Univerza v Ljubljani

Fakulteta za matematiko in fiziko

Finančni praktikum

Največje neodvisne množice z lokalnim iskanjem

Avtorja:
Jaka Mrak
Žiga Gartner

Mentorja:
prof. dr. Sergio Cabello
doc. dr. Janoš Vidali

Ljubljana, 8. januar 2022

Kazalo

1 Navodilo

Naloga je iskanje največje neodvisne množice v grafu $G = (V, E)$ s pomočjo celoštevilskega linearnega programiranja. Velike neodvisne množice v grafu lahko poiščemo s pomočjo metode lokalnega iskanja. Začnemo s poljubno neodvisno množico $U \subseteq V$, kjer k vozlišč nadomestimo s $k + 1$ vozlišči tako, da ohranjamo neodvisnost množice U. Konstanta k je dana na začetku. Primerjali bomo metodi lokalnega iskanja in optimalne rešitve ter primerjali njune rešitve za nekatere preproste grafe.

2 Opis problema

Definicija 1. *Naj bo $G = (V, E)$ graf.* ***Neodvisna množica*** *U, v grafu G, je taka podmnožica množice vozlišč V, kjer poljubni dve vozlišči iz množice U nista sosednji.* ***Maksimalna neodvisna množica*** *v grafu G pa je taka neodvisna množica, kjer ne obstaja vozlišče $v \in V$ in $v \notin U$, ki bi ga lahko dodali množici U in pri tem ohranili neodvisnost množice U. Torej je neodvisna množica U največja taka, če velja ena od naslednjih dveh lastnosti:*

1. $v \in U$
2. $S(v) \cap U \neq \emptyset$, *kjer je $S(v)$ množica sosedov v.*

Največja neodvisna množica *je neodvisna množica, največje možne velikosti, za dan graf G. Velikosti največje neodvisne množice, za graf G, pa pravimo* ***neodvisnostno število*** *in pogosto označimo $\alpha(G)$.*

Definicija 2. *Celoštevilski linearni program v standardni obliki je dan z matriko $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, vektorjem $b \in \mathbb{R}^m$ in vektorjem $c \in \mathbb{R}^n$. Iščemo*

$$max < c, x >,$$

da bodo zadoščeni pogoji

$$Ax \leq b, x \geq 0,$$

kjer je $x \in \mathbb{Z}^n$.

Posledica 1. *Problem največje neodvisne množice v grafu $G = (V, E)$ lahko s celoštevilskim linearnim programiranjem modeliramo na sledeč način:*

$$max \sum_{v \in V} x_v,$$

da velja:

$$x_v + x_w \leq 1 \ za \ \forall vw \in E,$$
$$x_v \in \{0, 1\}$$
$$x_u = \begin{cases} 1, & za \ u \in U \\ 0, & za \ u \notin U \end{cases}, U \text{ neodvisna množica v grafu } G.$$

Največjo neodvisno množico v množici vseh neodvisnih podmnožic grafa $G = (V, E)$ bomo iskali s pomočjo celoštevilskega lineranega programiranja in lokalnega iskanja. **Lokalno iskanje** temelji na izbiri začetne neodvisne podmnožiče vozlišč $U \subset V$ v kateri k vozlišč zamenjamo s $k+1$ vozlišči in pri tem ohranjamo neodvisnost množice U.

3 Opis dela

3.1 Generiranje podatkov

3.2 Algoritmi

Algorithm 1 Naključni MIS

$I \leftarrow \emptyset$
$\forall v \in V$ dobi vrednost $P(v) \in \mathit{permutacija}(V)$
if $P(v) < P(w)$ *za* $\forall w \in \mathit{sosedi}(v)$ **then**
    $I \leftarrow I \cup v$
$V' \leftarrow V \setminus (I \cup \mathit{sosedi}(I))$.
$E' \leftarrow E \setminus \mathit{povezave}(I)$.
return $I \cup \mathit{MIS}(G' = (V', E'))$

Algorithm 2 Naključni MIS

$I \leftarrow \emptyset$
$\forall v \in V$ dobi vrednost $P(v) \in \mathit{permutacija}(V)$
if $P(v) < P(w)$ *za* $\forall w \in \mathit{sosedi}(v)$ **then**
    $I \leftarrow I \cup v$
$V' \leftarrow V \setminus (I \cup \mathit{sosedi}(I))$.
$E' \leftarrow E \setminus \mathit{povezave}(I)$.
return $I \cup \mathit{MIS}(G' = (V', E'))$

3.3 Analiza rezultatov

4 Sklep

5 Viri