

Курсовой проект по вычислительной математике
Прямой быстрый метод решения СЛАУ анизотропного уравнения диффузии
Преподаватель Н.Б. Явич
Весна 2021

Рассмотрите анизотропное уравнение диффузии, дополненное условием Дирихле, в единичном квадрате,

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 3 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u = f \quad \text{в } (0,1)^2,$$
$$u = 0 \quad \text{на } \Gamma.$$

Система линейных алгебраических уравнений,

$$A u_h = f_h$$

возникающая после аппроксимации методом конечных разностей второго порядка на сетке $n \times n$ с шагом h имеет размерность $N = (n - 1)^2$. Реализуйте и протестируйте метод решения этой СЛАУ на основе **двойного быстрого синус-преобразования** с арифметической сложностью $O(N \log N)$.

- Исследуйте точность аппроксимации в зависимости от сетки на задаче с известным решением $u(x, y)$.
- Сравните время работы этого метода с другим методом, изучавшимся в этом курсе по своему усмотрению (м. Якоби, Зейделя или т.п.) на сетках размера 100×100 и более.

Идея метода состоит в следующем. Если бы у матрицы A было доступно спектральное разложение,

$$A = W D W^{-1}$$

то решение можно было бы вычислить так:

$$u_h = W D^{-1} W^{-1} f_h.$$

Однако, вычислять спектральное разложение больших разреженных матриц непрактично. В тоже время, легко получить значения собственных чисел и собственных векторов матрицы A ,

$$\lambda_{km} = \frac{4}{h^2} \sin\left(\frac{\pi k h}{2}\right)^2 + 3 \cdot \frac{4}{h^2} \sin\left(\frac{\pi m h}{2}\right)^2 + 1,$$
$$w_{km,ij} = C \sin(\pi i k h) \sin(\pi j m h),$$

где k и m горизонтальные и вертикальные индексы узла сетки (внимательно с индексами!). Таким образом, матрицы W и D нам известны.

Вместо умножения W и W^{-1} на вектор используйте алгоритм двойного быстрого синус-преобразования и обратного. Этот алгоритм следует взять из доступных библиотек или использовать алгоритм быстрого преобразования Фурье (FFT). В Matlab для этого есть встроенная функция; для C/C++ есть, например, библиотека FFTW3; в Python также есть множество готовых функций.

Ссылки

<https://www.youtube.com/watch?v=dIEQbYW3CGc>

<https://www.youtube.com/watch?v=zrjXDiCWvHg>