

UNIVERZA V LJUBLJANI

Fakulteta za matematiko in fiziko

Finančni praktikum

Največje neodvisne množice z lokalnim
iskanjem

Avtorja:

Jaka Mrak

Žiga Gartner

Mentorja:

prof. dr. Sergio CABELLO

doc. dr. Janoš VIDALI

Ljubljana, 7. januar 2022

Kazalo

1	Navodilo	2
2	Opis problema	2
3	Nadaljnji potek dela	3

1 Navodilo

Naloga je iskanje največje neodvisne množice v grafu $G = (V, E)$ s pomočjo celoštevilkega linearnega programiranja. Velike neodvisne množice v grafu lahko poiščemo s pomočjo metode lokalnega iskanja. Začnemo s poljubno neodvisno množico $U \subseteq V$, kjer k vozlišč nadomestimo s $k + 1$ vozlišči tako, da ohranjamo neodvisnost množice U . Konstanta k je dana na začetku. Primerjali bomo metodi lokalnega iskanja in optimalne rešitve ter primerjali njune rešitve za nekatere preproste grafe.

2 Opis problema

Definicija 1. Naj bo $G = (V, E)$ graf. **Neodvisna množica** U , v grafu G , je taka podmnožica množice vozlišč V , kjer poljubni dve vozlišči iz množice U nista sosednji. **Maksimalna neodvisna množica** v grafu G pa je taka neodvisna množica, kjer ne obstaja vozlišče $v \in V$ in $v \notin U$, ki bi ga lahko dodali množici U in pri tem ohranili neodvisnost množice U . Torej je neodvisna množica U največja taka, če velja ena od naslednjih dveh lastnosti:

1. $v \in U$
2. $S(v) \cap U \neq \emptyset$, kjer je $S(v)$ množica sosedov v .

Največja neodvisna množica je neodvisna množica, največje možne velikosti, za dan graf G . Velikosti največje neodvisne množice, za graf G , pa pravimo **neodvisnostno število** in pogosto označimo $\alpha(G)$.

Definicija 2. Celoštevski linearni program v standardni obliki je dan z matriko $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, vektorjem $b \in \mathbb{R}^m$ in vektorjem $c \in \mathbb{R}^n$. Iščemo

$$\max \langle c, x \rangle,$$

da bodo zadoščeni pogoji

$$Ax \leq b, x \geq 0,$$

kjer je $x \in \mathbb{Z}^n$.

Posledica 1. Problem največje neodvisne množice v grafu $G = (V, E)$ lahko s celoštevilskim linearnim programiranjem modeliramo na sledeč način:

$$\max \sum_{v \in V} x_v,$$

da velja:

$$x_v + x_w \leq 1 \text{ za } \forall vw \in E, \\ x_v \in \{0, 1\}$$

$$x_u = \begin{cases} 1, & \text{za } u \in U \\ 0, & \text{za } u \notin U \end{cases}, U \text{ neodvisna množica v grafu } G.$$

Največjo neodvisno množico v množici vseh neodvisnih podmnožic grafa $G = (V, E)$ bomo iskali s pomočjo celoštevilkega linearnega programiranja in lokalnega iskanja. **Lokalno iskanje** temelji na izbiri začetne neodvisne podmnožice vozlišč $U \subset V$ v kateri k vozlišč zamenjamo s $k + 1$ vozlišči in pri tem ohranjamo neodvisnost množice U .

3 Nadaljnji potek dela

V nadaljevanju bomo optimalno rešitev, pridobljeno z uporabo celoštevilskega linearnega programiranja, primerjali z rešitvami dobljenimi z nekaterimi ostalimi pristopi za iskanje največje neodvisne množice v grafu. Postopek bomo ponovili za različne razrede grafov in nato analizirali odstopanja rešitev od optimalne rešitve. Za reševanje problema bomo uporabljali programski jezik *SAGE*.