

FONTANA 1

Zaključna naloga pri Matematični fiziki 1

Žiga Kmecl

23. avgust 2023

1 Naloga

Pri kaskadi enakih posod, med katerimi se pretaka razredčeno barvilo, dodamo črpalke, ki z nekim pretokom črpajo tekočino za 1 posodico višje. Razišči obnašanje koncentracijskih profilov in zvezno limito.

2 Ponovitev

Na predavanjih smo obravnavali preprostejši primer kaskade posod brez rečiklov, kjer v prvo posodo natakamo vodo s konstantim tokom in se vsebina vsake posode pretaka v posodo eno mesto nižje v kaskadi. Sistem opišemo s sistemom enačb

$$\dot{c}_1 = -\frac{\Phi}{V_1} c_1 \quad (1)$$

$$\dot{c}_{n+1} = -\frac{\Phi}{V_{n+1}} c_{n+1} + \frac{\Phi}{V_n} c_n \quad (2)$$

kjer je c_m koncentracija barvila v m-ti posodi, Φ volumski pretok, V_m volumen m-te posode in n naravno število. Φ je iz in v vsako posodo enak in je enak pretoku, ki ga dolivamo v prvo posodo v kaskadi.

Obravnavamo primer, kjer so vse posode enake, zato volumnov ne rabimo indeksirati, in so vse posode razen prve napolnjene samo z vodo, prva pa z barvilom. Opazujemo torej nekakšno spiranje barvila po kaskadi.

Označimo $\frac{\Phi}{V} = \lambda$ in začetno koncentracijo z c_0 . Rešitev za prvo posodo je preprosto

$$c_1 = c_0 e^{-\lambda t}. \quad (3)$$

Za drugo posodo iščemo homogeno in partikularno rešitev, pri čemer ima homogena enačba tako obliko kot za prvo posodo, a v končni rešitvi ni relevantna, saj v našem primeru nima svojega barvila. Pri variaciji konstante integriramo konstanten koeficient iz enačbe za prejšnjo posodo, pomnoženo z lambdo, in dobimo rešitev

$$c_2 = \lambda c_0 t e^{-\lambda t}. \quad (4)$$

To se nadaljuje in za n-to posodo tako dobimo

$$c_{n+1} = \lambda^n c_0 \frac{t^n}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n} e^{-\lambda t} \quad (5)$$

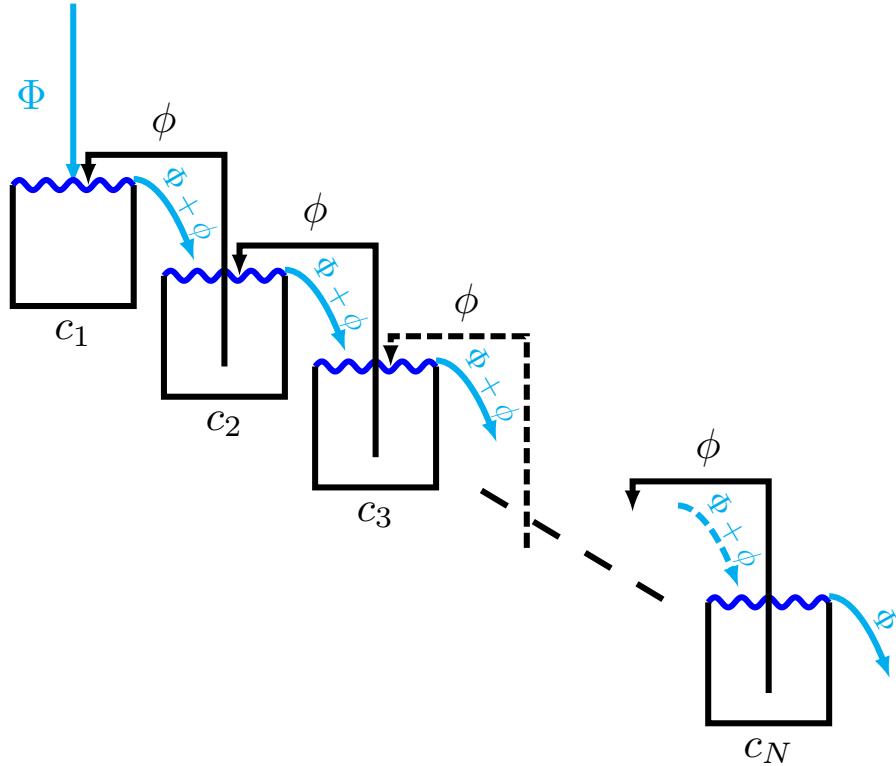
oziroma

$$c_{n+1} = \frac{t^n}{n!} e^{-t}. \quad (6)$$

kjer smo v zadnjem koraku prešli na brezdimenzijsko enačbo, da smo se lahko znebili lambd. To je Poissonova porazdelitev za pričakovano vrednost t .

3 Rešitev

3.1 Kaskada z recikli



Slika 1: Skica naloge.

Sedaj smo v sistem dodali črpalke, ki ustvarjajo konstanten pretok \$\phi\$ iz \$n+1\$-te v \$n\$-to posodo. Držimo se pogojev iz prejšnjega problema: volumni posodi so enaki, na začetku je barvilo zgolj v prvi posodi, v prvo posodo teče čista voda. Nove enačbe sistema so

$$\dot{c}_1 = -\left(\frac{\Phi}{V} + \frac{\phi}{V}\right)c_1 + \frac{\phi}{V}c_2 \quad (7)$$

$$\dot{c}_{n+1} = -\left(\frac{\Phi}{V} + 2\frac{\phi}{V}\right)c_{n+1} + \left(\frac{\Phi}{V} + \frac{\phi}{V}\right)c_n + \frac{\phi}{V}c_{n+2} \quad (8)$$

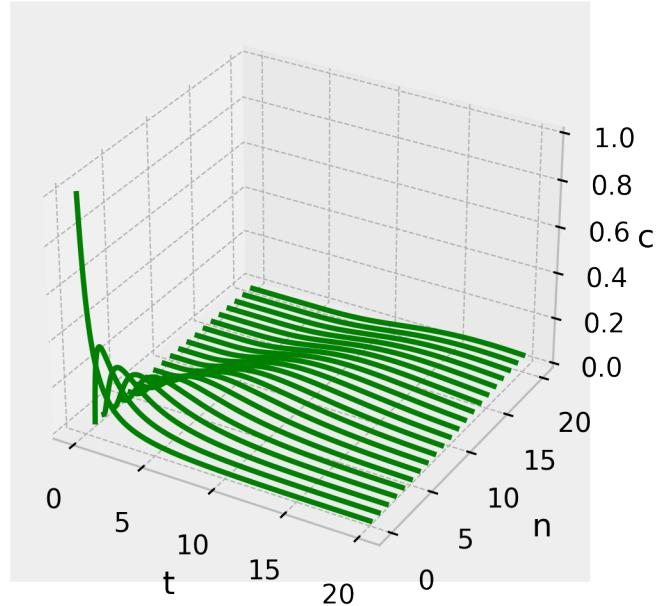
$$\dot{c}_N = -\left(\frac{\Phi}{V} + \frac{\phi}{V}\right)c_N + \left(\frac{\Phi}{V} + \frac{\phi}{V}\right)c_{N-1} \quad (9)$$

tako kot prej vpeljemo $\frac{\Phi}{V} = \lambda$ in pa $\frac{\phi}{V} = \mu$ in sistem zapišemo še v matrični obliki

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ \vdots \\ c_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda - \mu & \mu & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda + \mu & -\lambda - 2\mu & \mu & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda + \mu & -\lambda - 2\mu & \mu & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda + \mu & -\lambda - 2\mu & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \mu \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda + \mu & -\lambda - \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ \vdots \\ c_N \end{bmatrix} \quad (10)$$

Ker smo vendarle fiziki in ker ta problem presega moje znanje algebре, se v nalogi ne bomo ukvarjali z iskanjem analitične rešitve (postopek je sicer orisan v viru [2], glej primer 3., ki je pravzaprav poseben primer naše naloge), temveč jo bomo vzeli kot vajo iz numeričnega reševanja diferencialnih enačb.

3d graf



Slika 2: 3d graf razvoja sistema.

Za lažjo vizualizacijo problema že tu pripenjamo 3d graf, v nadaljevanju pa se bomo omejili na dvodimenzionalne, ki so, čeprav ne tako lepi, nekako bolj pregledni in jih je lažje brati. Rešen je bil problem s parametrom $m = 1$ (glej enčbo 11). Na tem in vseh nadaljnih grafih so posode indeksirane od vključno nič naprej, torej je indeks posode vedno za ena manjši od poimenovanja v tekstu, prva posoda ima tako na primer indeks 0.

3.2 Vpliv moči črpalk na razvoj sistema

Sistem 10 bomo obravnavali v dveh oblikah.

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ \vdots \\ c_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1-m & m & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1+m & -1-2m & m & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1+m & -1-2m & m & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1+m & -1-2m & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & m \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+m & -1-m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ \vdots \\ c_N \end{bmatrix} \quad (11)$$

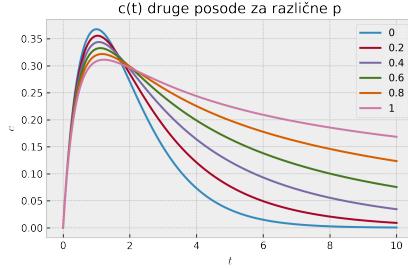
$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ \vdots \\ c_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & p & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -1-p & p & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1-p & p & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1-p & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ \vdots \\ c_N \end{bmatrix} \quad (12)$$

11 predstavlja situacijo, v kateri imamo fiksiran dotok čiste vode Φ v prvo posodo (z vrednostjo 1), moč črpalk pa izbiramo poljubno glede na to vrednost. Ko povečujemo moč črpalk, povečamo tudi pretok skozi celoten sistem, zato pričakujemo, da se bo barvilo hitreje razneslo po sistemu.

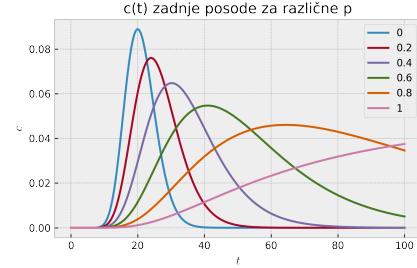
V primeru sistema 11 pa na vrednost 1 postavimo celoten vstopen tok v prvo posodo, prost parameter pa predstavlja delež tega toka, ki ga prispeva črpalka. V tem primeru pričakujemo, da bo večanje moči črpalke podaljševalo spiranje barvila, saj črpalke vračajo barvilo navzgor po sistemu, pretoka navzdol pa ne povečujejo.

Kjer ni navedeno drugače, obravnavamo sistem z $N = 21$ posodami.

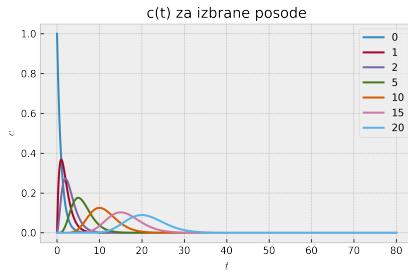
3.2.1 Relativne moči črpalk



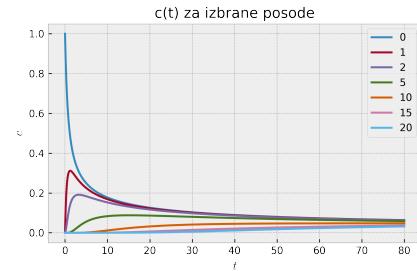
(a) Spreminjanje koncentracije v drugi posodi za različne vrednosti parametra p .



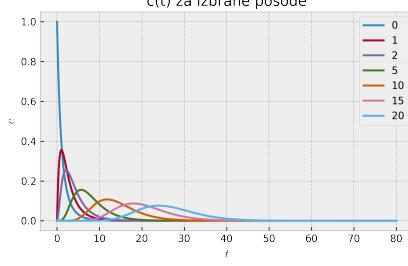
(b) Spreminjanje koncentracije v zadnji posodi za različne vrednosti parametra p .



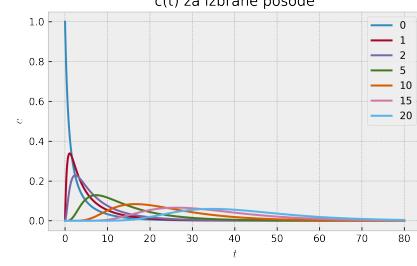
(a) $p = 0$



(b) $p = 1$



(c) $p = 0.2$



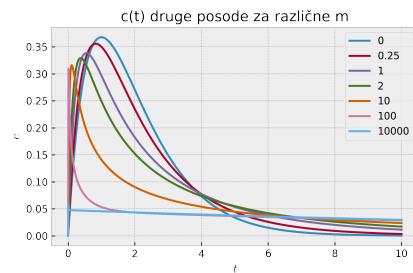
(d) $p = 0.5$

Slika 4: Spreminjanje koncentracije v posodah za štiri izbrane vrednosti parametra p .

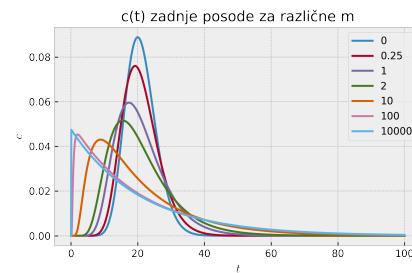
Imamo dva mejna primera: graf 4a, kjer črpalke ne črpajo vode in pričakujemo enak rezultat kot v poglavju 2, ter graf 4b. Tu je pretok skozi črpalko po-

stavljen na vrednost 1, kar pomeni, da vstopnega toka čiste vode v prvo posodo ni, prav tako se vsa voda iz zadnje posode po črpalki vrača nazaj v predzadnjo. Imamo torej zaprt sistem, in kot vidimo tudi iz grafa, se tudi po dolgem času barvilo ne izpere iz sistema. Sistem se meša in koncentracije barvila limitirajo proti $\frac{1}{21} \approx 0,05$.

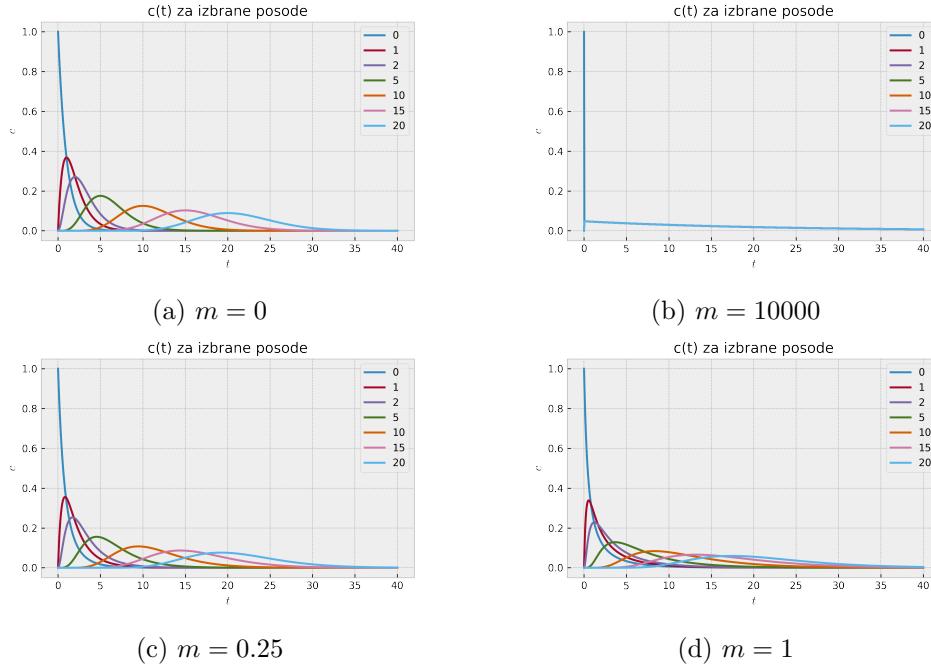
3.2.2 Fiksen vstopni tok vode



(a) Spreminjanje koncentracije v drugi posodi za različne vrednosti parametra m .

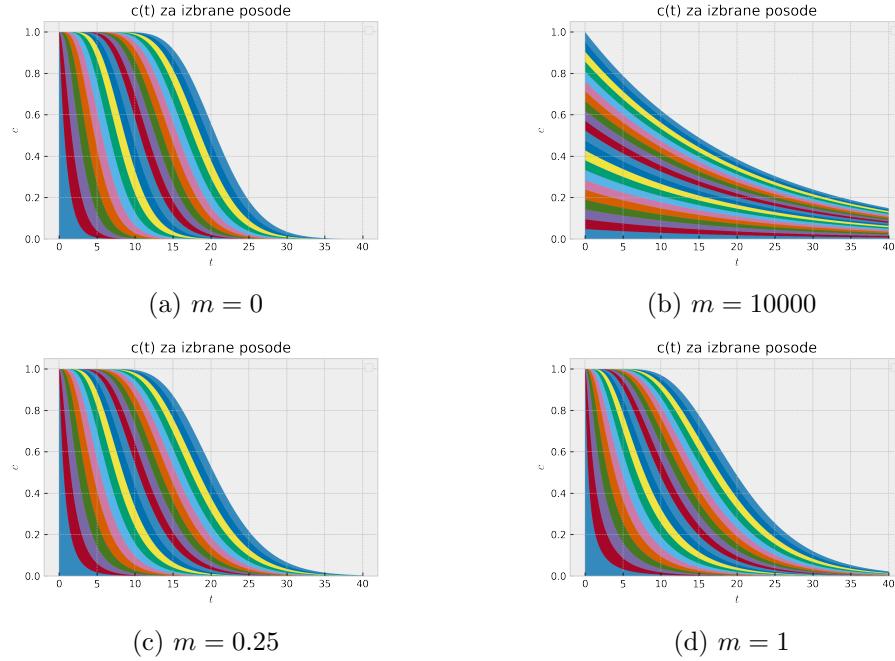


(b) Spreminjanje koncentracije v zadnji posodi za različne vrednosti parametra m .



Slika 6: Spreminjanje koncentracije v posodah za štiri izbrane vrednosti parametra m .

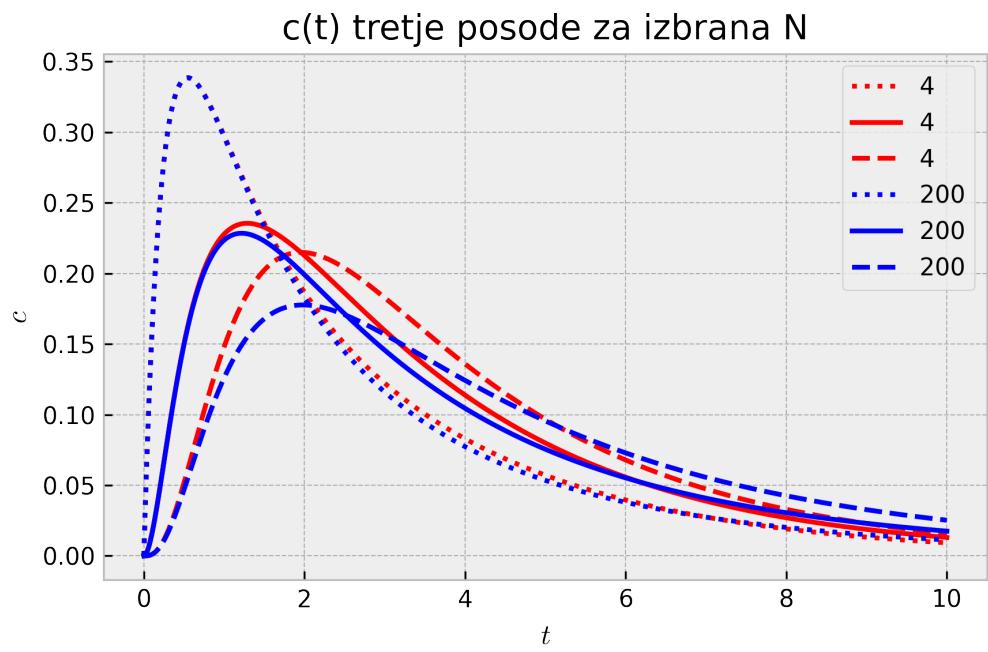
Zanimivo obliko ima graf 5b. Močnejše črpalki povzročijo, da barvilo hitreje doseže nižje posode, tam pa se zadrži dlje časa. Ker imamo fiksiran tok vode v prvo posodo, zaprt sistem sedaj ni več mogoč. Če povečujemo moč črpalk, da je $\phi \gg \Phi$, dosežemo, da se barvilo zelo hitro enakomerno porazporedi po sistemu, kar pa upočasnuje spiranje.



Slika 7: Spreminjanje koncentracije v posodah za štiri izbrane vrednosti parametra m . Barve od leve proti desni zapored pripadajo posodam od prve do zadnje. Spremembe so najbolj očitne ob opazovanju jezička grafa pri večjih vrednostih časa.

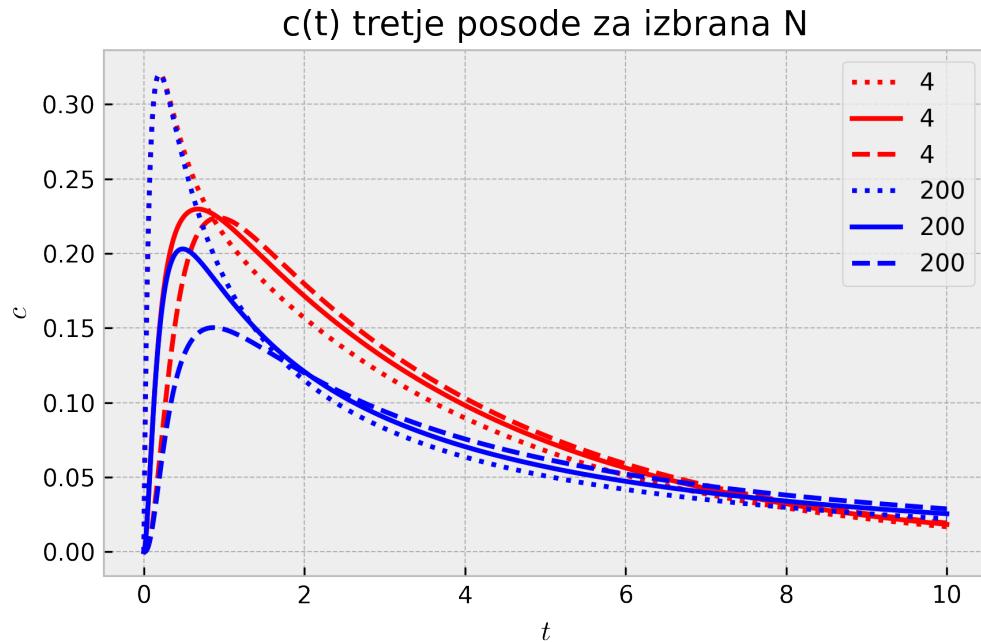
3.3 Vpliv števila posod

Do sedaj smo obravnavali sistem z 21 posodami. Kako se rezultati sprememnijo, če število pomanjšamo ali povečamo? Ostajamo pri fiksном vstopnem toku z $\lambda = 1$. Očitno je, da je v sistemu brez črpalk poljubni posodi vseeno, kaj se dogaja v posodah nižje po kaskadi. Po drugi strani je v sistemu z zelo močno črpalko koncentracija vsake posode skoraj takoj in skoraj popolnoma določena s skupnim številom posod v sistemu kot $\frac{1}{N}$. Primerjajmo sistema s 4 in 200 posodami in parametrom $m = 1$, torej sta vstopni tok in tok, ki ga proizvaja črpalka, enaka.

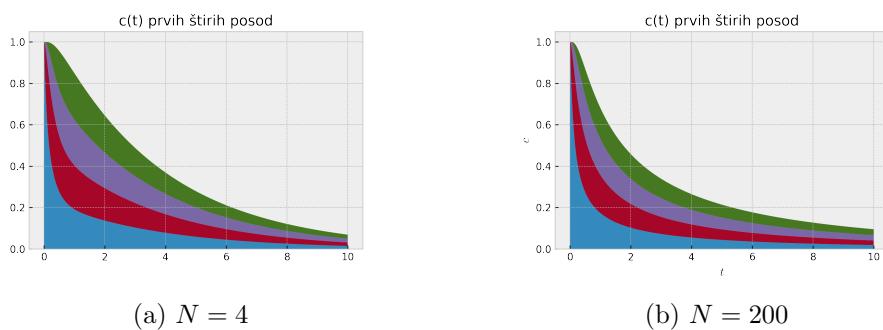


Slika 8: Primerjava spremenjanja koncentracije s časom za tretjo posodo v sistemu s 4 in z 200 posodami. S pikčastimi črtami so dodani tudi grafi za drugo in četrto posodo.

Sedaj povečamo moč črpalke, da je $m = 5$.



Slika 9: Primerjava spremenjanja koncentracije s časom za tretjo posodo v sistemu s 4 in z 200 posodami. S pikčastimi črtami so dodani tudi grafi za drugo in četrto posodo.



Slika 10: Barve od leve proti desni pripadajo posodam od prve do četrte. Razlika med grafoma je očitna

Odstopanja so sedaj precej večja. Če sistem sestavlja samo 4 posode, koncentracija barvila na začetku v njih pada počasneje kot v večjem sis-

temu. V primeru zelo močne črpalke bi se koncentracija hitro enakomerno porazporedila in bi imela vsaka od štirih posod v manjšem sistemu večjo koncentracijo. Vendar pa zato iz sistema odteka voda z večjo koncentracijo, ki predstavlja večji delež celotnega volumna sistema in po dovolj dolgem času štiri posode večjega sistema vsebujejo več barvila.

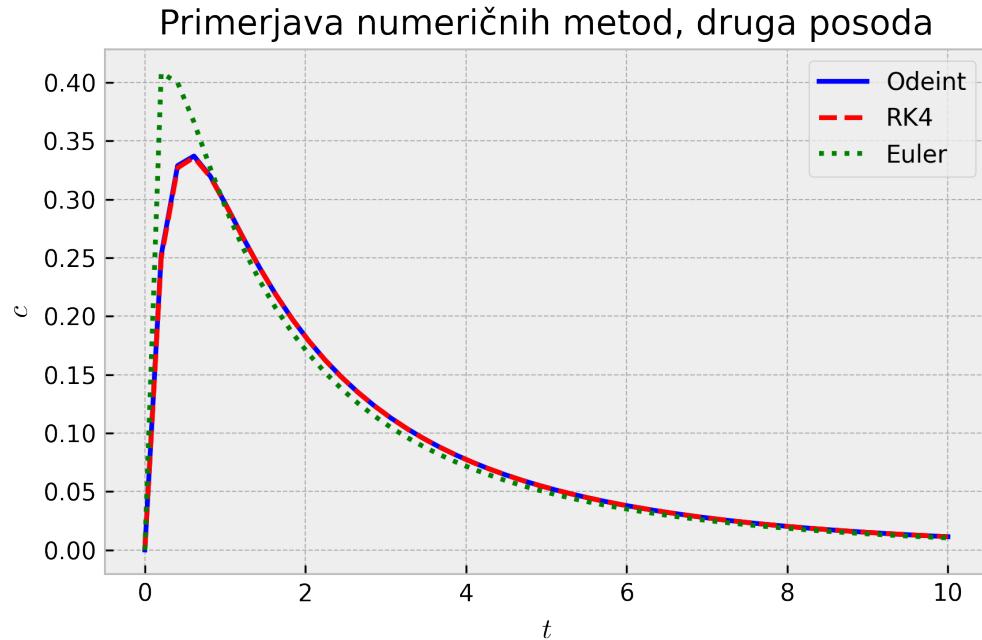
3.3.1 Limitni primer

Povečujemo število posod. Ko gre število posod proti neskončno, problem preide iz diskretnega v zveznega. V zvezni limiti dobimo difuzijsko enačbo za tekočino, ki se pretaka.

3.4 Primerjava numeričnih metod

Do sedaj smo za reševanje sistemov uporabljali Pythonovo knjižnico Odeint. Poglejmo, kako dobra so ujemanja med njenimi rešitvami in rešitvami, dobljenimi z Eulerjevo in Runge-Kutta metodo četrtega reda.

Ker nismo poračunali analitične rešitve, ne vemo, kako natančne prav-zaprav so. Poglejmo, kako se obnesejo na originalnem problemu iz poglavja 2.



Slika 11: Primerjava treh metod za numerično reševanje diferencialnih enačb.

Ker hočemo izsiliti odstopanja, smo tu reševali s 50 namesto s 1000 koraki (ki smo jih uporabljali do sedaj). Tudi pri tako nizki vrednosti se Runge-Kutta in Odeint lepo ujemata, Euler pa odstopa. Pri 1000 korakih se vse tri metode ujemajo.

3.5 Drugi začetni pogoji za barvilo

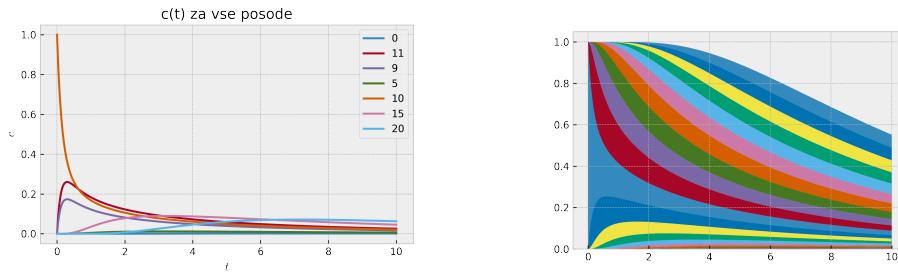
Začetne pogoje za koncentracijo opisuje matrika

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

Sedaj si poglejmo še tri druge možne načine vnosa črnila v vodo: obar-

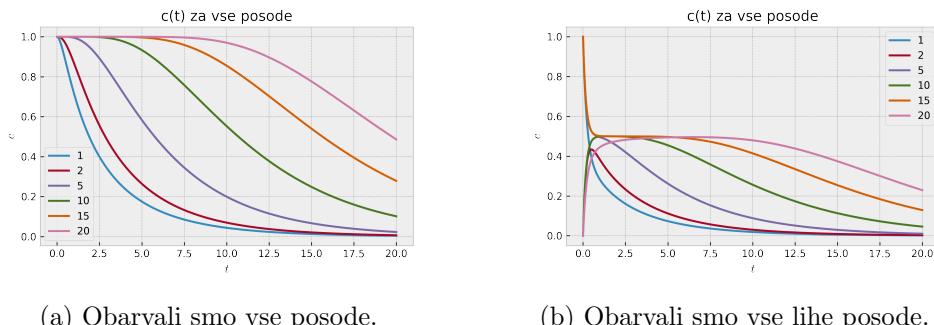
vamo sredinsko posodo, obarvamo vse posode, obarvamo vsako drugo posodo. Torej začetne pogoje

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ c_{N/2} = 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ N \bmod 2 \end{bmatrix} \quad (14)$$



Slika 12: V sistemu z 21 posodami smo obarvali 11.. $m = 2$

Večje koncentracije barvila dosežejo le nekaj višjih posod, preden ga odplakne nazaj navzdol.



Slika 13: $m = 1$

Pri barvanju lihih posod opazimo, da se spodnji del kaskade kar dobro premeša in se koncentracija barvila v posodah ustali pri 0,5. Nižje kot je posoda, dlje časa se bo ta vrednost ohranjala.

3.6 Druge različice problema

Za zabavo primerjajmo naš problem z dvema podobnima, ki ju opisujeta matrična sistema

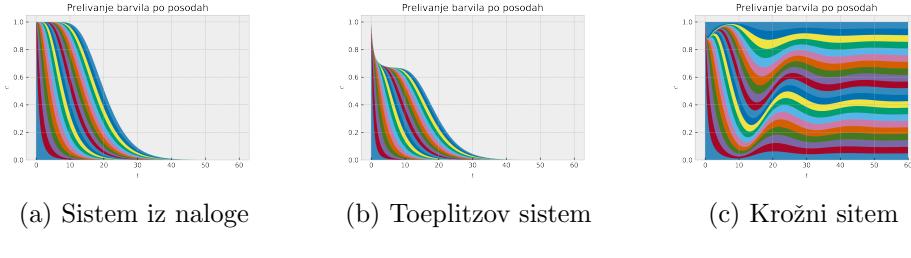
$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ \vdots \\ c_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 - 2m & m & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 + m & -1 - 2m & m & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 + m & -1 - 2m & m & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 + m & -1 - 2m & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & m \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 + m & -1 - 2m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ \vdots \\ c_N \end{bmatrix} \quad (15)$$

in

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ \vdots \\ c_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 - 2m & m & 0 & 0 & \cdots & 1 + m \\ 1 + m & -1 - 2m & m & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 + m & -1 - 2m & m & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 + m & -1 - 2m & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & m \\ m & 0 & 0 & 0 & 1 + m & -1 - 2m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ \vdots \\ c_N \end{bmatrix} \quad (16)$$

Izbrali smo tridiagonalno *Toeplitzova matriko* in *krožno matriko*. Taka sistema sta zanimiva tudi zato, ker imata znano rešitev, a če smo tu do sedaj vztrajali s Pythonom, bomo še naprej.

Novi kaskadi izgledata tako: v tisti, ki jo opisuje Toeplitzova matrika, smo dodali še dve črpalki. Ena črpa iz prve posode ven iz sistema, druga pa vodo iz zunanjosti v zadnjo posodo. Ciklična matrika pripada sitemu, kjer smo ustavili zunanji dotok vode, vsebina zadnje posode izteka nazaj v prvo, z dodatno črpalko pa črpamo vsebino prve posode v zadnjo.



Slika 14: Barve od leve proti desni (pri krožnem od spodaj navzgor) pripadajo posodam od prve do zadnje.

Izbrali smo $m = 0,5$. Pri Toeplitz vidimo, da se približno tretjina barvila iz sistema odstrani hitro, nato dobimo sedlo in iztekanje se nadaljuje podobno kot v prvotni nalogi. Delež barvila, ki hitro pobegne iz sistema, se približno ujema z deležem pretoka, ki ga prispevajo črpalke. Tolikšen del barvila je namreč hitro počrpan iz zgornjih posod, ostalo pa pobegne globlje v kaskado.

Cikličen sistem, ki je seveda zaprt, je zanimiv, ker v njem opazimo nihanja koncentracij, ki se zadušijo, sistem pa se premeša. Če povečamo m , se sistem hitreje uravnovesi.

3.7 Bazenčki z bakterijami

Za zaključek za zabavo še malo zakomplificirajmo problem. Na nekem pobočju leži serija bazeňkov, do roba napolnjenih z vodo. V najvišje ležečem bazeňku živi kolonija bakterij ki je že dosegla svojo populacijsko mejo. Razmnoževanje teh bakterij opisuje enačba

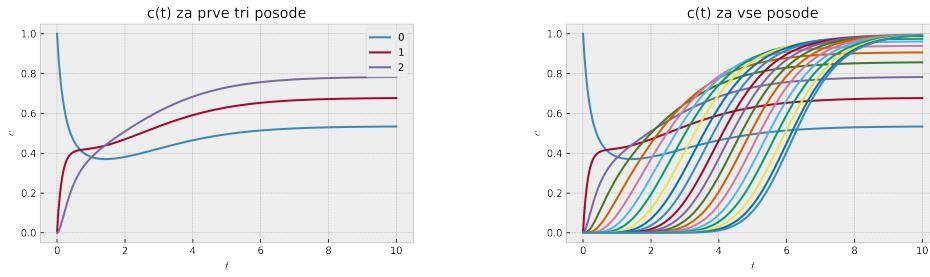
$$\dot{c}_n = c_n(1 - c_n) \quad (17)$$

kjer c_n označuje koncentracijo bakterij v n -tem bazeňku. V nekem trenutku v bazeňu s kolonijo začne teči studenec, ki sproži pretakanje vode po bazeňih navzdol. Hkrati po pobočju navzgor začne pihati močan veter, ki vzvalovi gladino bazeňkov in vodo potiska po bazeňih navzgor. Najvišji bazeň je pritisnjen ob pobočje, iz katerega izvira studenec, in valovi vode ne morejo nositi še višje.

Ta problem je videti tako

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1-m & m & 0 & \cdots \\ 1+m & -1-2m & m & \cdots \\ 0 & 1+m & -1-2m & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & m \\ 0 & 0 & 0 & 1+m & -1-m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1(1-c_1) \\ c_2(1-c_2) \\ c_3(1-c_3) \\ \vdots \\ c_N(1-c_N) \end{bmatrix} \quad (18)$$

Z enačbo 17 smo v sistem uvedli kvadratne člene. Ker je to poglavje mišljeno kot dodatek, o tem ne bomo preveč razmišljali, temveč spet samo romali v Python. $m = 2$.



Slika 15: Primer z bakterijami za prve tri in vse bazenčke.

Rezultat je nekoliko presenetljiv in si ga ne znam čisto razlagati. Brez toka vode navzgor po sistemu studenec izplakne bakterije iz vseh bazenov (to je tudi iz grafa razvidno iz tega, da na neki točki populacija prvega bazena pada pod polovično koncentracijo, ko je rast največja), z večanjem vrednosti parametra pa se tudi končne koncentracije v bazenih povečujejo. Dotok bakterij iz vsakega bazeňčka omogoča naslednjemu, da se njegova populacija ustali pri nekoliko višji koncentraciji.

Kakorkoli že, podrobnejše ukvarjanje z nelinearnimi sistemi, populacijskimi modeli itd. pa naj ostane za kakšno drugo seminarsko nalogo.

4 Viri

1. *DE-1.pdf*. [Online]. Available: https://ucilnica.fmf.uni-lj.si/pluginfile.php/134316/mod_resource/content/1/DE-1.pdf

2. Antonín Slavík. *Mixing Problems with Many Tanks*. ResearchGate, 2013. [Online]. Available: https://www.researchgate.net/publication/263520040_Mixing_Problems_with_Many_Tanks
3. *diffeq_tsint.py*. [Online]. Available: https://ucilnica.fmf.uni-lj.si/pluginfile.php/62334/course/section/6937/diffeq_tsint.py