Univerza v Ljubljani
Fakulteta za matematiko in fiziko

Finančni praktikum

# Največje neodvisne množice z lokalnim iskanjem

*Avtorja:*
Jaka Mrak
Žiga Gartner

*Mentorja:*
prof. dr. Sergio Cabello
doc. dr. Janoš Vidali

Ljubljana, 28. december 2021

# Kazalo

**1 Navodilo** **2**

**2 Opis problema** **2**

**3 Nadaljnji potek dela** **3**

# 1 Navodilo

Naloga je iskanje največje neodvisne množice v grafu $G = (V, E)$ s pomočjo celoštevilskega linearnega programiranja. Velike neodvisne množice v grafu lahko poiščemo s pomočjo metode lokalnega iskanja. Začnemo s poljubno neodvisno množico $U \subseteq V$, kjer $k$ vozlišč nadomestimo s $k + 1$ vozlišči tako, da ohranjamo neodvisnost množice $U$. Konstanta $k$ je dana na začetku. Primerjali bomo metodi lokalnega iskanja in optimalne rešitve ter primerjali njune rešitve za nekatere preproste grafe.

# 2 Opis problema

**Definicija 1.** *Naj bo $G = (V, E)$ graf.* ***Neodvisna množica*** *$U$, v grafu $G$, je taka podmnožica množice vozlišč $V$, kjer poljubni dve vozlišči iz množice $U$ nista sosednji.* ***Maksimalna neodvisna množica*** *v grafu $G$ pa je taka neodvisna množica, kjer ne obstaja vozlišče $v \in V$ in $v \notin U$, ki bi ga lahko dodali množici $U$ in pri tem ohranili neodvisnost množice $U$. Torej je neodvisna množica $U$ največja taka, če velja ena od naslednjih dveh lastnosti:*

1. $v \in U$
2. $S(v) \cap U \neq \emptyset$, *kjer je $S(v)$ množica sosedov $v$.*

***Največja neodvisna množica*** *je neodvisna množica, največje možne velikosti, za dan graf $G$. Velikosti največje neodvisne množice, za graf $G$, pa pravimo* ***neodvisnostno število*** *in pogosto označimo $\alpha(G)$*

**Definicija 2.** *Celoštevilski linearni program v standardni obliki je dan z matriko $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, vektorjem $b \in \mathbb{R}^m$ in vektorjem $c \in \mathbb{R}^n$. Iščemo*

$$max < c, x >,$$

*da bodo zadoščeni pogoji*

$$Ax \leq b, x \geq 0,$$

*kjer je $x \in \mathbb{Z}^n$.*

**Posledica 1.** *Problem največje neodvisne množice v grafu $G = (V, E)$ lahko s celoštevilskim linearnim programiranjem modeliramo na sledeč način:*

$$max \sum_{v \in V} x_v,$$

*da velja:*

$$x_v + x_w \leq 1 \text{ } za \text{ } \forall vw \in E,$$

$$x_v \in \{0, 1\}$$

$$x_v = \begin{cases} 1, & za \ u \in U \\ 0, & za \ u \notin U \end{cases}, U \text{ neodvisna množica v grafu } G.$$

Največjo neodvisno množico v množici vseh neodvisnih podmnožic grafa $G = (V, E)$ bomo iskali s pomočjo celoštevilskega lineranega programiranja in lokalnega iskanja. **Lokalno iskanje** temelji na izbiri začetne neodvisne podmnožiče vozlišč $U \subset V$ v kateri $k$ vozlišč zamenjamo s $k+1$ vozlišči in pri tem ohranjamo neodvisnost množice $U$.

# 3 Nadaljnji potek dela

V nadaljevanju bomo optimalno rešitev, pridobljeno z uporabo celoštevilskega linearnega programiranja, primerjali z rešitvami dobljenimi z nekaterimi ostalimi pristopi za iskanje največje neodvisne množice v grafu. Postopek bomo ponovili za različne razrede grafov in nato analizirali odstopanja rešitev od optimalne rešitve. Za reševanje problema bomo uporabljali programski jezik *SAGE*.