Wydział MINI	Dzień/godz Środa 14.15 Data 16.04.2025r.		Nr zespołu 4
Nazwisko i Imię 1. Przeździecka Alicja 2. Skoczylas Katarzyna 3. Zieliński Miłosz	Ocena z przygotowania	Ocena z sprawozdania	Ocena końcowa
Prowadzący		Podpis	

Wyznaczenie współczynnika lepkości cieczy

1 Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest wyznaczenie dynamicznego współczynnika lepkości cieczy oraz czasu relaksacji na podstawie obserwacji ruchu swobodnie spadających kulek w dwóch cieczach: glicerynie i oleju silnikowym.

2 Wstęp

Lepkość jest właściwością płynów, określającą ich zdolność do stawiania oporu przy wzajemnym przemieszczaniu się warstw płynu względem siebie [1]. Im większa lepkość, tym większy opór podczas przepływu. Jednostką dynamicznego współczynnika lepkości jest $\mathrm{Pa} \cdot \mathrm{s}$ lub $\frac{\mathrm{N \cdot s}}{\mathrm{m^2}}$.
Wszystkie oznaczenia są spójne dla wszystkich wzorów. Siła lepkości działająca na płytę spadającą w naczyniu może być wyrażona przy pomocy wzoru:

$$F = -\eta S \frac{\partial v_x}{\partial z} = -\eta S \frac{v}{h}, \tag{1}$$

gdzie znak minus oznacza, że siła działa przeciwnie do kierunku ruchu, współczynnik η oznacza dynamiczną lepkość płynu, S to powierzchnia płyty, h to wysokość naczynia, a v to prędkość z jaką porusza się płytka.
Aby scharakteryzować przepływ, wprowadza się liczbę Reynoldsa:

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho v l}{\eta}, \tag{2}$$

gdzie ρ jest gęstością cieczy, v prędkością , a l parametr liniowy, który w przypadku kuli wynosi $l = r$. Przy małych wartościach Re przepływ jest laminarny (uporządkowany), natomiast przy dużych wartościach staje się turbulentny.
W celu wyznaczenia lepkości cieczy, analizujemy jednak ruch małej kulki o promieniu r, masie m_k i gęstości ρ_k spadającej w cieczy o gęstości ρ_c. Kulka porusza się w cylindrze z cieczą z prędkością równą v_{gr}, przy zachowaniu warunków przepływu laminarnego, ponieważ wartość Re jest mała.
Na kulkę poruszającą się w płynie (przy małej wartości współczynika Re) działa siła oporu zwana siłą Stokesa, którą dla kuli można wyliczyć ze wzoru [2]:

$$F_S = -6\pi\eta v_{gr} r \tag{3}$$

Uwzględniając tę siłę, jak i siłę ciężkości $Q = m_k g$ oraz siłę wyporu $F_w = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_c g$ możemy policzyć siłę wypadkową: $\vec{F} = \vec{Q} + \vec{F}_w + \vec{F}_S$. Na podstawie tego wzoru, zgodnie z drugą zasadą dynamiki, równanie ruchu kulki można przedstawić w postaci:

$$m_k \frac{dv}{dt} = Q - F_w - F_S \tag{4}$$

Kulka w cieczy porusza się ruchem przyśpieszonym jednak, siła oporu rośnie wraz z prędkością i "hamuje" dalszy wzrost prędkości, aż kulka osiągnie prędkość graniczną (można przyjąć, że zmiana prędkości będzie mniejsza od błędu wyznaczonej prędkości). W stanie, gdy siły się równoważą, a przyśpieszenie kulki zmaleje do 0, porusza się ona z prędkością graniczną, którą można wyliczyć ze wzoru:

$$v_{\mathrm{gr}} = \frac{2}{9}\frac{r^2(\rho_k - \rho_c)g}{\eta} \tag{5}$$

W przypadku ograniczonej objętości naczynia (cylinder o promieniu R) należy uwzględnić poprawki na obecność ścianek (poprawki związane z wysokością cylindra są zaniedbywalne), dlatego wzór na v_{gr} wynosi :

$$v_{\mathrm{gr}} = \frac{2}{9}\frac{r^2(\rho_k - \rho_c)g}{\eta(1 + 2{,}1\frac{r}{R})} \tag{6}$$

Współczynnik η można uzyskać odpowiednio przekształcając wzór (6).

$$\eta = \frac{2}{9}\frac{r^2(\rho_k - \rho_c)g}{v_{\mathrm{gr}}(1 + 2{,}1\frac{r}{R})} \tag{7}$$

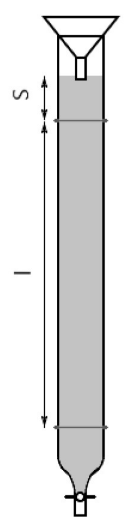
Wartość v_{gr} uzyskać można przy zastosowaniu metody najmniejszych kwadratów (MNK) dla uzyskanych pomiarów.

$$s = at + b, \tag{8}$$

gdzie s to odcinek na jakim mierzyliśmy czas opadania kulki, a t to czas opadania na tym odcinku. Mając wzór w takiej formie można skorzystać z MNK, a = v_{gr} jest szukanym współczynnikiem nachylenia prostej, b jest odległością, która związana jest z tym, że kulka przyśpiesza, więc początkowy odcinek jest pokonywany w dłuższym czasie. Czas ten, do momentu w którym siły działajace na kulkę się nie zrównoważą i osiągnięta zostanie v_{gr} nazywany jest czasem relaksacji. Oznaczamy go przez τ i wyznaczamy korzystając ze wzoru:

$$\tau = \frac{m_k}{6\pi\eta r} \tag{9}$$

3 Układ pomiarowy



Rysunek 1: Cylinder z cieczą

Układ pomiarowy, mający na celu wyznaczenie czasu spadania kulek w cieczach, składał się z cylindra wypełnionego cieczą, lejka na górze cylindra, który umiejscawiał wrzucane tam kulki na osi zbiornika, kranika na umożliwiającego usunięcie kulek ze zbiornika i dwóch ruchomych znaczników na miarce cylindra (A i B). Przedstawiony on jest na Rysunku 1. Dla każdego z 10 pomiarów w obu cieczach zmieniany był dystans na którym mierzono czas w którym kulka go pokonała. Początkowy dystans L wynosił 120 cm i był zmniejszany o 10 cm w każdym kolejnym pomiarze poprzez obniżanie znacznika A. Znacznik A był ustawiony w taki sposób, że na odcinku L kulka zawsze porszała się z prędkością graniczną. Jednak całkowity przyjmowany dystans pokonany przez kulkę wynosił $H = L + S$. Do wyznaczenia masy 10 kulek użyta była waga jubilerska, a do pomiaru średnicy każdej z nich śruba mikrometryczna.

4 Dane eksperymentalne

Pomiar masy 10 kulek wyniósł $m_{10} = 1{,}13$ g.
Temperatura otoczenia podczas pomiarów: $T = 20\,^{\circ}\mathrm{C}$.
Średnice wewnętrzne rur dla obu substancji: $D = 40{,}0(3)\,\mathrm{mm}$.
Gęstości cieczy:

- Gliceryna: $\rho_g = 1{,}261\,\mathrm{g/cm^3}$,
- Olej silnikowy: $\rho_o = 0{,}867\,\mathrm{g/cm^3}$.

Nr pomiaru	d [mm]
1	3,00
2	3,02
3	2,99
4	2,99
5	2,98
6	3,00
7	2,99
8	3,00
9	3,00
10	2,99

Tabela 1: Wyniki pomiarów średnicy 10 kulek.

Nr pomiaru	Czas [s] — Gliceryna	Czas [s] — Olej silnikowy	Droga [cm]
1	33,19	9,85	120
2	31,38	9,16	110
3	29,40	8,47	100
4	26,87	7,59	90
5	24,66	6,87	80
6	22,09	5,88	70
7	19,22	5,13	60
8	16,31	4,31	50
9	13,06	3,53	40
10	10,06	2,44	30

Tabela 2: Pomiary czasu spadku kulki w glicerynie i oleju silnikowym dla różnych długości drogi.

5 Opracowanie pomiarów oraz analiza niepewności pomiarów

5.1 Wyznaczenie gęstości kulki

Na początku doświadczenia zajęliśmy się wyznaczeniem gęstości kulek. W tym celu dokonaliśmy pomiarów masy 10 kulek, aby pomiar był dokładniejszy. Obliczyliśmy niepewność typu B

$$u(m_{10}) = \frac{\Delta m}{\sqrt{3}} = 0{,}0058g, \tag{10}$$

gdzie $\Delta m = 0{,}01g$.
Następnie masę 10 kulek oraz niepewność dla tego pomiaru podzieliśmy przez 10, stąd masa jednej kulki wynosiła:

$$m = \frac{m_{10}}{10} = 0{,}1130(29)g. \tag{11}$$

Aby wyznaczyć średnicę kulki, obliczyliśmy średnią z wykonanych 10 pomiarów i otrzymaliśmy następujący wynik

$$\overline{d} = 2{,}996mm. \tag{12}$$

Wyznaczona średnica była obarczona niepewnościami zarówno typu A i B

$$u(\overline{d}) = \sqrt{u_A^2 + u_B^2} = \sqrt{S_{\overline{d}}^2 + \frac{(\Delta d)^2}{3}} = 0{,}0067, \tag{13}$$

gdzie $S_{\overline{d}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(d_i - \overline{d})^2}{n(n-1)}}$, $\Delta d = 0,01mm$.
Mamy więc

$$\overline{d} = 2{,}9960(67)mm \tag{14}$$

W celu obliczenia promienia wartość średnicy oraz jej niepewności podzieliśmy przez 2. Stąd promień to

$$r = \frac{\overline{d}}{2} = 1{,}4980(33)mm \tag{15}$$

Gęstość kulki można obliczyć ze wzoru

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{3m}{4\pi r^3}. \tag{16}$$

Do wyznaczenia niepewności gęstości posłużyliśmy się metodą propagacji niepewności

$$u(\rho) = u(\rho) = \sqrt{\left(\frac{\partial \rho}{\partial m} u(m)\right)^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial r} u(r)\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{3}{4\pi r^3} u(m)\right)^2 + \left(\frac{9m}{4\pi r^4} u(r)\right)^2}. \tag{17}$$

Gęstość kulki wraz z niepewnością wyniosła

$$\rho = 8{,}03(21)\frac{g}{cm^3}. \tag{18}$$

5.2 Wyznaczenie prędkości granicznej

Niepewności drogi pokonanej przez spadającą kulkę oraz czasu jej spadania obliczyliśmy w następujący sposób

$$u(s) = \frac{2\Delta s}{\sqrt{3}} = 0,12cm, \tag{19}$$

gdzie Δs=0,1 cm, a mnożenie przez 2 wynika z odczytu położenia początkowego i końcowego znacznika,

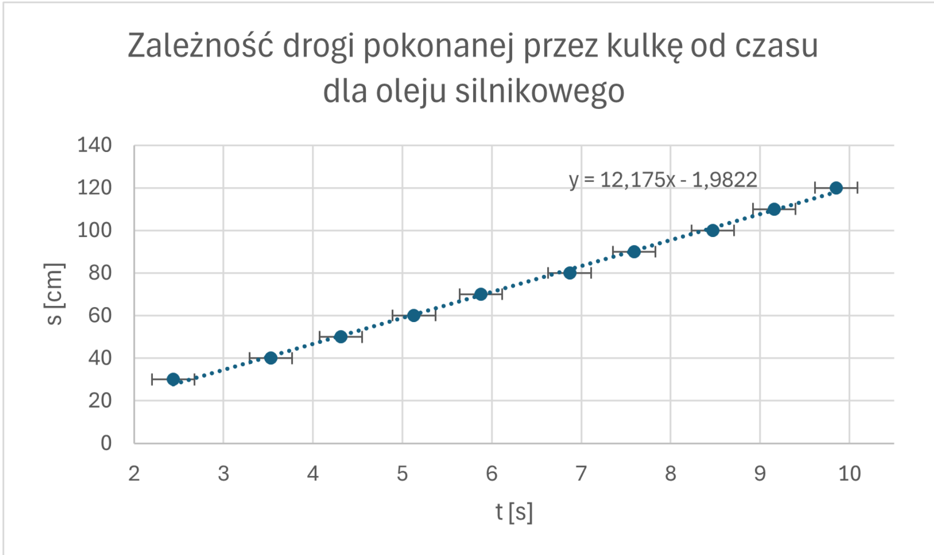
$$u(t) = \sqrt{\frac{\Delta t^2}{3} + \frac{\Delta t_E^2}{3}} = 0{,}24s, \tag{20}$$

gdzie $\Delta t = 0{,}01$ s, $\Delta t_E = \sqrt{0{,}2^2 + 0{,}3^2 + 0{,}2^2} = 0,41s$– obliczone jako suma niepewności związanych z włączeniem, wyłączeniem stopera oraz czasem reakcji mięśni.
Niepewność drogi jest bardzo mała, dlatego jest ona niewidoczna na wykresach znajdujących się poniżej (Rysunek 2 oraz 3).
Korzystając z metody najmniejszych kwadratów oraz funkcji REGLINP w programie Excel, dopasowaliśmy prostą regresji liniowej do danych pomiarowych (Rysunek 2 oraz 3) zgodnie ze wzorem (8).
Współczynniki kierunkowe a tych prostych — czyli szukane przez nas prędkości graniczne — oraz b - drogi początkowe S_0 - wyniosły:

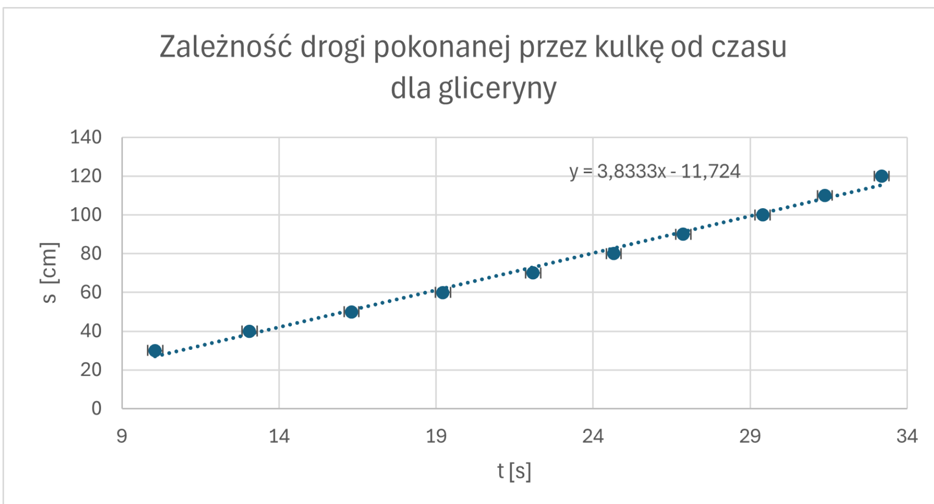
- dla gliceryny:
  $v_{gr} = 3{,}83(11)\frac{cm}{s} = 0{,}0383(11)\frac{m}{s}$,
  $S_0 = -1{,}98(1{,}26)cm$,

- dla oleju silnikowego:
  $v_{gr} = 12{,}17(19)\frac{cm}{s} = 0{,}1217(19)\frac{m}{s}$,
  $S_0 = -11{,}72(2{,}73)cm$.

Ujemne wartości S_0 mogą wynikać z warunków przeprowadzania eksperymentu, które nie były w pełni zgodne z idealnym opisem matematycznym.



Rysunek 2: Wykres zależności drogi pokonanej przez kulkę od czasu dla oleju silnikowego.



Rysunek 3: Wykres zależności drogi pokonanej przez kulkę od czasu dla gliceryny.

5.3 Wyznaczenie lepkości

Lepkość możemy obliczyć ze wzoru (7).
Korzystając z metody propagacji niepewności dla funkcji wielu zmiennych, mamy:

$$u(\eta) = \sqrt{\left(\frac{\partial \eta}{\partial r}\, u(r)\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial v_{gr}}\, u(v_{gr})\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial \rho_k}\, u(\rho_k)\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial \rho_c}\, u(\rho_c)\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial R}\, u(R)\right)^2}. \quad (21)$$

Co po rozwiązaniu pochodnych i zaniedbaniu niepewności gęstości cieczy daje

$$u(\eta) = \left\{ \left[\frac{4g(\rho_k - \rho_c)r}{9v_{gr}} \left(\frac{1}{1+2{,}4\frac{r}{R}} - \frac{1{,}2r}{R(1+2{,}4\frac{r}{R})^2}\right) u_r\right]^2 \right.$$
$$+ \left[\frac{4{,}8r^3 g(\rho_k - \rho_c)}{9v_{gr}R^2(1+2{,}4\frac{r}{R})^2} u_R\right]^2$$
$$+ \left[\frac{2r^2 g}{9v_{gr}(1+2{,}4\frac{r}{R})} u_{\rho_k}\right]^2 \tag{22}$$
$$\left. + \left[\frac{2r^2 g}{9v_{gr}^2(1+2{,}4\frac{r}{R})} u_{v_{gr}}\right]^2 \right\}^{1/2}.$$

Wyznaczone wartości lepkości dynamicznej η wraz z niepewnościami wyniosły:

- dla gliceryny: $\eta = 0{,}732(35) Pa \cdot s$,
- dla oleju silnikowego: $\eta = 0{,}2438(73) Pa \cdot s$.

5.4 Wyznaczenie czasu relaksacji

Ostatnim etapem ćwiczenia było wyznaczenie czasu relaksacji na podstawie wzoru (9) oraz niepewności z zasady propagacji. Przypomnijmy wcześniej wyliczone wartości promienia, gęstości kulki oraz współczynniki lepkości wraz z niepewnościami:

$$r = 1{,}4980\ [mm] = 1{,}4980 \cdot 10^{-3}\ [m],\ u(r) = 0{,}0033\ [mm] = 3{,}3 \cdot 10^{-6}\ [m]$$

$$m_k = 0{,}1130\ [g] = 1,130 \cdot 10^{-4}\ [kg],\ u(m_k) = 0{,}0029\ [g] = 2{,}9 \cdot 10^{-6}\ [kg]$$

$$\eta_g = 0{,}732\ [Pa \cdot s],\ u(\eta_g) = 0{,}035\ [Pa \cdot s]$$

$$\eta_o = 0{,}2438\ [Pa \cdot s],\ u(\eta_o) = 0{,}0073\ [Pa \cdot s]$$

Po podstawieniu do wzoru wartości w odpowiednich jednostkach otrzymujemy wynik w sekundach oraz czasy relaksacji dla obu rozważanych cieczy:

$$[\tau] = \frac{[m_k]}{6\pi[\eta][r]} = \frac{kg}{Pa \cdot s \cdot m} = s$$

$$\tau_g = \frac{m_k}{6\pi \cdot \eta_g \cdot r} = \frac{1{,}13 \cdot 10^{-4}}{6\pi \cdot 0{,}732 \cdot 1{,}4980 \cdot 10^{-3}} = 0{,}00546707\ s = 5{,}46706737\ ms$$

$$\tau_o = \frac{m_k}{6\pi \cdot \eta_o \cdot r} = \frac{1{,}13 \cdot 10^{-4}}{6\pi \cdot 0{,}2438 \cdot 1{,}4980 \cdot 10^{-3}} = 0{,}01641466\ s = 16{,}41465676\ ms$$

Następnie wyliczyliśmy niepewności z zasady propagacji niepewności zapisanej poniższym wzorem:

$$u(\tau) = \sqrt{\left(\frac{\partial \tau}{\partial m_k} \cdot u(m_k)\right)^2 + \left(\frac{\partial \tau}{\partial \eta} \cdot u(\eta)\right)^2 + \left(\frac{\partial \tau}{\partial r} \cdot u(r)\right)^2}$$

Kolejne pochodne cząstkowe wynoszą:

$$\frac{\partial \tau}{\partial m_k} = \frac{1}{6\pi \cdot \eta \cdot r}$$
$$\frac{\partial \tau}{\partial \eta} = -\frac{m_k}{6\pi \cdot \eta^2 \cdot r}$$
$$\frac{\partial \tau}{\partial r} = -\frac{m_k}{6\pi \cdot \eta \cdot r^2}$$

Po podstawieniu pochodnych otrzymujemy:

$$u(\tau) = \sqrt{\left(\frac{1}{6\pi \cdot \eta \cdot r} \cdot u(m_k)\right)^2 + \left(\frac{m_k}{6\pi \cdot \eta^2 \cdot r} \cdot u(\eta)\right)^2 + \left(\frac{m_k}{6\pi \cdot \eta \cdot r^2} \cdot u(r)\right)^2}$$

Obliczamy niepewności czasu relaksacji dla obu cieczy.

$$u(\tau_g) = \sqrt{\left(\frac{2{,}9 \cdot 10^{-7}}{6\pi \cdot 0{,}732 \cdot 1{,}4980 \cdot 10^{-3}}\right)^2 + \left(\frac{1{,}13 \cdot 10^{-4} \cdot 0{,}035}{6\pi \cdot 0{,}732^2 \cdot 1{,}4980 \cdot 10^{-3}}\right)^2 + \left(\frac{1{,}13 \cdot 10^{-4} \cdot 3{,}3 \cdot 10^{-6}}{6\pi \cdot 0{,}732 \cdot (1{,}4980 \cdot 10^{-3})^2}\right)^2}$$

$$u(\tau_o) = \sqrt{\left(\frac{2{,}9 \cdot 10^{-7}}{6\pi \cdot 0{,}2438 \cdot 1{,}4980 \cdot 10^{-3}}\right)^2 + \left(\frac{1{,}13 \cdot 10^{-4} \cdot 0{,}0073}{6\pi \cdot 0{,}2438^2 \cdot 1{,}4980 \cdot 10^{-3}}\right)^2 + \left(\frac{1{,}13 \cdot 10^{-4} \cdot 3{,}3 \cdot 10^{-6}}{6\pi \cdot 0{,}2438 \cdot (1{,}4980 \cdot 10^{-3})^2}\right)^2}$$

$$u(\tau_g) = 2{,}6 \cdot 10^{-4}\ s = 0{,}26\ ms$$
$$u(\tau_o) = 4{,}9 \cdot 10^{-4}\ s = 0{,}49\ ms$$

Ostatecznie czasy relaksacji wynoszą:

- dla gliceryny: $\tau_g = 5{,}47(26)\ ms$,
- dla oleju silnikowego: $\tau_o = 16{,}41(49)\ ms$.

5.5 Porównanie z wartościami tablicowymi η

Teoretyczna wartość współczynnika lepkości dla gliceryny wynosi 1,412 $[Pa \cdot s]$ dla pomiaru w temperaturze 20 $°C$ [3]. Nasz wynik $\eta_g = 0{,}732(35) Pa \cdot s$ znacznie odbiega od wartości tablicowej, co może świadczyć o obecności wody w badanej cieczy (obecność wody może znacznie obniżyć współczynnik lepkości) lub innych błędach pomiarowych.
Wartość współczynnika lepkości oleju silnikowego wymaga wyliczenia na podstawie wzoru[4]:

$$\eta_k = \frac{\eta_d}{\rho_c}, \tag{23}$$

gdzie η_k to lepkość kinematyczna wynosząca $9 \cdot 10^{-4} \frac{m^2}{s}$ [5], η_d to lepkość dynamiczna (przez nas wyliczona), ρ_c gęstość cieczy. Przykształcając powyższy wzór oraz mając dane η_k i ρ_c otrzymujemy: $\eta_d = 9 \cdot 10^{-4} \cdot 867 = 0{,}7803\ [Pa \cdot s]$. Wyliczona przez nas lepkość wynosi $\eta = 0{,}2438(73) Pa \cdot s$, czyli również znajduje się poza marginesami błędów. Może być to spowodowane przeprowadzeniem eksperymentu z innym rodzajem oleju silnikowego, ponieważ powyższa wartość teoretyczna jest odpowiednia dla oleju silnikowego SAE 20W. Biorąc olej silnikowy ISO 100 (czyli taki który w temperaturze 40 $°C$ ma lepkość kinematyczną na poziomie 100 $\frac{mm^2}{s}$) odczytujemy z wykresu zależności temperatury od lepkości kinematycznej [4] wartość $\eta_k = 300\ \frac{mm^2}{s}$ i po podstawieniu do wzoru (23) otrzymujemy:

$$\eta_d = 300 \cdot 10^{-6} \cdot 867 = 0{,}2601\ [Pa \cdot s].$$

Ta wartość jest znacznie bliższa otrzymanemu wynikowi.

6 Podsumowanie

W ramach ćwiczenia wykonaliśmy pomiary czasu opadania kulki w dwóch cieczach: glicerynie i oleju silnikowym. Na podstawie uzyskanych pomiarów wyliczyliśmy współczynnik lepkości obu cieczy η oraz czasy relaksacji τ. Otrzymane wyniki współczynnika lepkości dla gliceryny są niższe od wartości tablicowych (wyliczona wartość: $\eta_g = 0{,}732(35)[Pa \cdot s]$, odczytana wartość: $\eta_g = 1{,}412[Pa \cdot s]$) co może być znakiem pracy z roztworem gliceryny, którego lepkość jest znacznie niższa. Lepkość oleju silnikowego jest bardzo bliska wartości teoretycznej równej $\eta_o = 0{,}2601\ [Pa \cdot s]$. Czasy relaksacji wyszły rzędu milisekund, więc jest to zgodne z rzeczywistym stanem zjawiska.

7 Literatuta

Literatura

[1] Krystyna Wosińska Piotr Jaśkiewicz. Wyznaczenie współczynnika lepkości cieczy. *Centralne Laboratorium Fizyki.*

[2] Wikipedia. Prawo stokesa. https://pl.wikipedia.org/wiki/Prawo_Stokesa, 2025.

[3] Wikipedia. Glycerol. https://en.wikipedia.org/wiki/Glycerol, 2025.

[4] Sanya Mathura. Oil viscosity: A practical guide.

[5] Wikipedia. Motor oil. https://en.wikipedia.org/wiki/Motor_oil, 2025.

8 Wkład poszczególnych osób w wykonanie ćwiczenia:

1. Katarzyna Skoczylas: wyznaczenie gęstości kulek, prędkości granicznych i lepkości
2. Alicja Przeździecka: wyznaczenie czasów relaksacji, porównanie z wartościami tablicowymi i podsumowanie
3. Miłosz Zieliński: cel, wstęp matematyczny i układ pomiarowy