Курсовой проект

Прямой быстрый метод решения СЛАУ анизотропного уравнения диффузии

Преподаватель Н.Б. Явич

Группа Б01-813б Ефимов С.Е.

I. Постановка задачи

Рассмотрим анизотропное уравнение диффузии, дополненное условием Дирихле, в единичном квадрате,

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x, y) - 3\frac{\partial^2}{\partial y^2}u(x, y) + u(x, y) = f(x, y), \text{ в } V = (0, 1)$$

$$u(x, y) = 0 \text{ на } \Gamma.$$

Требуется численно решить данное уравнение на равномерной сетке $n \times n$ с шагом h. После аппроксимации методом конечных разностей второго порядка возникает система линейных алгебраических уравнений:

$$Au_h = f_h,$$

имеющая размерность $N = (n - 1)^2$.Для решения данного заданной СЛАУ можно использовать множество способов с различными арифметическими сложностями:

Метод	Оценка сложности
м. Гаусса	$O(N^3)$
м. матричной прогонки	$O(N^{2.5})$
м. Якоби и Зейделя	$O(N^2 log\frac{1}{\varepsilon})$
ПВР и ADI	$O(N^{\frac{3}{2}} log\frac{1}{\varepsilon})$
ДБСП	$O(NlogN)$
Оценка снизу	$O(N)$

В данной работе требуется рассмотреть ДБСП (двойное быстрое синус-преобразование) с арифметической сложностью $O(NlogN)$.

Дополнительные задачи:

- Решить уравнения аналитически с простой функции $f(x, y)$.
- Исследовать точность аппроксимации в зависимости от сетки на задаче с известным решением $u(x, y)$.
- Сравнить время работы этого метода с временем работы метода Якоби на сетках 100×100и большего размера.

В работе используется пакет прикладных программ для решения технических задач Matlab.

II. Аналитическое решение

Для простоты рассмотрим $f(x, y) = 3sin(x\pi)$. Тогда наше уравнение примет вид:

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,y) - 3\frac{\partial^2}{\partial y^2}u(x,y) + u(x,y) = 3sin(x\pi),\ \text{в}\ V = (0,1)$$

$$u(x,y) = 0\ \text{на}\ \Gamma.$$

1. Воспользуемся методом Фурье, то есть представим решение в виде:

$$u(x,y) = \sum_{k}^{\infty} f_k(y)g_k(x),$$

где $\{g_k(x)\}$- система базисных функций такая, что:

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2}g_k(x) = \lambda_k^2 g_k(x),\ g_k(0) = 0,\ g_k(1) = 0,\ g_k(x) \not\equiv 0,\ 0 \le x \le 1.$$

a) $\lambda_k = 0$:

Тогда решением будет $g_k(x) \equiv 0$, что не согласуется с нашими требованиями.

b) $\lambda_k \ne 0$:

Тогда решением будет $g_k(x) \equiv sin(\lambda_k x)$, где $\lambda_k = \pi k,\ k \in N$.

2. Теперь требуется разложить краевые условия и правую часть уравнения по базисным функциям. Краевые условия имеют очевидное разложение, остается только правая часть уравнения.

$$sin(x\pi) = 3\sum_{k=1}^{\infty} a_k g_k(x),\text{где}\ a_k = 1\ \text{при}\ k = 1\ \&\ a_k = 0\ \text{при}\ k \ne 1.$$

3. Подставим $u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(y)g_k(x)$ & $sin(x\pi) = 3\sum_{k=1}^{\infty} a_k g_k(x)$в заданное уравнение и граничные условия, тогда получим:

$$-\sum_{k=1}^{\infty} f_k(y)g_k''(x) - 3\sum_{k=1}^{\infty} f_k''(y)g_k(x) + \sum_{k=1}^{\infty} f_k(y)g_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k g_k(x)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(0)g_k(x) = 0\ \&\ \sum_{k=1}^{\infty} f_k(1)g_k(x) = 0.$$

В связи с тем, что$\{g_k(x)\}$- система базисных функций, можно рассматривать отдельно уравнения для каждого k:

$$\lambda_k^2 f_k(y) - 3f_k''(y) + f_k(y) = 3a_k,\ f_k(0) = 0\ \&\ f_k(1) = 0.$$

Требуется рассмотреть 2 случая:

a) $k = 1$:

$$f_1(y) = C_1 sh\left\{y\left(\frac{\pi^2+1}{3}\right)^{1/2}\right\} - C_2 ch\left\{y\left(\frac{\pi^2+1}{3}\right)^{1/2}\right\} + \frac{3}{\pi^2+1}$$

$$C_1 = -\frac{3}{\pi^2+1},\ C_2 = \left[\frac{3}{\pi^2+1} ch\left\{\left(\frac{\pi^2+1}{3}\right)^{1/2}\right\} - \frac{3}{\pi^2+1}\right] / sh^{-1}\left\{\left(\frac{\pi^2+1}{3}\right)^{1/2}\right\}$$

b) $k \neq 1$:

$$f_k(y) = 0$$

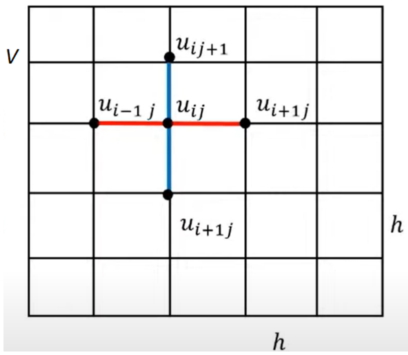
4. Общее решение представляет собой следующее:

$$u(x, y) = \left(C_1 sh\left\{y\left(\frac{\pi^2+1}{3}\right)^{1/2}\right\} - C_2 ch\left\{y\left(\frac{\pi^2+1}{3}\right)^{1/2}\right\} + \frac{3}{\pi^2+1}\right) sin(\pi x).$$

Зная точное решение, можно приступить к численному решению и сравнению.

III. Аппроксимация

Рассмотрим разбиение области равномерной сеткой $n \times n$ с шагом h.



Используя аппроксимацию для частных производных по x:

$$-u_{xx}(x, y)|_{(x_i, y_j)} = \frac{-u_{i-1j} + 2u_{ij} - u_{i+1j}}{h^2} + O(h^2)$$

и аналогичную по y, после простых преобразований получим:

$$-u_{i-1j} - u_{i+1j} + (8 + h^2)u_{ij} - 3u_{ij-1} - 3u_{ij+1} = h^2 f_{ij}$$

с условиями Дирихле на границе:

$$u_{ij} = 0$$

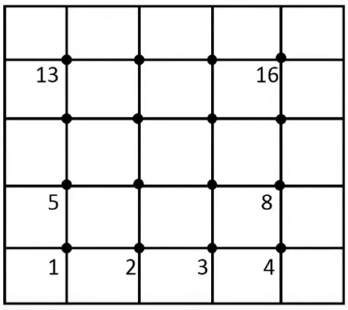
Для невязки заданной аппроксимации имеем:

$$r_{ij} = \frac{-u_{i-1j}+2u_{ij}-u_{i+1j}}{h^2} + \frac{-u_{ij-1}+2u_{ij}-u_{ij+1}}{h^2} - f_{ij} + O(h^2) =$$

$$=- u_{xx}(x, y)|_{(x_i, y_j)} +- u_{yy}(x, y)|_{(x_i, y_j)} - f_{ij} + O(h^2) = O(h^2)$$

Число неизвестных совпадает с числом полученных уравнений. Получили СЛАУ с квадратной матрицей.

Используя лексикографическую нумерацию узлов:



получаем следующую запись:

$$Au_h = h^2 f_h,$$

где $u_h = (u_{11}u_{12}... u_{1n}u_{21}... u_{nn})$ & $f_h = (f_{11}f_{12}... f_{1n}f_{21}... f_{nn})$. А матрица Aимеет вид:

$8+h^2$	-1			-3											
-1	$8+h^2$	-1			-3										
	-1	$8+h^2$	-1			-3									
		-1	$8+h^2$				-3								
-3				$8+h^2$	-1			-3							
	-3			-1	$8+h^2$	-1			-3						
		-3			-1	$8+h^2$	-1			-3					
			-3			-1	$8+h^2$				-3				
				-3			-1	$8+h^2$	-1			-3			
					-3			-1	$8+h^2$	-1			-3		
						-3			-1	$8+h^2$	-1			-3	
							-3			-1	$8+h^2$				-3
								-3				$8+h^2$	-1		
									-3			1	$8+h^2$	-1	
										-3			-1	$8+h^2$	-1
											-3			-1	$8+h^2$

Данную систему предлагается решить, используя метод, основанный на двойном быстром синус-преобразовании с арифметической сложностью $O(NlogN)$.

IV. Двойное быстрое синус-преобразование

Идея метода заключается в следующем. Если бы у матрицы A было доступно спектральное разложение:

$$A = WDW^{-1}$$

то решение можно было бы вычислить так:

$$u_h = WD^{-1}W^{-1}h^2 f_h$$

Однако, вычислять спектральное разложение больших разреженных матриц непрактично. В тоже время, легко получить значения собственных чисел и собственных векторов матрицыA (сумма собственных значений конечно разностных операторов второй производной и самой функции):

$$\lambda_{km} = \frac{4}{h^2}sin^2\left(\frac{\pi kh}{2}\right) + \frac{12}{h^2}sin^2\left(\frac{\pi kh}{2}\right) + 1$$

$$w_{km,ij} = Csin(\pi ikh)sin(\pi jkh),$$

где k и m горизонтальные и вертикальные индексы узла сетки. Таким образом, матрицы W и D нам известны.

Введем следующие индексы:

$$i = (i_y - 1)(n - 1) + i_x \,\&\, j = (j_y - 1)(n - 1) + j_x$$

Рассмотрим умножение вектора f_h на W:

$$v_i = \sum_{j=1}^{N} W_{ij}p_j = C\sum_{j_y=1}^{n-1} sin(\pi i_y j_y h)\sum_{j_x=1}^{n-1} sin(\pi i_x j_x h)p_j$$

Легко заметить, что это умножение эквивалентно двумерному синус-преобразованию Фурье (ДСП). Эту операцию и обратную можно выполнить за $O(NlogN)$.

Таким образом приходим к следующему алгоритму:

1. Умножение на матрицу W^{-1}за $O(NlogN)$ (обратное $2D$ДСП);
2. Умножение на диагональную матрицу D^{-1}за $O(N)$;
3. Умножение на матрицу Wза $O(NlogN)$ (прямое $2D$ДСП).

И арифметическая сложность всего алгоритма $O(NlogN)$.

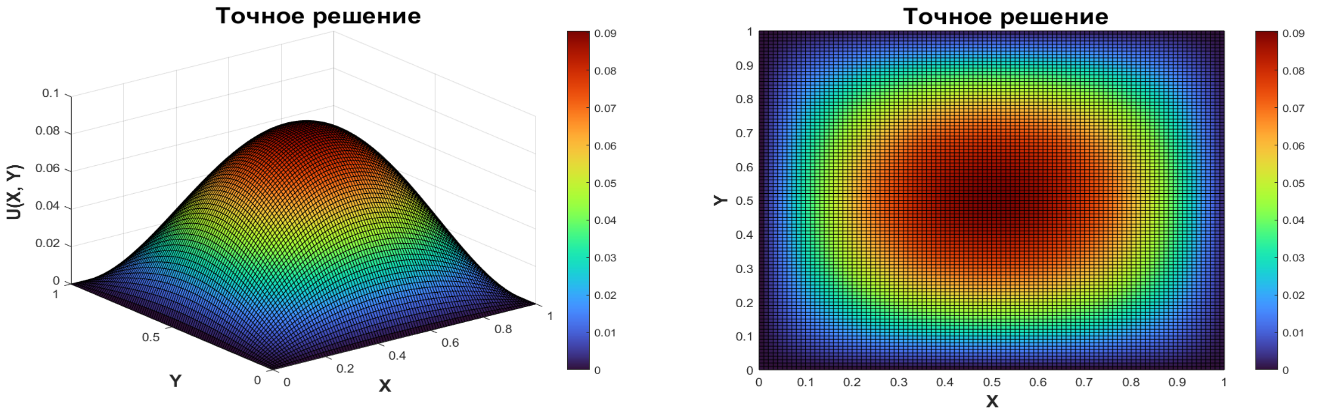
V. Процесс численного решения

Рассмотрим наше уравнение на сетке 100×100:

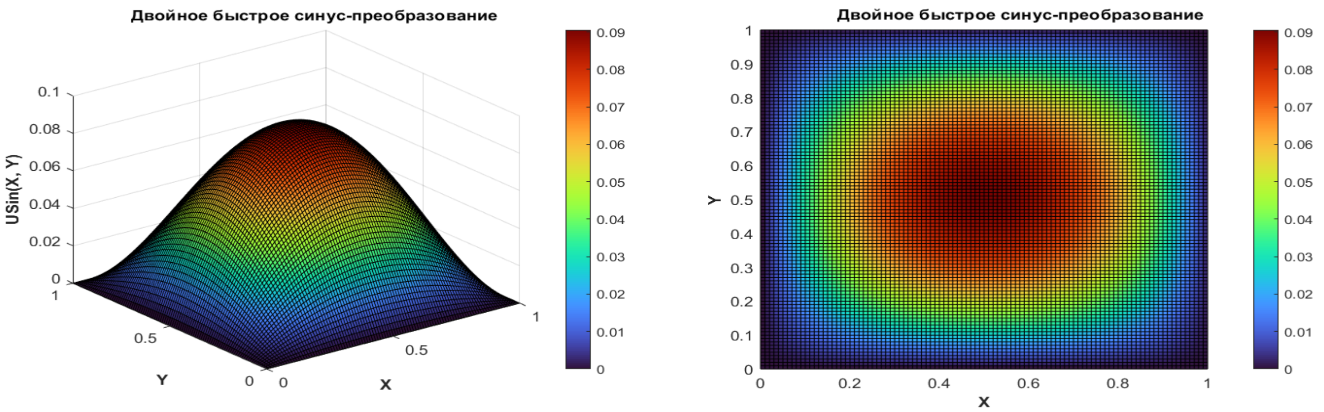
$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x, y) - 3\frac{\partial^2}{\partial y^2}u(x, y) + u(x, y) = 3sin(x\pi), \text{ в } V = (0, 1)$$

$$u(x, y) = 0 \text{ на } \Gamma.$$

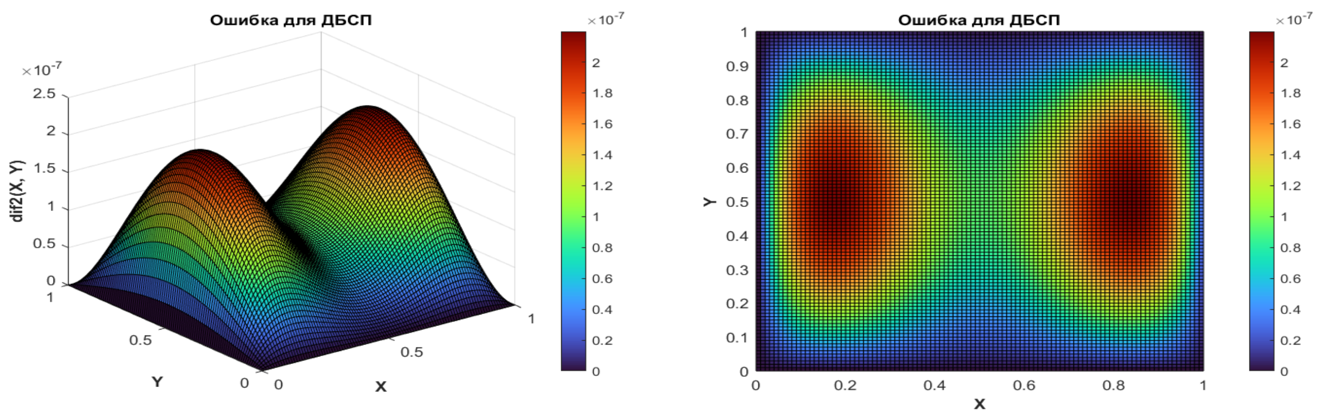
- Для найденного точного решения имеем графики:



- Графики для решения с помощью ДБСП:

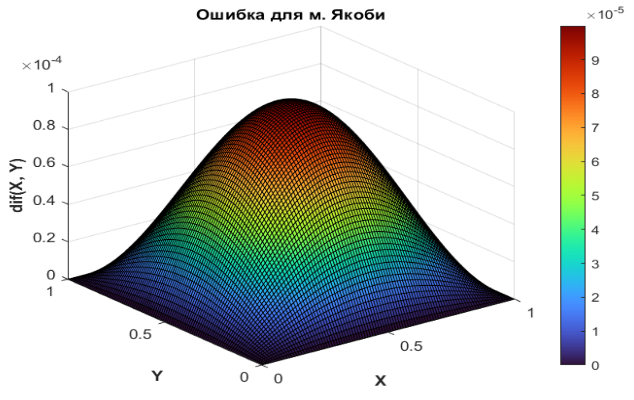


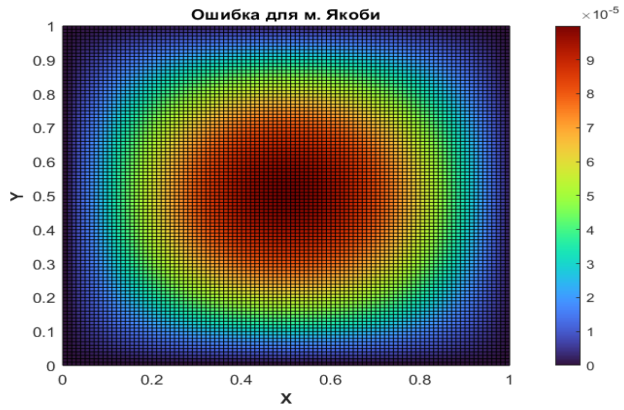
- Графики ошибки метода ДБСП (разница точного решения и численного):



Как видно из графиков разницы решений, ошибка не превосходит 10^{-6}.

- Графики ошибки метода Якоби (заданная точность $\varepsilon = 10^{-4}$):





Потребовалось 13568 итераций и довольно продолжительное время.