ISKANJE NAJBOLJŠE BLIŽNJICE V DREVESU

Projekt pri finančnem praktikumu
9.skupina

Žiga Kodrič Katarina Kromar

4. januar 2018

1 Opis problema

1.1 Originalen

Take an arbitrary tree T and assume that all the edge weights are 1. We want to add an edge e ("a shortcut") to T that minimizes the average distance between the vertices. This means that we want to choose the edge e such that the sum of the distances in T+e between all the pairs of vertices is minimized. We can find such an edge e by trying all possible edges. Check several random trees and see how much the average distance between vertices decreases when inserting the best shortcut. You may want to check also for two shortcuts (for small trees.)

1.2 Opis problema

Vzamemo drevo T in predpostavimo, da imajo vse povezave utež 1. Radi bi dodali neko povezavo e (bližnjico) na drevo T, ki bi minimizirala povprečno razdaljo med vozlišči. Torej bi radi izbrali tako povezavo e, da bo vsota razdalj v T+e med vsemi pari vozlišč minimizirana. Lahko poskusimo najti tako povezavo e tako, da poskusimo vse možne povezave.

Ta postopek bova poskusila na nekaterih naključnih drevesih, kjer bova kodo oziroma funkcijo za generiranje takih drevesih poskusila najti na internetu. Poskusila bova ugotoviti, koliko se povprečna razdalja med vozlišči zmanjša, ko vključimo v drevo najboljšo bližnjico. Poskusila bova tudi z vključitvijo dveh bližnjic, kar pa bo seveda zaradi zahtevnosti programa potrebno poskusiti na manjših drevesih.

2 Predstavitev grafov na računalniku in generiranje podatkov

Grafe lahko predstavimo z matriko sosednosti ali pa s seznami sosednosti. Pri projektu bova uporabljala sezname, ker so bolj optimalni, saj zasedejo manj pomnilnika. Za vsako točko imamo torej seznam naslednikov in predhodnikov. Pri tem porabimo le $O(\mid V \mid + \mid E \mid)$ pomnilnika. Če pregledamo vse sosede vozlišča

$u \in V(G)$ porabimo $O(\deg u)$ časa, za pregled vseh povezav pa $O(|V|+|E|)$. Pri najinem projektu potrebujeva naključna drevesa. Poiskala bova kodo/funkcijo, ki bo vrnila naključno drevo na n točkah v obliki seznama sosedov.

3 Osnovna ideja algoritma

Algoritem sva si zamislila na naslednji način. Najprej bova zgenerirala naključno drevo na n točkah. Algoritem si bo nato izbral prvo točko. Tej točki bo dodal bližnjico in preko algoritma BFS izračunal vse možne razdalje, ter vrnil povprečje le teh. V nadaljnem delu sva ugotovila, da ne potrebujeva celotnega algoritma BFS, saj lahko uporabimo funkcijo v Sage-u `graph.average_distance()`, ki izračuna povprečno razdaljo med vozlišči. Algoritem bo nato dodal naslednjo bližnjico (in prejšnjo seveda izbrisal), ter ponovno izračunal povprečje razdalj. V primeru, da bo povprečje manjše, bo shranil to bližnjico, v nasprotnem primeru pa jo bo ovrgel. Tako bo nadaljeval z računanjem dokler ne bo preveril vseh možnih bližnjic. Ko bo preveril vse možne bližnjice, bo nadaljeval na naslednjo točko in ponovno preveril vse možnosti. Algoritem se bo končal, ko bo preveril vse možnosti na vseh točkah.
Program si bo hkrati zapisoval katere bližnjice je že pregledal. Če bo torej izračunal razdalje, ko bo dodal bližnjico uv,$u \in V(G), v \in V(G)$, bližnjice vu ne bo ponovno pregledal.
Programirala bova v programskem jeziku Sage, ki je dostopen na spletni strani `https://cocalc.com/` in sicer zaradi enostavnosti generiranja naključnih dreves.

4 Generiranje podatkov

Za generiranje naključnih dreves bova uporabila programski jezik Sage in sicer z ukazom:

```
graphs.RandomTree(n).to_dictionary(),
```

kar nam vrne naključno drevo na n vozliščih, pretvorjeno v seznam sosednosti. Vozlišča so označena od 0 do n-1.

5 Algoritem

Radi bi dobili povprečno razdaljo med vozlišči, zato definiramo funkcijo `dolzine(graph)`.

```
def dolzine(graph):
    s = 0
    graph = Graph(graph)
    s = graph.average_distance() #izračuna povprečno razdaljo med vozlišči
    return(s)
```

Sedaj bi radi vključili bližnjico v `graph`, ki bi minimizirala povprečno razdaljo med vozlišči. Za vhod vzamemo graf, za izhod pa dobimo trojico, v katerem sta prva dva člena vozlišči, med katerima poteka bližnjica, tretji člen pa nam da minimalno povprečno razdaljo med vozlišči.

```
def bliznjica(graph):
    m = (0,0,99999999999999)
    povezave = [] #seznam preverjenih povezav
    k = list(graph.keys()) #seznam vozlišč
    for i in range(0,len(k)):
        for j in range(0,len(k)):
            #če povezave še ni in sta različni točki
            if k[j] not in graph.get(k[i]) and k[j] != k[i]:
                if (k[i],k[j]) not in povezave:
                    #dodamo nove povezave, graf neusmerjen
                    graph[k[i]].append(k[j])
                    graph[k[j]].append(k[i])
                    dol = dolzine(graph)  #izračunamo nove razdalje
                    graph[k[i]].remove(k[j])   #izbrišemo bližnjico
                    graph[k[j]].remove(k[i])
                    #dodamo bližnjico med že preverjene
                    povezave.append((k[i],k[j]))
                    povezave.append((k[j],k[i]))

                    if dol < m[2]:   #preverimo če je nova bližnjica boljša
                        m = (k[j],k[i], dol)
    return(m)
```

Poglejmo, kako je če dodamo 2 bližnjici v drevo. Najprej poiščemo prvo bližnjico z že napisanim programom `bliznjica`, jo dodamo v drevo in nato z istim postopkom poiščemo še drugo bližnjico na novem grafu. Koda nam vrne peterico: prva dva člena sta vozlišči, med katerima poteka prva bližnjica, druga dva vozlišči med katerima poteka druga bližnjica ter peti člen minimalna povprečna razdalja med vozlišči.

```
def dve_bliznjici1(graph, prva_bliznjica):
    k = list(graph.keys())
    najboljsi_bliznjici = (0,0,0,0,0)
    prva = prva_bliznjica           #Prvo bližnjico že poznamo
    graph[prva[0]].append(prva[1])    #Dodamo v drevo
    graph[prva[1]].append(prva[0])
    druga = bliznjica(graph)          #Poiščemo drugo bližnjico
    najboljsi_bliznjici = (prva[0],prva[1],druga[0],druga[1],druga[2])
    graph[prva[0]].remove(prva[1])   #Izbrišemo bližnjico iz grafa
    graph[prva[1]].remove(prva[0])
    return(najboljsi_bliznjici)
```

Naslednja funkcija je sestavljena na podoben način kot za eno bližnjico. Preveri vse možne povezave, hkrati pa preverja, če je to povezavo že pregledala. Z zgornjo funkcijo se razlikuje v tem, da zgornja funkcija že predpostavi, da poznamo prvo najboljšo bližnjico, tukaj pa na novo izračunamo 2 najboljši bližnjici.

```
def dve_bliznjici2(graph):
    m2 = (0,0,0,0,99999999999999)
    preverjene = []
    g = []
```

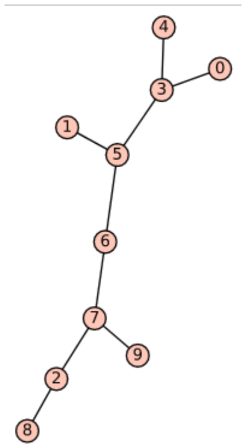
```
    k = list(graph.keys())
    for i in range(0, len(k)):
        for j in range(0,len(k)):
            for s in range(0, len(k)):
                for l in range(0,len(k)):
                    if k[s] not in graph.get(k[i]):
                        if k[l] not in graph.get(k[j]):
                            if k[i] != k[s] :
                                if k[j] != k[l]:
                                    if k[i] != k[j]:
                                        if (k[i],k[s]) != (k[j],k[l]):
                                            if (k[s],k[i]) != (k[l],k[j]) and
(k[s],k[i]) != (k[j],k[l]) and(k[i],k[s]) != (k[l],k[j]):
# (zamaknjeno samo zaradi lažjega prikaza)
                                                if (k[i], k[s],k[j],k[l]) not in preverjene:
                                                    graph[k[i]].append(k[s])
                                                    graph[k[j]].append(k[l])
                                                    graph[k[s]].append(k[i])
                                                    graph[k[l]].append(k[j])
                                                    dol = dolzine(graph)
                                                    graph[k[i]].remove(k[s])
                                                    graph[k[j]].remove(k[l])
                                                    graph[k[s]].remove(k[i])
                                                    graph[k[l]].remove(k[j])
                                                    preverjene.append((k[i],k[s],k[j],k[l]))
                                                    preverjene.append((k[s],k[i],k[j],k[l]))
                                                    preverjene.append((k[i],k[s],k[l],k[j]))
                                                    preverjene.append((k[s],k[i],k[l],k[j]))
                                                    if dol < m2[4]:
                                                        m2 = (k[i],k[s],k[j],k[l],dol)
                                                    g.append((k[i], k[s],k[j],k[l]))
    return(m2)
```

6 Primeri naključnih dreves

Uporabimo kodo v Sage-u:

```
drevo =graphs.RandomTree(10)
drevo.show()
drevo.to_dictionary()
```

Vrne nam drevo:$\{0:[3], 1:[5], 2:[7,8], 3:[0,4,5], 4:[3],$
$5:[1,3,6], 6:[5,7], 7:[2,6,9], 8:[2], 9:[7]\}$



Slika 1: Naključno drevo na 10 vozliščih.

Povprečna razdalja med vozlišči je 3.444, najboljša bližnjica, ki minimizira povprečno razdaljo med vozlišči je med 7 in 0, povprečna razdalja med vozlišči je tedaj 2.0. Če vključimo še eno bližnjico in sicer med 1 in 0, dobimo povprečno razdaljo med vozlišči 1.778.

Poskusimo sedaj na malo večjih drevesih in podatke zapišimo v tabelo:

Naključna drevesa			
Število vozlišč	Povprečna razdalja med vozlišči	Povp. razd. med vozlišči, če vključimo 1 bližnjico	Povp. razd. med vozlišči, če vključimo 2 bližnjici
10	2.711	2.311	2.089
30	6.609	4.676	4.156
50	8.286	5.757	5.295
70	10.248	7.274	6.216
100	11.223	8.905	7.420

7 Časovna zahtevnost

Opazimo, da koda pri drevesih s 100 vozlišči dela že kar počasi, saj mora preveriti vse povezave. Poglejmo časovno zahtevnost algoritma. Funkcija sprejme argumente n, m in `stevilo_bliznjic`. n je število vozlišč, m pa število ponovitev. Če je `stevilo_bliznjic` enako 1, funkcija uporabi funkcijo `bliznjica()`, če 2 `dve_bliznjici1()` in 3 `dve_bliznjici2()`. Funkcija vrne potreben čas.

```
def casovna_zahtevnost(n,m,stevilo_bliznjic):
    import time
    funkcija = [bliznjica, dve_bliznjici1, dve_bliznjici2][stevilo_bliznjic-1]
    start = time.time()
    for i in xrange(m):
        if funkcija == dve_bliznjici1:
            drevo=graphs.RandomTree(n).to_dictionary()
            funkcija(drevo,bliznjica(drevo))
        else:
```

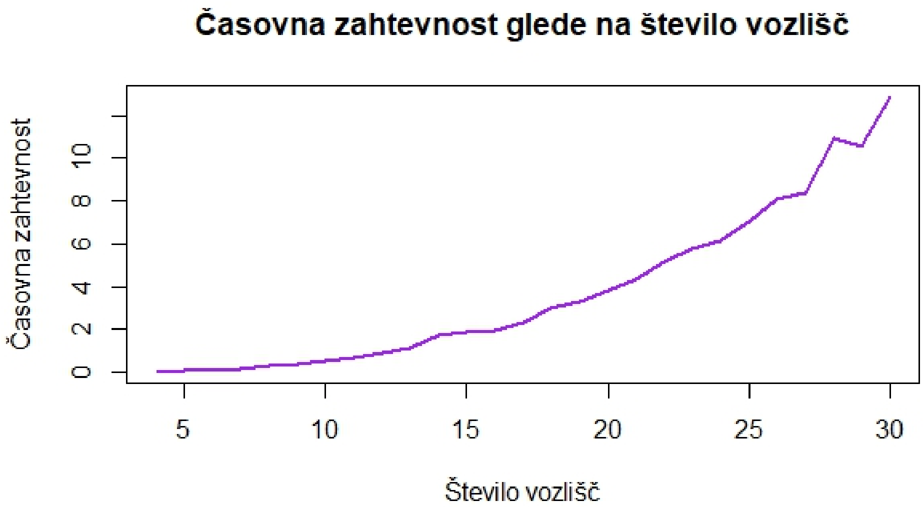
```
        funkcija(graphs.RandomTree(n).to_dictionary())
    konec = time.time()
    return(konec-start)
```

Poglejmo nekaj primerov za lažjo predstavo:

```
casovna_zahtevnost(200,1,1)       57.819862842559814
casovna_zahtevnost(10,100,2)      0.9815769195556641
casovna_zahtevnost(10,100,3)      52.104007959365845
casovna_zahtevnost(20,100,1)      3.494917869567871
casovna_zahtevnost(120,130,1)     1285.5924899578094
```

Časovna zahtevnost glede na število vozlišč:

```
casovna_vozlisca = []
for i in range(4,31):
    # drevesa z od 4 do 30 vozlišči, ponovimo 100x, 1 bližnjica
    casovna_vozlisca.append(casovna_zahtevnost(i,100,1))
casovna_vozlisca
```



Graf 1: Časovna zahtevnost algoritma glede na število vozlišč .

8 Ugotovitve

Koliko se povprečna razdalja med vozlišči zmanjša, ko vključimo v drevo najboljšo bližnjico?

Pogledamo, za koliko se spremeni povprečna razdalja. Funkcija `razlika_razdalj` sprejme argumenta n, m ter `stevilo_bliznjic`. Označimo n kot število vozlišč drevesa, m število ponovitev in `stevilo_bliznjic` (1 ali 2) število bližnjic, ki jih dodamo v graf. Vrne par, kjer prvo število predstavlja povprečno razdaljo v drevesu brez bližnjice in drugo v drevesu z bližnjico.

```
def razlika_razdalj(n,m, stevilo_bliznjic):
    i = 0
    seznam_razdalj_dve = []
    seznam_razdalj = []
    seznam_razdalj_bliznjica = []
    if stevilo_bliznjic == 1:
        while i < m:
            drevo1 = graphs.RandomTree(n).to_dictionary()
            seznam_razdalj.append(dolzine(drevo1))
            seznam_razdalj_bliznjica.append(bliznjica(drevo1)[2])
            i += 1
        return((sum(seznam_razdalj)/m,sum(seznam_razdalj_bliznjica)/m))
    if stevilo_bliznjic == 2:
        while i < m:
            drevo1 = graphs.RandomTree(n).to_dictionary()
            seznam_razdalj.append(dolzine(drevo1))
            prva_bliznjica = bliznjica(drevo1)
            seznam_razdalj_bliznjica.append(prva_bliznjica[2])
            seznam_razdalj_dve.append(dve_bliznjici1(drevo1,prva_bliznjica)[4])
            i += 1
        return((sum(seznam_razdalj)/m,sum(seznam_razdalj_dve)/m))
    else:
        return("Funkcija kot stevilo_bliznjic sprejema števila 1 ali 2")
```

Razlika razdalj, če imamo 10 vozlišč z 1 bližnjico, postopek pa ponovimo 100-krat: (3.099, 1.989) (prva številka pove, kolikšna je povprečna razdalja v drevesu, druga pa kolikšna je povprečna razdalja, če vključimo najboljšo bližnjico).
Imamo 30 vozlišč, postopek ponovimo 70x, vključimo 1 bližnjico:

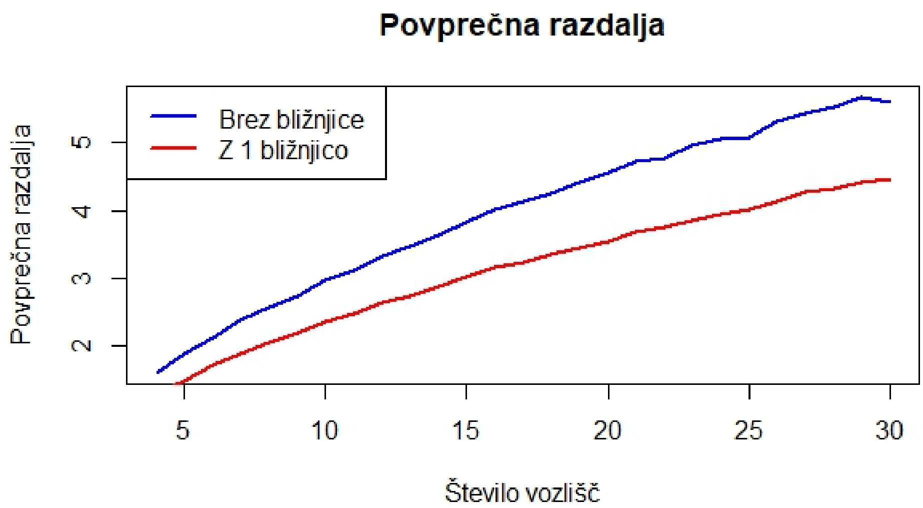
```
razlika_razdalj(30,70,1),
```

vrne nam recimo (5.720, 3.471). Če imamo 15 vozlišč, postopek ponovimo 50x, vključimo 2 bližnjici: (3.587, 1.984).

Spreminjanje razdalje glede na število vozlišč. Gledamo, za koliko se spremeni povprečna razdalja v drevesu z od 4 do 30 vozlišči na 100 ponovitev, če dodajamo eno bližnjico:

```
razdalje_vozlisca = []
for i in range(4,31):
    m = razlika_razdalj(i,100,1)
    razdalje_vozlisca.append(m)
razdalje_vozlisca
```

Poskusimo narisati v programu R:



Graf 2: Povprečna razdalja med vozlišči ter povprečna razdalja med vozlišči, če vključimo eno bližnjico.

Ugotovila sva, da čas, ki ga porabimo za iskanje bližnjice v drevesu eksponentno raste s številom vozlišč, kar je tudi pričakovan rezultat. Pričakovano je tudi, da več kot je ponovitev, daljši je čas izvajanja algoritma, prav tako traja dlje, če namesto ene bližnjice iščemo dve.
Opazila sva tudi, da se povprečna razdalja med vozlišči, ko vključimo eno bližnjico, zmanjša in sicer razlika med povprečno razdaljo med vozlišči v drevesu in povprečno razdaljo z eno bližnjico je večja, ko večamo število vozlišč.
Ko gledamo, koliko v odstotkih je ta sprememba, ugotovimo, da je okoli 80%, torej, ko dodamo bližnjico, se v povprečju zmanjša povprečna razdalja med vozlišči za okoli 80%.
Naš primer (razlika v %):

82.55934	79.53340	80.27466	78.90967	79.62269	80.00404	79.67778
79.52475	79.39057	78.85268	79.16993	79.14651	78.53694	78.42466
78.72314	78.21699	77.77059	78.25767	78.97192	77.59482	78.14983
79.05210	77.54679	78.61552	78.03397	78.08158	80.03028	