17,5 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$
- $\alpha_2 = 16,6 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$

Wartości ich niepewności, zostały również wyznaczone z MNK i wynoszą:

- $u(\alpha_1) = 0,18 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$
- $u(\alpha_2) = 0,18 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$

6 Wyniki i podsumowanie

Uzyskane wyniki współczynników rozszerzalności cieplnej porównaliśmy z wartościami tablicowymi [1]. Ta wiedza połączona z wizualną obserwacją podczas wykonywania ćwiczenia pozwoliła nam stwierdzić, iż badanymi substancjami były:

- Brąz: $\alpha_1 = 17,5 \cdot 10^{-6} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$, (wartość tablicowa: $16,5\text{--}18,9 \cdot 10^{-6} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$)
- Miedź: $\alpha_2 = 16,6 \cdot 10^{-6} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$, (wartość tablicowa: $16,6 \cdot 10^{-6} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$).

Literatura

- [1] Autor nieznany. Wyznaczenie współczynnika rozszerzalności cieplnej ciał stałych. Centralne Laboratorium Fizyki.
- [2] LAB-EL. Kalkulator pt-100, 2025.

7 Wkład poszczególnych osób w wykonanie ćwiczenia:

1. Katarzyna Skoczyła: opracowanie wyników i niepewności
2. Alicja Przeździecka: wstęp i układ pomiarowy
3. Miłosz Zieliński: opracowanie wyników i niepewności