Seminarska naloga iz statistike

Žiga Gladek

September 20, 2021

Povzetek

V tem dokumentu so povzete obravnave nalog, ki sem jih preučeval v sklopu predmeta statistika na programu Matematika UN. Pri reševanju sem si pomagal s programskim jezikom Python, z orodjem Jupyter Notebook in s knjižnico pandas za branje datotek tipa csv. Za prikaze podatkov sem uporabljal knjižnico matplotlib. Za večino uporabljenih metod se sklicujem na zapiske iz predavanj, za preostanek pa na priporočeno literaturo [1].

1. naloga: Kibergrad

Točka a)

Najprej moramo vzeti enostavni slučajni vzorec 200 družin in oceniti delež družin v Kibergradu, v katerih vodja gospodinjstva nima mature. Pravi delež bomo označili s p. Enostavni slučajni vzorec lahko v programu dobimo s pomočjo ukaza *sample*. Nepristranska ocena za p je:

$$\hat{p} = \frac{\text{št. gospodinjstev v vzorcu brez mature}}{200}.$$

Lahko si mislimo, da smo v enostavnem slučajnem vzorcu gospodinjstvom, v katerih ima vodja vsaj maturo, priredili število 0, tistim, v katerih ima nižjo izobrazbo pa 1. V tem primeru je ta ocena le povprečje vrednosti v dobljenem vzorcu. Če to implementiramo, nam program pove, da je $\hat{p} = 0,18500$. Seveda pri različnih vzorcih lahko dobimo drugačno oceno, za nadaljnjo obravnavo pa se bomo držali kar te.

Točka b)

Ocenili bomo standardno napako, ki je po definiciji enaka $se = \sqrt{var(\hat{p})}$. Naj bo N velikost populacije, n velikost vzorca in σ^2 populacijska varianca. Potem vemo, da pri enostavnem slučajnem vzorcu velja formula:

$$se = \sqrt{\frac{N-n}{N-1}\frac{\sigma^2}{n}}.$$

V resnici pa σ^2 ne poznamo, zato moramo najprej oceniti še to. V našem primeru, kjer smo vse družine v vzorcu razdelili v dve skupini, velja $\sigma^2 = p(1-p)$. To znamo oceniti s pomočjo $\hat{p}$ kot $\hat{\sigma}^2 = \hat{p}(1-\hat{p})$, vendar pa ta ocena ni nepristranska. Iz predavanj vemo, da jo lahko do nepristranske popravimo na naslednji način:

$$\hat{\sigma}_+^2 = \frac{N-1}{N}\frac{n}{n-1}\hat{p}(1-\hat{p}).$$

Končno dobimo še nepristransko oceno za standardno napako:

$$\hat{se}_+ = \sqrt{\frac{N-n}{N}\frac{1}{n-1}\hat{p}(1-\hat{p})}.$$

V našem primeru je $N = 43886$ in $n = 200$. Program nam sedaj pove, da je pri danem vzorcu $\hat{se}_+$ enaka približno $0,02746$. Na podlagi te ocene sedaj lahko izpeljemo še 95% interval zaupanja za p. Da ga dobimo, bomo upoštevali, da je približno $\frac{\hat{p}-p}{\hat{se}_+} \sim Student(n-1)$. Pri stopnji tveganja $\alpha = 0,05$ dobimo aproksimativni interval zaupanja za p:

$$p \in \left[\hat{p} - F^{-1}_{Student(199)}(0,975)\hat{se}_+, \quad \hat{p} + F^{-1}_{Student(199)}(0,975)\hat{se}_+\right].$$

Ta je pri danih podatkih enak približno $[0,13062, 0,23938]$. Pri tem smo na podlagi tabele kvantilov Studentove porazdelitve upoštevali, da je $F^{-1}_{Student(199)}(0,975)$ približno enak $1,98$. Dejansko smo uporabili kvantil, ki ustreza 120 prostostnim stopnjam, vendar je to za naše namene dovolj dober približek.

Točka c)

Poglejmo populacijski delež gospodinjstev, v katerih vodja gospodinjstva nima srednješolske izobrazbe. Ta delež je enak:

$$p = \frac{\text{št. gospodinjstev brez mature}}{N} = 0,21150.$$

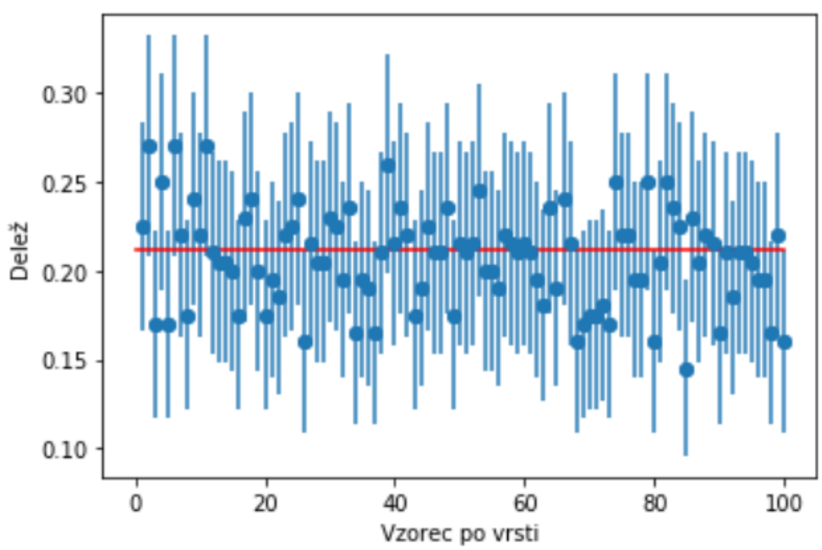
Naša točkovna ocena se od točne vrednosti torej razlikuje za slabe 3%, opazimo pa tudi, da prej dobljeni aproksimativni interval zaupanja pokrije populacijski delež. S tem da poznamo p lahko izračunamo tudi pravo standardno napako pri vzorcih velikosti 200. Upoštevajmo, da je $\sigma^2 = p(1-p)$. Tedaj je:

$$se = \sqrt{\frac{N-n}{N-1}\frac{\sigma^2}{n}} = \sqrt{\frac{N-n}{N-1}\frac{p(1-p)}{n}} \doteq 0,02881.$$

Približek $\hat{se}_+$ se torej od točne vrednosti razlikuje šele na tretji decimalki.

Točka d)

Vzeli bomo še 99 enostavnih slučajnih vzorcev in za vsakega od teh določili 95% interval zaupanja za p. S pomočjo programa dobimo, da je delež intervalov, ki pokrije populacijski delež enak $\frac{95}{100}$. Poglejmo si to še s sliko:



Rdeča črta na sliki prikazuje populacijski delež, intervali zaupanja pa so narisani vertikalno, pri čemer je vrednost na sredini intervala dodatno označena z modro piko. Število intervalov, ki je pokrilo populacijski delež ni presenetljivo in kvečjemu potrdi, da smo pravilno določilli interval zaupanja, saj 95% interval zaupanja pomeni ravno to, da bo populacijski delež pokril v približno $\frac{95}{100}$ primerih.

Točka e)

Določimo še standardne odklone za teh 100 dobljenih vzorcev.

Literatura

[1] J. A. Rice, *Mathematical Statistics and Data Analysis, Third Edition*, Thomson Brooks/Cole, Duxbury, 2007