Курсовой проект

Прямой быстрый метод решения СЛАУ анизотропного уравнения диффузии

Преподаватель Н.Б. Явич

Группа Б01-813б Ефимов С.Е.

I. Постановка задачи

Рассмотрим анизотропное уравнение диффузии, дополненное условием Дирихле, в единичном квадрате,

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,y) - 3\frac{\partial^2}{\partial y^2}u(x,y) + u(x,y) = f(x,y), \text{ в } V = (0,1)$$

$$u(x,y) = 0 \text{ на } \Gamma.$$

Требуется численно решить эллиптическое уравнение на равномерной сетке $n \times n$ с шагом h. После аппроксимации методом конечных разностей второго порядка возникает система линейных алгебраических уравнений:

$$Au_h = f_h,$$

имеющая размерность $N = (n - 1)^2$.Для решения данного заданной СЛАУ можно использовать множество способов с различными арифметическими сложностями:

Метод	Оценка сложности
м. Гаусса	$O(N^3)$
м. матричной прогонки	$O(N^{2.5})$
м. Якоби и Зейделя	$O(N^2 log\frac{1}{\varepsilon})$
ПВР и ADI	$O(N^{\frac{3}{2}} log\frac{1}{\varepsilon})$
ДБСП	$O(NlogN)$
Оценка снизу	$O(N)$

В данной работе требуется рассмотреть ДБСП (двойное быстрое синус-преобразование) с арифметической сложностью $O(NlogN)$.

Дополнительные задачи:

- Решить уравнения аналитически с простой функции $f(x,y)$;
- Исследовать точность аппроксимации в зависимости от сетки на задаче с известным решением $u(x,y)$;
- Сравнить время работы этого метода с временем работы метода Якоби на различных сетках;
- Провести дополнительное исследование на ином решении.

В работе используется пакет прикладных программ для решения технических задач Matlab.

II. Аналитическое решение

Для простоты рассмотрим $f(x,y) = 3sin(x\pi)$. Тогда наше уравнение примет вид:

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,y) - 3\frac{\partial^2}{\partial y^2}u(x,y) + u(x,y) = 3sin(x\pi), \text{ в } V = (0, 1)$$

$$u(x,y) = 0 \text{ на } \Gamma.$$

1. Воспользуемся методом Фурье, то есть представим решение в виде:

$$u(x,y) = \sum_{k}^{\infty} f_k(y) g_k(x),$$

где $\{g_k(x)\}$- система базисных функций такая, что:

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2}g_k(x) = \lambda_k^2 g_k(x),\ g_k(0) = 0,\ g_k(1) = 0,\ g_k(x) \not\equiv 0,\ 0 \le x \le 1.$$

a) $\lambda_k = 0$:

Тогда решением будет $g_k(x) \equiv 0$, что не согласуется с нашими требованиями.

b) $\lambda_k \neq 0$:

Тогда решением будет $g_k(x) \equiv sin(\lambda_k x)$, где $\lambda_k = \pi k,\ k \in N$.

2. Теперь требуется разложить краевые условия и правую часть уравнения по базисным функциям. Краевые условия имеют очевидное разложение, остается только правая часть уравнения.

$$sin(x\pi) = 3\sum_{k=1}^{\infty} a_k g_k(x), \text{где } a_k = 1 \text{ при } k = 1 \ \&\ a_k = 0 \text{ при } k \neq 1.$$

3. Подставим $u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(y) g_k(x)$ & $sin(x\pi) = 3\sum_{k=1}^{\infty} a_k g_k(x)$в заданное уравнение и граничные условия, тогда получим:

$$-\sum_{k=1}^{\infty} f_k(y) g_k''(x) - 3\sum_{k=1}^{\infty} f_k''(y) g_k(x) + \sum_{k=1}^{\infty} f_k(y) g_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k g_k(x)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(0) g_k(x) = 0 \ \&\ \sum_{k=1}^{\infty} f_k(1) g_k(x) = 0.$$

В связи с тем, что$\{g_k(x)\}$- система базисных функций, можно рассматривать отдельно уравнения для каждого k:

$$\lambda_k^2 f_k(y) - 3f_k''(y) + f_k(y) = 3a_k,\ f_k(0) = 0 \ \&\ f_k(1) = 0.$$

Требуется рассмотреть 2 случая:

a) $k = 1$:

$$f_1(y) = C_1 sh\left\{y\left(\frac{\pi^2+1}{3}\right)^{1/2}\right\} - C_2 ch\left\{y\left(\frac{\pi^2+1}{3}\right)^{1/2}\right\} + \frac{3}{\pi^2+1}$$

$$C_1 = -\frac{3}{\pi^2+1},\ C_2 = \left[\frac{3}{\pi^2+1} ch\left\{\left(\frac{\pi^2+1}{3}\right)^{1/2}\right\} - \frac{3}{\pi^2+1}\right] / sh^{-1}\left\{\left(\frac{\pi^2+1}{3}\right)^{1/2}\right\}$$

b) $k \neq 1$:

$$f_k(y) = 0$$

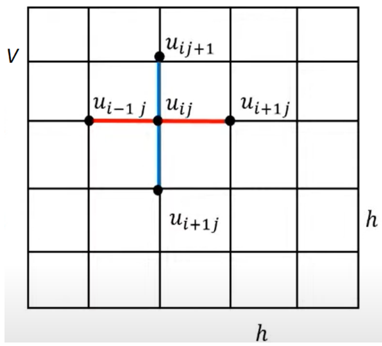
4. Общее решение представляет собой следующее:

$$u(x, y) = \left(C_1 sh\left\{y\left(\frac{\pi^2+1}{3}\right)^{1/2}\right\} - C_2 ch\left\{y\left(\frac{\pi^2+1}{3}\right)^{1/2}\right\} + \frac{3}{\pi^2+1}\right) sin(\pi x).$$

Зная точное решение, можно приступить к численному решению и сравнению.

III. Аппроксимация

Рассмотрим разбиение области равномерной сеткой $n \times n$ с шагом h.



Используя аппроксимацию для частных производных по x:

$$-u_{xx}(x, y)|_{(x_i, y_j)} = \frac{-u_{i-1j} + 2u_{ij} - u_{i+1j}}{h^2} + O(h^2)$$

и аналогичную по y, после простых преобразований получим:

$$-u_{i-1j} - u_{i+1j} + (8 + h^2)u_{ij} - 3u_{ij-1} - 3u_{ij+1} = h^2 f_{ij}$$

с условиями Дирихле на границе:

$$u_{ij} = 0$$

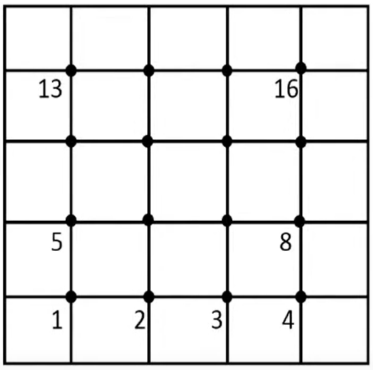
Для невязки заданной аппроксимации имеем:

$$r_{ij} = \frac{-u_{i-1j}+2u_{ij}-u_{i+1j}}{h^2} + \frac{-u_{ij-1}+2u_{ij}-u_{ij+1}}{h^2} - f_{ij} + O(h^2) =$$

$$=- u_{xx}(x, y)|_{(x_i, y_j)} +- u_{yy}(x, y)|_{(x_i, y_j)} - f_{ij} + O(h^2) \ = \ O(h^2)$$

Число неизвестных совпадает с числом полученных уравнений. Получили СЛАУ с квадратной матрицей.

Используя лексикографическую нумерацию узлов:



получаем следующую запись:

$$Au_h = h^2 f_h,$$

где $u_h = (u_{11}u_{12}... u_{1n}u_{21}... u_{nn})$ & $f_h = (f_{11}f_{12}... f_{1n}f_{21}... f_{nn})$. А матрица Aимеет вид:

$8 + h^2$	-1			-3											
-1	$8 + h^2$	-1			-3										
	-1	$8 + h^2$	-1			-3									
		-1	$8 + h^2$				-3								
-3				$8 + h^2$	-1			-3							
	-3			-1	$8 + h^2$	-1			-3						
		-3			-1	$8 + h^2$	-1			-3					
			-3			-1	$8 + h^2$				-3				
				-3			-1	$8 + h^2$	-1			-3			
					-3			-1	$8 + h^2$	-1			-3		
						-3			-1	$8 + h^2$	-1			-3	
							-3			-1	$8 + h^2$				-3
								-3				$8 + h^2$	-1		
									-3			1	$8 + h^2$	-1	
										-3			-1	$8 + h^2$	-1
											-3			-1	$8 + h^2$

Данную систему предлагается решить, используя метод, основанный на двойном быстром синус-преобразовании с арифметической сложностью $O(NlogN)$.

IV. Двойное быстрое синус-преобразование

Идея метода заключается в следующем. Если бы у матрицы A было доступно спектральное разложение:

$$A = WDW^{-1}$$

то решение можно было бы вычислить так:

$$u_h = WD^{-1}W^{-1}h^2 f_h$$

Однако, вычислять спектральное разложение больших разреженных матриц непрактично. В тоже время, легко получить значения собственных чисел и собственных векторов матрицыA (сумма собственных значений конечно разностных операторов второй производной и самой функции):

$$\lambda_{km} = \frac{4}{h^2} sin^2\left(\frac{\pi kh}{2}\right) + \frac{12}{h^2} sin^2\left(\frac{\pi kh}{2}\right) + 1$$

$$w_{km,ij} = Csin(\pi ikh)sin(\pi jkh),$$

где k и m горизонтальные и вертикальные индексы узла сетки. Таким образом, матрицы W и D нам известны.

Введем следующие индексы:

$$i = (i_y - 1)(n - 1) + i_x \,\&\, j = (j_y - 1)(n - 1) + j_x$$

Рассмотрим умножение вектора f_h на W:

$$v_i = \sum_{j=1}^{N} W_{ij} p_j = C \sum_{j_y=1}^{n-1} sin(\pi i_y j_y h) \sum_{j_x=1}^{n-1} sin(\pi i_x j_x h) p_j$$

Легко заметить, что это умножение эквивалентно двумерному синус-преобразованию Фурье (ДСП). Эту операцию и обратную можно выполнить за $O(NlogN)$.

Таким образом приходим к следующему алгоритму:

1. Умножение на матрицу W^{-1}за $O(NlogN)$ (обратное $2D$ДСП);
2. Умножение на диагональную матрицу D^{-1}за $O(N)$;
3. Умножение на матрицу Wза $O(NlogN)$ (прямое $2D$ДСП).

И арифметическая сложность всего алгоритма $O(NlogN)$.

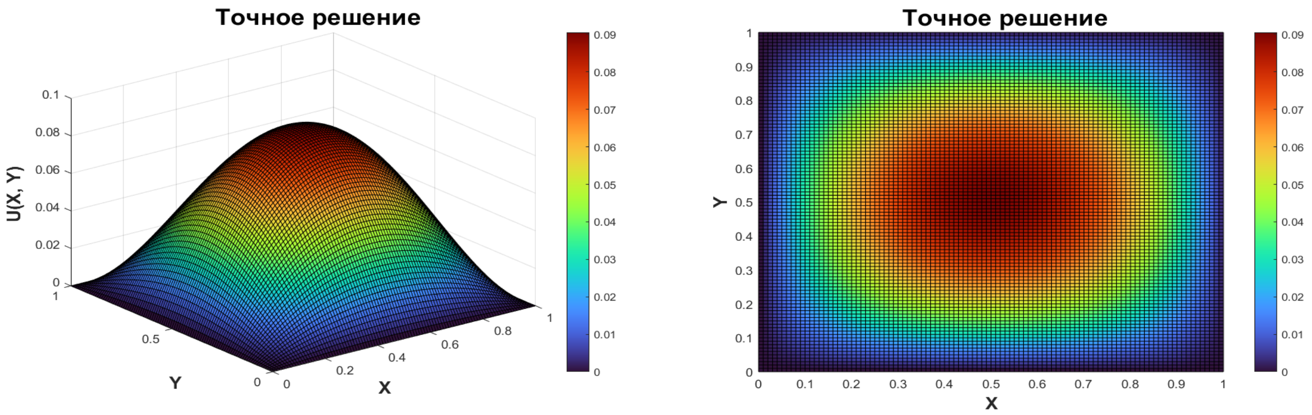
V. Процесс численного решения

Рассмотрим наше уравнение на сетке 100×100:

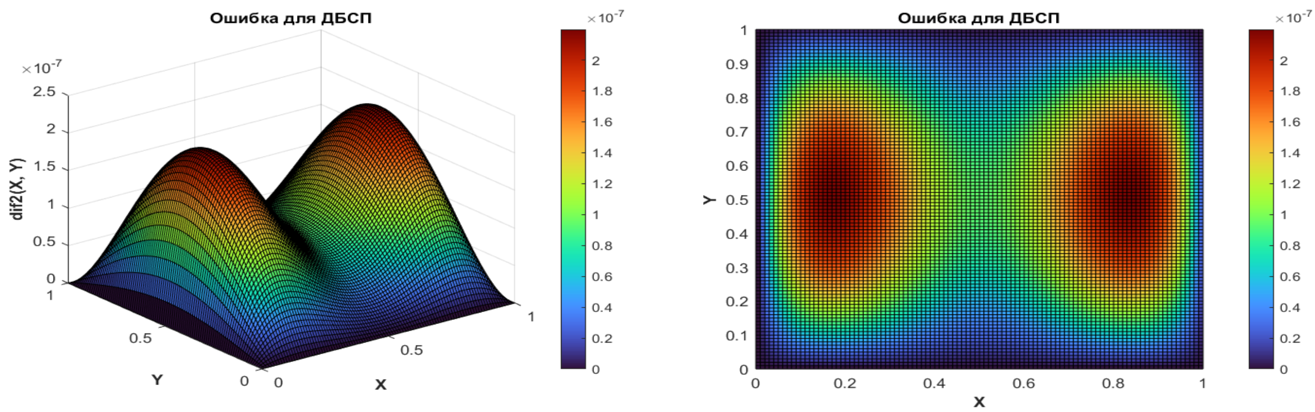
$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,y) - 3\frac{\partial^2}{\partial y^2}u(x,y) + u(x,y) = 3sin(x\pi), \text{ в } V = (0,1)$$

$$u(x,y) = 0 \text{ на } \Gamma.$$

- Для найденного точного решения имеем графики:

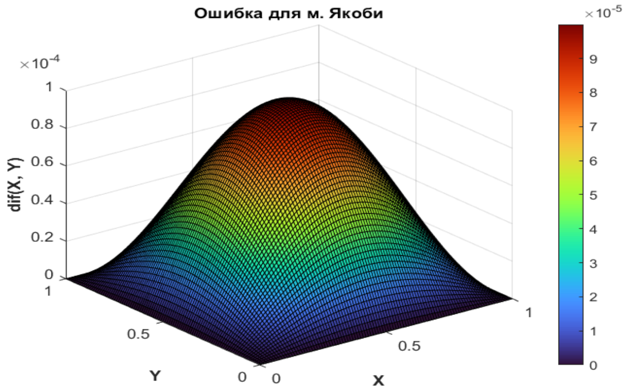


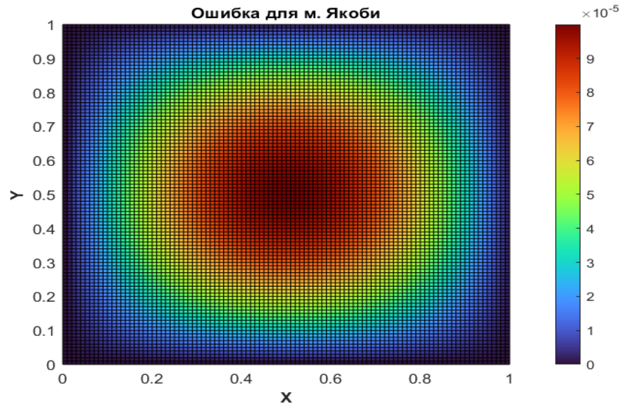
- Графики ошибки метода ДБСП (разница точного решения и численного):



Как видно из графиков разницы решений, ошибка не превосходит 10^{-6}.

- Графики ошибки метода Якоби (заданная точность $\varepsilon = 10^{-4}$):

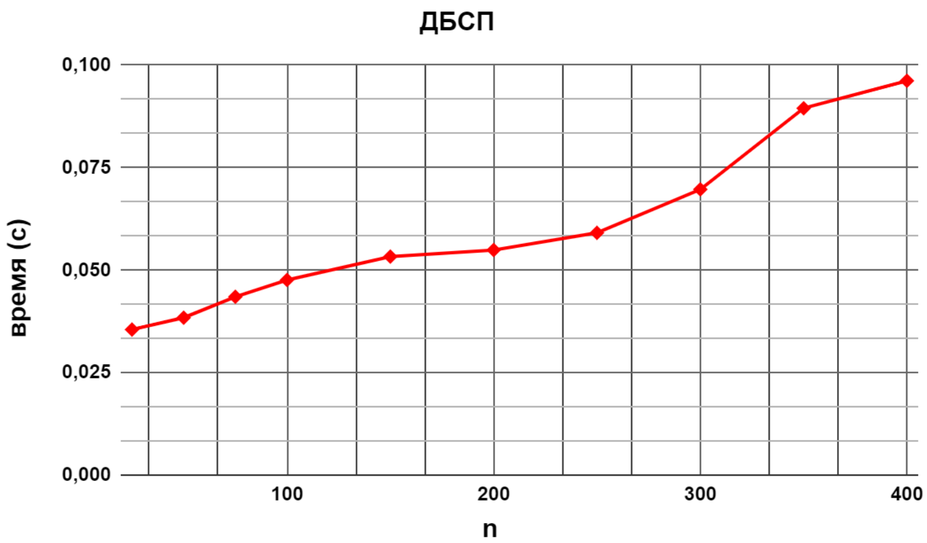


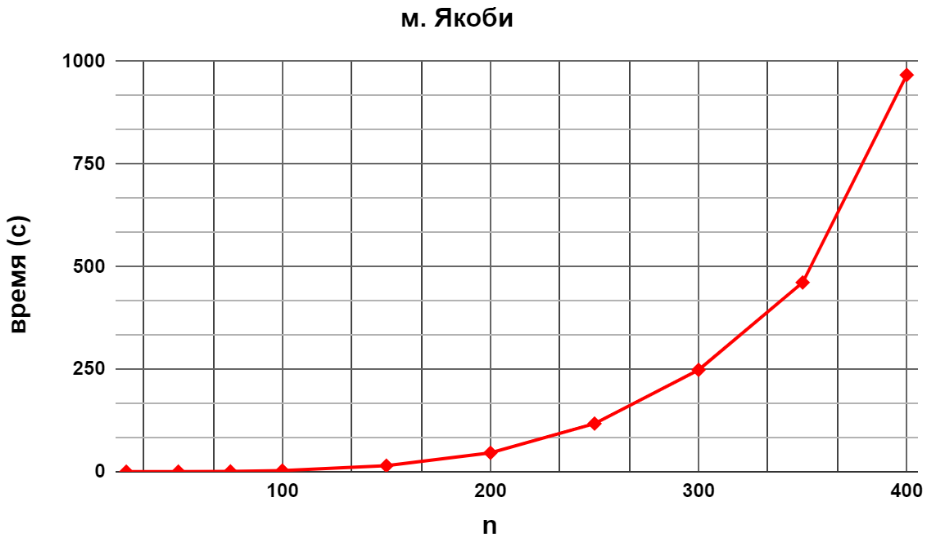


Перейдем к сравнению времени работы процессов при различных сетках.

Разбиение	ДБСП (с)	м. Якоби (с)	Итерации для м. Якоби
25	0,0355	0,214	502
50	0,0384	0,152	2699
75	0,0435	0,7035	6974
100	0,0476	2,8426	13538
150	0,0533	14,6606	34068
200	0,0549	46,1899	65115
250	0,0591	117,4406	107256
300	0,0697	248,3109	160935
350	0,0895	461,3953	226515
400	0,0962	967,3217	304303

Для наглядности построил графики зависимости времени выполнения алгоритма от разбиения сетки.





Следует отметить, что м. Якоби построен таким образом, что его невозможно распараллелить, поэтому подсчет его времени исполнения более точный нежели ДБСП, так как Matlab при расчетах самостоятельно пытается оптимизировать операции.

VI. Дополнительное исследование

Рассмотрим иное решение для анизотропного уравнения диффузии:

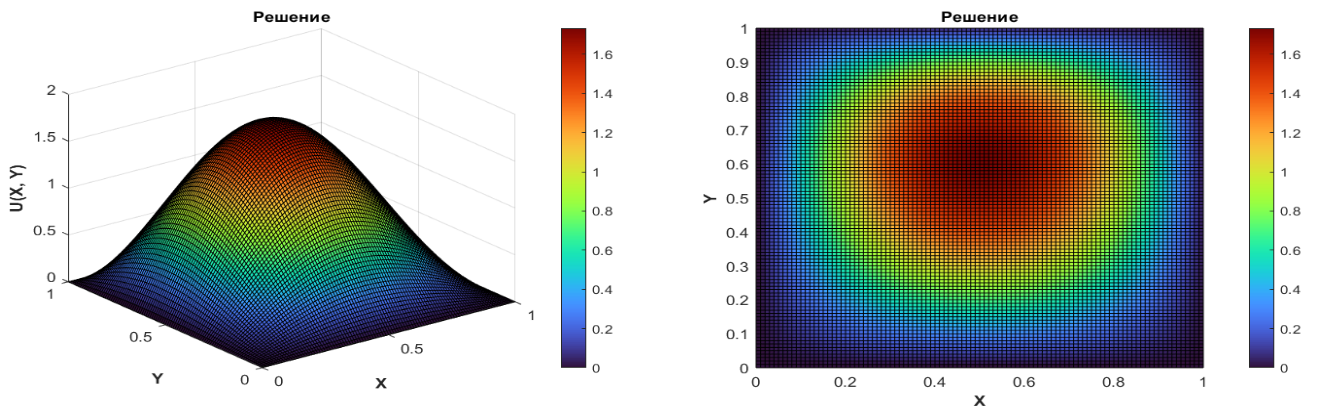
$$u(x, y) \ = \ sin(\pi x)sin(\pi y)e^{x}$$

Данное решение удовлетворяет условию Дирихле на границе. Построим правую часть $f(x, y)$прямой подстановкой решения. Тогда получим:

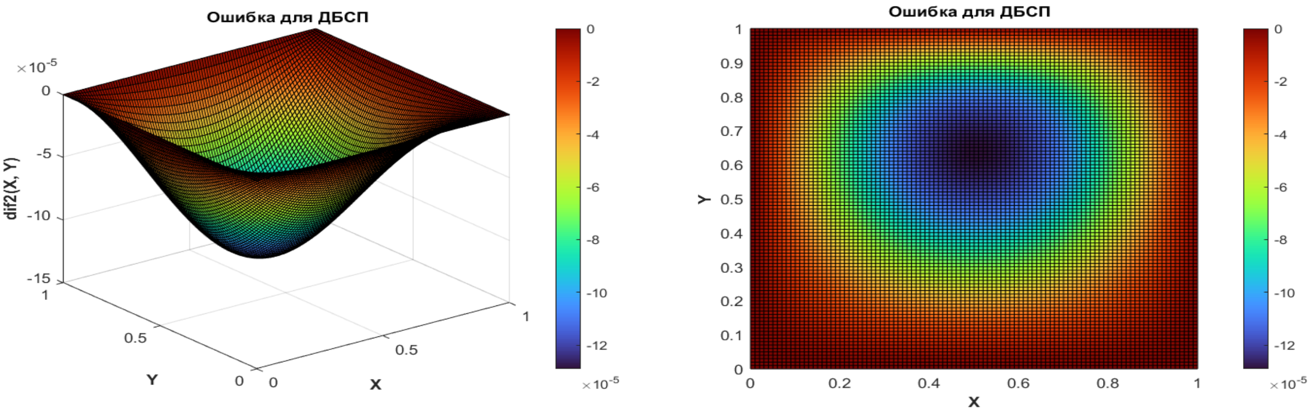
$$f(x, y) \ = \ 2\pi sin(\pi y)(2\pi sin(\pi x) \ - \ cos(\pi x))$$

Проведя численные расчеты на сетке 100×100, получим следующие графики:

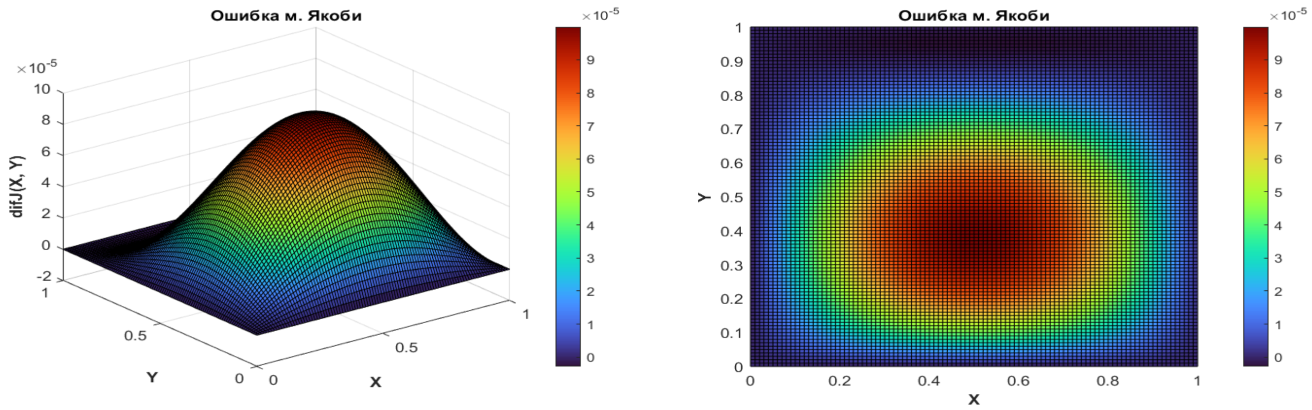
- Для решения имеем графики:



- Графики ошибки метода ДБСП (разница точного решения и численного):



- Графики ошибки метода Якоби (заданная точность $\varepsilon = 10^{-4}$):



Видим, что ошибка для ДБСП имеет порядок 10^{-4}, что согласуется с теорией.

VII. Выводы

В проделанной работе был рассмотрен метод решения эллиптического уравнения, основанный на основе двойного быстрого синус-преобразования и проведено сравнение с методом Якоби и сделаны следующие выводы:

- Зависимости $O(NlogN)$для ДБСП получено не было, потому что Matlab самостоятельно оптимизирует операции при численных расчетах;
- В случае метода Якоби, распараллеливание невозможно, поэтому арифметическая сложность отчетливо прослеживается;
- На сетках более 100×100разница во времени существенна для ДБСП и м. Якоби;
- Ошибка для ДБСП имеет порядок 10^{-4}

В приложении можно найти Live Script, в котором реализованы все алгоритмы для расчетов, использованные в данной работе (finalProject.mlx).