HITRA FOURIEROVA TRANSFORMACIJA IN KORELACIJSKE FUNKCIJE

Žiga Kmecl

4. november 2023

1 Uvod

Diskretna Fourierova transformacija, ki smo jo uporabljali pri nalog 4, ima asimptotsko časovno zahtevnost $O(N^2)$. Pri tej nalogi pa uporabimo hitro Fourierovo transformacijo, ki temelji na rekurzivni zvezi

$$H_k = H_k^{\mathrm{sod}} + W_N^k H_k^{\mathrm{lih}} \,,$$

s pomočjo katere spravimo zahtevnost na $O(Nlog_2 N)$.

Pri nalogi se bomo ukvarjali s korelacijskimi funkcijami, ki so definirane kot

$$\phi_{gh}(\tau) = \frac{1}{T} \int\limits_0^T g(t+\tau)\, h(t) \mathrm{d}t \,,$$

in v diskretnem

$$\phi_{gh}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} g_{k+n}\, h_k \,.$$

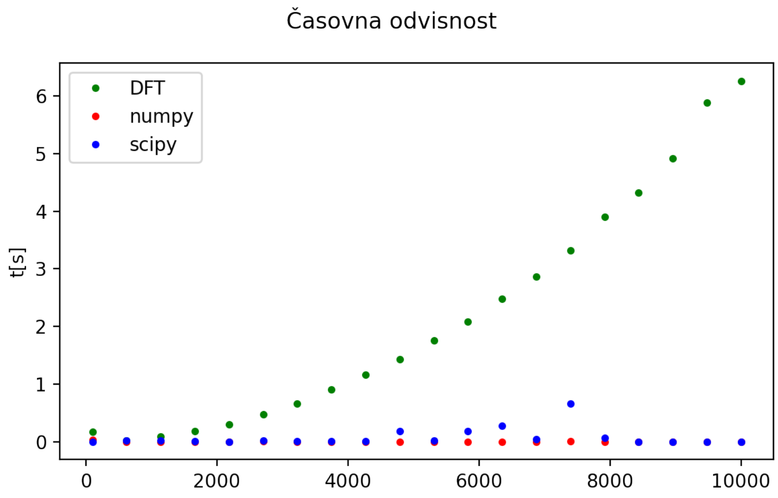
Računanje si lahko olajšamo s pomočjo Fourierovih transformacij, saj se enačba pretvori v

$$\phi_{gh}(n) = \frac{1}{N-n} \mathcal{F}^{-1} \left[G \cdot (H)^* \right]$$

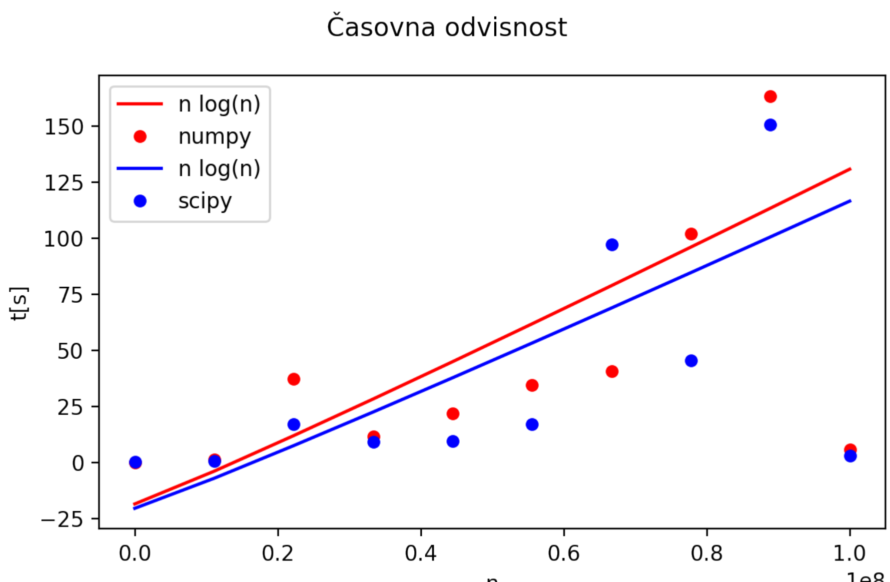
2 Rešitev

2.1 Časovna zahtevnost

Na začetku preverimo, ali naša naloga res zahteva uporabo hitre Fourierove transformacije in ali ni morda dovolj samo primitivna diskretna Fourierova transformacija. Za DFT vzamem kar svojo lastno implementacijo iz naloge 4, za FFT pa obravnavam implementaciji v Pythonovih knjižnicah *scipy* in *numpy*.



Slika 1: Porabljen čas za izvedbo Fourierove transformacije, tri različne metode.



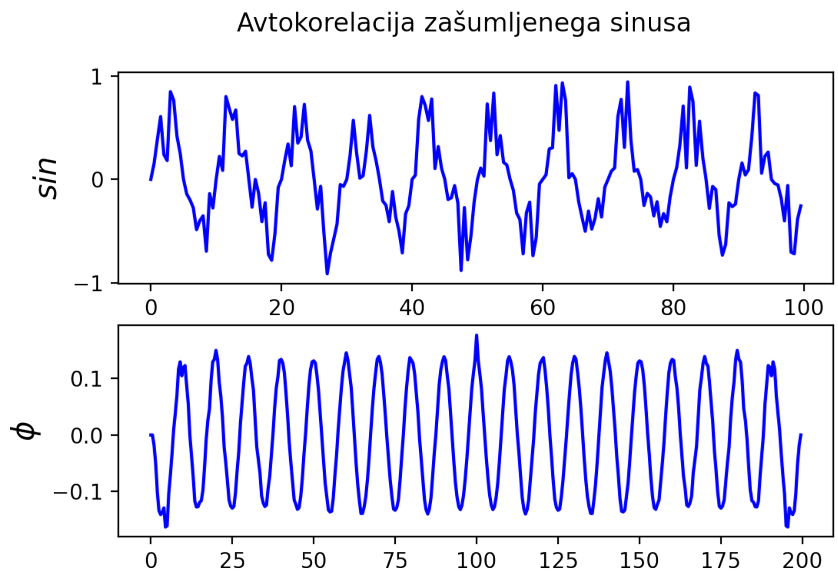
Slika 2: Porabljen čas za izvedbo Fourierove transformacije, vgrajeni metodi, primerjava s pričakovanimi asimptotskimi zahtevnostmi.

Tu sem računal do $n = 10^8$, zdi se, da je pri največji vrednosti nekaj odpovedalo. Fittana logaritemska grafa sta nadležno položna.

2.2 Čiščenje z avtokorelacijo

Pri implementaciji korelacijske funkcije s pomočjo Fouriera signale najprej podaljšam na dvakratno dolžino, pri čemer so na novo dodane vrednosti na koncu seznama enake nič. Sredinska vrednost na območju, ki ga korelacijska funkcija vrne, ustreza zamiku funkcij 0.

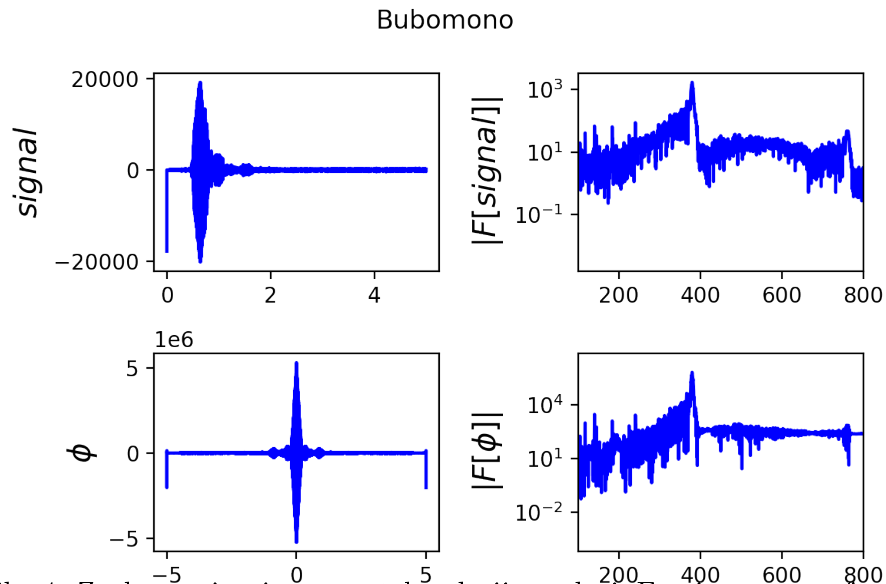
Najprej avtokorelacijo preizkusim na sinusu, ki sem ga zašumil z naključnimi vrednostmi.



Slika 3: S pomočjo avtokorelacije prečistimo sinusni signal, ki se zamakne v kosinus, frekvenca pa ostane enaka.

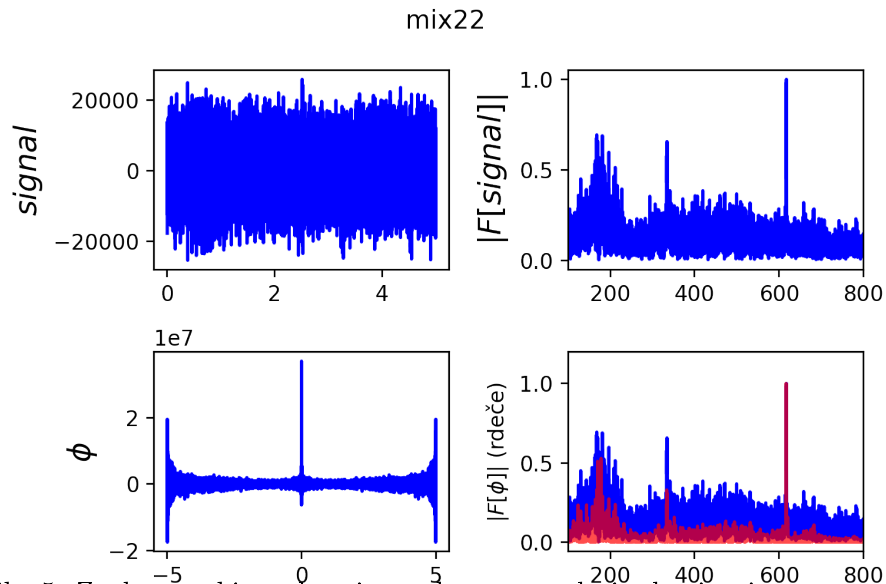
Avtokorelacija funkcijo zalo dobro prečisti, pri sredinski vrednosti imamo najvišjo vrednost (ker se funkciji idealno prekrivata), potem pa vrednosti nihajo s periodo prvotne kotne funkcije.

Sedaj si oglejmo še uporabo te metode na enem od zvokov sov, katerih analiza je namen te naloge



Slika 4: Zvok sove in njegova avtokorelacija na levi, Fourierova transformacija tega na desni.

Z avtokorelacijo pred transformacijo dobimo nekoliko lepši frekvenčni spekter, po Fourierovi transformaciji lahko preberemo, da se oglaša s tonom nekje pri $380Hz$. Podobno bi lahko naredili tudi za čist posnetek druge sove, a si raje poglejmo najslabši posnetek mix22.

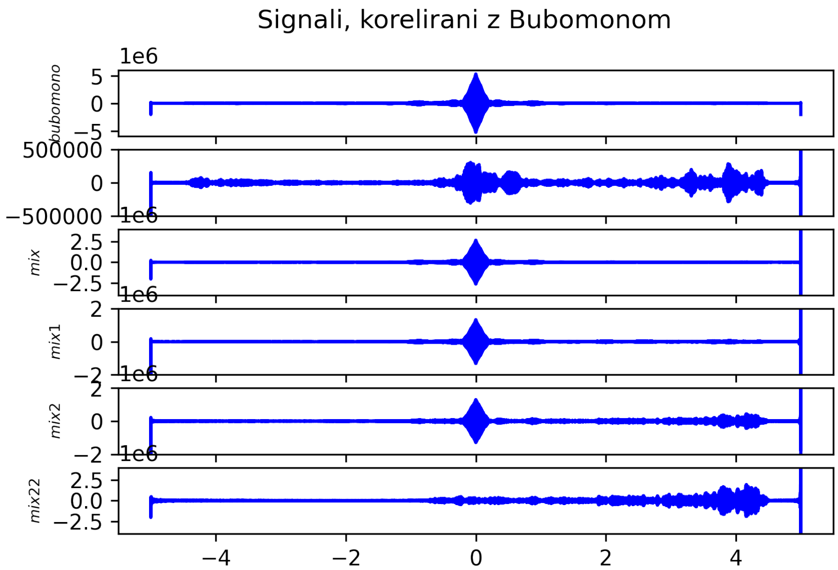


Slika 5: Zvok sove, ki ga skoraj popolnoma preglasi reka, in njegova avtokorelacija na levi, Fourierova transformacija tega na desni. Spodaj desno sta transformaciji signala pred in po avtokorelaciji prikazana na istem grafu, z rdečo barvo po.

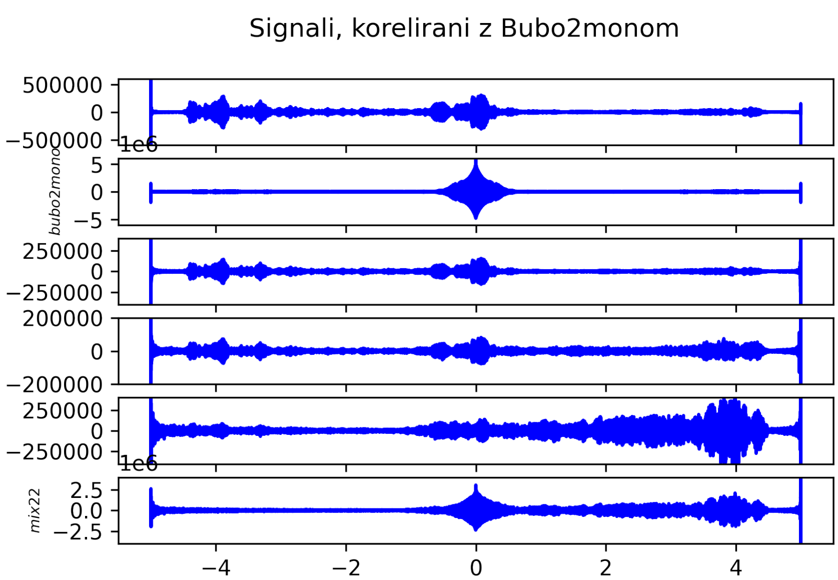
Z avtokorelacijo iz zelo slabega signala potegnemo veliko lepši vrh.

2.3 Identifikacija sov z korelacijsko funkcijo

Podana imamo dva sorazmerno jasna zvočna posnetka sov, ki se oglašata. Nadalje imamo štiri posnetke, kjer je zvok ene od teh dveh sov slabše slišen zaradi prisotnosti zvokov narave. S pomočjo korelacije prvih dveh signalov z vsemi ostalimi bomo poskusili ugotoviti, na katerem od slabših posnetkov se oglaša katera od sov.



Slika 6: Prikaz korelacijske funckije vsakega od signalov s signalom sove Bubomono.



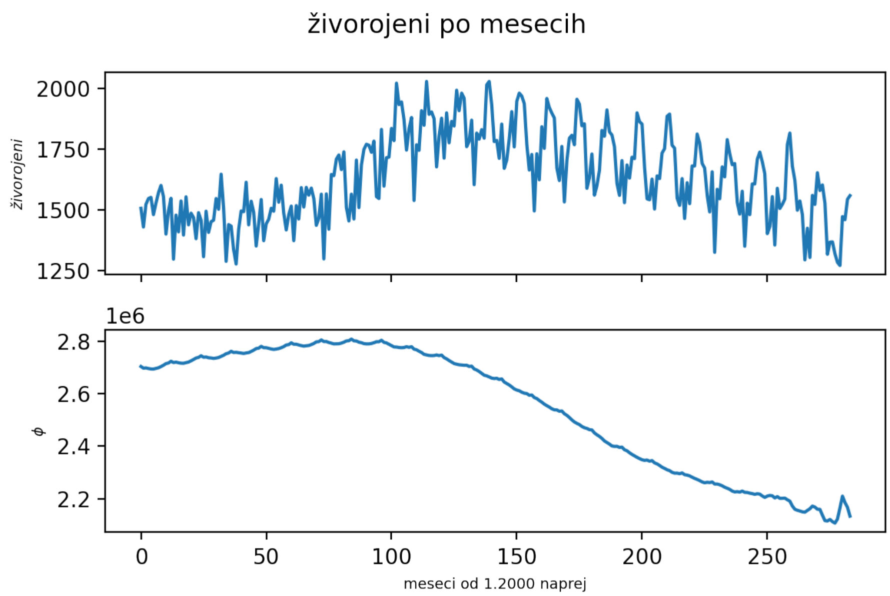
Slika 7: Prikaz korelacijske funckije vsakega od signalov s signalom sove Bubo2mono.

Seveda vidimo, da najlepša grafa dobimo za avtokorelacijski funckiji.

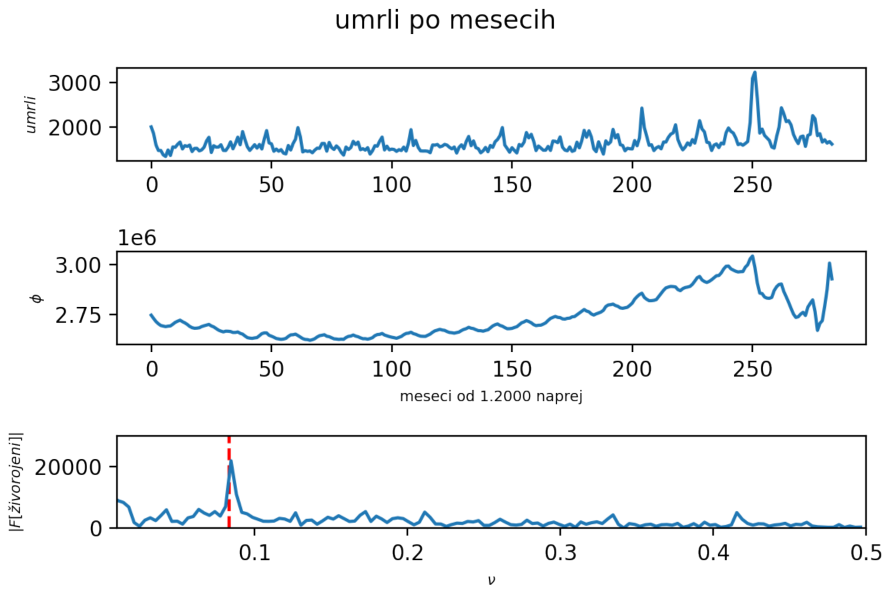
Vendar pa iz grafov res ni težko razbrati, da prvi trije miks posnetki pripadajo sovi Bubomono, zadnji pa sovi Bubo2mono.

3 Dodatek: živorojeni in umrli v Sloveniji

Za konec si poglejmo še število novorojenčkov in smrti pri nas od začetka leta 2000 naprej, gledano po mesecih. Podatki so na voljo na spletni strani statističnega urada RS. Z avtokorelacijo bom poskušal predvsem na hitro ugotoviti, ali je porazdelitev po mesecih zgolj naključno zašumljena ali gre za nek periodični trend.



Slika 8: Analiza živorojenih na mesec v Sloveniji.



Slika 9: Analiza umrlih na mesec v Sloveniji. Na grafu z rdečo črtkano črto označena frekvenca na dvanajst mesecev.

Nepresenetljivo ugotovimo, da je signal umrlih periodičen s periodo 12 mesecev, saj v zimskih mesecih zaradi šibkejšega imunskega sistema in posledičnega širjenja bolezni žal umira več ljudi.

Nekoliko bolj presenetljivo ugotovimo, da je rahlo periodična tudi funkcija rojevanja otrok, kar gre najbrž pripisati spolnim navadam Slovencev. Tu se avtokorelacija ni tako dobro obnesla, saj se iz grafa surovih podatkov periodičnost zdi bolj očitna.

4 Zaključni komentarji

- Naloga bi bila brez FFT neizvedljiva (oziroma bi moral imeti na voljo kak mesec časa).
- Avtokorelacija zelo učinkovito čisti sinusne signale in ohranja frekvenco.
- Iskreno povedano mi je največji iziv pri nalogi predstavljalo to, da ne operacij s Fourierovimi funkcijami ne razumem najbolje, saj se s tem še nisem prav dosti ukvarjal. Zato sem morda kaj površno implementiral, pa tudi rezultatov korelacijskih funkcij nisem bil sposoben dobro predvideti.

- Kot posledica tega mi je verjetno kakšen primer, ki bi ga bilo tudi zanimivo pogledati, ušel.
- Ker je naloga bolj kratka in odprtega tipa, tu pravzaprav nimam kaj dosti za dodati.