Univerza v Ljubljani

Fakulteta za matematiko in fiziko

Finančni praktikum

Največje neodvisne množice z lokalnim iskanjem

Avtorja:
Jaka Mrak
Žiga Gartner

Mentorja:
prof. dr. Sergio Cabello
doc. dr. Janoš Vidali

Ljubljana, 9. januar 2022

Kazalo

1 Navodilo **2**

2 Opis problema **2**

3 Opis dela **3**
3.1 Generiranje podatkov 3
3.2 Algoritmi 3
3.3 Analiza rezultatov 4
3.3.1 Analiza algoritmov na grafih $G(50, 0.3)$ 4

4 Sklep **5**

Literatura **6**

1 Navodilo

Naloga je iskanje največje neodvisne množice v grafu $G = (V, E)$ s pomočjo celoštevilskega linearnega programiranja. Velike neodvisne množice v grafu lahko poiščemo s pomočjo metode lokalnega iskanja. Začnemo s poljubno neodvisno množico $U \subseteq V$, kjer k vozlišč nadomestimo s $k + 1$ vozlišči tako, da ohranjamo neodvisnost množice U. Konstanta k je dana na začetku. Primerjali bomo metodi lokalnega iskanja in optimalne rešitve ter primerjali njune rešitve za nekatere preproste grafe.

2 Opis problema

Definicija 1. *Naj bo $G = (V, E)$ graf. **Neodvisna množica** U, v grafu G, je taka podmnožica množice vozlišč V, kjer poljubni dve vozlišči iz množice U nista sosednji. **Maksimalna neodvisna množica** v grafu G pa je taka neodvisna množica, kjer ne obstaja vozlišče $v \in V$ in $v \notin U$, ki bi ga lahko dodali množici U in pri tem ohranili neodvisnost množice U. Torej je neodvisna množica U največja taka, če velja ena od naslednjih dveh lastnosti:*

1. *$v \in U$*
2. *$S(v) \cap U \neq \emptyset$, kjer je $S(v)$ množica sosedov v.*

***Največja neodvisna množica** je neodvisna množica, največje možne velikosti, za dan graf G. Velikosti največje neodvisne množice, za graf G, pa pravimo **neodvisnostno število** in pogosto označimo $\alpha(G)$.*

Definicija 2. *Celoštevilski linearni program v standardni obliki je dan z matriko $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, vektorjem $b \in \mathbb{R}^m$ in vektorjem $c \in \mathbb{R}^n$. Iščemo*

$$max < c, x >,$$

da bodo zadoščeni pogoji

$$Ax \leq b, x \geq 0,$$

kjer je $x \in \mathbb{Z}^n$.

Posledica 1. *Problem največje neodvisne množice v grafu $G = (V, E)$ lahko s celoštevilskim linearnim programiranjem modeliramo na sledeč način:*

$$max \sum_{v \in V} x_v,$$

da velja:

$$x_v + x_w \leq 1 \ za \ \forall vw \in E,$$

$$x_v \in \{0, 1\}$$

$$x_u = \begin{cases} 1, & za \ u \in U \\ 0, & za \ u \notin U \end{cases}, \ U \ neodvisna \ množica \ v \ grafu \ G.$$

Največjo neodvisno množico v množici vseh neodvisnih podmnožic grafa $G = (V, E)$ bomo iskali s pomočjo celoštevilskega lineranega programiranja in lokalnega iskanja. **Lokalno iskanje** temelji na izbiri začetne neodvisne podmnožiče vozlišč $U \subset V$ v kateri k vozlišč zamenjamo s $k+1$ vozlišči in pri tem ohranjamo neodvisnost množice U.

3 Opis dela

V nadaljevanju bomo največjo oz. maksimalno množico iskali s pomočjo CLP, v Sage, in s pomočjo implementiranega algoritma $nakljucni\_MIS(G)$ kasneje izboljšanega z lokalnim iskanjem. Algoritme bomo izvajali na grafih, generiranih s pomočjo Erdős-Rényijevega $G(n, p)$ modela. Primerjali bomo maksimalne (ali pa največje) neodvisne množice, ki jih algoritmi poiščejo, časovno zahtevnost algoritmov, kasneje pa še, kako vpliva spreminjanje števila vozlišč in verjetnosti, v modelu, na velikost maksimalne (ali pa največje) neodvisne množice in časovno zahtevnost algoritmov.

3.1 Generiranje podatkov

Kot omenjeno, bomo grafe generirali s pomočjo Erdős-Rényijevega $G(n, p)$ modela.

Definicija 3. *Erdős-Rényijev model $G(n, p)$ generira graf z n naključno povezanimi vozlišči. Vsaka povezava je v graf vključena neodvisno, z verjetnostjo p.*

Generirali bomo grafe s konstantima (n, p), z naraščajočim n in konstantnim p ter s konstantim n in naraščajočim p. Za generacijo podatkov v Pythonu bomo uporabili knjižnico $NetworkX$, nato pa objekte grafov, s funkcijo $nx.to\_dict\_of\_lists(graf)$, kjer je nx okrajšava za $NetworkX$, pretvorili še v slovarje list, da bomo lahko grafe uporabljali še v okolju $Sage$. Grafe, na katerih bomo izvajali algoritme, bomo shranili še v $JSON$ datoteke.

3.2 Algoritmi

Za iskanje maksimalne neodvisne množice smo implementirali algoritem $nakljucni\_MIS(G)$, čigar rešitev bomo poizkušali izboljšati še z algoritmom $lokalno\_iskanje(G, I)$. Oba algoritma bosta kot argument sprejela graf G, algoritem $lokalno\_iskanje(G, I)$ pa še neko maksimalno neodvisno množico I, grafa G.

Algoritem 1 $nakljucni\_MIS(G)$

1: $I \leftarrow \emptyset$
2: $\forall v \in V$ dobi vrednost $P(v) \in permutacija(V)$
3: **if** $P(v) < P(w)$ *za* $\forall w \in sosedi(v)$ **then**
4: $\quad I \leftarrow I \cup v$
5: $V' \leftarrow V \setminus (I \cup sosedi(I))$.
6: $E' \leftarrow E \setminus povezave(I)$.
7: return $I \cup MIS(G' = (V', E'))$

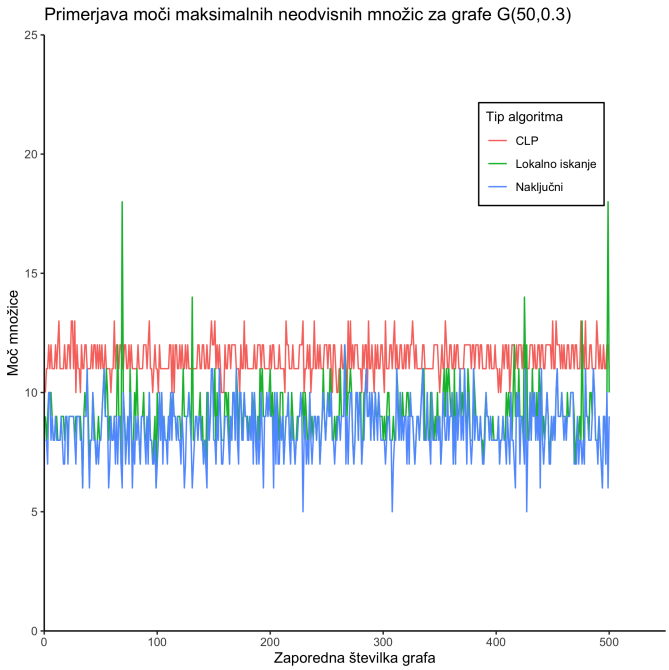
Algoritem 2 $lokalno\_iskanje(G, I)$

1: $I \leftarrow \emptyset$
2: $\forall v \in V$ dobi vrednost $P(v) \in permutacija(V)$
3: **if** $P(v) < P(w)$ *za* $\forall w \in sosedi(v)$ **then**
4: $\quad I \leftarrow I \cup v$
5: $V' \leftarrow V \setminus (I \cup sosedi(I))$.
6: $E' \leftarrow E \setminus povezave(I)$.
7: return $I \cup MIS(G' = (V', E'))$

3.3 Analiza rezultatov

3.3.1 Analiza algoritmov na grafih $G(50, 0.3)$

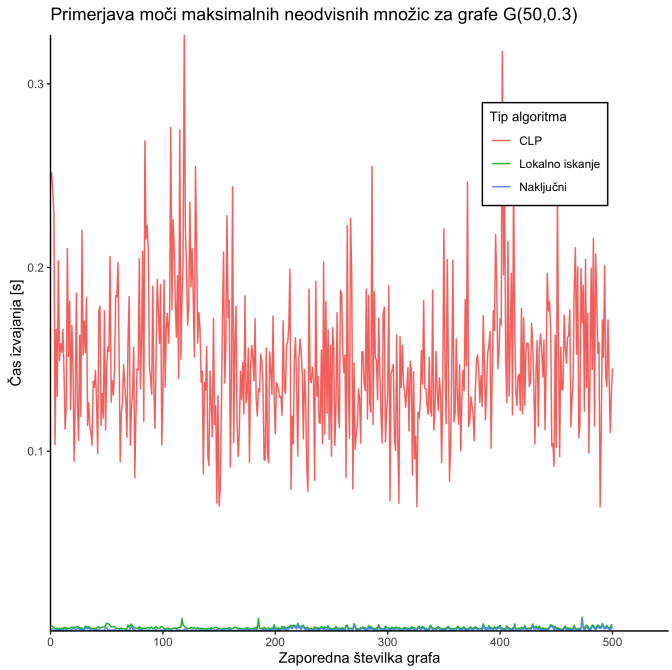
Najprej bomo primerjali algoritme na Erdős-Rényijevih $G(50, 0.3)$. Na tak način sva generirala 500 grafo in na njih izvedla algoritma $CLP(G)$, $nakljucni\_MIS(G)$, za vsak graf pa sva slednjega poskušala izboljšati še z algoritmom $lokalno\_iskanje(G, I)$, ki poleg grafa G sprejme še $I = nakljucni\_MIS(G)$.



Slika 1: Moči neodvisnih množic za grafe $G(50, 0.3)$

Opazimo, da neodvisne množice največjih moči najde CLP. Kljub temu so na grafu opazni osamelci, ko $lokalno\_iskanje(G, I)$ vrne neodvisne množice izstopajočih moči. Teh pojavov si ne znava najbolje razložiti. Bodisi CLP nikoli ne vrne največje neodvisne množice, neodvisna množica $I = nakljucni\_MIS(G)$ pa je v teh primerih odlična za lokalno iskanje.

Kljub temu, da je, za generirane grafe, CLP najpogosteje vrnil najboljšo rešitev, lahko v naslednjem grafu vidimo njegovo slabost, CLP je občutno počasnejši od preostalih dveh algoritmov.

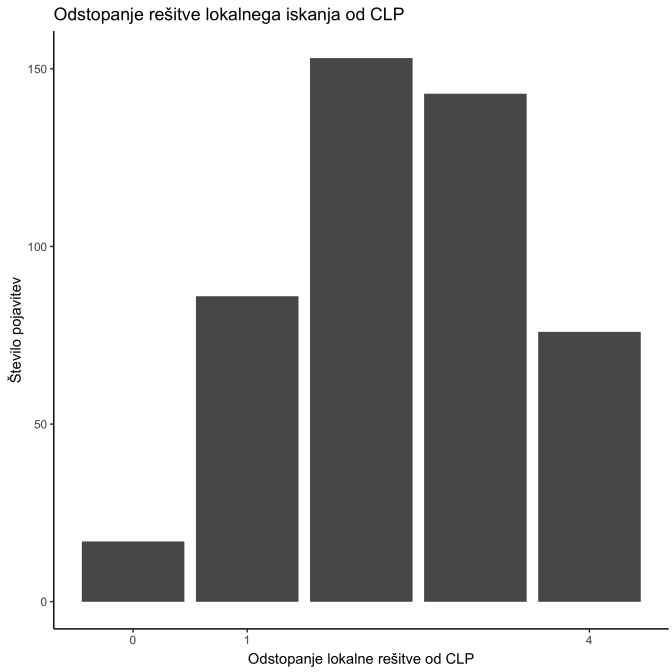


Slika 2: Časovne zahtevnosti algoritmov za $G(50, 0.3)$

Če si pogledamo še odstopanja rešitev *lokalnega_iskanja* od CLP opazimo, da je bila rešitev *lokalnega_iskanja* največkrat za dve vozlišči manjša od rešitve CLP.

a a a a a

4 Sklep



Slika 3: Odstopanja rešitev lokalnega iskanja do CLP.

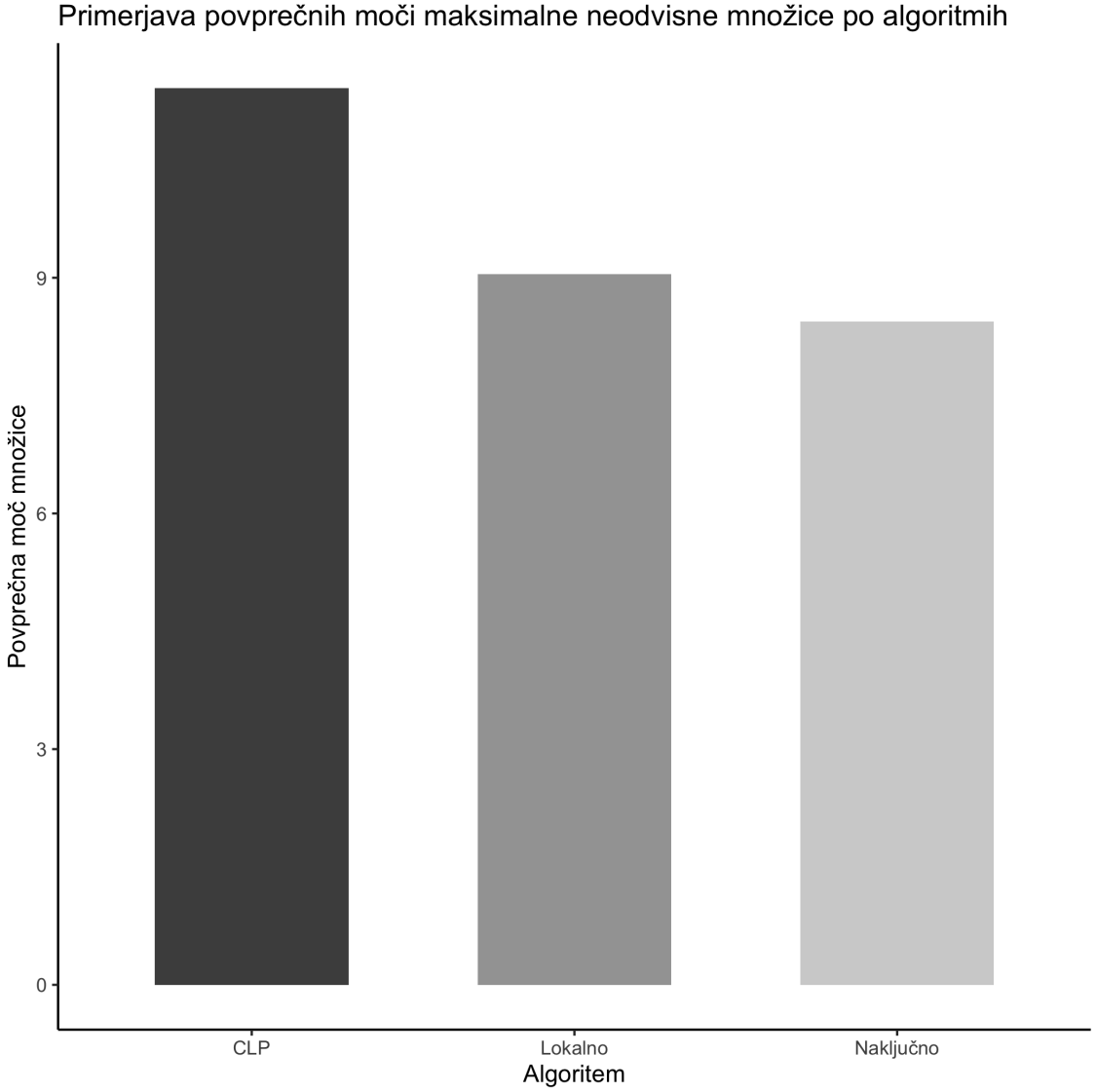
Literatura

[1] Gary Miller. *Lecture 32: Luby's Algorithm for Maximal Independent Set*, dostopno na `http://www.cs.cmu.edu/afs/cs/academic/class/15750-s18/ScribeNotes/lecture32.pdf`.

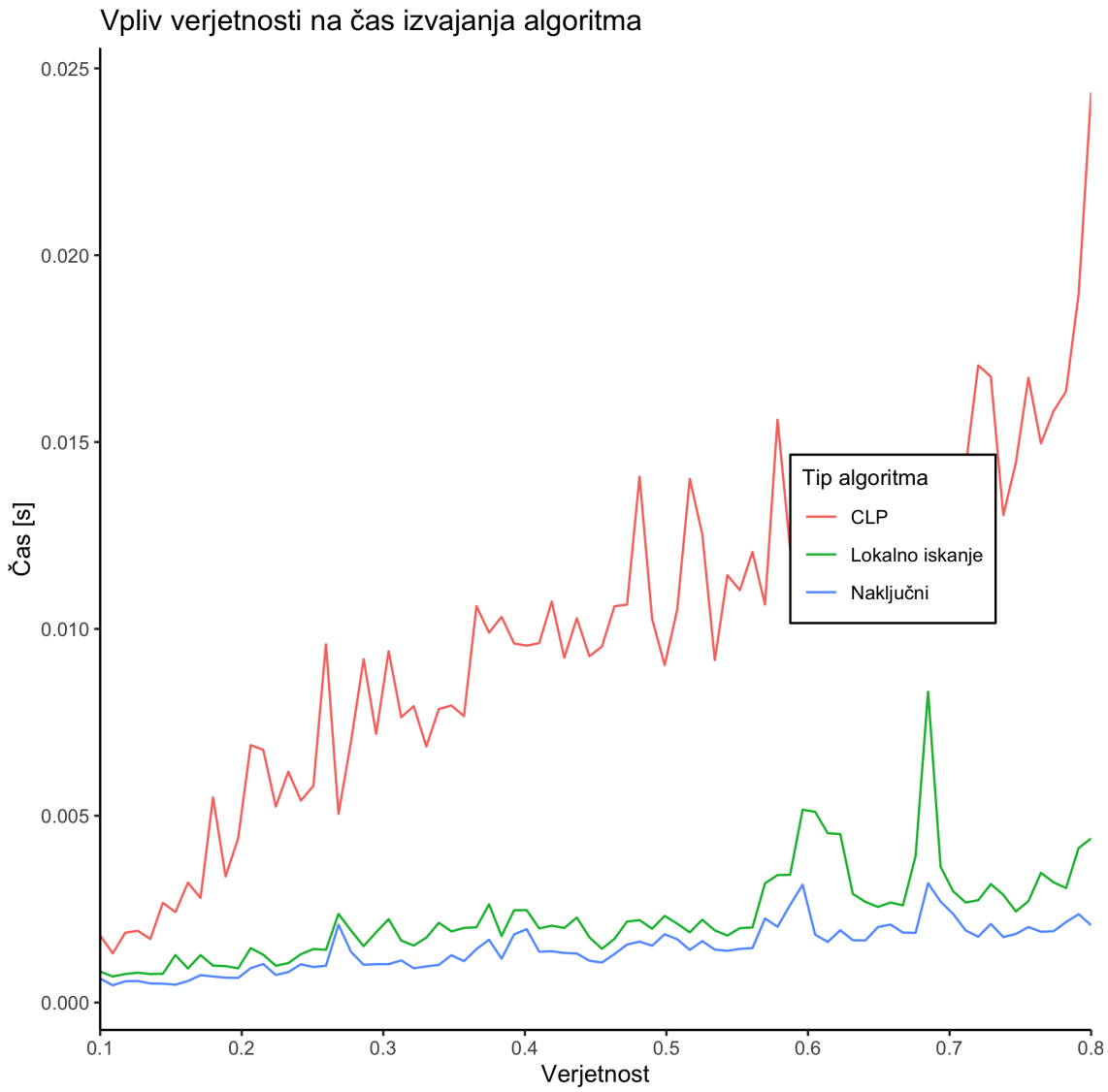
[2] Diogo Andrade, Mauricio G. C. Resende. *Fast Local Search for the Maximum Independent Set Problem.* Conference Paper in Journal of Heuristics, May 2008, dostopno na `https://www.researchgate.net/publication/221131653_Fast_Local_Search_for_the_Maximum_Independent_Set_Problem`.

[3] *Maximal independent set*, v: Wikipedia: The Free Encyclopedia,[ogled 6. 1. 2022], dostopno na `https://en.wikipedia.org/wiki/Maximal_independent_set`.

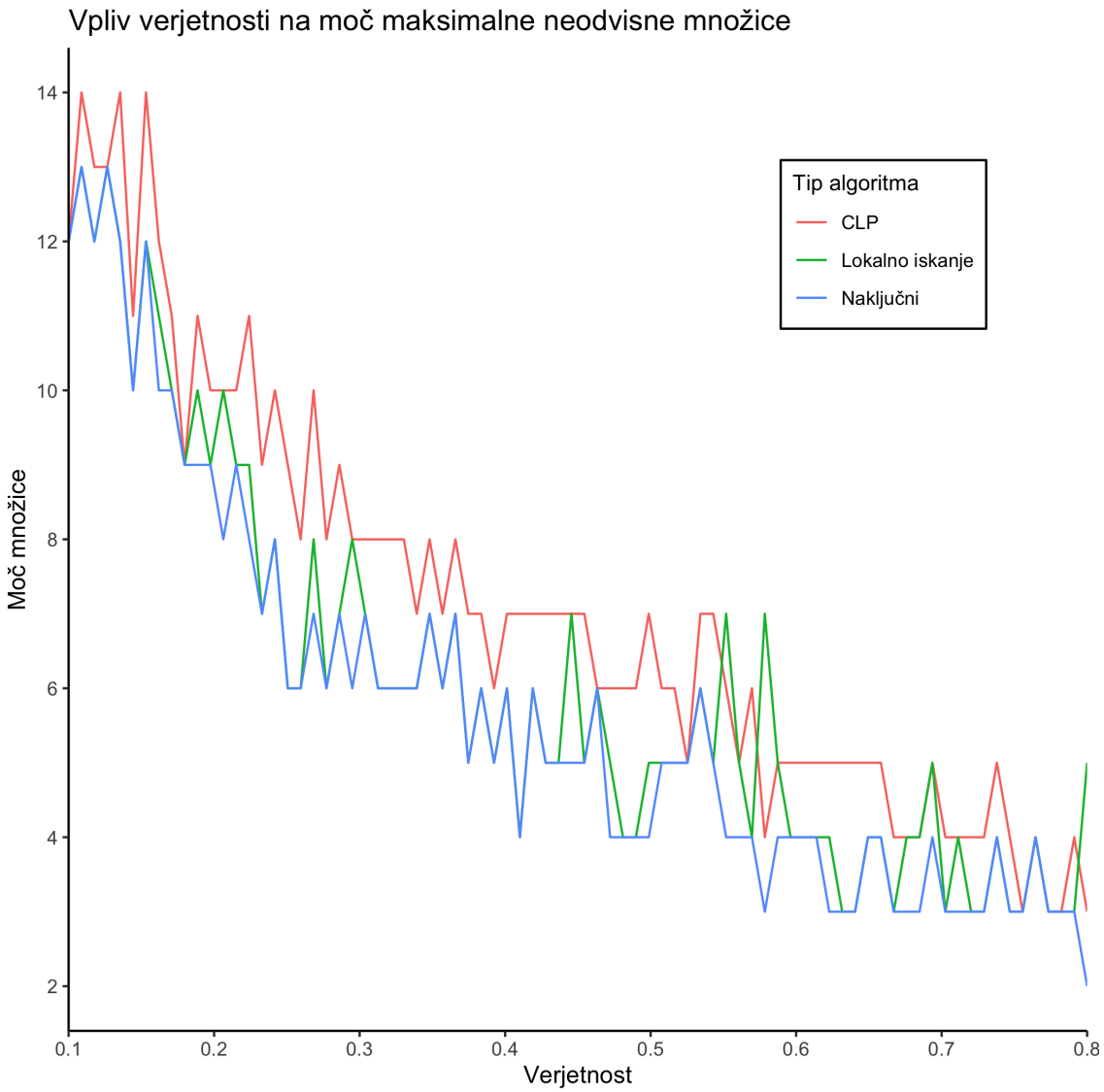
[4] *Independent set (graph theory)*, v: Wikipedia: The Free Encyclopedia,[ogled 6. 1. 2022], dostopno na `https://en.wikipedia.org/wiki/Independent_set_(graph_theory)`.



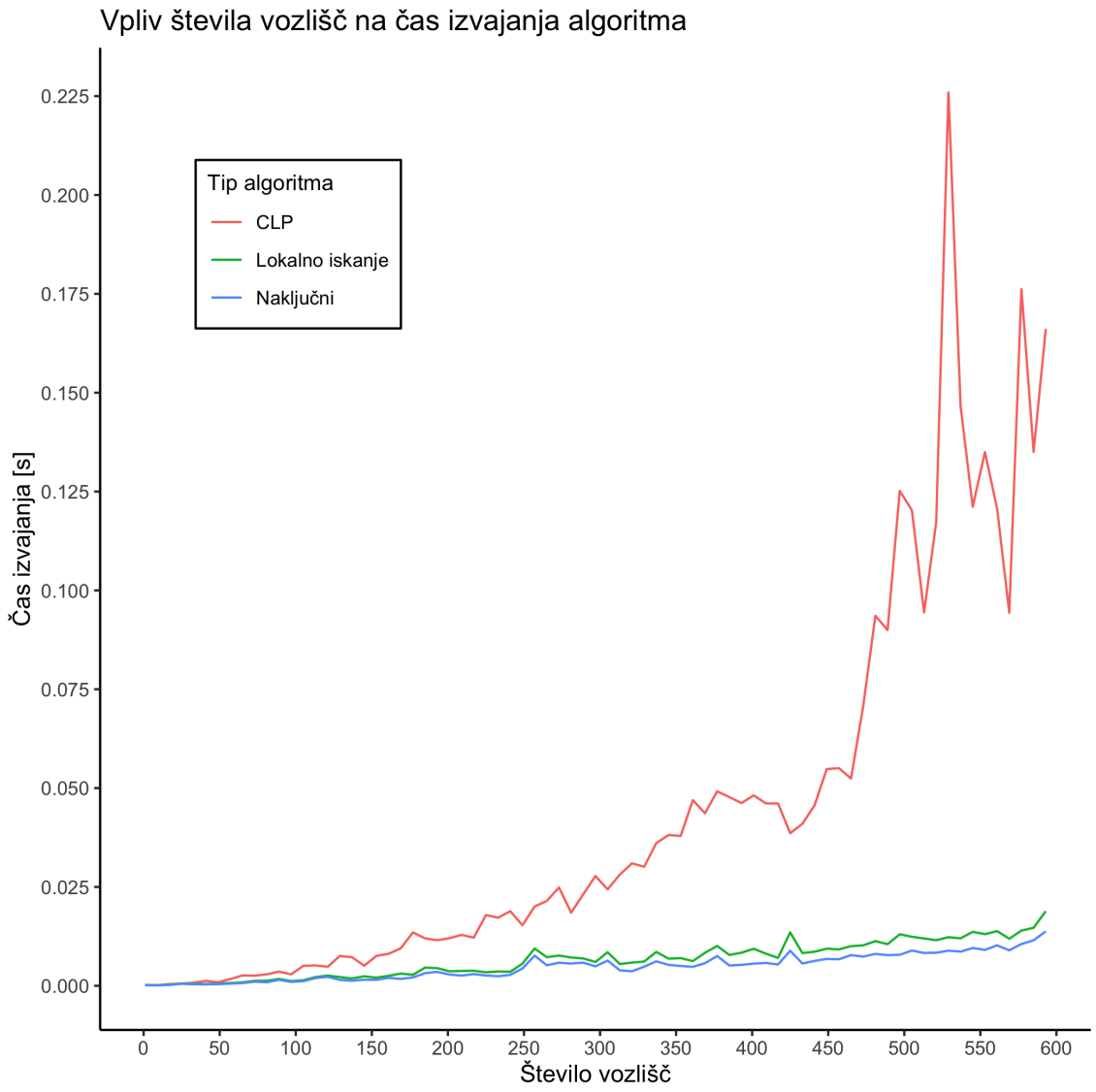
Slika 4: Časovnica SPACa.



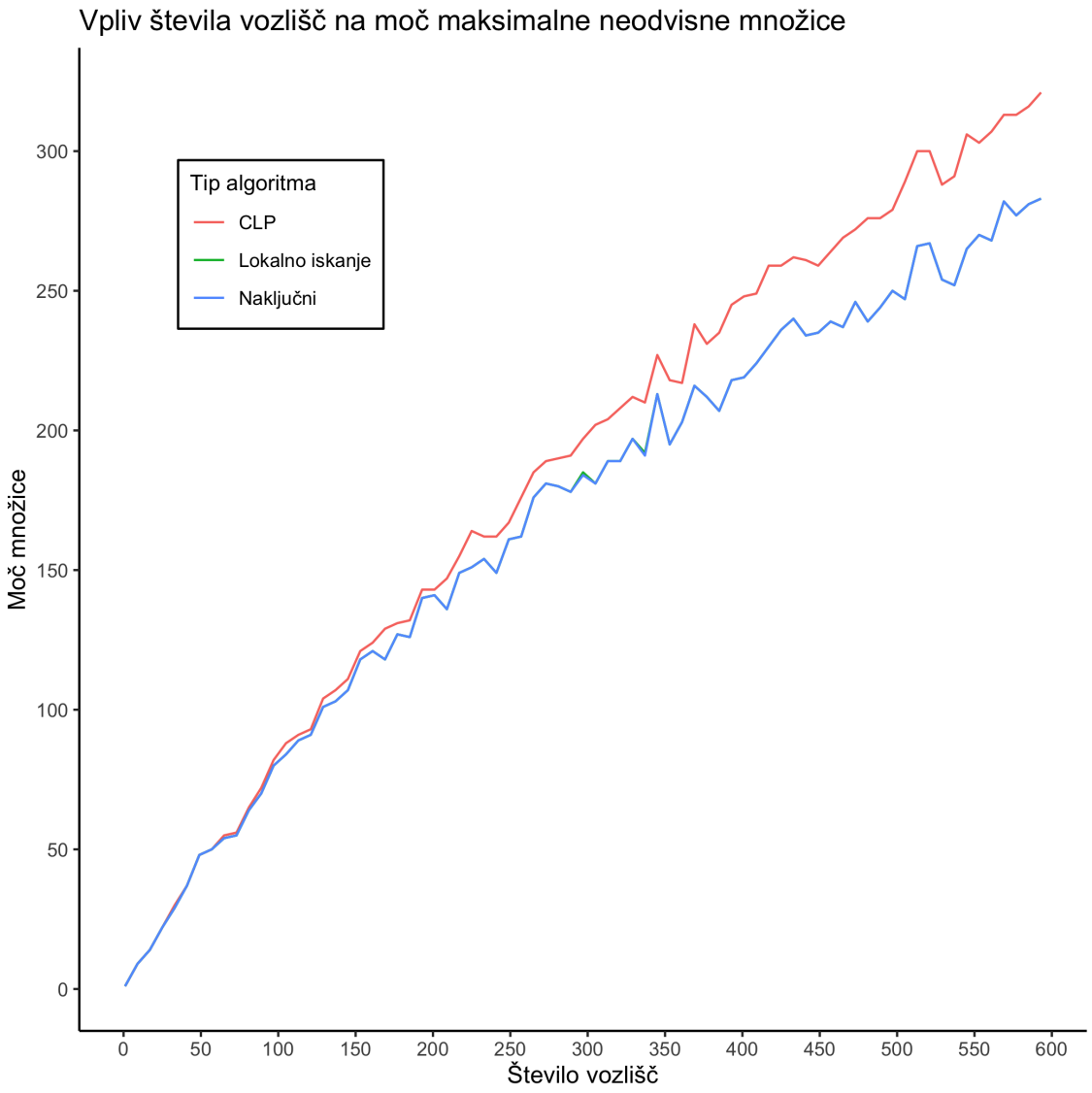
Slika 5: Časovnica SPACa.



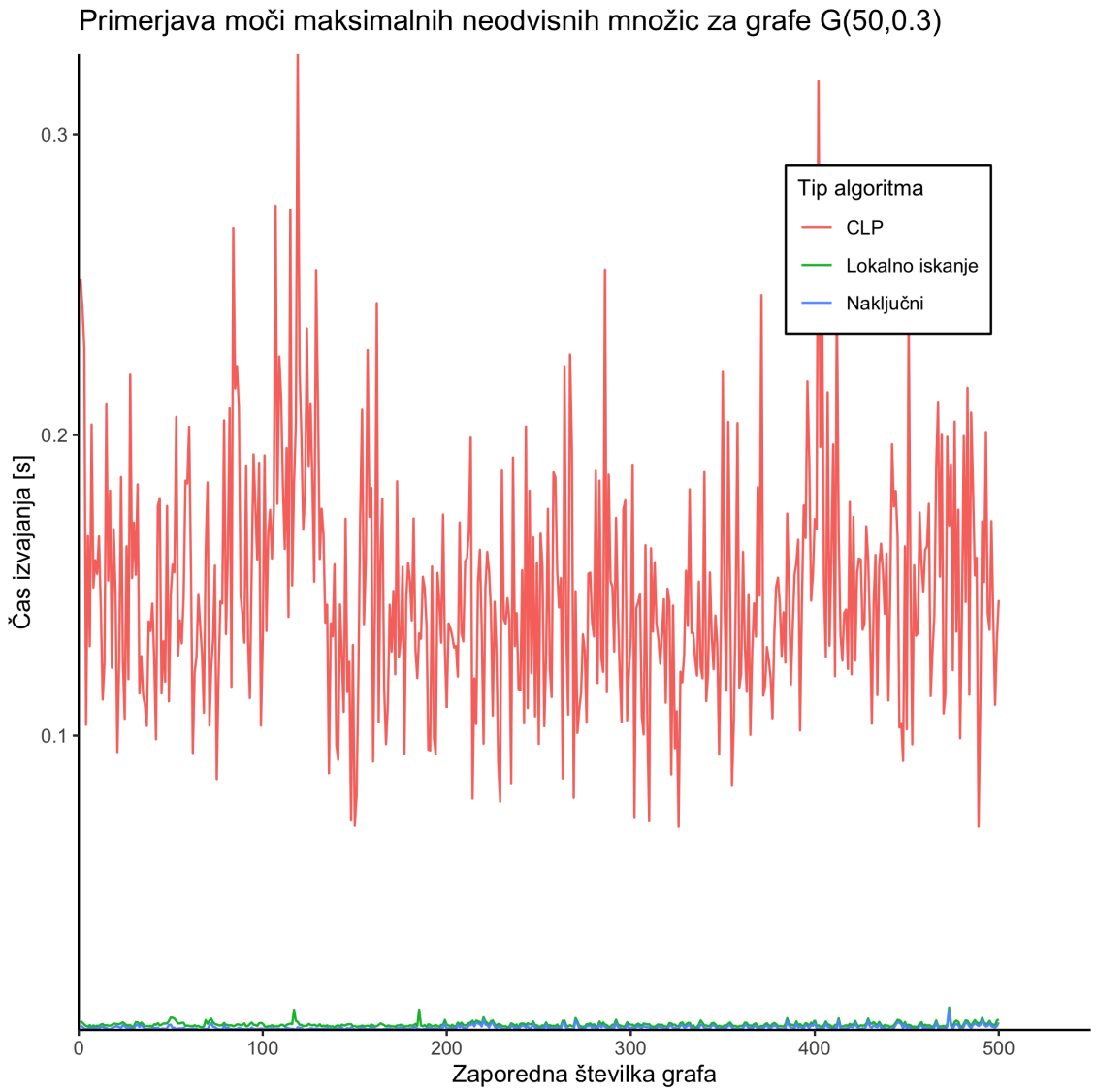
Slika 6: Časovnica SPACa.



Slika 7: Časovnica SPACa.



Slika 8: Časovnica SPACa.



Slika 9: Časovnica SPACa.